

# Numerička simulacija kompozitne kobilice

---

**Grabar, Igor**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2018**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:235:038293>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-03-15**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# **DIPLOMSKI RAD**

**Igor Grabar**

Zagreb, 2018.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# DIPLOMSKI RAD

Mentori:

Prof. dr. sc. Tomislav Jarak, dipl. ing.

Student:

Igor Grabar

Zagreb, 2018.

*Izjavljujem da sam ovaj rad izradio samostalno koristeći znanja stečena tijekom studija i navedenu literaturu.*

*Prije svega bih se želio zahvaliti mentoru prof.dr.sc. Tomislavu Jarku na pruženoj pomoći, uloženom trudu i vremenu, prenesenom znanju, korisnim savjetima, razumijevanju i strpljivosti prilikom izrade ovog rada.*

*Također zahvaljujem prof.dr.sc. Janošu Kodvanju i dr.sc. Martinu Surjaku na pomoći pri eksperimentalnom dijelu ovog rada.*

*Nadalje, zahvaljujem svojim prijateljima, kolegama i sustanarima Studentskog doma Stjepan Radić na podršci i nezaboravnom druženju.*

*Najveća zahvala pripada mojoj obitelji. Ponajprije bih želio zahvaliti iznenada preminuloj baki Štefaniji na materijalnoj podršci tokom studiranja, ali još više na svemu što me naučila. Bako, probat ću slijediti tvoj primjer. Nadalje, zahvaljujem mojim najvećim učiteljima, roditeljima Tihomiru i Zdenki. Hvala vam na materijalnoj podršci, nepokolebljivoj vjeri u mene te bezuvjetnoj podršci. Znam da Vam nikada ne mogu vratiti ono što ste mi dali, ali neka ova zahvala bude barem mali dio toga. Zadnja zahvala ide mojoj braći Luki i Petru. Hvala vam na svakom zajedničkom trenutku.*

Igor Grabar



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
**FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE**



Središnje povjerenstvo za završne i diplomske ispite  
Povjerenstvo za diplomske ispite studija strojarstva za smjerove:  
procesno-energetski, konstrukcijski, brodstrojarski i inženjersko modeliranje i računalne simulacije

Sveučilište u Zagrebu	
Fakultet strojarstva i brodogradnje	
Datum	17-01-2018. rilog
Klasa:	602-04/18-6/3
Ur. broj:	15-1703-18-7

## DIPLOMSKI ZADATAK

Student: **Igor Grabar** Mat. br.: 0035191465

Naslov rada na hrvatskom jeziku: **Numerička simulacija kompozitne kobilice**

Naslov rada na engleskom jeziku: **Numerical Simulation of Composite Keel**

Opis zadatka:

U diplomskom radu potrebno je provesti proračun čvrstoće i stabilnosti kobilice za malu jedrilicu pomoću metode konačnih elemenata. Oplata lista kobilica mora imati presjek idealnog hidrodinamičkog profila, a kobilica mora imati povoljan odnos nosivosti i težine. Zbog toga je odabrana izvedba kobilice od kompozitnog laminatnog materijala.

U radu je potrebno provesti kontrolni statički proračun čvrstoće i stabilnosti postojećeg konceptualnog rješenja te ispitati mogućnost poboljšanja omjera nosivosti i težine konstrukcije analiziranjem utjecaja koncentracije naprezanja i ukruta na nosivost. U proračunima materijalna svojstva kompozita procijeniti na temelju mikrostrukture slojeva u laminatu. U slučaju da tijekom izrade rada budu dostupni i rezultati eksperimentalnih mjerenja, potrebno je numeričke vrijednosti usporediti s eksperimentalnima te u slučaju značajnih odstupanja provesti potrebne izmjene na predloženoj izvedbi kobilice.

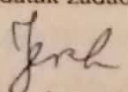
Sve proračune izvršiti numerički primjenom programskog paketa Abaqus®. Pri proračunu čvrstoće usporediti rezultate dobivene pomoću različitih kriterija popuštanja kompozitnih materijala dostupnih u programskom paketu Abaqus®. Provesti usporedbu rezultata dobivenih pomoću klasičnih i kontinuumskih ljuskastih elemenata (tzv. „solid-shell“) elemenata. Verifikaciju primijenjenih konačnih elemenata i tehnika modeliranja izvršiti na jednostavnijim problemima. Potrebne podatke i literaturu dostaviti će mentor.

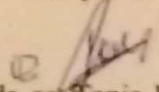
U radu je potrebno navesti korištenu literaturu i eventualno dobivenu pomoć.

Zadatak zadan:  
16. studenog 2017.

Datum predaje rada:  
18. siječnja 2018.

Predviđeni datum obrane:  
24., 25. i 26. siječnja 2018.

Zadatak zadao:  
  
Doc. dr. sc. Tomislav Jarak

Predsjednica Povjerenstva:  
  
Prof. dr. sc. Tanja Jurčević Lulić

## SADRŽAJ

SADRŽAJ .....	I
POPIS SLIKA .....	III
POPIS TABLICA.....	V
POPIS OZNAKA .....	VI
SAŽETAK.....	VIII
SUMMARY .....	IX
1. UVOD.....	1
1.1. Jedrilice .....	1
1.2. Kobilica broda.....	2
1.3. Kompozitni materijali .....	3
1.3.1. Vlakna .....	3
1.3.2. Matrice .....	4
1.3.3. Ugljična vlakna .....	4
1.3.4. Staklena vlakna .....	5
1.3.5. Epoksidna smola .....	5
1.4. Kompozitni laminati i njihova primjena .....	5
2. MEHANIKA KOMPOZITNIH MATERIJALA.....	7
2.1. Podjela materijala.....	7
2.2. Tenzor elastičnosti .....	8
2.3. Tenzor podatljivosti .....	10
2.4. Reducirana matrica elastičnosti .....	11
2.5. Koordinatni sustav i matrice transformacije .....	12
3. MIKROMEHANIKA .....	14
3.1. Mikromehanika jednosmjernih laminata .....	14
3.1.1. Jednoslojni laminati .....	14
3.1.2. Pravilo miješanja.....	15
3.1.3. Proračun mehaničkih svojstava materijala.....	17
3.1.3.1. Kompozit s matricom od epoksidne smole ojačan vlaknima od E-stakla ...	17
3.1.3.2. Kompozit s matricom od epoksidne smole ojačan ugljičnim vlaknima visoke krutosti (visok modul elastičnosti) - T50/1962.....	18
3.1.3.3. Kompozit s matricom od epoksidne smole ojačan ugljičnim vlaknima visoke čvrstoće (T300/5208).....	19
3.1.3.4. Usporedba teoretskih i tabličnih vrijednosti .....	20
4. MAKROMEHANIKA.....	21
4.1. Makromehanika kompozita.....	21
4.2. Kriteriji popuštanja .....	24
4.2.1. Tsai-Hill kriterij popuštanja .....	25
4.2.2. Tsai-Wu kriterij popuštanja .....	26
5. O METODI KONAČNIH ELEMENATA .....	27
5.1. Programski paket “Abaqus“ .....	27

5.2. Konačni elementi unutar “Abaqus“-a .....	28
5.2.1. Ljuskasti elementi .....	28
5.2.2. Kontinuumski ljuskasti elementi.....	31
SC8R 31	
6. VERIFIKACIJA .....	32
6.1. Verifikacijski zadatak .....	32
6.2. Pravokutna ploča savojno opterećena .....	34
6.2.1. Analitičko rješenje .....	34
6.2.2. Numeričko rješenje .....	36
6.2.2.1. Model diskretiziran ljuskastim elementima .....	36
6.2.2.2. Model diskretiziran kontinuumskim ljuskastim elementima.....	38
6.2.2.3. Usporedba rezultata dobivenih za savojno opterećenu ploču .....	41
6.3. Pravokutna ploča opterećena na izvijanje .....	45
6.3.1. Analitičko rješenje .....	45
Diferencijalna jednačba izvijanja laminata prema [6], [7], [8], [17] dana je izrazom: .....	45
6.3.2. Numeričko rješenje .....	46
6.3.2.1. Model diskretiziran ljuskastim elementima .....	46
6.3.2.2. Model diskretiziran kontinuumskim ljuskastim elementima.....	48
6.3.2.3. Usporedba rezultata dobivenih za ploču opterećenu na izvijanje.....	49
6.4. Odabir konačnih elemenata za proračun kobilice .....	50
7. PRORAČUN ČVRSTOĆE I STABILNOSTI KOBILICE.....	51
7.1. KOBILICA SA SVOJSTVIMA KOJA SU DOBIVENA MIKROMECHANIKOM..	51
7.1.1. Teorijsko određivanje svojstva čvrstoće jednoslojnih kompozita .....	51
7.1.2. Procijenjeni parametri materijala za proračun kobilice .....	57
7.1.3. Numerički proračun kobilice .....	59
7.2. KOBILICA SA EKSPERIMENTALNO DOBIVENIM SVOJSTVIMA.....	68
7.2.1. Ispitivanje kompozitnih epruveta od ugljičnih i staklenih vlakna i epoksidnom matricom .....	68
7.2.2. Numerički proračun kobilice uz dodavanje novih eksperimentalno dobivenih svojstava.....	73
7.3. KOBILICA SA PRIJELAZOM IZMEĐU LISTA I KLIZAČA .....	76
7.4. KOBILICA S UKRUTOM NA MJESTU GDJE SU POSTAVLJENI RUBNI UVJETI.....	79
7.5. KOBILICA SA UKRUTOM UNUTAR LISTA .....	82
8. ZAKLJUČAK.....	84
LITERATURA.....	86
PRILOZI.....	88

## POPIS SLIKA

Slika 1.1 Dijelovi jedrilice [20].....	1
Slika 1.2 Shema uvlačenja kobilice u kutiju [21].....	2
Slika 2.1 Oznake osi transverzalno izotropnog vlakna [3].....	7
Slika 2.2 Koordinatni sustavi korišteni u transformaciji tenzora elastičnosti [3] .....	12
Slika 3.1 Jednoslojni laminat ojačan vlaknima u jednom smjeru sa svojim materijalnim osima [2] .....	15
Slika 3.2 Prikaz dijelova kompozita.....	16
Slika 4.1 Unutarnje sile i momenti u kompozitu.....	23
Slika 4.2 Numeracija slojeva u višeslojnom kompozitu [3].....	23
Slika 5.1 Shematski prikaz rada programa za konačne elemente [10].....	28
Slika 5.2 S4R element s pripadnim čvorovima i stupnjevima slobode .....	29
Slika 5.3 S8R element s pripadnim čvorovima i stupnjevima slobode .....	29
Slika 5.4 S8R5 element s pripadnim čvorovima i stupnjevima slobode .....	30
Slika 5.5 SC8R element s pripadnim čvorovima i stupnjevima slobode .....	31
Slika 6.1 Slobodno oslonjena ploča savojno opterećena kontinuiranim opterećenjem .....	34
Slika 6.2 Karakteristike laminata: a) presjek laminata s debljinama slojeva, b) globalni i materijalni koordinatni sustav .....	34
Slika 6.3 Skica ploče s rubnim uvjetima za slobodno oslonjenu ploču za 2D elemente (lijevo) i prikaz rubnih uvjeta i opterećenja ploče (desno) .....	37
Slika 6.4 Diskretizacija ploče četverokutnim konačnim elementima: a) 1 KE, b) 4 KE, c) 9 KE, d) 25 KE, e) 100 KE, f) 625 KE.....	37
Slika 6.5 Raspodjela progiba (lijevo), odnosno ekvivalentnih naprezanja prema von Misesu (desno).....	38
Slika 6.6 Raspodjela naprezanja u smjeru osi $x$ (lijevo), odnosno naprezanja u smjeru osi $y$ (desno).....	38
Slika 6.7 Rubni uvjeti i opterećenja 3D modela ploče .....	39
Slika 6.8 Diskretizacija ploče ljuskastim kontinuumskim konačnim elementima SC8R: a) 1 KE, b) 4 KE, c) 9 KE, d) 25 KE, e) 100 KE, f) 625 KE .....	39
Slika 6.9 Raspodjela progiba (lijevo), odnosno ekvivalentnih naprezanja prema von Misesu (desno).....	40
Slika 6.10 Raspodjela naprezanja u smjeru osi $x$ (lijevo), odnosno naprezanja u smjeru osi $y$ (desno).....	40
Slika 6.11 Raspodjela naprezanja po debljini ploče (naprezanja u smjeru osi $x$ ) .....	41
Slika 6.12 Raspodjela naprezanja po debljini ploče (naprezanja u smjeru osi $y$ ) .....	41
Slika 6.13 Dijagram konvergencije progiba ploče u točki A .....	42
Slika 6.14 Dijagram konvergencije naprezanja ploče u smjeru osi $x$ (u točki A).....	44
Slika 6.15 Dijagram konvergencije naprezanja ploče u smjeru osi $y$ (u točki A).....	44
Slika 6.16 Slobodno oslonjena ploča opterećena na savijanje .....	45
Slika 6.17 Opterećenja i rubni uvjeti ljuskastog modela.....	47
Slika 6.18 Primjer diskretizacije ploče ljuskastim elementima S8R5 (2500 KE).....	47
Slika 6.19 Izgled prve forme gubitka stabilnosti i vrijednost kritične sile izvijanja [N/mm] ..	47
Slika 6.20 Opterećenja i rubni uvjeti kontinuumske ljuskastog modela.....	48
Slika 6.21 Primjer diskretizacije ploče kontinuumskim ljuskastim elementima SC8R (2500 KE) .....	49
Slika 6.22 Dijagram konvergencije kritične sile izvijanja .....	50



Slika 7.1	Mehanizmi popuštanja jednoslojnog laminata tlačno opterećenog u longitudinalnom smjeru [2]: a – ekstenzijsko mikroizvijanje, b – smično mikroizvijanje, c – popuštanje bez mikroizvijanja, d – longitudinalno popuštanje matrice uslijed Poissonovog efekta. ....	54
Slika 7.2	Model kobilice s dijelovima.....	59
Slika 7.3	Dimenzije i zone materijala kobilice .....	59
Slika 7.4	Laminat plan dizajniranja oplata kobilice .....	61
Slika 7.5	Laminat u području 1 (zona A) .....	61
Slika 7.6	Laminat u području 3, zona B (navedeni slojevi dodani slojevima u području 1). Slojevi 8 i 9 su dodani samo u prijelaznom području 2. ....	61
Slika 7.7	Laminat u području 5, zona C (navedeni slojevi dodani slojevima u području 3). Slojevi 8 i 9 su dodani samo u prijelaznom području 4. ....	62
Slika 7.8	Prikaz veza: a) između dijelova kobilice, b) između referentne točke i rubova lista kobilice .....	63
Slika 7.9	Opterećenje kobilice: a) sila i protusila na kobilici, b) modeliranje opterećenja kobilice .....	64
Slika 7.10	Rubni uvjeti modela kobilice .....	64
Slika 7.11	Diskretizirani model kobilice (28177 S4R elemenata) .....	65
Slika 7.12	Ekvivalentno naprezanje kobilice (prema von Misesu) .....	65
Slika 7.13	Raspodjela pomaka u kobilici .....	65
Slika 7.14	Raspodjela vrijednosti (kritična mjesta konstrukcije označena su crvenim kružnicama): a) Tsai-Hill kriterija popuštanja, b) Tsai-Wu kriterija popuštanja ....	66
Slika 7.15	Prva forma gubitka stabilnosti konstrukcije i njezina vrijednost.....	67
Slika 7.16	Izgled i karakteristike epruveta za ispitivanje (Tip A i B) [16] .....	69
Slika 7.17	Izgled epruveta: a) UD CFRP, b) UD GFRP, c) BIAx GFRP .....	70
Slika 7.18	Kidalica Messphysik Beta 50-5 .....	70
Slika 7.19	Izgleđi ispitanih epruveta, s lijeva na desno: UD CFRP (0°, 90°, 10°), UD GFRP (0°, 90°, 10°), BIAx GFRP (0°/90°, 45°/-45°).....	72
Slika 7.20	Raspodjela ekvivalentnih naprezanja kobilice prema von Misesu .....	73
Slika 7.21	Raspodjela progiba kobilice.....	73
Slika 7.22	Raspodjela vrijednosti (kritična mjesta konstrukcije su označena crvenim kružnicama): a) Tsai-Hill kriterija popuštanja, b) Tsai-Wu kriterija popuštanja ....	74
Slika 7.23	Prva forma gubitka stabilnosti konstrukcije i njezina vrijednost.....	75
Slika 7.24	Model kobilice bez (lijevo) i sa (desno) prijelazom .....	76
Slika 7.25	Raspodjela ekvivalentnih naprezanja prema von Misesu .....	77
Slika 7.26	Raspodjela progiba kobilice.....	77
Slika 7.27	Raspodjela vrijednosti (kritična mjesta konstrukcije su označena crvenim kružnicama): a) Tsai-Hill kriterija popuštanja, b) Tsai-Wu kriterija popuštanja ....	78
Slika 7.28	Ojačanje kritičnog djela kobilice: a) Izgled ukrute, b) Položaj ukrute u sklopu kobilice .....	79
Slika 7.29	Raspodjela ekvivalentnih naprezanja prema von Misesu .....	80
Slika 7.30	Raspodjela vrijednosti: a) Tsai-Hill kriterija popuštanja, b) Tsai-Wu kriterija popuštanja.....	80
Slika 7.31	Ukruta za povećanje stabilnosti konstrukcije: a) Izgled ukrute b) Položaj ukrute u sklopu kobilice .....	82

## POPIS TABLICA

Tablica 3.1 Svojstva konstituenata kompozita s matricom od epoksidne smole ojačanim ugljičnim vlaknima, podaci iz [1].....	17
Tablica 3.2 Usporedba podataka dobivenih mikromehanicom i tabličnih podataka iz [1] za kompozit s matricom od epoksidne smole ojačan ugljičnim vlaknima.....	18
Tablica 3.3 Svojstva konstituenata za kompozit s matricom od epoksidne smole ojačanim ugljičnim vlaknima visoke krutosti (visok modul elastičnosti) - T50/1962, uzeta iz [5] .....	18
Tablica 3.4 Usporedba podataka dobivenih mikromehanicom i tabličnih podataka iz [5] za kompozit s matricom od epoksidne smole ojačan ugljičnim vlaknima visoke krutosti (visok modul elastičnosti) - T50/1962 .....	18
Tablica 3.5 Svojstva konstituenata za kompozit s matricom od epoksidne smole ojačan ugljičnim vlaknima visoke čvrstoće – T300/5208, uzeta iz [5] .....	19
Tablica 3.6 Usporedba podataka dobivenih mikromehanicom i tabličnih podataka iz [5] za kompozit s matricom od epoksidne smole ojačan ugljičnim vlaknima visoke čvrstoće – T300/5208 .....	19
Tablica 6.1 Materijalna i geometrijska svojstva pravokutne ploče .....	33
Tablica 7.1 Svojstva konstituenata .....	57
Tablica 7.2 Teorijski procijenjena materijalna svojstva kompozitnih slojeva .....	58
Tablica 7.3 Teoretski procijenjeni parametri čvrstoće kompozitnih slojeva .....	58
Tablica 7.4 Svojstva osnovnih slojeva laminata kobilice .....	60
Tablica 7.5 Debljine dijelova oplate kobilice.....	62
Tablica 7.6 Ispitivane epruvete i njihova svojstva .....	69
Tablica 7.7 Materijalna svojstva kompozitnih slojeva (korigirana svojstva).....	71
Tablica 7.8 Svojstva čvrstoće kompozitnih slojeva (korigirana svojstva) .....	72
Tablica 7.9 Raspored, debljina i orijentacija slojeva kod ukrute .....	83

## POPIS OZNAKA

### *Latinične oznake*

Oznaka	Jedinica	Opis
<b>A</b>	-	Matrica istežne krutosti
<b>B</b>	-	Matrica spregnute krutosti
$C_{ijkl}$	-	Tenzor elastičnosti
<b>D</b>	-	Matrica savojne krutosti
$E_l$	MPa	Youngov modul elastičnosti kompozita u longitudinalnome smjeru
$E_t$	MPa	Youngov modul elastičnosti kompozita u transverzalnome smjeru
$E_{fl}$	MPa	Youngov modul elastičnosti vlakna u longitudinalnome smjeru (smjer paralelan smjeru pružanja vlakna)
$E_{ft}$	MPa	Youngov modul elastičnosti vlakna u transverzalnome smjeru (smjer okomit smjeru pružanja vlakna)
$E_m$	MPa	Youngov modul elastičnosti matrice
$f_{ft}$	MPa	Vlačna čvrstoća vlakna
$f_{mt}$	MPa	Vlačna čvrstoća matrice
$f_{mc}$	MPa	Tlačna čvrstoća matrice
$f_{fs}$	MPa	Smična čvrstoća vlakna
$f_{ms}$	MPa	Smična čvrstoća matrice
$f_{Lt}$	MPa	Longitudinalna vlačna čvrstoća jednoslojnog kompozita
$f_{Lc}$	MPa	Longitudinalna tlačna čvrstoća jednoslojnog kompozita
$f_{Tt}$	MPa	Transverzalna vlačna čvrstoća jednoslojnog kompozita
$f_{Tc}$	MPa	Transverzalna tlačna čvrstoća jednoslojnog kompozita
$f_{LTs}$	MPa	Smična ravninska čvrstoća jednoslojnog kompozita
$G_f$	MPa	Modul smičnosti vlakna
$G_m$	MPa	Modul smičnosti matrice
$V$	$m^3$	Volumen cijelog kompozita
$V_f$	$m^3$	Volumen vlakna
$V_m$	$m^3$	Volumen matrice
$v_f$	-	Volumni udio vlakna u kompozitu
$v_m$	-	Volumni udio matrice u kompozitu
$M$	kg	Masa cijelog kompozita
$M_f$	kg	Masa vlakna
$M_m$	kg	Masa matrice
<b>M</b>	-	Matrica unutarnjih momenata višeslojnog kompozita

$\mathbf{N}$	-	Matrica unutarnjih sila višeslojnog kompozita
$\mathbf{Q}$	MPa	Reducirana matrica elastičnosti u sustavu glavnih materijalnih osi
$\overline{\mathbf{Q}}$	MPa	Reducirana matrica elastičnosti u globalnom koordinatnom sustavu
$S_{ijkl}$	-	Tenzor podatljivosti
$\mathbf{T}_\varepsilon$	-	Matrica transformacije tenzora deformacije
$\mathbf{T}_\sigma$	-	Matrica transformacije tenzora naprezanja

### Grčke oznake

Oznaka	Jedinica	Opis
$\varepsilon_{fu}$	-	Maksimalna duljinska deformacija vlakna
$\varepsilon_{mu}$	-	Maksimalna duljinska deformacija matrice
$\varepsilon_{kl}$	-	Tenzor deformacije
$\boldsymbol{\varepsilon}_{ i }$	-	Tenzor deformacije u sustavu glavnih materijalnih osi
$\boldsymbol{\varepsilon}_{ x }$	-	Tenzor deformacije u globalnom koordinatnom sustavu
$\boldsymbol{\varepsilon}^0$	-	Matrica deformacija srednje površine laminata
$\boldsymbol{\kappa}$	-	Matrica zakrivljenosti srednje površine laminata
$\nu$	-	Poissonov faktor kompozita
$\nu_f$	-	Poissonov faktor vlakna
$\nu_m$	-	Poissonov faktor matrice
$\theta$	°	Kut između osi globalnog koordinatnog sustava i sustava glavnih materijalnih osi
$\rho$	kg/m <sup>3</sup>	Gustoća kompozita
$\rho_f$	kg/m <sup>3</sup>	Gustoća vlakna
$\rho_m$	kg/m <sup>3</sup>	Gustoća matrice
$\sigma_{ij}$	MPa	Cauchyev tenzor naprezanja
$\boldsymbol{\sigma}_{ i }$	MPa	Tenzor naprezanja u sustavu glavnih materijalnih osi
$\boldsymbol{\sigma}_{ x }$	MPa	Tenzor naprezanja u globalnom koordinatnom sustavu

## SAŽETAK

U diplomskom radu proveden je numerički proračun čvrstoće i stabilnosti kobilice za malu jedrilicu. Model kobilice sastoji se od lista i klizača kobilice. Kobilica je izrađena od kompozitnih materijala. U radu su prikazane osnovne pretpostavke i izrazi mehanike kompozitnih materijala. Proračun je proveden pomoću metode konačnih elemenata (MKE) u programskom paketu Abaqus.

U svrhu odabira prikladnih konačnih elemenata koji će se koristiti u proračunu kobilice te da bi se ispitala konvergencija numeričkog rješenja, proveden je verifikacijski proračun na jednostavnom modelu pravokutne ploče. Pravokutna ploča izrađena je od dva jednosmjerna sloja kompozita od E-stakla i epoksidne smole. Provjerena je konvergencija rezultata koji se odnose na čvrstoću i stabilnost ploče. Konvergencija je provjerena korištenjem klasičnih (engl. “*Shell*“) i kontinuumskih ljuskastih (engl. “*Continuum shell*“) elemenata.

Numerička analiza kompozitne kobilice sastoji se od nekoliko iteracija, kojima se provjerava i traži izvedba koja će zadovoljiti čvrstoću i stabilnost konstrukcije. Prva iteracija sastoji se od proračuna kobilice sa materijalnim svojstvima i svojstvima čvrstoće koja su dobivena procjenom na temelju mikrostrukture materijala. U drugoj iteraciji proveden je proračun sa svojstvima koja su korigirana prema eksperimentalno dobivenim podacima. Nakon toga je u trećoj iteraciji analiziran problem koncentracije naprezanja kod prijelaza s lista na klizač kobilice, a rješenje je dano u obliku radijusnog prijelaza. Četvrta iteracija sadrži model kojem je dodano ojačanje u obliku I-profila na mjesto kontakta kobilice s kutijom kobilice. Ojačanje je potrebno da bi se zadovoljila čvrstoća konstrukcije na tom dijelu. U zadnjoj iteraciji dodana su ojačanja s četverokutnim profilom u svrhu rješavanja problema stabilnosti kobilice.

Ključne riječi: jedrilica, kobilica, kompozit, mikromehanika, laminat, metoda konačnih elemenata.

## SUMMARY

In this thesis a numerical calculation of the strength and stability of the keel boat was carried out. The keel model consists of two parts: fin and a keel slider. The keel is made of laminate composite materials. Some basic assumptions and expressions of composite material mechanics, which are used in the work, are presented. The calculation was performed using the Finite Element Method (FEM) in the Abaqus program package.

In order to choose the appropriate finite elements for the keel calculations, and to test the convergence of numerical solutions, a verification calculation was performed on a simple supported rectangular plate model. This rectangular plate is made of two unidirectional composite plies made of E-glass and epoxy resin. Convergence has been verified using the classic shell and continuum shell elements.

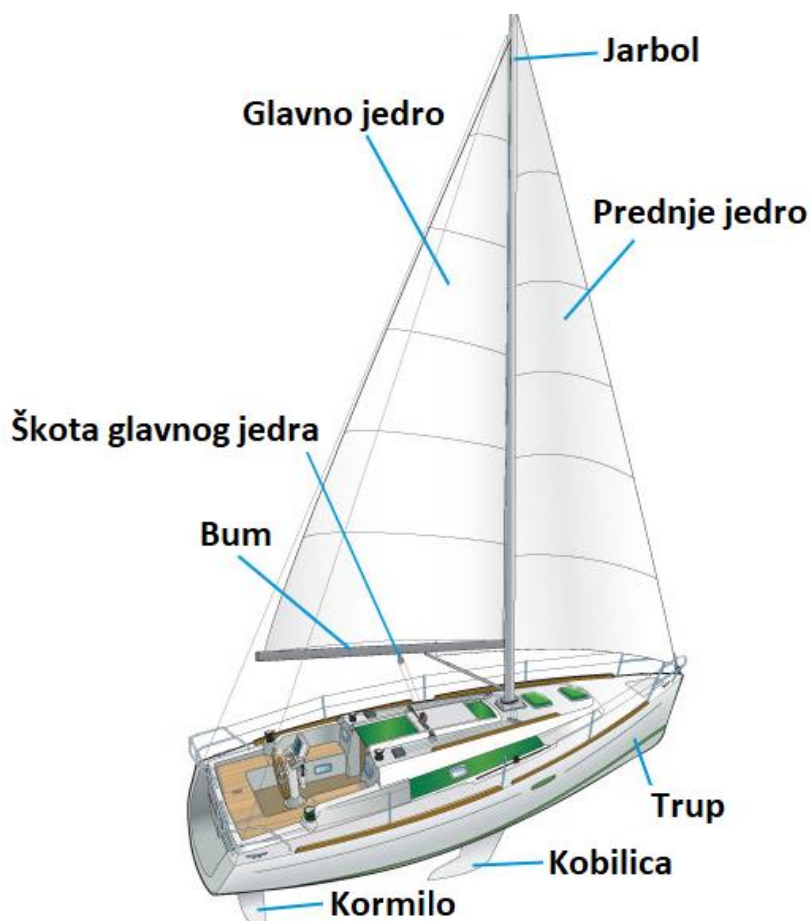
The numerical analysis of the composite keel consists of several iterations, which are used to find and verify the best solutions that will satisfy the strength and stability of the construction. The first iteration consists of a keel calculation in which the material and strength properties are obtained by using micromechanics. In the second iteration, a calculation with properties corrected according to experimentally obtained data is performed. Then, in the third iteration, the problem of stress concentration at the transition from the fin to the keel slider was solved and the solution was given in the form of a radial transition between two parts. The fourth iteration contains a model on which an I-profile fixing was added at the point of contact of the keel with a keel box. Reinforcement is needed to meet the strength criteria of this part of the keel. The last iteration was the addition of fixings with a quadrilateral profile (which follows the hydrodynamic profile of the keel fin) for the purpose of securing the keel stability.

Key words: sailboat, keel, composite, micromechanics, laminate, finite element method.

## 1. UVOD

### 1.1. Jedrilice

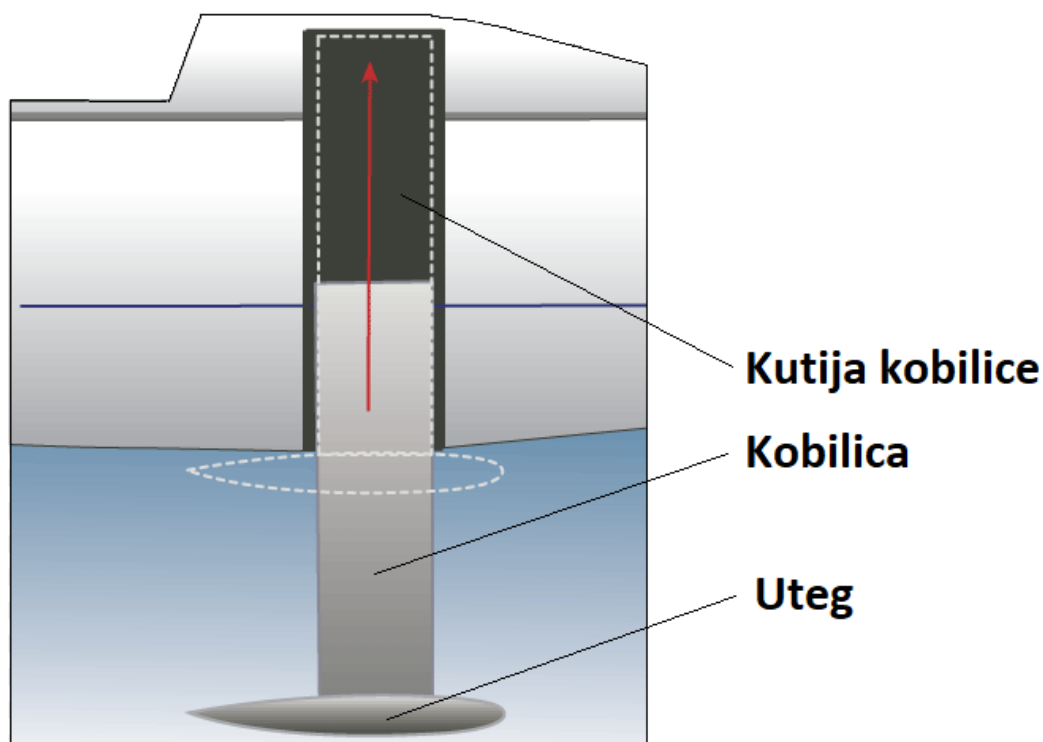
Jedrilica je definirana kao manje plovno sredstvo koje pogonsku snagu dobiva od vjetra. Vjetar koji struji na jedro (platno razapeto na brodskom jarbolu) stvara potisak i omogućuje pokretanje jedrilice. Današnje izvedbe jedrilice, osim vjetra, često koriste i motorni pogon kao izvor pogonske snage (ovo ne vrijedi za većinu sportskih jedrilica). Zbog toga se danas često govori o “motornim jedrilicama“ kojima je motor glavno pogonsko sredstvo i “jedrilicama s pomoćnim motorom“ koje koriste jedra kao glavno, a motor kao pogonsko sredstvo. U prošlosti je većina brodice namijenjenih za transport ljudi i tereta te ribarenja bila opremljena jedrima, dok se danas jedrilice većinom koriste za rekreaciju i sport. Dijelovi jedrilice prikazani su slikom 1.1.



Slika 1.1 Dijelovi jedrilice [20]

## 1.2. Kobilica broda

Kobilica broda predstavlja dio koji zaustavlja bočno kretanje jedrilice u najtežim uvjetima jedrenja. Nalazi se na sredini jedrilice, a proteže se duboko u vodu. Postoji više izvedaba od kojih su osnovne s i bez utega. Ako je kobilica izrađena bez utega, njezina težina mora biti velika. Izvedba s utegom je takva da se on nalazi na kraju kobilice. U obje izvedbe velika težina potrebna je zbog stvaranja protusile koja onemogućuje prevrtanje jedrilice uslijed bočnih opterećenja (npr. vjetar). U novije vrijeme osim ovih dviju vrsta sve češće se izrađuju tzv. krilate kobilice (engl. “*Winged keel*“). Ovakve su kobilice kratke, a težina im je koncentrirana u dvama krilima koja se nalaze lijevo i desno od kobilice. Težina kobilice zajedno s utegom može imati i do 40% ukupne težine jedrilice. U ovom diplomskom radu provodit će se proračun čvrstoće i stabilnosti kobilice s utegom. Osim same kobilice, jedrilice mogu imati i kutiju u koju se ona može uvlačiti (uvlačiva kobilica). Oblik (visina) i smještaj kobilice je takav da u slučaju vezivanja kobilice u plicacima, kao i kod njezinog transporta treba omogućiti njezino uvlačenje. Shema sklopa kobilice (kutija kobilice, kobilica, uteg) i njezina uvlačenja dana je slikom 1.3.



Slika 1.2 Shema uvlačenja kobilice u kutiju [21]



### 1.3. Kompozitni materijali

Kompozit je materijal koji je izrađen od dvaju ili više konstituenata s bitno različitim kemijskim i fizičkim svojstvima. Svojstva novog materijala su različita od svojstava individualnih komponenata (konstituenata). Često su ova dva osnovna konstituenta su vlakna i matrica. Vlakna su osnovni nosivi element kompozita i daju mu čvrstoću, dok matrica drži vlakna zajedno, ima važnu funkciju u prenošenju opterećenja na vlakno, daje vanjsku formu kompozitu, definira njegovo ponašanje obzirom na djelovanje atmosfere, itd.. Vlakna su najčešće: ugljična, staklena, aramidna i metalna, a njihov je volumni udio u kompozitu najčešće 60-70%. Matrice mogu biti polimerne (duromeri i plastomeri), ugljične, metalne (MMC-“*Metal Matrix Composites*“), keramičke (CMC-“*Ceramics Matrix Composites*“) itd. Nadalje, prema obliku najčešće su korištena duga vlakna, ali postoje i drugi oblici kao što su: kratka vlakna, *whiskeri* (kratka vlakna izrazito velike čvrstoće) itd. Posebnu vrstu kompozita čini prepreg (*PREimPREGnated*) kod kojeg su pletena vlakna natopljena matricom (najčešće polimernom). Prepreg se u pravilu koristi za proizvodnju kompozitnih komponenata u autoklavu. Ova je tehnologija vrlo zastupljena kod proizvodnje kompozitnih dijelova avionske konstrukcije. Još jedna vrsta kompozita koja postaje sve popularnija (iako još relativno malo istražena) su nanokompoziti. Više o kompozitnim materijalima može se pročitati u literaturi [3].

#### 1.3.1. Vlakna

Visoka mehanička svojstva vlakana rezultat su snažnih međuatomnih sila koje vladaju u materijalima niskog atomskog broja i male gustoće (npr. C, B, Al, Si). Vlakna mogu biti napravljena od tih elemenata, njihovih međusobnih spojeva ili spojeva s kisikom i dušikom. Kod ovih materijala nije izraženo plastično tečenje (krhki lom vlakana). Lom se događa uslijed integralnog efekta djelovanja mikroskopskih pukotina, čiji se broj smanjuje što su dimenzije vlakna manje. S druge strane, kod ovakvog je materijala znatno više izraženo odstupanje svojstava od referentnih vrijednosti. Ova neujednačenost mehaničkih svojstava predstavlja velik problem pri proračunu i izradi kompozitnih konstrukcija. Broj mikroskopskih pukotina može biti znatno smanjen tehnologijom izrade vlakna ili zaštitnom presvlakom od vlakna. Od posebne je važnosti i čistoća sirovine od koje je vlakno napravljeno. Više o vlaknima i vrstama vlakana može se pročitati u literaturi [3].

### 1.3.2. Matrice

Svojstva matrice izrazito su važna za određivanje uzdužne tlačne čvrstoće, poprečne tlačne čvrstoće kao i međuslojne posmične čvrstoće i obično se kaže da su ova svojstva uvjetovana matricom. Za kompozite se traži da dobro podnose temperature do 150°C, iznimno i do 200 °C. svojstva matrice najčešće određuju i svojstva kompozita, kao i ograničenja u primjeni. U slučaju izloženosti kompozita kemijskim ili atmosferskim utjecajima, matrica je ona koja je prva izložena smanjenju mehaničkih svojstava te njena svojstva značajno određuju ponašanje kompozita. Tehnologija izrade kompozita značajno utječe na svojstva kompozita jer mora osigurati dobru vezu vlakna i matrice kao i minimalan udjel šupljina ili pukotina u kompozitu. Manje pukotina i šupljina u kompozitu uzrokovat će bolja svojstva tog kompozita. Više o matricama i vrstama matrica može se pročitati u literaturi [3].

### 1.3.3. Ugljična vlakna

Ugljična vlakna danas su najrasprostranjenija ojačala. Karakterizira ih dvodimenzijaska struktura. Prva ugljična vlakna bila su napravljena iz *raylona*, no postupak je ubrzo izbačen zbog malog postotka ugljika koji se na taj način dobivao, kao i slabih mehaničkih svojstava. Većina ugljičnih vlakana koja se danas koriste napravljena su iz poliakrilonitril (PAN) vlakana ili iz različitih smola (engl. “*pitch*“) procesom karbonizacije, pri čemu se postupci proizvodnje mogu značajno razlikovati. PAN postupkom proizvode se vlakna s postotkom C do 50% dok se vlakna iz smole odlikuju postotkom C do 80%. Prema osnovnim mehaničkim karakteristikama , ugljična se vlakna klasificiraju kao HM (visokog modula elastičnosti), HS (visoke čvrstoće) i IM (umjerenog modula elastičnosti). Ponekad se koristi i oznaka UHM (vrlo visoki modul elastičnosti). Vlakna dobivena iz smole generalno imaju veći modul elastičnosti, ali i manju tlačnu i vlačnu čvrstoću u odnosu na PAN vlakna. Ova su vlakna i znatno više porozna, što dodatno utječe na njihovu čvrstoću. Dodatni podaci o ugljičnim vlaknima mogu se naći u literaturi [3].

#### **1.3.4. Staklena vlakna**

Druga vrsta vlakana koja su također vrlo raširena u primjeni su staklena vlakna. Ona se koriste za manje zahtjevne konstrukcije. Cijena proizvodnje ovih vlakana je vrlo niska pa se skupa ugljična vlakna, gdje je god to moguće, zamjenjuju njima. Staklena se vlakna najčešće proizvode od silike (silicijevog dioksida  $\text{SiO}_2$ ) različitim postupcima i u pravilu imaju slabija mehanička svojstva od ugljičnih. Mogu se znatno razlikovati po svojstvima te se stoga označuju kao A-staklo (prvo proizvedena, danas rijetko korištena), C-staklo (koriste se zbog poboljšane otpornosti na kiseline i lužine), E-staklo (najčešće korišteno, poboljšana otpornost na vlagu i blaže kemikalije), S-staklo (povećanje čvrstoće i modula elastičnosti, koristi se kod mehanički opterećenijih konstrukcija gdje su potrebni visoka specifična krutost i čvrstoća). Dodatni podaci o staklenim vlaknima mogu se naći u literaturi [3].

#### **1.3.5. Epoksidna smola**

Duromeri su polimeri koji se najčešće koriste u proizvodnji kompozita zbog relativno niže cijene, niskih proizvodnih temperatura, niske viskoznosti pri proizvodnji te dobrog oplakivanja vlakna. Od njih, za kompozite visokih mehaničkih svojstava, najčešće su korištene epoksidne smole zbog laganog korištenja, niske cijene, izvrsnih mehaničkih svojstava, dobre kemijske postojanosti te zadržavanja dobrih mehaničkih svojstava i dimenzija pri povišenoj temperaturi i vlazi. Nadalje, dobro reagiraju (ostvaruju dobru adheziju) s većinom vrsta vlakana. Budući da pri proizvodnji prolaze kroz period vrlo niske viskoznosti, to im omogućava vrlo široke tehnike proizvodnje. Epoksidi su najčešće dvokompozitni, pri čemu se u procesu proizvodnje dodaje očvršćivalo koji postaje sastavni dio strukture matrice. Nakon miješanja epoksida i očvršćivala, pod djelovanjem topline dolazi do skrućivanja što se događa za nekoliko sati. Konačna svojstva epoksidne matrice pokazuju izrazitu krhkost, što dovodi do znatne osjetljivosti obzirom na pojavu pukotina. Dodatne informacije o epoksidnim smolama mogu se naći u literaturi [3].

### **1.4. Kompozitni laminati i njihova primjena**

Kompozitni laminati predstavljaju spoj više kompozitnih slojeva povezan tako da bi se dobila željena inženjerska svojstva. Individualni su slojevi najčešće izrađeni od vlakana visoke krutosti i čvrstoće te polimerne, metalne ili keramičke matrice. Laminatni kompoziti danas predstavljaju jedan od najčešće korištenih oblika kompozitnih dizajna. Uzrok tome je

relativno jednostavna konstrukcija i korištenje većeg broja slojeva koji mogu imati različita svojstva, orijentaciju i sastav. Na taj način je dobiven hibridni laminat s proizvoljnim svojstvima. Osim toga, korištenjem laminatnih kompozita moguće je dobiti konstrukciju koja će imati povoljni omjer-nosivost težina. Primjena kompozitnih laminata (i općenito kompozitnih materijala) je vrlo široka. U nastavku su navedene neke primjene (svrstane po granama u kojima se primjenjuju [1]):

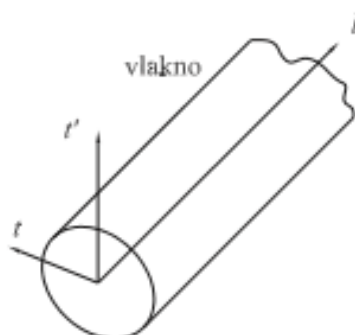
- Elektrotehnika, elektronika – izolacija, vrhovi televizijskih tornjeva, antene, elektroničke komponente;
- Građevina i komunalne radnje – dimnjaci, stolarija (prozori, vrata, namještaj), betonski kalupi;
- Cestovni prijevoz – Šasije, amortizeri, kabine, spremnici za kamione, prijenosna vratila;
- Željeznički prijevoz – prednji dijelovi lokomotive, vagoni, konstrukcijski dijelovi;
- Pomorski prijevoz – spremnici brodova, jedrilice, čamci, dijelovi većih brodovi;
- Žičani prijevoz – kabine gondola, užad;
- Zračni prijevoz – lagani avioni i bespilotne letjelice (dronovi), krila, elise, konstrukcijski dijelovi;
- Svemirski prijevoz – tijela letjelica, spremnici, mlaznice, toplinski štitovi kod povratka u atmosferu;
- Strojarsstvo (konstrukcijski dijelovi) – vratila, osovine, zupčanici, nosači konstrukcija, kućišta, robotske ruke;
- Sport i slobodno vrijeme – teniski reket, skije, ribički štapovi, koplja, lukovi i strijele, bicikli, zaštitne kacige;
- Vojna industrija – pancirna košulja, zaštitni šljemovi, zaštitni dijelovi vozila.

Sve prethodno navedene primjene kompozitnih laminata dokazuju važnost ovih materijala. Međutim, oni imaju i neke nedostatke: visoka cijena, nedovoljno poznavanje i variranje svojstava, teža obrada i nemogućnost recikliranja (utjecaj na okoliš). Usprkos tome, zbog svojih dobrih svojstava (npr. omjer težine-nosivosti, dizajniranje svojstava itd.) daljnji razvoj i primjena ovih materijala neosporiva je i sa sigurnošću možemo reći da su kompoziti materijali budućnosti.

## 2. MEHANIKA KOMPOZITNIH MATERIJALA

### 2.1. Podjela materijala

Materijali se općenito mogu podijeliti prema fizikalno-mehaničkim svojstvima u ovisnosti o promatranom smjeru u bilo kojoj materijalnoj točki tijela. Izotropni materijal je homogen materijal, čija su fizikalno-mehanička svojstva (elastična, mehanička, toplinska itd.) jednaka u svim smjerovima u svakom djeliću tijela. Ovakav materijal ima beskonačno mnogo ravnina elastične simetrije. Matrica kompozita vrlo je često izrađena od izotropnog materijala (duromeri-smole, plastomeri, metalne i keramičke matrice itd.). Suprotnost izotropnim materijalima su anizotropni materijali čija su fizikalno-mehanička svojstva ovisna o smjeru, a mogu se razlikovati u svakom dijelu tijela (tijela kristalične strukture, kososlojno drvo, čelična žica uvijena u hladnom stanju). Jedan od podskupa anizotropnih materijala su ortotropni materijali. Definiiraju se kao materijali koji imaju svojstvo homogenosti, ali su im fizičko-mehanička svojstva jednaka samo u određenim pravcima, koji su postavljeni paralelno osima odgovarajućeg pravokutnog koordinatnog sustava. Ortotropni materijali imaju tri međusobno okomite ravnine elastične simetrije. Primjer ortotropnog materijala je jednoslojni laminat (kompozit). Poseban primjer ortotropnog materijala predstavlja transverzalno izotropni materijal. Takav materijal ima definiranu ravninu transverzalne izotropije tako da je svaka ravnina okomita na nju ravnina elastične simetrije. U normalnom smjeru ravnine transverzalne izotropije kroz materijal prolazi os transverzalne izotropije. Primjer takvog materijala je vlakno. Na slici 2.1 prikazane su oznake osi transverzalno izotropnog vlakna pri čemu je  $l$  os transverzalne izotropije, a ravnina  $t-t'$  ravnina transverzalne izotropije.



Slika 2.1 Oznake osi transverzalno izotropnog vlakna [3]

## 2.2. Tenzor elastičnosti

Vežu između komponenti Cauchyjevog tenzora naprezanja i tenzora deformacija daje tenzor elastičnosti  $[C_{ijkl}]$ . Ako se naprezanja i deformacije zapišu u obliku vektora, a tenzor elastičnosti u matričnom obliku, vrijedi:

$$\sigma = \mathbf{C}\varepsilon . \quad (2.1)$$

Budući da su naprezanja i deformacije tenzori drugog reda, a elastičnost tenzor četvrtog reda, ovaj se izraz može zapisati i pomoću indeksnog zapisa:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (2.2)$$

Ako su tenzori naprezanja i deformacija zapisani pomoću komponenti prema Voightovoj konvenciji koja definira redosljed komponenti tenzora naprezanja i deformacija, dobivamo tenzore:

$$[\sigma_{ij}] = \{\sigma_{11} \quad \sigma_{22} \quad \sigma_{33} \quad \sigma_{23} \quad \sigma_{13} \quad \sigma_{12}\}^T , \quad (2.3)$$

$$[\varepsilon_{kl}] = \{\varepsilon_{11} \quad \varepsilon_{22} \quad \varepsilon_{33} \quad \varepsilon_{23} \quad \varepsilon_{13} \quad \varepsilon_{12}\}^T . \quad (2.4)$$

U najopćenitijem zapisu, tenzor elastičnosti može se zapisati (koristeći i svojstvo simetrije):

$$[C_{ijkl}] = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1123} & C_{1113} & C_{1112} \\ & C_{2222} & C_{2233} & C_{2223} & C_{2213} & C_{1222} \\ & & C_{3333} & C_{2333} & C_{1333} & C_{1233} \\ & & & C_{2323} & C_{2313} & C_{1223} \\ & sim. & & & C_{1313} & C_{1213} \\ & & & & & C_{1212} \end{bmatrix} . \quad (2.5)$$

Često se koristi sažeti oblik kod kojeg se parovi indeksa zamjenjuju samo jednim indeksom.

Tenzor naprezanja i deformacija te tenzor elastičnosti tada se zapisuje na sljedeći način:

$$[\sigma_i] = \{\sigma_1 \quad \sigma_2 \quad \sigma_3 \quad \sigma_4 \quad \sigma_5 \quad \sigma_6\}^T , \quad (2.6)$$

$$[\varepsilon_j] = \{\varepsilon_1 \quad \varepsilon_2 \quad \varepsilon_3 \quad \varepsilon_4 \quad \varepsilon_5 \quad \varepsilon_6\}^T , \quad (2.7)$$

$$[C_{ij}] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ & & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ & sim. & & & C_{55} & C_{56} \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} . \quad (2.8)$$

Konačna se konstitutivna jednadžba u sažetom obliku zapisuje:

$$[\sigma]_i = [C_{ij}] \varepsilon_j. \quad (2.9)$$

Iz izraza (2.8) važno je primijetiti da su komponente tenzora elastičnosti  $[C_{ij}]$  ( $j=4,5,6$ ), jednake vrijednostima komponenta u isto smještenim stupcima istog tog tenzora zapisanog kao  $[C_{ijkl}]$ . Razlog tome je taj što je  $[C_{ijkl}]$  tenzor četvrtog reda, koji bi imao 81 komponentu (tenzor  $n$ -tog reda ima  $3^n$  komponenti). No zbog simetrije tenzora deformacije ( $[C_{ijkl}] = [C_{ijlk}]$ ), simetrije tenzora naprezanja ( $[C_{ijkl}] = [C_{jikl}]$ ) i simetrije samog tenzora elastičnosti ( $[C_{ijkl}] = [C_{klij}]$ ) broj konstanti se smanjuje na 21. Ovaj broj je maksimalan broj materijalnih konstanti koje opisuju ponašanje elastičnog materijala, a takav se materijal naziva anizotropni.

Osim za anizotropni, potreban nam je tenzor elastičnosti kada je materijal ortotropan. Ortotropni materijal ima dvije međusobno okomite ravnine elastične simetrije. U tom su slučaju komponente tenzora (2.5) koje imaju neparan broj indeksa 2 i 3 jednake nuli, a broj neovisnih konstanti smanjuje se s 21 na 9. Tenzor elastičnosti ortotropnog materijala prikazan je sljedećim izrazom:

$$[C_{ij}] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ & sim. & & & C_{55} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix}. \quad (2.10)$$

Konačno, transversalno izotropan materijal ima definiranu ravninu takvu da je svaka ravnina okomita na nju ravnina elastične simetrije. Ona se naziva ravnina transversalne izotropije, dok je pravac usmjeren normalno na nju os transversalne izotropije. Tenzor elastičnosti takvog materijala prikazan je izrazom (2.11).

$$[C_{ij}] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ sim. & & & & C_{44} & 0 \\ & & & & & \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12}) \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

### 2.3. Tenzor podatljivosti

Tenzor podatljivosti je inverzan tenzor elastičnosti. Zbog te činjenice vrijedi sljedeća jednakost:

$$[S_{ijkl}] = [C_{ijkl}]^{-1}. \quad (2.12)$$

Tenzor podatljivosti za ortotropni materijal zapisan pomoću inženjerskih konstanti :

$$[S_{ij}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{31}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix}. \quad (2.13)$$

Tenzor podatljivosti je također simetričan (kao i tenzor elastičnosti), odnosno vrijedi  $[S_{ij}] = [S_{ji}]$ . Iz te se činjenice dobiva relacija koja prikazuje ovisnost Poissonovih faktora i Youngovih modula elastičnosti za različite smjerove kod ortotropnih materijala:

$$\frac{\nu_{12}}{E_1} = \frac{\nu_{21}}{E_2}. \quad (2.14)$$



## 2.4. Reducirana matrica elastičnosti

Kod analize laminata, analiza čvrstoće provodi se za svaki pojedini sloj. Dok se radi o jednome sloju, on se promatra kao ortotropan materijal. Osim toga, postojeći 3D problem se može pojednostaviti kao problem ravninskog stanja naprezanja (dvije dimenzije-duljina i širina, mnogo su veće od treće, debljine laminata). Tada se umjesto matrice elastičnosti  $[C_{ij}]$  koristi reducirana matrica elastičnosti  $\mathbf{Q}$ , ili u indeksnom zapisu  $Q_{ij}$ . Reducirana matrica elastičnosti dana je izrazom (2.15).

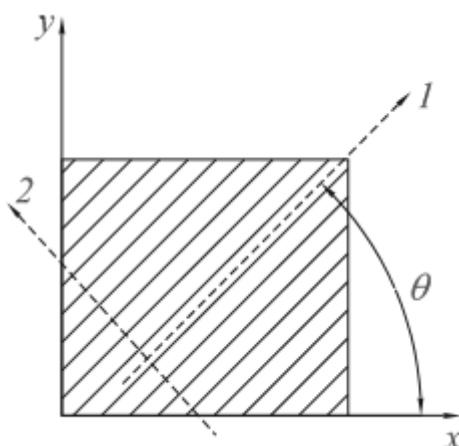
$$[Q_{ij}] = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ & Q_{22} & 0 \\ sim. & & Q_{66} \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

Elementi reducirane matrice elastičnosti  $[Q_{ij}]$  ne mogu se direktno dobiti iz elemenata matrice elastičnosti  $[C_{ij}]$ . Članovi matrice  $[Q_{ij}]$  imaju nešto manje vrijednosti od odgovarajućih elemenata matrice  $[C_{ij}]$ . Elementi  $[Q_{ij}]$  se mogu dobiti invertiranjem  $[S_{ij}]$ , koju smo prethodno dobili reduciranjem matrice elastičnosti  $[C_{ij}]$ . Elementi  $[S_{ij}]$  ne mijenjaju pri razmatranju jednog sloja u stanju ravninskog stanja naprezanja. Križanjem 3,4 i 5 retka i stupca u matrici podatljivosti  $[S_{ij}]$  dobiva se reducirana matrica podatljivosti čiji inverz predstavlja reduciranu matricu elastičnosti. Konačno reduciranu matricu elastičnosti za ortotropni materijal možemo zapisati na sljedeći način:

$$[Q_{ij}] = \begin{bmatrix} \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ \frac{\nu_{21}E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ 0 & 0 & G_6 \end{bmatrix}. \quad (2.16)$$

## 2.5. Koordinatni sustav i matrice transformacije

Budući da su laminati obično sastavljeni od većeg broja različito orijentiranih slojeva potrebno je odrediti vezu između glavnog materijalnog sustava (1,2) i globalnog koordinatnog sustava (x, y). Kod prvog sustava os 1 je usmjerena paralelno sa smjerom vlakna, dok je os 2 okomita na nju i u ravnini je laminata. U globalnom koordinatnom sustavu se definiraju sile, momenti, naprezanja i deformacije za čitavi laminat. Sustavi su međusobno zakrenuti za kut  $\theta$  (taj kut zatvaraju osi 1 i x). Koordinatni sustavi prikazani su slikom 2.2.



Slika 2.2 Koordinatni sustavi korišteni u transformaciji tenzora elastičnosti [3]

Kako bi bilo moguće odrediti naprezanja i deformacije za čitav kompozit, potrebno je naprezanje i deformacije koje se javljaju u svakom sloju transformirati iz sustava glavnih materijalnih osi u globalni koordinatni sustav. To se vrši pomoću matrica transformacija tenzora naprezanja  $\mathbf{T}_\sigma$  i tenzora deformacije  $\mathbf{T}_\epsilon$ . Jednadžbe transformacije prikazane su izrazima (2.17) i (2.18):

$$\boldsymbol{\sigma}_{|x|} = \mathbf{T}_\sigma^{-1} \boldsymbol{\sigma}_{|i|} , \quad (2.17)$$

$$\boldsymbol{\epsilon}_{|x|} = \mathbf{T}_\epsilon^{-1} \boldsymbol{\epsilon}_{|i|} . \quad (2.18)$$

U gornjim su jednadžbama  $\boldsymbol{\sigma}_{|x|}$  i  $\boldsymbol{\epsilon}_{|x|}$  su vektori s komponentama tenzora naprezanja i deformacije u globalnom koordinatnom sustavu, a  $\boldsymbol{\sigma}_{|i|}$  i  $\boldsymbol{\epsilon}_{|i|}$  su vektori koji sadržavaju komponente tenzora naprezanja i deformacije u koordinatnom sustavu glavnih materijalnih osi. Matrice transformacija tenzora naprezanja i deformacije prikazani su u nastavku:

$$\mathbf{T}_\sigma = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 2cs \\ s^2 & c^2 & -2cs \\ -cs & cs & c^2 - s^2 \end{bmatrix}, \quad (2.19)$$

$$\mathbf{T}_\varepsilon = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & cs \\ s^2 & c^2 & -cs \\ -2cs & 2cs & c^2 - s^2 \end{bmatrix}, \quad (2.20)$$

gdje su  $s = \sin(\theta)$  i  $c = \cos(\theta)$ .

Reducirana matrica elastičnosti  $[Q_{ij}]$  (simbolički  $\mathbf{Q}$ ) definirana je u sustavu glavnih materijalnih osi. Veza između napreznja i deformacije u tom sustavu definirana je pomoću sljedećeg izraza:

$$\boldsymbol{\sigma}_{|i|} = \mathbf{Q}\boldsymbol{\varepsilon}_{|i|}. \quad (2.21)$$

Slično se određuje i veza između napreznja i deformacije u globalnom koordinatnom sustavu:

$$\boldsymbol{\sigma}_{|x|} = \overline{\mathbf{Q}}\boldsymbol{\varepsilon}_{|x|}, \quad (2.22)$$

gdje je  $\overline{\mathbf{Q}}$  reducirana matrica elastičnosti definirana u globalnom koordinatnom sustavu. Veza između reducirane matrice elastičnosti u globalnom koordinatnom sustavu i sustavu glavnih materijalnih osi dobivena je kombiniranjem izraza (2.17), (2.18), (2.21), (2.22), a prikazana je izrazom (2.23).

$$\overline{\mathbf{Q}} = \mathbf{T}_\sigma^{-1}\mathbf{Q}\mathbf{T}_\varepsilon \quad (2.23)$$

### 3. MIKROMEHANIKA

Prilikom dizajniranja laminatnih kompozita potrebno je poznavati mehaničkih svojstava svakog pojedinog sloja. Osim mehaničkih svojstava potrebno je i poznavati čvrstoću slojeva. Ona se moraju pretpostaviti u procesu dizajniranja samog kompozita. Mikromehanika kompozita je disciplina čija je osnovna zadaća korištenjem mehaničkih svojstava konstituenata (vlakna i matrice) unutar kompozitnog sloja odrediti mehanička svojstva jednog sloja. Osim samih svojstava mora se znati i udio pojedinog konstituenta unutar kompozita (sloja) te orijentacija sloja u ovisnosti o smjeru opterećenja. Još jedan parametar koji uvelike određuje svojstva je temperatura kojoj je podvrgnut kompozit i atmosfera u kojoj se nalazi (udio vlage). Mehanička svojstva slojeva mogu se dobiti i eksperimentalno (kidanjem epruveta), ali taj način sa sobom veže nekoliko nedostataka. Visoka cijena ispitivanja proizlazi iz činjenice da jedan set eksperimenata vrijedi za samo jedan način proizvodnje. Osim toga, za svaku vrstu i način opterećenja moramo provesti zasebno ispitivanje. Visoka cijena samih uzoraka i veliki broj ispitivanja također dovodi do povećanja troškova kod eksperimentalnog određivanja svojstava. Zbog svega navedenog dolazi se do zaključka da je teorijski pristup određivanja svojstava neophodan. Mikromehanika ne predstavlja samo alat koji daje vrijednosti kojima se vodimo prilikom eksperimentalnih ispitivanja, već omogućuje i vodilju prilikom dizajniranja kompozita s željenim svojstvima.

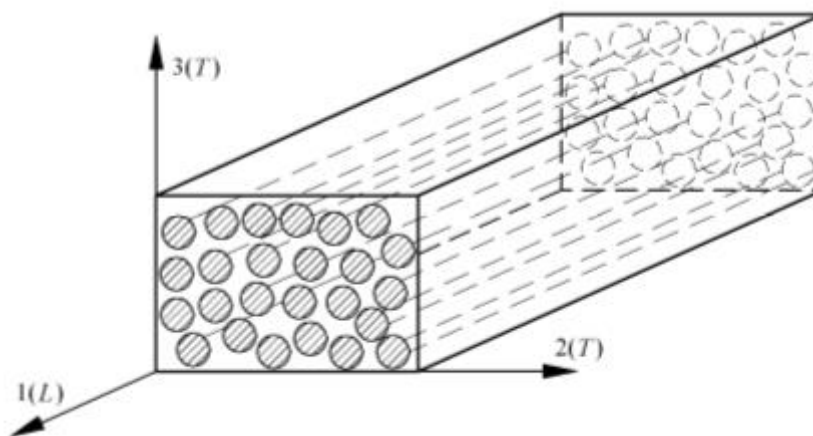
#### 3.1. Mikromehanika jednosmjernih laminata

##### 3.1.1. Jednoslojni laminati

Jednoslojni, jednosmjerno usmjereni laminati (engl. “*Unidirectional lamina*“), su kompoziti koji su izgrađeni od vlakana većinski usmjerenih u jednom smjeru i matrice koja ih spaja. Mali udio ojačala koji je usmjeren drugačije najčešće služi kao gradivni dio samog kompozita (usmjerenost je najčešće  $90^\circ$  naspram većine vlakana), a njihova je zadaća povezivanje i držanje primarnih vlakana u željenoj poziciji. Jednosmjerni laminati, odnosno slojevi, predstavljaju najjednostavniji element laminatnog kompozita. Zbog toga je kod kompozitnih laminata neophodno njihovo proučavanje.

Jednoslojni, jednosmjerno usmjereni kompozitni slojevi imaju svojstva transverzalno izotropnih materijala. Oni imaju tri materijalna smjera. Smjer paralelan sa smjerom vlakana naziva se longitudinalni smjer i kod njega se javljaju najjača svojstva. Os longitudinalnog

smjera označava se sa oznakom "1" ili "L". Smjer koji je okomit s longitudinalnim naziva se transverzalni smjer i označuje se sa oznakom "T", pri čemu se osi ovisno o ravnini u kojoj se nalaze označuju kao "2" i "3". Iz razloga nasumične raspodjele vlakana u poprečnome presjeku transverzalna svojstva su približno jednaka. Zbog toga jednoslojne jednosmjerno usmjerene laminata smatramo transverzalno izotropnim materijalima (sadrže tri ravnine simetrije). Izgled jednoslojnog laminata s prikazanim materijalnim osima dan je slikom 3.1.



**Slika 3.1 Jednoslojni laminat ojačan vlaknima u jednom smjeru sa svojim materijalnim osima [2]**

### 3.1.2. Pravilo miješanja

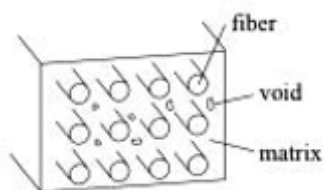
Pravilo miješanja (engl. "Rule of mixtures") najjednostavnija je metoda za određivanje svojstava kompozita korištenjem mikromehanike [3]. Ujedno ova se metoda i najčešće koristi. Osnovne pretpostavke kod postavljanja izraza kod pravila miješanja su:

1. Vlakna su jednoliko raspoređena po matrici
2. Matrica ne sadrži pore (nema šupljina)
3. Veza između vlakna i matrice je idealna
4. Primijenjeno opterećenje je ili paralelno ili usmjereno u normalnom smjeru naspram smjera vlakana
5. Laminat nije prednapregnut (inicijalno ne sadrži početna naprezanja), odnosno na početku ne postoje nikakva početna naprezanja kod vlakna ili matrice
6. Ne razmatraju se lokalni efekti, npr. koncentracija naprezanja
7. Vlakna i matrice ponašaju se kao linearno elastični materijali

U nastavku su prikazani osnovni izrazi mikromehanike koji se koriste pri određivanju svojstava kompozita.

Svaki laminatni kompozit sastoji se od tri konstituenata: vlakna, matrice i šupljina nastalih prilikom izrade. Svaki od spomenutih konstituenata sadrži svoj volumen, a ukupni volumen cijelog kompozita računamo zbrajanjem triju volumena:

$$V = V_f + V_m + V_v . \quad (3.1)$$



**Slika 3.2 Prikaz dijelova kompozita**

Da bismo dobili volumne udjele pojedinih konstituenata gornju jednadžbu dijelimo s ukupnim volumenom  $V$ . Osim toga u teoretskom određivanju svojstava često zanemarujemo šupljine unutar kompozita (idealno izrađen kompozit). Primjenjujući spomenuto dobivamo jednadžbu (3.2) koja prikazuje da je zbroj volumnih udjela konstituenata jednak 1 (ovo interpretiramo kao postotak konstituenata u kompozitu):

$$v_f + v_m = 1 . \quad (3.2)$$

Osim volumena, fizikalno svojstvo koje proračunavamo kod mikromehanike kompozita je masa. Ukupna masa kompozita računa se sljedećim izrazom:

$$M = M_f + M_m . \quad (3.3)$$

Masa se također može prikazati pomoću umnoška gustoće i volumena:

$$M = \rho_f V_f + \rho_m V_m . \quad (3.4)$$

Dijeljenjem gornje jednadžbe sa ukupnim volumenom dobivamo izraz za gustoću kompozita:

$$\rho = \rho_f v_f + \rho_m v_m . \quad (3.5)$$

Youngov modul elastičnosti kompozita u longitudinalnome smjeru dobiva se pomoću modula elastičnosti vlakna i matrice te njihovog volumnog udjela u kompozitu. Izraz je prikazan formulom (3.6).

$$E_l = E_f v_f + E_m v_m . \quad (3.6)$$

Nadalje, Youngov modul elastičnosti u transverzalnome smjeru također ovisi o svojstvima elastičnosti konstituenata u transverzalnom smjeru i njihovim volumnim udjelima:

$$E_t = E_m \frac{1}{(1 - \nu_f) + \frac{E_m}{E_{ft}} \cdot \nu_f} \quad (3.7)$$

Modul smičnosti kompozita izračunava se pomoću sljedećeg izraza:

$$G_{lt} = G_m \frac{1}{(1 - \nu_f) + \frac{G_m}{G_{flt}} \nu_f} \quad (3.8)$$

Posljednje svojstvo koje moramo izračunati je Poissonov faktor koji se računa koristeći Poissonov faktor vlakna i matrice te volumni udio konstituenata:

$$\nu = \nu_f \nu_f + \nu_m \nu_m \quad (3.9)$$

### 3.1.3. Proračun mehaničkih svojstava materijala

Proračun mehaničkih svojstava jednoslojnih kompozita provodimo koristeći prethodno navedene izraze pravila miješanja. Teorijski dobiveni izrazi bit će uspoređeni s eksperimentalno dobivenim podacima koji su očitani iz kataloga i literature.

Proračun je proveden za tri vrste kompozita:

1. Kompozit s matricom od epoksidne smole ojačan vlaknima od E-stakla
2. Kompozit s matricom od epoksidne smole ojačan ugljičnim vlaknima visoke krutosti (visok modul elastičnosti) - T50/1962
3. Kompozit s matricom od epoksidne smole ojačan ugljičnim vlaknima visoke čvrstoće – T300/5208

#### 3.1.3.1. Kompozit s matricom od epoksidne smole ojačan vlaknima od E-stakla

**Tablica 3.1 Svojstva konstituenata kompozita s matricom od epoksidne smole ojačanim ugljičnim vlaknima, podaci iz [1]**

Svojstva vlakna i matrice	$E_{ft}$ , MPa	$E_{ft}$ , MPa	$G_{flt}$ , MPa	$\nu_f$	$\nu_f$	$\rho_f$ , kg/m <sup>3</sup>	$E_m$ , MPa	$G_m$ , MPa	$\nu_m$	$\rho_m$ , kg/m <sup>3</sup>
<b>Vrijednosti</b>	74000	74000	30000	0,6	0,25	2600	4500	1600	0,4	1200

**Tablica 3.2 Usporedba podataka dobivenih mikromehanikom i tabličnih podataka iz [1] za kompozit s matricom od epoksidne smole ojačan ugljičnim vlaknima**

Svojstva kompozita	Teorijski dobivene vrijednosti	Tablični podaci	Greška [%]
$E_l$ , MPa	46200	45000	2,6
$E_t$ , MPa	10309,6	12000	14,1
$G_{lt}$ , MPa	3703,7	4500	17,7
$\nu$ , -	0,31	0,3	3,2
$\rho$ , kg/m <sup>3</sup>	2040	2080	1,9

Podaci koji su uvršteni u izraze pravila miješanja uzeti su iz literature [1]. Nakon provedenog proračuna uspoređeni su s podacima iz iste literature, pri čemu su tablični (eksperimentalni) podaci dani za jednosmjerni kompozit s volumnim udjelom E-stakla od 60% ( $\nu_f=0,6$ ).

*3.1.3.2. Kompozit s matricom od epoksidne smole ojačan ugljičnim vlaknima visoke krutosti (visok modul elastičnosti) - T50/1962*

**Tablica 3.3 Svojstva konstituenata za kompozit s matricom od epoksidne smole ojačanim ugljičnim vlaknima visoke krutosti (visok modul elastičnosti) - T50/1962, uzeta iz [5]**

Svojstva vlakna i matrice	$E_{ft}$ , MPa	$E_{fi}$ , MPa	$G_{fti}$ , MPa	$\nu_f$	$\nu_{fi}$	$\rho_f$ , kg/m <sup>3</sup>	$E_m$ , MPa	$G_m$ , MPa	$\nu_m$	$\rho_m$ , kg/m <sup>3</sup>
<b>Vrijednosti</b>	393000	6000	159000	0,62	0,24	1800	3700	1400	0,35	1270

**Tablica 3.4 Usporedba podataka dobivenih mikromehanikom i tabličnih podataka iz [5] za kompozit s matricom od epoksidne smole ojačan ugljičnim vlaknima visoke krutosti (visok modul elastičnosti) - T50/1962**

Svojstva kompozita	Teorijski dobivene vrijednosti	Tablični podaci	Greška [%]
$E_l$ , MPa	245066	241000	1,7
$E_t$ , MPa	4853,52	7000	30,7
$G_{lt}$ , MPa	3632,03	6000	39,5
$\nu$ , -	0,282	0,28	0,7
$\rho$ , kg/m <sup>3</sup>	1598,6	1720	7,1



Podaci koji su uvršteni u izraze pravila miješanja uzeti su iz literature [5] za ugljična vlakna visoke krutosti T50 i epoksidnu smolu 1962. Nakon provedenog proračuna uspoređeni su s podacima iz iste literature, pri čemu su tablični (eksperimentalni) podaci dani za jednosmjerni kompozit sa volumnim udjelom ugljičnih vlakna od 62% ( $v_f=0,62$ ).

### 3.1.3.3. Kompozit s matricom od epoksidne smole ojačan ugljičnim vlaknima visoke čvrstoće (T300/5208)

**Tablica 3.5 Svojstva konstituenata za kompozit s matricom od epoksidne smole ojačan ugljičnim vlaknima visoke čvrstoće – T300/5208, uzeta iz [5]**

Svojstva vlakna i matrice	$E_{ft}$ , MPa	$E_{ft}$ , MPa	$G_{flt}$ , MPa	$v_f$	$v_f$	$\rho_f$ , kg/m <sup>3</sup>	$E_m$ , MPa	$G_m$ , MPa	$v_m$	$\rho_m$ , kg/m <sup>3</sup>
<b>Vrijednosti</b>	231000	15000	91000	0,7	0,27	1770	3900	1400	0,35	1270

**Tablica 3.6 Usporedba podataka dobivenih mikromehanikom i tabličnih podataka iz [5] za kompozit s matricom od epoksidne smole ojačan ugljičnim vlaknima visoke čvrstoće – T300/5208**

Svojstva kompozita	Teorijski dobivene vrijednosti	Tablični podaci	Greška [%]
$E_l$ , MPa	162870	181000	10
$E_t$ , MPa	8091,3	10300	21,4
$G_{lt}$ , MPa	4504,95	7170	37,2
$\nu$ , -	0,294	0,28	4,7
$\rho$ , kg/m <sup>3</sup>	1620	1600	1,2

Podaci koji su uvršteni u izraze pravila miješanja uzeti su iz literature [5] za ugljična vlakna visoke čvrstoće T300 i epoksidnu smolu 5208. Nakon provedenog proračuna uspoređeni su s podacima iz iste literature, pri čemu su tablični (eksperimentalni) podaci dani za jednosmjerni kompozit sa volumnim udjelom ugljičnih vlakna od 70% ( $v_f=0,7$ ).

#### 3.1.3.4. Usporedba teoretskih i tabličnih vrijednosti

Nakon provedenog proračuna potrebno je prokomentirati dobivene vrijednosti. Pomoću tablica 3.2, 3.4, 3.6 prikazana je usporedba svojstva. Iako su vrijednosti teoretski dobivenih rezultata (pravilo miješanja) i tablično očitanih vrijednosti (eksperimentalno dobiveni) uglavnom slične, postoje određena odstupanja. Najveća greška dobiva se kod transverzalnog modula elastičnosti  $E_t$  i modula smičnosti  $G_{tt}$  kompozita. Prvi razlog odstupanja su nerealnosti i nedostaci u izrazima kod pravila miješanja, a koje su posljedica polaznih pretpostavka metode. Iako pretpostavke omogućuju jednostavan način izračunavanja početnih vrijednosti svojstava one sa sobom nose grešku uslijed zanemarivanja nesavršenosti kompozitnih konstrukcija. Osim toga svojstva kompozita uvelike ovise o tehnologiji proizvodnje. Dva kompozita koja sadrže iste konstituente, a izrađeni su drugačijim tehnologijama mogu imati bitno različita svojstva. Posebno veliki utjecaj na svojstva ima udio šupljina koji je direktno vezan uz proizvodni postupak. Veći udio šupljina smanjuje krutost i čvrstoću kompozita, a na mjestima gdje one postoje javlja se koncentracija naprezanja. Pravilo miješanja ne uzima u obzir način proizvodnje prilikom izračunavanja svojstava pa je to još jedan razlog zbog kojeg se teoretski i eksperimentalni rezultati razlikuju.

Zbog navedenih vrijednosti svojstava kompozita dobivenih korištenjem pravila miješanja treba korigirati nakon što se dobiju eksperimentalni podaci. Teorijski pristup koristi se kao vodilja prilikom početnog dizajniranja laminata i kompozita. On nam je alat kojim se uvelike mogu smanjiti troškovi u početnoj fazi izrade kompozita. Skupi eksperimenti koji bi na početku trebali biti provedeni kako bi se dobila okvirna svojstva na taj se način izbjegavaju. Eksperiment se koristi kao provjera i korekcija teorijskih podataka.

## 4. MAKROMEHANIKA

### 4.1. Makromehanika kompozita

Laminati su kompozitna struktura koja je sastavljena od većeg broja slojeva. Slojevi mogu biti od različitog materijala, drugačije debljine i orijentacije vlakana naspram globalnog koordinatnog sustava. Iz toga razloga potreban je proračun laminata kao cjeline s čime se bavi dio mehanike kompozita koji se naziva makromehanika. Zadaća je makromehanike kompozita da poznavajući mehanička svojstva svakog pojedinog sloja, njihovu debljinu te usmjerenost vlakana u globalnom koordinatnom sustavu, odredi mehanički odziv čitavog kompozita. Osim toga, zakonitostima teorije laminata (makromehanike) moguće je pomoću svojstava i karakteristika svakog pojedinog sloja dobiti svojstva cijelog laminata. U tom slučaju laminat više ne gledamo kao skup slojeva, nego kao cjeloviti jednoslojni ortotropni materijal.

Osnovne pretpostavke korištene pri izvođenju osnovnih izraza teorije laminata su sljedeće:

1. Laminat je u stanju ravninskog stanja naprezanja.
2. Nema klizanja između slojeva.
3. Normala na laminat ostaje okomita i ravna za vrijeme deformiranja što dovodi do zakonitosti  $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$ .
4. Pomaci u ravnini laminata su linearna funkcija koordinate  $z$  (Kirchhoffova pretpostavka):

$$u = u_0(x, y) + z F_1(x, y), \quad (4.1)$$

$$v = v_0(x, y) + z F_2(x, y). \quad (4.2)$$

Primjenom navedenih pretpostavki određuju se nepoznate funkcije  $F_1$ ,  $F_2$  u izrazima (4.1) i (4.2). Osim toga moguće je odrediti komponente deformacije:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \varepsilon_x^0 + z \kappa_x, \quad (4.3)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \varepsilon_y^0 + z \kappa_y, \quad (4.4)$$

$$\varepsilon_s = \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \gamma_{xy}^0 - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \gamma_{xy}^0 + z\kappa_{xy}. \quad (4.5)$$

Veličine u gornjim izrazima (4.3), (4.4), (4.5) s indeksom <sup>0</sup> odnose se na deformaciju srednje površine laminata dok su s  $\kappa$  označene zakrivljenosti srednje površine laminata. Konstitutivne relacije koje povezuju deformacije i naprezanja definirane su kao

$$\sigma_k = \bar{Q}_k \varepsilon_k = \bar{Q}_k [\varepsilon^0 + z\kappa]. \quad (4.6)$$

Nadalje, potrebno je definirati unutarnje sile i momente, a njihov prikaz u kompozitu dan je slikom 4.1, dok slika 4.2 prikazuje numeraciju slojeva i raspored njihovih debljina u višeslojnom kompozitu:

$$N_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz, \quad (4.7)$$

$$N_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y dz, \quad (4.8)$$

$$N_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xy} dz, \quad (4.9)$$

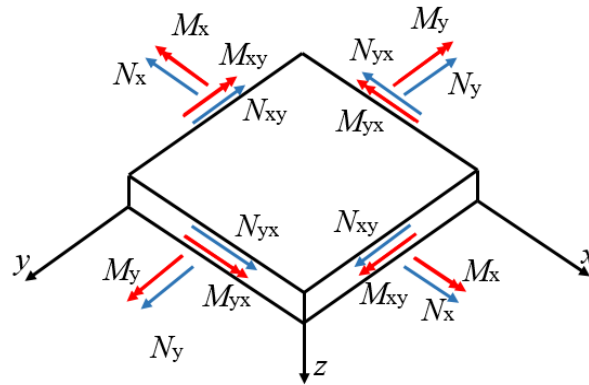
$$N_{yx} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yx} dz, \quad (4.10)$$

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz, \quad (4.11)$$

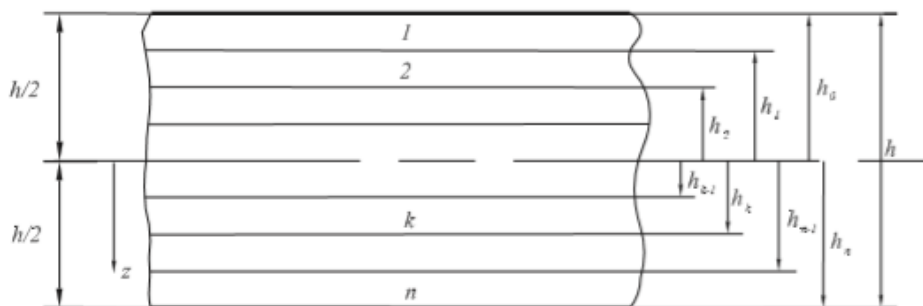
$$M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z dz, \quad (4.12)$$

$$M_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xy} z dz, \quad (4.13)$$

$$M_{yx} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yx} z dz. \quad (4.14)$$



Slika 4.1 Unutarnje sile i momenti u kompozitu



Slika 4.2 Numeracija slojeva u višeslojnom kompozitu [3]

Ukupna sila, odnosno ukupan moment u laminatu određuje se sumiranjem svih sila, odnosno momenata, koji djeluju u pojedinom sloju, što zapisujemo sljedećim izrazima:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} dz, \quad (4.15)$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} z dz. \quad (4.16)$$

Uvrštavanjem izraza (4.6) u izraze (4.15) i (4.16) te njihovim sređivanjem dobivamo konačan izraz za silu i moment u višeslojnom laminatu:

$$\mathbf{N} = \mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon}^0 + \mathbf{B}\boldsymbol{\kappa}, \quad (4.17)$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{B}\boldsymbol{\varepsilon}^0 + \mathbf{D}\boldsymbol{\kappa}, \quad (4.18)$$

pri čemu su  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  i  $\mathbf{D}$  matrice istezne (“*extensional*”), spregnute (“*coupling*”) i savojne (“*bending*”) krutosti. Izrazi za njihovo računanje su definirani u nastavku:

$$\mathbf{A} = \sum_{k=1}^n \bar{\mathbf{Q}}_k (h_k - h_{k-1}) , \quad (4.19)$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \bar{\mathbf{Q}}_k (h_k^2 - h_{k-1}^2) , \quad (4.20)$$

$$\mathbf{D} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n \bar{\mathbf{Q}}_k (h_k^3 - h_{k-1}^3) . \quad (4.21)$$

Izraze (4.17) i (4.18) moguće je napisati i u obliku submatrica:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^0 \\ \boldsymbol{\kappa} \end{bmatrix} , \quad (4.22)$$

odnosno prikazano u razvijenom obliku:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ & & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ & & & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ & sim. & & D_{22} & D_{26} & \\ & & & & D_{66} & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \varepsilon_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} . \quad (4.23)$$

## 4.2. Kriteriji popuštanja

Za razliku od izotropnih materijala (npr. čelik) kod kompozita su mehanizmi popuštanja bitno drugačiji. Kod njih više materijali ne doživljavaju krhki i duktilni lom, već su mehanizmi popuštanja drugačiji. Veliki broj spojenih slojeva, koji sami nemaju homogena svojstva, već se sastoje od dva ili više konstituenata uzrokuju popuštanje na različite načine koje ponekad ne možemo točno pretpostaviti. Najčešće kod popuštanja kompozita razmatramo: lom matrice, pucanje vlakana, izvlačenje vlakana iz matrice i delaminaciju (odvajanje slojeva). Danas je razvijen vrlo veliki broj kriterija popuštanja. Neki od njih su specificirani za određeni slučaj, dok su ostali općenitiji i samim time više prihvaćeni u inženjerskoj praksi [3]. Najpoznatiji i najrašireniji su sljedeći:

- Kriterij maksimalnih naprezanja,
- Kriterij maksimalnih deformacija,
- Tsai-Hill kriterij,
- Tsai-Wu kriterij,
- Puckov kriterij,

- Hashinov kriterij.

Kriteriji popuštanja uvijek se postavljaju za jedan sloj. Naprezanja su definirana u glavnom materijalnom sustavu te je nužno poznavati 5 parametara čvrstoće:

- $X_t$  - vlačna čvrstoća u pravcu vlakana ,
- $X_c$  - tlačna čvrstoća u pravcu vlakana ,
- $Y_t$  - vlačna čvrstoća u pravcu okomito na pravac vlakana ,
- $Y_c$  - tlačna čvrstoća u pravcu okomito na pravac vlakana ,
- $S$  - smična čvrstoća .

Ako se postavlja kriterij popuštanja pomoću dopuštenih deformacija, potrebno je znati pet parametara deformacija:

- $X_{et}$  - dopuštena vlačna deformacija u pravcu vlakana ,
- $X_{ec}$  - dopuštena tlačna deformacija u pravcu vlakana,
- $Y_{et}$  - dopuštena vlačna deformacija u pravcu okomito na pravac vlakana ,
- $Y_{ec}$  - dopuštena tlačna deformacija u pravcu okomito na pravac vlakana,
- $S_\varepsilon$  - dopuštena kutna deformacija .

#### 4.2.1. Tsai-Hill kriterij popuštanja

Ovaj kriterij spada u skupinu energetskih kriterija popuštanja, a koristi se za slučaj troosnog stanja naprezanja. Kako ne bi došlo do popuštanja, potrebno je da je ispunjen sljedeći uvjet:

$$(G + H) \sigma_1^2 + (F + H) \sigma_2^2 + (F + G) \sigma_3^2 - 2H\sigma_1\sigma_2 - 2G\sigma_1\sigma_3 - 2F\sigma_2\sigma_3 + 2L\tau_{23}^2 + 2M\tau_{13}^2 + 2N\tau_{12}^2 < 1 \quad (4.24)$$

gdje su parametri  $F... N$  definirani pomoću svojstava čvrstoće materijala koji se proračunava. Njihove su vrijednosti dobivene tako da se razmatraju slučajevi jednoosnog stanja naprezanja. Za slučaj jednog sloja kompozita, koji je u stanju ravninskog naprezanja, Tsai-Hill kriterij se svodi na izraz:

$$\frac{\sigma_1^2}{X^2} - \frac{\sigma_1\sigma_2}{X^2} + \frac{\sigma_2^2}{Y^2} + \frac{\tau_{12}^2}{S^2} < 1 . \quad (4.25)$$

Kod gornjih parametara čvrstoće  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ , indeksi nisu naznačeni jer se oni dodjeljuju u ovisnosti o predznaku odgovarajućeg naprezanja. Više informacija o kriterijima popuštanja (Tsai-Hill, Tasi-Wu) može se naći u literaturi [3].

#### 4.2.2. Tsai-Wu kriterij popuštanja

Ovaj kriterij naziva se još i tenzorski ili kvadratični kriterij popuštanja i spada među najčešće korištene kriterije. Tenzorski (indeksni) zapis kriterija, odnosno uvjet da ne dođe do popuštanja je:

$$F_i \sigma_i + F_{ij} \sigma_i \sigma_j = 1 \quad (4.26)$$

gdje su parametri  $F_i$  i  $F_{ij}$  parametri u koje ulazi čvrstoća kompozita, a  $\sigma_i$  i  $\sigma_j$  komponente tenzora naprezanja. Njihove su vrijednosti dobivene tako da se razmatraju slučajevi jednoosnog stanja naprezanja. Češći oblik korištenja ovog kriterija (pri ravninskom stanju naprezanja) je dan sljedećim izrazom:

$$F_1 \sigma_1 + F_2 \sigma_2 + F_{11} \sigma_1^2 + F_{22} \sigma_2^2 + F_{66} \sigma_6^2 - \sqrt{F_{11} F_{22}} \sigma_1 \sigma_2 < 1 . \quad (4.27)$$

U gornjem izrazu parametri se određuju iz čvrstoće kompozita prema:

$$F_1 = \frac{1}{X_t} + \frac{1}{X_c}, \quad (4.28)$$

$$F_{11} = -\frac{1}{X_t X_c}, \quad (4.29)$$

$$F_2 = \frac{1}{Y_t} + \frac{1}{Y_c}, \quad (4.30)$$

$$F_{22} = -\frac{1}{Y_t Y_c}, \quad (4.31)$$

$$F_{66} = \frac{1}{S^2}. \quad (4.32)$$

Osnovne karakteristike Tsai-Wu kriterija su:

1. Kriterij ne indicira način na koji će sloj popustiti već samo naprezanje kod kojeg će sloj popustiti.
2. Kriterij je postavljen samo jednim izrazom što dovodi do znatno jednostavnije primjene.
3. Ako treba odrediti najveće dopušteno naprezanje kriterij uvijek daje dva rješenja – jedno s pozitivnim, a drugo s negativnim predznakom.



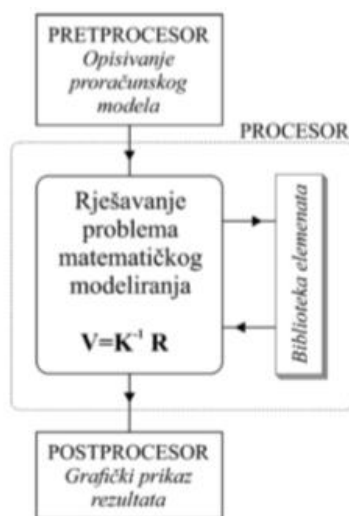
## 5. O METODI KONAČNIH ELEMENATA

Metoda konačnih elemenata numerička je metoda koja je nezaobilazna u inženjerskim proračunima. Danas postoji veliki broj računanih programa koji se temelje na toj metodi. Metoda konačnih elementa približna je numerička metoda te su njezina rješenja također približna, a realnim rješenjima može se približiti samo uz pravilni izbor proračunskih modela i uz pravilno odabrane konačne elemente koji su u mogućnosti opisati realni proces deformiranja. Metoda konačnih elemenata temelji se na fizičkoj diskretizaciji kontinuuma. Razmatrani kontinuum s beskonačno stupnjeva slobode zamjenjuje se s diskretnim modelom međusobno povezanih elemenata s ograničenim brojem stupnjeva slobode. Na taj način područje kontinuuma dijeli se na konačan broj potpodručja koja se nazivaju elementi, tj. razmatrani kontinuum postaje mreža konačnih elemenata. Konačni elementi međusobno su povezani u točkama na konturi koji se nazivaju čvorovi. Stanje u svakom elementu (polje pomaka, deformacija naprezanja, temperatura itd.) opisuje se pomoću interpolacijskih funkcija. Kada je konstrukcija složena potrebna je diskretizacija s velikim brojem elemenata te valja riješiti sustav algebarskih jednadžbi s velikim brojem nepoznanica, što je bez korištenja računala (odnosno računalnih programa) vrlo teško postići. Metoda konačnih elemenata primjenjuje se u mehanici deformabilnih tijela za rješavanje statičkih i dinamičkih problema, i jednako tako za rješavanje općih problema polja kao što su proračun temperaturnih polja, proračun strujanja te analiza elektromagnetskih polja. Postupak izvođenja jednadžbe konačnog elementa koji se temelji na rješavanju diferencijalne jednadžbe jest metoda težinskog reziduala. Drugi način izvođenja jednadžbe se temelji na varijacijskoj formulaciji [10].

### 5.1. Programski paket „Abaqus“

„Abaqus FEA“ [11] je računalni paket koji koristi metodu konačnih elemenata i računalom podržano inženjerstvo, za rješavanje inženjerskih problema. Proizvod je francuske tvrtke Dassault Systemes. Na tržištu se javlja 1978. godine i nakon toga malo po malo postaje jedan od vodećih paketa za rješavanje problema metodom konačnih elemenata. Najviše je korišten u automobilskoj i zrakoplovno-svemirskoj industriji iako se danas koristi u gotovom svim područjima koja se bavi razvojem novih proizvoda i provjerom te analizom raznih konstrukcija. Kako i kod većine sličnih programskih paketa, da bi se olakšalo upravljanje i

kontrola podataka, sastoji se od tri radne cjeline ili faze u kojima se obavlja učitavanje ulaznih podataka (pretprocesor), izračunavanje (procesor) i prikaz rezultata (postprocesor). Shematski prikaz triju faza rada programskog paketa dan je slikom 5.1.



Slika 5.1 Shematski prikaz rada programa za konačne elemente [10]

## 5.2. Konačni elementi unutar “Abaqus“-a

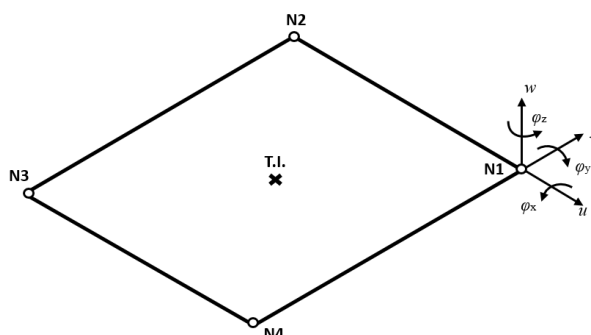
U idućim odlomcima prikazani su i objašnjeni elementi koji će se koristiti kod verifikacijskih primjera i kod analize samog problema kobilice. Podaci o svakom elementu uzeti su iz [9], [10] i [11].

### 5.2.1. Ljuskasti elementi

Konačni ljuskasti elementi za analizu ljuskastih konstrukcija služe za modeliranje ljuskastog kontinuuma koji je omeđen dvjema plohama, a jedna dimenzija (debljina) je mnogo manja od ostalih dimenzija. Kod tankih ljuskastih elemenata zanemaruju se normalna poprečna i posmična poprečna naprezanja. Debeli ljuskasti elementi zanemaruju samo normalna poprečna naprezanja. Modelirajući konvencionalnim elementima diskretiziramo tijelo definirajući srednju plohu pa naknadno zadajemo debljinu elementa. Osim toga razlikuju se i stupnjevi slobode. 3D ljuskasti element, kao i ostali 3D elementi imaju samo translacijske stupnjeve slobode, dok ljuskasti konačni elementi imaju i rotacije (5 ili 6 stupnjeva slobode po čvoru). U nastavku su prikazani u ovome radu korišteni ljuskasti konačni elementi.

**S4R**

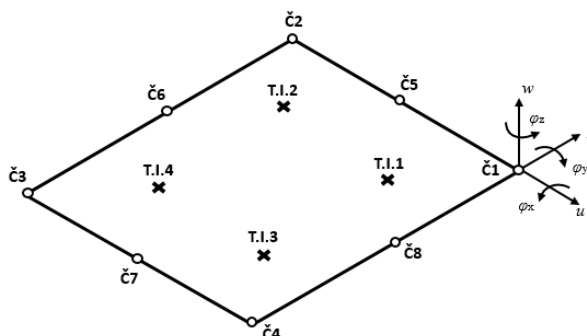
Ovaj element spada u konvencionalne ljuskaste elemente za generalnu, opću uporabu. Element sadrži 4 čvora od kojih svaki ima po 6 stupnjeva slobode (3 translacije i 3 rotacije) i dvostruko je zakrivljen. Osim toga, da bi se izbjegla pojava “*shear locking*“-a (povećana krutost elemenata uslijed precijenjenog udjela energije posmične deformacije u ukupnoj energiji deformiranja [12]) element sadrži u formulaciji reduciranu integraciju. Osim u konvencionalne, ovaj element spada u skupinu debelih ljuskastih elemenata.



Slika 5.2 S4R element s pripadnim čvorovima i stupnjevima slobode

**S8R**

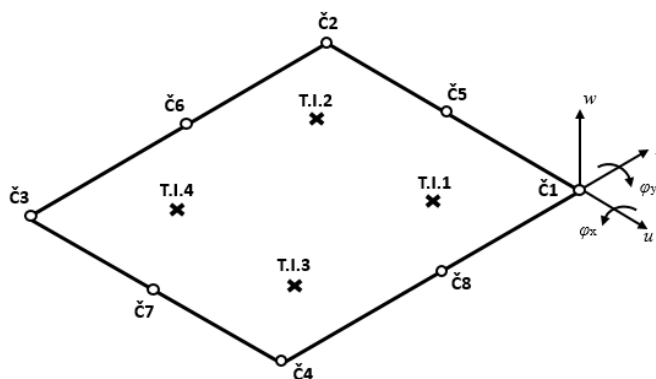
Ovaj element također spada u konvencionalne ljuskaste elemente za generalnu, opću uporabu. Sadrži 8 čvorova (element drugog stupnja) od kojih svaki ima po 6 stupnjeva slobode (3 translacije i 3 rotacije) i dvostruko je zakrivljen. Element u formulaciji ima ugrađenu reduciranu integraciju. Osim u konvencionalne, ovaj element spada u skupinu debelih ljuskastih elemenata, odnosno moguće ga je koristiti i za debele i za tanke ljuske.



Slika 5.3 S8R element s pripadnim čvorovima i stupnjevima slobode

**S8R5**

I ovaj element također spada u konvencionalne ljuskaste elemente za generalnu, opću uporabu. Sadrži 8 čvorova (element drugog stupnja) od kojih svaki ima po 5 stupnjeva slobode (3 translacije i 2 rotacije) i dvostruko je zakrivljen. S8R5 nema rotaciju  $\varphi_z$  koja predstavlja rotaciju oko vlastite osi elementa (normale). Ako nam je ljuska ravna ili sadrži finu, ne preveliku zakrivljenost (bez naglih prijelaza) nema potrebe za tim dodatnim stupnjem slobode. Iz ovog je razloga taj element ekonomičniji. Kao i prethodni elementi i ovaj sadrži reduciranu integraciju (onemogućen “*shear locking*“). Ovaj se element smatra tankim elementom (nije toliko prikladan za konstrukcije većih debljina).



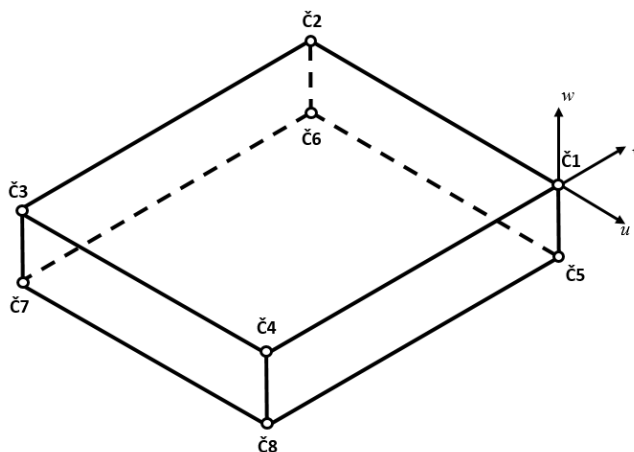
Slika 5.4 S8R5 element s pripadnim čvorovima i stupnjevima slobode

### 5.2.2. Kontinuumski ljuskasti elementi

Kontinuumski ljuskasti elementi (“*continuum shell elements*“) su generalno jednaki 3D kontinuumskim elementima osim što su u njihovoj formulaciji implementirana kinematička ograničenja o linearnosti pomaka u smjeru debljine ljuske, poznata iz teorije ljusaka.

#### **SC8R**

Ovaj element jedan je od predstavnika “*continuum shell*“ elemenata. Sadrži 8 čvorova, a u svakom čvoru postoji 3 stupnjeva slobode (3 translacije). Osim toga sadrže reduciranu integraciju. Ovim elementima diskretizirani model daje bolju reprezentaciju posmičnih deformacija po debljini. Problem kod ovih elemenata javlja se uslijed nepostojanja središnjeg čvora u elementima (između čvora na gornjoj i donjoj plohi). Naime rubne uvjete nije moguće postaviti na klasičan način kao kod ljusaka, nego ih postavljamo na gornjoj i donjoj plohi elemenata. Prikaz jednog SC8R elementa dan je slikom 5.5.



Slika 5.5 SC8R element s pripadnim čvorovima i stupnjevima slobode

## 6. VERIFIKACIJA

### 6.1. Verifikacijski zadatak

Kod numeričke analize konstrukcija FEM metodom, prije analize realnog problema potrebno je identificirati konačne elemente koji su prikladni za postojeći problem. Provjera učinkovitosti konačnih elemenata koji se koriste u daljnjem radu provodi se na jednostavnim primjerima kod kojih imamo analitičke proračune, odnosno podatke iz literature. Na taj način, osim verifikacije konačnih elemenata, provjeravamo i rubne uvjete te metodologiju rješavanja problema.

Verifikacijski zadatak sastoji se od analize kompozitne, slobodno oslonjene pravokutne ploče. Ploča je izrađena u obliku laminata sa dva sloja jednake debljine. Oba sloja sadrže jednosmjerno usmjereni kompozit s orijentacijom od  $0^\circ$  (orijentacija se zadaje u odnosu na globalnu os  $x$ ). Kod takve orijentacije poklapaju se iduće globalne i materijalne osi:  $x - 1$ ,  $y - 2$ ,  $z - 3$ . Materijalne osi nazivaju se longitudinalna (1), transversalna (2) i os po debljini (3). Materijali od kojega je izrađen kompozit su staklena vlakna (E-staklo) i matrica od epoksidne smole, a svojstva navedenog materijala uzeta su iz literature [1]. Analiziramo dva slučaja opterećenja:

1. Ploča je savojno opterećena kontinuiranim jednoliko raspoređenim opterećenjem.
2. Ploča je opterećena na izvijanje jediničnom tlačnom silom.

Progib i savojno naprezanje (u smjeru osi  $x$  i  $y$ ) analizira se u sredini ploče, odnosno u točki A sa koordinatama:  $x=50$ ,  $y=50$ . Kod provjere izvijanja određujemo vrijednost kritične sile izvijanja kod koje dolazi do gubitka stabilnosti ploče. Verifikacija se provodi korištenjem ljuskastih konačnih elemenata (engl. “*shell elements*“- S4R, S8R5, S8R) i kontinuurnih ljuskastih elemenata (engl. “*continuum shell elements*“- SC8R). Geometrijska i materijalna svojstva ploče dana u tablici 6.1. Osim svojstva koja su dana tablicom potrebna su i ova svojstva:  $E_3$ ,  $G_{13}$ ,  $G_{23}$ ,  $\nu_{13}$ ,  $\nu_{23}$ . Njih možemo dobiti koristeći izraze iz literature [5]:

$$E_3 = E_2 , \quad (6.1)$$

$$G_{13} = G_{12} , \quad (6.2)$$

$$G_{23} = \frac{E_3}{2(1 + \nu_{23})} , \quad (6.3)$$

$$\nu_{13} = \nu_{12}, \quad (6.4)$$

$$\nu_{23} = \nu_f V_f + \nu_m (1 - V_f) \left[ \frac{1 + \nu_m - \nu_{12} \frac{E_m}{E_1}}{1 - \nu_m^2 + \nu_m \nu_{12} \frac{E_m}{E_1}} \right]. \quad (6.5)$$

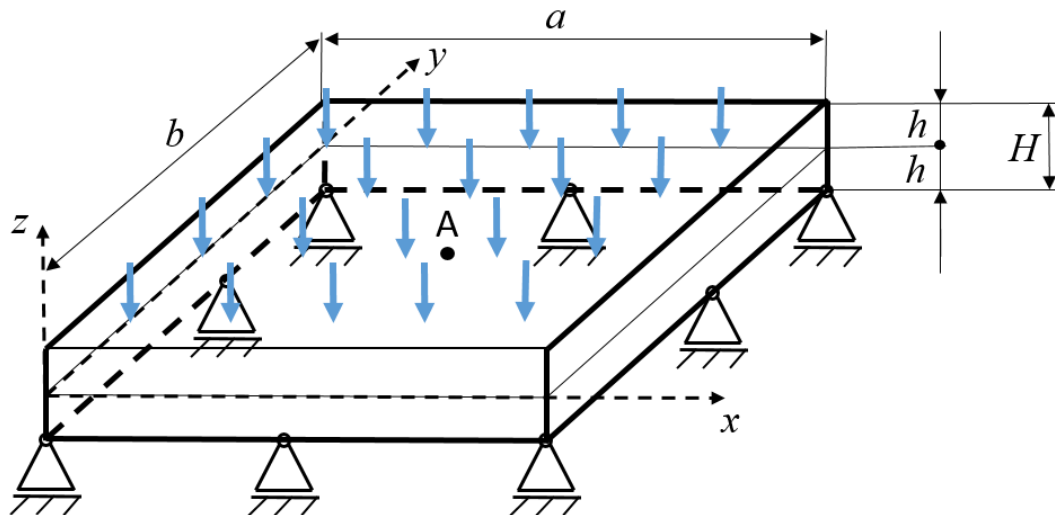
Vrijednosti izračunatih svojstva dana su također u tablici 6.1.

**Tablica 6.1 Materijalna i geometrijska svojstva pravokutne ploče**

Naziv veličine	Oznaka, mjerna veličina	Iznos
Modul elastičnosti u longitudinalnom smjeru	$E_1$ , MPa	45000
Modul elastičnosti u transverzalnom smjeru	$E_2$ , MPa	12000
Modul elastičnosti po debljini ploče	$E_3$ , MPa	12000
Modul smičnosti u ravnini 1-2	$G_{12}$ , MPa	4500
Modul smičnosti u ravnini 1-3	$G_{13}$ , MPa	4500
Modul smičnosti u ravnini 2-3	$G_{23}$ , MPa	4263,5
Poissonov faktor u ravnini 1-2	$\nu_{12}$ , -	0,3
Poissonov faktor u ravnini 1-3	$\nu_{13}$ , -	0,3
Poissonov faktor u ravnini 2-3	$\nu_{23}$ , -	0,41
Debljina jednog sloja laminata	$h$ , mm	1
Ukupna debljina ploče	$H$ , mm	2
Duljina ploče	$a$ , mm	100
Širina ploče	$b$ , mm	100
Opterećenje (kontinuirano jednoliko raspoređeno)	$q_0$ , N/mm <sup>2</sup>	0,1

## 6.2. Pravokutna ploča savojno opterećena

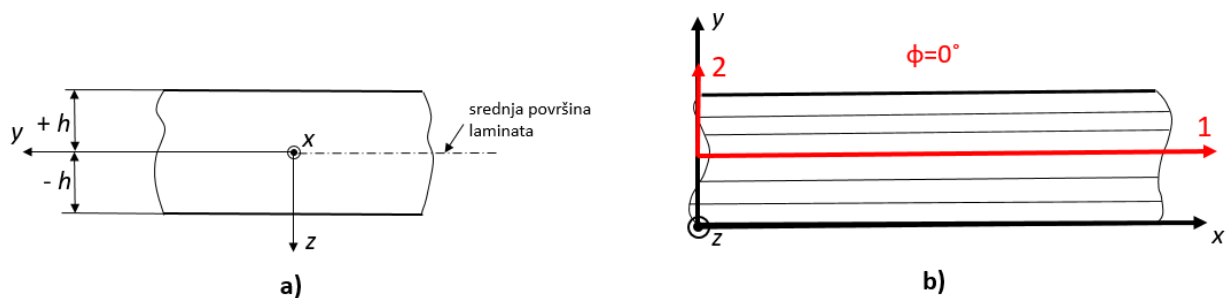
Kod analize savijanja ploče uslijed kontinuiranog jednolikog opterećenja, analiziramo progib i naprezanja u smjeru osi  $x$  i  $y$  u sredini ploče (točka A s koordinatama  $x=50$ ,  $y=50$ ). Ploča s opterećenjem  $q_0$  i rubnim uvjetima prikazana je slikom 6.1.



Slika 6.1 Slobodno oslonjena ploča savojno opterećena kontinuiranim opterećenjem

### 6.2.1. Analitičko rješenje

Prije numeričke verifikacije, analitički određujemo veličine progiba  $w$  te naprezanja u smjeru osi  $x$  i  $y$ , označene s  $\sigma_x$  i  $\sigma_y$  u sredini ploče, odnosno točki A. Slika 6.2 prikazuje presjek laminata (s debljinama slojeva) i koordinatne sustave (globalni i materijalni) prema kojem su postavljeni izrazi pri računanju progiba, odnosno naprezanja.



Slika 6.2 Karakteristike laminata: a) presjek laminata s debljinama slojeva, b) globalni i materijalni koordinatni sustav



Prije provođenja proračuna laminata potrebno je odrediti vrijednost komponenti matrice savojne krutosti. Izraz za računanje matrice savojne krutosti je (6.6), dok su razvijeni izrazi za pojedine komponente koji se nalaze unutar matrice savojne krutosti (6.7), (6.8), (6.9), (6.10) (izrazi su preuzeti iz literature [3]):

$$\mathbf{D} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n \overline{\mathbf{Q}}_k (h_k^3 - h_{k-1}^3) , \quad (6.6)$$

$$D_{11} = \frac{2h^3}{3(1-\nu_{12}\nu_{21})} E_1 , \quad (6.7)$$

$$D_{22} = \frac{2h^3}{3(1-\nu_{12}\nu_{21})} E_2 , \quad (6.8)$$

$$D_{12} = \frac{2h^3}{3(1-\nu_{12}\nu_{21})} \nu_{12} E_2 , \quad (6.9)$$

$$D_{66} = \frac{2h^3}{3} G_{12} . \quad (6.10)$$

Nakon gore dobivenih karakteristika možemo dobiti analitičko rješenje za progib kompozitne ploče koja je opterećena na savijanje. Izraz je preuzet iz literature [6], a dan je na sljedeći način:

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16q_0 \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)}{\pi^6 mn \left[ D_{11} \left(\frac{m}{a}\right)^4 + 2(D_{12} + 2D_{66}) \left(\frac{m}{a}\right)^2 \left(\frac{n}{b}\right)^2 + D_{22} \left(\frac{n}{b}\right)^4 \right]} \quad (6.11)$$

$m, n = 1, 3, 5 \dots$

Nakon progiba potrebno je izračunati naprezanja u točki A. Da bismo mogli dobiti naprezanja u ploči, potrebno je prethodno odrediti unutarnje momente koji ih uzrokuju. Izrazi za unutarnje momente za simetričan raspored slojeva su [6]:

$$M_x = -D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} , \quad (6.12)$$

$$M_y = -D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - D_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} . \quad (6.13)$$

Nakon što su vrijednosti unutarnjih momenata izračunate, pomoću njih se izračunavaju naprezanja. Maksimalne vrijednosti naprezanja javljaju se na vanjskim plohama ploče (ovo

nužno ne vrijedi za laminatne ploče), a njihovi iznosi dobiveni su sljedećim izrazima ( $H$  - ukupna debljina ploče):

$$\sigma_x = \frac{6M_x}{H^2}, \quad (6.14)$$

$$\sigma_y = \frac{6M_y}{H^2}. \quad (6.15)$$

Još je potrebno navesti da su pri izračunu analitičkog rješenja u izrazu (6.11) korištena prva četiri člana reda, tj.  $(m, n) = (1, 1), (1, 3), (3, 1), (3, 3)$ . Kod proračuna su ovi članovi dovoljni, jer korištenjem dodatnih članova ne dobivamo na točnosti rješenja. Naime članovi s višim indeksima  $m$  i  $n$  poprimaju sve manje vrijednosti, koje značajno ne utječu na ukupnu sumu (6.11). Rezultati analitičkih rješenja za progib i naprezanja prikazani su tablicom 6.2.

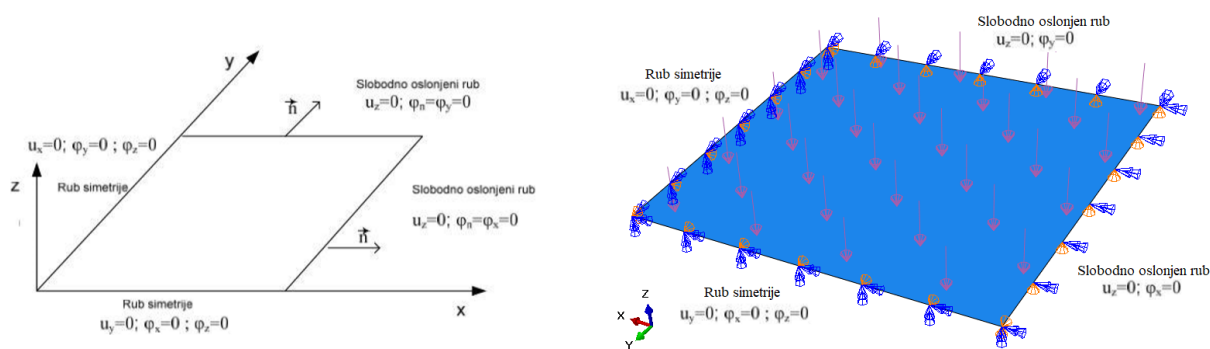
**Table 6.1 Analitička rješenja za progib, unutarnje momente i naprezanja ploče u točki A**

<b>Progib</b>	<b>Unutarnji moment u smjeru osi <math>x</math></b>	<b>Unutarnji moment u smjeru osi <math>y</math></b>	<b>Naprezanje u smjeru osi <math>x</math></b>	<b>Naprezanje u smjeru osi <math>y</math></b>
$w, \text{ mm}$	$M_x, \text{ N}$	$M_y, \text{ N}$	$\sigma_x, \text{ N/mm}^2$	$\sigma_y, \text{ N/mm}^2$
2,897	89,65	26,17	134,5	39,3

## 6.2.2. Numeričko rješenje

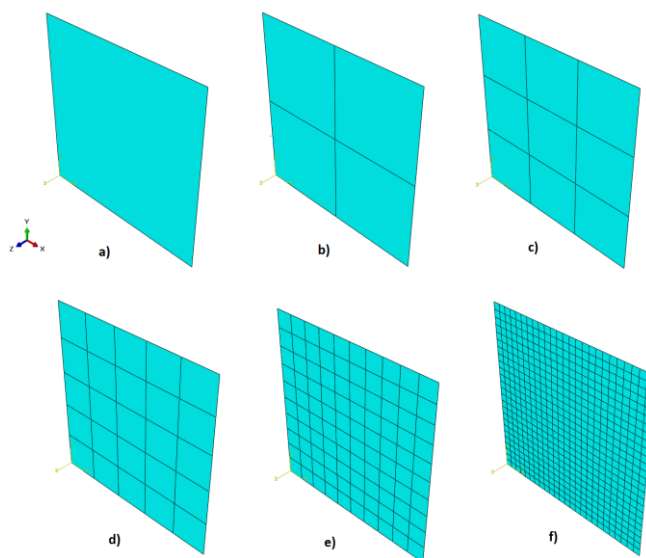
### 6.2.2.1. Model diskretiziran ljuskastim elementima

Budući da je ploča i samo opterećenje dvostruko simetrično možemo modelirati  $\frac{1}{4}$  ploče i vršiti analizu samo na tom dijelu. Na taj način smanjujemo vrijeme potrebno za rješavanje problema, a osim toga smanjujemo korištenu radnu memoriju računala. Materijalna svojstva kompozitnog sloja zadana su prema tablici 6.1. Kako je ranije navedeno, ploča sadrži dva sloja jednake orijentacije. Opterećenje koje djeluje na ploču je kontinuirano, jednoliko raspoređeno, a iznosi  $q_0 = 0,1 \text{ N/mm}^2$ . Model sadrži dvije vrste rubnih uvjeta. Da bi se mogao koristiti simetričan model, moraju se postaviti pripadni rubni uvjeti simetrije na rubovima modela. Osim njih, postavljaju se i rubni uvjeti slobodno oslonjene ploče. Skica ploče sa pripadnim rubnim uvjetima za slobodno oslonjenu ploču [11] te prikaz rubnih uvjeta i opterećenja ploče dani su slikom 6.3.



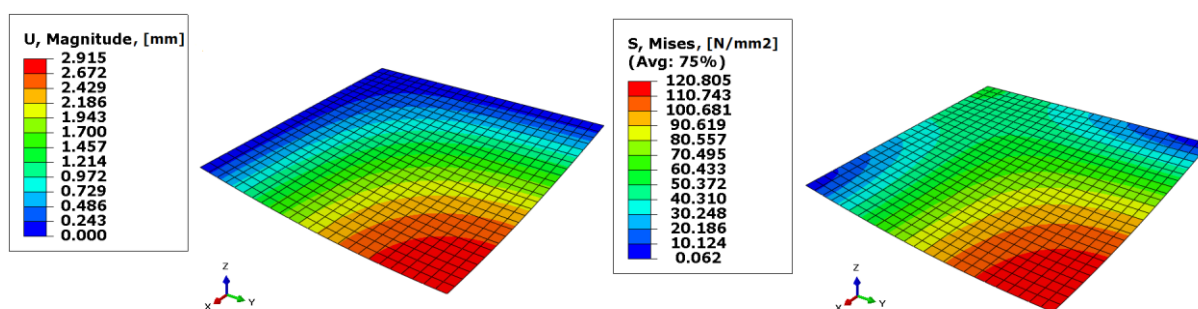
**Slika 6.3** Skica ploče s rubnim uvjetima za slobodno oslonjenu ploču za 2D elemente (lijevo) i prikaz rubnih uvjeta i opterećenja ploče (desno)

Diskretizacija prostora provodi se pomoću četverokutnih ljuskastih konačnih elemenata (prvog reda - S4R; drugog reda – S8R5, S8R). Broj konačnih elemenata od kojih se izrađuje mreža modela je: 1, 4, 9, 25, 100, 625. Izgled mreža prikazan je slikom 6.4.

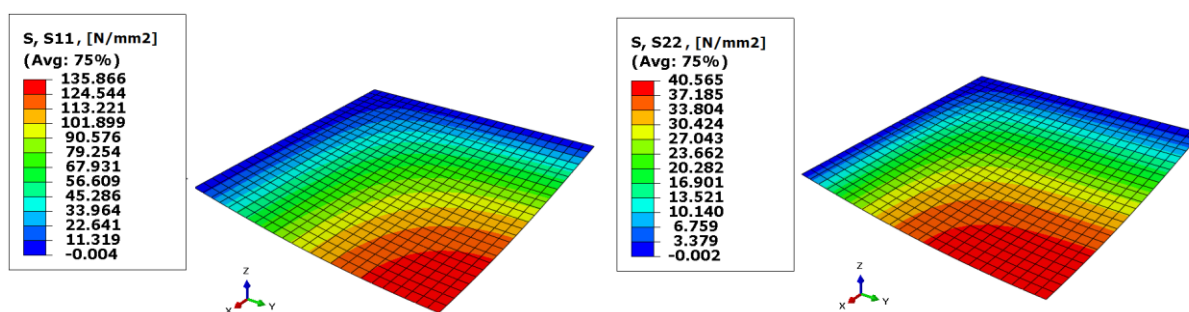


**Slika 6.4** Diskretizacija ploče četverokutnim konačnim elementima: a) 1 KE, b) 4 KE, c) 9 KE, d) 25 KE, e) 100 KE, f) 625 KE

Slika 6.5 prikazuje raspodjelu progiba i ekvivalentnih napreznja (prema von Misesu) kod ploče, dok su napreznja u x i y smjeru prikazana slikom 6.6. Raspodjela napreznja prikazana je na donjoj plohi. Prikazana je raspodjela kod modela čiji je 2D prostor diskretiziran sa S8R5 elementima (625 KE). Rezultati analize s ostalim tipovima elemenata daju kvalitativno jednake raspodjele pa se oni posebno neće prikazati.



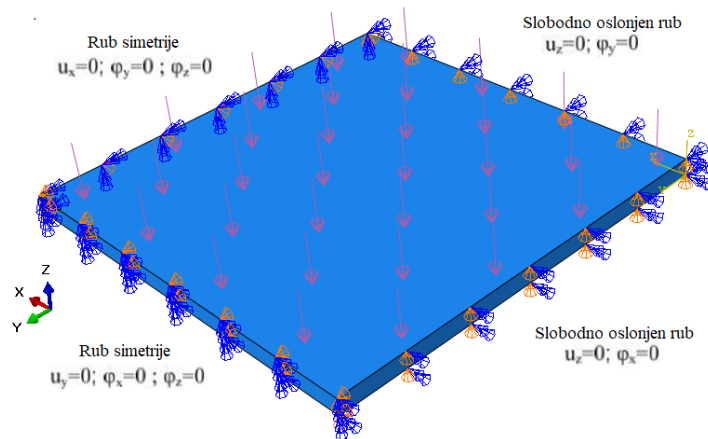
Slika 6.5 Raspodjela progiba (lijevo), odnosno ekvivalentnih naprezanja prema von Misesu (desno)



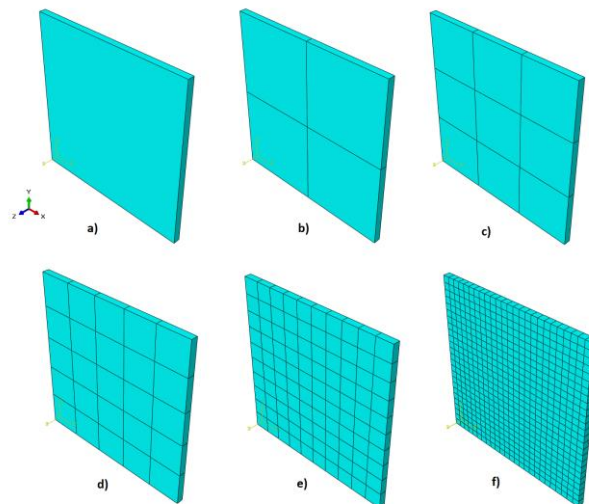
Slika 6.6 Raspodjela naprezanja u smjeru osi  $x$  (lijevo), odnosno naprezanja u smjeru osi  $y$  (desno)

#### 6.2.2.2. Model diskretiziran kontinuumskim ljuskastim elementima

Osim s ljuskastim elementima, numerička analiza verifikacijskog primjera provedena je i korištenjem ljuskastih kontinuumskih elemenata. Svojstva materijala zajedno s presjekom ostaju nepromijenjena. S obzirom da je model izrađen u prostoru i diskretiziran 3D elementima rubni uvjeti ne zadaju se za čvorove koji leže u srednjoj plohi već u čvorovima koji leže na bočnim plohama. Ograničenja (translacije) kod rubnih uvjet ista su kao i na modelu diskretiziranom ljuskastim elementima. Opterećenje se postavlja na gornjoj plosi ploče. Rubni uvjeti i opterećenja prikazani su slikom 6.7. Diskretizacija prostora provedena je ljuskastim kontinuumskim elementima SC8R. Broj elemenata s kojima je provedena konvergencija su redom: 1 KE, 4 KE, 9 KE, 25 KE, 100 KE, 625 KE. U svakoj je mreži po debljini ploče postavljen jedan element. Izgled mreža prikazan je slikom 6.8.

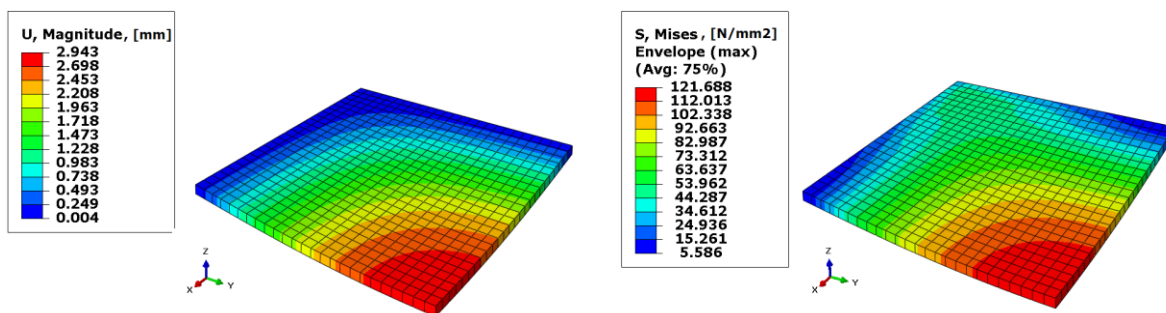


Slika 6.7 Rubni uvjeti i opterećenja 3D modela ploče

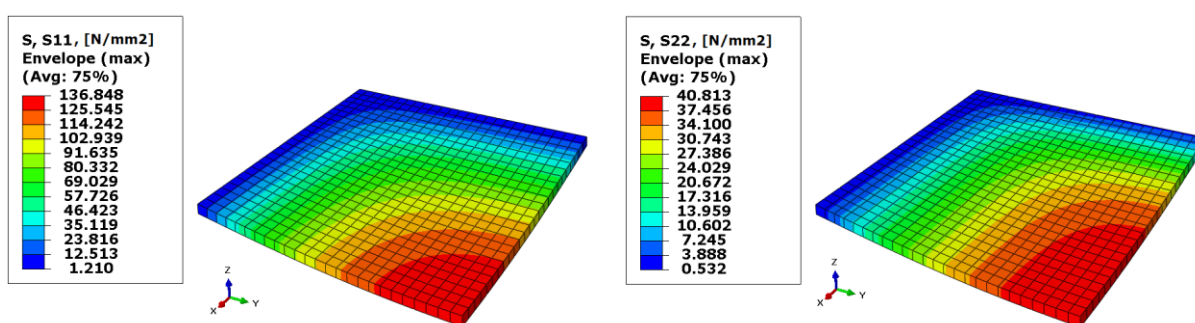


Slika 6.8 Diskretizacija ploče ljuskastim kontinuumskim konačnim elementima SC8R: a) 1 KE, b) 4 KE, c) 9 KE, d) 25 KE, e) 100 KE, f) 625 KE

Numeričkom su analizom dobivene vrijednosti progiba i ekvivalentnih naprezanja, a prikaz njihove raspodjele dan je slikom 6.9. Nadalje, slikom 6.10 dana je raspodjela naprezanja u  $x$  i  $y$  smjeru. Raspodjela je prikazana za maksimalne vrijednosti naprezanja na cijelom dijelu ploče (neovisno na kojem je sloju maksimalno naprezanje). Na slici su prikazani rezultati koji su dobiveni analizom modela diskretiziranog s 625 KE.

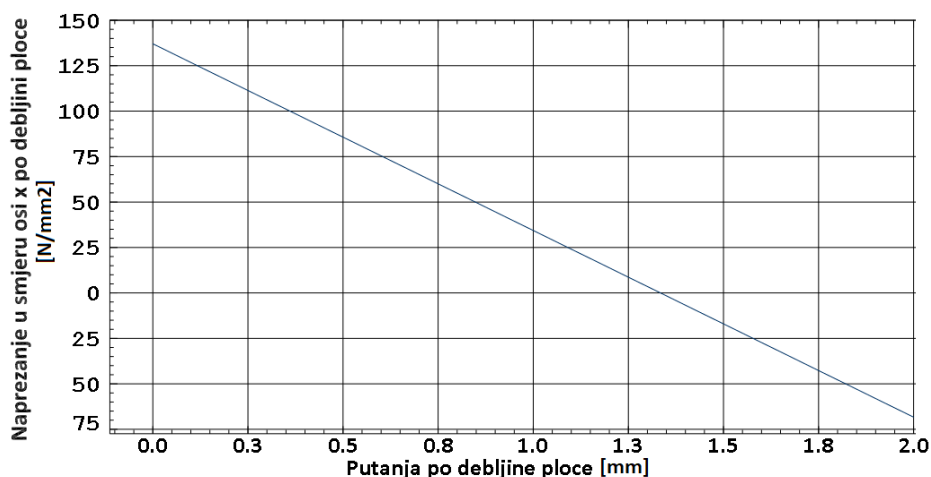


**Slika 6.9** Raspodjela progiba (lijevo), odnosno ekvivalentnih naprezanja prema von Misesu (desno)

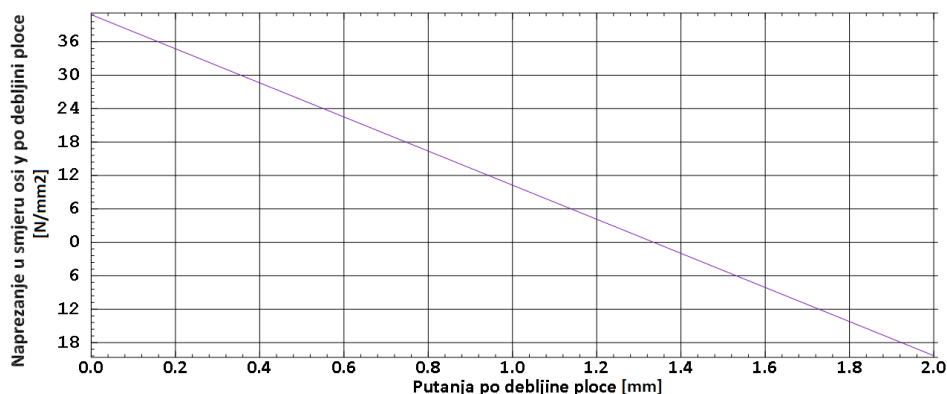


**Slika 6.10** Raspodjela naprezanja u smjeru osi  $x$  (lijevo), odnosno naprezanja u smjeru osi  $y$  (desno)

Nakon provedene analize s jednim elementom po debljini ploče, provedena je diskretizacija kod koje mreža po debljini sadrži po 4 elemenata. Ukupan broj konačnih elemenata u toj mreži iznosi 10000 (SC8R KE). Ovaj model napravljen je da bismo mogli prikazati točniju raspodjelu naprezanja po debljini ploče u njezinoj sredini (točka A). Raspodjela naprezanja po debljini prikazana je grafovima na slikama 6.11 (raspodjela naprezanja u smjeru osi  $x$ ) i 6.12 (raspodjela naprezanja u smjeru osi  $y$ ). Kako se očekivalo raspodjela po debljini je linearne prirode, bez loma na dijelovima prijelaza iz jednog u drugi kompozitni sloj. Ovaj lom je karakterističan za laminate s različito orijentiranim slojevima, a s obzirom da su dva sloja od kojih je ploča građena usmjereni jednako, lom izostaje (kompozit se ponaša kao jednoslojan). Iz prikazanih raspodjela vidimo da se najveća naprezanja nalaze na donjoj plohi ploče. Putanja kod prikazanih raspodjela definirana je na način da donja ploha ploče predstavlja 0, a gornja ploha 2 mm (apscisa u grafovima).



Slika 6.11 Raspodjela naprezanja po debljini ploče (naprezanja u smjeru osi  $x$ )



Slika 6.12 Raspodjela naprezanja po debljini ploče (naprezanja u smjeru osi  $y$ )

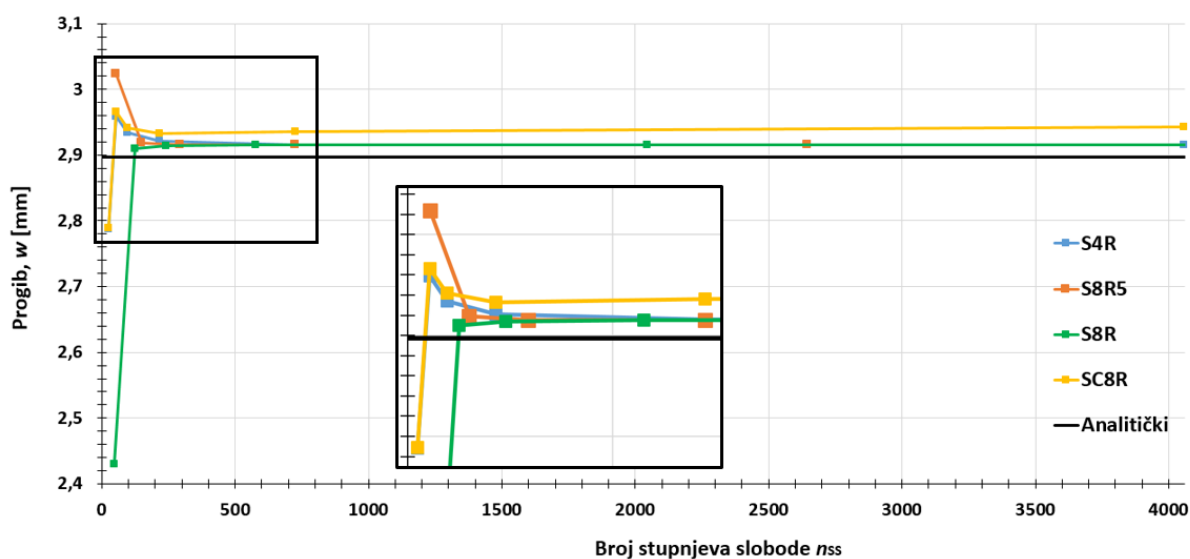
### 6.2.2.3. Usporedba rezultata dobivenih za savojno opterećenu ploču

Nakon dobivenih rezultata pomoću numeričke analize potrebno je provjeriti konvergenciju elemenata kojima je diskretizirana ploča. Osim toga elemente je potrebno usporediti i odabrati koji elementi su najbolji za računanje realne konstrukcije kompozitne kobilice. Konvergencija je provjerena na ljuskastim (S4R, S8R5 i S8R) i ljuskastim kontinuumskim (SC8R) elementima. Rezultati koji su dobiveni u ovisnosti o broju konačnih elemenata prikazani su u tablicama (tablice 6.3, 6.4, 6.5) prije samih grafova konvergencije. Nakon toga prikazana je konvergencija (slike 6.13, 6.14, 6.15) i dani su komentari. Konvergencija u grafovima gleda se u ovisnosti o broju stupnjeva slobode.

Prvo je provedena konvergencija progiba u središtu ploče. Dobiveni rezultati prema broju konačnih elemenata dani su u tablici 6.3. U istoj je tablici izračunata i greška, odnosno odstupanje numeričkih od analitičkog rješenja.

Tablica 6.3 Konvergencija rezultata za progib ploče, mm

Broj K.E.	Četverokutni ljuskasti elementi			Ljuskasti kontinuum elementi	Greška, %			
	S4R	S8R5	S8R	SC8R	S4R	S8R5	S8R	SC8R
1	2,788	3,024	2,43	2,789	3,78	4,37	16,13	3,74
4	2,959	2,919	2,91	2,966	2,13	0,75	0,44	2,37
9	2,934	2,915	2,914	2,942	1,16	0,61	0,57	1,54
25	2,921	2,915	2,915	2,933	0,81	0,61	0,61	1,23
100	2,916	2,915	2,915	2,936	0,64	0,61	0,61	1,33
625	2,915	2,915	2,915	2,943	0,61	0,61	0,61	1,57



Slika 6.13 Dijagram konvergencije progiba ploče u točki A

Pomoću dijagrama konvergencije na slici 6.13 možemo zaključiti da su svi elementi (i ljuskasti i kontinuumski ljuskasti) doveli do zadovoljavajuće konvergencije numeričkog rješenja (zadovoljavajući je rezultat s greškom, tj. odstupanjem do 5%). Ipak ljuskasti elementi dali su rezultate koji su bliži analitičkom rješenju (greška 0,61%). Kontinuumski ljuskasti elementi prikazuju malo veću grešku, odnosno odstupanje numeričkog od



analitičkog rješenja, a ono iznosi 1,57%. Rješenje dobiveno ljuskastim konačnim elementima bliže je analitičkom, jer se oba proračuna zasnivaju na teoriji ljusaka. S druge strane, formulacija kontinuurnih ljuskastih elemenata polazi od 3D teorije kontinuuma. Gledajući ljuskaste elemente najbržu konvergenciju postigli su S8R elementi (ljuskasti elementi drugoga reda s reduciranom integracijom).

Nakon progiba provjerena je konvergencija naprezanja u točki A i to za naprezanje u smjeru osi  $x$  i  $y$ . Rezultati analize za naprezanje u smjeru  $x$  (s pripadnim greškama) dani su tablicom 6.4, a rezultati za naprezanje u smjeru  $y$  tablicom 6.5.

**Tablica 6.4 Konvergencija rezultata za naprezanje u smjeru  $x$ , MPa**

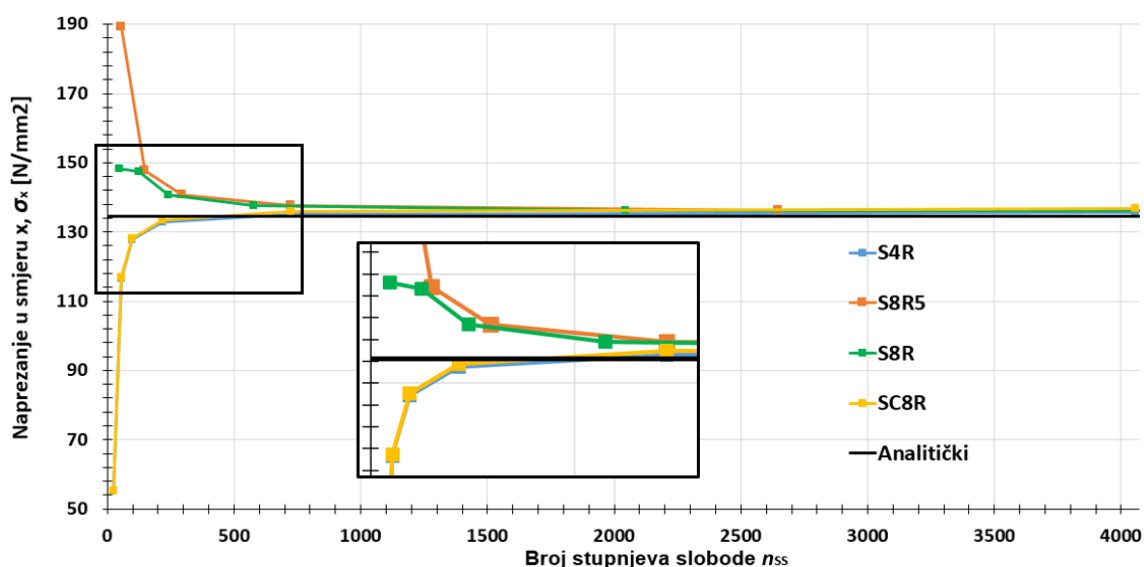
Broj K.E.	Četverokutni ljuskasti elementi			Ljuskasti kontinuum elementi	Greška, %			
	S4R	S8R5	S8R	SC8R	S4R	S8R5	S8R	SC8R
1	55,13	189,3	148,4	55,18	59,01	40,74	10,33	58,97
4	116,7	147,6	147,3	116,9	13,23	9,74	9,52	13,09
9	127,76	140,8	140,8	128,1	5,01	4,68	4,68	4,75
25	133	137,6	137,6	133,5	1,12	2,3	2,3	0,74
100	135,1	136,2	136,2	135,9	0,45	1,26	1,26	1,04
625	135,7	135,9	135,9	136,8	0,89	1,04	1,04	1,71

**Tablica 6.5 Konvergencija rezultata za naprezanje u smjeru  $y$ , MPa**

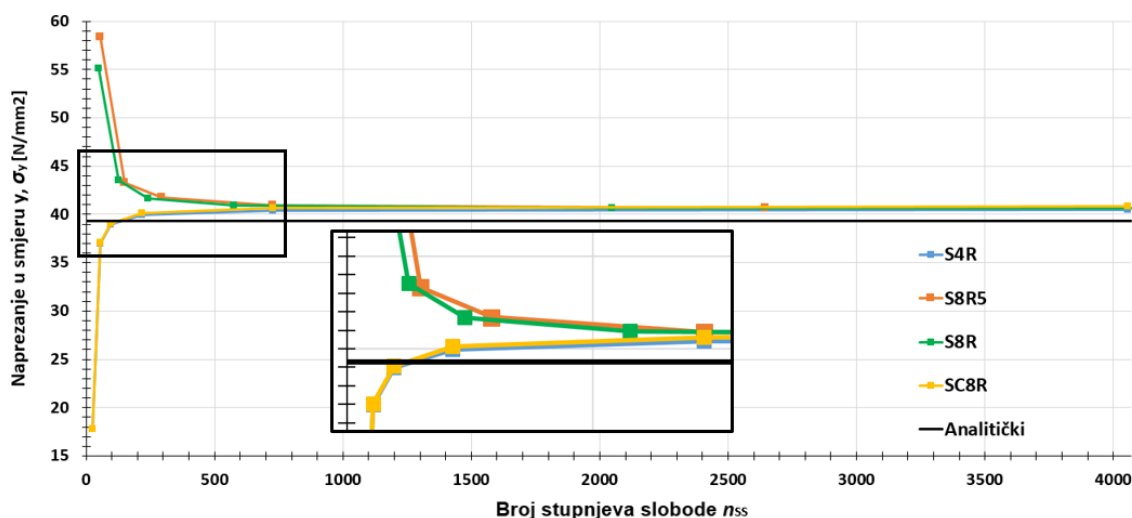
Broj K.E.	Četverokutni ljuskasti elementi			Ljuskasti kontinuum elementi	Greška, %			
	S4R	S8R5	S8R	SC8R	S4R	S8R5	S8R	SC8R
1	17,75	58,3	55,13	17,78	54,83	48,35	40,28	54,76
4	36,97	43,3	43,5	37,04	5,93	10,18	10,69	5,75
9	38,97	41,7	41,67	39,08	0,84	6,11	6,03	0,55
25	39,96	40,9	40,93	40,12	1,68	4,07	4,15	2,09
100	40,4	40,64	40,64	40,62	2,8	3,41	3,41	3,36
625	40,5	40,57	40,56	40,81	3,05	3,23	3,21	3,84

Nakon tablično prikazanih rezultata i pomoću dijagrama na slikama 6.14 i 6.15 možemo usporediti elemente i njihovu konvergenciju. Kod analize naprezanja najbržu konvergenciju rezultata pokazali su ljuskasti S4R i kontinuumski ljuskasti SC8R elementi. Ostali ljuskasti elementi pokazali su malo sporiju konvergenciju, ali su rezultati koji su dobiveni njihovim korištenjem zadovoljavajući. Najtočniji rezultat dobiven je korištenjem S4R elemenata (greška od 3,05%).

Nakon analize konvergencije rezultata za progib i naprezanje, ostaje provjera konvergencije rezultata pri računanju vrijednosti kritične sile izvijanja kod koje će doći do gubitka stabilnosti kompozitne ploče.



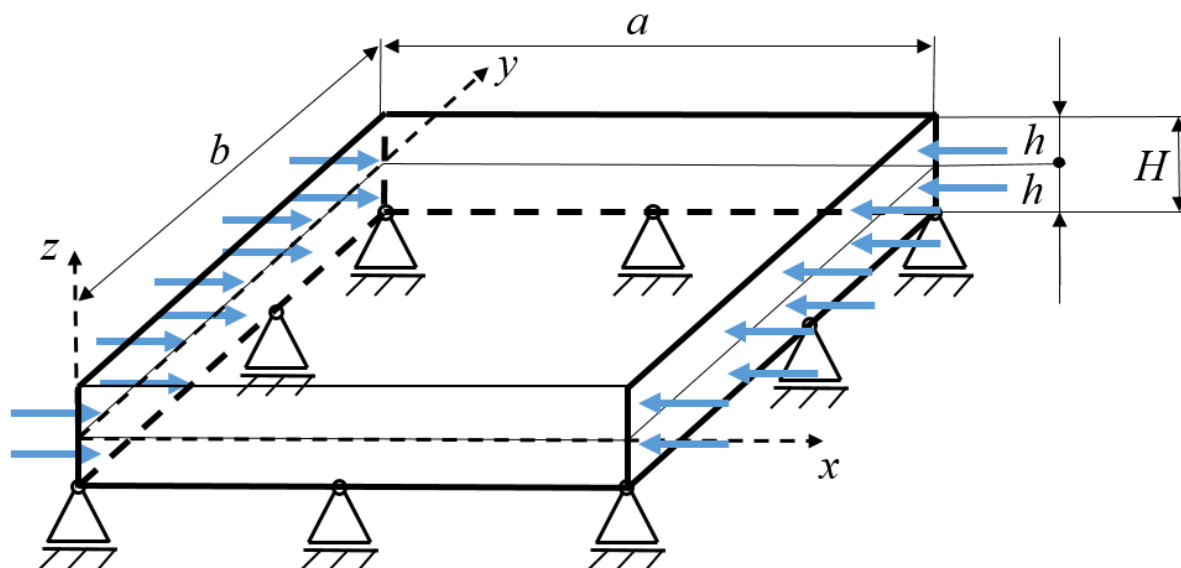
Slika 6.14 Dijagram konvergencije naprezanja ploče u smjeru osi x (u točki A)



Slika 6.15 Dijagram konvergencije naprezanja ploče u smjeru osi y (u točki A)

### 6.3. Pravokutna ploča opterećena na izvijanje

Kod analize izvijanja ploče uslijed kontinuiranog jednolikog opterećenja analiziramo kritičnu silu izvijanja kod koje dolazi do gubitka stabilnosti konstrukcije. Ploča s jediničnim opterećenjem i rubnim uvjetima prikazana je slikom 6.16.



Slika 6.16 Slobodno oslonjena ploča opterećena na savijanje

#### 6.3.1. Analitičko rješenje

Diferencijalna jednadžba izvijanja laminata prema [6], [7], [8], [17] dana je izrazom:

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = -N_{kr} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} . \quad (6.16)$$

Izraz za progib pravokutne ploče, slobodno oslonjene po svim rubovima dan je sljedećim izrazom:

$$w(x, y) = \sum_m \sum_n w^{mn} \sin(m\pi \frac{x}{a}) \sin(n\pi \frac{y}{b}) . \quad (6.17)$$

Da bismo dobili izraz za kritičnu silu izvijanja potrebno je izraz (6.17) uvrstiti u (6.16). Nakon sređivanja dobiven je izraz za računanje kritične sile izvijanja u sljedećem obliku:

$$N_{kr} = \pi^2 \left[ D_{11} \left( \frac{m}{a} \right)^2 + 2(D_{12} + 2D_{66}) \left( \frac{n}{b} \right)^2 + D_{22} \left( \frac{n}{b} \right)^4 \left( \frac{a}{m} \right)^2 \right] . \quad (6.18)$$

Nadalje, najniža vrijednost kritične sile izvijanja dobije se uvrštavanjem jedinice umjesto  $n$  i  $m$ . Na taj način dobijemo vrijednost kritične sile kod prve forme izvijanja (koja je ujedno i najniža sila gubitka stabilnosti konstrukcije). Izraz (6.18) u tom slučaju možemo zapisati na sljedeći način:

$$N_{kr} = \pi^2 \left[ D_{11} \left( \frac{1}{a} \right)^2 + 2(D_{12} + 2D_{66}) \left( \frac{1}{b} \right)^2 + D_{22} \left( \frac{1}{b} \right)^4 \left( \frac{a}{1} \right)^2 \right]. \quad (6.19)$$

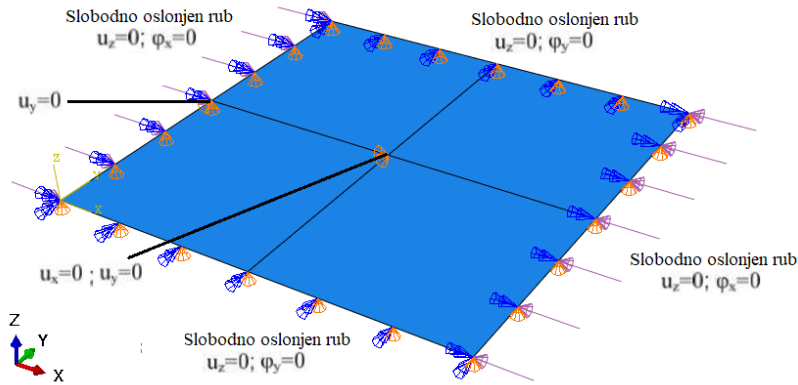
Uvrštavanjem podataka iz tablice 6.1 u izraz (6.19) dobijemo analitičku vrijednost najniže kritične sile izvijanja simetričnog laminata:

$$N_{kr} = 55,12 \text{ N/mm}. \quad (6.20)$$

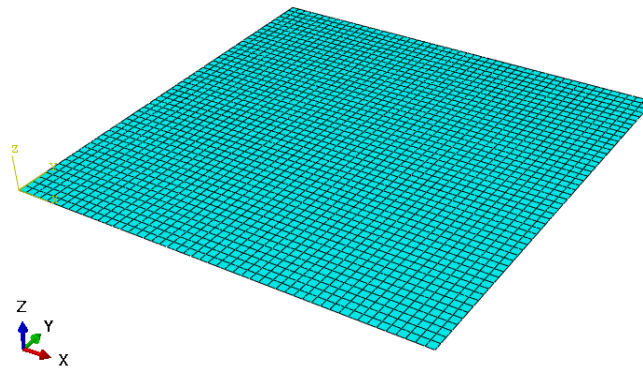
### 6.3.2. Numeričko rješenje

#### 6.3.2.1. Model diskretiziran ljuskastim elementima

Simetrična konstrukcija, koja je simetrično opterećena, nema nužno simetrične forme gubitka stabilnosti. Zbog ove činjenice potrebno je modelirati cijelu ploču (ne možemo iskoristiti simetričnost ploče i njezinih opterećenja). Nakon izrade modela postavljano materijalna svojstva kompozitnih slojeva. Ta su svojstva jednaka kao i kod modela savijanja pravokutne ploče, a dana su tablicom 6.1. Građa laminata je također nepromijenjena (dva jednosmjerna sloja jednako usmjerena sloja, kao i u prethodnom primjeru). Kod numeričkog proračuna stabilnosti zadajemo jedinično opterećenje od 1 N/mm (linijsko opterećenje) na dva nasuprotna ruba ploče (slika 6.17). Prva vrsta rubnih uvjeta koje treba postaviti su uvjeti slobodno oslonjene ploče. Osim tih, potrebno je postaviti rubne uvjete koji omogućuju analizu stabilnosti (ograničenja na središnjem dijelu ploče i na središnjoj točki jednog ruba ploče), prema slici 6.17. Diskretizacija ploče provedena je korištenjem četverokutnih ljuskastih konačnih elemenata prvog (S4R) i drugog reda (S8R5, S8R). Broj elemenata od kojih je izrađena mreža je: 16, 36, 64, 100, 400, 2500. Primjer mreže s 2500 S8R5 elemenata prikazan je slikom 6.18.

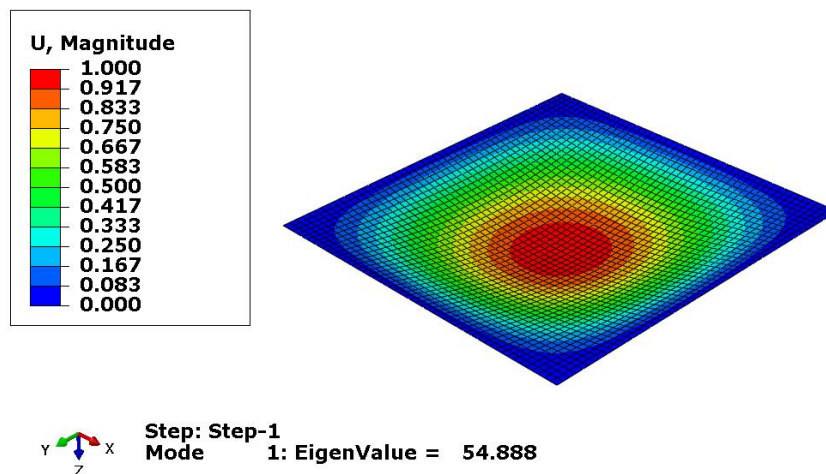


Slika 6.17 Opterećenja i rubni uvjeti ljuskastog modela



Slika 6.18 Primjer diskretizacije ploče ljuskastim elementima S8R5 (2500 KE)

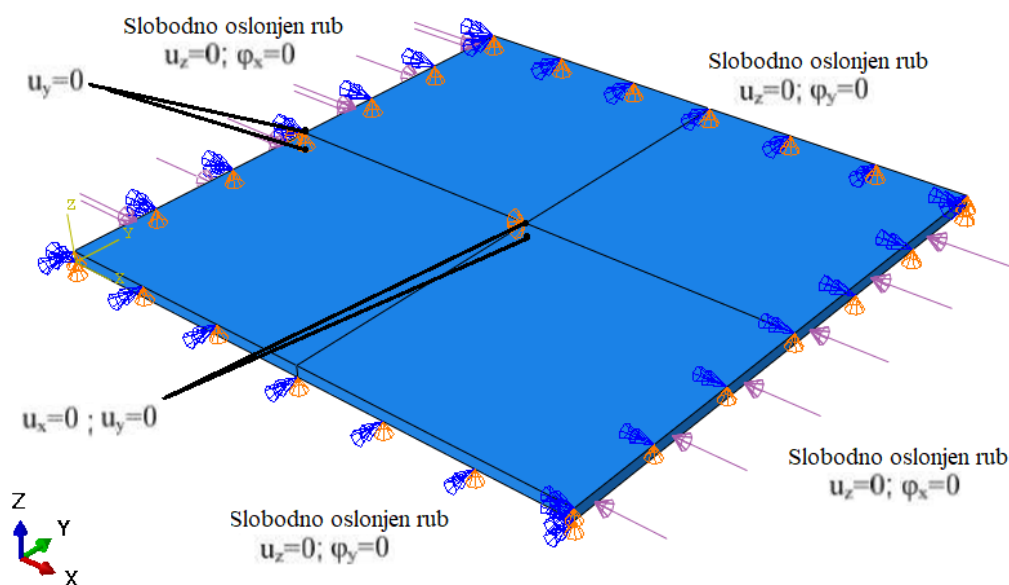
Prva forma gubitka stabilnosti, zajedno sa vrijednošću kritične sile izvijanja (koja iznosi 54,88 N/mm), za model čiji je prostor diskretiziran s 2500 S8R5 KE, prikazana je slikom 6.19. Rezultati analize s ostalim tipovima elemenata daju kvalitativno slične forme gubitka stabilnosti pa one nisu posebno prikazane.



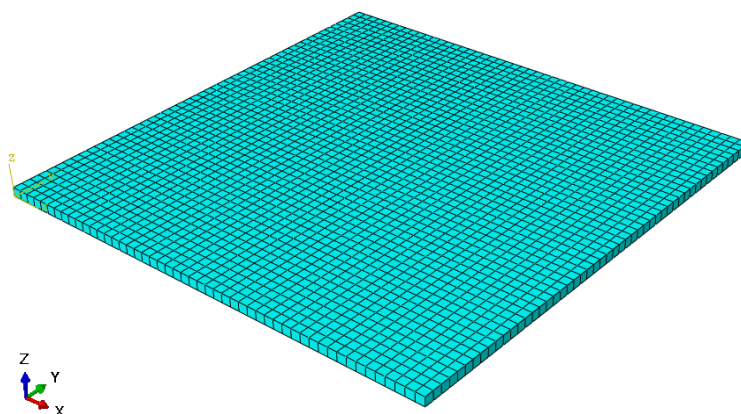
Slika 6.19 Izgled prve forme gubitka stabilnosti i vrijednost kritične sile izvijanja [N/mm]

### 6.3.2.2. Model diskretiziran kontinuumskim ljuskastim elementima

Nakon diskretiziranja prostora ljuskastim elementima, provodi se i diskretizacija kontinuumskim ljuskastim elementima. Model se izrađuje u 3D prostoru. Svojstva materijala i presjek ploče ostaje isti kao kod analize pomoću ljuskastih elemenata. Promjena se javlja kod opterećenja. Ono više nije linijsko, nego se pretvara u opterećenje po bočnoj plohi. Prethodna magnituda linijskog opterećenja od 1 N/mm sada se mora raspodijeliti po debljini ploče. S obzirom da ona iznosi 2 mm, tlak koji postavljamo kao opterećenje iznosi  $0,5 \text{ N/mm}^2$ . Kao i kod savijanja ploče, obzirom da je model izrađen u prostoru i diskretiziran 3D elementima rubni uvjeti ne zadaju se za čvorove koji leže u srednjoj plohi već u čvorovima koji leže na bočnim plohama. Ograničenja (translacije) kod rubnih uvjet ista su kao i na modelu diskretiziranom ljuskastim elementima. Opterećenja i rubni uvjeti na 3D modelu ploče prikazani su slikom 6.20. Diskretizacija 3D prostora provedena je korištenjem kontinuumskih ljuskastih elemenata (SC8R). Broj elemenata od kojih je izrađena mreža je: 16, 36, 64, 100, 400, 2500. Primjer mreže s 2500 SC8R elemenata prikazan je slikom 6.21.



Slika 6.20 Opterećenja i rubni uvjeti kontinuumskog ljuskastog modela



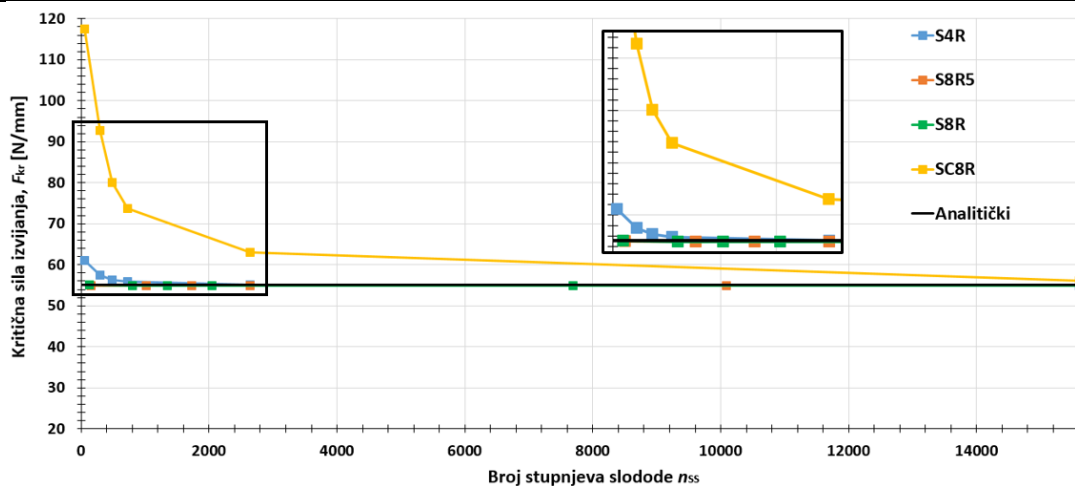
**Slika 6.21** Primjer diskretizacije ploče kontinuumskim ljuskastim elementima SC8R (2500 KE)

### 6.3.2.3. Usporedba rezultata dobivenih za ploču opterećenu na izvijanje

Konvergencija je provjerena za ljuskaste (S4R, S8R5 i S8R) i kontinuumske ljuskaste (SC8R) elemente. Rezultati za kritičnu silu izvijanja, koji su dobiveni u ovisnosti o broju konačnih elemenata, prikazani su u tablici 6.6. U istoj je tablici izračunata i greška, odnosno odstupanje numeričkih od analitičkog rješenja. Nakon toga prikazana je konvergencija numeričkih k analitičkim rješenjima (slika 6.22) i dani su komentari. Konvergencija u grafovima gleda se u ovisnosti o broju stupnjeva slobode.

**Tablica 6.6** Konvergencija rezultata za kritičnu silu izvijanja, N/mm

Broj K.E.	Četverokutni ljuskasti elementi			Ljuskasti kontinuum elementi	Greška, %			
	S4R	S8R5	S8R	SC8R	S4R	S8R5	S8R	SC8R
16	61,14	54,97	55,06	117,4	10,92	0,27	0,11	112,99
36	57,53	54,91	54,9	92,69	4,37	0,38	0,4	68,16
64	56,35	54,9	54,89	80,1	2,23	0,4	0,42	45,32
100	55,81	54,89	54,89	73,72	1,25	0,42	0,42	33,74
400	55,12	54,88	54,89	63,04	0	0,44	0,42	14,37
2500	54,92	54,88	54,89	56,03	0,36	0,44	0,42	1,65



Slika 6.22 Dijagram konvergencije kritične sile izvijanja

Iz gornjeg dijagrama konvergencije vidimo da svi elementi (ljskasti i kontinuumski ljskasti) konvergiraju k analitičkom rješenju. Znatno sporiju konvergenciju pokazali su kontinuumski ljskasti elementi (SC8R), dok su ljskasti elementi pokazali brzu konvergenciju kod relativno malog broja konačnih elemenata (stupnjeva slobode). Ako promatramo grešku najgušćih mreža najtočnije rješenje dali su ljskasti elementi prvoga reda (S4R). Greška kod modela s 2500 KE iznosi 0.36%. Usporedbe radi, najveća greška dobivena je korištenjem kontinuumskih ljskastih elemenata (SC8R). Greška kod njih iznosi 1,65%.

#### 6.4. Odabir konačnih elemenata za proračun kobilice

Nakon provedene verifikacije i provjere konvergencije elemenata za slučaj kompozitne pravokutne ploče, došlo je do zaključka da su ljskasti elementi dali bolje rezultate od kontinuumskih ljskastih. Iako su se kontinuumskim ljskastim elementima postigli zadovoljavajući rezultati, za to je bio potreban velik broj elemenata. Kontinuumski elementi najlošije su se pokazali kod problema izvijanja (kritična sila izvijanja), gdje je konvergencija bila jako spora. Najbržu konvergenciju su prema očekivanjima dali ljskasti elementi drugoga reda (S8R, S8R5). Najtočniji rezultati dobiveni su korištenjem ljskastih elemenata prvoga stupnja. Konačan zaključak je da za slučaj pravokutne ploče najpogodnije elemente predstavljaju ljskasti elementi prvoga reda (S4R). Brzina konvergiranja ovih elemenata pokazala se velikom. Ovim tipom elemenata je moguće dobiti zadovoljavajući rezultat u kraćem vremenu u odnosu na elemente drugog stupnja. Pri tome je za isti broj elemenata korišteno manje računalne memorije. S4R elementi bit će korišteni kod proračuna kompozitne kobilice.



## 7. PRORAČUN ČVRSTOĆE I STABILNOSTI KOBILICE

U ovom poglavlju opisan je postupak numeričke simulacije kompozitne kobilice. Prvo su prikazani rezultati dobiveni upotrebom teoretski dobivenih svojstava materijala i parametara čvrstoće laminata. Nakon toga objašnjeni su provedeni eksperimenti u svrhu određivanja materijalnih svojstava. Nakon korekcije teoretskih podataka eksperimentalno dobivenim vrijednostima provedena je druga analiza kobilice. U završnoj analizi dodana su konstrukcijska rješenja u svrhu poboljšanja čvrstoće na kritičnim mjestima konstrukcije (radijusi, ukrute, itd.) te je provedena analiza čvrstoće.

### 7.1. KOBILICA SA SVOJSTVIMA KOJA SU DOBIVENA MIKROMECHANIKOM

#### 7.1.1. Teorijsko određivanje svojstva čvrstoće jednoslojnih kompozita

Mehanička svojstva vlaknom ojačanih polimernih kompozita ovise o mnogim faktorima koji uključuju od konstituenata naslijeđene karakteristike, orijentaciju i udio materijala za ojačanje, tehnike tkanja, radne temperature i udio vlage u atmosferi u kojima se nalaze. Da bi se precizno odredila mehanička svojstva potrebno je provesti odgovarajuće eksperimente. Problem se javlja u činjenici da je potrebno provoditi novo ispitivanje za svaki kompozit koji je drugačije izrađen. Osim toga svako ispitivanje provodi se za određeni volumni udio i vrstu kompozita, a bilo kakva promjena u sastavu značajno može promijeniti svojstva kompozita. Eksperimenti za određivanje svojstava su skupi, a izrada i ispitivanje uzorka može uzeti dosta vremena. Nakon svega, može se zaključiti da je potrebno analitički pretpostaviti iznose mehaničkih parametara koji će se koristiti kod početnog dizajniranja kompozitnog sustava. Mikromehanika predstavlja jednu od analitičkih metoda koje se koriste kod određivanja svojstava kompozita. Osnovne zakonitosti i pretpostavke mikromehanike dane su u 3. poglavlju ovoga rada. U nastavku će biti prikazani teorijski i empirijski izrazi koji se koriste za dobivanje iznosa parametra čvrstoće jednoslojnih kompozita. Proračun je proveden po literaturi [2].

Svojstva koja će se računati su:

1. Vlačna čvrstoća u longitudinalnom smjeru.
2. Tlačna čvrstoća u longitudinalnom smjeru.
3. Vlačna čvrstoća u transverzalnom smjeru.
4. Tlačna čvrstoća u transverzalnom smjeru.
5. Smična ravninska čvrstoća.

### **Vlačna čvrstoća u longitudinalnom smjeru**

Kada na jednoslojan kompozit djeluje vlačno, kontinuirano i jednoliko naprezanja javljaju se dva načina popuštanja kompozita. Prvi mehanizam popuštanja je pucanje vlakana, a javlja se kada je maksimalna duljinska deformacija vlakna manja od maksimalne duljinske deformacije matrice. Kada dođe do duljinske deformacije kompozita koja je jednaka maksimalnoj duljinskoj deformaciji vlakna, kompozit puca. Njegova vlačna čvrstoća tada iznosi:

$$f_{Lt} = f_{ft}V_f + \sigma_m(1 - V_f), \quad (7.1)$$

pri čemu je:  $f_{ft}$ -vlačna čvrstoća vlakna;  $V_f$ -volumni udio vlakna u kompozitu;  $\sigma_m$ -srednje naprezanje matrice pri deformaciji jednakoj maksimalnoj duljinskoj deformaciji vlakana.

Drugi mehanizam popuštanja je popuštanje matrice. Javlja se kada je maksimalna duljinska deformacija matrice manja od maksimalne duljinske deformacije vlakna. U tom slučaju do popuštanja dolazi kad se u kompozitu postigne deformacija koja je jednaka maksimalnoj duljinskoj deformaciji matrice. Vlačna čvrstoća kompozita iznosi:

$$f_{Lt} = \sigma_f V_f + f_{mt}(1 - V_f), \quad (7.2)$$

pri čemu je:  $f_{mt}$ -vlačna čvrstoća matrice;  $\sigma_f$ -srednje naprezanje koje se javlja u matrici pri deformaciji jednakoj maksimalnoj duljinskoj deformaciji matrice.

### **Tlačna čvrstoća u longitudinalnom smjeru**

Kod tlačnog opterećenja kompozita glavnu ulogu u preuzimanju opterećenja vrši matrica. Osim toga, ona daje stabilnost vlaknima i o njoj ovisi kakav će biti mehanizam popuštanja. Osim o matrici, mehanizam popuštanja ovisi i o volumnom udjelu vlakana.

Mehanizme popuštanja kod tlačnog opterećenja možemo podijeliti prema načinu ponašanja matrice. Ako se matrica ponaša elastično javlja se fenomen mikroizvijanja. Mikroizvijanje može biti ekstenzijsko i smično. Ekstenzijsko mikroizvijanje javlja se kod malog volumnog udjela ojačala ( $V_f < 20\%$ ), a karakterizira ga izvanfazno izvijanje vlakana (slika 7.1;a) koje uzrokuje deformaciju matrice. Tlačna longitudinalna čvrstoća tada se računa prema izrazu:

$$f_{Lc} = 2V_f \sqrt{\frac{V_f E_m E_f}{3(1-V_f)}}. \quad (7.3)$$

Smično mikroizvijanje javlja se kod većeg volumnog udjela ojačala ( $V_f > 20\%$ ), a karakterizira ga fazno izvijanje vlakana (slika 7.1;b). Mikroizvijanje ponovo uzrokuje deformaciju matrice, a tlačnu čvrstoću računamo prema izrazu:

$$f_{Lc} = \frac{G_m}{(1-V_f)}. \quad (7.4)$$

Kada se matrica ponaša kruto, a volumni udjeli vlakana su visoki, javlja se popuštanje kompozita bez mikroizvijanja (slika 7.1;c). Tlačna čvrstoća se u tom slučaju računa pomoću sljedećeg izraza:

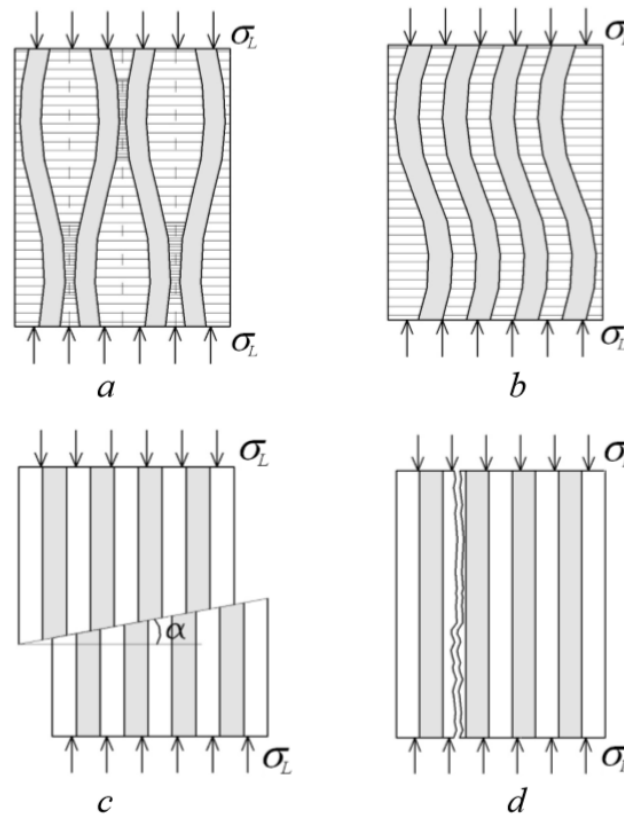
$$f_{Lc} = 2f_{fs} \left[ V_f + (1-V_f) \frac{E_m}{E_f} \right], \quad (7.5)$$

kod kojeg  $f_{fs}$  predstavlja smičnu čvrstoću vlakna.

Četvrti mehanizam popuštanja koji se javlja kod tlačno opterećenog kompozita u longitudinalnome smjeru je longitudinalno širenje pukotine u matrici uslijed Poissonova efekta. Kod ovog mehanizma longitudinalno opterećenje uzrokuje pojavu deformacije u transverzalnome smjeru, a popuštanje nastupa kada su maksimalne vrijednosti tlačne čvrstoće dosegnute. Nju možemo izračunati sljedećim izrazom:

$$f_{Lc} = \frac{[E_f V_f + E_m (1-V_f)](1-V_f^{1/3})\varepsilon_{mu}}{\nu_f V_f + \nu_m (1-V_f)}, \quad (7.6)$$

pri čemu su  $\nu_f$  i  $\nu_m$  Poissonovi faktori vlakna i matrice, a  $\varepsilon_{mu}$  predstavlja maksimalnu deformaciju matrice. Navedeni mehanizmi popuštanja prikazani su slikom 7.1.



**Slika 7.1** Mehanički mehanizmi popuštanja jednoslojnog laminata tlačno opterećenog u longitudinalnom smjeru [2]: a – ekstenzijsko mikroizvijanje, b – smično mikroizvijanje, c – popuštanje bez mikroizvijanja, d – longitudinalno popuštanje matrice uslijed Poissonovog efekta.

### Vlačna čvrstoća u transverzalnom smjeru

Transverzalno vlačno opterećenje najopasniji je način opterećivanja kompozita. Vlakna, umjesto da budu nositelji opterećenja, postaju krute uključine koje smanjuju deformaciju matrice.

Prvo su prikazani empirijski pristupi određivanja vlačne čvrstoće u transverzalnom smjeru. Pod pretpostavkom savršene adhezije između vlakna i matrice popuštanje matrice javlja se kod spoja vlakna i matrice ili u njegovoj blizini. Čvrstoću izračunavamo izrazom:

$$f_{Tt} = \frac{E_T f_{mt}}{E_m} (1 - V_f^{1/3}), \quad (7.7)$$

pri čemu je  $f_{mt}$  transverzalna vlačna čvrstoća matrice.

Drugi empirijski izraz za vlačnu čvrstoću u transverzalnom smjeru dan je izrazom (7.8):

$$f_{Ti} = f_{m_i} C_v \left[ 1 + (V_f - \sqrt{V_f}) \left( 1 - \frac{E_m}{E_f} \right) \right], \quad (7.8)$$

gdje je  $C_v$  koeficijent kojim uzimamo u obzir utjecaj pukotina i šupljina na čvrstoću kompozita.

Osim empirijskim, čvrstoća se može odrediti i teorijskim pristupom. Ovaj se pristup temelji na analizi koncentracije naprezanja i deformacija kod međufaze gdje postoji prijelaz između konstituenata (matrice i vlakna). Na ovim su lokalnim mjestima vrijednosti naprezanja, odnosno deformacija, veće nego unutar svakog pojedinog materijala. Postoje dva pristupa računanju naprezanja: kriterij maksimalnih naprezanja i deformacija. Kod kriterija maksimalnih naprezanja transverzalna vlačna čvrstoća računa se pomoću sljedećeg izraza:

$$f_{Ti} = \frac{1}{k_\sigma} (f_{m_i} - \sigma_{m_i}), \quad (7.9)$$

pri čemu je:  $k_\sigma$  - faktor koncentracije naprezanja,  $f_{m_i}$  - transverzalna tlačna čvrstoća matrice, a  $\sigma_{m_i}$  - radijana maksimalna zaostala naprezanja (ako postoje).

Osim gornjeg kriterija postoji i kriterij maksimalnih vlačnih deformacija, kod kojeg se čvrstoća računa preko sljedećeg izraza:

$$f_{Ti} = \frac{1 - \nu_m}{k_\sigma (1 + \nu_m) (1 - 2\nu_m)} (f_{m_i} - \varepsilon_{m_i} E_m), \quad (7.10)$$

pri čemu  $\varepsilon_{m_i}$  označava maksimalne zaostale deformacije (ako postoje).

### **Tlačna čvrstoća u transverzalnom smjeru**

Kod ove vrste opterećenja do popuštanja obično dolazi uslijed kombiniranog utjecaja smičnog naprezanja matrice i uništavanja vlakana.

Empirijski pristup računanju tlačne čvrstoće kompozita u transverzalnom smjeru daje nam sljedeći izraz:

$$f_{Tc} = f_{m_c} C_v \left[ 1 + (V_f - \sqrt{V_f}) \left( 1 - \frac{E_m}{E_f} \right) \right], \quad (7.11)$$

pri čemu je  $f_{m_c}$  tlačna čvrstoća matrice.

Ponovo, osim empirijskog pristupa postoji i teorijski. Kod njega vrijede sljedeće pretpostavke: savršena veza između konstituenata, uniformno raspoređena vlakna, savršeno elastično ponašanja vlakna i matrice te nepostojanje zaostalih naprezanja. Čvrstoća se računa prema sljedećem izrazu:

$$f_{Tc} = E_T \varepsilon_{Tu}^c, \quad (7.12)$$

pri čemu je:  $E_T$  - modul elastičnosti kompozita u transverzalnom smjeru, a  $\varepsilon_{Tu}^c$  - maksimalna deformacija kompozita u transverzalnom smjeru.

### **Smična ravninska čvrstoća**

Usljed posmičnog ravninskog naprezanja, do popuštanja može doći iz dva razloga. Popuštanje se javlja uslijed popuštanja matrice (kod propagacije pukotine), uslijed odvajanja vlakana (kod koncentracije posmičnih naprezanja) ili kod kombinacije ovih dvaju fenomena.

Empirijski izraz za računanje smične čvrstoće je:

$$f_{LTs} = f_{ms} C_v \left[ 1 + (V_f - \sqrt{V_f}) \left( 1 - \frac{G_m}{G_f} \right) \right], \quad (7.13)$$

gdje je  $f_{ms}$  smična čvrstoća matrice.

Teorijski pristup određivanju čvrstoće zasniva se na računanju maksimalne kutne deformacije kompozita ( $\gamma_{LTc}$ ), a dan je sljedećim izrazom:

$$F_{LTs} = \gamma_{LTc} G_{LT}, \quad (7.14)$$

gdje  $G_{LT}$  predstavlja ravninski modul smičnosti kompozita.

### 7.1.2. Procijenjeni parametri materijala za proračun kobilice

Da bismo mogli provesti proračun svojstava čvrstoće jednoslojnih slojeva potrebno je znati svojstva samih konstituenata. Pošto imamo slojeve ojačane staklenim i ugljičnim vlaknima, potrebno je provoditi dva proračuna. Svojstva konstituenata uzeta su iz literatura [1] i [2], a prikazana su tablicom 7.1.

Tablica 7.1 Svojstva konstituenata

Svojstvo		E-staklo/epoksidna smola		HR-ugljik/epoksidna smola	
Naziv	Oznaka	Vlakna	Matrica	Vlakna	Matrica
Volumni udio	$V_f, V_m, -$	0,48	0,52	0,48	0,52
Modul elastičnosti	$E_f, E_m, \text{MPa}$	72 000	4 000	230 000	4 000
Modul smičnosti	$G_f, G_m, \text{MPa}$	30 000	1 600	50 000	1 600
Poissonov faktor	$\nu_f, \nu_m, -$	0,22	0,38	0,3	0,38
Vlačna čvrstoća	$f_{ft}, f_{mt}, \text{MPa}$	1 950	100	3 200	100
Tlačna čvrstoća	$f_{mc}, \text{MPa}$	-	110	-	110
Smična čvrstoća	$f_{fs}, f_{ms}, \text{MPa}$	34	35	55,8	35
Maks. duljinska deformacija	$\varepsilon_{fu}, \varepsilon_{mu}, \%$	2,7	4,4	1,3	4,4

S gornjim svojstvima potrebno je izvršiti proračun prema poglavlju 7.1.1. Potrebni izrazi se uzimaju u ovisnosti o ponašanju vlakna i matrice te s obzirom na volumni udjel konstituenta. Sam mehanizam popuštanja nije uvijek moguće egzaktno odrediti. Zbog toga ni izraz koji bi bio točan za proračun određenog svojstva ne možemo uvijek definirati. Raspon dobivenih vrijednosti za pojedini parametar čvrstoće može biti velik, ovisno o pretpostavljenom mehanizmu popuštanja (najveće su razlike kod tlačne čvrstoće u longitudinalnom smjeru). Zbog toga je dobivene vrijednosti potrebno usporediti s postojećim eksperimentalno dobivenim vrijednostima iz literature te ih u ovisnosti o njima korigirati. Procjena konačnih vrijednosti čvrstoće izvedena je na sljedeći način. Uzeti su podaci iz literatura [1], [4], [5], [9] te teoretski dobiveni podaci. Tamo gdje je moguće dobiti više vrijednosti čvrstoće (ovisno o

mehanizmu popuštanja), bira se vrijednost koja je najbliža onoj iz literature (na taj način moguće riješiti problem nemogućnosti egzaktnog određivanja mehanizma popuštanja). Podaci koji su uzeti iz literature dani su u Prilogu A. S podacima iz literature i teoretski dobivenom vrijednošću za čvrstoću izračunata je aritmetička sredina. Ta je vrijednost uzeta kao reprezentativna (s njom se ide u proračun kobilice). Na taj se način osigurava da je teoretska čvrstoća dovoljno blizu realnoj. Materijalna svojstva slojeva određena su korištenjem izraza mikromehanike (poglavlje 3.1.2, izrazi 3.1 do 3.9). U tablici 7.2 prikazana su dobivena materijalna svojstva, a tablici 7.3 izračunati parametri čvrstoće.

**Tablica 7.2 Teorijski procijenjena materijalna svojstva kompozitnih slojeva**

Naziv	Svojstvo Oznaka	E-staklo/ epoksidna smola	HR-ugljik/ epoksidna smola
Modul elastičnosti u smjeru 1 (paralelno s vlaknima)	$E_1$ , MPa	36 640	112 480
Modul elastičnosti u smjeru 2 (okomito s vlaknima)	$E_2$ , MPa	7 317	6 173
Modul smičnosti u ravnini 12	$G_{12}$ , MPa	2 933	2 989
Modul smičnosti u ravnini 13	$G_{13}$ , MPa	2 933	2 989
Modul smičnosti u ravnini 23	$G_{23}$ , MPa	2 595	2 114
Poissonov faktor u ravnini 12	$\nu_{12}$ , -	0,3	0,34

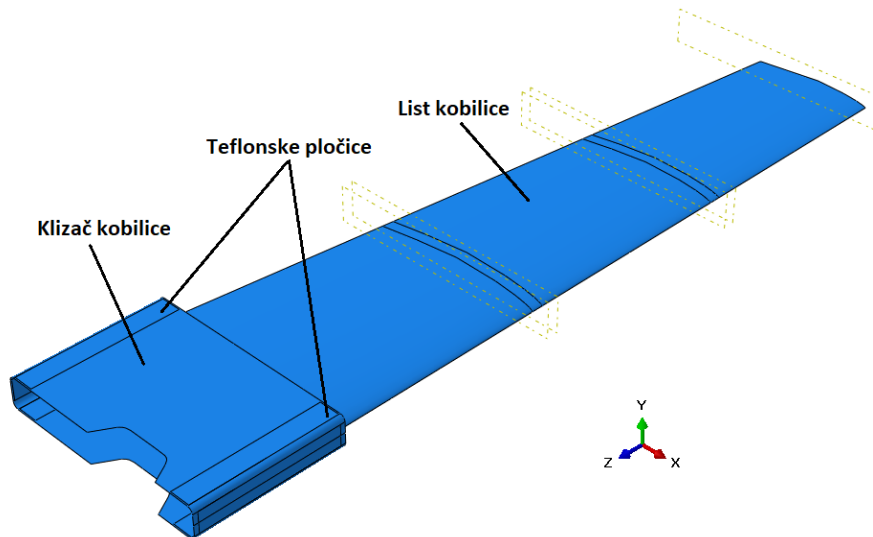
**Tablica 7.3 Teoretski procijenjeni parametri čvrstoće kompozitnih slojeva**

Naziv	Svojstvo Oznaka	E-staklo/epoksidna smola	HR-ugljik/ epoksidna smola
Longitudinalna vlačna čvrstoća	$f_{Lt}$ , MPa	992,16	1563
Longitudinalna tlačna čvrstoća	$f_{Lc}$ , MPa	534,25	1163,4
Transverzalna vlačna čvrstoća	$f_{Tt}$ , MPa	41,08	39,7
Transverzalna tlačna čvrstoća	$f_{Tc}$ , MPa	95,3	134,7
Smična ravninska čvrstoća	$f_{LTs}$ , MPa	39,3	44,7

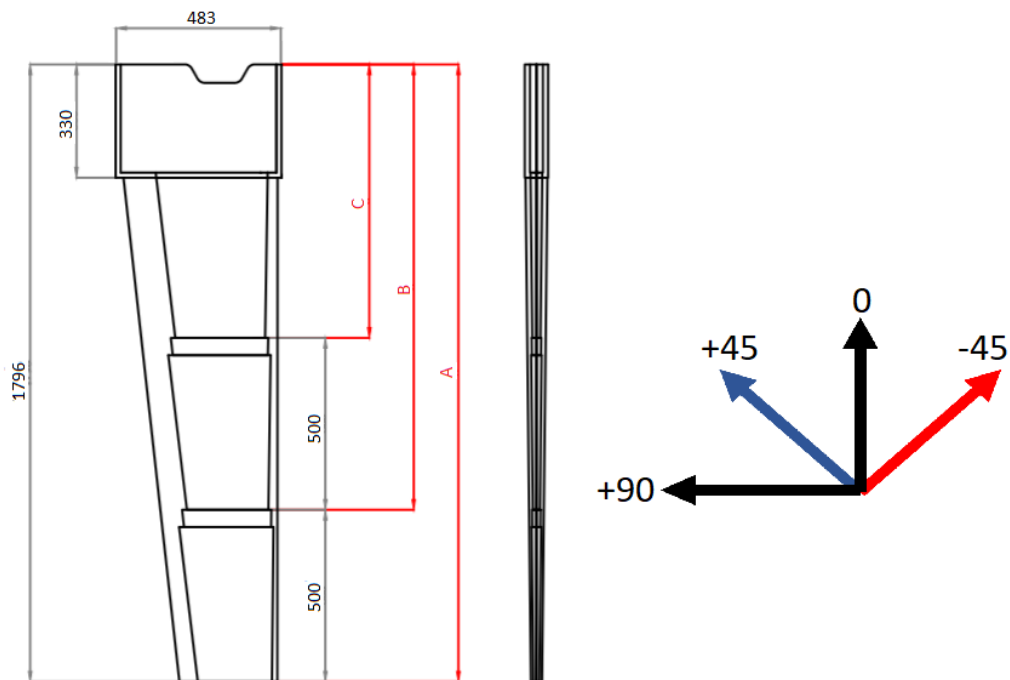


### 7.1.3. Numerički proračun kobilice

Nakon što su izračunati parametri čvrstoće i materijalna svojstva materijala moguće je provesti numeričku analizu kompozitne kobilice. Osim provjere čvrstoće (kriteriji popuštanja) provjerava se i stabilnost kobilice. Proračun je proveden u programskom paketu "Abaqus". Na slici 7.2 prikazan je model kobilice i prikazani su dijelovi od kojih se on sastoji. Slika 7.3 prikazuje osnovne dimenzije kobilice i koordinatni sustav za određivanje orijentacije slojeva laminata.



Slika 7.2 Model kobilice s dijelovima



Slika 7.3 Dimenzije i zone materijala kobilice

Kompozitni slojevi od kojih je izrađena kobilica imaju sljedeće oznake:

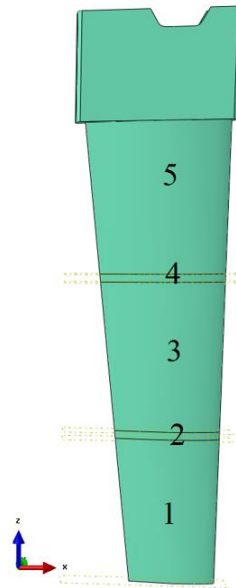
1. UD CFRP (UD 300-C) – jednosmjerni sloj izrađen od ugljičnih vlakana s epoksidnom matricom.
2. UD GFRP (UD 400) – jednosmjerni sloj izrađen od staklenih vlakana s epoksidnom matricom.
3. BIAX GFRP (GBX 400) – biaksijalnim sloj izrađen od staklenih vlakana s epoksidnom matricom.

Matrica kompozita kobilice je epoksidna, a vlakna su ugljična (UD 300-C) i staklena (GBX 400 i UD 400). Svojstva tih materijala dana su u prethodnom poglavlju. Pretpostavljeno je da se laminat GBX 400 sastoji od 2 međusobno okomita sloja jednake debljine od 0,2 mm (orijentacija  $+45^\circ/-45^\circ$  u odnosu na os laminata, odnosno osi z modela) i jednakih svojstava kao i UD 400. Tablica 7.4 prikazuje neka dodatna svojstva spomenutih slojeva.

**Tablica 7.4 Svojstva osnovnih slojeva laminata kobilice**

Sloj	Masa po površini $m_{of}$ , g/m <sup>2</sup>	Volumni udio vlakna $V_f$ , %	Debljina $h$ , mm	Orijentacija °
UD CFRP (UD 300-C)	300	48	0,25	0
BIAX GFRP (GBX 400)	400 (2x200)	48	0,4 (2x0,2)	+45/-45
UD GFRP (UD 400)	400	48	0,4	90

Oplata kobilice podijeljena je na 3 osnovna područja i 2 dodatna prijelazna područja. Predloženi laminat plan pomoću kojega dizajniramo kobilicu prikazan je slikom 7.4. Na slikama 7.5, 7.6, 7.7 prikazani su rasporedi slojeva kompozita po pojedinim dijelovima kobilice (materijalna os prikazana na slici 7.3).



Slika 7.4 Laminat plan dizajniranja oplate kobilice

Reacher 780 KEEL LAMINATION							
ZONE "A"							
Layer	Fibre angle deg	Type	Weight g/m <sup>2</sup>	Total Weight g/m <sup>2</sup>	Area m <sup>2</sup>	Core weight g/m <sup>2</sup>	Remarks
1	45/-45	2x GBX400	800	800	1,46		
2	0	4x UD300-C	1200	1200	1,46		
3	45/-45	2x GBX 400	800	1600	1,46		
4	90	UD 400	400	2000	1,46		
5	0	4x UD300-C	1200	2400	1,46		
6	45/-45	2x GBX 400	800	2800	1,46		
7	90	UD 400	400	3200	1,46		
8	0	4x UD300-C	1200	3600	1,46		
9	45/-45	2x GBX 400	800	4000	1,46		
10				4000	1,46		
11				3600	1,46		
12				4000	1,46		
Total Glass Weight				5840			
Total Carbon Weight				5256			
Total Laminate Weight				22192			

Slika 7.5 Laminat u području 1 (zona A)

Reacher 780 KEEL LAMINATION							
ZONE "B" ADDITIONAL TO "A"							
Layer	Fibre angle deg	Type	Weight g/m <sup>2</sup>	Total Weight g/m <sup>2</sup>	Area m <sup>2</sup>	Core weight g/m <sup>2</sup>	Remarks
1							
2							
3							
4							
5	0	4x UD300-C	1200	1200	1,14		
6	45/-45	2x GBX 400	800	800	1,14		
7	90	UD 400	400	1200	1,14		
8	0	4x UD300-C	1200	2400	1,14		25mm OVERLAP EVERY 600g
9	45/-45	2x GBX 400	800	2000	1,14		25mm OVERLAP EVERY 400g
10							
11							
12							
Total Glass Weight				2280			
Total Carbon Weight				2736			
Total Laminate Weight				10032			

Slika 7.6 Laminat u području 3, zona B (navedeni slojevi dodani slojevima u području 1). Slojevi 8 i 9 su dodani samo u prijelaznom području 2.

Reacher 780 KEEL LAMINATION							
ZONE "C" ADDITIONAL TO "A"+"B"							
Layer	Fibre angle deg	Type	Weight g/m <sup>2</sup>	Total Weight g/m <sup>2</sup>	Area m <sup>2</sup>	Core weight g/m <sup>2</sup>	Remarks
1							
2							
3							
4							
5	0	4x UD300-C	1200	1200	0,74		
6	45/-45	2x GBX 400	800	800	0,74		
7	90	UD 400	400	1200	0,74		
8	0	4x UD300-C	1200	2400	0,74		25mm OVERLAP EVERY 600g
9	45/-45	2x GBX 400	800	2000	0,74		25mm OVERLAP EVERY 400g
10							
11							
12							
Total Glass Weight				1480			
Total Carbon Weight				1776			
Total Laminate Weight				6512			

**Slika 7.7 Laminat u području 5, zona C (navedeni slojevi dodani slojevima u području 3). Slojevi 8 i 9 su dodani samo u prijelaznom području 4.**

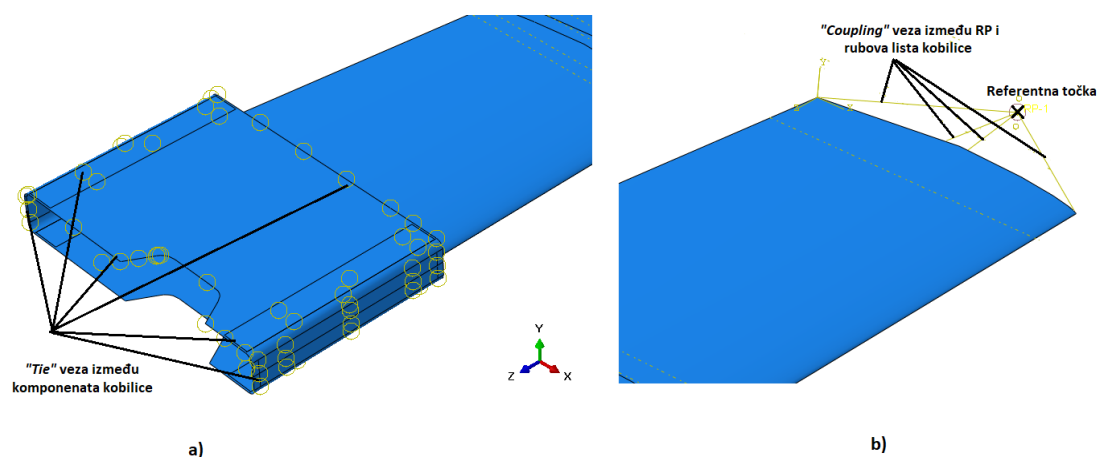
Slojevi u slici 7.5 (zona A) tvore laminat u cijeloj konstrukciji kobilice, i to tako da je sloj u 9. retku tablice vanjski sloj, a sloj u 1. retku unutarnji sloj. U područjima 2, 3, 4 i 5 (slika 7.4) oplata kobilice se na slojeve iz slike 7.5 dodaju dodatni slojevi prikazani na slici 7.6. U području 2 se iznutra dodaju samo slojevi iz 9. i 8. retka tablice na slici 7.6, a na ostalim dijelovima oplata dodani su svi slojevi, tako da je sloj iz 5. retka tablice unutarnji sloj. U području 4 i 5 (slika 7.4), odnosno zoni C, dodaju se još i slojevi prikazani u slici 7.7. U području 4 iznutra dodaju se samo slojevi u 9. i 8. retku tablice prikazane na slici 7.7, a na područje 5 dodaju se svi slojevi iz te tablice, tako da je sloj iz 5. retka unutarnji sloj. Područje 5 uključuje i klizač kobilice. Ukupne debljine pojedinih dijelova oplata po područjima prikazane su u tablici 7.5.

**Tablica 7.5 Debljine dijelova oplata kobilice**

Dio oplata	Debljina / mm
1	7,0
2	8,8
3	11,0
4	12,8
5	15,0

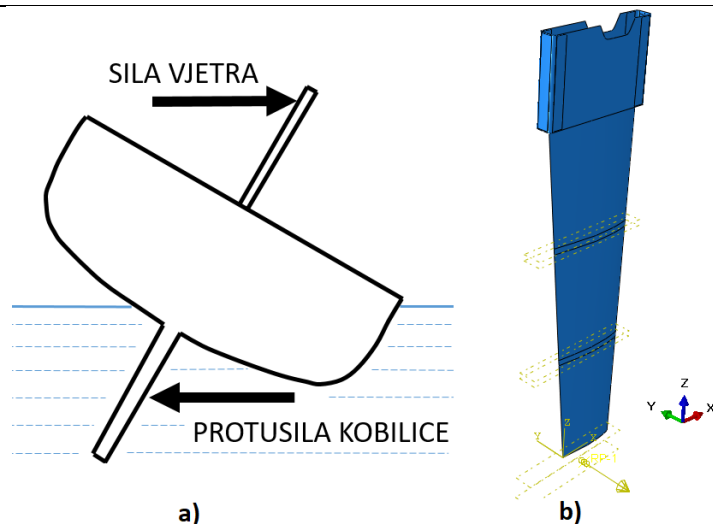
Da bi postigli cjelovitost modela potrebno je spojiti list i klizač kobilice te teflonske pločice. Mehanička veza kojom povezujemo tri spomenute komponente je "Tie". Osim toga o ovome modulu potrebno je kreirati referentnu točku ("reference point") i povezati je s donjim rubovima lista kobilice. Povezivanje je potrebno jer se u "Abaqusu" koncentrirana sila ne

može direktno postaviti po liniji. Referentnu točku postavljamo 100 mm od promatranog ruba u smjeru osi  $z$  (gledajući os  $x$  i  $y$  točka je u sredini profila lista). Kinematsko ograničenje koje postavljamo je “Coupling” pri čemu su svi pomaci i translacije čvorova ruba onemogućeni. Veza između komponenata kobilice prikazana je slikom 7.8 a, dok vezu između referentne točke i ruba prikazuje slika 7.8 b.



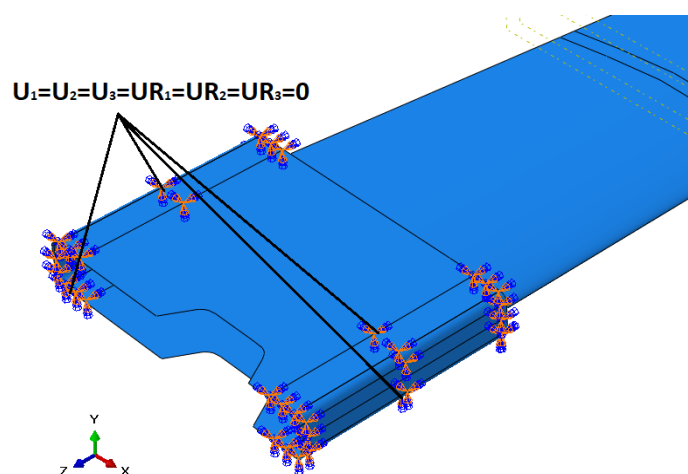
**Slika 7.8 Prikaz veza: a) između dijelova kobilice, b) između referentne točke i rubova lista kobilice**

Opterećenje koje djeluje na kobilicu nastaje uslijed sile vjetra koja tijekom plovidbe teži prevrnuti cijelu jedrilicu. Glavna je zadaća kobilice svojom težinom (težinom balasta) stvoriti protusilu koja osigurava jedrilicu od prevrtanja. Zbog toga je glavni način opterećenja kobilice savijanje uslijed te protusile (slika 7.9 a), za čiju vrijednost uzimamo  $F$  od 20000 N. Iako je opterećenje kobilice većinom manje ( $\approx 5000$  N) uzeta je veća sila u koju je uračunat faktor sigurnosti od 4. Faktor sigurnosti uzima se radi nepredvidivih faktora koji mogu znatno povećati opterećenje kobilice (npr. udar kobilice o dno). U “Abausu” silu postavljamo u ranije napravljenoj referentnoj točki prema slici 7.9 b.



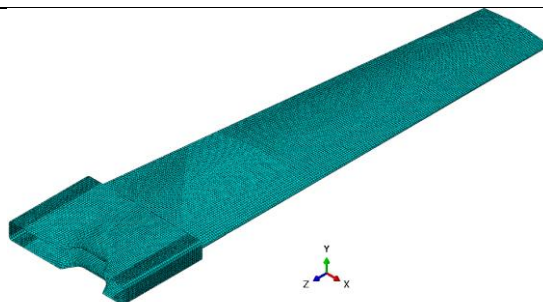
**Slika 7.9 Opterećenje kobilice: a) sila i protusila na kobilici, b) modeliranje opterećenja kobilice**

Kao rubni uvjet zadajemo uklještenje (onemogućavanje svih triju translacija i rotacija u čvorovima), koje postavljamo na vanjske plohe teflonskih pločica. Naime, na ovom je dijelu kobilica povezana s kutijom kobilice, a modeliran je slučaj kada je kobilica do kraja izvučena iz kutije. Iako su ograničenja prerestriktivna (postoji određena mogućnost pomaka kobilice u kutiji uslijed zazora i deformiranja), ovakav model daje konzervativne rezultate za naprezanja. Slika 7.10 prikazuje model s postavljenim rubnim uvjetima.



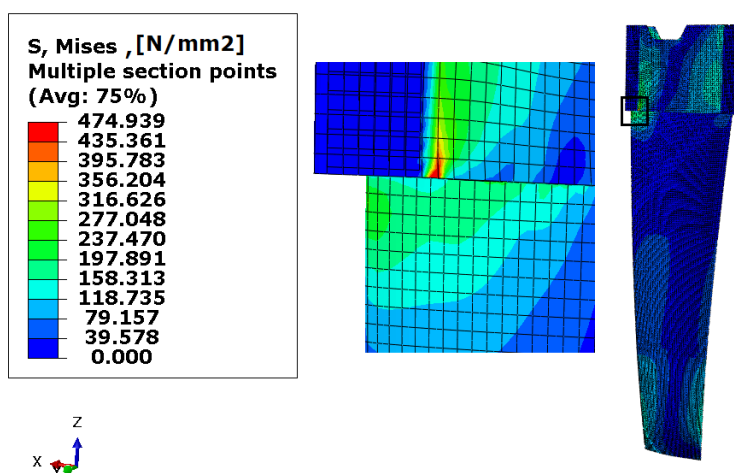
**Slika 7.10 Rubni uvjeti modela kobilice**

Diskretizacija modela provedena je korištenjem ljuskastih konačnih elemenata S4R. Taj element sadrži 4 čvora od kojih svaki ima po 6 stupnjeva slobode. Broj S4R elemenata koji se koriste je 28117, a broj stupnjeva slobode u toj mreži iznosi 653112. Mreža modela prikazana je slikom 7.11.

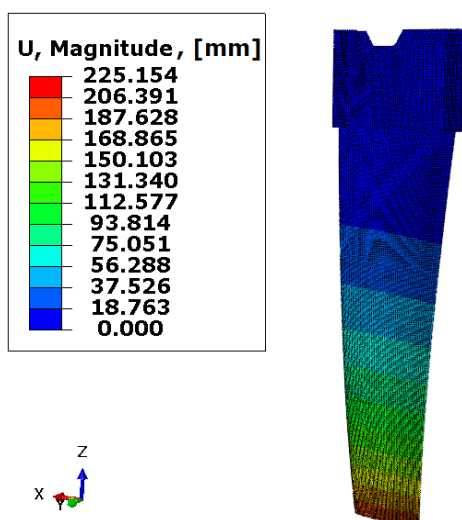


Slika 7.11 Diskretizirani model kobilice (28177 S4R elemenata)

Raspodjele za ekvivalentno naprezanje prema von Misesu i ukupan pomak prikazani su na slikama 7.12, odnosno 7.13. Točke u kojima su računate prikazane raspodjele nalaze se na donjim ploham kobilice (u ovom slučaju to su unutarnje plohe kobilice).

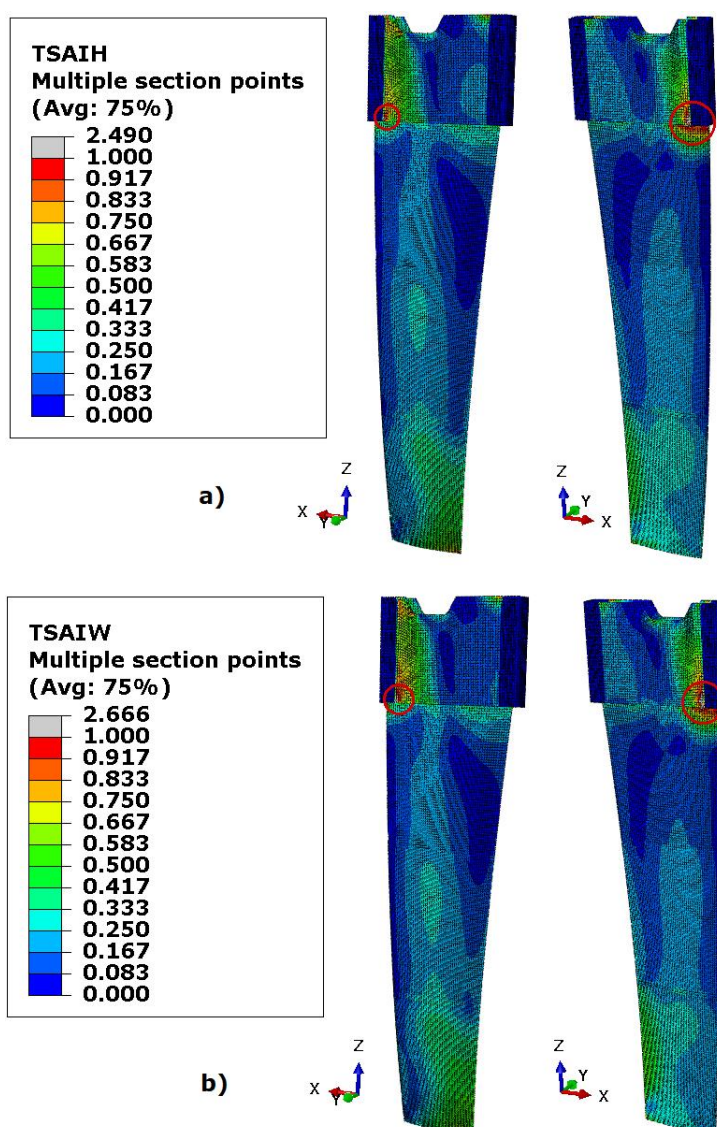


Slika 7.12 Ekvivalentno naprezanje kobilice (prema von Misesu)



Slika 7.13 Raspodjela pomaka u kobilici

Najveća naprezanja u kobilici javljaju se na mjestu gdje su postavljeni rubni uvjeti uklještenja. Osim na tom mjestu vrlo visoka naprezanja su i kod spoja klizača kobilice s listom (oštri prijelaz s geometrije jednog dijela na drugi). Najveći progib, prema očekivanjima, nalazi se na dnu kobilice. Nakon analize naprezanja i progiba proveden je proračun čvrstoće i konstrukcije prema kriterijima popuštanja Tsai-Hill (slika 7.14 a) i Tsai-Wu (slika 7.14 b). Da bi konstrukcija zadovoljavala spomenute kriterije potrebno je da veličine faktora popuštanja budu manje ili jednake 1.

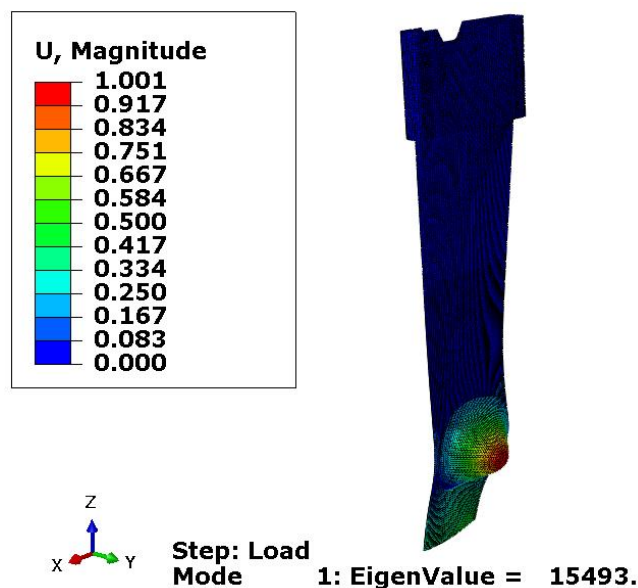


Slika 7.14 Raspodjela vrijednosti (kritična mjesta konstrukcije označena su crvenim kružnicama): a) Tsai-Hill kriterija popuštanja, b) Tsai-Wu kriterija popuštanja



Kritična mjesta kobilice (s obzirom na kriterije čvrstoće) označena su crvenim kružićima na slici 7.14 (na ovome mjestu su vrijednosti kriterija popuštanja veće od 1). Najviše vrijednosti parametara kriterija popuštanja javljaju se na mjestima gdje su postavljeni rubni uvjeti i tamo gdje se spaja list i klizač kobilice. Kao što je već spomenuto, visoka vrijednost kriterija kod uklještenja nije realna zbog prerestriktivnih rubnih uvjeta nametnutih na model. Visoka vrijednost kriterija na spoju lista i klizača javlja se zbog koncentracije naprezanja. Vrijednost kriterija popuštanja značajno se smanjuje udaljavanjem od tog oštrog prijelaza. Poboljšanje konstrukcije na ovom dijelu moguće je postići odgovarajućim konstrukcijskim rješenjem, npr. dodavanjem zaobljenja na mjestu spoja.

Zadnji dio analize sastojao se od provjere stabilnosti kobilice. Na model je nametnuto jedinično opterećenje (1 N), prema slici 7.9, kako bi se odredila kritična vrijednost sile kod koje dolazi do popuštanja stabilnosti konstrukcije. Dobiven je iznos kritične sile od 15493 N (slika 7.15). S obzirom da je kritična sila manja od maksimalne tražene sile opterećenja, konstrukciju treba ojačati (povećanje debljine slojeva, povećanje broja slojeva, ukrute, itd.).



**Slika 7.15 Prva forma gubitka stabilnosti konstrukcije i njezina vrijednost**

Na kraju je važno spomenuti da je za promatrani problem provedena provjera konvergencije numeričkih rješenja. Konvergencija je provedena za von Misesova ekvivalentna naprezanja i oba kriterija popuštanja (Tsai-Hill i Tsai-Wu). Tablični prikaz dobivenih podataka i grafovi konvergencije dani su u Prilogu B. Time je dokazano da dobivena rješenja konvergiraju. Za daljnje proračune konvergencija nije provedena (nije potrebno jer su problemi kvalitativno slični).

## 7.2. KOBILICA SA EKSPERIMENTALNO DOBIVENIM SVOJSTVIMA

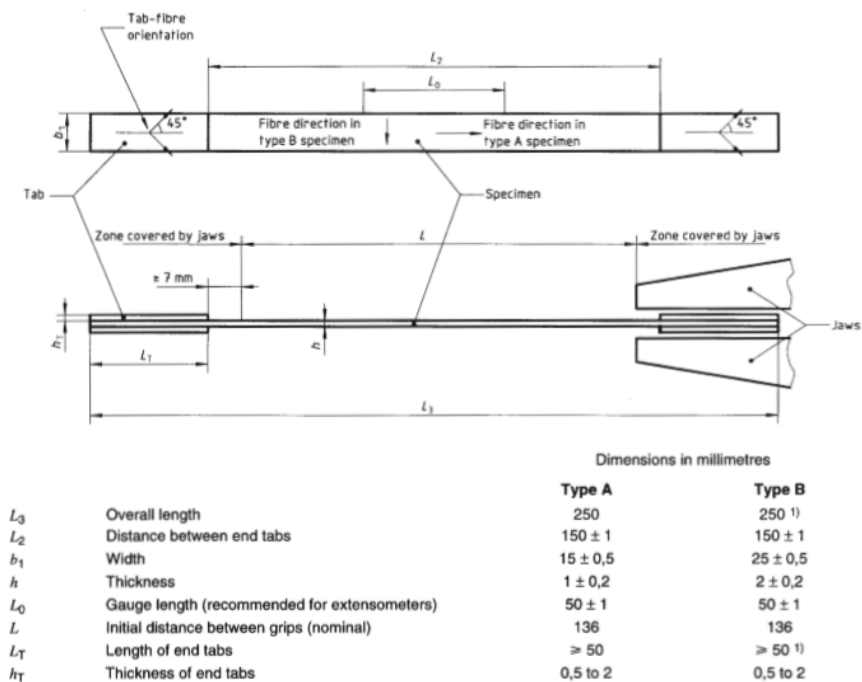
Ekperimentalno dobiveni podaci o kompozitima još uvijek predstavljaju najvjerođostojnije podatke o svojstvima materijala. Ekperimentalno dobivanje podataka je skup i vremenski dugotrajan proces. Za svaki kompozit dobiven drugačijom tehnologijom izrade i s drugačijim sastavom i dizajnom potrebno je zasebno provoditi ispitivanje. Osim toga izrada epruveta je skupa i broj epruveta za jedno ispitivanje je velik (a vrijedi za samo jedan specifičan kompozit). Usprkos tome, ekperimentalno dobivanje podataka o svojstvima kompozita često predstavlja neophodan dio dizajniranja kompozita ili kompozitnih tvorevina. Teoretski dobiveni podaci o svojstvima (pomoću teorija mikromehanike) kod realne konstrukcije uvijek moraju biti ekperimentalno provjereni zbog visoke mogućnosti rasipanja rezultata (npr. zbog različitih mehanizama popuštanja). Osim toga, provjera je potrebna jer ovako dobiveni podaci mogu predstavljati preoptimistične rezultate uslijed pretpostavka teorije ("idealni kompoziti" bez grešaka, sa savršeno povezanim konstituentima itd.). Teoretske metode određivanja svojstava su alat i vodilja kod dizajniranja kompozita, ali uvijek na kraju podaci moraju biti ekperimentalno provjereni. S ekperimentalno dobivenim rezultatima provodimo korekciju teoretskih rezultata.

### 7.2.1. *Ispitivanje kompozitnih epruveta od ugljičnih i staklenih vlakna i epoksidnom matricom*

Ispitivane su epruvete od kompozita izrađene od ugljičnih (HR – visoka čvrstoća) i E-stakla pri čemu je matrica izrađena od epoksidne smole. Oznake kompozita su sljedeće (objašnjenje oznaka dano u poglavlju 7.1.3):

1. UD CFRP ,
2. UD GFRP ,
3. BIAX GFRP .

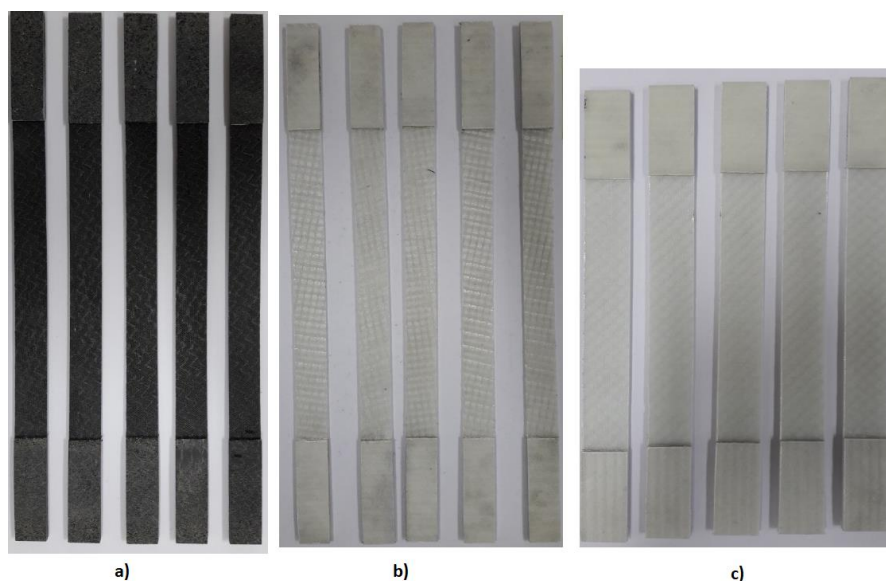
Volumni udio vlakana u epruvetama je 48%. Tablica 7.6 prikazuje koje su epruvete ispitivane i njihova svojstva, dok su tipovi epruveta te njihove karakteristike prikazane slikom 7.16. Epruvete su izrađene prema europskim normama o ispitivanju kompozitnih epruveta [15] i [16]. Slika 7.17 prikazuje izgled epruveta prije eksperimenta.



Slika 7.16 Izgled i karakteristike epruveta za ispitivanje (Tip A i B) [16]

Tablica 7.6 Ispitivane epruvete i njihova svojstva

Epruvete	Orijentacija	Broj slojeva u epruveti	Prosječna debljina epruvete	Prosječna širina epruvete	Tip epruvete
	°	-	$h$ , mm	$b_1$ , mm	-
UD CFRP	0	4	1,08	15,04	A
	90	8	1,98	24,47	B
	10	4	1,07	15	A
UD GFRP	0	2	1,1	14,71	A
	90	4	1,77	24,73	B
	10	2	1,13	14,88	A
BIAX GFRP	0/90	10 (2x5)	2,05	24,81	B
	+45/-45	10 (2x5)	1,72	24,81	B



**Slika 7.17 Izgled epruveta: a) UD CFRP, b) UD GFRP, c) BIAX GFRP**

Provedeno je tlačno ispitivanje gore navedenih epruveta. Eksperiment je vršen na statičkoj tlačno-vlačnoj kidalici Messphysik Beta 50-5 (maksimalna sila kojom je moguće opteretiti epruvetu je 500000 N). Kidalica je prikazana slikom 7.18. Eksperiment je proveden u Laboratoriju za eksperimentalnu mehaniku u prostorima Fakulteta strojarstva i brodogradnje u Zagrebu. Na epruvetama je provedeno vlačno ispitivanje. Za svaki tip epruvete provedena su 3 ispitivanja.



**Slika 7.18 Kidalica Messphysik Beta 50-5**

Nakon provedenog eksperimenta dobili smo podatke koje koristimo pri numeričkoj analizi kobilice. Dobiveni podaci prikazani su u tablici 7.7 i 7.8. Eksperimentalni podaci većinom su dali manje vrijednosti svojstava (iznimka su moduli elastičnosti u transverzalnome smjeru,  $E_2$  kod oba materijala i transverzalna vlačna čvrstoća,  $f_{Tt}$  kod kompozita sa staklenim vlaknima). Usprkos tome, eksperimentalno dobivene vrijednosti su u skladu s očekivanjima i u zadovoljavajućoj mjeri variraju od teoretski dobivenih (kod kompozita realno je za očekivati određeno odstupanje teoretskih svojstava od onih eksperimentalno dobivenih). U nastavku napisano je koje su vrste ispitivanja dale koje podatke::

- Modul elastičnosti i vlačna čvrstoća u smjeru pružanja vlakna ( $E_1, f_{Lt}$ ) dobiven iz ispitivanja epruveta s orijentacijom vlakna od  $0^\circ$
- Modul elastičnosti i vlačna čvrstoća u smjeru okomitom od pružanja vlakna ( $E_2, f_{Tt}$ ) dobiven iz ispitivanja epruveta s orijentacijom vlakna od  $90^\circ$

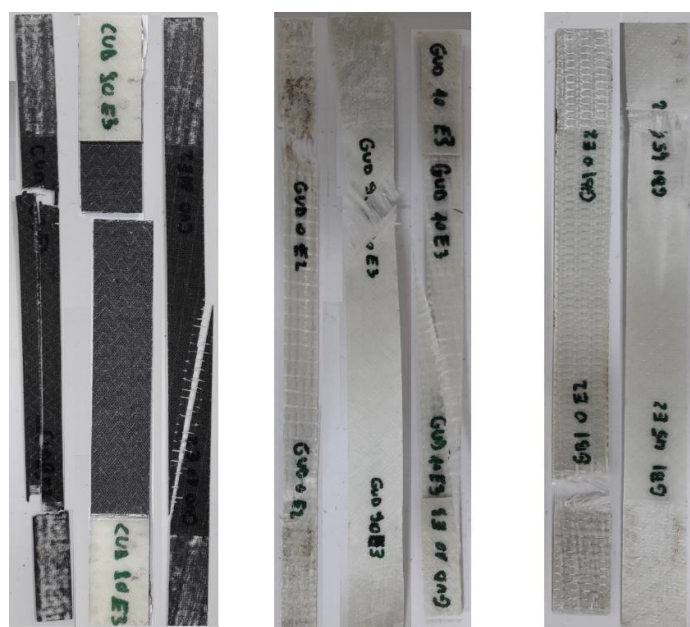
Ostali podaci koji su dobiveni ovim ispitivanjima nisu nam potrebni kod analize kobilice.

**Tablica 7.7 Materijalna svojstva kompozitnih slojeva (korigirana svojstva)**

Naziv	Svojstvo Oznaka	E-staklo/ epoksidna smola	HR-ugljik/epoksidna smola
Modul elastičnosti u smjeru 1 (paralelno s vlaknima)	$E_1$ , MPa	31 000	107 300
Modul elastičnosti u smjeru 2 (okomito s vlaknima)	$E_2$ , MPa	11 540	7 039
Modul smičnosti u ravnini 12	$G_{12}$ , MPa	2 933	2 989
Modul smičnosti u ravnini 13	$G_{13}$ , MPa	2 933	2 989
Modul smičnosti u ravnini 23	$G_{23}$ , MPa	2 595	2 114
Poissonov faktor u ravnini 12	$\nu_{12}$ , -	0,3	0,34

Tablica 7.8 Svojstva čvrstoće kompozitnih slojeva (korigirana svojstva)

Naziv	Svojstvo	Oznaka	E-staklo/epoksidna smola	HR-ugljik/epoksidna smola
Longitudinalna vlačna čvrstoća	$f_{Lt}$ , MPa		574	1 081
Longitudinalna tlačna čvrstoća	$f_{Lc}$ , MPa		534,25	1163,4
Transverzalna vlačna čvrstoća	$f_{Tt}$ , MPa		94,79	34,03
Transverzalna tlačna čvrstoća	$f_{Tc}$ , MPa		95,3	134,7
Smična ravninska čvrstoća	$f_{Lts}$ , MPa		39,3	44,7

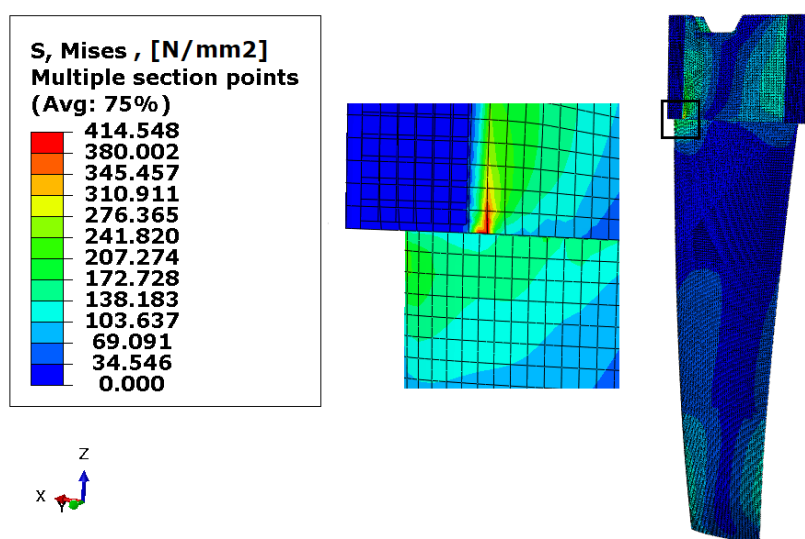


Slika 7.19 Izgledi ispitanih epruveta, s lijeva na desno: UD CFRP (0°, 90°, 10°), UD GFRP (0°, 90°, 10°), BAIX GFRP (0°/90°, 45°/-45°)

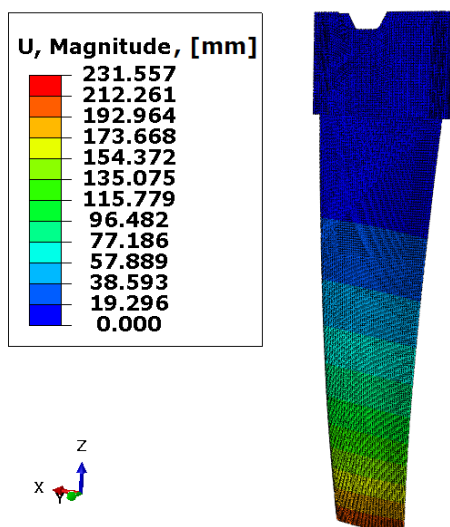
Na slici 7.19 prikazani su izgledi epruveta nakon ispitivanja (pokidane epruvete). Mjerenja su provedena na tri uzorka za svaki tip epruveta, s istovjetnim načinom popuštanja kompozita. To nam djelomično dokazuje valjanost ispitivanja. Ispitivanja su nam dala rezultate svojstava koji su manji nego teoretski dobiveni, što je bilo i očekivano (teorija ima pretpostavke koje za realni kompozit ne vrijede). Nakon dobivanja rezultata oni se korigiraju u proračunu i provodi se nova numerička analiza.

### 7.2.2. Numerički proračun kobilice uz dodavanje novih eksperimentalno dobivenih svojstava

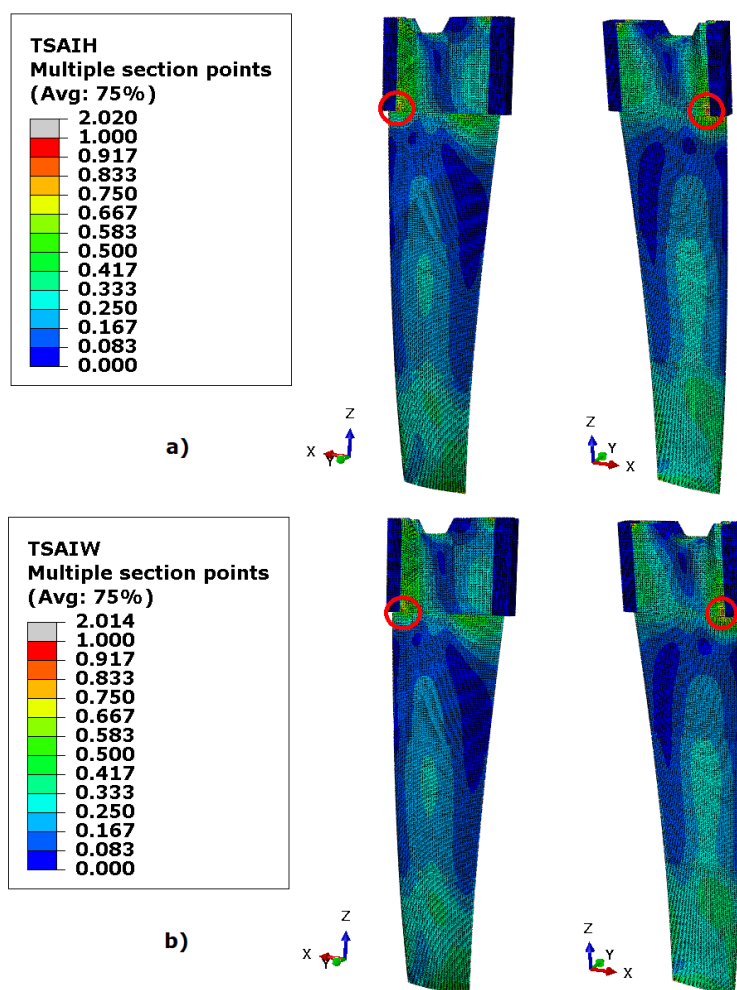
Model i njegove ostaju nepromijenjene (kao u poglavlju 7.1.3). Osim toga, laminat plan (položaj, broj, debljina i orijentacija slojeva u laminatu) je ista kao i u prethodnom proračunu. Nova (eksperimentalna) i ostala teoretski dobivena svojstva, dana su tablicama 7.7 i 7.8. Veze, opterećenja i rubni uvjeti kao i diskretizacija modela (mreža konačnih elemenata) ostaje nepromijenjena (njihov prikaz i objašnjenje dani su u poglavlju 7.1.3). Nakon provedene analize dobivene su vrijednosti ekvivalentnih naprezanja prema von Misesu (slika 7.20) i vrijednosti pomaka (slika 7.21) kobilice.



Slika 7.20 Raspodjela ekvivalentnih naprezanja kobilice prema von Misesu



Slika 7.21 Raspodjela progiba kobilice

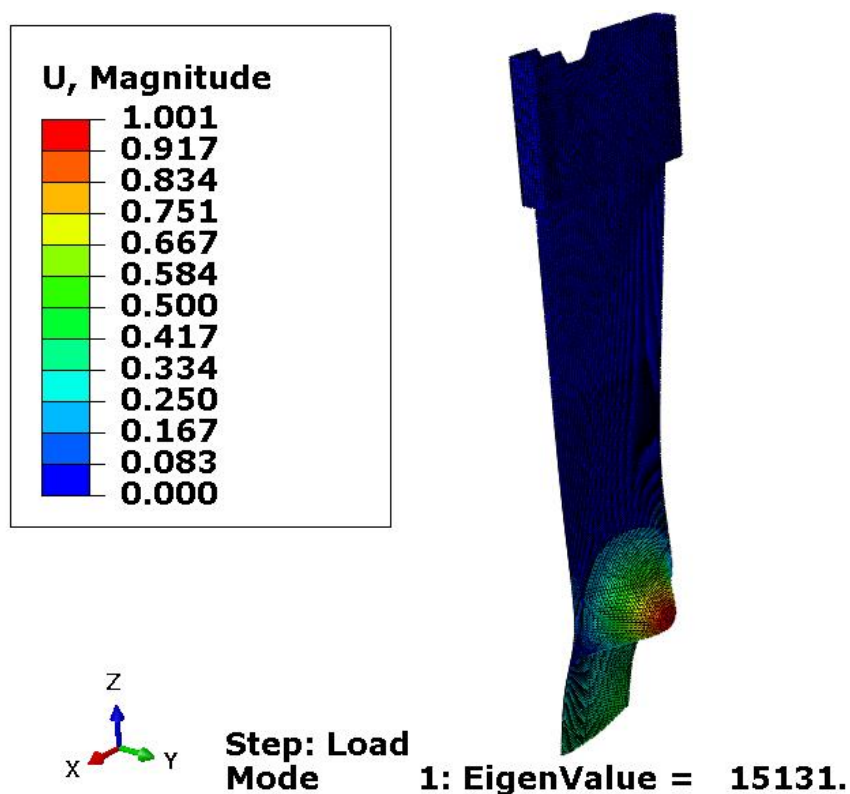


**Slika 7.22** Raspodjela vrijednosti (kritična mjesta konstrukcije su označena crvenim kružnicama): a) Tsai-Hill kriterija popuštanja, b) Tsai-Wu kriterija popuštanja

Nakon provedene analize vidimo da su najveća naprezanja ponovo na sličnim mjestima kao kod analize kobilice s podacima o svojstvima koja su dobivena teoretski. Ta su mjesta kod prelaza s lista kobilice na klizač kobilice i tamo gdje su postavljeni rubni uvjeti. Progib je prema očekivanjima najveći na donjem dijelu lista kobilice. Ako promatramo vrijednosti Tsai-Hill i Tsai-Wu kriterija popuštanja zaključujemo da su kritična mjesta u konstrukciji jednaka položaju najvećih naprezanja (područja oko zadanih rubnih uvjeta uklještenja te oko spoja lista i klizača kobilice). Kritična mjesta konstrukcije prikazana su slikom 7.22, a prikazana su sivom bojom na kobilici (mjesta gdje je veličina parametara kriterija popuštanja veća od 1). Nakon određivanja kritičnih dijelova konstrukcije potrebno je predložiti konstrukcijska rješenja koja će smanjiti vrijednosti faktora popuštanja na zadovoljavajuću razinu.



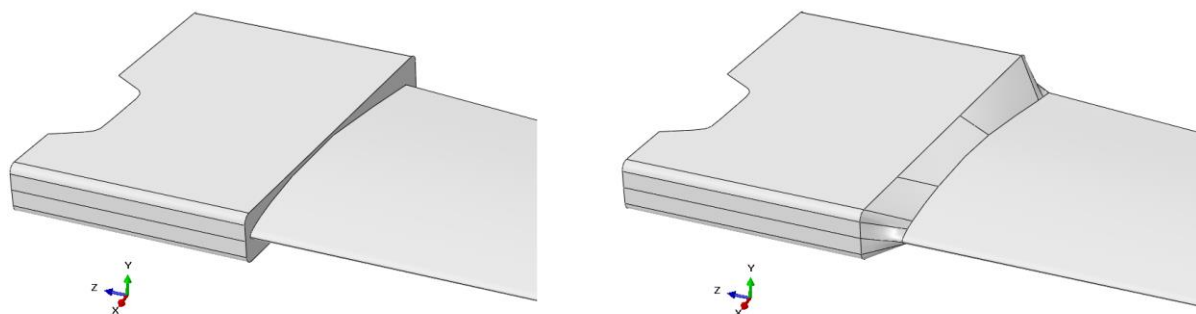
Osim čvrstoće, ponovno je potrebno provjeriti stabilnost konstrukcije. Nakon provedene analize vidimo da je vrijednost kritične sile kod koje konstrukcija gubi stabilnost manja od opterećenja koje djeluje na nju ( $F = 20000\text{ N} > F_{kr} = 15131\text{ N}$ ). S obzirom da model ne zadovoljava ni kriterij stabilnosti, konstrukcijskim rješenjem trebat će riješiti i taj problem.



Slika 7.23 Prva forma gubitka stabilnosti konstrukcije i njezina vrijednost

### 7.3. KOBILICA SA PRIJELAZOM IZMEĐU LISTA I KLIZAČA

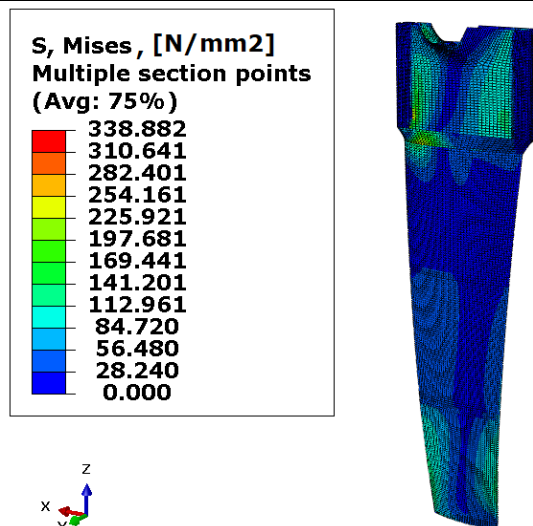
Nakon provedene numeričke analize čvrstoće kobilice, kao kritično mjesto pokazao se spoj lista i klizača. Kritično naprezanje na tom mjestu javlja se uslijed koncentracije naprezanja koja se može smanjiti određenim konstrukcijskim rješenjima. Jedan od njih je dodavanjem blažeg prijelaza na mjesto spoja. Na originalnom idejnom rješenju izveden je oštar prijelaz, dok je u novom prijedlogu izveden pomoću radijusa. Na 7.24 slici prikazana je nova izvedba kobilice.



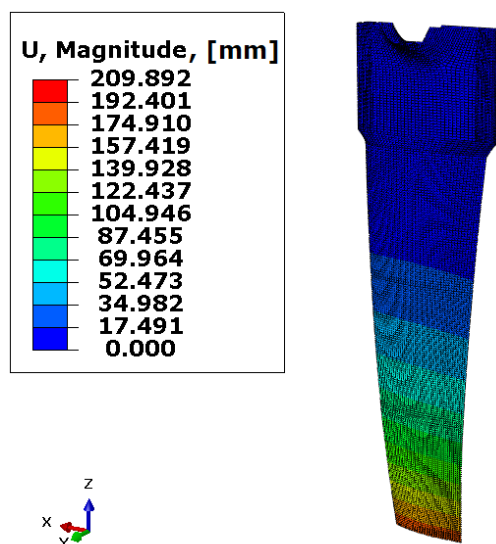
Slika 7.24 Model kobilice bez (lijevo) i sa (desno) prijelazom

Laminat plan na mjestu prijelaza definiran je prema slici 7.4 (spada u Zonu 5). Kinematičke veze, opterećenja i rubni uvjeti modela ostaju nepromijenjeni.

Nakon definiranja modela opet je proveden proračun čvrstoće kobilice (s posebnom pažnjom usmjerenom na prijelazni dio). Slika 7.25 prikazuje dobivenu raspodjelu ekvivalentnih naprezanja prema von Misesu. Iz raspodjele vidimo da se vrijednost maksimalnih naprezanja smanjila. Položaj najvećih vrijednosti naprezanja je kod mjesta gdje su postavljene rubni uvjeti. Osim na tom dijelu, visoka naprezanja javljaju se i na mjestu prijelaza s lista na klizač kobilice. Tu su se vrijednosti naprezanja također smanjile. Pomaci na kobilici prikazani su slikom 7.26.

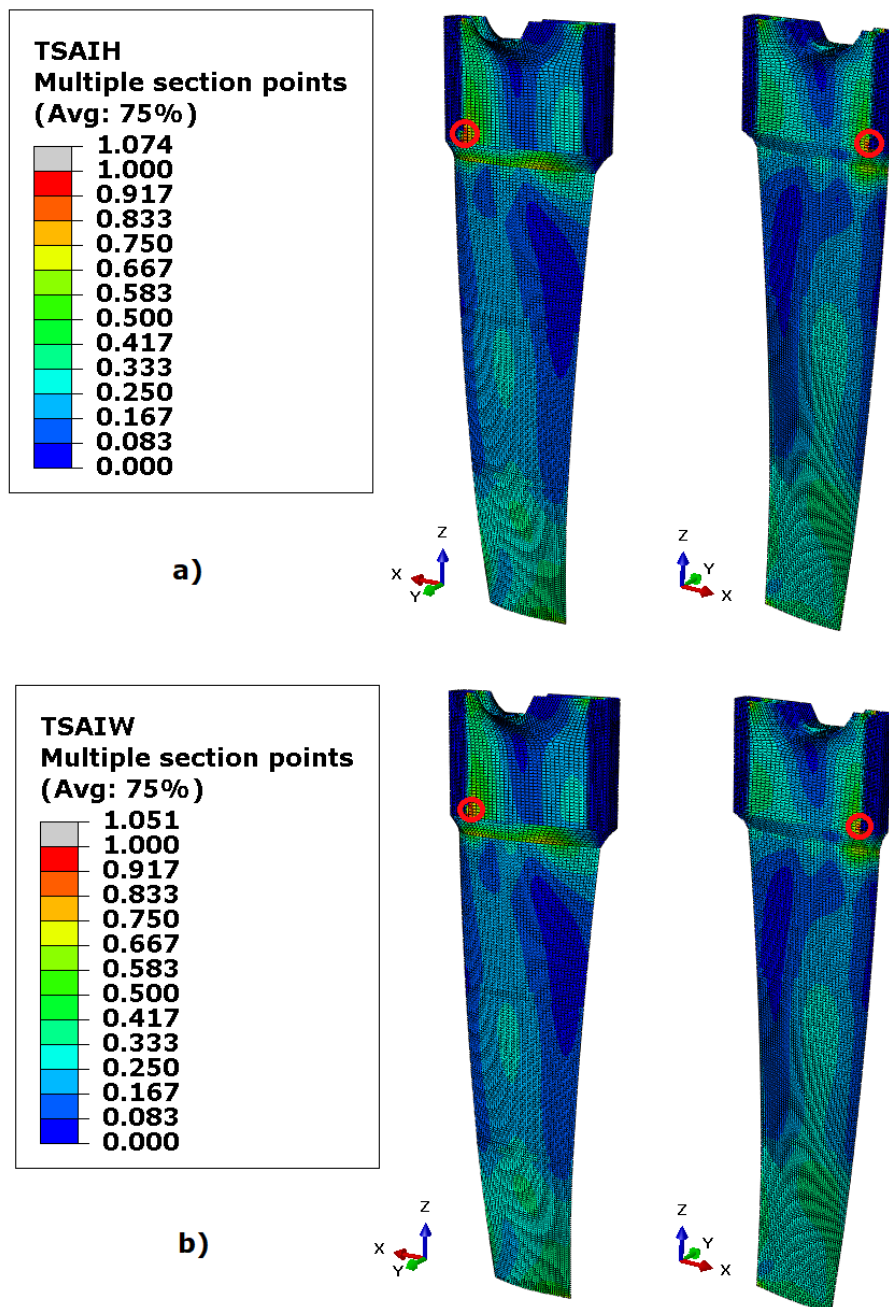


Slika 7.25 Raspodjela ekvivalentnih napreznja prema von Misesu



Slika 7.26 Raspodjela progiba kobilice

Kao i u prethodnim analizama, da bismo vidjeli gdje se nalaze kritična mjesta konstrukcije, potrebno je analizirati raspodjelu faktora popuštanja po konstrukciji. Slika 7.27 prikazuje raspodjelu faktora popuštanja prema Tsai-Hill i Tsai-Wu kriteriju. Ako je vrijednost faktora manja od 1 onda je čvrstoća konstrukcije na tom dijelu zadovoljena. Gledajući oba kriterija vidimo da se vrijednost faktora popuštanja kod prijelaza s list na klizač smanjila. Maksimalne vrijednosti su sad manje od 1 te područje spoja više nije kritično za čvrstoću konstrukcije. Područje u blizini rubnih uvjeta i dalje ne zadovoljava kriterije čvrstoće (iako se vrijednost faktora i tu smanjila).

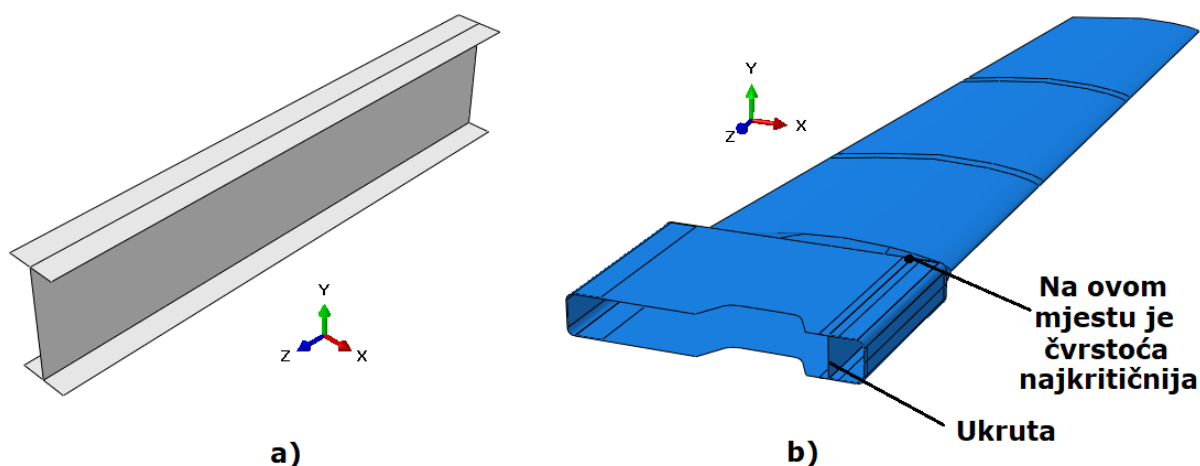


**Slika 7.27** Raspodjela vrijednosti (kritična mjesta konstrukcije su označena crvenim kružnicama): a) Tsai-Hill kriterija popuštanja, b) Tsai-Wu kriterija popuštanja

Analiza stabilnosti konstrukcije pokazala je da radijusni prijelazi nisu imali nikakav utjecaj na povećanje vrijednosti kritične sile izvijanja. Kritična sila koju konstrukcija može podnijeti da ne doživi kolaps iznosi 15131 N. Prva forma gubitka stabilnosti kobilice jednaka je prikazu koji je dan slikom 7.23.

#### 7.4. KOBILICA S UKRUTOM NA MJESTU GDJE SU POSTAVLJENI RUBNI UVJETI

Nakon što je riješen problem čvrstoće na prijelazu lista i klizača kobilice, potrebno je odgovarajućim konstrukcijskim rješenjem zadovoljiti čvrstoću na dijelu klizača na kojem su postavljeni rubni uvjeti. Rubni uvjeti predstavljaju mjesto gdje je kutija kobilice u kontaktu s klizačem (tim je rubnim uvjetima modelirana ta veza). Tu su naprezanja prerestriktivna jer je postoji određena mogućnost pomaka kobilice u kutiji uslijed zazora i deformiranja. Usprkos tome, zbog visokih naprezanja i faktora popuštanja koji je viši od 1 potrebno je ojačati ovaj dio konstrukcije. Ojačanje je zamišljeno u obliku I-profila, kako je prikazano slikom 7.28 a. Ukruta je postavljena u unutrašnji dio klizača tako da se tijelo profila nalazi na mjestu gdje su naprezanja maksimalna. Slika 7.28 b) prikazuje cijeli sklop kobilice i mjesto gdje je ukruta postavljena.

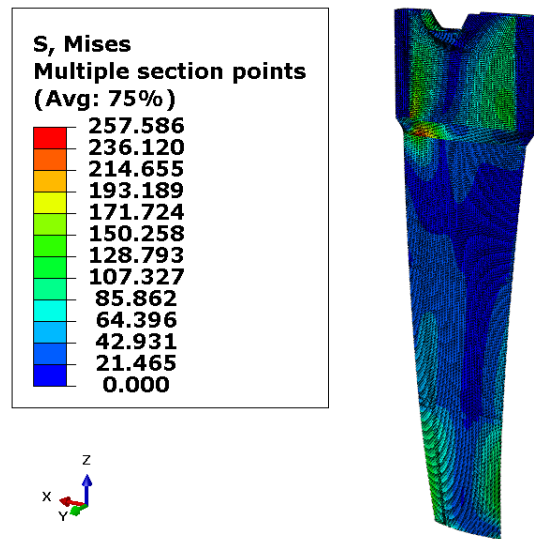


Slika 7.28 Ojačanje kritičnog djela kobilice: a) Izgled ukrute, b) Položaj ukrute u sklopu kobilice

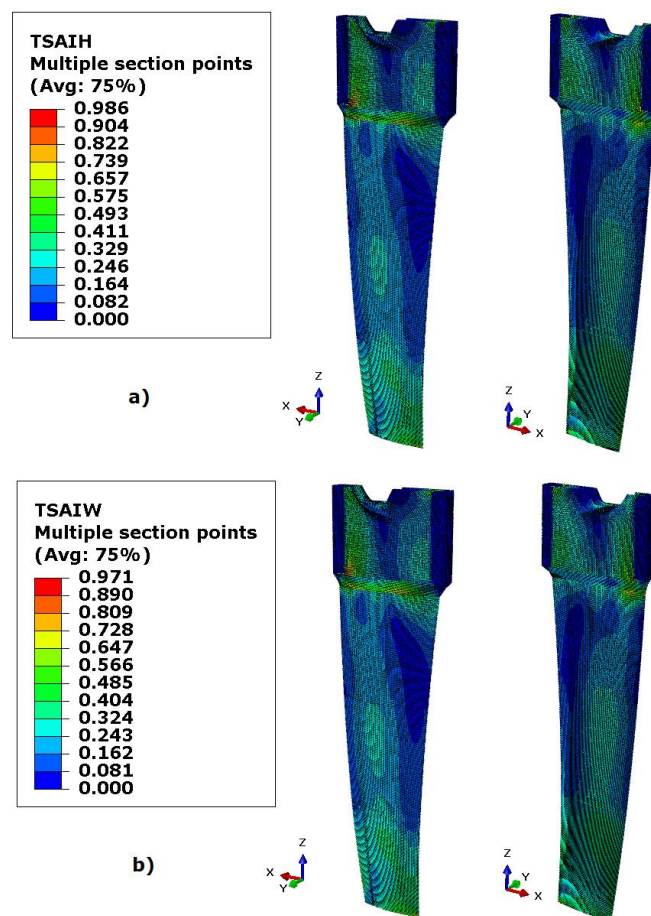
Raspored slojeva u laminatu ukrute jednak je načinu slaganja slojeva kod kobilice u zoni 3 (slika 7.4). Nadalje, osim postojećih mehaničkih veza, potrebno je dodati mehaničke veze između klizača kobilice i ukrute. Laminat plan u ostatku konstrukcije, kao i opterećenje i rubni uvjeti, su nepromijenjeni. Model je ponovo diskretiziran S4R elementima (isti se elementi koriste kod izrade mreže ukrute).

Raspodjela naprezanja koja je dobivena numeričkom analizom modela s ukrutom prikazana je slikom 7.29. Iz raspodjele se vidi znatno smanjenje ekvivalentnih naprezanja na dijelu na

kojem su postavljeni rubni uvjeti. Progib konstrukcije se nije značajno promijenio pa neće biti posebno prikazivan.



Slika 7.29 Raspodjela ekvivalentnih napreznja prema von Misesu

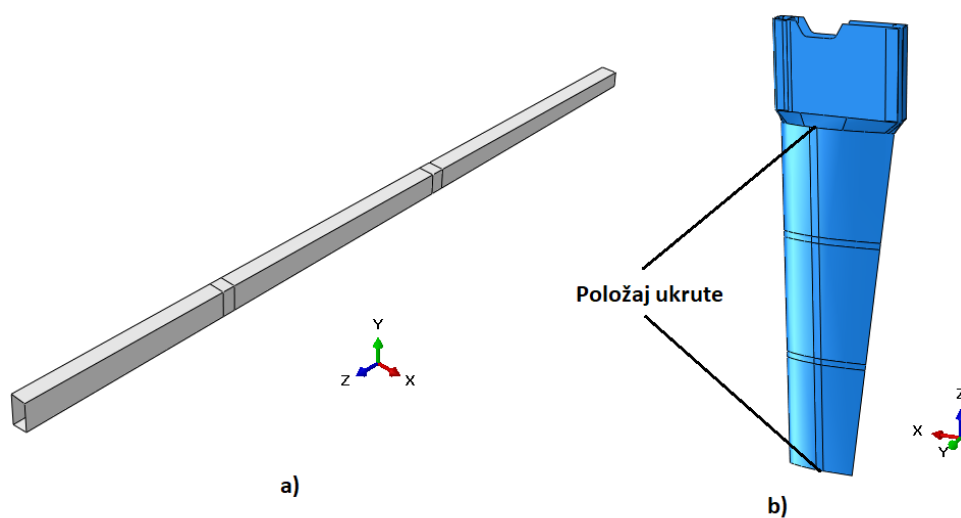


Slika 7.30 Raspodjela vrijednosti: a) Tsai-Hill kriterija popuštanja, b) Tsai-Wu kriterija popuštanja

Analiza čvrstoće nakon dodavanja ukrute konstrukciji kobilice pokazala je da na cijelom svojem dijelu kobilica zadovoljava kriterije čvrstoće (iznos faktora čvrstoće manji od 1). Prikaz raspodjele faktora popuštanja prema Tsai-Hill-u i Tsai-Wu-u prikazana je slikom 7.30. Osim čvrstoće, ponovo provjeravamo stabilnost konstrukcije. Analiza je dala iznos za kritičnu silu izvijanja od 15135 N, koja je gotovo identična ranije dobivenoj vrijednosti. Ovakva vrijednost kritične sile koju kobilica može izdržati da ne izgubi stabilnost ponovno je premala da bi konstrukcija zadovoljila kriterij stabilnosti. Zbog toga nam je potrebna još jedna iteracija kod koje će se odgovarajućim konstrukcijskim rješenjem pokušati riješiti ovaj problem. Pošto je izgled prve forme gubitka stabilnosti jednak kao i ranije (slika 7.23), ovdje ona neće biti posebno prikazana.

## 7.5. KOBILICA SA UKRUTOM UNUTAR LISTA

Nakon što je zadovoljen kriterij čvrstoće na čitavoj konstrukciji kobilice, preostaje riješiti problem stabilnosti. Kako je navedeno u prošlom poglavlju, kritična sila izvijanja koju analizirana kobilica može podnijeti da ne dođe do gubitka stabilnosti iznosi 15135 N. Ova vrijednost je manja od one kojom je kobilica opterećena. Kao konstrukcijsko rješenje kojim se želi riješiti problem stabilnosti predložena je ukruta koja je prikazana slikom 7.32. Ukruta je pravokutnog profila i prati presjek oplata kobilice (idealni hidrodinamički profil). Ostatak konstrukcije kobilice je nepromijenjen u odnosu na prošlu iteraciju. Slikom 7.32 prikazan je i položaj ukrute u sklopu kobilice.



**Slika 7.31** Ukruta za povećanje stabilnosti konstrukcije: a) Izgled ukrute b) Položaj ukrute u sklopu kobilice

Svojstva korištenog materijala nepromijenjena su (koristimo jednosmjerne slojeve UD CFRP i UD GFRP). Raspored slojeva kod ukrute razlikuje se od rasporeda u ostatku kobilice, a dan je tablicom 7.9. Korišten raspored pokazao se najpovoljniji u ovisnosti o kriteriju nosivost-masa. Osim toga orijentacija vlakna od  $0^\circ$  najbolja je zbog prirode i načina opterećenja konstrukcije i same ukrute (ukruta je opterećena na savijanje). Kombinacija dvaju materijala korištena je da bi se smanjila masa ukrute (masa ugljičnih vlakna je veća od mase staklenih). Broj slojeva nije dodatno smanjen jer bi debljina ukrute bila premala, odnosno nastao bi problem izvijanja same ukrute.

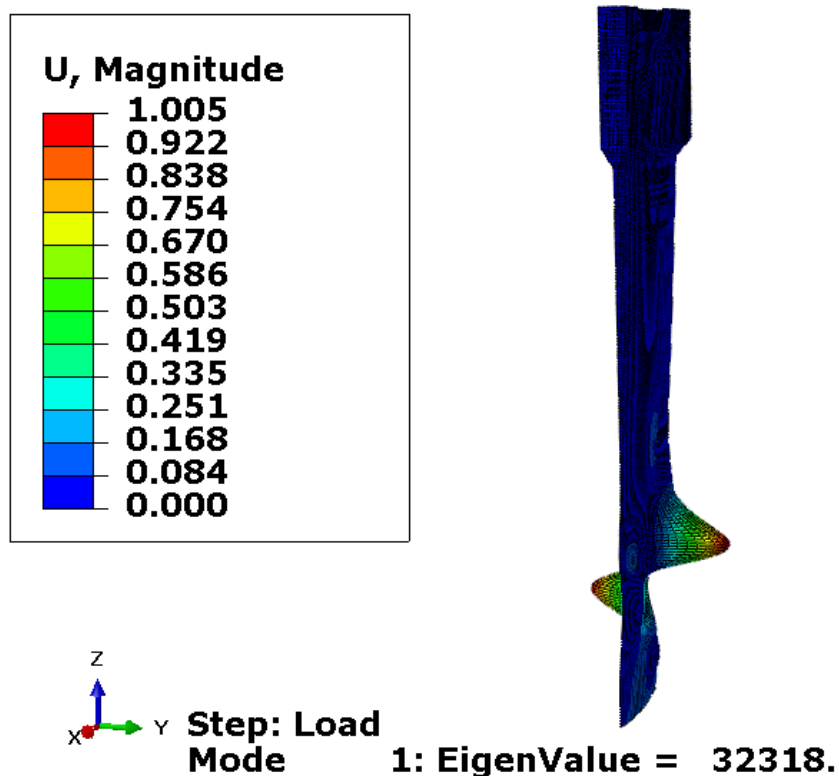


Tablica 7.9 Raspored, debljina i orijentacija slojeva kod ukrute

Sloj	Materijal	Debljina sloja, mm	Orijentacija sloja, °
1	UD CFRP	0,25	0
2	UD GFRP	0,25	0
3	UD CFRP	0,25	0
4	UD GFRP	0,25	0
5	UD CFRP	0,25	0
6	UD GFRP	0,25	0

Ponovno je potrebno dodati mehaničku vezu između lista kobilice i ukrute. Vrsta veze kojom se modelira spoj dviju komponenti je “Tie“. Opterećenja i rubni uvjeti ostaju nepromijenjeni. Diskretizacija je ponovo provedena pomoću S4R elemenata (uključujući i ukrutu).

Nakon provedene analize dobivena je vrijednost kritične sile izvijanja koja iznosi 32318 N. S obzirom da je sila koja djeluje na kobilicu 20000 N zaključujemo da stabilnost konstrukcije zadovoljava, odnosno pri tom opterećenju neće doći do gubitka stabilnosti konstrukcije.



## 8. ZAKLJUČAK

U radu je provedena numerička analiza kompozitne kobilice za male jedrilice, a kontrolirana je čvrstoća i stabilnost kobilice. Kompozitni laminat kobilice izrađen je od slojeva ojačanih ugljičnim i staklenim vlaknima s matricom od epoksidne smole. Početni numerički proračuni provedeni su korištenjem teoretski dobivenih svojstava materijala. Nakon toga, tako dobivena svojstva korigirana su eksperimentalno dobivenim svojstvima te je provedena nova analiza. Nakon toga su predložena poboljšanja originalnog idejnog rješenja pomoću odgovarajućih konstrukcijskih izmjena. Numerička analiza vrši se metodom konačnih elemenata, korištenjem programskog paketa *Abaqus*.

Nakon što su dane osnovne zakonitosti mehanike kompozita, mikromehanike i makromehanike, provedena je verifikacija odabranih konačnih elemenata te tehnika modeliranja. Odabran verifikacijski problem bio je analiza kompozitne pravokutne ploče opterećene na savijanje i izvijanje. Ploča je izrađena od dva sloja jednosmjernih kompozita od E-stakla i epoksidne smole. Konvergencija je provjerena za ljuskaste elemente (prvog i drugog reda) te za ljuskaste kontinuumske elemente. Najbolju konvergenciju numeričkih k analitičkim rezultatima za pomake i naprezanja dali su ljuskasti elementi drugoga reda (S8R5). Ostali elementi konvergiraju sporije, ali uz zadovoljavajuću točnost. Kod izvijanja ljuskasti elementi su pokazali zadovoljavajuću konvergenciju, dok je za ljuskaste kontinuumske elemente bilo potrebno puno više konačnih elemenata da bi se numerički dobiveni rezultat približio analitičkom rješenju. Konačno, kao adekvatan element za analizu kobilice, odabran je ljuskasti element prvoga reda (S4R) jer daje najbolji kompromis između točnosti i potrošnje računalnog vremena i resursa.

Analiza kobilice provedena je u nekoliko iteracija, pri kojima je kod svake sljedeće iteracije kobilica doživjela određene promjene svojstava ili konstrukcije. Prva iteracija provedena je korištenjem vrijednosti svojstava materijala koja su dobivena teoretski upotrebom mikromehaničke teorije mješavina. Dobivena svojstva uspoređena su i po potrebi korigirana u odnosu na podatke iz literature kako bi se dobila što realnija procjena materijalnih parametara. Nakon početnog proračuna proveden je eksperiment pomoću kojeg su dobiveni novi podaci o svojstvima materijala. Eksperimentalni podaci dali su malo lošije vrijednosti parametara čvrstoće. To se pravda pretpostavkama i pojednostavljenjima koja su postavljena kod teoretskog proračuna. Teoretska svojstva su korigirana u skladu s

eksperimentom, nakon čega je provedena nova numerička analiza. Konstrukcija je do ovog trenutka pokazala nezadovoljavanje kriterija popuštanja (*Tsai-Hill* i *Tsai-Wu*) na dijelu gdje je rubnim uvjetima uklještenja modeliran spoj kobilice s njenom kutijom. Osim toga, čvrstoća nije bila zadovoljena na spoju lista s klizačem kobilice usred visokih koncentracija naprezanja na ovom dijelu konstrukcije. Trećom iteracijom problem visokih koncentracija naprezanja oko spoja profila i klizača kobilice riješen je izvedbom prijelaza geometrije spoja u obliku radijusa, što je snizilo maksimalne iznose naprezanja oko spoja. Nakon toga postavljena je ukruta u obliku I-profila na mjesto kontakta kobilice s njezinom kutijom (mjesto rubnih uvjeta uklještenja). Ukrutom smo riješili problem čvrstoće na klizaču kobilice. U ovoj fazi čvrstoća je zadovoljena na cijeloj konstrukciji. Problem gubitka stabilnosti kobilice riješen je dodavanjem još jedne ukrute smještene unutar lista kobilice. Profil ukrute je četverokutan, a prati hidrodinamički profil oplata kobilice. Nakon dodavanja ove ukrute dobivena je konačna verzija konstrukcije koja zadovoljava oba kriterija (čvrstoću i stabilnost).

## LITERATURA

- [1] Gay D.: *Composite materials, Design and Applications, Third edition*, Taylor&Francis Group, Boca Raton 2015.
- [2] Lupasteanu V., Taranu N., Popoaei S.: *Theoretical strenght properties of unidirectional reinforces fiber reinforced polymer composites*, Tehničko sveučilište „Gheorghe Asachi“ u Iasiju, Iasi 2013.
- [3] Smojver I.: *Mehanika kompozitnih materijala*, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb 2016./17.
- [4] Kollar L. P., Springer G. S.: *Mechanics of Composite structures*, Cambridge University Press, Cambridge 2003.
- [5] Peters S. T.: *Handbook of Composites, Second edition*, Chapman&Hall, UK London 1998.
- [6] Manahan M. A.: *A Finite Element Study of the Deflection of Simply Supported Composite Plates Subject to Uniform Load*, Rensselaer Polytechnic Institute Hartford, Connecticut, 2011.
- [7] Reddy J. N.: *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells, Theory and Analysis*, Second Edition, Boca Raton 2004.
- [8] Vinson J. R.: *Plate and Panel Structures of Isotropic, Composite and Piezoelectric Materials, Including Sandwich Construction*, Netherlands 2005.
- [9] Barbero E. J.: *Finite Element Analysis of Composite Materials Using Abaqus*, Boca Raton 2013.
- [10] Sorić J.: *Metoda konačnih elemenata*, Golden marketing – Tehnička knjiga, Zagreb 2004.
- [11] ABAQUS, „*Abaqus Documentation*“, Version 6.14, Dassault Systemes Simulia Corp., Providence, RI, USA, 2014.
- [12] Tonković Z.: *Numerička analiza konstrukcija – Podloge s predavanja i vježbi*, Zagreb 2017.
- [13] Kovačić L.: *Diplomski rad – Numeričko modeliranje sklopa uvlačive kobilice za malu jedrilicu*, Zagreb 2016.
- [14] Ferlin S.: *Numerička analiza čvrstoće i stabilnosti lista kobilice male jedrilice*, Zagreb 2016.

- 
- [15] *Determination of tensile properties of plastics, Part 4: Test conditions for isotropic and orthotropic fiber-reinforced plastic composites* (European standard EN ISO 527-4: 1997)
- [16] *Determination of tensile properties of plastics, Part 5: Test conditions for unidirectional fiber-reinforced plastic composites* (European standard EN ISO 527-5: 1997)
- [17] Leissa A. W.: *Buckling of laminated composite plates and shell panels*, Sveučilište Ohio, Ohio 1985.
- [18] Özben T.: *Analysis of critical buckling load of laminated composites plate with different boundary conditions using FEM and analytical methods*, Computational Materials Science 2009.
- [19] <https://en.wikipedia.org/wiki/Sailboat> - Jedrilice, podjela, povijest, dijelovi jedrilice, vrste jedrilice
- [20] <https://www.boat-ed.com/delaware/studyGuide/Parts-of-a-Sailboat/> - Dijelovi jedrilice
- [21] <https://www.sailmagazine.com/boats/some-common-centerboard-and-daggerboard-designs> - Shema sklopa kobilica s utegom-kutija kobilice

## **PRILOZI**

- I. CD-R disc
- II. Prilog A: Tablica sa svojstvima jednoslojnih kompozita koji su po sastavu slični reprezentativnim slojevima
- III. Prilog B: Provjera konvergencije rješenja kod kompozitne kobilice

**PRIOLOG A: TABLICA SA SVOJSTVIMA JEDNOSLOJNIH  
KOMPOZITA KOJI SU PO SASTAVU SLIČNI  
REPREZENTATIVNIM SLOJEVIMA**

Svojstva koja su prikazana u donjoj tablici uzeta su za jednoslojne kompozite koji su po sastavu slični kompozitima kojima je provedena analiza kobilice. Identifikacija kompozita provedena je uspoređivanjem modula elastičnosti iz literature s teoretski izračunatim modulima (u ovisnosti o konstituentima i njihovim svojstvima). Podaci su uzeti iz literature [1], [4], [5], [9]. Važno je napomenuti da su podaci iz literature djelomično korigirani s obzirom na volumni udio vlakna koji kod materijala kompozitne kobilice iznosi 48% (korekcija vršena pomoću omjera volumnih udjela i karakteristika za svaki udio). U donjoj tablici brojevi u prvom redu predstavljaju sljedeće materijale:

- 1 - HR-carbon/epoxy ,
- 2 - E-glass/epoxy ,
- 3 - T300/5208 (HR-carbon/epoxy) ,
- 4 - ScotchPly 1002 (E-glass/epoxy) ,
- 5 - T300/5208 (HR-carbon/epoxy) ,
- 6 - E-glass/DER332 .

<b>Materijal</b>	1	2	3	4	5	6	7
<b>Literatura</b>	[1]	[1]	[4]	[4]	[5]	[5]	[9]
$E_1$ , GPa	107	36	124	38,6	109	38,4	118
$E_2$ , GPa	5,6	9,6	7,1	8,27	6,97	9,6	8,6
$G_{12}$ , GPa	3,36	3,6	4,9	4,14	4,65	4,8	4,1
$\nu_{12}$ , -	0,25	0,3	0,3	0,26	0,3	0,2	0,28
$f_{L_t}$ , MPa	1016	1000	1029	1062	1179	816	1353
$f_{L_c}$ , MPa	904	480	1029	610	1147	392	951,3
$f_{T_t}$ , MPa	33,6	28	27	31	28	6,4	51,5
$f_{T_c}$ , MPa	112,8	112,8	169	118	123	62,4	180,7
$f_{L_{Ts}}$ , MPa	50,4	50,4	47	72	-	18,4	65,5

## PRILOG B: PROVJERA KONVERGENCIJE RJEŠENJA KOD KOMPOZITNE KOBILICE

Kod proračuna kobilice pomoću teoretski dobivenih iznosa materijalnih parametara, provedena je konvergencija numeričkih rješenja. Konvergencija se provodi da bi se vidjelo da li je dobiveno rješenje zadovoljavajuće točno. Priložena tablica pokazuje rješenja proračuna za ekvivalentna naprezanja prema von Misesu i vrijednosti faktora kriterija popuštanja (Tsai-Hill, Tsai-Wu). Mjesto na kojem se promatraju karakteristike je područje kontakta kobilice s kutijom (mjesto rubnih uvjeta uklještenja). Slika na idućoj stranici pokazuje raspodjelu Tsai-Hill kriterija popuštanja za modele s mrežama od: 3190 KE, 8412 KE, 12775 KE, 18246 KE, 28177 KE i 69796 KE (konvergencija je provjeravana za dio koji je označen crvenim kružićem). Vrijednosti su dane u ovisnosti o broju elemenata, odnosno stupnjeva slobode.

Broj konačnih elemenata	Broj stupnjeva slobode	Ekvivalentna naprezanja prema von Misesu, N/mm <sup>2</sup>	Tsai-Hill kriterij popuštanja	Tsai-Wu kriterij popuštanja
3 190	74 706	459	2,82	2,73
8 412	196 560	376,6	1,53	1,62
12 775	296 844	382,2	1,83	2,01
18 246	421 398	593	3,44	3,63
28 177	653 112	474,9	2,49	2,66
69 796	1 660 704	489	2,63	2,89

Nakon tablice, na idućoj stranici prikazani su i grafovi konvergencije (redom: Konvergencija von Misesovih ekvivalentnih naprezanja, Tsai-Hill faktora popuštanja, Tsai-Wu faktora popuštanja). Iz njih možemo zaključiti da rješenja rješenja za sve tri veličine konvergiraju.



