

# Kinematička rekonstrukcija rotacije satelita

---

**Ban, Michael**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2018**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:235:415775>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-02-24**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# **DIPLOMSKI RAD**

**Michael Ban**

Zagreb, 2018.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

**KINEMATIČKA  
REKONSTRUKCIJA ROTACIJE  
SATELITA**

*Mentor:*

Prof. dr. sc. Zdravko Terze

*Student:*

Michael Ban

Zagreb, 2018.

Izjavljujem da sam ovaj rad izradio samostalno koristeći stečena znanja tijekom studija i navedenu literaturu.

Zahvaljujem se svom mentoru prof. dr. sc. Zdravku Terzeu, koji mi je zadao zadatak i svojim savjetima pomogao u izradi diplomskog rada, i njegovim asistentima, dr. sc. Dariu Zlataru mag. ing. mech. i Viktoru Pandži mag. ing. mech., koji su me usmjeravali kroz izradu ovog rada. Ne smijem propustiti i zahvalu svojoj obitelji, koja mi je omogućila studiranje i bila tu kada mi je bilo najpotrebnije. Hvala svim mojim prijateljima i kolegama, koji su bili dio mog studentskog života i slavili sa mnom svaki polozeni ispit.



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE



Središnje povjerenstvo za završne i diplomske ispite  
Povjerenstvo za diplomske ispite studija strojarstva za smjerove:  
proizvodno inženjerstvo, računalno inženjerstvo, industrijsko inženjerstvo i menadžment, inženjerstvo  
materijala te mehatronika i robotika

Sveučilište u Zagrebu Fakultet strojarstva i brodogradnje	
Datum	Prilog
Klasa:	
Ur. broj:	

## DIPLOMSKI ZADATAK

Student: **Michael Ban**

Mat. br.: 0035187359

Naslov rada na hrvatskom jeziku: **Kinematička rekonstrukcija rotacije satelita**

Naslov rada na engleskom jeziku: **Kinematic Reconstruction of Satellite Rotational Motion**

Opis zadatka:

Kinematička rekonstrukcija rotacijskog gibanja satelita temelji se na numeričkoj integraciji kinematičkih diferencijalnih jednadžbi rotacije letjelice, pri čemu se najčešće koriste jedinični kvaternioni za parametarizaciju rotacijske mnogostrukosti. Korištenjem kvaterniona izbjegavaju se kinematički singulariteti pri izračunavanju prostornih orijentacija satelita, unaprjeđuje numerička efikasnost te omogućava veća stabilnost integracijskih algoritama. Ipak, standardna upotreba kvaterniona podrazumijeva složeniji matematički model integracije rotacijske kinematike, a također je nužna i dodatna numerička stabilizacija rješavanjem eksplicitnog kinematičkog ograničenja norme jediničnih kvaterniona. Navedene poteškoće pokušavaju se riješiti novom numeričkom metodom vremenske integracije jediničnih kvaterniona koja ne operira u vektorskom prostoru globalne parametarizacije rotacije satelita, već se inkrementalna integracija vrši na tangentskom prostoru rotacijske mnogostrukosti  $SO(3)$ , uz izravnu rekonstrukciju orijentacije na mnogostrukost jediničnih kvaterniona  $SU(2)$ .

S obzirom na gornje rečeno, u radu je potrebno:

1. dati prikaz matematičkih modela i integracijskih algoritama standardne implementacije jediničnih kvaterniona za opis prostornih orijentacija satelita u okviru numeričkih algoritama integracije rotacijske dinamike
2. opisati i implementirati novopredloženi algoritam integracije rotacijskih kvaterniona koristeći lokalnu integraciju vektora rotacije kao elementa Lieve algebre  $so(3)$ , uz preslikavanje integracijske točke na mnogostrukost jediničnih kvaterniona preko odgovarajuće eksponencijalne mape
3. ocijeniti numeričku točnost i efikasnost algoritama integracije kvaterniona na Lievoj grupi u usporedbi sa standardnim modelima integracije s primjenom u području rekonstrukcije rotacijskog gibanja satelita.

U radu je potrebno navesti korištenu literaturu i eventualno dobivenu pomoć.

Zadatak zadan:

Datum predaje rada:

Predviđeni datum obrane:

16. studenog 2017.

18. siječnja 2018.

24., 25. i 26. siječnja 2018.

Zadatak zadao:

Predsjednica Povjerenstva:

  
Prof. dr. sc. Zdravko Terze

  
Prof. dr. sc. Biserka Runje

# Sadržaj

<b>1</b>	<b>UVOD</b>	<b>1</b>
1.1	Matrični prikaz gibanja krutog tijela . . . . .	1
1.2	Matrični prikaz rotacije . . . . .	3
1.3	Opis rotacije pomoću eksponencijalnih koordinata . . . . .	5
1.4	Eulerovi kutevi . . . . .	7
1.5	Kvaternioni . . . . .	10
1.6	Eulerovi parametri . . . . .	17
1.7	Jednadžba kinematičke rekonstrukcije . . . . .	27
<b>2</b>	<b>METODE INTEGRACIJE KRUTOG TIJELA U PROSTORU KORIŠTENJEM EULEROVIH PARAMETARA</b>	<b>30</b>
2.1	Kutna brzina i derivacija kutne brzine izražene preko Eulerovih pa- rametara . . . . .	30
2.2	Eulerova jednadžba . . . . .	31
2.3	Formulacija I . . . . .	32
2.4	Formulacija II . . . . .	34
2.5	Nova metoda integracije . . . . .	35
<b>3</b>	<b>NUMERIČKI EKSPERIMENT</b>	<b>39</b>
3.1	Dinamika orijentacije satelita . . . . .	41
3.2	Početni uvjeti i pretpostavke korištene kod numeričke integracije . . .	42
3.3	Usporedba rezultata . . . . .	48
<b>4</b>	<b>ZAKLJUČAK</b>	<b>49</b>
	<b>LITERATURA</b>	<b>50</b>
	<b>PRILOZI</b>	<b>52</b>

## Popis slika

1	Shematski prikaz preslikavanja iz $so(3)$ u $SO(3)$ [5] . . . . .	5
2	Rotacije koje definiraju Eulerove kuteve [7] . . . . .	8
3	Eulerovi kutevi u slučaju $\theta = n\pi$ ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) [7] . . . . .	10
4	Rotacija koordinatnog sustava $\xi - \eta - \zeta$ oko osi $\vec{u}$ [9] . . . . .	19
5	Nanosatelit RAX-1 3U, Sveučilište u Michiganu [14] . . . . .	39
6	Komponente za pasivnu magnetsku stabilizaciju nanosatelita RAX-1 [13] . . . . .	40
7	Dijagrami izmjerenih komponenata jakosti magnetskog polja, RAX-1 nanosatelit [13] . . . . .	43
8	Skenirani dijagrami jakosti magnetskog polja . . . . .	44
9	Dijagrami momenata . . . . .	45
10	Dijagram kvaterniona . . . . .	46
11	Dijagrami komponenata kutne brzine . . . . .	47
12	Dijagram konvergencije . . . . .	48

## Popis tablica

- 1 Tipični momenti koji djeluju na nanosatelit u niskoj Zemljinoj orbiti  
(eng. LEO: Low Earth Orbit) [14] . . . . . 42



## Popis oznaka

Oznaka	Jedinica	Opis
<b>T</b>	-	Matrica homogenih transformacija
<b>i, j, k</b>	-	Jedinični vektori
<b>d</b>	-	Vektor položaja
<b>I<sup>n×n</sup></b>	-	$n \times n$ jedinična matrica
<b>R</b>	-	Matrica rotacije
<b><math>\tilde{X}, \tilde{Y}</math></b>	-	Kososimetrične matrice
<b>Q</b>	-	Točka
<b>u</b>	-	Trenutni vektor rotacije
$\xi, \eta, \zeta$	-	Osi lokalnog koordinatnog sustava
$\psi, \theta, \sigma$	°	Eulerovi kutevi
<b>s, q</b>	-	Kvaternioni
<b>s, q</b>	-	Vektorski (imaginarni) dio kvaterniona
$s_0, q_0$	-	Skalarni (realni) dio kvaterniona
$q^*, s^*$	-	Konjugirani kvaternion
<b>i, j, k</b>	-	Imaginarne jedinice
$e_0, e_1, e_2, e_3$	-	Eulerovi parametri
<b>e</b>	-	Vektorski dio Eulerovih parametara
<b>p</b>	-	Kvaternion sastavljen od Eulerovih parametara
<b>p</b>	-	Vektorski zapis kvaterniona sastavljenog od Eulerovih parametara
$\omega$	rad/s	Kutna brzina
$\omega'$	rad/s	Kutna brzina definirana u lokalnom koordinatnom sustavu
<b>t'</b>	Nm	Vektor momenata definiran u lokalnom koordinatnom sustavu
<b>h</b>	$kg \cdot m^2/s$	Vektor kinetičkog momenta
$\mu_0$	$Hm^{-1}$	Magnetska permeabilnost vakuumu
<b>M<sub>p</sub></b>	$Am^{-2}$	Permanentni magnetski dipol
<b>H</b>	$Am^{-1}$	Vektor vanjskog magnetskog polja definiran u lokalnom koordinatnom sustavu

## SAŽETAK

U ovom radu opisana je kinematička rekonstrukcija rotacije satelita, koja je provedena na realnom RAX-1 nanosatelitu. Na početku rada opisano je gibanje krutog tijela, koje se može prikazati u matricnom obliku pomoću  $SE(3)$  grupe. Zatim je predstavljena  $SO(3)$  grupa, koja predstavlja rotaciju krutog tijela. Budući da parametrizacija pomoću  $SO(3)$  grupe zahtijeva upotrebu devet parametara, od kojih su samo tri nezavisna, prikazana je parametrizacija rotacije pomoću Eulerovih kuteva. Pojava singulariteta prilikom opisivanja rotacija u 3D prostoru pomoću tri parametra (poput Eulerovih kuteva), vodi do potrebe za uvođenjem kvaterniona, kod kojih to nije slučaj. Ograničavanjem kvaterniona na jediničnu duljinu, dolazi se do jediničnog kvaterniona, koji se može sastojati od Eulerovih parametara. U nastavku su prikazane dvije standardne formulacije za numeričku integraciju na kvaternionima, te nova metoda, kojom se implicitno zadovoljava jedinična norma kvaterniona, te ju nije potrebno uvoditi kao dodatnu algebarsku jednadžbu, čime bi se trebao ubrzati proces numeričke integracije. Na kraju je prikazan primjer kinematičke rekonstrukcije realnog RAX-1 satelita, kod koje se uspoređuju dvije metode integracije - nova metoda i metoda kod koje se eksplicitno zadovoljava jedinična norma kvaterniona.

Ključne riječi: *kruto tijelo, rotacija u 3D prostoru,  $SO(3)$  grupa, jedinični kvaternioni, numerička integracija*

## SUMMARY

In this thesis, kinematic reconstruction of satellite rotational motion is described, which is implemented to real RAX-1 nanosatellite. In the beginning, rigid body motion is written in matrix form and described in terms of  $SE(3)$  group. After that,  $SO(3)$  group is described, which represents rotational motion of rigid body. Since parameterization using  $SO(3)$  group uses nine parameters, only three of which are independent, parametrization in terms of Euler angles is showed. The fact that singularities appear when three-parameter parametrization is used to describe 3D rotational motion (e.g. Euler angles), there is a need to introduce quaternions, which are singularity-free. Constraining the quaternion to unit norm, we get unit quaternion, which can also include Euler parameters. Furthermore, two standard methods for numerical integration on quaternions are introduced, along with new method, in which unit norm of quaternion is implicitly satisfied and therefore there is no need to introduce additional algebraic equation, which should lead to increased efficiency in numerical integration. At the end, kinematic reconstruction of real RAX-1 nanosatellite is made, during which two integration methods are compared - new method and method in which unit norm of quaternion is explicitly satisfied.

Keywords: *rigid body, 3D rotational motion,  $SO(3)$  group, unit quaternion, numerical integration*

# 1 UVOD

Kruto tijelo karakterizira jednaka udaljenost između dvije točke krutog tijela, bez obzira na sile koje djeluju na njega. Gibanje krutog tijela sastoji se od translacije i rotacije. Translacija krutog tijela određuje se praćenjem jedne njegove točke, dok se rotacija tijela određuje postavljanjem koordinatnog sustava u točku koju promatramo kod određivanja njegove translacije (gdje točka postaje ishodište koordinatnog sustava), te promatranjem orijentacije koordinatnog sustava u novom položaju. Kod opisivanja gibanja krutog tijela, koristit će se matricni prikaz, koji pripada određenoj grupi. Stoga, posebno je definirati grupu.

Prema [1], skup  $G$  je grupa, uz binarnu operaciju  $\circ$  definiranu na elementima skupa  $G$ , ukoliko zadovoljava sljedeće aksiome:

1. *Zatvorenost*: Ako su  $g_1$  i  $g_2 \in G$ , onda vrijedi  $g_1 \circ g_2 \in G$ .
2. *Jedinični element*: Postoji jedinični element  $e$  tako da vrijedi  $g \circ e = e \circ g = g$ , za svaki  $g \in G$ .
3. *Inverzni element*: Za svaki  $g \in G$  postoji jedinstveni inverzni element  $g^{-1} \in G$ , tako da vrijedi  $g \circ g^{-1} = g^{-1} \circ g = e$ .
4. *Asocijativnost*: Ako su  $g_1, g_2, g_3 \in G$ , onda vrijedi  $(g_1 \circ g_2) \circ g_3 = g_1 \circ (g_2 \circ g_3)$ .

## 1.1 Matricni prikaz gibanja krutog tijela

Odnos položaja i orijentacije jednog koordinatnog sustava u odnosu prema drugome, definiraju homogene transformacije. Matrice homogenih transformacija su kvadratne, dimenzije  $4 \times 4$ , i zbog svojih karakterističnih svojstava nazivaju se homogenima. Vrsta koordinatnog sustava, koji se ovdje koristi je pravokutni, desno-kretni, kartezijev koordinatni sustav. Matrica homogenih transformacija ima sljedeći izgled:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} i_x & j_x & k_x & d_x \\ i_y & j_y & k_y & d_y \\ i_z & j_z & k_z & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (1)$$

U matrici 1, prva tri stupca predstavljaju projekcije jediničnih vektora (ortova) definiranog koordinatnog sustava u odnosu na nepokretni (početni) koordinatni sustav, dok posljednji stupac daje koordinate ishodišta definiranog koordinatnog sustava u

odnosu prema nepokretnom. Drugim riječima, prva tri vektora određuju orijentaciju, a posljednji daje položaj između koordinatnih sustava. Posljednji redak matrice homogenih transformacija ima uvijek jednak izgled: vektorima orijentacije u posljednjem se retku dodaje element 0, dok se vektoru položaja dodaje element 1. Time matrica postaje kvadratna, što je čini pogodnom za daljnji rad. Prema jednadžbi 1, (početni) nepokretni koordinatni sustav definiran je kao:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Zbog uvođenja desnokretnog, pravokutnog, kartezijskog koordinatnog sustava, prva tri vektora matrice transformacije, moraju ispunjavati sljedeće uvjete:

$$\begin{aligned} |\mathbf{i}| &= |\mathbf{j}| = |\mathbf{k}| = 1 \\ \mathbf{i} &= \mathbf{j} \times \mathbf{k} \\ \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} &= \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

Zbog svojstava matrice homogenih transformacija navedenih u izrazima 1 i 3, postupak invertiranja matrice transformacija može se pojednostaviti i zapisati u obliku:

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} i_x & i_y & i_z & -\mathbf{d} \cdot \mathbf{i} \\ j_x & j_y & j_z & -\mathbf{d} \cdot \mathbf{j} \\ k_x & k_y & k_z & -\mathbf{d} \cdot \mathbf{k} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

U izrazu 4,  $\mathbf{d}$  predstavlja vektor položaja u pomičnom koordinatnom sustavu i iznosi  $\mathbf{d} = (x, y, z, 1)$  [2].

Skup svih transformacija na krutom tijelu (translacija i rotacija) u prostoru  $\mathbb{R}^3$ , označenih sa  $\mathbf{T}$ , tako da vrijedi, za svaki  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ ,  $\mathbf{T}(\mathbf{a}) = \mathbf{R}\mathbf{a} + \mathbf{d}$  za  $\mathbf{R} \in SO(3)$  ( $SO(3)$  je grupa koja će biti objašnjena kasnije) i  $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^3$ , tvore specijalnu Euklid-sku grupu  $SE(3)$ . Svaki element  $SE(3)$  grupe možemo zapisati kao  $4 \times 4$  matricu homogenih transformacija u obliku izvedenom iz izraza 1:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{d} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}. \quad (5)$$

$SE(3) \subset \mathbf{R}^{4 \times 4}$  je grupa zatvorena s operacijom umnoška matrica, s jediničnom matricom  $\mathbf{I}^{4 \times 4}$  kao jediničnim elementom jer zadovoljava aksiome:

1. Ako su  $\mathbf{T}_1$  i  $\mathbf{T}_2 \in SE(3)$ , onda vrijedi  $\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2 \in SE(3)$ .
2. Jedinična matrica  $\mathbf{I}^{4 \times 4}$  je jedinični element (prikazan izrazom 2).
3. Za svaki element  $\mathbf{T} \in SE(3)$ , postoji inverzni element,  $\mathbf{T}^{-1} \in SE(3)$ , tako da vrijedi  $\mathbf{T}\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{I}^{4 \times 4}$ .
4. Asocijativnost  $SE(3)$  grupe proizlazi iz asocijativnosti umnoška matrica, tj. za  $\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \mathbf{T}_3 \in SE(3)$ , vrijedi  $(\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2)\mathbf{T}_3 = \mathbf{T}_1(\mathbf{T}_2\mathbf{T}_3)$  [3]

## 1.2 Matrični prikaz rotacije

Po uzoru na izraz 1, rotacija se matrično može prikazati kao:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} i_x & j_x & k_x \\ i_y & j_y & k_y \\ i_z & j_z & k_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}, \quad (6)$$

gdje svaki stupac matrice rotacije  $\mathbf{R}$ , predstavlja projekciju jediničnog vektora definiranog koordinatnog sustava u odnosu na nepokretni (početni) koordinatni sustav. Prema [4], rotacija je proces, a orijentacija je stanje objekta. Nakon cjelovitog okreta, početna i završna orijentacija su jednake, dok pirueta kao proces rotacije nije jednaka kao i stanje 'bez gibanja'. Kako bi se proveli izračuni vezani uz rotaciju, one se moraju predstaviti brojevima. Rotacija se može odrediti korištenjem koordinata nekih vektora vezanih za objekt. Neka su koordinate određene u koordinatnom sustavu s ishodištem u centru rotacije. Broj vektora povezan je s dimenzijom objekta. Za p-dimenzionalan objekt dovoljno je odabrati p linearno nezavisnih vektora. Ako je prostor N-dimenzionalan, rotacija se može prikazati kao  $p \times N$  matrica  $\mathbf{R}$  sa odabranim vektorima kao redovima te matrice. Bez gubitka na općenitosti, pretpostavlja se da su vektori jedinične duljine i međusobno ortogonalni i koordinatni sustav je Kartezijski. Stoga, matrica  $\mathbf{R}$  zadovoljava uvjet 7:

$$\mathbf{R}\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^T\mathbf{R} = \mathbf{I}, \quad (7)$$

gdje je  $\mathbf{I}$  jedinična matrica. U posebnom slučaju kada je dimenzija objekta jednaka dimenziji prostora ( $N=p$ ) matrice su kvadratne i sa zadovoljenim uvjetom 7, nazivaju se ortogonalnim. Ortogonalne matrice su invertibilne jer vrijedi sljedeće:

$$\det(\mathbf{R})^2 = \det(\mathbf{R}^T\mathbf{R}) = \det(\mathbf{I}) = 1. \quad (8)$$

Za inverz  $\mathbf{R}^{-1}$  od  $\mathbf{R}$  vrijedi  $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$ . Radi toga, osim  $\mathbf{R}\mathbf{R}^T = \mathbf{I}$  vrijedi i  $\mathbf{R}^T\mathbf{R} = \mathbf{I}$ . Matrice rotacije, dimenzije  $3 \times 3$ , koje osim uvjeta 7 zadovoljavaju i uvjet  $\det = +1$ , pripadaju Lievoj grupi specijalnih ortogonalnih matrica  $SO(3)$ . Skup svih ortogonalnih matrica dimenzije  $3 \times 3$  s determinantom iznosa  $+1$  označava se sa  $SO(3)$ , a prostor matrice rotacije može se definirati kao:

$$SO(3) = \{\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{3 \times 3} | \mathbf{R}\mathbf{R}^T = \mathbf{I}, \det \mathbf{R} = +1\} \quad (9)$$

Prema [1],  $SO(3) \subset \mathbb{R}^{3 \times 3}$  je grupa zatvorena s operacijom umnoška matrica, s jediničnom matricom  $\mathbf{I}$  kao jediničnim elementom jer zadovoljava sljedeće aksiome:

1. Ako su  $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2 \in SO(3)$ , onda vrijedi  $\mathbf{R}_1\mathbf{R}_2 \in SO(3)$  jer je
 
$$\mathbf{R}_1\mathbf{R}_2(\mathbf{R}_1\mathbf{R}_2)^T = \mathbf{R}_1\mathbf{R}_2\mathbf{R}_2^T\mathbf{R}_1^T = \mathbf{R}_1\mathbf{R}_1^T = \mathbf{I}$$

$$\det(\mathbf{R}_1\mathbf{R}_2) = \det(\mathbf{R}_1)\det(\mathbf{R}_2) = +1$$
2. Jedinična matrica  $\mathbf{I}$  je jedinični element
3. Iz definicije ortogonalne matrice (7) slijedi da je matrica  $\mathbf{R}^T \in SO(3)$  inverz matrice  $\mathbf{R} \in SO(3)$
4. Asocijativnost  $SO(3)$  grupe proizlazi iz asocijativnosti umnoška matrica: za  $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{R}_3 \in SO(3)$  vrijedi  $(\mathbf{R}_1\mathbf{R}_2)\mathbf{R}_3 = \mathbf{R}_1(\mathbf{R}_2\mathbf{R}_3)$ .

Specijalna ortogonalna matrica može se izraziti u obliku beskonačnog reda analogno ekspanziji eksponencijalne funkcije. Svaka specijalna ortogonalna matrica ( $SO(3)$  grupa), može biti prikazana u obliku:

$$\mathbf{R} = \exp(\tilde{\mathbf{X}}) \quad (10)$$

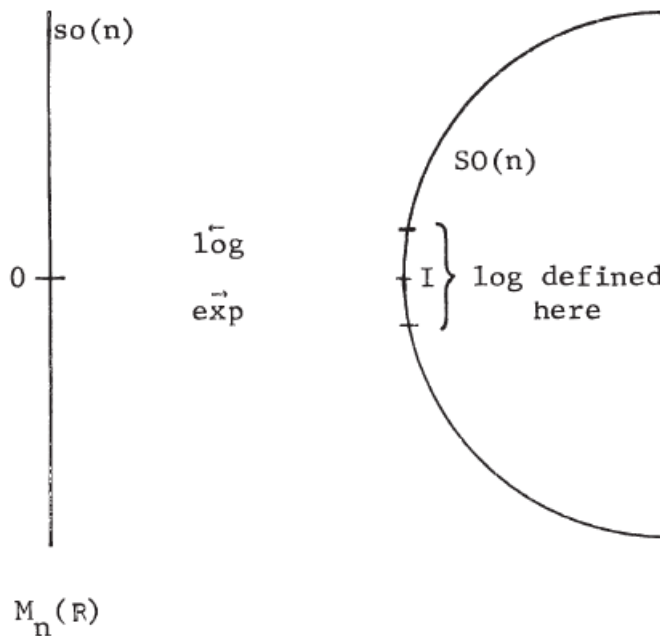
gdje je  $\tilde{\mathbf{X}}$  kososimetrična matrica. U izrazu 11 prikazana je grupa kososimetričnih matrica  $so(3)$ .

$$so(n) = \{\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{n \times n} | \mathbf{S}^T = -\mathbf{S}\} \quad (11)$$

Budući da su kososimetrične matrice zatvorene pod zbrajanjem i množenjem brojeva (tj. za kososimetrične matrice  $\tilde{\mathbf{X}}, \tilde{\mathbf{Y}}$  i realni  $\alpha$ , matrica  $\alpha\tilde{\mathbf{X}} + \tilde{\mathbf{Y}}$  je kososimetrična), one tvore vektorski prostor. Za  $3 \times 3$  matrice, dimenzija prostora je 3, tj. jednaka dimenziji grupe. Jednostavno se može zaključiti da umnožak antisimetričnih matrica ne pripada tom prostoru, ali komutator prema jednadžbi 12 pripada.

$$[\tilde{\mathbf{X}}, \tilde{\mathbf{Y}}] = \tilde{\mathbf{X}}\tilde{\mathbf{Y}} - \tilde{\mathbf{Y}}\tilde{\mathbf{X}} \quad (12)$$

Vektorski prostor opremljen s dodatnom operacijom komutatora zadovoljava uvjete prave Lieve algebre. Eksponencijalno mapiranje nosi vektore tangentne grupi  $SO(3)$  u  $\mathbf{I}$  do elemenata od  $SO(3)$ . Općenito, blizu identiteta, struktura Lievih grupa određena je strukturom njezine Lieve algebre (tangentnog prostora u identitetu).



Slika 1: Shematski prikaz preslikavanja iz  $\mathfrak{so}(3)$  u  $SO(3)$  [5]

Kako bi se izbjegao račun s devet rotacijskih parametara, od kojih su samo 3 neovisna, a ostali su povezani uvjetima ortogonalnosti vektora, najčešće su se kao rotacijski parametri koristili Eulerovi kutevi, koji će biti prikazani kasnije. Prije opisa Eulerovih kuteva, prikazat će se kako se rotacija prikazuje preko eksponencijalnih koordinata.

### 1.3 Opis rotacije pomoću eksponencijalnih koordinata

Promatranjem rotacije krutog tijela jediničnom kutnom brzinom oko zadane osi  $u$ , brzina točke  $Q$  može se zapisati kao [1], [6]:

$$\dot{Q} = u \times Q(t) = \tilde{u}Q(t). \quad (13)$$

Integracijom diferencijalne jednadžbe 13 dobiva se izraz:

$$Q(t) = e^{\tilde{u}t}Q(0), \quad (14)$$



u kojem  $Q(0)$  predstavlja položaj točke  $Q$  u početnom trenutku, a  $e^{\tilde{\mathbf{u}}t}$  predstavlja eksponencijalnu funkciju matrice, koja se računa razvojem u Taylorov red:

$$e^{\tilde{\mathbf{u}}t} = \mathbf{I} + \tilde{\mathbf{u}}t + \frac{(\tilde{\mathbf{u}}t)^2}{2!} + \frac{(\tilde{\mathbf{u}}t)^3}{3!} + \dots, \quad (15)$$

gdje je  $\mathbf{u}$  jedinični vektor,  $\|\mathbf{u}\|=1$ , dok je  $\tilde{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  kosimetrična matrica za koju vrijedi:

$$\tilde{\mathbf{u}}^T = -\tilde{\mathbf{u}}. \quad (16)$$

U izrazu 11, prikazan je skup kosimetričnih matrica, koji je također i grupa. Rotacija oko osi, koja je opisana jediničnim vektorom  $\mathbf{u}$  za  $t$  vremenskih jedinica, može se zapisati kao rotacija oko osi  $\mathbf{u}$  za  $\|\mathbf{u}\|$  vremenskih jedinica, pa se izraz 15 zapisuje kao:

$$\exp(\tilde{\mathbf{u}}) = e^{\tilde{\mathbf{u}}} = \mathbf{I} + \tilde{\mathbf{u}} + \frac{\tilde{\mathbf{u}}^2}{2!} + \frac{\tilde{\mathbf{u}}^3}{3!} + \dots \quad (17)$$

Kako bi se izraz 17 preuredio u izraz koji je pogodan za računalnu implementaciju, može se pokazati da vrijede sljedeći izrazi:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{u}}^2 &= \begin{bmatrix} 0 & -u_3 & u_2 \\ u_3 & 0 & -u_1 \\ -u_2 & u_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -u_3 & u_2 \\ u_3 & 0 & -u_1 \\ -u_2 & u_1 & 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -u_2^2 - u_3^2 & u_1u_2 & u_1u_3 \\ u_1u_2 & -u_1^2 - u_3^2 & u_2u_3 \\ u_1u_3 & u_2u_3 & -u_1^2 - u_2^2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} u_1^2 & u_1u_2 & u_1u_3 \\ u_1u_2 & u_2^2 & u_2u_3 \\ u_1u_3 & u_2u_3 & u_3^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \|u\|^2 & 0 & 0 \\ 0 & \|u\|^2 & 0 \\ 0 & 0 & \|u\|^2 \end{bmatrix} = \mathbf{u}\mathbf{u}^T - \|u\|^2\mathbf{I}, \\ \tilde{\mathbf{u}}^3 &= \tilde{\mathbf{u}}\tilde{\mathbf{u}}^2 = \tilde{\mathbf{u}}\mathbf{u}\mathbf{u}^T - \tilde{\mathbf{u}}\|u\|^2\mathbf{I} = -\|u\|^2\tilde{\mathbf{u}}. \end{aligned} \quad (18)$$

Na sličan način mogu se izvesti više potencije matrice  $\tilde{\mathbf{u}}$ . Ubacivanjem izraza 18 i 19 u izraz 17, dobije se sljedeći izraz:

$$\begin{aligned} \exp(\tilde{\mathbf{u}}) &= \mathbf{I} + \tilde{\mathbf{u}} + \frac{\tilde{\mathbf{u}}^2}{2!} - \frac{\|u\|^2}{3!}\tilde{\mathbf{u}} - \frac{\|u\|^2}{4!}\tilde{\mathbf{u}}^2 + \frac{\|u\|^4}{5!}\tilde{\mathbf{u}} + \frac{\|u\|^4}{6!}\tilde{\mathbf{u}}^2 + \dots = \\ &= \mathbf{I} + \left(\mathbf{I} - \frac{\|u\|^2}{3!} + \frac{\|u\|^4}{5!} + \dots\right)\tilde{\mathbf{u}} + \left(\frac{\mathbf{I}}{2!} - \frac{\|u\|^2}{4!} + \frac{\|u\|^4}{6!} + \dots\right)\tilde{\mathbf{u}}^2 = \\ &= \mathbf{I} + \left(\|u\| - \frac{\|u\|^3}{3!} + \frac{\|u\|^5}{5!} + \dots\right)\frac{\tilde{\mathbf{u}}}{\|u\|} + \left(\frac{\|u\|^2}{2!} - \frac{\|u\|^4}{4!} + \frac{\|u\|^6}{6!} + \dots\right)\frac{\tilde{\mathbf{u}}^2}{\|u\|^2} = \\ &= \mathbf{I} + \left(\|u\| - \frac{\|u\|^3}{3!} + \frac{\|u\|^5}{5!} + \dots\right)\frac{\tilde{\mathbf{u}}}{\|u\|} + \left(1 - \left(1 - \frac{\|u\|^2}{2!} + \frac{\|u\|^4}{4!} - \frac{\|u\|^6}{6!} + \dots\right)\right)\frac{\tilde{\mathbf{u}}^2}{\|u\|^2}. \end{aligned} \quad (20)$$

Iz izraza 20, korištenjem Taylorovog razvoja za trigonometrijske funkcije, dobiva se konačni izraz:

$$\exp(\tilde{\mathbf{u}}) = \mathbf{I} + \frac{\tilde{\mathbf{u}}}{\|\mathbf{u}\|} \sin(\|\mathbf{u}\|) + \frac{\tilde{\mathbf{u}}^2}{\|\mathbf{u}\|^2} (1 - \cos(\|\mathbf{u}\|)). \quad (21)$$

Svaka matrica rotacije može se prikazati pomoću izraza 21, što je dokazano u [1]. To je moguće jer se prema Eulerovom rotacijskom teoremu, svaka rotacija u trodimenzionalnom prostoru može prikazati kao rotacija oko fiksne osi za određeni kut. U ovom slučaju to je rotacija oko osi opisane jediničnim vektorom  $\mathbf{u}$  za kut  $\|\mathbf{u}\|$ .

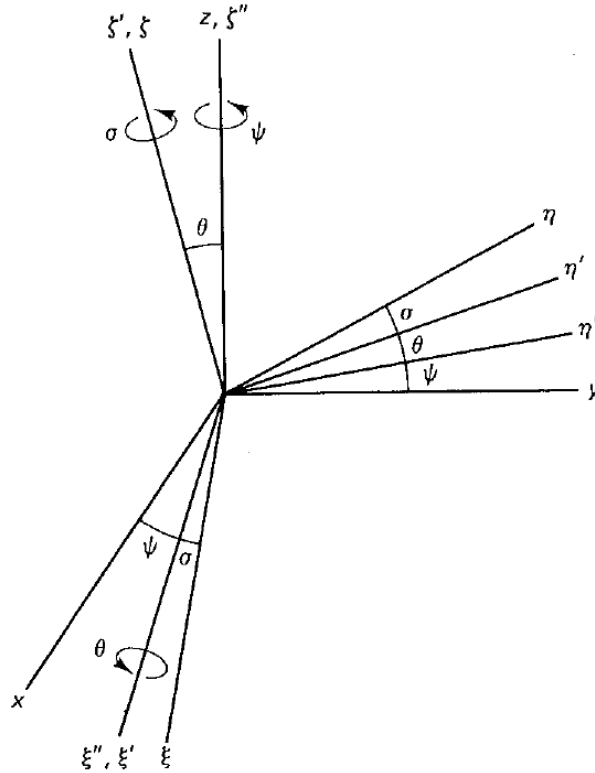
## 1.4 Eulerovi kutevi

Prema [7], Eulerovi kutevi su najčešći parametri koji opisuju kutnu orijentaciju tijela u prostoru. Kutna orijentacija zadanog koordinatnog sustava vezanog za tijelo  $\xi$ - $\eta$ - $\zeta$  može se prikazati kao rezultat triju uzastopnih rotacija. Tri kuta rotacije koji odgovaraju tim trima uzastopnim rotacijama nazivaju se Eulerovim kutevima. Slijed rotacija, koji se koristi za određivanje konačne orijentacije koordinatnog sustava je u velikoj mjeri proizvoljan. Moguće je odabrati jednu od dvanaest kombinacija u desnokretnom koordinatnom sustavu. Eulerovi kutevi, opisani u ovom radu, predstaviti će se preko tzv. x-konvencije, koja se najčešće koristi u opisivanju kutne orijentacije u orbiti.

Eulerovi kutevi predstavljaju skup triju koordinata, bez jednadžbi kinematičkih ograničenja. Slijed rotacija koje se koriste u x-konvenciji počinje rotacijom početnog sustava sastavljenog od xyz osi, oko z-osi za kut  $\psi$  u smjeru suprotnom od kazaljke na satu, što je prikazano na slici 2. Rezultirajući koordinatni sustav označen je kao  $\xi''$ - $\eta''$ - $\zeta''$ . U idućem koraku koordinatni sustav  $\xi''$ - $\eta''$ - $\zeta''$  zakreće se oko osi  $\xi''$  u smjeru suprotnom od kazaljke na satu, za kut  $\theta$ , kako bi se došlo do koordinatnog sustava  $\xi'$ - $\eta'$ - $\zeta'$ . Na kraju, koordinatni sustav  $\xi'$ - $\eta'$ - $\zeta'$  zakreće se u smjeru suprotnom od kazaljke na satu oko osi  $\zeta'$  za kut  $\sigma$ , kako bi dobili željeni koordinatni sustav  $\xi$ - $\eta$ - $\zeta$ . Kutevi  $\psi$ ,  $\theta$  i  $\sigma$ , koji su Eulerovi kutevi, potpuno određuju orijentaciju koordinatnog sustava  $\xi$ - $\eta$ - $\zeta$  u odnosu na koordinatni sustav x-y-z i zbog toga se mogu koristiti kao skup od tri nezavisne koordinate.

Elementi rotacijske matrice, mogu se dobiti kao trostruki umnožak matrica, koje određuju svaku rotaciju posebno, i koje su prikazane jednadžbama 22, 23 i 24.

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} c\psi & -s\psi & 0 \\ s\psi & c\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (22)$$



Slika 2: Rotacije koje definiraju Eulerove kuteve [7]

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\theta & -s\theta \\ 0 & s\theta & c\theta \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} c\sigma & -s\sigma & 0 \\ s\sigma & c\sigma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (24)$$

U prethodnim jednadžbama vrijedi  $c=\cos$  i  $s=\sin$ . Stoga, iz  $\mathbf{R}=\mathbf{DCB}$  slijedi:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} c\psi & -s\psi & 0 \\ s\psi & c\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\theta & -s\theta \\ 0 & s\theta & c\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\sigma & -s\sigma & 0 \\ c\sigma & c\sigma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\psi & -s\psi c\theta & s\psi s\theta \\ s\psi & c\psi c\theta & -c\psi s\theta \\ 0 & s\theta & c\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\sigma & -s\sigma & 0 \\ s\sigma & c\sigma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (25)$$

iz čega se dobiva konačni izraz za matricu rotacije izraženu preko Eulerovih kuteva:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} c\psi c\sigma - s\psi c\theta s\sigma & -c\psi s\sigma - s\psi c\theta c\sigma & s\psi s\theta \\ s\psi c\sigma + c\psi c\theta s\sigma & -s\psi s\sigma + c\psi c\theta c\sigma & -c\psi s\theta \\ s\theta s\sigma & s\theta c\sigma & c\theta \end{bmatrix}. \quad (26)$$

Budući da je matrica  $\mathbf{R}$  u jednadžbi 26 izvedena kao umnožak triju uzastopnih rotacija, može se zaključiti da je ortogonalna, tj. vrijedi  $\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^{-1}$ . Prednost korištenja triju nezavisnih rotacijskih koordinata u vidu Eulerovih kuteva, umjesto devet zavisnih kosinusa smjerova, poništava se zbog činjenice da su elementi matrice  $\mathbf{R}$ , izražene preko Eulerovih kuteva, komplicirane trigonometrijske funkcije. Osim toga, javljaju se još neki problemi vezani za korištenje Eulerovih kuteva za parametrizaciju rotacije, a to je slučaj kada je kut  $\theta = n\pi$ ,  $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , osi prve i treće rotacije se podudaraju, pa se kut  $\psi$  i  $\sigma$  ne mogu razlikovati. Takav slučaj nastaje kada uvrstimo kut  $\theta=0$  u  $\mathbf{R}$ , čime se dobiva:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} c\psi c\sigma - s\psi s\sigma & -c\psi s\sigma - s\psi c\sigma & 0 \\ s\psi c\sigma + c\psi s\sigma & -s\psi s\sigma + c\psi c\sigma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (27)$$

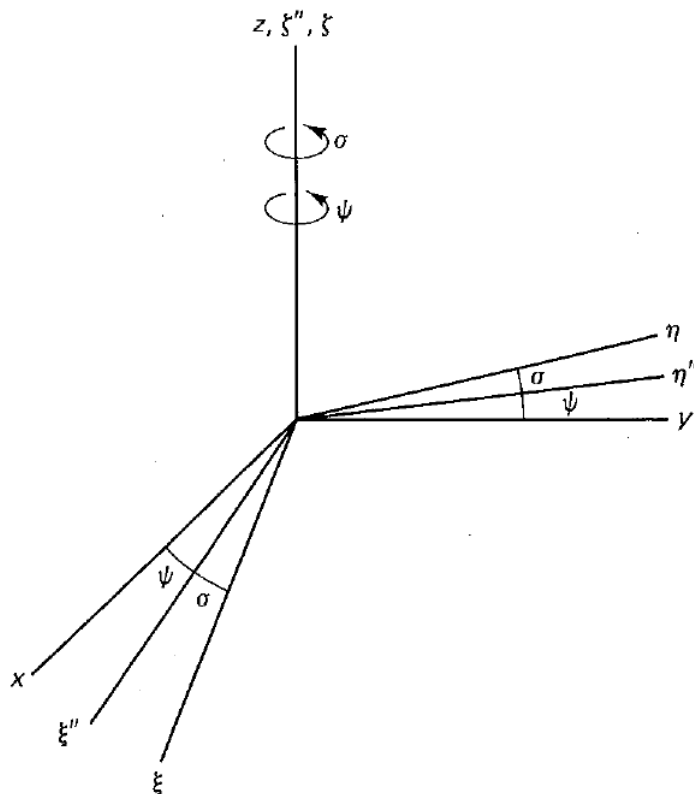
Uz uporabu trigonometrijskih identiteta prikazanih u izrazu 28, i uz uvođenje nove varijable  $\alpha = \psi + \sigma$ , dobiva se izraz 29.

$$\begin{aligned} \sin(\alpha \pm \beta) &= \sin\alpha \cos\beta \pm \cos\alpha \sin\beta \\ \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos\alpha \cos\beta \mp \sin\alpha \sin\beta \end{aligned} \quad (28)$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} c\alpha & -s\alpha & 0 \\ s\alpha & -c\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (29)$$

U slučaju da je potrebno izračunati Eulerove kuteve koji odgovaraju poznatoj matrici rotacije, iz jednadžbe 26 mogu se izvesti sljedeći izrazi:

$$\begin{aligned} \cos\theta &= r_{33} \\ \cos\psi &= \frac{-r_{23}}{\sin\theta} \\ \cos\sigma &= \frac{r_{32}}{\sin\theta} \\ \sin\theta &= \pm\sqrt{1 - \cos^2\theta} \\ \sin\psi &= \frac{r_{13}}{\sin\theta} \\ \sin\sigma &= \frac{r_{31}}{\sin\theta}. \end{aligned} \quad (30)$$



Slika 3: Eulerovi kutevi u slučaju  $\theta = n\pi$  ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) [7]

U izrazima 30 može se primjetiti da numerički problemi nastaju za iznose kuta  $\theta$  koji su blizu kritičnim vrijednostima  $n\pi$ ,  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Upravo zbog tih problema kod parametrizacije rotacije Eulerovim kutevima, kod koje nastaju singulariteti, počeli su se koristiti kvaternioni. U nastavku slijedi opis kvaterniona i njihove algebre.

## 1.5 Kvaternioni

Prema [8], za vrijeme dok su kompleksni brojevi 2. reda u obliku  $a + ib$  postajali sve prihvaćeniji, neki matematičari toga vremena tražili su ostale matematičke sustave preko hiper-kompleksnih brojeva, reda 3, 4, ..., n. 1843. nakon godina traženja, u želji da stvori takav sustav, iznenadna navala matematičkog prosvjetljenja obuzela je Wiliama Rowana Hamiltona. Povijest kaže da je šetao sa svojom ženom i, navodno, urezao danas poznate jednadžbe u kameni zid mosta, u Dublinu, preko kojega je hodao:

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{ijk} = -1 \quad (31)$$

Iz jednadžbi 31 jasno je sljedeće:

$$\begin{aligned} \mathbf{ij} &= \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} = -\mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{ji} \\ \mathbf{jk} &= \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i} = -\mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{kj} \\ \mathbf{ki} &= \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} = -\mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{ik} \end{aligned} \quad (32)$$

Cijela algebra na kvaternionima potječe iz jednadžbi 32, npr. umnožak dva kvaterniona  $\mathbf{q}$  i  $\mathbf{q}$ , gdje se izraz 33 može reducirati u izraz 34.

$$s = s_0 + \mathbf{s} = s_0 + \mathbf{i}s_1 + \mathbf{j}s_2 + \mathbf{k}s_3 \quad (33)$$

$$q = q_0 + \mathbf{q} = q_0 + \mathbf{i}q_1 + \mathbf{j}q_2 + \mathbf{k}q_3$$

$$s \circ q = s_0q_0 - \mathbf{s} \cdot \mathbf{q} + s_0\mathbf{q} + q_0\mathbf{s} + \mathbf{s} \times \mathbf{q} \quad (34)$$

Vektori u trodimenzionalnom prostoru pišu se kao skupovi tri realna broja (skalara), tako da se ortonormalna baza piše kao:

$$\mathbf{i} = (1, 0, 0) \quad \mathbf{j} = (0, 1, 0) \quad \mathbf{k} = (0, 0, 1) \quad (35)$$

Kvaternion, kako i samo ime daje naslutiti, je skup 4 broja, tj. definira element u  $\mathbb{R}^4$ . U ovom slučaju kvaternion se zapisuje kao:

$$q = (q_0, q_1, q_2, q_3) \quad (36)$$

gdje su  $q_0, q_1, q_2$  i  $q_3$  jednostavno realni brojevi ili skalari.

Kao alternativni prikaz kvaterniona, definira se skalarni dio, kao neki realni broj  $q_0$ , i s njime povezan vektorski dio  $\mathbf{q}$ , uobičajeni vektor u  $\mathbb{R}^3$ , koji se prikazuje kao:

$$\mathbf{q} = \mathbf{i}q_1 + \mathbf{j}q_2 + \mathbf{k}q_3. \quad (37)$$

U izrazu 37,  $\mathbf{i}, \mathbf{j}$  i  $\mathbf{k}$  su standardna ortonormalna baza u  $\mathbb{R}^3$ . U tom slučaju definiramo kvaternion kao sumu prikazanu u jednadžbi 38.

$$q = q_0 + \mathbf{q} = q_0 + \mathbf{i}q_1 + \mathbf{j}q_2 + \mathbf{k}q_3 \quad (38)$$

Zaključno s time,  $q_0$  se naziva skalarnim dijelom kvaterniona, dok se  $\mathbf{q}$  naziva vektorskim dijelom kvaterniona. Skalari  $q_0, q_1, q_2$  i  $q_3$  nazivaju se komponentama kvaterniona.

Kompleksno konjugirani par kvaterniona prikazanog u jednadžbi 38 prikazuje se kao:

$$q^* = q_0 - \mathbf{q} = q_0 - \mathbf{i}q_1 - \mathbf{j}q_2 - \mathbf{k}q_3 \quad (39)$$

Upotrebom jednadžbi 38 i 39 može se pokazati da vrijedi izraz:

$$(s \circ q)^* = q^* \circ s^*. \quad (40)$$

Raspisivanjem izraza  $(sq)^*$  slijedi:

$$\begin{aligned} (s \circ q)^* &= [(s_0 + is_1 + js_2 + ks_3)(q_0 + iq_1 + jq_2 + kq_3)]^* = \\ &= [s_0q_0 + is_0q_1 + js_0q_2 + ks_0q_3 + is_1q_0 + i^2s_1q_1 + ijs_1q_2 + +iks_1q_3 + \\ &+ js_2q_0 + jis_2q_1 + j^2s_2q_2 + jks_2q_3 + ks_3q_0 + kis_3q_1 + kjs_3q_2 + k^2s_3q_3]^* = \\ &= [s_0q_0 + is_0q_1 + js_0q_2 + ks_0q_3 + is_1q_0 - s_1q_1 + ks_1q_2 - js_1q_3 + js_2q_0 - \\ &- ks_2q_1 - s_2q_2 + is_2q_3 + ks_3q_0 + js_3q_1 - is_3q_2 - s_3q_3]^* = \\ &= \left[ s_0q_0 + s_0 \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} + q_0 \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} - (s_1q_1 + s_2q_2 + s_3q_3) + \begin{bmatrix} s_2q_3 - s_3q_2 \\ s_3q_1 - s_1q_3 \\ s_1q_2 - s_2q_1 \end{bmatrix} \right]^*. \end{aligned} \quad (41)$$

Iz jednadžbe 41 konačno slijedi:

$$(s \circ q)^* = s_0q_0 - s_0 \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} - q_0 \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} - (s_1q_1 + s_2q_2 + s_3q_3) + \begin{bmatrix} s_3q_2 - s_2q_3 \\ s_1q_3 - s_3q_1 \\ s_2q_1 - s_1q_2 \end{bmatrix} \quad (42)$$

Raspisivanjem izraza  $q^*s^*$  slijedi:

$$\begin{aligned} q^* \circ s^* &= (q_0 - iq_1 - jq_2 - kq_3)(s_0 - is_1 - js_2 - ks_3) = \\ &= s_0q_0 - iq_0s_1 - jq_0s_2 - kq_0s_3 - iq_1s_0 + i^2q_1s_1 + ijq_1s_2 + ikq_1s_3 - \\ &- jq_2s_0 + jiq_2s_1 + j^2q_2s_2 + jkq_2s_3 - kq_3s_0 + kiq_3s_1 + kjq_3s_2 + k^2q_3s_3 = \\ &= s_0q_0 - iq_0s_1 - jq_0s_2 - kq_0s_3 - iq_1s_0 - q_1s_1 + kq_1s_2 - jq_1s_3 - \\ &- jq_2s_0 - kq_2s_1 - q_2s_2 + iq_2s_3 - kq_3s_0 + jq_3s_1 - iq_3s_2 - q_3s_3. \end{aligned} \quad (43)$$

Iz jednadžbe 43 konačno slijedi:

$$q^* \circ s^* = s_0q_0 - s_0 \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} - q_0 \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} - (q_1s_1 + q_2s_2 + q_3s_3) + \begin{bmatrix} q_2s_3 - q_3s_2 \\ q_3s_1 - q_1s_3 \\ q_1s_2 - q_2s_1 \end{bmatrix}. \quad (44)$$

Usporedbom dobivenih rezultata iz izraza 42 i 44 dokazuje se da vrijedi izraz 40.

Može se dokazati da za kvaternione vrijedi i sljedeća jednadžba:

$$(s^* \circ q)^* = q^* \circ s. \quad (45)$$

Raspisivanjem izraza  $(s^*q)^*$  dobiva se:

$$\begin{aligned}
(s^* \circ q)^* &= [(s_0 - is_1 - js_2 - ks_3)(q_0 + iq_1 + jq_2 + kq_3)]^* \\
&= [s_0q_0 + is_0q_1 + js_0q_2 + ks_0q_3 - is_1q_0 - i^2s_1q_1 - ijs_1q_2 - iks_1q_3 - js_2q_0 - \\
&\quad - jis_2q_1 - j^2s_2q_2 - jks_2q_3 - ks_3q_0 - kis_3q_1 - kjs_3q_2 - k^2s_3q_3]^* = \\
&= [s_0q_0 + is_0q_1 + js_0q_2 + ks_0q_3 - is_1q_0 + s_1q_1 - ks_1q_2 + js_1q_3 - js_2q_0 + \\
&\quad + ks_2q_1 + s_2q_2 - is_2q_3 - ks_3q_0 - js_3q_1 + is_3q_2 + s_3q_3]^* = \\
&= [s_0q_0 + s_1q_1 + s_2q_2 + s_3q_3 + s_0 \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} - q_0 \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s_3q_2 - s_2q_3 \\ s_1q_3 - s_3q_1 \\ s_2q_1 - s_1q_2 \end{bmatrix}]^*
\end{aligned} \tag{46}$$

Iz izraza 46 konačno se dobiva izraz:

$$(s^* \circ q)^* = s_0q_0 + s_1q_1 + s_2q_2 + s_3q_3 - s_0 \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} + q_0 \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s_2q_3 - s_3q_2 \\ s_3q_1 - s_1q_3 \\ s_1q_2 - s_2q_1 \end{bmatrix}. \tag{47}$$

Raspisivanjem izraza  $q^*s$  dobiva se:

$$\begin{aligned}
q^* \circ s &= (q_0 - iq_1 - jq_2 - kq_3)(s_0 + is_1 + js_2 + ks_3) = \\
&= q_0s_0 + iq_0s_1 + jq_0s_2 + kq_0s_3 - iq_1s_0 - i^2q_1s_1 - ijq_1s_2 - ikq_1s_3 - jq_2s_0 - \\
&\quad - jiq_2s_1 - j^2q_2s_2 - jkq_2s_3 - kq_3s_0 - kiq_3s_1 - kjq_3s_2 - k^2q_3s_3 = \\
&= q_0s_0 + iq_0s_1 + jq_0s_2 + kq_0s_3 - iq_1s_0 + q_1s_1 - kq_1s_2 + jq_1s_3 - jq_2s_0 + kq_2s_1 + \\
&\quad + q_2s_2 - iq_2s_3 - kq_3s_0 - jq_3s_1 + iq_3s_2 + q_3s_3.
\end{aligned} \tag{48}$$

Iz izraza 48 dobiva se konačni izraz:

$$q^* \circ s = q_0s_0 + q_1s_1 + q_2s_2 + q_3s_3 - s_0 \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} + q_0 \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q_3s_2 - q_2s_3 \\ q_1s_3 - q_3s_1 \\ q_2s_1 - q_1s_2 \end{bmatrix}. \tag{49}$$



Usporedbom izraza 47 i 49 dokazuje se jednadžba 45.

Ukoliko se kvaternion pomnoži sa svojom konjugacijom dobiva se:

$$\begin{aligned}
q \circ q^* &= (q_0 + iq_1 + jq_2 + kq_3)(q_0 - iq_1 - jq_2 - kq_3) = \\
&= q_0^2 - iq_0q_1 - jq_0q_2 - kq_0q_3 + iq_0q_1 - i^2q_1^2 - ijq_1q_2 - ikq_1q_3 + jq_0q_2 - jiq_1q_2 - j^2q_2^2 - jkq_2q_3 + \\
&\quad + kq_0q_3 - kiq_1q_3 - kjq_2q_3 - k^2q_3^2 = \\
&= q_0^2 - iq_0q_1 - jq_0q_2 - kq_0q_3 + iq_0q_1 + q_1^2 - kq_1q_2 + jq_1q_3 + jq_0q_2 + kq_1q_2 + q_2^2 - iq_2q_3 + kq_0q_3 - \\
&\quad -jq_1q_3 + iq_2q_3 + q_3^2 = \\
&= q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + i(q_0q_1 - q_0q_1 + q_2q_3 - q_2q_3) + j(q_0q_2 - q_0q_2 + q_1q_3 - q_1q_3) + \\
&\quad + k(q_1q_2 - q_1q_2 + q_0q_3 - q_0q_3)
\end{aligned} \tag{50}$$

Iz izraza 50, dobiva se konačni izraz:

$$q \circ q^* = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2. \tag{51}$$

Ukoliko se konjugacija kvaterniona pomnoži sa samim kvaternionom dobiva se:

$$\begin{aligned}
q^* \circ q &= (q_0 - iq_1 - jq_2 - kq_3)(q_0 + iq_1 + jq_2 + kq_3) = \\
&= q_0^2 + iq_0q_1 + jq_0q_2 + kq_0q_3 - iq_0q_1 - i^2q_1^2 - ijq_1q_2 - ikq_1q_3 - jq_0q_2 - jiq_1q_2 - j^2q_2^2 - \\
&\quad -jkq_2q_3 - kq_0q_3 - kiq_1q_3 - kjq_2q_3 - k^2q_3^2 = \\
&= q_0^2 + iq_0q_1 + jq_0q_2 + kq_0q_3 - iq_0q_1 + q_1^2 - kq_1q_2 + jq_1q_3 - jq_0q_2 + kq_1q_2 + q_2^2 - iq_2q_3 - kq_0q_3 - \\
&\quad -jq_1q_3 + iq_2q_3 + q_3^2 = \\
&= q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + i(q_0q_1 - q_0q_1 + q_2q_3 - q_2q_3) + j(q_0q_2 - q_0q_2 + q_1q_3 - q_1q_3) + \\
&\quad + k(q_1q_2 - q_1q_2 + q_0q_3 - q_0q_3).
\end{aligned} \tag{52}$$

Iz izraza 52 konačno se dobiva:

$$q^* \circ q = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 \tag{53}$$

Izrazi 51 i 53 pokazuju da iako općenito umnožak kvaterniona ne komutira, umnožak kvaterniona i njegove konjugacije komutira, što se zapisuje kao:

$$q \circ q^* = q^* \circ q. \tag{54}$$

Norma kvaterniona  $q$ , označuje se skalarom  $N(q)$ , preko izraza 55.

$$\begin{aligned}
N(q) &= \sqrt{q^*q} \\
N^2(q) &= q^*q
\end{aligned} \tag{55}$$

Korištenjem izraza 53, dobije se da za normu kvaterniona vrijedi:

$$|q| = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}, \quad (56)$$

što je jednako Euklidskoj normi vektora iz  $\mathbb{R}^4$ . Jedinični kvaternion  $q$ , ima normu jednaku jedan, tj.:

$$\begin{aligned} |q| &= |q^*| = 1 \\ N^2(q) &= q^*q = 1 \end{aligned} \quad (57)$$

Važno je napomenuti da je umnožak jediničnih kvaterniona jednak jediničnom kvaternionu.

Prema definiciji inverza slijedi:

$$q^{-1}q = qq^{-1} = 1. \quad (58)$$

Množenjem s desne strane izraza 57 sa  $q^{-1}$  dobije se izraz 59.

$$q^*qq^{-1} = N^2(q)q^{-1} = q^* \quad (59)$$

Iz izraza 59 slijedi:

$$q^{-1} = \frac{q^*}{N^2} = \frac{q^*}{|q|^2} \quad (60)$$

U slučaju ako je kvaternion jedinični, vrijedi:

$$q^{-1} = q^*. \quad (61)$$

Algebra kvaterniona je asocijativna ali nije komutativna ( $x * y \neq y * x$ ). Komutacija predstavlja neovisnost rezultata o redoslijedu elemenata nad kojima se izvodi operacija. Skalarni dio od  $x \times y$  i  $y \times x$  je jednak. Ako su vektorski dijelovi  $x$  i  $y$  paralelni vektori, kvaternioni  $x$  i  $y$  komutiraju. Inverz ne postoji jedino ako je  $x = 0$ . Jedinični kvaternion odgovara rotaciji. Ako kvaternioni  $q$  i  $q'$  odgovaraju ortogonalnim matricama  $\mathbf{R}$  i  $\mathbf{R}'$ , onda kvaternionski umnožak  $q' \otimes q$  odgovara umnošku matrica  $\mathbf{R}' \mathbf{R}$ . Formalnim jezikom rečeno, jedinični kvaternioni su homomorfni  $SO(3)$  grupi. Komponente kvaterniona kao parametri rotacije, ponekad se nazivaju Eulerovim parametrima ili Euler-Rodriguesovim parametrima. Trag matrice  $\mathbf{R}$  određen je skalarnim dijelom odgovarajućeg kvaterniona prema izrazu 62.

$$R_{ii} = 4q_0^2 - 1 \quad (62)$$

Vektorski dio kvaterniona povezan je s antisimetričnim dijelom od  $\mathbf{R}$ . Komponente kvaterniona mogu se jednostavno povezati s os-kut parametrima, te su i inverzne

formule jednostavne. Jedinični kvaternioni su točke na jediničnoj sferi u 4D prostoru. Suprotne točke na sferi odgovaraju jednako rotaciji.

Jedinični kvaternioni predstavljaju jediničnu sferu na  $\mathbb{R}^4$ , tj. tvore grupu:

$$S^3 = \mathbf{q} \in \mathbb{R}^4 \mid |q| = 1. \quad (63)$$

Kako bi se dokazalo da skup  $S^3$  zaista predstavlja grupu, potrebno je dokazati da skup zadovoljava aksiome navedene u uvodu:

1. *Zatvorenost*: Ako su  $q, s \in S^3$ , tada vrijedi  $q \circ s \in S^3$ .
2. *Jedinični element*: Jedinični element je kvaternion  $q=(1, \mathbf{0})$ .
3. *Inverzni element*: Inverzni element za svaki  $q \in S^3$  je  $q^* \in S^3$  (izraz 61).
4. *Asocijativnost*: Ako su  $q, s, p \in S^3$ , tada vrijedi  $(q \circ s) \circ p = q \circ (s \circ p)$ .

Prema [6], svojstvo asocijativnosti može se dokazati na pregledniji način, uz činjenicu da kvaternioni kao elementi grupe  $\mathbb{R}^4$  predstavljaju četveročlane vektore s bazom  $(1, i, j, k)$ . Budući da je množenje distributivno, asocijativnost množenja kvaterniona može se dokazati množenjem svih mogućih kombinacija baznih vektora. Budući da je množenje sa skalarom asocijativno, ne moraju se provjeravati kombinacije koje uključuju bazu 1, čime preostaje 27 mogućih kombinacija množenja elemenata  $(i, j, k)$  za koje vrijedi izraz 64. U izrazu 64, dokazano je da kod svih mogućih 27 kombinacija množenja elemenata  $i, j, k$  vrijedi svojstvo asocijativnosti. Uključujući svojstvo distributivnosti množenja, dokazano je da je množenje kvaterniona asocijativno, čime je dokazano da je skup  $S^3$  (63) grupa.

U nastavku će se prikazati Eulerovi parametri, koji zapravo predstavljaju jedinični kvaternion.

$$\begin{aligned}
(ii)i &= -i = i(-1) = i(ii) \\
(ii)j &= -j = ik = i(k) = i(ij) \\
(ii)k &= -k = -ij = i(-j) = i(ik) \\
(ij)i &= ki = j = -ik = i(-k) = i(ji) \\
(ij)j &= kj = -i = i(-1) = i(jj) \\
(ij)k &= kk = -1 = ii = i(i) = i(jk) \\
(ik)i &= -ji = k = ij = i(j) = i(ki) \\
(ik)j &= -jj = 1 = i(-i) = i(kj) \\
(ik)k &= -jk = -i = i(-1) = i(kk) \\
(ji)i &= -ki = -j = j(-1) = j(ii) \\
(ji)j &= -kj = i = jk = j(k) = j(ij) \\
(ji)k &= -kk = 1 = -jj = j(-j) = j(ik) \\
(jj)i &= -i = -jk = j(-k) = j(ji) \\
jj(j) &= -j = j(-1) = j(jj) \\
(jj)k &= -k = ji = j(i) = j(jk) \\
(jk)i &= ii = -1 = jj = j(j) = j(ki) \\
(jk)j &= ij = k = -ji = j(-i) = j(kj) \\
(jk)k &= ik = -j = j(-1) = j(kk) \\
(ki)i &= ji = -k = k(-1) = k(ii) \\
(ki)j &= jj = -1 = kk = k(k) = k(ij) \\
(ki)k &= jk = i = -kj = k(-j) = k(ik) \\
(kj)i &= -ii = 1 = -kk = k(-k) = k(ji) \\
(kj)j &= -ij = -k = k(-1) = k(jj) \\
(kj)k &= -ik = j = ki = k(i) = k(jk) \\
kk(i) &= -i = kj = k(j) = k(ki) \\
(kk)j &= -j = -ki = k(-i) = k(kj) \\
(kk)k &= -k = k(-1) = k(kk).
\end{aligned} \tag{64}$$

## 1.6 Eulerovi parametri

Prema [9], Eulerovi parametri su generalizirane koordinate za kutnu orijentaciju lokalnog Kartezijuskog (gibajućeg ili fiksiranog za tijelo) koordinatnog sustava  $\xi-\eta-\zeta$

u odnosu na globalni (nepomični ili inercijski) koordinatni sustav x-y-z. Ukoliko se ishodišta koordinatnih sustava poklapaju (tj. nisu translirani jedan u odnosu na drugog), prema Eulerovom teoremu se transformacija između dva koordinatna sustava može postići jednom jedinom rotacijom oko jedinstvene osi koja se naziva os rotacije.

Izraz koji sadrži eksponencijalne koordinate, a predstavlja rotaciju (21), može se preurediti korištenjem trigonometrijskih pravila:

$$\begin{aligned} \sin(\|\mathbf{u}\|) &= 2\sin\left(\left\|\frac{\mathbf{u}}{2}\right\|\right)\cos\left(\left\|\frac{\mathbf{u}}{2}\right\|\right), \\ 1 - \cos(\|\mathbf{u}\|) &= 2\sin^2\left(\left\|\frac{\mathbf{u}}{2}\right\|\right). \end{aligned} \quad (65)$$

Ubacivanjem 65 u 21 dobiva se:

$$\exp(\tilde{\mathbf{u}}) = \mathbf{I} + 2\sin\left(\left\|\frac{\mathbf{u}}{2}\right\|\right)\cos\left(\left\|\frac{\mathbf{u}}{2}\right\|\right)\frac{\tilde{\mathbf{u}}}{\|\mathbf{u}\|} + 2\sin^2\left(\left\|\frac{\mathbf{u}}{2}\right\|\right)\frac{\tilde{\mathbf{u}}^2}{\|\mathbf{u}\|^2}. \quad (66)$$

Ubacivanjem izraza 18 u 66, dobiva se:

$$\begin{aligned} \exp(\tilde{\mathbf{u}}) &= \mathbf{I} + 2\sin\left(\left\|\frac{\mathbf{u}}{2}\right\|\right)\cos\left(\left\|\frac{\mathbf{u}}{2}\right\|\right)\frac{\tilde{\mathbf{u}}}{\|\mathbf{u}\|} + 2\sin^2\left(\left\|\frac{\mathbf{u}}{2}\right\|\right)\frac{\mathbf{u}\mathbf{u}^T}{\|\mathbf{u}\|^2} - 2\sin^2\left(\left\|\frac{\mathbf{u}}{2}\right\|\right)\mathbf{I} = \\ &= (1 - 2\sin^2\left(\left\|\frac{\mathbf{u}}{2}\right\|\right))\mathbf{I} + 2\sin\left(\left\|\frac{\mathbf{u}}{2}\right\|\right)\cos\left(\left\|\frac{\mathbf{u}}{2}\right\|\right)\frac{\tilde{\mathbf{u}}}{\|\mathbf{u}\|} + 2\sin^2\left(\left\|\frac{\mathbf{u}}{2}\right\|\right)\frac{\mathbf{u}\mathbf{u}^T}{\|\mathbf{u}\|^2} \quad (67) \\ &= (2(1 - \sin^2\left(\left\|\frac{\mathbf{u}}{2}\right\|\right)) - 1)\mathbf{I} + 2\sin\left(\left\|\frac{\mathbf{u}}{2}\right\|\right)\cos\left(\left\|\frac{\mathbf{u}}{2}\right\|\right)\frac{\tilde{\mathbf{u}}}{\|\mathbf{u}\|} + 2\sin^2\left(\left\|\frac{\mathbf{u}}{2}\right\|\right)\frac{\mathbf{u}\mathbf{u}^T}{\|\mathbf{u}\|^2}. \end{aligned}$$

Korištenjem trigonometrijskog identiteta  $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ , dobiva se sljedeći izraz:

$$\exp(\tilde{\mathbf{u}}) = (2\cos^2\left(\left\|\frac{\mathbf{u}}{2}\right\|\right) - 1)\mathbf{I} + 2\sin\left(\left\|\frac{\mathbf{u}}{2}\right\|\right)\cos\left(\left\|\frac{\mathbf{u}}{2}\right\|\right)\frac{\tilde{\mathbf{u}}}{\|\mathbf{u}\|} + 2\sin^2\left(\left\|\frac{\mathbf{u}}{2}\right\|\right)\frac{\mathbf{u}\mathbf{u}^T}{\|\mathbf{u}\|^2}. \quad (68)$$

Ako je smjer osi rotacije definiran preko jediničnog vektora  $\vec{e}$  i kut rotacije oko te osi je  $\|\mathbf{u}\|$ , što je prikazano na slici 4, onda je vektor  $\vec{e}$  na toj osi definiran kao:

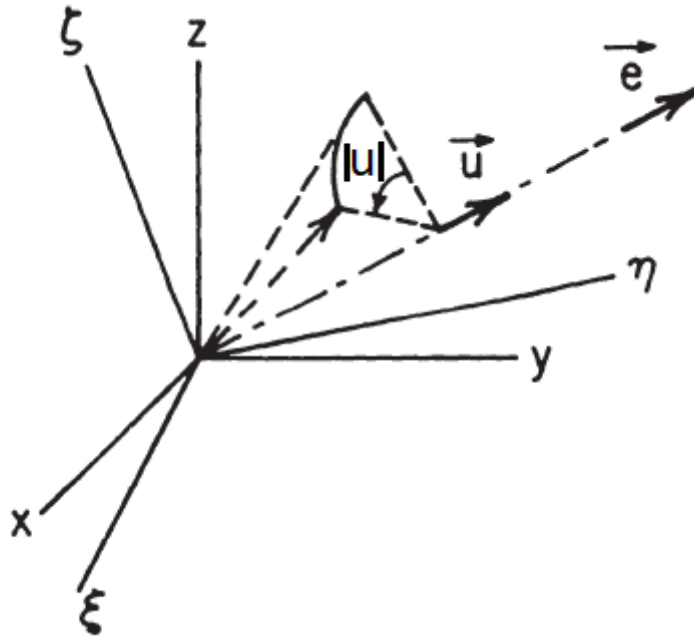
$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|} \sin\left(\left\|\frac{\mathbf{u}}{2}\right\|\right) \quad (69)$$

gdje su komponente vektora  $\vec{e}$  jednake:

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \end{bmatrix}^T \quad (70)$$

Komponente vektora  $\vec{e}$  prikazane izrazom 70, jednake su u x-y-z i  $\xi - \eta - \zeta$  koordinatnom sustavu. Četvrti parametar definira se kao:

$$e_0 = \cos\left(\left\|\frac{\mathbf{u}}{2}\right\|\right). \quad (71)$$

Slika 4: Rotacija koordinatnog sustava  $\xi - \eta - \zeta$  oko osi  $\vec{u}$  [9]

Izraz 68 može se zapisati u sljedećem obliku:

$$\exp(\tilde{\mathbf{u}}) = (2e_0^2 - 1)\mathbf{I} + 2e_0\tilde{\mathbf{e}} + 2\mathbf{e}\mathbf{e}^T. \quad (72)$$

Navedena četiri parametra:

$$\mathbf{p} = [e_0 \ e_1 \ e_2 \ e_3]^T, \quad (73)$$

poznati su kao Eulerovi parametri. Eulerovi parametri mogu se zapisati u obliku kvaterniona na sljedeći način:

$$p = (e_0, \mathbf{e}) = \left( \cos\left(\left\|\frac{\mathbf{u}}{2}\right\|\right), \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|} \sin\left(\left\|\frac{\mathbf{u}}{2}\right\|\right) \right). \quad (74)$$

Norma kvaterniona sastavljenog od Eulerovih parametara iznosi:

$$\begin{aligned} \|p\| &= e_0^2 + \mathbf{e}^T \mathbf{e} = \cos^2\left(\left\|\frac{\mathbf{u}}{2}\right\|\right) + \frac{\sin^2\left(\left\|\frac{\mathbf{u}}{2}\right\|\right)}{\|\mathbf{u}\|^2} \mathbf{u}^T \mathbf{u} = \\ &= \cos^2\left(\left\|\frac{\mathbf{u}}{2}\right\|\right) + \frac{\sin^2\left(\left\|\frac{\mathbf{u}}{2}\right\|\right)}{\|\mathbf{u}\|^2} \|\mathbf{u}\|^2 = \cos^2\left(\left\|\frac{\mathbf{u}}{2}\right\|\right) + \sin^2\left(\left\|\frac{\mathbf{u}}{2}\right\|\right) = 1. \end{aligned} \quad (75)$$

Izraz 75 dokazuje da je kvaternion, koji sadrži Eulerove parametre, jedinični.

Matrica rotacije  $\mathbf{R}$ , raspisana preko Eulerovih parametara, dobiva se raspisivanjem

jednadžbe 72:

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= (2e_0^2 - 1)\mathbf{I} + 2e_0\tilde{\mathbf{e}} + 2\mathbf{e}\mathbf{e}^T = \\ & \begin{bmatrix} 2e_0^2 - 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2e_0^2 - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2e_0^2 - 1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0 & -e_0e_3 & e_0e_2 \\ e_0e_3 & 0 & -e_0e_1 \\ -e_0e_2 & e_0e_1 & 0 \end{bmatrix} + \\ & + 2 \begin{bmatrix} e_1^2 & e_1e_2 & e_1e_3 \\ e_1e_2 & e_2^2 & e_2e_3 \\ e_1e_3 & e_2e_3 & e_3^2 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (76)$$

Pomoću izraza 76 dolazi se do konačnog izraza za matricu rotacije izraženu preko Eulerovih parametara:

$$\mathbf{R} = 2 \begin{bmatrix} e_0^2 + e_1^2 - \frac{1}{2} & e_1e_2 - e_0e_3 & e_1e_3 + e_0e_2 \\ e_1e_2 + e_0e_3 & e_0^2 + e_2^2 - \frac{1}{2} & e_2e_3 - e_0e_1 \\ e_1e_3 - e_0e_2 & e_2e_3 + e_0e_1 & e_0^2 + e_3^2 - \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (77)$$

Može se dokazati da je matrica  $\mathbf{R}$  ortonormalna, tj. vrijedi:

$$\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{I} \quad (78)$$

Prema [7], iz matrice transformacije prikazane jednadžbom 77, moguće je izvesti eksplicitne formule za Eulerove parametre s obzirom na elemente matrice transformacije. Pretpostavlja se da je devet kosinusa smjera dano transformacijskom matricom prema jednadžbi:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}. \quad (79)$$

Trag matrice  $\mathbf{R}$ , koji se zapisuje kao  $tr \mathbf{R}$ , definira se kao:

$$tr \mathbf{R} = r_{11} + r_{22} + r_{33} \quad (80)$$

Iz matrice transformacije prikazane jednadžbom 77, dobije se izraz:

$$tr \mathbf{R} = 2(3e_0^2 + e_1^2 + e_2^2 + e_3^2) - 3 = 2(2e_0^2 + 1) - 3 = 4e_0^2 - 1. \quad (81)$$

Za konačni rezultat jednadžbe 81, iskorišten je izraz:

$$e_0^2 + \mathbf{e}^T \mathbf{e} = \mathbf{p}^T \mathbf{p} = 1. \quad (82)$$

Jednadžba 81 može se zapisati kao:

$$e_0^2 = \frac{tr \mathbf{R} + 1}{4} \quad (83)$$

Uvrštavanjem izraza 83 u elemente na dijagonali od  $\mathbf{R}$  dobiva se:

$$r_{11} = 2(e_0^2 + e_1^2) - 1 = 2\left(\frac{\text{tr}\mathbf{R} + 1}{4} + e_1^2\right) - 1. \quad (84)$$

Na taj način dobiju se izrazi za sva četiri Eulerova parametra, prikazana jednadžbom 85.

$$\begin{aligned} e_0^2 &= \frac{\text{tr}\mathbf{R} + 1}{4} \\ e_1^2 &= \frac{1 + 2r_{11} - \text{tr}\mathbf{R}}{4} \\ e_2^2 &= \frac{1 + 2r_{22} - \text{tr}\mathbf{R}}{4} \\ e_3^2 &= \frac{1 + 2r_{33} - \text{tr}\mathbf{R}}{4} \end{aligned} \quad (85)$$

Za razliku od Eulerovih ili Bryantovih kuteva, ili bilo kojeg skupa od tri rotacijska parametra, u slučaju Eulerovih parametara nema kritičnih slučajeva u kojima su inverzne formule iz 85 singularne.

Može se pokazati da za sljedeće relacije koje uključuju koso-simetričnu matricu  $\tilde{\mathbf{e}}$  vrijede izrazi 86 i 87.

$$\tilde{\mathbf{e}}\mathbf{e} = \mathbf{0} \quad (86)$$

$$\tilde{\mathbf{e}}\tilde{\mathbf{e}} = \mathbf{e}\mathbf{e}^T - (\mathbf{e}^T\mathbf{e})\mathbf{I} = \mathbf{e}\mathbf{e}^T - (1 - e_0^2)\mathbf{I} \quad (87)$$

Raspisivanjem izraza 86, dobije se:

$$\begin{bmatrix} 0 & -e_3 & e_2 \\ e_3 & 0 & -e_1 \\ -e_2 & e_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -e_2e_3 + e_2e_3 \\ e_1e_3 - e_1e_3 \\ -e_1e_2 + e_1e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (88)$$

Za dokazivanje izraza 87, potrebno je raspisati  $\tilde{\mathbf{e}}\tilde{\mathbf{e}}$  (izraz 89),  $\mathbf{e}\mathbf{e}^T - (\mathbf{e}^T\mathbf{e})\mathbf{I}$  (izraz 90),  $\mathbf{e}\mathbf{e}^T - (1 - e_0^2)\mathbf{I}$  (izraz 91). Raspisivanjem izraza  $\tilde{\mathbf{e}}\tilde{\mathbf{e}}$  dobije se:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{e}}\tilde{\mathbf{e}} &= \begin{bmatrix} 0 & -e_3 & e_2 \\ e_3 & 0 & -e_1 \\ -e_2 & e_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -e_3 & e_2 \\ e_3 & 0 & -e_1 \\ -e_2 & e_1 & 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -e_3^2 - e_2^2 & e_1e_2 & e_1e_3 \\ e_1e_2 & -e_3^2 - e_1^2 & e_2e_3 \\ e_1e_3 & e_2e_3 & -e_2^2 - e_1^2 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (89)$$



Raspisivanjem izraza  $\mathbf{e}\mathbf{e}^T - (\mathbf{e}^T\mathbf{e})\mathbf{I}$  dobije se:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}\mathbf{e}^T - (\mathbf{e}^T\mathbf{e})\mathbf{I} &= \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \end{bmatrix} - \left( \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} \right) \mathbf{I} = \\ &= \begin{bmatrix} e_1^2 & e_1e_2 & e_1e_3 \\ e_1e_2 & e_2^2 & e_2e_3 \\ e_1e_3 & e_2e_3 & e_3^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 & 0 & 0 \\ 0 & e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -e_2^2 - e_3^2 & e_1e_2 & e_1e_3 \\ e_1e_2 & -e_1^2 - e_3^2 & e_2e_3 \\ e_1e_3 & e_2e_3 & -e_1^2 - e_2^2 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (90)$$

Raspisivanjem izraza  $\mathbf{e}\mathbf{e}^T - (1 - e_0^2)\mathbf{I}$  dobije se:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}\mathbf{e}^T - (1 - e_0^2)\mathbf{I} &= \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 - e_0^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - e_0^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - e_0^2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} e_1^2 & e_1e_2 & e_1e_3 \\ e_1e_2 & e_2^2 & e_2e_3 \\ e_1e_3 & e_2e_3 & e_3^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 - e_0^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - e_0^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - e_0^2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} e_1^2 - 1 + e_0^2 & e_1e_2 & e_1e_3 \\ e_1e_2 & e_2^2 - 1 + e_0^2 & e_2e_3 \\ e_1e_3 & e_2e_3 & e_3^2 - 1 + e_0^2 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (91)$$

Korištenjem jednadžbe 82, izraz 91 postaje:

$$\begin{bmatrix} -e_2^2 - e_3^2 & e_1e_2 & e_1e_3 \\ e_1e_2 & -e_1^2 - e_3^2 & e_2e_3 \\ e_1e_3 & e_2e_3 & -e_1^2 - e_2^2 \end{bmatrix}, \quad (92)$$

čime je dokazan izraz 87.

U nastavku će se prikazati zanimljive formule i identiteti između Eulerovih parametara, njihovih vremenskih derivacija i matrice rotacije. Za početak, mogu se definirati dvije matrice sastavljene od Eulerovih parametara, koje će olakšati opisivanje izraza (izrazi 93 i 94):

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} -e_1 & e_0 & -e_3 & e_2 \\ -e_2 & e_3 & e_0 & -e_1 \\ -e_3 & -e_2 & e_1 & e_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{e} & \tilde{\mathbf{e}} + e_0\mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (93)$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} -e_1 & e_0 & e_3 & -e_2 \\ -e_2 & -e_3 & e_0 & e_1 \\ -e_3 & e_2 & -e_1 & e_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{e} & -\tilde{\mathbf{e}} + e_0\mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (94)$$

Može se dokazati da je svaki red matrice  $\mathbf{E}$  i  $\mathbf{G}$  ortogonalan na vektor Eulerovih parametara  $\mathbf{p}$  (izraz 95).

$$\mathbf{E}\mathbf{p} = \mathbf{G}\mathbf{p} = \mathbf{0} \quad (95)$$

Računanjem izraza  $\mathbf{E}\mathbf{p}$  slijedi:

$$\mathbf{E}\mathbf{p} = \begin{bmatrix} -e_1 & e_0 & -e_3 & e_2 \\ -e_2 & e_3 & e_0 & -e_1 \\ -e_3 & -e_2 & e_1 & e_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_0 \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -e_0e_1 + e_0e_1 - e_2e_3 + e_2e_3 \\ -e_2e_0 + e_1e_3 + e_0e_2 - e_1e_3 \\ -e_0e_3 - e_2e_1 + e_1e_2 + e_0e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (96)$$

Slično vrijedi i za izraz  $\mathbf{G}\mathbf{p}$ :

$$\mathbf{G}\mathbf{p} = \begin{bmatrix} -e_1 & e_0 & e_3 & -e_2 \\ -e_2 & -e_3 & e_0 & e_1 \\ -e_3 & e_2 & -e_1 & e_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_0 \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -e_0e_1 + e_0e_1 + e_2e_3 - e_2e_3 \\ -e_0e_2 - e_1e_3 + e_0e_2 + e_1e_3 \\ -e_3e_0 + e_2e_1 - e_1e_2 + e_0e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (97)$$

Nadalje, redovi matrice  $\mathbf{E}$  su ortogonalni i redovi matrice  $\mathbf{G}$  su ortogonalni, iz čega slijedi:

$$\mathbf{E}\mathbf{E}^T = \mathbf{G}\mathbf{G}^T = \mathbf{I} \quad (98)$$

Raspisivanjem izraza  $\mathbf{E}\mathbf{E}^T$  dobiva se:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\mathbf{E}^T &= \begin{bmatrix} -e_1 & e_0 & -e_3 & e_2 \\ -e_2 & e_3 & e_0 & -e_1 \\ -e_3 & -e_2 & e_1 & e_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -e_1 & -e_2 & -e_3 \\ e_0 & e_3 & -e_2 \\ -e_3 & e_0 & e_1 \\ e_2 & -e_1 & e_0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} e_1^2 + e_0^2 + e_3^2 + e_2^2 & e_1e_2 + e_0e_3 - e_0e_3 - e_1e_2 & e_1e_3 - e_0e_2 - e_1e_3 + e_0e_2 \\ e_1e_2 + e_0e_3 - e_0e_3 - e_1e_2 & e_2^2 + e_3^2 + e_0^2 + e_1^2 & e_2e_3 - e_2e_3 + e_0e_1 - e_0e_1 \\ e_1e_3 - e_0e_2 - e_1e_3 + e_0e_2 & e_2e_3 - e_2e_3 + e_1e_0 - e_1e_0 & e_3^2 + e_2^2 + e_1^2 + e_0^2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (99)$$

Raspisivanjem izraza  $\mathbf{G}\mathbf{G}^T$  dobiva se:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}\mathbf{G}^T &= \begin{bmatrix} -e_1 & e_0 & e_3 & -e_2 \\ -e_2 & -e_3 & e_0 & e_1 \\ -e_3 & e_2 & -e_1 & e_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -e_1 & -e_2 & -e_3 \\ e_0 & -e_3 & e_2 \\ e_3 & e_0 & -e_1 \\ -e_2 & e_1 & e_0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} e_1^2 + e_0^2 + e_3^2 + e_2^2 & e_1e_2 - e_0e_3 + e_0e_3 - e_1e_2 & e_1e_3 + e_0e_2 - e_1e_3 - e_0e_2 \\ e_1e_2 - e_0e_3 + e_0e_3 - e_1e_2 & e_2^2 + e_3^2 + e_0^2 + e_1^2 & e_2e_3 - e_2e_3 - e_0e_1 + e_0e_1 \\ e_1e_3 + e_0e_2 - e_1e_3 - e_0e_2 & e_2e_3 - e_2e_3 - e_1e_0 + e_1e_0 & e_3^2 + e_2^2 + e_1^2 + e_0^2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (100)$$

Čime je dokazan izraz 98. Nadalje, za  $\mathbf{E}^T\mathbf{E}$  i  $\mathbf{G}^T\mathbf{G}$  vrijedi:

$$\mathbf{E}^T\mathbf{E} = \mathbf{G}^T\mathbf{G} = -\mathbf{p}\mathbf{p}^T + \mathbf{I}^{4 \times 4} \quad (101)$$

gdje je  $\mathbf{I}^{4 \times 4}$  je  $4 \times 4$  jedinična matrica.

Računanjem izraza  $\mathbf{E}^T\mathbf{E}$  dobiva se:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^T\mathbf{E} &= \begin{bmatrix} -e_1 & -e_2 & -e_3 \\ e_0 & e_3 & -e_2 \\ -e_3 & e_0 & e_1 \\ e_2 & -e_1 & e_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -e_1 & e_0 & -e_3 & e_2 \\ -e_2 & e_3 & e_0 & -e_1 \\ -e_3 & -e_2 & e_1 & e_0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 & -e_1e_0 - e_2e_3 + e_2e_3 & e_1e_3 - e_0e_2 - e_1e_3 & -e_1e_2 + e_1e_2 - e_3e_0 \\ -e_1e_0 - e_2e_3 + e_2e_3 & e_0^2 + e_3^2 + e_2^2 & -e_0e_3 + e_0e_3 - e_2e_1 & e_0e_2 - e_1e_3 - e_2e_0 \\ e_1e_3 - e_0e_2 - e_1e_3 & -e_0e_3 + e_0e_3 - e_1e_2 & e_3^2 + e_0^2 + e_1^2 & -e_2e_3 - e_1e_0 + e_1e_0 \\ -e_1e_2 + e_1e_2 - e_0e_3 & e_0e_2 - e_1e_3 - e_0e_2 & -e_2e_3 - e_0e_1 + e_0e_1 & e_2^2 + e_1^2 + e_0^2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 & -e_0e_1 & -e_0e_2 & -e_0e_3 \\ -e_1e_0 & e_0^2 + e_3^2 + e_2^2 & -e_1e_2 & -e_1e_3 \\ -e_0e_2 & -e_1e_2 & e_3^2 + e_0^2 + e_1^2 & -e_2e_3 \\ -e_0e_3 & -e_1e_3 & -e_2e_3 & e_2^2 + e_1^2 + e_0^2 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (102)$$

čime se korištenjem izraza 82 konačno dobiva:

$$\mathbf{E}^T\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 - e_0^2 & -e_0e_1 & -e_0e_2 & -e_0e_3 \\ -e_1e_0 & 1 - e_1^2 & -e_1e_2 & -e_1e_3 \\ -e_0e_2 & -e_1e_2 & 1 - e_2^2 & -e_2e_3 \\ -e_0e_3 & -e_1e_3 & -e_2e_3 & 1 - e_3^2 \end{bmatrix} \quad (103)$$

Računanjem izraza  $\mathbf{G}^T \mathbf{G}$  dobiva se:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{G}^T \mathbf{G} &= \begin{bmatrix} -e_1 & -e_2 & -e_3 \\ e_0 & -e_3 & e_2 \\ e_3 & e_0 & -e_1 \\ -e_2 & e_1 & e_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -e_1 & e_0 & e_3 & -e_2 \\ -e_2 & -e_3 & e_0 & e_1 \\ -e_3 & e_2 & -e_1 & e_0 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 & -e_0e_1 + e_2e_3 - e_2e_3 & -e_1e_3 - e_0e_2 + e_1e_3 & e_1e_2 - e_1e_2 - e_0e_3 \\ -e_0e_1 + e_2e_3 - e_2e_3 & e_0^2 + e_3^2 + e_2^2 & e_0e_3 - e_0e_3 - e_1e_2 & -e_0e_2 - e_1e_3 + e_0e_2 \\ -e_1e_3 - e_0e_2 + e_1e_3 & e_0e_3 - e_0e_3 - e_1e_2 & e_3^2 + e_0^2 + e_1^2 & -e_2e_3 + e_0e_1 - e_0e_1 \\ e_1e_2 - e_1e_2 - e_0e_3 & -e_0e_2 - e_1e_3 + e_0e_2 & -e_2e_3 + e_0e_1 - e_0e_1 & e_2^2 + e_1^2 + e_0^2 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 & -e_0e_1 & -e_0e_2 & -e_0e_3 \\ -e_0e_1 & e_0^2 + e_3^2 + e_2^2 & -e_1e_2 & -e_1e_3 \\ -e_0e_2 & -e_1e_2 & e_3^2 + e_0^2 + e_1^2 & -e_2e_3 \\ -e_0e_3 & -e_1e_3 & -e_2e_3 & e_2^2 + e_1^2 + e_0^2 \end{bmatrix}, \tag{104}
 \end{aligned}$$

čime se korištenjem izraza 82 konačno dobiva:

$$\mathbf{G}^T \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 - e_0^2 & -e_0e_1 & -e_0e_2 & -e_0e_3 \\ -e_0e_1 & 1 - e_1^2 & -e_1e_2 & -e_1e_3 \\ -e_0e_2 & -e_1e_2 & 1 - e_2^2 & -e_2e_3 \\ -e_0e_3 & -e_1e_3 & -e_2e_3 & 1 - e_3^2 \end{bmatrix} \tag{105}$$

Raspisivanjem izraza  $-\mathbf{p}\mathbf{p}^T + \mathbf{I}^{4 \times 4}$  slijedi:

$$\begin{aligned}
 -\mathbf{p}\mathbf{p}^T + \mathbf{I}^{4 \times 4} &= - \begin{bmatrix} e_0 \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_0 & e_1 & e_2 & e_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\
 &= - \begin{bmatrix} e_0^2 & e_0e_1 & e_0e_2 & e_0e_3 \\ e_0e_1 & e_1^2 & e_1e_2 & e_1e_3 \\ e_0e_2 & e_1e_2 & e_2^2 & e_2e_3 \\ e_0e_3 & e_1e_3 & e_2e_3 & e_3^2 \end{bmatrix}, \tag{106}
 \end{aligned}$$

čime se konačno dobiva:

$$-\mathbf{p}\mathbf{p}^T + \mathbf{I}^{4 \times 4} = \begin{bmatrix} 1 - e_0^2 & -e_0e_1 & -e_0e_2 & -e_0e_3 \\ -e_0e_1 & 1 - e_1^2 & -e_1e_2 & -e_1e_3 \\ -e_0e_2 & -e_1e_2 & 1 - e_2^2 & -e_2e_3 \\ -e_0e_3 & -e_1e_3 & -e_2e_3 & 1 - e_3^2 \end{bmatrix} \tag{107}$$

Usporedbom izraza 103, 105 i 107, dokazana je jednadžba 101.

Može se dokazati da je:

$$\mathbf{EG}^T = (2e_0^2 - 1)\mathbf{I} + 2(\mathbf{ee}^T + e_0\tilde{\mathbf{e}}) \quad (108)$$

Računanjem izraza  $\mathbf{EG}^T$  dobije se:

$$\begin{aligned} \mathbf{EG}^T &= \begin{bmatrix} -e_1 & e_0 & -e_3 & e_2 \\ -e_2 & e_3 & e_0 & -e_1 \\ -e_3 & -e_2 & e_1 & e_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -e_1 & -e_2 & -e_3 \\ e_0 & -e_3 & e_2 \\ e_3 & e_0 & -e_1 \\ -e_2 & e_1 & e_0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} e_1^2 + e_0^2 - e_3^2 - e_2^2 & e_1e_2 - e_0e_3 - e_0e_3 + e_1e_2 & e_1e_3 + e_0e_2 + e_1e_3 + e_0e_2 \\ e_1e_2 + e_0e_3 + e_0e_3 + e_1e_2 & e_2^2 - e_3^2 + e_0^2 - e_1^2 & e_2e_3 + e_2e_3 - e_0e_1 - e_0e_1 \\ e_1e_3 + e_1e_3 - e_0e_2 & e_2e_3 + e_2e_3 + e_1e_0 + e_1e_0 & e_3^2 - e_2^2 - e_1^2 + e_0^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (109)$$

Korištenjem jednadžbe 82, te izvlačenjem broja 2 ispred zagrade, dolazi se do sljedećeg izraza:

$$\mathbf{EG}^T = 2 \begin{bmatrix} e_0^2 + e_1^2 - \frac{1}{2} & e_1e_2 - e_0e_3 & e_1e_3 + e_0e_2 \\ e_1e_2 + e_0e_3 & e_0^2 + e_2^2 - \frac{1}{2} & e_2e_3 - e_0e_1 \\ e_1e_3 - e_0e_2 & e_2e_3 + e_0e_1 & e_0^2 + e_3^2 - \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (110)$$

Usporedbom izraza 110 s izrazom 77, dokazano je da vrijedi:

$$\mathbf{R} = \mathbf{EG}^T, \quad (111)$$

što također dokazuje da vrijedi i izraz 108. Jednadžbom 111 pokazuje se da se matrica  $\mathbf{R}$  može smatrati rezultatom dviju uzastopnih linearnih transformacija. To je najmoćnija značajka Eulerovih parametara. Deriviranjem jednadžbe 82 dobije se izraz:

$$\mathbf{p}^T \dot{\mathbf{p}} = \dot{\mathbf{p}}^T \mathbf{p} = 0. \quad (112)$$

Slično jednadžbi 112, deriviranjem izraza 95 dobiju se izrazi 113 i 114.

$$\mathbf{E}\dot{\mathbf{p}} = -\dot{\mathbf{E}}\mathbf{p}. \quad (113)$$

$$\mathbf{G}\dot{\mathbf{p}} = -\dot{\mathbf{G}}\mathbf{p}. \quad (114)$$

Umnošci  $\dot{\mathbf{E}}\dot{\mathbf{p}}$  i  $\dot{\mathbf{G}}\dot{\mathbf{p}}$  jednaki su:

$$\dot{\mathbf{E}}\dot{\mathbf{p}} = \dot{\mathbf{G}}\dot{\mathbf{p}} = 0. \quad (115)$$

Može se pokazati da vrijedi:

$$\mathbf{E}\dot{\mathbf{G}}^T = \dot{\mathbf{E}}\mathbf{G}^T. \quad (116)$$

Raspisivanjem izraza  $\mathbf{E}\dot{\mathbf{G}}^T$  slijedi:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\dot{\mathbf{G}}^T &= \begin{bmatrix} -e_1 & e_0 & -e_3 & e_2 \\ -e_2 & e_3 & e_0 & -e_1 \\ -e_3 & -e_2 & e_1 & e_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\dot{e}_1 & -\dot{e}_2 & -\dot{e}_3 \\ \dot{e}_0 & -\dot{e}_3 & \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 & \dot{e}_0 & -\dot{e}_1 \\ -\dot{e}_2 & \dot{e}_1 & \dot{e}_0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} e_1\dot{e}_1 + e_0\dot{e}_0 - e_3\dot{e}_3 - e_2\dot{e}_2 & e_1\dot{e}_2 - e_0\dot{e}_3 - e_3\dot{e}_0 + e_2\dot{e}_1 & e_1\dot{e}_3 + e_0\dot{e}_2 + e_3\dot{e}_1 + e_2\dot{e}_0 \\ e_2\dot{e}_1 + e_3\dot{e}_0 + e_0\dot{e}_3 + e_1\dot{e}_2 & e_2\dot{e}_2 - e_3\dot{e}_3 + e_0\dot{e}_0 - e_1\dot{e}_1 & e_2\dot{e}_3 + e_3\dot{e}_2 - e_0\dot{e}_1 - e_1\dot{e}_0 \\ e_3\dot{e}_1 - e_2\dot{e}_0 + e_1\dot{e}_3 - e_0\dot{e}_2 & e_3\dot{e}_2 + e_2\dot{e}_3 + e_1\dot{e}_0 + e_0\dot{e}_1 & e_3\dot{e}_3 - e_2\dot{e}_2 - e_1\dot{e}_1 + e_0\dot{e}_0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (117)$$

Računanjem izraza  $\dot{\mathbf{E}}\mathbf{G}^T$  dobiva se:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{E}}\mathbf{G}^T &= \begin{bmatrix} -\dot{e}_1 & \dot{e}_0 & -\dot{e}_3 & \dot{e}_2 \\ -\dot{e}_2 & \dot{e}_3 & \dot{e}_0 & -\dot{e}_1 \\ -\dot{e}_3 & -\dot{e}_2 & \dot{e}_1 & \dot{e}_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -e_1 & -e_2 & -e_3 \\ e_0 & -e_3 & e_2 \\ e_3 & e_0 & -e_1 \\ -e_2 & e_1 & e_0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} e_1\dot{e}_1 + e_0\dot{e}_0 - e_3\dot{e}_3 - e_2\dot{e}_2 & \dot{e}_1e_2 - \dot{e}_0e_3 - e_0\dot{e}_3 + e_1\dot{e}_2 & \dot{e}_1e_3 + \dot{e}_0e_2 + \dot{e}_3e_1 + \dot{e}_2e_0 \\ e_1\dot{e}_2 + e_0\dot{e}_3 + e_3\dot{e}_0 + e_2\dot{e}_1 & e_2\dot{e}_2 - e_3\dot{e}_3 + e_0\dot{e}_0 - e_1\dot{e}_1 & \dot{e}_2e_3 + \dot{e}_3e_2 + e_1\dot{e}_0 - e_0\dot{e}_1 \\ e_1\dot{e}_3 - e_0\dot{e}_2 + \dot{e}_1e_3 - e_2\dot{e}_0 & e_2\dot{e}_3 + \dot{e}_2e_3 + e_0\dot{e}_1 + \dot{e}_0e_1 & e_3\dot{e}_3 - e_2\dot{e}_2 - e_1\dot{e}_1 + e_0\dot{e}_0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (118)$$

Usporedbom izraza 117 i 118 dokazana je jednadžba 116.

## 1.7 Jednadžba kinematičke rekonstrukcije

Ako se matrica transformacije iz lokalnog koordinatnog sustava u globalni označi s  $\mathbf{R}$  tada vrijedi:

$$\mathbf{v} = \mathbf{R}\mathbf{v}' \quad (119)$$

U jednadžbi 119,  $\mathbf{v}$  i  $\mathbf{v}'$  su globalne i lokalne komponente vektora  $\vec{v}$  koji je fiksiran u lokalnom koordinatnom sustavu  $\xi - \eta - \zeta$ . Ako vektorski umnožak vektora  $\vec{v}$  s proizvoljnim vektorom  $\vec{a}$  rezultira vektorom  $\vec{b}$ , onda se, u okviru globalnih i lokalnih komponenti, taj vektorski umnožak može izraziti kao:

$$\mathbf{b} = \tilde{\mathbf{v}}\mathbf{a} \quad (120)$$

i

$$\mathbf{b}' = \tilde{\mathbf{v}}'\mathbf{a}'. \quad (121)$$

Budući da vrijedi  $\mathbf{b} = \mathbf{R}\mathbf{b}'$  i  $\mathbf{a} = \mathbf{R}\mathbf{a}'$ , jednadžba 120 postaje:

$$\mathbf{R}\mathbf{b}' = \tilde{\mathbf{v}}\mathbf{R}\mathbf{a}'. \quad (122)$$

Ako se jednadžba 121 uvrsti u jednadžbu 122, uz napomenu da rezultat vrijedi za jednake vektore  $\mathbf{a}'$ , slijedi izraz:

$$\mathbf{R}\tilde{\mathbf{v}}'\mathbf{a}' = \tilde{\mathbf{v}}\mathbf{R}\mathbf{a}', \quad (123)$$

koji nakon množenja s lijeva s  $\mathbf{R}^T$  prelazi u izraz:

$$\tilde{\mathbf{v}}' = \mathbf{R}^T\tilde{\mathbf{v}}\mathbf{R}, \quad (124)$$

koji nakon dodatnih modifikacija prelazi u:

$$\tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{R}\tilde{\mathbf{v}}'\mathbf{R}^T \quad (125)$$

Pretpostavlja se da lokalni koordinatni sustav  $\xi$ - $\eta$ - $\zeta$  rotira u odnosu na globalni koordinatni sustav x-y-z, kutnom brzinom  $\vec{\omega}(t)$ . Komponente kutne brzine  $\vec{\omega}$  u globalnom koordinatnom sustavu x-y-z i lokalnom koordinatnom sustavu  $\xi$ - $\eta$ - $\zeta$  su  $\omega = [\omega_x \ \omega_y \ \omega_z]^T$  i  $\omega' = [\omega_\xi \ \omega_\eta \ \omega_\zeta]^T$ . Derivacija po vremenu jednadžbe 119 iznosi:

$$\dot{\mathbf{v}} = \dot{\mathbf{R}}\mathbf{v}' + \mathbf{R}\dot{\mathbf{v}}'. \quad (126)$$

Ako je vektor  $\vec{v}$  fiksiran u lokalnom koordinatnom sustavu (vezanim za tijelo)  $\xi$ - $\eta$ - $\zeta$ , onda je  $\dot{\mathbf{v}}' = \mathbf{0}$  iz čega slijedi:

$$\dot{\mathbf{v}} = \dot{\mathbf{R}}\mathbf{v}'. \quad (127)$$

Vektor  $\vec{v}$  može se prikazati preko kutne brzine  $\vec{\omega}$  kao  $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{v}$ , tj.:

$$\dot{\mathbf{v}} = \tilde{\omega}\mathbf{v}. \quad (128)$$

Korištenjem transformaciju iz 119, jednadžba 128 postaje:

$$\dot{\mathbf{v}} = \tilde{\omega}\mathbf{R}\mathbf{v}'. \quad (129)$$

Kombinacijom jednadžbi 127 i 129, dobije se identitet prikazan u 130, koji mora vrijediti za sve vektore  $\mathbf{v}'$ .

$$\dot{\mathbf{R}} = \tilde{\omega}\mathbf{R} \quad (130)$$

Uvrštavanjem izraza  $\tilde{\omega} = \mathbf{R}\tilde{\omega}'\mathbf{R}^T$ , dobivenog iz jednadžbe 124, u jednadžbu 130 daje izraz:

$$\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{R}\tilde{\omega}'. \quad (131)$$

Množenjem izraza 131 s lijeva s matricom  $\mathbf{R}^T$  dobiva se konačni izraz:

$$\tilde{\omega}' = \mathbf{R}^T \dot{\mathbf{R}} \quad (132)$$

koji predstavlja jednadžbu kinematičke rekonstrukcije ([7],[10]).

U nastavku će se prikazati metode integracije krutog tijela u prostoru, korištenjem Eulerovih parametara.



## 2 METODE INTEGRACIJE KRUTOG TIJELA U PROSTORU KORIŠTENJEM EULEROVIH PARAMETARA

Kako bi se izvele metode integracije na kvaternionima (Eulerovim parametrima), potrebno je izvesti ovisnost kutne brzine izražene u koordinatnom sustavu vezanom za tijelo o Eulerovim parametrima. Prvi korak je izvođenje izraza za derivaciju matrice rotacije, tj. deriviranje izraza 111.

### 2.1 Kutna brzina i derivacija kutne brzine izražene preko Eulerovih parametara

Derivacijom izraza 111 dobiva se:

$$\dot{\mathbf{R}} = \dot{\mathbf{E}}\mathbf{G}^T + \mathbf{E}\dot{\mathbf{G}}^T. \quad (133)$$

Izraz 116 može se iskoristiti za dokaz da derivacija po vremenu transformacijske matrice  $\mathbf{R} = \mathbf{E}\mathbf{G}^T$  iznosi:

$$\dot{\mathbf{R}} = 2\mathbf{E}\dot{\mathbf{G}}^T = 2\dot{\mathbf{E}}\mathbf{G}^T. \quad (134)$$

Koristeći izraze 111, 132 i 134, moguće je zapisati kutnu brzinu u lokalnom koordinatnom sustavu (vezanom za tijelo) na sljedeći način:

$$\tilde{\omega}' = \mathbf{R}^T\dot{\mathbf{R}} = 2(\mathbf{E}\mathbf{G}^T)^T\mathbf{E}\dot{\mathbf{G}}^T = 2\mathbf{G}\mathbf{E}^T\mathbf{E}\dot{\mathbf{G}}^T. \quad (135)$$

Radi preglednosti, ponovno se navodi jednačba 101:

$$\mathbf{E}^T\mathbf{E} = \mathbf{I}^{4 \times 4} - \mathbf{p}\mathbf{p}^T. \quad (136)$$

Ubacivanjem izraza 136 u jednačbu 135 dobiva se izraz:

$$\tilde{\omega}' = 2\mathbf{G}(\mathbf{I}^{4 \times 4} - \mathbf{p}\mathbf{p}^T)\dot{\mathbf{G}}^T = 2\mathbf{G}\dot{\mathbf{G}}^T - 2\mathbf{G}\mathbf{p}\mathbf{p}^T\dot{\mathbf{G}}^T. \quad (137)$$

Korištenjem izraza  $\mathbf{G}\mathbf{p} = \mathbf{0}$  (izraz 95), dobiva se konačni izraz:

$$\tilde{\omega}' = 2\mathbf{G}\dot{\mathbf{G}}^T. \quad (138)$$

Jednačba 138 predstavlja konačni izraz za kutnu brzinu u lokalnom koordinatnom sustavu. Prema [11], vrijedi jednakost:

$$\mathbf{G}\dot{\mathbf{G}}^T = \widetilde{(\mathbf{G}\dot{\mathbf{p}})}. \quad (139)$$

Primjenom jednadžbe 139, izraz 138 može se zapisati kao:

$$\begin{aligned}\tilde{\omega}' &= 2(\widetilde{\mathbf{G}\dot{\mathbf{p}}}), \\ \omega' &= 2\mathbf{G}\dot{\mathbf{p}}.\end{aligned}\tag{140}$$

Derivacijom izraza 140, dobiva se:

$$\dot{\omega}' = 2\dot{\mathbf{G}}\dot{\mathbf{p}} + 2\mathbf{G}\ddot{\mathbf{p}}.\tag{141}$$

Korištenjem izraza  $\dot{\mathbf{G}}\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{0}$ , koji je dan u 115, dobiva se konačni izraz za derivaciju kutne brzine u koordinatnom sustavu vezanom za tijelo ([11][6]):

$$\dot{\omega}' = 2\mathbf{G}\ddot{\mathbf{p}}.\tag{142}$$

## 2.2 Eulerova jednadžba

U nastavku će biti prikazane dvije standardne metode integracije (koje su opisane u [7] i [10]). Jednadžba koja služi kao polazište za integraciju naziva se Eulerova jednadžba i njezin izgled dan je u jednadžbi 143.

$$\mathbf{I}'\dot{\omega}' + \tilde{\omega}'\mathbf{I}'\omega' = \mathbf{t}'\tag{143}$$

Eulerova jednadžba se, prema [12], može prikazati kao:

$$\dot{\mathbf{h}} = \mathbf{t}.\tag{144}$$

U jednadžbi 144,  $\mathbf{h}$  predstavlja vektor ukupnog kinetičkog momenta, dok je  $\mathbf{t}$  vektor vanjskih momenata koji djeluju na tijelo.

Kinetički moment, može se zapisati kao (prema [12]):

$$\mathbf{h} = \mathbf{I}\omega.\tag{145}$$

U jednadžbi 145,  $\mathbf{I}$  je tenzor inercije krutog tijela. Uvrštavanjem izraza 145 u 144, dobiva se izraz:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{I}\omega) = \mathbf{t}.\tag{146}$$

Budući da je tenzor inercije krutog tijela konstantan u koordinatnom sustavu vezanom za tijelo, najčešće se Eulerova jednadžba prikazuje u lokalnom koordinatnom sustavu:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{R}\mathbf{I}'\omega') = \mathbf{R}\mathbf{t}'.\tag{147}$$

Derivacijom jednadžbe 147, dobiva se izraz:

$$\dot{\mathbf{R}}\mathbf{I}'\omega' + \mathbf{R}\mathbf{I}'\dot{\omega}' = \mathbf{R}\mathbf{t}.\tag{148}$$

Množenjem izraza 148, s matricom  $\mathbf{R}^T$  s lijeve strane slijedi:

$$\mathbf{R}^T \mathbf{R} \dot{\boldsymbol{\omega}}' + \mathbf{R}^T \dot{\mathbf{R}} \boldsymbol{\omega}' = \mathbf{R}^T \mathbf{R} \mathbf{t}'. \quad (149)$$

Upotrebom svojstva ortogonalnosti matrice  $\mathbf{R}$ , dobiva se konačni izraz, prikazan u jednadžbi 143 ([6]).

### 2.3 Formulacija I

Prva formulacija rotacijske dinamike, koja uključuje algoritam standardne integracije na kvaternionima opisana je u [7]([10]). Dinamičke jednadžbe prebacuju se u kvaternione, te se integriraju korištenjem uobičajenih integracijskih metoda. Uvrštavanjem izraza 138, 140 i 142 u izraz 143, dobivaju se sljedeće jednadžbe:

$$\begin{aligned} \mathbf{I}' \mathbf{2G} \ddot{\mathbf{p}} + 2\mathbf{G} \dot{\mathbf{G}}^T \mathbf{I}' \mathbf{2G} \dot{\mathbf{p}} &= \mathbf{t}' \\ 2\mathbf{I}' \mathbf{G} \ddot{\mathbf{p}} + 4\mathbf{G} \dot{\mathbf{G}}^T \mathbf{I}' \mathbf{G} \dot{\mathbf{p}} &= \mathbf{t}'. \end{aligned} \quad (150)$$

Budući da Eulerovi parametri nisu neovisni, tj. moraju zadovoljiti uvjet jedinične norme, potrebno je uz jednadžbe navedene u izrazu 150, zadovoljiti i jediničnu normu Eulerovih parametara. Jedinična norma Eulerovih parametara, navedena u jednadžbi 82, ponovno će se prikazati radi preglednosti:

$$\mathbf{p}^T \mathbf{p} = 1. \quad (151)$$

Kako bi se jednadžbe mogle matrično zapisati, potrebno je jednadžbu 151, dovesti na razinu akceleracije, tj. derivirati je dva puta. Prva derivacija izraza 151 iznosi:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{p}}^T \mathbf{p} + \mathbf{p}^T \dot{\mathbf{p}} &= 0 \\ \dot{\mathbf{p}}^T \mathbf{p} = \mathbf{p}^T \dot{\mathbf{p}} &= 0. \end{aligned} \quad (152)$$

Druga derivacija izraza 151 iznosi:

$$\mathbf{p}^T \ddot{\mathbf{p}} + \dot{\mathbf{p}}^T \dot{\mathbf{p}} = 0. \quad (153)$$

Jednadžbe 150 i 153 čine sustav jednadžbi, koji se može matrično prikazati kao:

$$\begin{bmatrix} 2\mathbf{I}' \mathbf{G} \\ \mathbf{p}^T \end{bmatrix} \ddot{\mathbf{p}} + \begin{bmatrix} 4\mathbf{G} \dot{\mathbf{G}}^T \mathbf{I}' \mathbf{G} \\ \dot{\mathbf{p}}^T \end{bmatrix} \dot{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} \mathbf{t}' \\ 0 \end{bmatrix} \quad (154)$$

Ograničenje kvaterniona je u jednadžbi 154 zadano na razini ubrzanja, stoga je potrebno u svakom koraku dodatno stabilizirati kvaternione i njihove derivacije, tj.

moraju zadovoljavati jednadžbe 151 i 152. Stabilizacija izraza 151, osigurava se pomoću jednadžbe:

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{P}_1}{\sqrt{\mathbf{P}_1^T \mathbf{P}_1}}. \quad (155)$$

Izraz 155 pokazuje da se stabilizacija postiže dijeljenjem dobivenog kvaterniona s vlastitom normom.

Prema [7], optimalna stabilizacija izraza 152 provodi se preko izraza:

$$\dot{\mathbf{p}} = \dot{\mathbf{p}}_1 - \dot{\mathbf{p}}_1^T \mathbf{p} \mathbf{p}. \quad (156)$$

Korištenjem Runge-Kutta metode četvrtog reda, slijedi algoritam numeričke integracije za formulaciju I:

$$\begin{aligned} & \mathbf{p}_0, \dot{\mathbf{p}}_0, \Delta t \\ & k_1 = \Delta t \cdot \dot{\mathbf{p}}_0 \\ & K_1 = \Delta t \cdot f(\mathbf{p}_0, \dot{\mathbf{p}}_0) \\ & k_2 = \Delta t \cdot \left( \dot{\mathbf{p}}_0 + \frac{1}{2} K_1 \right) \\ & K_2 = \Delta t \cdot f\left(\mathbf{p}_0 + \frac{1}{2} k_1, \dot{\mathbf{p}}_0 + \frac{1}{2} K_1\right) \\ & k_3 = \Delta t \cdot \left( \dot{\mathbf{p}}_0 + \frac{1}{2} K_2 \right) \\ & K_3 = \Delta t \cdot f\left(\mathbf{p}_0 + \frac{1}{2} k_2, \dot{\mathbf{p}}_0 + \frac{1}{2} K_2\right) \\ & k_4 = \Delta t \cdot (\dot{\mathbf{p}}_0 + K_3) \\ & K_4 = \Delta t \cdot f(\mathbf{p}_0 + k_3, \dot{\mathbf{p}}_0 + K_3) \\ & \mathbf{p}_{1out} = \mathbf{p}_0 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ & \mathbf{p}_{out} = \frac{\mathbf{P}_{1out}}{\sqrt{\mathbf{P}_{1out}^T \mathbf{P}_{1out}}} \\ & \dot{\mathbf{p}}_{1out} = \dot{\mathbf{p}}_0 + \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \\ & \dot{\mathbf{p}}_{out} = \dot{\mathbf{p}}_{1out} - \dot{\mathbf{p}}_{1out} \mathbf{p}_{out} \mathbf{p}_{out} \end{aligned} \quad (157)$$

U algoritmu 157,  $f(\mathbf{p}, \dot{\mathbf{p}})$ , predstavlja izračunavanje druge derivacije kvaterniona  $\ddot{\mathbf{p}}$  iz jednadžbe 151 ([6]).

## 2.4 Formulacija II

Prema [7] i [10], rotacijske jednadžbe gibanja definirane su preko kutne brzine  $\omega$  u obliku Eulerovih jednadžbi. Ovdje će se ponovno navesti spomenuta jednadžba radi preglednosti:

$$\mathbf{I}'\dot{\omega}' + \tilde{\omega}'\mathbf{I}'\omega' = \mathbf{t}'. \quad (158)$$

Množenjem izraza 140 s lijeva matricom  $\mathbf{G}^T$  dobiva se:

$$\mathbf{G}^T\omega' = 2\mathbf{G}^T\mathbf{G}\dot{\mathbf{p}} \quad (159)$$

Umnožak matrica  $\mathbf{G}^T\mathbf{G}$  izveden je ranije u jednadžbi 101 i glasi:

$$\mathbf{G}^T\mathbf{G} = \mathbf{I}^{4 \times 4} - \mathbf{p}\mathbf{p}^T. \quad (160)$$

Uvrštavanjem izraza 160 u 159 dobiva se:

$$\mathbf{G}^T\omega' = 2(\mathbf{I}^{4 \times 4} - \mathbf{p}\mathbf{p}^T)\dot{\mathbf{p}} = 2\dot{\mathbf{p}} - \mathbf{p}\mathbf{p}^T\dot{\mathbf{p}}. \quad (161)$$

Izraz 152 pokazuje da su kvaternion i njegova derivacija ortogonalni. To nam omogućuje izračun derivacije kvaterniona iz kutne brzine:

$$\dot{\mathbf{p}} = \frac{1}{2}\mathbf{G}^T\omega' \quad (162)$$

Budući da je za dobivanje izraza 162, korišten izraz 152, nije potrebna dodatna stabilizacijska jednadžba. No, potrebno je zadovoljiti stabilizacijsku jednadžbu 151, koja predstavlja jediničnu normu kvaterniona, te ju je potrebno zadovoljiti u svakom koraku. Iz svega navedenog slijedi algoritam numeričke integracije za formulaciju II 163.

U algoritmu 163,  $f(\mathbf{p}, \omega')$  predstavlja izračunavanje derivacije kutne brzine  $\dot{\omega}'$  iz dinamičke jednadžbe 143 [6]. U nastavku je prikazana nova metoda integracije, u kojoj je jedinična norma kvaterniona (Eulerovih parametara) implicitno zadovoljena samom strukturom integratora [10].

$$\begin{aligned}
& \mathbf{p}_0, \omega'_0, \Delta t \\
k_1 &= \frac{1}{2} \Delta t \cdot G(\mathbf{p}_0) \cdot \omega'_0 \\
K_1 &= \Delta t \cdot f(\mathbf{p}_0, \omega'_0) \\
k_2 &= \frac{1}{2} \Delta t \cdot G(\mathbf{p}_0 + \frac{1}{2} k_1) \cdot (\omega'_0 + \frac{1}{2} K_1) \\
K_2 &= \Delta t \cdot f(\mathbf{p}_0 + \frac{1}{2} k_1, \omega'_0 + \frac{1}{2} K_1) \\
k_3 &= \frac{1}{2} \Delta t \cdot G(\mathbf{p}_0 + \frac{1}{2} k_2) \cdot (\omega'_0 + \frac{1}{2} K_2) \\
K_3 &= \Delta t \cdot f(\mathbf{p}_0 + \frac{1}{2} k_2, \omega'_0 + \frac{1}{2} K_2) \\
k_4 &= \frac{1}{2} \Delta t \cdot G(\mathbf{p}_0 + k_3) \cdot (\omega'_0 + K_3) \\
K_4 &= \Delta t \cdot f(\mathbf{p}_0 + k_3, \omega'_0 + K_3) \\
\mathbf{p}_{1out} &= \mathbf{p}_0 + \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\
\mathbf{p}_{out} &= \frac{\mathbf{p}_{1out}}{\sqrt{\mathbf{p}_{1out}^T \mathbf{p}_{1out}}} \\
\omega_{1out} &= \omega_{1,0} + \frac{1}{6} (K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4).
\end{aligned} \tag{163}$$

## 2.5 Nova metoda integracije

Prema [10], za razliku od klasičnog integratora, koji je radio izravno sa kvaternionima i njihovim derivacijama (163), kod novorazvijenog geometrijskog integratora koristi se inkrementalni vektor  $\mathbf{u}$  i njegova derivacija. U oba slučaja koristi se ODE integrator (npr. Runge-Kutta 2. ili 4. reda, ovisno o zahtijevanoj točnosti). Dok kod klasičnog integratora, kao rezultat dobijemo kvaternion  $\mathbf{p}$ , koji je potrebno stabilizirati, kod nove geometrijske metode dobije se  $\mathbf{u}$  kao rezultat integracije, koji se preko eksponencijalne mape prebacuje u jedinični kvaternion, pritom zaobilazeći potrebu za stabilizacijskom jednadžbom kvaterniona.

Problem diferencijalno-algebarskih jednadžbi može se zaobići prebacivanjem procesa ažuriranja integracije s te konfiguracijske mnogostrukosti (tj. sa samih kvaterniona) na lokalnu tangencijalnu razinu inkrementalnih rotacija. To je moguće zbog izomorfности Lieve algebre  $SO(3)$  rotacijske grupe i grupe jediničnih kvaterniona  $Sp(1)$ .  $Sp(1)$  je grupa kvaterniona s normom iznosa 1 (jediničnih kvaterniona), ekvivalentna je  $SU(2)$  grupi i topološki 3-sfera.

Navedeni postupak je moguć jer rotacija  $SO(3)$ , koja je zapravo stvarna rotacija, ima Lievu algebru  $so(3)$ . Definicija  $SO(3)$  grupe prikazana je jednadžbom (164),

dok je definicija grupe  $so(3)$  prikazana jednadžbom (165).

$$SO(3) = \{\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{3 \times 3} | \mathbf{R}\mathbf{R}^T = I, \det \mathbf{R} = +1\} \quad (164)$$

$$so(n) = \{\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{n \times n} | \mathbf{S}^T = -\mathbf{S}\} \quad (165)$$

Korak integracije provodi se na Lievoj algebri  $so(3)$  i prikazan je jednadžbama (166) i (167).

$$\dot{\tilde{\mathbf{u}}}_n = \text{dexp}_{-\tilde{\mathbf{u}}_n}^{-1}(\tilde{\omega}(\mathbf{R}(t))), \quad \tilde{\mathbf{u}}_0 = 0 \quad (166)$$

$$\text{dexp}_{-\tilde{\mathbf{u}}}^{-1}(\omega) = \left( I + \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{u}} - \frac{\|\mathbf{u}\| \cot\left(\frac{\|\mathbf{u}\|}{2}\right) - 2}{2\|\mathbf{u}\|^2} \tilde{\mathbf{u}}^2 \right) \omega \quad (167)$$

Prema [10] jedinični kvaternioni, koji pripadaju grupi  $\mathbb{S}^3$ , također pripadaju i simplektičkoj grupi  $Sp(1)$ , čija Lieva algebra je  $sp(1)$  i te dvije grupe su izomorfne. Grupa jediničnih kvaterniona prikazana je jednadžbom (168).

$$\mathbb{S}^3 = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^4 | \|\mathbf{p}\| = 1\} \quad (168)$$

Izomorfnost grupa znači da između dviju grupa postoji mapiranje 1 na 1. Može se reći da njihova izomorfnost praktički znači da su navedene dvije grupe "ista" grupa. Lieva algebra  $sp(1)$  predstavlja derivacije kvaterniona  $\dot{\mathbf{p}}$  (brzine), koje možemo shvatiti kao vektorski prostor koso-simplektičkih kvaterniona, čija se grupa može prikazati prema jednadžbi (169) kao:

$$sp(1) = \{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^4 | \mathbf{w} + \mathbf{w}^* = (0, \mathbf{0})\}, \quad (169)$$

gdje su  $sp(n)$  kvadratne matrice kvaterniona  $\mathbf{p}$ , koje zadovoljavaju  $\mathbf{p} = -\mathbf{p}^*$ , s komutatorom kao Lie nosačem. Lieva algebra  $sp(1)$  predstavlja skup čistih kvaterniona koji je izomorfan  $\mathbb{R}^3$  i radi toga se element  $\mathbf{w} \in sp(1)$  može pridružiti vektoru  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ . Ako je  $\mathbf{w} \in sp(1)$ , a  $\mathbf{u}$  je element od  $so(3)$ , funkcija koja preslikava sa  $sp(1)$  na  $so(3)$ , može se zapisati kao  $\mathbf{w} = (0, \frac{1}{2}\mathbf{u})$ . Navedenu funkciju iskoristimo i ubacimo u integrator koji vrijedi za  $so(3)$  grupu.

Prema [10], integrator se temelji na numeričkoj integraciji kinematičkih jednadžbi u odnosu na trenutni vektor rotacije, koje tvore sustav običnih diferencijalnih jednadžbi na Lievoj algebri  $so(3)$ , rotacijske grupe  $SO(3)$ . Spomenuti vektor rotacije definira inkrementalnu rotaciju (a s time i pridruženi inkrementalni jedinični kvaternion), a ažuriranje rotacije je određeno eksponencijalnim mapiranjem na grupu kvaterniona. Budući da se kinematičke obične diferencijalne jednadžbe na  $so(3)$  mogu

riješiti koristeći bilo koji standardni postupak integracije običnih diferencijalnih jednadžbi, predložena metoda daje ne redundantni algoritam integracije za rotacijsku kinematiku koristeći jedinične kvaternione, pritom izbjegavajući integraciju diferencijalno algebarskih jednadžbi. Diferencijalno algebarske jednadžbe izbjegnute su jer je uvjet jedinične duljine kvaterniona zadovoljen samom strukturom integratora, te ju nije potrebno uvoditi kao dodatnu algebarsku jednadžbu.

Iako se radi direktno s četiri ovisne komponente kvaterniona, sama integracijska metoda bazira se na numeričkom rješavanju sustava od tri obične diferencijalne jednadžbe. Stoga, integracija djeluje u trodimenzionalnom vektorskom prostoru lokalnih rotacijskih parametara.

U predloženom algoritmu, ažuriranje rotacije unutar  $n$ -tog koraka integracije, temeljena je na eksponencijalnoj mapi kvaterniona, koja je prikazana jednadžbom (170).

$$\exp_{S^3}(W) = \cos\left(\left\|\frac{1}{2}\mathbf{u}\right\|\right)(1, \mathbf{0}) + \frac{\sin\left(\left\|\frac{1}{2}\mathbf{u}\right\|\right)}{\|\mathbf{u}\|}(0, \mathbf{u}) \quad (170)$$

gdje je  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$  inkrementalni vektor rotacije koji ažurira rotaciju od  $p_n$  do  $p_{n+1}$ .

Ažuriranje koraka prikazano je u jednadžbi (171).

$$p_{n+1} = p_n \circ \exp_{S^3}\left(0, \frac{1}{2}\mathbf{u}_n\right) \quad (171)$$

Upotreba kvaterniona vodi do računalno efikasnijeg oblika kinematičkih diferencijalnih jednadžbi (diferencijalnih jednadžbi koje povezuju kutnu brzinu i derivacije rotacijskih parametara), gdje su navedene jednadžbe linearne.

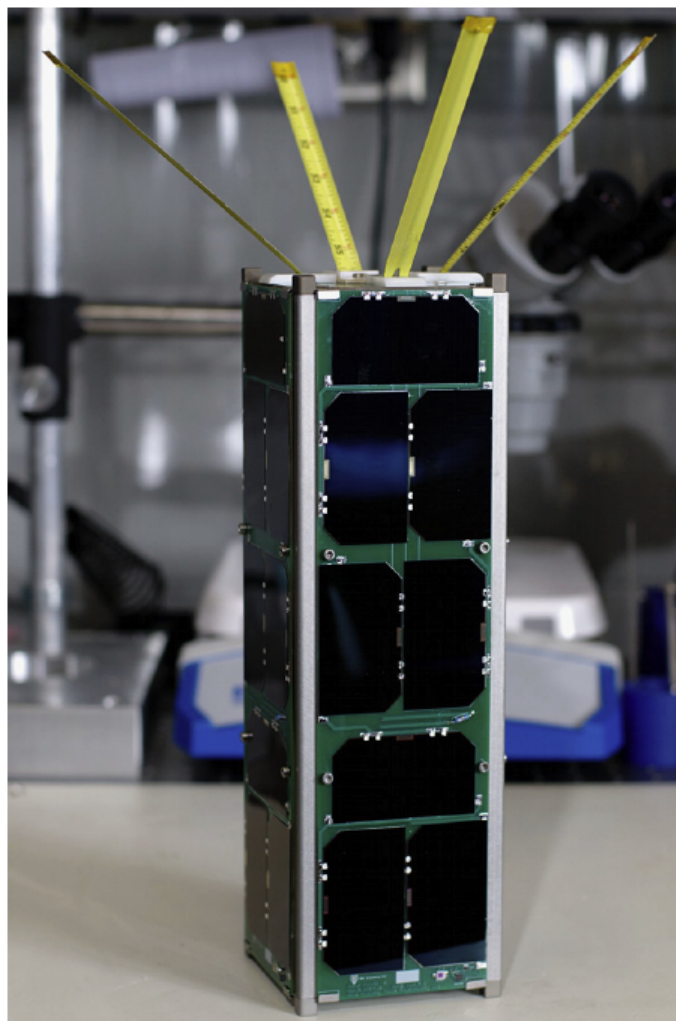
Geometrijski razlog zašto se pomoću kvaterniona može provesti parametrizacija bez singulariteta je zato što grupa od kvaterniona (a s time i grupa  $SU(2)$ ), oblikuje dvostruko prekrivanje  $SO(3)$ . To znači da uvijek postoje dva elementa u grupi kvaterniona koji predstavljaju jedan element u  $SO(3)$  grupi. To nam upućuje na to da dva kvaterniona  $p = (e_0, \mathbf{e})$  i  $-p = (-e_0, -\mathbf{e})$  opisuju istu rotaciju. U izrazu 172 prikazan je algoritam novorazvijene metode integracije.



$$\begin{aligned}
& \mathbf{p}_0, \omega'_0, \Delta t \\
& k_1 = \Delta t \cdot \text{dexp}(\mathbf{0}, \omega'_0) \\
& K_1 = \Delta t \cdot f(\mathbf{p}_0, \omega'_0) \\
& k_2 = \Delta t \cdot \text{dexp}\left(\frac{1}{2}k_1, \omega'_0 + \frac{1}{2}K_1\right) \\
& K_2 = \Delta t \cdot f\left(\mathbf{p}_0 \circ \text{exp}_{S^3}\left(\frac{1}{2}k_1\right), \omega'_0 + \frac{1}{2}K_1\right) \\
& k_3 = \Delta t \cdot \text{dexp}\left(\frac{1}{2}k_1, \omega'_0 + \frac{1}{2}K_2\right) \\
& K_3 = \Delta t \cdot f\left(\mathbf{p}_0 \circ \text{exp}_{S^3}\left(\frac{1}{2}k_2\right), \omega'_0 + \frac{1}{2}K_2\right) \\
& k_4 = \Delta t \cdot \text{dexp}(k_3, \omega'_0 + K_3) \\
& K_4 = \Delta t \cdot f(\mathbf{p}_0 \circ \text{exp}_{S^3}(k_3), \omega'_0 + K_3) \\
& \mathbf{p}_{out} = \mathbf{p}_0 \circ \text{exp}_{S^3}\left(\frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)\right) \\
& \omega'_{out} = \omega'_0 + \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)
\end{aligned} \tag{172}$$

### 3 NUMERIČKI EKSPERIMENT

Kinematička rekonstrukcija provedena je korištenjem podataka mjerenih na realnom satelitu RAX-1 ([13]), koji je prikazan na slici 5.

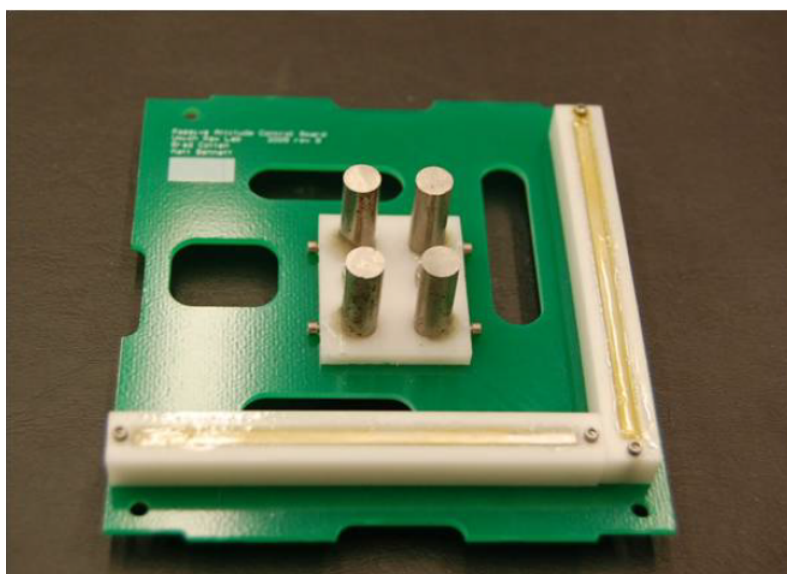


Slika 5: Nanosatelit RAX-1 3U, Sveučilište u Michiganu [14]

Prema [13], RAX-1 razvijen je na Sveučilištu u Michiganu i pripada skupini nanosatelita. Nanosateliti su potkategorija malih satelita, čiji prefiks 'nano' označava satelite (eng. wet launch) mase u rasponu 1 do 10 kg. Popularizacija nanosatelita povećala se nakon što je razvijen "CubeSat" kasnih 1990-ih, a razvilo ga je Sveučilište u Stanfordu i Kalifornijsko Državno Politehničko Sveučilište. Prema standardima CubeSata, 1U CubeSat veličine je  $0.1\text{ m} \times 0.1\text{ m} \times 0.1\text{ m}$  i ima masu ograničenu na 1.33kg. 3U CubeSat veličine je  $0.3\text{ m} \times 0.1\text{ m} \times 0.1\text{ m}$  i mase ograničene na 4

kg. RAX-1 pripada skupini 3U CubeSat-a. Sa solarnim pločama pričvršćenim na tijelo satelita, 3U CubeSat ima prosječnu snagu od 7W, koja mu je dostupna dok se nalazi u orbiti. Glavno ograničenje nanosatelita je nemogućnost visokopreciznog određivanja orijentacije, budući da zbog malih budžeta za masu, obujam i snagu nisu dostupni senzori velike preciznosti. Stoga se kod nanosatelita često koristi pasivni magnetski stabilizacijski sustav za orijentaciju jer ne zahtijeva dodatnu snagu i vrlo je male mase i volumena.

Pasivni magnetski stabilizacijski sustav za orijentaciju sastoji se od permanentnih magneta, koji omogućuju poravnanje sa Zemljinim magnetskim poljem i magnetski permeabilnog materijala koji omogućava prigušenje prekomjernih rotacijskih gibanja nakon odvajanja sa sredstva za lansiranje. Model dinamike orijentacije velike točnosti za pasivno magnetski stabiliziranu letjelicu, zahtijeva precizan model momenata koji nastaju zbog međudjelovanja navedenih magnetskih komponenti sa Zemljinim magnetskim poljem. Na slici 6 prikazane su komponente za magnetski pasivnu stabilizaciju nanosatelita RAX-1. Permanentni dipoli, poravnati u smjeru z-osi i izrađeni od materijala AlNiCo, su četiri vertikalna cilindra postavljena na sredinu ploče. Permeabilni štapovi izrađeni od materijala HyMu80, postavljeni u smjeru x i y-osi, postavljeni su u plastična kućišta na desnoj i donjoj strani ploče (gledajući sliku 6).



Slika 6: Komponente za pasivnu magnetsku stabilizaciju nanosatelita RAX-1 [13]

### 3.1 Dinamika orijentacije satelita

Prema [13], dinamika orijentacije krutog tijela dobro se opisuje pomoću Eulerove jednadžbe, koja je u ovom radu navedena u izrazu 158 u sljedećem obliku:

$$\mathbf{I}'\dot{\omega}' + \tilde{\omega}' \times \mathbf{I}'\omega' = \mathbf{t}'. \quad (173)$$

U jednadžbi 173,  $\mathbf{I}'$  predstavlja inerciju tijela,  $\omega'$  kutnu brzinu tijela i  $\mathbf{t}'$  momente koji djeluju na tijelo, s tim da su sve veličine definirane u koordinatnom sustavu vezanom za tijelo.

U slučaju pasivne magnetske stabilizacije satelita, dominantni momenti javljaju se radi međudjelovanja magnetskih komponenata letjelice sa Zemljinim magnetskim poljem. Spomenute komponente sastoje se od permanentnih dipola, koji omogućuju poravnanje sa Zemljinim magnetskim poljem, i permeabilnog materijala koji omogućuje prigušenje prekomjernog rotacijskog gibanja, nakon odvajanja sa sredstva za lansiranje.

Ponašanje magnetski permeabilnog materijala, tijekom perioda prigušenja rotacijskog gibanja, je vrlo kompleksno i kaotično, i modelira se pomoću nelinearnih vremenski-ovisnih diferencijalnih jednadžbi. Tijekom prvih petnaest dana nakon odvajanja od sredstva za lansiranje, štapovi izrađeni od permeabilnog materijala omogućuju prigušenje i smanjenje kutnih brzina (u ovom slučaju x i y-komponente kutne brzine). Oko petnaestog dana nakon odvajanja, permeabilni štapovi prestaju sa značajnim prigušivanjem i nanosatelit ulazi u fazu stacionarnog stanja. Prestanak prigušenja nastaje kada permeabilni materijal ima više potencijala za prigušivanje energije nego što satelit ima rotacijske kinetičke energije. Nakon prestanka prigušenja, magnetski permeabilni materijal i dalje doprinosi dinamici orijentacije kao remanentni dipol, bez obzira na to što sami materijal više ne predstavlja značajan izvor prigušenja. Precizni dinamički model nanosatelita, potreban da se odredi njegova orijentacija, posve obuhvaća ovo složeno ponašanje.

Nažalost, efektivne značajke magnetskih komponenti koje su postavljene na nanosatelitu, ne mogu se jednostavno odrediti prije lansiranja. Na efektivne značajke magnetski permeabilnog štapa uvelike utječe omjer duljine i promjera i postupak zagrijavanja, s mjerenim vrijednostima koje se u slučaju stvarnih uzoraka značajno razlikuju od vrijednosti značajki navedenih u katalogu materijala. Izvan laboratorijskih uvjeta, dokazano je da se kod nanosatelita, koji koriste sustave za pasivnu magnetsku stabilizaciju, pretpostavljeni model dinamike orijentacije razlikuje od stvarnog.

### 3.2 Početni uvjeti i pretpostavke korištene kod numeričke integracije

U ovom radu, preuzet će se početni uvjeti i podaci iz [13], kako bi se algoritmi numeričke integracije usporedili na primjeru koji sadrži stvarne, izmjerene podatke. Za razliku od jednadžbe momenata, koja je u [13] proširena zbog utjecaja permeabilnih štapova u x i y-smjeru, ovdje će se pretpostaviti da je prošla faza prekomjernih rotacijskih gibanja, te da se satelit pomoću magnetskih dipola, postavljenih u smjeru z-osi, poravnao sa Zemljinim magnetskim poljem, te da su utjecaji permeabilnih štapova zanemarivi. Navedeno zanemarenje nije nelogično, budući da se sva znanstvena mjerenja i istraživanja provode upravo u opisanoj fazi. Time jednadžba momenata postaje ([14]):

$$\mathbf{t}' = \mu_0(\mathbf{M}_p \times \mathbf{H}), \quad (174)$$

gdje je  $\mu_0$  magnetska permeabilnost vakuuma i iznosi  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{Hm}^{-1}$ ,  $\mathbf{t}'$  je vektor momenata,  $\mathbf{M}_p$  je jakost magnetskog dipola u magnetskom polju  $\mathbf{H}$ , a  $\mathbf{H}$  je jakost magnetskog polja. U obzir su uzeti samo momenti koji nastaju djelovanjem magnetskih dipola sa Zemljinim magnetskim poljem, jer su ostali (tzv. parazitski) utjecaji na satelit, nekoliko redova veličina manji od utjecaja magnetskog dipola, što je prikazano u tablici 1. Jakost magnetskog dipola dobivena je mjerenjem na

Tablica 1: Tipični momenti koji djeluju na nanosatelit u niskoj Zemljinoj orbiti (eng. LEO: Low Earth Orbit) [14]

Izvor momenta	Nominalna vrijednost (Nm)
Magnetski dipol	$5 \times 10^{-5}$
Gravitacijski gradijent	$3 \times 10^{-8}$
Tlak solarne radijacije	$2 \times 10^{-8}$
Aerodinamički tlak	$2 \times 10^{-9}$

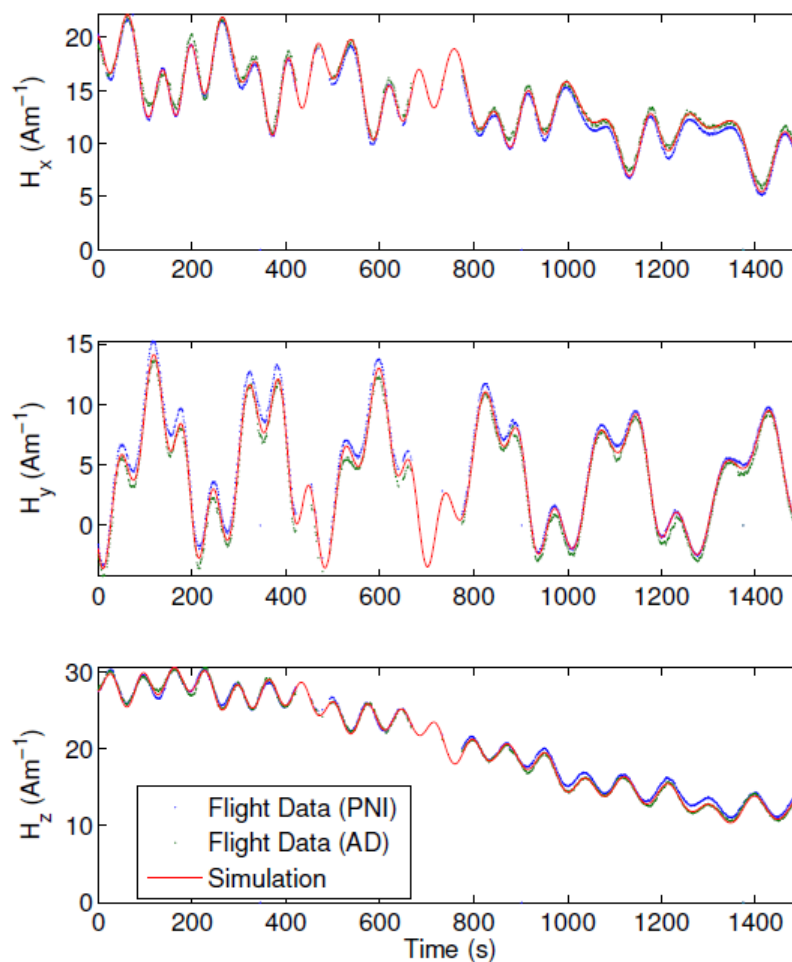
satelitu, kada je satelit u stacionarnom stanju (poravnat sa Zemljinim magnetskim poljem). Podaci dobiveni mjerenjem jakosti magnetskog dipola iznose:

$$\mathbf{M}_p = \begin{bmatrix} 0.14 \\ 0.02 \\ 1.09 \end{bmatrix} \text{Am}^2 \quad (175)$$

Matrica inercije  $\mathbf{I}'$ , potrebna za integraciju Eulerove jednadžbe (izraz 173), dobivena je iz CAD modela nanosatelita RAX-1 (preuzeta iz [14]) i iznosi:

$$\mathbf{I}' = \begin{bmatrix} 0.018 & 0 & 0 \\ 0 & 0.018 & 0 \\ 0 & 0 & 0.006 \end{bmatrix} \text{ kgm}^2. \quad (176)$$

Kako bi se definirali podaci korišteni prilikom numeričke integracije Eulerove jednadžbe, potrebno je definirati jakost magnetskog polja, koja djeluje na nanosatelit. U tu svrhu, skenirani su dijagrami, koji su dobiveni mjerenjem pomoću magnetometra na realnom RAX-1 nanosatelitu (preuzeti iz [13]). Originalni dijagrami dani su na slici 7. Dijagrami su skenirani pomoću funkcije definirane u programskom paketu



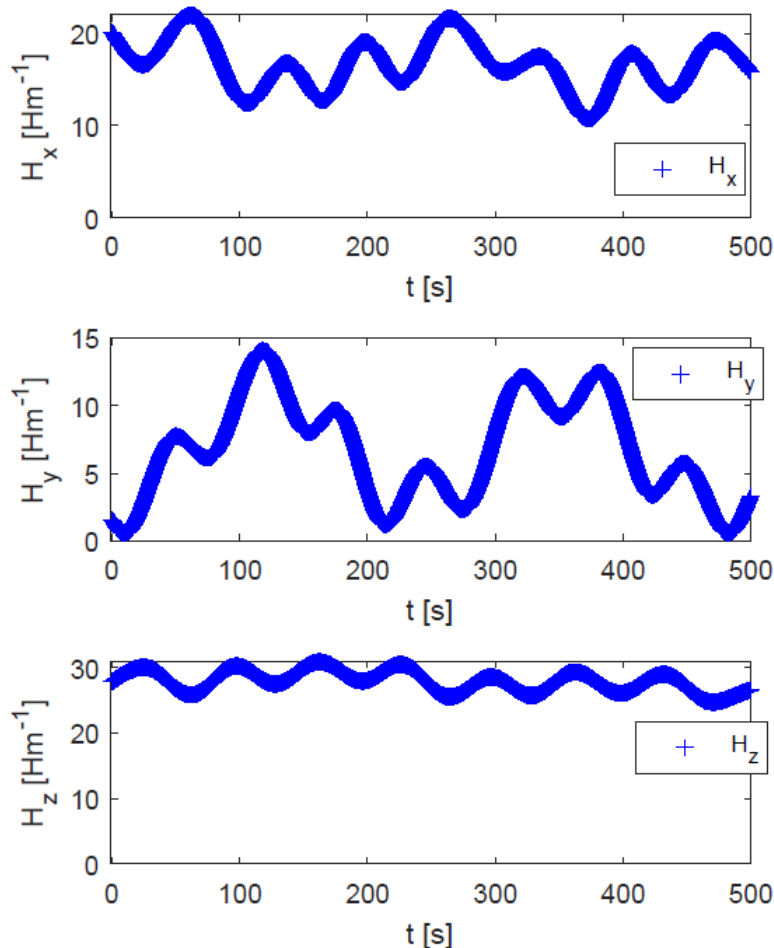
Slika 7: Dijagrami izmjerenih komponenta jakosti magnetskog polja, RAX-1 nanosatelit [13]

MATLAB. Skeniranje je provedeno tako da se učita željeni dijagram, definiraju se

domene na apscisi i ordinati, te se definira broj točaka pomoću kojih se dijagram želi diskretizirati. Zatim je potrebno definirati ishodište učitano dijagrama, te njegovu maksimalnu vrijednost na apscisi i ordinati. Na kraju se odabirom definiranog broja točaka diskretizira dijagram, te se točke povežu linearno. Navedena linearna interpolacija daje dijagrame koji dovoljno točno opisuju originalne dijagrame.

Dijagrami su skenirani za domenu koja je manja od originalne (od 0-500 sekundi umjesto 0-1480 sekundi), kako bi se smanjila mogućnost numeričkih grešaka, te skratilo vrijeme numeričke integracije (time se kasnije omogućuje uzimanje manjih vremenskih koraka prilikom same integracije). Ovisno o uzetom koraku integracije, iz skeniranih dijagrama vadi se dovoljan broj točaka, kako bi se dobila vrijednost jakosti magnetskog polja za svaki korak.

Dijagrami, dobiveni skeniranjem originalnih dijagrama, prikazani su na slici 8.

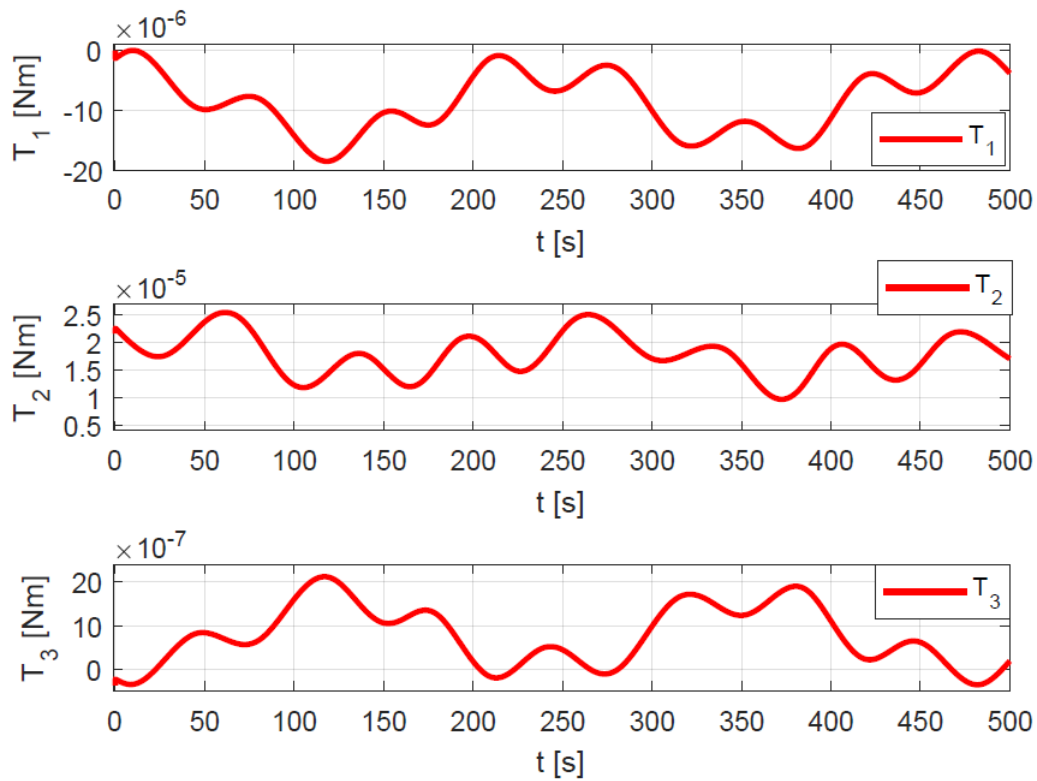


Slika 8: Skenirani dijagrami jakosti magnetskog polja

Nakon dobivanja dijagrama jakosti magnetskog polja, iz njih se vade podaci za izračunavanje momenta, prema jednadžbi 174. Iz izračunatih momenata, moguće je iscrtati dijagrame momenata po komponentama, u odnosu na svaku os lokalnog koordinatnog sustava. Iscrtani dijagrami momenata prikazani su na slici 9. Kao početni uvjeti za momente korišteni su sljedeći podaci (preuzeti iz [13]):

$$\mathbf{t}' = \begin{bmatrix} -0.0012 \\ 0.2166 \\ -0.0038 \end{bmatrix} \times 10^{-4} Nm. \quad (177)$$

Na slici 9 vidljivo je da su momenti koji djeluju na nanosatelit relativno malog iz-



Slika 9: Dijagrami momenata

nosa. To je u skladu s očekivanjima, budući da momenti nastaju međudjelovanjem magnetskih dipola sa Zemljinim magnetskim poljem, bez dodatnih aktivnih komponenti, koje bi uzrokovale momente većih magnituda.

Nakon provedene numeričke integracije, dobiveni su dijagrami kvaterniona (10) i



kutnih brzina (11). Kao početni uvjeti za dijagram kvaterniona uzeti su:

$$p = \begin{bmatrix} -0.4583 \\ -0.6558 \\ 0.5997 \\ 0.0182 \end{bmatrix}. \quad (178)$$

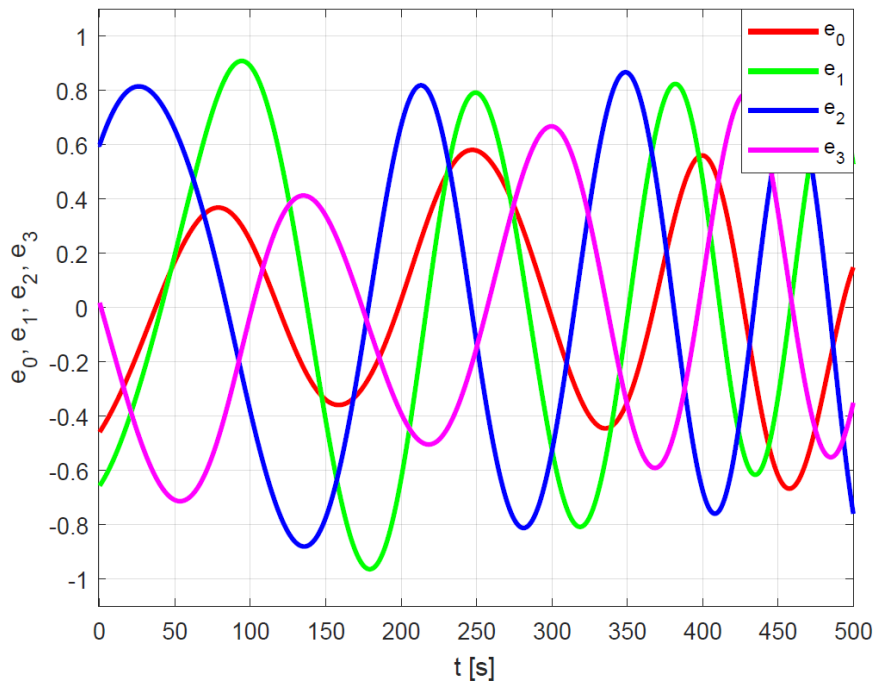
Podaci iz 178, preuzeti su iz [13], gdje su zadani preko Eulerovih kuteva, te ih je bilo potrebno preračunati u kvaternione pomoću jednadžbe:

$$p = \begin{bmatrix} \cos\frac{\sigma}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\psi}{2} + \sin\frac{\sigma}{2}\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\psi}{2} \\ -\cos\frac{\sigma}{2}\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\psi}{2} + \sin\frac{\sigma}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\psi}{2} \\ \cos\frac{\sigma}{2}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\psi}{2} + \sin\frac{\sigma}{2}\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\psi}{2} \\ \cos\frac{\sigma}{2}\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\psi}{2} - \sin\frac{\sigma}{2}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\psi}{2} \end{bmatrix} \quad (179)$$

Korištene vrijednosti Eulerovih kuteva kod preračunavanja u kvaterniona su:

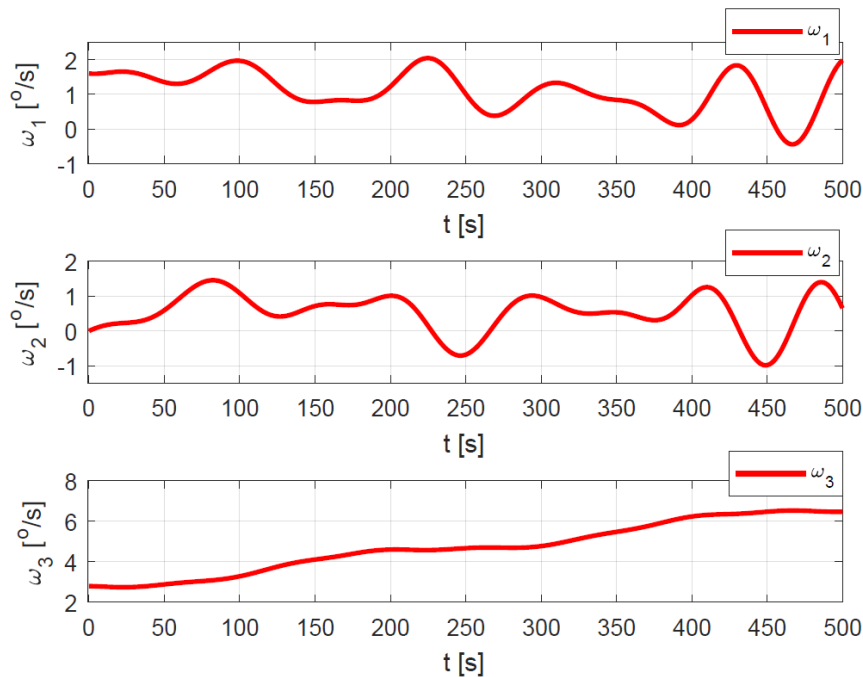
$$\begin{aligned} \sigma &= -135^\circ \\ \theta &= 35^\circ \\ \psi &= -70^\circ \end{aligned} \quad (180)$$

Slika 10 pokazuje da su sve krivulje ovisnosti kvaterniona o vremenu kontinuirane.



Slika 10: Dijagram kvaterniona

Drugim riječima, ne postoje diskontinuiteti, koji nastaju zbog pojave singulariteta, ukoliko se za opis rotacije koriste kvaternioni. Budući da se pri bilo kojoj parametризaciji rotacije korištenjem tri parametra javljaju singulariteti, njihovo nepostojanje kod primjene kvaterniona jedan je od ključnih razloga njihove primjene.

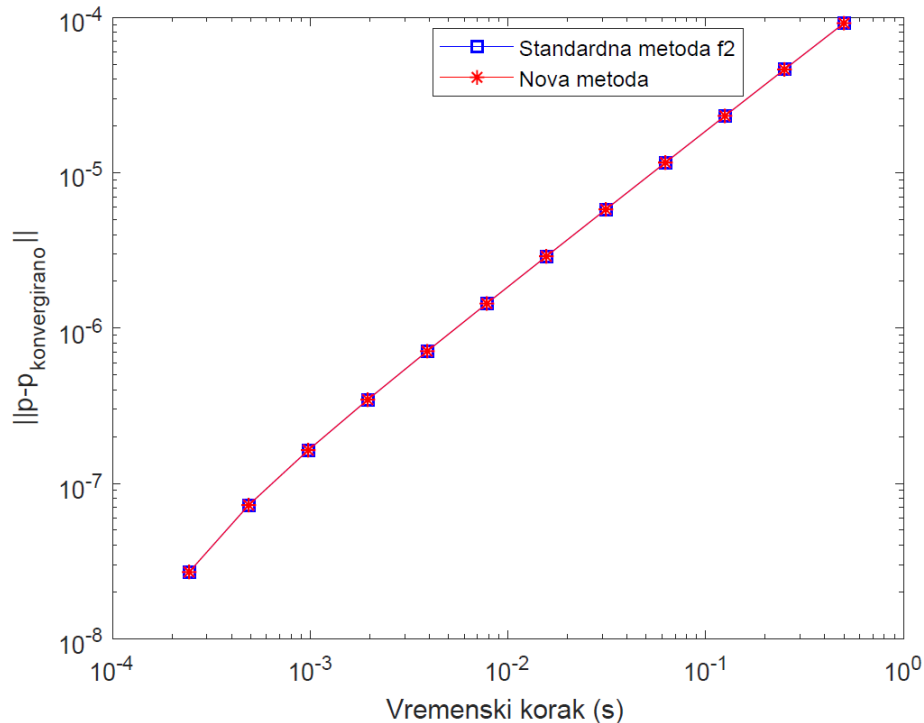


Slika 11: Dijagrami komponenata kutne brzine

Budući da je u algoritme integracije potrebno ubaciti početne komponente kutne brzine u rad/s, a dijagrami su iscrtani u  $^{\circ}/s$ , kutne brzine dobivene integracijom prebačene su u  $^{\circ}/s$  kako bi se dobio bolji osjećaj o brzini rotacije. Prebacivanje se jednostavno vrši množenjem vrijednosti kutne brzine sa  $180^{\circ}/\pi$ . Na slici 11 vidljivo je da su komponente kutne brzine u  $\xi$  i  $\eta$  smjeru lokalnog koordinatnog sustava vezanog za tijelo nanosatelita male i kreću se od 1 do  $2^{\circ}/s$ , dok komponenta u  $\zeta$  smjeru monotono raste. Jasno je da je potrebno uklopiti dodatne komponente (npr. magnetske), kako bi se komponenta kutne brzine u  $\zeta$  smjeru stabilizirala i zadržala oko neke (ne prevelike) stacionarne vrijednosti. U [13], to je učinjeno postavljanjem magnetski permeabilnih štapova u  $\xi$  i  $\eta$  smjeru, koji u ovom primjeru nisu uzeti u obzir, budući da se promatra period u kojem magnetski permeabilni štapovi imaju vrlo mali utjecaj (period u kojem se provode znanstvena istraživanja).

### 3.3 Usporedba rezultata

Kako bi se prikazala konvergencija te usporedili rezultati za različite metode, provedene su simulacije s vremenskim koracima  $\Delta t = (1/2 \text{ s}, 1/4 \text{ s}, 1/8 \text{ s}, 1/16 \text{ s}, 1/32 \text{ s}, 1/64 \text{ s}, 1/128 \text{ s}, 1/256 \text{ s}, 1/512 \text{ s}, 1/1024 \text{ s}, 1/2048 \text{ s}, 1/4096 \text{ s})$ . Simulacija je provedena za vremensku domenu 10 sekundi, kako bi trajanje simulacije bilo dovoljno malo. Rezultati dobiveni simulacijom, uspoređeni su s vrijednošću  $p_{konvergirano}$ , koja je dobivena za  $\Delta t = 10^{-4} \text{ s}$ . Navedena vrijednost može se uzeti kao referentna, budući da su obje metode konvergirale prema istom rješenju. Na slici 12, prikazan je, u logaritamskom mjerilu, dijagram ovisnosti norme razlike izračunatog kvaterniona i referentnog (konvergiranog) kvaterniona  $\|p - p_{konvergirano}\|$  o vremenskom koraku  $\Delta t$  za obje metode. Metoda po II. formulaciji i nova metoda, pokazuju gotovo identične rezultate (razlika normi je red veličine  $10^{-12}$ , što je pogreška na razini računalne točnosti). U obrađenom primjeru moment ne ovisi o orijentaciji tijela, što znači da se dinamičke jednadžbe mogu dovoljno dobro opisati i s većim koracima, čime prednost nove metode (bolji rezultati kod većih koraka) nije izražena. U svakom slučaju, može se zaključiti da je, u obrađenom primjeru, nova metoda u najmanju ruku jednako dobra kao i standardna metoda prema formulaciji II.



Slika 12: Dijagram konvergencije

## 4 ZAKLJUČAK

U prvom poglavlju prikazano je gibanje krutog tijela u matričnom obliku preko  $SE(3)$  grupe. Množenjem elemenata  $SE(3)$  grupe moguće je translirati i rotirati jedan koordinatni sustav (vezan za tijelo) u odnosu na početni koordinatni sustav (iner-cijski). Ukoliko se ishodište koordinatnog sustava smatra fiksnim, jedino moguće gibanje krutog tijela je rotacija. U tom slučaju, razmatra se  $SO(3)$  grupa koja pred-stavlja grupu matrica rotacija. Zatim je rotacija opisana pomoću eksponencijalnih koordinata, preko kojih je moguće zapisati i samu matricu rotacije. Nadalje, uvedeni su Eulerovi kutevi, koji predstavljaju parametrizaciju rotacije s tri parametra, te je naveden problem singulariteta (koji se javlja kod svake parametrizacije rotacije s tri parametra). Kako bi se izbjegli problemi singulariteta, uvedeni su kvaternioni, koji ako se prikažu preko Eulerovih parametara, čine jedinični kvaternion, koji se koristi za opisivanje rotacije u 3D prostoru.

U drugom poglavlju predstavljene su tri metode numeričke integracije - dvije stan-dardne metode kod kojih je potrebno zadovoljiti barem jednu stabilizacijsku jed-nadžbu, te nova kod koje su svojstva kvaterniona (poput jedinične norme i orto-gonalnosti kvaterniona i njegove derivacije) implicitno zadovoljena. Nova metoda ne operira u vektorskom prostoru globalne parametrizacije rotacije satelita, nego se inkrementalna integracija vrši na tangentskom prostoru rotacijske mnogostrukosti  $SO(3)$ , uz izravnu rekonstrukciju orijentacije na mnogostrukost jediničnih kvaterni-ona  $SU(2)$ .

U trećem poglavlju obrađen je primjer realnog RAX-1 nanosatelita, gdje su uspoređene nova metoda i standardna metoda kod koje je potrebno eksplicitno zadovoljiti samo jediničnu normu kvaterniona (formulacija II). Usporedba je provedena iscrtavanjem dijagrama konvergencije, koji je pokazao da, u obrađenom primjeru, obje metode daju gotovo identične rezultate. Razlog tome je neovisnost momenta o orijentaciji tijela, što vodi do činjenice da se dinamičke jednadžbe mogu dovoljno dobro opisati i s većim koracima, čime prednost nove metode (bolji rezultati kod većih koraka) nije izražena. U svakom slučaju, dokazano je da je nova metoda, u najmanju ruku, barem jednako dobra kao i standardna metoda prema formulaciji II.

## LITERATURA

- [1] R. M. Murray, Z. Li, S. S. Sastry: A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation, CRC Press, 1994.
- [2] T. Šurina, M. Crneković: Industrijski roboti, Školska knjiga, Zagreb, 1990.
- [3] <http://www.seas.upenn.edu/~meam620/notes/RigidBodyMotion3.pdf> [Datum pristupa: 17.12.2017.]
- [4] A. Morawiec: Orientations and Rotations, Computations in Crystallographic Textures, Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, 2004.
- [5] M. L. Curtis: Matrix Groups, Springer, Berlin, 1984.
- [6] V. Pandža: Numerička integracija rotacijskih kvaterniona, Diplomski rad, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, 2015.
- [7] P. E. Nikravesh: Computer-aided analysis of mechanical systems, Prentice Hall, Eaglewood Cliffs, 1988.
- [8] J.B. Kuipers: Quaternions and rotation sequences, Coral Press, Sofia 2000, pp 127-143
- [9] P.E. Nikravesh: Spatial kinematic and dynamic analysis with Euler parameters, Springer Heidelberg, 1984., In: Haug, E.J. (ed.) Computer Aided Analysis and Optimization of Mechanical System Dynamics, pp. 261-281
- [10] Z. Terze, A. Müller, D. Zlatar: Singularity-free time integration of rotational quaternions using non-redundant ordinary differential equations, Multibody System Dynamics 38, 2016, 201-225
- [11] E. J. Haug: Computer aided kinematics and dynamics of mechanical systems, Volume I: Basic methods, Allyn and Bacon, 1989.
- [12] H. Goldstein, C. Poole, J. Safko: Classical mechanics, Addison-Wesley, Reading, 1980.
- [13] R. Burton: Attitude Determination of Passively Magnetically Stabilized Nano Satellites, Ph.D. Thesis, May 2013. <http://purl.stanford.edu/hf898cp8579>

- [14] R. Burton, S. Rock, J. Springmann, J. Cutler: Dual attitude and parameter estimation of passively magnetically stabilised nano satellites, *Acta Astronautica* 94, 2014, 145-158

## **PRILOZI**

I. CD-R disc