Aktivno prigušenje vibracija kod nosivih konstrukcija korištenjem piezoelektričnih elemenata

Penđer, Antonia

Master's thesis / Diplomski rad

2017

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:235:251091

Rights / Prava: In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2024-07-05**

Repository / Repozitorij:

Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

DIPLOMSKI RAD

Antonia Penđer

Zagreb, 2017.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

DIPLOMSKI RAD

Mentor:

Prof.dr.sc. Andrej Jokić

Student:

Antonia Penđer

Zagreb, 2017.

Izjavljujem da sam ovaj rad izradila samostalno, koristeći stečena znanja tijekom studija i navedenu literaturu.

Zahvaljujem se svom mentoru prof. dr. sc. Andreju Jokiću što mi je omogućio da napišem ovaj rad, te mag. ing. Mihaelu Lobroviću na stručnim savjetima prilikom izrade rada.

Antonia Penđer

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

Središnje povjerenstvo za završne i diplomske ispite

Povjerenstvo za diplomske ispite studija strojarstva za smjerove:
proizvodno inženjerstvo, računalno inženjerstvo, industrijsko inženjerstvo i menadžment, inženjerstvo materijala te mehatronika i robotika

Sveučilište u Zagrebu Fakultet strojarstva i brodogradnje	
Datum	Prilog
Klasa:	
Ur. broj:	

DIPLOMSKI ZADATAK

Student: **Antonia Penđer** Mat. br.: 0035186255

Naslov rada na hrvatskom jeziku: **Aktivno prigušenje vibracija kod nosivih konstrukcija korištenjem piezoelektričnih elemenata**

Naslov rada na engleskom jeziku: **Active Vibration Control in Structures using Piezoelectric Elements**

Opis zadatka:

Nosive konstrukcije često su izložene vanjskim dinamičkim poremećajima (silama, momentima) koje uzrokuju njihovo vibriranje. Vibracije mogu smanjiti vijek trajanja konstrukcije te imati nepoželjan utjecaj na okolinu, pa ih je stoga poželjno prikladno prigušiti. Prigušenje se može ostvariti putem pasivne ili aktivne regulacije. Pojmovi pasivno i aktivno ovdje se odnosne na nedostatak (pasivno) ili postojanje (aktivno) dotoka energije iz okoline. Kod pasivne regulacije koriste se isključivo pasivni elementi kao opruge i prigušnice, dok se kod aktivne regulacije podrazumijeva postojanje aktuatora s vanjskim dotokom energije, koji dinamički djeluju na samu nosivu konstrukciju, kao i postojanje senzora preko kojih u realnom vremenu možemo dobiti mjerenja odziva (progiba, zakreta) konstrukcije. Piezoelektrični elementi mogu se koristiti i kao senzori i ako aktuatori, a u novije vrijeme sve je više istraživanja o korištenju ovih elemenata za aktivno prigušenje vibracija kod nosivih konstrukcija.

U ovom radu potrebno je ostvariti sljedeće:

1. Predstaviti matematički model piezoelektričnih elemenata prikladan za sintezu regulatora namijenjenih aktivnom prigušenju vibracija.
2. Na primjeru elastične grede izvesti dinamički model nosive konstrukcije, zajedno s piezoelektričnim elementima pričvršćenim na nju, koristeći prikladnu prostornu diskretizaciju metodom konačnih elemenata. Model prikazati u prostoru stanja, u standardnom obliku prikladnom za sintezu regulatora.
3. Na temelju dobivenog dinamičkog modela sintetizirati optimalan H_∞ regulator namijenjen smanjenu utjecaja poremećajnih sila/momenata na progibe/zakrete grede. Koristiti filtre za karakterizaciju poremećaja te formulaciju zahtjeva u frekvencijskom području.
4. Prikazati rezultate prikladno osmišljenih simulacija u vremenskom području s ciljem ilustracije učinkovitosti regulatora.

U radu je potrebno navesti korištenu literaturu i eventualno dobivenu pomoć.

Zadatak zadan:	Rok predaje rada:	Predviđeni datum obrane:
11. svibnja 2017.	13. srpnja 2017.	19., 20. i 21. srpnja 2017.

Zadatak zadao: Predsjednica Povjerenstva:

Izv. prof. dr. sc. Andrej Jokić

Prof. dr. sc. Biserka Runje

Sadržaj

1 UVOD **1**

2 PIEZOELEKTRIČNI PRETVORNICI **3**

2.1 Osnovne jednadžbe diskretnog pretvornika 4

2.2 Piezoelektrični pretvornik na gredi 8

2.2.1 Aktuator 9

2.2.1.1 Hamiltonov princip 9

2.2.2 Senzor 11

2.2.3 Primjeri 13

3 MATEMATIČKI MODEL **16**

3.1 Model grede 17

3.2 Model grede s piezoparovima 20

4 H_∞ OPTIMALNO UPRAVLJANJE **24**

4.1 H_∞ norma 24

4.2 Formulacija problema optimalnog upravljanja 25

4.3 Formulacija problema optimalnog upravljanja za zadanu gredu 26

5 FILTERI ZA H_∞ OPTIMALNO UPRAVLJANJE **31**

5.1 Odabir filtera 31

5.2 Primjena filtera u modelu grede sa piezoparovima 33

6 REZULTATI SIMULACIJA **36**

7 ZAKLJUČAK **44**

LITERATURA **45**

PRILOG **46**

Popis slika

Slika 1 Pametna struktura [1] 1
Slika 2 Piezoelektrični efekt [2] 3
Slika 3 Piezoelektrični linearni pretvornik [1] 5
Slika 4 Piezoelektrični pretvornik [1] 8
Slika 5 Piezoelektrična greda s piezoelektričnim slojem i elektrodom [1] 10
Slika 6 a) operacijsko pojačalo b) pojačalo struje c) pojačalo naboja [1] 12
Slika 7 Primjeri oblika elektroda i odgovarajućih opterećenja: a)pravokutna b)trokutasta c) paraboloidna [1] 13
Slika 8 Greda sa 3 konačnih elemenata 16
Slika 9 Gredni element 17
Slika 10 Greda sa 2 piezopara 20
Slika 11 Piezopar na gredi 21
Slika 12 Dinamički sustav 24
Slika 13 Blok dijagram općenitog sustava [7] 25
Slika 14 Frekvencijska karakteristika nisko propusnog filtera W_z 32
Slika 15 Frekvencijska karakteristika notch filtera W_z 33
Slika 16 Frekvencijska karakteristika visoko propusnog filtera W_u 33
Slika 17 Generalni plant modela s filterima 34
Slika 18 Odabrani filteri 37
Slika 19 Frekvencijka karakteristika regulatora 37
Slika 20 Prijenosne funkcije od ulaza do izlaza modela 38
Slika 21 Detalj prijenosne funkcije od ulaza do izlaza 38
Slika 22 Singularne vrijednosti otvorenog i zatvorenog kruga 39
Slika 23 Progibi u čvorovima grede 39
Slika 24 Naponi na piezoaktuatorima 40
Slika 25 Odabrani filteri za drugi rubni uvjet 41
Slika 26 Frekvencijka karakteristika regulatora za drugi rubni uvjet . . . 41
Slika 27 Prijenosne funkcije od ulaza do izlaza modela za drugi rubni uvjet 42

Slika 28 Singularne vrijednosti otvorenog i zatvorenog kruga za drugi rubni uvjet 42
Slika 29 Progibi u čvorovima grede za drugi rubni uvjet 43
Slika 30 Naponi na piezoaktuatorima za drugi rubni uvjet 43

Popis tablica

Tablica 1 Odnos između lokalnih i globalnih stupnjeva slobode 19
Tablica 2 Svojstva grede i piezoelektričnog materijala 36

Popis oznaka i mjernih jedinica fizikalnih veličina

Piezoelektrični materijal

Oznaka	Značenje	Mjerna jedinica
A	Površina poprečnog presjeka grede	m^2
A_p	Površina poprečnog presjeka piezo sloja	m^2
b	Širina grede	m
b_p	Širina piezo elektrode	m
c_{11}	Konstanta elastičnosti	N/m^2
c^E	Youngov modul elastičnosti	N/m^2
c^E_{ijkl}	Tenzor konstanti elastičnosti	
C	Kapacitet piezomaterijala	F
d_{33}	Piezoelektrična konstanta	m/V
d_{ikl}	Tenzor piezoelektričnih konstanti	
$D; D_3$	Električni pomak	$Coulomb/m^2$
$e_{33}; e_{31}$	Piezoelektrična konstanta	$Coulomb/m^2$
e_{ikl}	Tenzor piezoelektričnih konstanti	
E	Električno polje	V/m
E	Youngov modul elastičnosti grede	N/m^2
E_p	Youngov modul elastičnosti piezomaterijala	N/m^2
f	Sila	N
G_c	Pojačanje senzora	
i, j, k, l	Indeksi tenzorske notacije	
i	Struja	A
I	Moment tromosti grede	m^4

Oznaka	Značenje	Mjerna jedinica
I_p	Moment tromosti piezomaterijala	m^4
k^2	Elektromehanički faktor	N/m^2
K_a	Krutost	N/m
l	Duljina grede	m
M_p	Moment piezoaktuatora	Nm
n	Broj slojeva u piezopretvorniku	
p	Nekonzervativna sila	N
$p; P$	Sila piezo aktuatora	N
Q	Električni naboj	Coulomb
s^E	Inverz Youngova modula	m^2/N
s^E_{ijkl}	Tenzor popustljivosti	
$S; S_1$	Tenzor deformacija; Deformacija	
t	Debljina sloja u piezopretvorniku	m
t	Debljina grede	m
t_p	Debljina piezosloja	m
T	Naprezanje; Tenzor naprezanja	N/m^2
T^*	Kinetička energija	J
$V; V^a; V^s$	Napon (aktuatora/senzora)	V
w	Pomak grede	m
W	Rad	J
W_e, W_e^*	Unutarnja energija	J
z_m	Udaljenost od neutralne osi	m
α	Kut zakreta	
δW_{nc}	Rad nekonzervativnih sila	J

Oznaka	Značenje	Mjerna jedinica
Δ	Ukupno produljenje	m
ε^T	Permitivnost	F/m
$\varepsilon_{ik}^S; \varepsilon_{ik}^T$	Tenzor permitivnosti	
ρ	Gustoća grede	kg/m^3
ρ_p	Gustoća piezomaterijala	kg/m^3
ω_i	Vlastite frekvencije titranja grede	Hz

Matematički model

Oznaka	Značenje
a	koeficijenti polinoma
A	Matrica stanja za model grede u prostoru stanja
A, M	Parametri high pass i low pass filtera
$\tilde{A}$	Matrica stanja sustava s filterima
A_{cl}	Matrica stanja zatvorenog kruga
A_k	Matrica stanja kontrolera
A_u	Matrica stanja filtera na ulazu
A_z	Matrica stanja filtera na izlazu
b_1	Dio matrice B_1
b_2	Dio matrice B_2
B	Matrica ulaza za model grede u prostoru stanja
B_1	Dio matrice B povezan s poremećajem
$\tilde{B}_1$	Matrica ulaza vezana za poremećaj sustava s filterima
$_2$	Dio matrice B povezan s kontrolnom varijablom
$\tilde{B}_2$	Matrica ulaza vezana za kontrolne varijable sustava s filterima
B_{cl}	Matrica ulaza zatvorenog kruga
B_k	Matrica ulaza kontrolera
B_u	Matrica ulaza filtera na ulazu
B_z	Matrica ulaza filtera na izlazu
c_1	Dio matrice C_1
c_2	Dio matrice C_2
C	Matrica prigušenja

Oznaka	Značenje
C	Matrica izlaza za model grede u prostoru stanja
C_1	Dio matrice C povezan s progibima
$\tilde{C}_1$	Matrica izlaza vezana za grešku sustava s filterima
C_2	Dio matrice C povezan s derivacijama kuta zakreta
$\tilde{C}_2$	Matrica izlaza iz kontrolera sustava s filterima
C_{cl}	Matrica izlaza zatvorenog kruga
C_k	Matrica izlaza kontolera
C_u	Matrica izlaza filtera na ulazu
C_z	Matrica izlaza filtera na izlazu
d	Vektor poremećaja
d_1, d_2, d_3, d_4	Djelovi vektora d
D	Matrica preslikavanja ulaza na izlaz
$D_{11}, D_{12}, D_{21}, D_{22}$	Dijelovi matrice D
$\tilde{D}_{11}, \tilde{D}_{12}, \tilde{D}_{21}, \tilde{D}_{22}$	Djelovi matrice preslikavanja ulaza na izlaz sustava s filterima
D_{cl}	Matrica preslikavanja ulaza na izlaz zatvorenog kruga
D_k	Matrica preslikavanja ulaza na izlaz kontolera
D_u	Matrica preslikavanja ulaza na izlaz filtera na ulazu
D_z	Matrica Matrica preslikavanja ulaza na izlaz filtera na izlazu
F	Vektor sila i momenata
$F(P, K)$	Matrica prijenosnih funkcija od ulaza do izlaza sustava
H_∞	Hardyev prostor
K	Matrica krutosti
K	Matrica prijenosnih funkcija kontrolera
L	Lagrangian

Oznaka	Značenje
M	Matrica inercije
N	Matrica funkcije oblika
P	Matrica prijenosnih funkcija MIMO sustava
$P_{11}, P_{12}, P_{21}, P_{22}$	Dijelovi matrice P
q	Vektor stanja elementa
$\sup_{0<\|w(t)\|_2<\infty}$	Supremum norme ulaznog signala
$\sup_{\omega\in\mathbb{R}}$	Supremum svih realnih frekvencija
s	Kompleksna varijabla frekvencijske domene
u	Vektor kontrolnih varijabli, ulaza
$\tilde{u}$	Vektor izlaza iz filtera na ulazu
v	Vektor napona aktuatora
w	Vektor ulaza u sustav
w_2	Norma ulaznog signala
W_z	Prijenosna funkcija filtera na izlazu
W_u	Prijenosna funkcija filtera na ulazu
x	Vektor varijabli stanja
x_{cl}	Vektor varijabli stanja zatvorenog kruga
x_{filt}	Vektor varijabli stanja sustava s filterima
x_k	Vektor varijabli stanja kontolera
x_u	Vektor varijabli stanja filtera na ulazu
x_z	Vektor varijabli stanja filtera na izlazu
y	Vektor izlaznih varijabli, mjerenja
z	Vektor izlaza iz sustava

Oznaka	Značenje
$\tilde{z}$	Vektor izlaza iz filtera
z_{filt}	Vektor mjerenih varijabli sustava s filterima
α, β	Koeficijenti matrice prigušenja
β_1, β_2	Parametri notch filtera
γ	Najveće energetsko pojačanje
γ_{min}	Minimalno najveće energetsko pojačanje
ε_i	Kritični omjer prigušenja
σ_{max}	Najveća singularna vrijednost sustava
$\omega, \omega_B,$	Granična frekvencija
$[M]^e$	Matrica inercije grednog elementa
$[M_{piezo}]^e$	Matrica inercije grednog elementa s piezo parom
$[K]^e$	Matrica krutosti grednog elementa
$[K_{piezo}]^e$	Matrica krutosti grednog elementa s piezo parom
$\| \quad \|_2$	Druga norma
$\| \quad \|_\infty$	Beskonačno norma

SAŽETAK

Zbog nepoželjnog utjecaja vibracija na konstrukcije često se javljapotreba za njihovim prigušivanjem. Aktivno prigušenje podrazumjeva postojanje senzora i aktuatora koji u realnom vremenu mjere odziv i dinamički djeluju na konstrukciju. U zadnje vrijeme, sve je češća upotreba piezoelektričnih materijala u te svrhe.

U radu je razrađen model grede na kojoj su raspoređeni piezoelementi. Koristeći metodu konačnih elemenata i osnovne jednadžbe piezoelektirčnih materijala, stvoren je model prikladan za sintezu regulatora namjenjenog minimizaciji utjecaja poremećaja na progibe/zakret grede. Za sintezu se koristi H_∞ teorija optimalnog upravljanja koja omogućava oblikovanje željenog odziva sustava u frekvencijskom području upotrebom filtera.

Ključne riječi: Vibracije; Nosive konstrukcije; Optimalno upravljanje; Piezoelektrični senzori/aktuatori; Metoda konačnih elemenata

ABSTRACT

Due to the undesirable impact of vibration on the structures in many applications there is a need for introducing appropriate vibration damping. Active damping implies existence of sensors and actuators that in real-time measure response and dynamically affect the structure. Since recently the piezoelectric materials are increasingly used for these purposes.

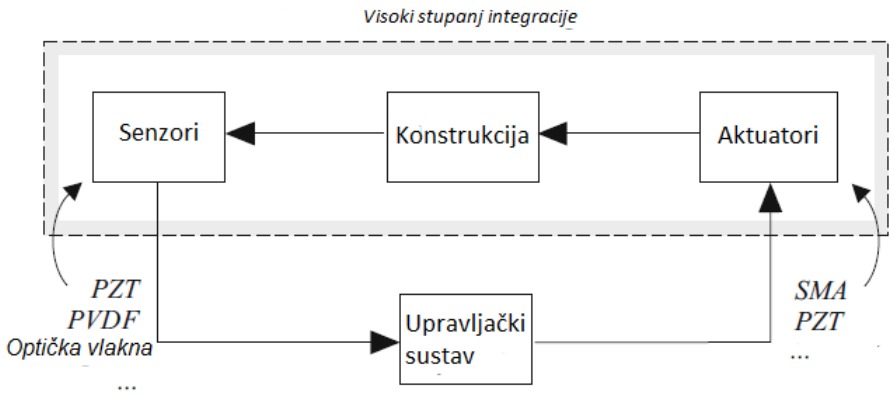
In this work, a dynamical model of an elastic beam with piezoelectric sensors/actuators has been developed. Using the finite element method and the basic equations of the piezoelectric materials the model has been further adapted and made suitable for control synthesis purposes. The considered control goal was to minimize the impact of the external disturbances on beam displacements. For this purpose H_∞ optimal control theory has been used.

Keywords: Vibrations; Bearing structures; Optimal control; Piezoelectric sensors/actuators; Finite element method

1 UVOD

Vibracija je oscilacija čiji je iznos vrijednost koja definira gibanje sustava. Oscilacija je promjena intenziteta neke veličine u odnosu na zadanu referentnu vrijednost, pri čemu se intenzitet naizmjenično mijenja iznad ili ispod referentne vrijednosti.

Proučavanje vibracija ima veliko značenje u strojarstvu, građevini, brodogradnji, zrakoplovstvu i drugim granama tehnike jer vibracije mogu prouzročiti naprezanja u materijalu koja mogu dovesti do loma, tehnološke smetnje u radu stroja i nelagodu kod radnika za strojem. Različiti su načini smanjenja vibracija, a najčešće se koristi prigušenje odnosno smanjenje rezonantnih vrhova disipacijom vibracijske energije. Prema [1], prigušenje se može postići pasivno, koristeći klasične prigušivače koji su pilagođeni za samo jednu vrstu uređaja na koje se ugrađuju i često su velikih dimenzija. Pasivni prigušivači ne reagiraju na promjenu uzbude i ne mogu se prilagoditi promjenjivim uvjetima vibriranja. S druge strane, aktivna metoda redukcije vibracija omogućuje da se prigušivač prilagodi iznosu uzbude. Pomoću senzora očitavaju se progibi/zakreti konstrukcije uslijed vibracije. Upravljačka jedinica analizira podatke dobivene sa senzora i šalje signal kojim se pokreće aktivni prigušivač (aktuator). Prikladnim projektiranjem upravljačkog sustava može se postići da se ovakav sustav kontrole vibracija napaja crpeći većim dijelom energiju pretvorenu iz mehaničke energije pobude, a manjim dijelom vanjskim napajanjem.



Slika 1: Pametna struktura [1]

Aktivna struktura se sastoji od niza aktuatora i senzora uparenih kontrolerom. Posebnost "pametne strukture" (Slika 1, [1]) je u tome što aktuatori i senzori mogu biti distribuirani i imaju visok stupanj integracije unutar strukture što omogućava zasebno modeliranje dijelova.

S obzirom na mehanička svojstva, klasične materijale u cijelosti opisuju njihove konstante elastičnosti koje povezuju naprezanja i deformacije, te koeficijent toplinske ekspanzije koji povezuje deformaciju i temperaturu. Kod pametnih materijala naprezanja se mogu generirati različitim mehanizmima kao temperaturom, elektičnim ili magnetskim poljem i slično.

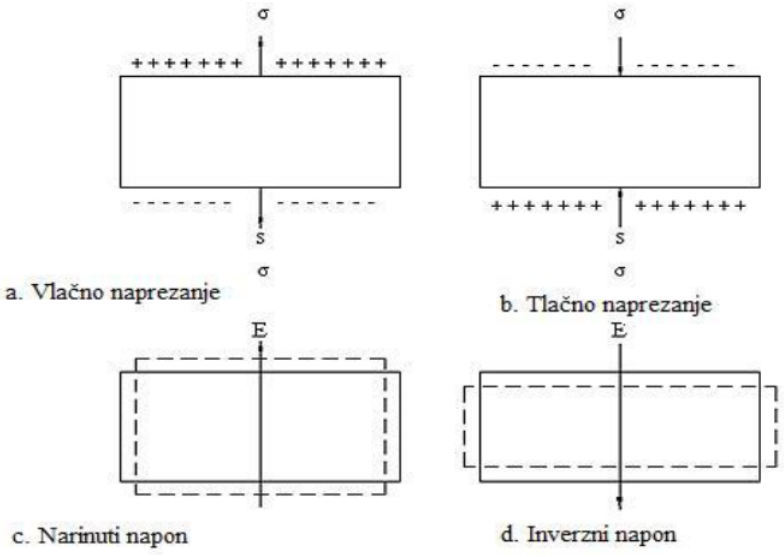
Jedni od najznačajnijih pametnih materijala za prigušenje vibracija su piezoelektrični materijali i to keramički ili polimerni. Mogu se koristiti i kao aktuatori i kao senzori u kontroli vibracija lakih konstrukcija, digitalnih uređaja, automobilskih dijelova, aeroindustriji, svemirskim istraživanjima, itd.

Ono o čemu će se u ovom radu raspravljati jest njihova upotreba s ciljem prigušenja vibracija grede. Cilj je sintetizirati regulator koji će prigušiti vibracije grede. Može se pokazati da linearno kvadratično programiranje ne zadovoljava u potpunosti zahtjev na robusnost modela kod multivarijabilnih sustava. H_∞ teorija optimalnog upravljanja često se pokazuje prikladnijom. Ono što ju karakterizira i čini prikladnom za rješavanje problema optimalnog upravljanja je mogućnost oblikovanja odziva modela u frekvencijskom području preko filtera ili težinskih funkcija. U ovom radu model grede diskretiziran metodom konačnih elemenata koristi se za simuliranje aktivnog prigušenja piezoelementima koristeći H_∞ teoriju optimalnog upravljanja u sintezi kontrolera.

2 PIEZOELEKTRIČNI PRETVORNICI

Riječ "piezo" preuzeta je u istom obliku iz grčkog jezika i znači "gurati". Jacques i Pierre Curie su 1880. godine otkrili da određeni pritisak stvara električni naboj u nekim kristalima; taj fenomen su nazvali "*piezoelektrični efekt*". Kasnije su primjetili da električno polje može deformirati piezolektrični materijal i to su nazvali "*inverzni električni efekt*".

Direktni piezoelektrični efekt predstavlja sposobnost određenih kristalnih materijala da generiraju električni naboj razmjeran primjenjenoj vanjskoj sili. Naziva se i efekt senzora te se koristi u pretvornicima sile, kod pretvorbi mehaničke energije u električnu. Obrnuto, inverzni piezoelektrični efekt predstavlja produljenje materijala uslijed djelovanja električnog polja paralelnog smjeru polarizacije. Taj aktuatorski efekt pretvara električnu u mehaničku energiju.



Slika 2: Piezoelektrični efekt [2]

Piezoelektrični učinak je anizotropan; događa se samo materijalima čija kristalna struktura nema centar simetrije. Ako ulažemo mehanički rad na dvije suprotne plohe, u materijalu se javlja električni napon [2]. Najveća polarizacija nastaje kada je naprezanje takvog dielektrika paralelno s piezoelektričnom osi kristala. Ako se materijal pritišće silom F, tada se na jednoj strani površine materijala pojavi po-

larizirani pozitivni naboj, a na drugoj negativni naboj. Ako se promjeni smjer deformiranja, tada se promjeni i polaritet polarizacije (Slika 2). Nadalje, ako se piezoelektirični komad priključi na napon, pod utjecajem električnog polja dolazi do polarizacije dipola, koji se orijentiraju u smjeru polja. Električno polje u kristalu uzrokuje mehaničko naprezanje.
Najpopularniji piezoelektrični materijali su olovo-cirkonat-titanat (PZT), koji je keramički i poliviniliden-fluorid (PVDF), koji je polimer [1].

2.1 Osnovne jednadžbe diskretnog pretvornika

U pojednostavljenom obliku, osnovni odnos između električnih i elastičnih svojstava piezo pretvornika može se prikazati sljedećim jednadžbama u matričnom obliku [1]:

$$\begin{bmatrix} D \\ S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon^T & d_{33} \\ d_{33} & s^E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \\ T \end{bmatrix} \tag{1}$$

gdje je:

- D - električni pomak (naboj po površini) [Coulomb/m^2],
- E - električno polje [V/m],
- T - naprezanje [N/m^2],
- S - deformacija,
- ε^T - dielektrička konstanta pod konstantnim naprezanjem (permitivnost) [F/m],
- s^E - inverz Youngova modula [m^2/N],
- d_{33} - piezoelektrična konstanta materijala u smjeru polarizacije [m/V].

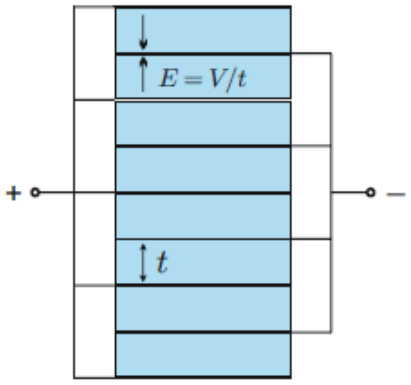
Iz jednadžbe (1) vidimo da kod pretvornika s otvorenim elektrodama ($D = 0$) vrijedi $E = -(d_{33}/\varepsilon^T)T$, odnosno vlačno naprezanje stvara napon suprotnog polariteta od smjera polarizacije materijala dok tlačno naprezanje generira napon istog polariteta. U odsutnosti vanjske sile, ako pretvornik izložimo naponu istog polariteta kao smjer

polarizacije materijala, doći će do produljenja, odnosno skraćenja ako je napon suprotng polariteta. To ukazuje na pozitivnost d_{33} konstante.
Ove jednadžbe mogu biti zapisane i u matričnom obliku gdje su električno polje i deformacija nezavisne varijable:

$$\begin{bmatrix} D \\ T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon^T(1-k^2) & e_{33} \\ -e_{33} & c^E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \\ S \end{bmatrix} \tag{2}$$

gdje je:

- $c^E = 1/s^E$ - Youngov modul elestičnosti pod $E = 0$ [N/m^2],
- $e_{33} = d_{33}/s^E$ - konstanta koja povezuje električni pomak i deformaciju [Coulomb/m^2],
- $k^2 = d_{33}^2/s^E\varepsilon^T = e_{33}^2/c^E\varepsilon^T$ - elektromehanički faktor, mjeri efikasnost pretvorbe mehaničke u električnu energiju [N/m^2].



Slika 3: Piezoelektrični linearni pretvornik [1]

Ako pretpostavimo ujednačenu raspodjelu električnih i mehaničkih svojstava u pretvorniku sa slike 3 kojeg sačinjava n slojeva, debljine t i poprečnog presjeka A, integracijom osnovnih jednadžbi diskretnog pretvornika po volumenu dobijemo sljedeće jednadžbe:

$$\begin{bmatrix} Q \\ \Delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & nd_{33} \\ nd_{33} & 1/K_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V \\ f \end{bmatrix}, \tag{3}$$

$$\begin{bmatrix} Q \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C(1-k^2) & nd_{33}K_a \\ -nd_{33}K_a & K_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V \\ \Delta \end{bmatrix} \tag{4}$$

gdje je:

- $Q = nDA$ - ukupni električni naboj na elektrodama pretvornika [Coulomb],
- $\Delta = Sl = Snt$ - ukupno produljenje [m],
- $f = AT$ - ukupna sila [N],
- V - napon između elektroda pretvornika [V],
- $E = V/t = nV/l$ - električno polje uslijed napona V [V/m],
- $C = \varepsilon^T An^2/l$ - kapacitet pretvornika bez vanjske sile [F],
- $K_a = A/(s^E l)$ - krutost pretvornika pri $V = 0$ [N/m],
- $k^2 = d_{33}^2/s^E\varepsilon^T = n^2 d_{33}^2 K_a/C$ - elektromehanički faktor [N/m^2].

Ako promatramo generalno piezoelektrični materijala, karakteriziraju ga jednadžbe ekvivalentne jednadžbama (1) i (2), samo u tenzorskom obliku:

$$\begin{Bmatrix} D_i \\ T_{ij} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{ik}^S & e_{ikl} \\ -e_{kij} & c_{ijkl}^E \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E \\ S \end{Bmatrix}, \tag{5}$$

$$\begin{Bmatrix} D \\ S \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{ik}^T & d_{ikl} \\ d_{kij} & s_{ijkl}^E \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E \\ T \end{Bmatrix}, \tag{6}$$

gdje je:

- $i, j, k, l = 1, 2, 3$ - klasični indeksi tenzorske notacije,
- c_{ijkl}^E - tenzor konstanti elastičnosti pri konstantnom električnom polju,
- e_{ikl} - tenzor piezoelektričnih konstanti,
- ε_{ik}^S - tenzor dielektričkih konstanti pri konstantnoj deformaciji,
- s_{ijkl}^E - tenzor popustljivosti pri konstantnom elektičnom polju,

- d_{ikl} -tenzor piezoelektričnih konstanti,
- ε_{ik}^{T} - tenzor dielektričkih konstanti pri konstantnoj deformaciji,
- $T = \left\{ \begin{array}{c} T_{11} \\ T_{22} \\ T_{33} \\ T_{23} \\ T_{31} \\ T_{12} \end{array} \right\}$ - tenzor naprezanja,
- $S = \left\{ \begin{array}{c} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{33} \\ 2S_{23} \\ 2S_{31} \\ 2S_{12} \end{array} \right\}$ - tenzor deformacija.

Ako pretpostavimo da se koordinatne osi poklapaju sa osima materijala te da se smjer polarizacije poklapa s osi 3, zadnji set jednadžbi (6), gdje je prva senzorska a druga aktuatorska, eksplicitno možemo zapisati:

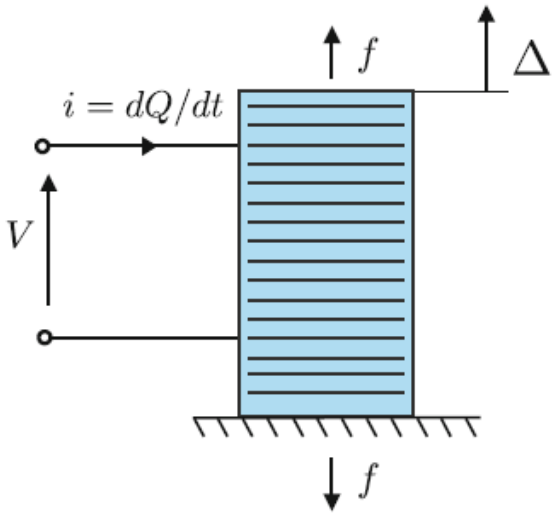
$$\left\{ \begin{array}{c} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ d_{24} & 0 & 0 \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} T_{11} \\ T_{22} \\ T_{33} \\ T_{23} \\ T_{31} \\ T_{12} \end{array} \right\} + \left[\begin{array}{ccc} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{1133} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{array} \right\}, \qquad (7)$$

$$\begin{Bmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{33} \\ 2S_{23} \\ 2S_{31} \\ 2S_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & 0 & 0 & 0 \\ s_{12} & s_{22} & s_{23} & 0 & 0 & 0 \\ s_{13} & s_{23} & s_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_{11} \\ T_{22} \\ T_{33} \\ T_{23} \\ T_{31} \\ T_{12} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & d_{31} \\ 0 & 0 & d_{32} \\ 0 & 0 & d_{33} \\ 0 & d_{24} & 0 \\ d_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{Bmatrix}. \tag{8}$$

Piezoelektrični materijal karakterizira pozitivan d_{33} a negativni d_{31} i d_{32} [1]; primjenom električnog polja E_3 paralelno smjeru polarizacije dolazi do produljenja materijala u istom smjeru te skraćenja u smjerovima 1 i 2.

2.2 Piezoelektrični pretvornik na gredi

Nakon prikaza osnovnih jednadžbi diskretnog piezopretvornika, u nastavku će biti razmotrena ukupna pohranjena elektromehanička energija takvog pretvornika.



Slika 4: Piezoelektrični pretvornik [1]

Ukupna snaga kojoj je izložen pretvornik (Slika 4) predstavlja sumu električne snage Vi i mehaničke snage $f\dot{\Delta}$. S obzirom da se snaga izražava kao dW/dt, imamo:

$$dW = Vidt + f\dot{\Delta}dt = VdQ + fd\Delta \tag{9}$$

Za konzervativni element, ovaj rad se pretvara u unutarnju energiju dW_e i integracijom izraza po Q i Δ (detaljan izvod nalazi se u Prilogu I) dobiva se sljedeći izraz:

$$W_e(Q,\Delta) = \frac{Q^2}{2C(1-k^2)} - \frac{nd_{33}K_a}{C(1-k^2)}Q\Delta + \frac{K_a}{1-k^2}\frac{\Delta^2}{2} \tag{10}$$

Prvi izraz s desne strane predstavlja električnu energiju pohranjenu u kapacitetu $C(1-k^2)$, zadnji član predstavlja energiju elastične deformacije pohranjenoj u opruzi krutosti $K_a/1-k^2$ dok je član u sredini piezoelektrična energija.

Korištenjem Legendreove transformacije i analogije s diskretnim pretvornikom dobije se izraz za ukupnu unutarnju energiju u funkciji S i E:

$$W_e{}^*(S,E) = \frac{1}{2}\{E\}^T[\varepsilon]\{E\} + \{S\}^T[e]\{E\} - \frac{1}{2}\{S\}^T[c]\{S\} \tag{11}$$

Prvi član s desne strane predstavlja električnu energiju pohranjenu u dielektričnom materijalu, drugi član je piezoelektrična energija i treći član je energija deformacije pohranjena u elastičnom materijalu.

2.2.1 Aktuator

2.2.1.1 Hamiltonov princip

Hamiltonov princip zapisuje se kao:

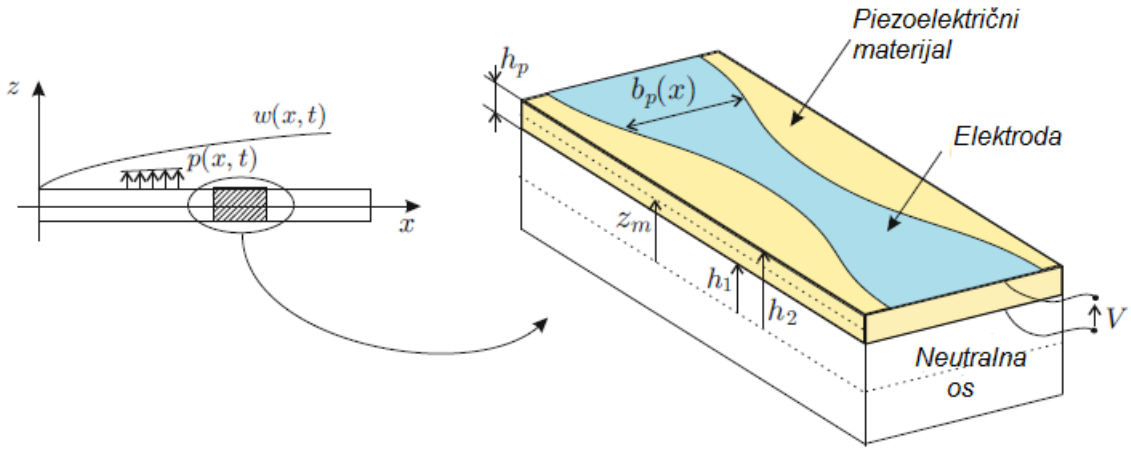
$$\int_{t_1}^{t_2} [\delta(T^* + W_e{}^*) + \delta W_{nc}]dt = 0 \tag{12}$$

Za prikazanu gredu (Slika 5) poprečnog presjeka A i gustoće ρ vrijedi da je kinetička energija jednaka:

$$T^* = \frac{1}{2}\int_0^l (\rho A\dot{w}^2)dx, \tag{13}$$

gdje $w(x,t)$ označava vertikalni pomak grede.

S obzirom da za ovaj slučaj vektor električnog polja i deformacija imaju samo jedan element različit od 0 , E_3 i S_1, unutarnja energija je:



Slika 5: Piezoelektrična greda s piezoelektričnim slojem i elektrodom [1]

$$W_e{}^* = \frac{1}{2}\int_0^l dx \int_A (\varepsilon_{33} {E_3}^2 + 2S_1 e_{31} E_3 - c_{11} {S_1}^2) dA, \tag{14}$$

gdje je $S1 = -z\ddot{w}$; z predstavlja udaljenost od neutralne osi. Ako zapišemo rad nekonzervativnih sila kao $\delta W_{nc} = \int_0^l p(x,t)\delta w dx$, a sa $\mathfrak{D}$ zapišemo $\int_A c_{11} z^2 dA$, nakon sređivanja (vidjeti Prilog II za detalje) Hamiltonov princip dobivamo u obliku:

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_0^l [-\varrho A\ddot{w} - (e_{31}E_3 b_p h_p z_m)'' - (\mathfrak{D}\ddot{w})'' + p]\delta w dx - [(e_{31}E_3 b_p h_p z_m + \mathfrak{D}\ddot{w})']_0^l + \\ + [\{(e_{31}E_3 b_p h_p z_m)' + (\mathfrak{D}\ddot{w})'\}]_0^l = 0 \tag{15}$$

Kad razmotrimo prvi član jednadžbe (15):

$$\varrho A\ddot{w} + (\mathfrak{D}\ddot{w})'' = p - (e_{31}E_3 b_p h_p z_m)'' \tag{16}$$

vidimo da samo širina elektrode b_p ovisi o x-u (udaljenosti od ishodišta) te da umnožak $E_3 h_p$ predstavlja napon V^a između elektroda piezoelektričnog sloja. Iz jednadžbe se zaključuje da je piezoelektrični efekt ekvivalentan kontinuiranom opterećenju proporcionalnom drugoj derivaciji širine elektrode.

Promatrajući ostale članove (15) s ograničenjima $x = 0$ i $x = l$ imamo:

$$(e_{31}E_3b_ph_pz_m + \mathfrak{D}\ddot{w})\delta w' = 0, \tag{17}$$

$$[e_{31}E_3b_p'h_pz_m + (\mathfrak{D}\ddot{w})']\delta w = 0. \tag{18}$$

Iz (17) se vidi da na kraju gdje je moguća rotacija ($\delta w' \neq 0$) izraz u zagradi se izjednačava s 0; odnosno piezoelektrični efekt je ekvivalentan momentu savijanja proporcionalnom širini elektrode. Jednadžba (18) govori da na kraju gdje je moguć pomak ($\delta w \neq 0$) efekt promjene nagiba širine elektrode ekvivalentan je sili u točki proporcionalnoj promjeni prve derivacije širine elektrode.

2.2.2 Senzor

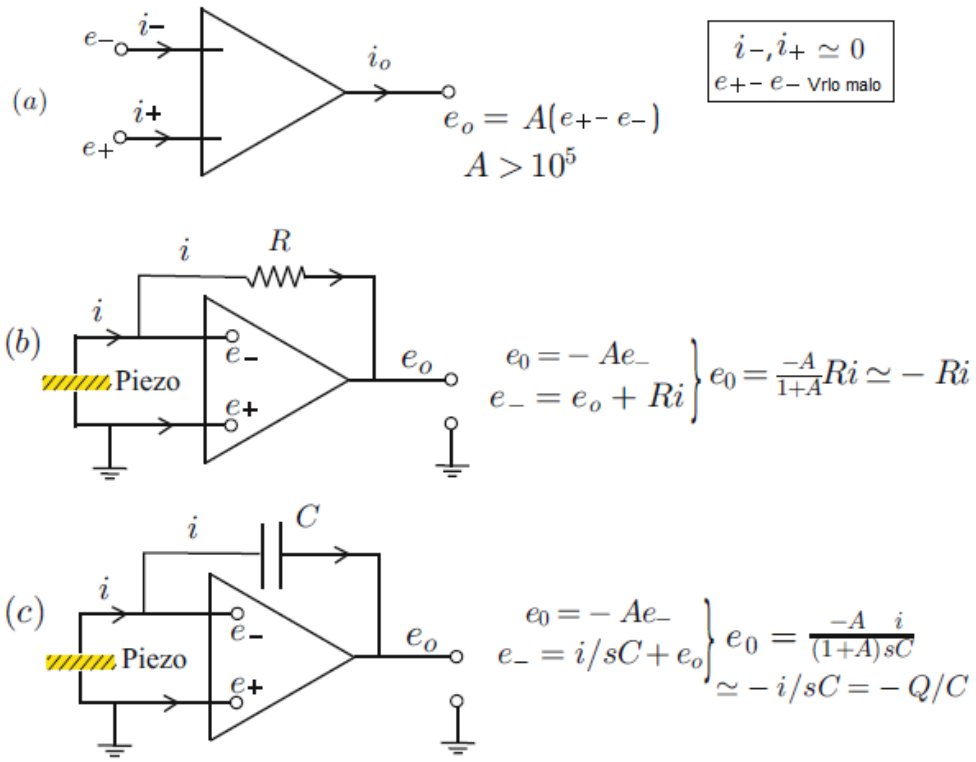
Kad se koristi kao senzor, piezoelektirčni pretvornik se spaja s operacijskim pojačalom tako da prestavljaju pojačalo struje ili pojačalo naboja ovisno o sklopu (Slika 6). Operacijsko pojačalo je aktivni električni krug s beskonačnim ulaznim otporom (ulazne struje i_+ i i_- su približno 0) i izlaznim otporom približnim 0 tako da je izlazni napon e_0 proporcionalan razlici ulaznih napona e_+ i e_-.

Može se smatrati da su elektrode pretvornika kratko spojene s operacijskim pojačalom, odnosno da je električno polje u pretvorniku $E_3 = 0$. Iz osnovnih jednadžbi piezoelektričnog materijala slijedi:

$$D_3 = e_{31}S_1. \tag{19}$$

Integracijom električnog pomaka D_3 po površini elektrode koja se pruža na gredi od $x = 0$ do $x = l$ dobiva se naboj:

$$Q = \int_A D_3 dA = -\int_0^l b_p(x)z_m e_{31}\ddot{w}dx = -z_m e_{31}\int_0^l b_p(x)\ddot{w}dx. \tag{20}$$



Slika 6: a) operacijsko pojačalo b) pojačalo struje c) pojačalo naboja [1]

Količina naboja proporcionalna je prosječnoj vrijednosti širine elektrode. Za elektrodu konstantne širine, naboj je jednak:

$$Q = -z_m e_{31} b_p(x)[\dot{w}(l) - \dot{w}(0)] \tag{21}$$

Taj naboj može se transformirati u struju senzora [3]:

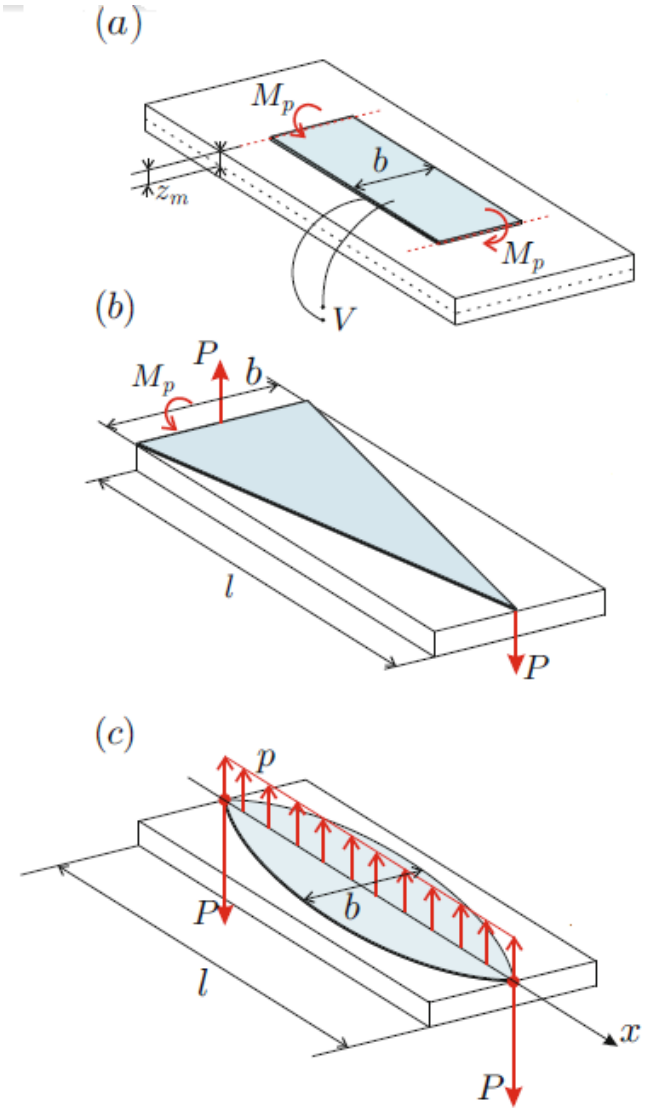
$$i(t) = \frac{dQ(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\int_A D_3 dA = -z_m e_{31} b_p(x)[\ddot{w}(l) - \ddot{w}(0)] \tag{22}$$

Ova struja se pretvara u napon senzora V^s preko pojačanja uređaja za pretvorbu signala G_c tako da je:

$$V_s(t) = G_c i(t) \tag{23}$$

2.2.3 Primjeri

Važna značajka korištenja piezopretvornika kao aktuatora i senzora je dualnost; akturator sile mora biti povezan sa senzorom translacije (mjerenje pomaka, brzine ili akceleracije) a aktuator momenta sa senzorom rotacije (mjerenje kuta ili kutne brzine) na takv način da je produkt aktuatorskog i senzorskog signala predstavlja izmjenjenu energiju.



Slika 7: Primjeri oblika elektroda i odgovarajućih opterećenja: a)pravokutna b)trokutasta c) paraboloidna [1]

Ako imamo pravokutnu elektrodu konstantne širine b koja se pruža na gredi od $x = 0$ do $x = l$, njen učinak ekvivalentan je paru momenata savijanja M_p na kraje-

vima elektrode. Dualno tome, izlaz senzora proporcinalan je razlici nagiba (rotacija) na krajevima elektrode (24). Ovakvo ponašanje opisano je sljedećim relacijama:

$$\begin{aligned} M_p &= -e_{31} V^a b z_m, \\ Q &= -z_m e_{31} b[\dot{w}(l) - \dot{w}(0)], \end{aligned} \tag{24}$$

gdje je:

- M_p - moment savijanja na krajevima elektrode [Nm],
- e_{31} - Piezoelektrična konstanta [Coulomb/m^2],
- V^a - napon aktuatora [V],
- b - širina grede [m],
- $z_m = t_p + t/2$ - udaljenost površine piezo sloja od neutralne osi [m],
- Q - naboj senzora [Coulomb],
- $\dot{w}(b) - \dot{w}(a)$ - razlika derivacije progiba (kut zakreta) na početku i kraju piezo elektrode.

Trokutasta elektoda na gredi od $x = 0$ do $x = l$, ekvivalentna je paru koncentriranih sila P i momentu savijanja M_p. Ako je greda ukliještena s lijeve strane ($w(0) = \dot{w}(0) = 0$) ovo uklještenje će preuzeti odgovarajuća opterećenja i ostat će samo sila P na desnoj strani. Uz uvjete da je $b_p(l) = 0$, $\dot{b_p} = -b_p(0)/l$ i $\ddot{b_p} = 0$, izlazni signal senzora proporcionalan je najvećem pomaku, tj. progibu grede imamo sljedeće relacije

$$\begin{aligned} M_p &= -e_{31} V^a b z_m, \\ P &= e_{31} V \frac{b}{l} z_m, \\ Q &= -z_m e_{31} \frac{b_p(0)}{l} w(l) \sim w(l). \end{aligned} \tag{25}$$

Parabolična elektroda ekvivalentna je kontinuiranom opterećenju p i paru koncentriranih sila P na krajevima. S obzirom da vrijedi da je $b_p(0) = b_p(l) = 0$ i $\ddot{b_p} = -8b/l^2$

te pretpostavimo li da se radi o gredi koja na oba kraja ima ili oslonac ili uklještenje ($w(0) = w(l) = 0$), izlaz senzora je ,dualno kontinuiranom opterećenju, proporcionalan volumnom pomaku. Ovaj slučaj opisan je sljedećim relacijama

$$\begin{aligned} b_p &= \frac{4b}{l^2}x(l-x), \\ P &= -e_{31}V^a\frac{4b}{l}z_m, \\ p &= z_m e_{31}V^a\frac{8b}{l^2}, \\ Q &= z_m e_{31}\frac{8b}{l^2}\int_0^l w(x)dx \sim \int_0^l w(x)dx \end{aligned} \quad . \tag{26}$$

3 MATEMATIČKI MODEL

Ako krenemo od Hamiltonova principa (12) gdje $T^* + W_e{}^*$ predstavlja Langrangian, možemo ga zapisat u općenitom obliku kao:

$$L = T^* + W_e{}^* = \frac{1}{2}\dot{q}^T M\dot{q} - \frac{1}{2}q^T Kq + q^T F. \tag{27}$$

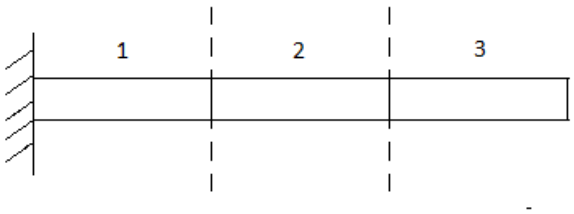
Derivacijom standardne Lagrangeove jednadžbe gibanja dobivamo klasičnu diferencijalnu jednadžbu drugog reda:

$$M\ddot{q} + Kq = F, \tag{28}$$

gdje je M matrica inercije, K matrica krutosti i F vektor vanjskh sila. Sile se radi vlastitog prigušenja sustava povezuju sa brzinama u čvorovima $\dot{q}$ pa jednadžba gibanja izgleda:

$$M\ddot{q} + C\dot{q} + Kq = F, \tag{29}$$

gdje je$C$ matrica prigušenja koja se vrlo često aproksimira kombinacijom poznatih matrica $C = \alpha M + \beta K$ gdje su α i β proizvoljno odabrani skalari.

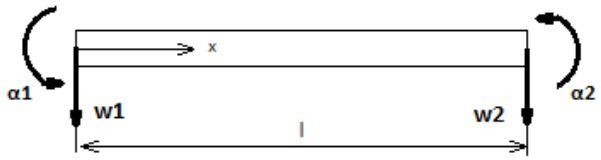


Slika 8: Greda sa 3 konačnih elemenata

Da bismo primjenom gornjih jednadžbi dobili konačno dimenzionalan dinamički model grede s piezoparovima, potrebno je prethodno gredu diskretizirati. Diskre-

tizacija je provedena koristeći metodu konačnih elemenata. Kao pokazni primjer uzeta je greda s 3 konačna elementa jednake duljine l, uklještena s lijeve strane, kako je to prikazano na Slici 8.

3.1 Model grede



Slika 9: Gredni element

Gredni element (Slika 9) karakteriziraju dva stupnja slobode u svakom čvoru, pomak i kut zakreta, pa imamo [4]:

$$q^T = [w_1 \quad \alpha_1 \quad w_2 \quad \alpha_2], \tag{30}$$

gdje su w_1 i α_1 pomak i kut zakreta u prvom čvoru, a w_2 i α_2 pomak i kut zakreta u drugom čvoru grednog elementa. Raspodijela poprečnog pomaka duž osi x opisana je jednodimenzijskim polinomom trećeg stupnja s nepoznatim koeficijentima:

$$w(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3 \tag{31}$$

a kut zakreta određen je izrazom $\alpha = -\frac{dw}{dx}$. Potrebno je zadovoljiti sljedeće uvjete u čvorovima na lijevom i desnom kraju elementa:

$$\begin{aligned} x = 0, w = w_1, \alpha = -\frac{dw}{dx} = \alpha_{1w}, \\ x = l, w = w_2, \alpha = -\frac{dw}{dx} = \alpha_{2w}. \end{aligned} \tag{32}$$

Zapis raspodijele poprečnog pomaka za točke unutar grednog elementa može se zapisati i kao:

$$w(x) = [N_1(x) \quad N_2(x) \quad N_3(x) \quad N_4(x)] \begin{bmatrix} w_1 \\ \alpha_1 \\ w_2 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = N(x)q \tag{33}$$

gdje je $N(x)$ matrica funkcija oblika sastavljena od interpolacijskih polinoma:

$$\begin{aligned} N_1 &= 1 - \frac{3x^2}{l^2} + \frac{2x^3}{l^3}, \\ N_2 &= -x + \frac{2x^2}{l} - \frac{x^3}{l^2}, \\ N_3 &= \frac{3x^2}{l^2} - \frac{2x^3}{l^3}, \\ N_4 &= \frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2}. \end{aligned} \tag{34}$$

Korištenjem navedenih funkcija oblika (34) dobiva se matrica inercije M i krutosti K:

$$[M]^e = \rho A \int_0^l [N]^T [N] dx \tag{35}$$

$$[M]^e = \frac{\rho A l}{420} \begin{bmatrix} 156 & -22l & 54 & 13l \\ -22l & 4l^2 & -13l & -3l^2 \\ 54 & -13l & 156 & 22l \\ 13l & -3l^2 & 22l & 4l^2 \end{bmatrix}, \tag{36}$$

$$[K]^e = \int_0^l [B]^T EI [B] dx. \tag{37}$$

gdje je e označava da se radi o grednom elementu. B je vektor redak druge derivacije funkcije oblika pomnožen s -1 ($[-\frac{d^2}{dx^2}]N(x)$). Iz (37) dobivamo

$$[K]^e = \frac{EI}{l^3}\begin{bmatrix} 12 & -6l & -12 & -6l \\ -6l & 4l^2 & 6l & 2l^2 \\ -12 & 6l & 12 & 6l \\ -6l & 2l^2 & 6l & 4l^2 \end{bmatrix}. \tag{38}$$

Da bi iz lokalnih matrica $[M]^e$ i $[K]^e$ za jedan element dobili globalne matrice koji vrijede za cijelu gredu, formira se tablica koja prikazuje koji lokalni stupnjevi slobode odgovaraju globalnim stupnjevima slobode (Tablica 1). Na temelju ovakve tablice se određuju matrice za pojedini element reda jednakog broju globalnih stupnjeva slobode gibanja. Sumiranjem tih matrica za svaki element dobivaju se globalne matrice inercije i krutosti, koje su prikazane dolje u tekstu u jednadžbama (39) i (40).

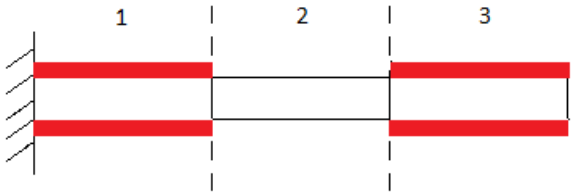
Tablica 1: Odnos između lokalnih i globalnih stupnjeva slobode

Globalni stupnjevi slobode		1	2	3	4	5	6	7	8
Stupnjevi slobode elementa	1	1	2	3	4				
	2			1	2	3	4		
	3					1	2	3	4

$$[M] = \frac{\rho Al}{420}\begin{bmatrix} 156 & -22l & 54 & 13l & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -22l & 4l^2 & -13l & -3l^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 54 & -13l & 312 & 0 & 54 & 13l & 0 & 0 \\ 13l & -3l^2 & 0 & 8l^2 & -13l & -3l^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 54 & -13l & 312 & 0 & 54 & 13l \\ 0 & 0 & 13l & -3l^2 & 0 & 8l^2 & -13l & -3l^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 54 & -13l & 156 & 22l \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 13l & -3l^2 & 22l & 4l^2 \end{bmatrix} \tag{39}$$

$$[K] = \frac{EI}{l^3}\begin{bmatrix} 12 & -6l & -12 & -6l & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6l & 4l^2 & 6l & 2l^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & 6l & 24 & 0 & -12 & -6l & 0 & 0 \\ -6l & 2l^2 & 0 & 8l^2 & 6l & 2l^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -12 & 6l & 24 & 0 & -12 & -6l \\ 0 & 0 & -6l & 2l^2 & 8l^2 & 6l & 2l^2 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -12 & 6l & 12 & 6l \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6l & 2l^2 & 6l & 4l^2 \end{bmatrix} \tag{40}$$

3.2 Model grede s piezoparovima



Slika 10: Greda sa 2 piezopara

Kod aktivnog prigušenja, stabilnost osigurava kolociranost piezoelemenata [1]. Kolocirani upravljački sustav je sustav kod kojeg su aktuator i senzor vezani za isti stupanj slobode gibanja i karakterizira ih već spomenuta dualnost. U obrađenom primjeru, na gredu su postavljena 2 piezopara (aktuator i senzor), na prvom i trećem konačnom elementu (Slika 10).

Dodavanjem piezopara matrica inercije za taj konačni element mora uključivati gustoću piezomaterijala ρ_p i poprečni presjek piezoelementa A_p:

$$[M_{piezo}]^e = \frac{(\rho A + 2\rho_p A_p)l}{420}\begin{bmatrix} 156 & -22l & 54 & 13l \\ -22l & 4l^2 & -13l & -3l^2 \\ 54 & -13l & 156 & 22l \\ 13l & -3l^2 & 22l & 4l^2 \end{bmatrix} \tag{41}$$

Analogno vrijedi i za matricu krutosti koja se onda proširuje modulom elastičnosti

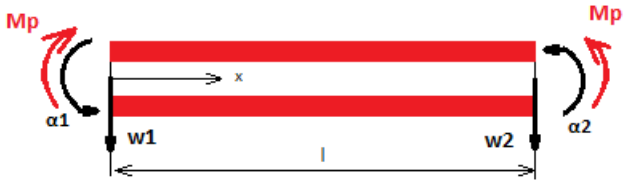
piezomaterijala E_p i momentom inercije piezoelementa I_p:

$$[K_{piezo}]^e = \frac{EI + 2E_pI_p}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & -6l & -12 & -6l \\ -6l & 4l^2 & 6l & 2l^2 \\ -12 & 6l & 12 & 6l \\ -6l & 2l^2 & 6l & 4l^2 \end{bmatrix} \tag{42}$$

U konačnici, globalne matrice inercije i krutosti za ovaj primjer izgledaju :

$$[M] = \begin{bmatrix} \frac{13\rho A}{35}l & -\frac{11\rho A}{210}l^2 & \frac{9\rho A}{70}l & \frac{13\rho A}{420}l^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{11\rho A}{210}l^2 & \frac{\rho A}{105}l^3 & -\frac{13\rho A}{420}l^2 & -\frac{\rho A}{140}l^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{9\rho A}{70}l & -\frac{13\rho A}{420}l^2 & \frac{13(2\rho A+2\rho_p A_p)}{35}l & -\frac{11\rho_p A_p}{105}l^2 & \frac{9(\rho A+2\rho_p A_p)}{70}l & \frac{13(\rho A+2\rho_p A_p)}{420}l^2 & 0 & 0 \\ \frac{13\rho A}{420}l^2 & -\frac{\rho A}{140}l^3 & -\frac{11\rho_p A_p}{105}l^2 & \frac{(2\rho A+2\rho_p A_p}{105}l^3 & -\frac{13(\rho A+2\rho_p A_p)}{420}l^2 & -\frac{(\rho A+2\rho_p A_p)}{140}l^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{9(\rho A+2\rho_p A_p)}{70}l & -\frac{13(\rho A+2\rho_p A_p)}{420}l^2 & \frac{13(2\rho A+2\rho_p A_p}{35}l & \frac{11\rho_p A_p}{105}l^2 & \frac{9\rho A}{70}l & \frac{13\rho A}{420}l^2 \\ 0 & 0 & \frac{13(\rho A+2\rho_p A_p)}{420}l^2 & -\frac{(\rho A+2\rho_p A_p)}{140}l^3 & \frac{11\rho_p A_p}{105}l^2 & \frac{(2\rho A+2\rho_p A_p}{105}l^3 & -\frac{13\rho A}{420}l^2 & -\frac{\rho A}{140}l^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{9\rho A}{70}l & -\frac{13\rho A}{420}l^2 & \frac{13\rho A}{35}l & \frac{11\rho A}{210}l^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{13\rho A}{420}l^2 & -\frac{\rho A}{140}l^3 & \frac{11\rho A}{210}l^2 & \frac{\rho A}{105}l^3 \end{bmatrix} \tag{43}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & \frac{12(2EI+2E_pI_p}{l^3} & -\frac{12E_pI_p}{l^2} & -\frac{12(EI+2E_pI_p)}{l^3} & -\frac{6(EI+2E_pI_p)}{l^2} & 0 & 0 \\ -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & -\frac{12E_pI_p}{l^2} & \frac{4(2EI+2E_pI_p}{l} & \frac{6(EI+2E_pI_p)}{l^2} & \frac{2(EI+2E_pI_p)}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{12(EI+2E_pI_p)}{l^3} & \frac{6(EI+2E_pI_p)}{l^2} & \frac{12(2EI+2E_pI_p}{l^3} & \frac{12E_pI_p}{l^2} & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & 0 & -\frac{6(EI+2E_pI_p)}{l^2} & \frac{2(EI+2E_pI_p)}{l} & \frac{12E_pI_p}{l^2} & \frac{4(2EI+2E_pI_p}{l} & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \tag{44}$$



Slika 11: Piezopar na gredi

Utjecaj svakog peizoaktuatora ekvivalentan je momentima savijanja na krajevima piezoelementa (24). U matematičkom modelu to se zapisuje s desne strane jednadžbe, u vektoru koncentriranih sila F koji sadrži sile i momente savijanja u čvorovima pridružene stupnjevima slobode elementa. Sile u čvorovima predstavljaju poremećaje koji djeluju izvana a momenti su upravljački momenti iz piezoaktuatora pa imamo

$$[F]^e = \begin{bmatrix} F_1 \\ M_1 \\ F_2 \\ M_2 \end{bmatrix} \tag{45}$$

gdje su F_1 i M_1 sila i moment u prvom čvoru, a F_2 i M_2 sila i moment u drugom čvoru grednog elementa. (Ako na gredu djeluje dodatno kontinuirano opterećenja $p(x)$, njegov utjecaj $f = \int_0^l [N]^T p(x) dx$ se zbraja sa vektorom koncentriranih sila.)

S obzirom da su piezoelementi postavljeni na prvom i trećem konačnom elementu, vektor sila je:

$$[F] = \begin{bmatrix} F_1 \\ -M_p \\ F_2 \\ M_p \\ F_3 \\ -M_p \\ F_4 \\ M_P \end{bmatrix} \tag{46}$$

Na kraju je potrebno reducitati model kraćenjem redova i stupaca ovisno o rubnim uvjetima grede. S obzirom da je naša greda s desne strane uklještena, krate se redovi i stupci koji odgovaraju varijablama stanja vezanima za prvi čvor grede.

Diferencijalnu jednadžbu drugog reda (29) možemo zapisati kao skup diferencijalnih jednadžbi prvog reda:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned} \tag{47}$$

gdje je $x = [q \quad \dot{q}]^T$ i $u = [d \quad v]^T$, gdje d označava poremećajne sile u čvorovima konačnih elemenata a v napon sa aktuatora. Matrice A i B su:

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & I \\ -K & -C \end{bmatrix}, \\ B &= \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{48}$$

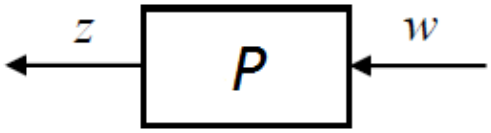
Matrica B u prvom stupcu sadrži jedinice na mjestima koja odgovaraju djelovanju poremećaja u pojedinom čvoru. U drugom stupcu, na mjestima koja odgovaraju položaju piezo aktuatora, nalaze se koeficijenti koji pomnoženi s naponom v daju moment aktuatora M_p (24). Matrica C tvori se slično kao i matrica B. S obzirom da su izlazne varijable progibi i napon na senzoru, matrica C sadrži jedinice na mjestima koja odgovaraju progibima u čvorovima u vektoru varijabli stanja te koeficijente koje s pomnoženim odgovarajućim varijablama stanja ovisno o položaju piezo senzora odgovaraju naponu na senzoru (23). O ovim matricama detaljnije će se raspravljati u nastavku. Matrica D je matrica nula jer ne postoji direktna veza ulaza s izlazom.

4 H_∞ OPTIMALNO UPRAVLJANJE

S obzirom na osjetljivost sustava na vanjske poremećaje, šumove u mjerenju te pojednostavljenja prilikom matematičkog modeliranja, robusnost je od iznimne važnosti prilikom dizajniranja upravljačkog sustava. 1980-ih Zames i Francis formulirali su osnovne probleme i postavke H_∞ teorije upravljanja, koja bi ostvarila robusnost u upravljanju multivarijabilnih sustava. Cijela ideja temelji se na minimizaciji istoimene H_∞ norme. U nastavku će biti pojašnjena sama norma a potom i njena upotreba prilikom upravljanja zadanim sustavom.

4.1 H_∞ norma

H_∞ označava takozvani Hardyev prostor odnosno prostor funkcija čiji su polovi na lijevoj strani realne osi dok su na desnoj strani ($Re > 0$) one analitičke [5]. Norma sustava odnosi se na njegovu prijenosnu funkciju odnosno matricu prijenosnih funkcija $P(s)$ kod multivarijabilnih sustava.



Slika 12: Dinamički sustav

Na Slici 12 prikazan je dinamički sustav opisan prijenosnom funkcijom P, s ulazom u sustav w i izlazom z. L_2 norma ulaznog signala w definirana je energijom signala [6]:

$$\|w\|_2 = \sqrt{\int_0^\infty \|w(t)\|^2 dt}. \tag{49}$$

Najveće energijsko pojačanje definira H_∞ normu:

$$\|P\|_\infty = \sup_{0<\|w(t)\|_2<\infty} \frac{\|z\|_2}{\|w(t)\|_2} = \sup_{0<\|w(t)\|_2<\infty} \frac{\|Pw\|_2}{\|w(t)\|_2} = \gamma \tag{50}$$

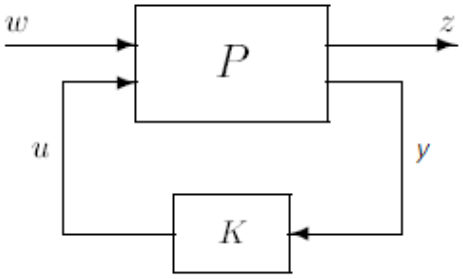
gdje $\sup_{\omega\in\mathbb{R}}$ označava supremum.
Norma se u frekvencijskoj domeni definira kao:

$$\|P\|_\infty = \sup_{\omega\in\mathbb{R}} \sigma_{max}(P(i\omega)) = \sup_{\omega\in\mathbb{R}} \|P(i\omega)\|. \tag{51}$$

Ono po čemu je ova norma bitna je to što pokazuje najgore pojačanje sustava. Upravo ovo, koristi se kod rješavanja matematičkog optimizacijskog problema i pronalaska regulatora.

4.2 Formulacija problema optimalnog upravljanja

Za početak će biti prikazana formulacija općenitog problema koji služi kao osnova za kompliciranije sustave. Blok dijagram generalne konfiguracije prikazan je na Slici
.



Slika 13: Blok dijagram općenitog sustava [7]

gdje P predstavlja model generaliziranog sustava kojim se upravlja, K je regulator, a signali su: kontrolne varijable u, mjerenja y, ulazne varijable poput poremećaja ili referenci w i takozvani signal pogreške ili izlazne varijable z.

Zapis može biti i u matričnom obliku:

$$\begin{bmatrix} z \end{bmatrix} = P(s) \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11}(s) & P_{12}(s) \\ P_{21}(s) & P_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} \tag{52}$$

gdje se generaliziran plant P može zapisati u prostoru stanja kao:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_1 w + B_2 u \\ z &= C_1 x + D_{11} w + D_{12} u \\ y &= C_2 x + D_{21} w + D_{22} u \end{aligned} \tag{53}$$

$$P = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \tag{54}$$

Prijenosna funkcija od w do z je dana kao:

$$z = F(P, K)w, \tag{55}$$

gdje je

$$F(P, K) = P_{11} + P_{12}K(I - P_{22}K)^{-1}P_{21} \tag{56}$$

H_∞ teorija upravljanja uključuje minimizaciju H_∞ norme prijenosne funkcije $F(P, K)$. U praksi, obično nije potrebno pronaći optimalni kontroler za H_∞ problem nego je jednostavnije dizajnirati sub-optimalni K (koji približno jednako kao i optimalni zadovoljava normu). Ako je γ_{min} minimalna vrijednost $\|F(P, K)\|_\infty$ za sve stabilizirajuće kontrolere, onda za sub-optimalni problem vrijedi da je $\gamma > \gamma_{min}$.

4.3 Formulacija problema optimalnog upravljanja za zadanu gredu

U Poglavlju 3 prikazan je model uklještene grede podijeljene na tri konačna elementa sa dva piezopara na prvom i trećem elementu. Sada će se na taj model primjeniti formulacija prikazana u Poglavlju 4.2. Blok dijagram opisane konfiguracije prikazan je na slici 13. Model grede predstavlja blok P koji sadrži zapis u prostoru stanja. Vektor ulaznih varijabli sadrži samo poremećaje d u čvorovima

grede, izlazne varijable z predstavljaju progibe u svakom čvoru, a u i y predstavljaju napone piezoaktuatora kao kontrolne varijable odnosno napone piezosenzora kao mjerenja.

Jednadžbu (47) možemo zapisati u obliku (53). Model je dakle u prostoru stanja opisan jednadžbama:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_1 d + B_2 u \\ z &= C_1 x + D_{11} d + D_{12} u \\ y &= C_2 x + D_{21} d + D_{22} u \end{aligned} \tag{57}$$

x označava vektor stanja koji sadrži progibe i zakrete u svakom čvoru, te njihove derivacije. Matrica A izražena je jednadžbom (48). Matrica prigušenja C predstavlja kombinaciju matrica inercije i krutosti. Prema [8] koeficijenti α i β traže se pomoću prirodnih frekvencija sustava ω_i preko jednadžbe:

$$\varepsilon_i = \frac{1}{2\omega_i}\alpha + \frac{\omega_i}{2}\beta. \tag{58}$$

gdje je ε_i kritički omjer prigušenja i uzima se oko 2-5%. Prirodne frekvencije grede su prema [8] jednake:

$$\omega_i = (\beta_i l)^2 \sqrt{\frac{EI}{_4}}. \tag{59}$$

Za svaku gredu postoji beskonačno modova vibriranja i svaki mod ima svoju prirodnu frekvenciju. Nepoznanica β određuje se iz rubnih uvjeta i za odabrani rubni uvjet za svaku vlastitu frekvenciju postoji proračunati $\beta_i l$ koji se mogu pronaći u [8].

Matrica B prema zapisu iz jednadžbe (53) se dijeli u dvije matrice: B_1 i B_2. Matrica B_1 vezana je da poremećaje d, dok B_2 modelira djelovanje kontrolnih varijabli u. Uzeto je da poremećaji djeluju u svakom čvoru $d = [d_1 \quad d_2 \quad d_3 \quad d_4]^T$. Uzimajući to u obzir, formira se matrica $B_1 = \begin{bmatrix} 0_{8\times 4} \\ b_1 \end{bmatrix}$ sa jedinicama na mjestima

koja odgovaraju silama u ta tri čvora, kako slijedi

$$b_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{60}$$

Na analogan način formira se i matrica $B_2 = \begin{bmatrix} 0_{8\times 4} \\ b_2 \end{bmatrix}$ povezana sa kontrolnim varijablama napona, s jedinicama na mjestima koja odgovaraju momentima $M_p = -e_{31} b_p z_m V^a = g_a V^a$ u čvorovima gdje se nalaze piezoaktuatori. Na gredi su postavljena 2 piezopara dakle $u = [u_1 \quad u_2]^T = [V_1^a \quad V_2^a]^T$, i imamo

$$b_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -g_a & 0 \\ 0 & 0 \\ g_a & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -g_a \\ 0 & 0 \\ 0 & g_a \end{bmatrix} \tag{61}$$

z sadrži progibe u svakom čvoru o, a cilj je minimizirati H_∞ normu prijenosne funkcije od d do z u zatvorenom krugu. Prema tome se formira matrica $C_1 = [c_1 \quad 0_{4\times 8}]$ gdje je:

$$c_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{62}$$

y označava mjerenja koja sa sezora ulaze u kontroler. Radi se o naponu na senzoru $V_s(t) = G_c i(t) = -G_c z_m e_{31} b_p[\ddot{w}(l) - \ddot{w}(0)] = g_s[\dot{\alpha}(l) - \dot{\alpha}(0)]$. S obzirom da se na gredi nalazi piezo senzor na prvom i trećem elementu, matrica $C_2 = [0_{2\times 8} \quad c_2]$ gdje je

$$c_2 = \begin{bmatrix} 0 & -g_s & 0 & g_s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -g_s & 0 & g_s \end{bmatrix} \tag{63}$$

Matrice D_{11}, D_{12}, D_{21} i D_{22} su nul matrice odgovarajućih dimenzija.
Kako je napomenuto i u Poglavlju 3.3, prije sinteze potrebno je prikazane matrice reducirati s obzirom na rubne uvjete. Uklještenje s desne strane, tj. u prvom čvoru, znači da se u prikazanim matricama brišu redovi i stupci koji odgovaraju progibima i kutevima zakreta, njihovim derivacijama te poremećajne sile i momenti iz piezo para.

H_∞ sintezom pronalazi se kontroler K koji je u prostoru stanja opisan jednadžbama:

$$\begin{aligned} \dot{x_k} &= A_k x_k + B_k y \\ u &= C_k x_k + D_k y \end{aligned} \tag{64}$$

Ako zatvorimo krug s modelom grede (58), jednadžbe zatvorenog kruga (eng. closed loop) u prostoru stanja su:

$$\begin{aligned} \dot{x_{cl}} &= A_{cl} x_{cl} + B_{cl} d \\ u &= C_{cl} x_{cl} + D_{cl} d \end{aligned} \tag{65}$$

gdje je $x = [x \quad x_k]^T$ a matrice su:

$$A_{cl} = \begin{bmatrix} A + B_2 D_k (I - D_{22} D_k)^{-1} C_2 & B_2 (C_k + D_k (I - D_{22} D_k)^{-1} D_{22} C_k) \\ B_k (I - D_{22} D_k)^{-1} C_2 & A_k + B_k (I - D_{22} D_k)^{-1} D_{22} C_k \end{bmatrix} \tag{66}$$

$$B_{cl} = \begin{bmatrix} B_1 + B_2 D_k (I - D_{22} D_k)^{-1} D_{21} \\ B_k (I - D_{22} D_k)^{-1} D_{21} \end{bmatrix} \tag{67}$$

$$C_{cl} = \begin{bmatrix} C_1 + D_{12} D_k (I - D_{22} D_k)^{-1} C_2 & D_{12} (C_k + D_k (I - D_{22} D_k)^{-1} D_{22} C_k) \end{bmatrix} \tag{68}$$

$$D_{cl} = \begin{bmatrix} D_{11} + D_{12} D_k (I - D_{22} D_k)^{-1} D_{21} \end{bmatrix} \tag{69}$$

5 FILTERI ZA H_∞ OPTIMALNO UPRAVLJANJE

Uz zahtjeve na stabilnost, upravljački sustav tipično treba zadovoljavati uvjete postavljene na slijeđenje , prigušenje poremećaja i šuma senzora, minimizaciju osjetljivosti sustava odnosno robusnost modela. Potrebno je dizajnirati regulator koji bi zadovoljio opisane zahtjeve. H_∞ upravljanje omogućava dizajniranje računalnim putem koristeći težinske funkcije u frekvencijskom području za podešavanje performansi i robusnosti kontrolera.

Postavljanje filtera (eng. loop shaping) jedan je od ključnih koraka u H_∞ teoriji optimalnog upravljanja. Filteri, odnosno težinske funkcije, koriste se za normalizaciju ulaza i izlaza sustava te reflektiraju prostornu i frekvencijsku ovisnost poremećaja na ulazu na performanse izlaza odnosno pogreške [9].

U prijašnjem poglavlju opisan je generalizirani sustav osnovnog modela sa ulazima i izlazima. Problem H_∞ upravljanja je pronaći regulator koji će minimizirati H_∞ normu prijenosne funkcije od ulaza do izlaza na domeni svih mogućih kontolera K koji stabiliziraju zatvoreni krug modela. Navedeni zahtjevi su najčešće međusobno kontradiktorni pa se uvode filteri kojima se oblikuje frekvencijske karakteristike zatvorenog kruga.

Filteri koji se postavljaju na ulaz i izlaz su definiraju racionalnim i stabilnim prijenosnim funkcijama. Ulazni i izlazni signali na koje se postavljaju filteri odabrani su od strane dizajnera, a potom se odabiru prikladne funkcije. Odabrani filteri ukomponiraju se u generaliziran sustav i time imaju direktan utjecaj na odabir kontrolera K.

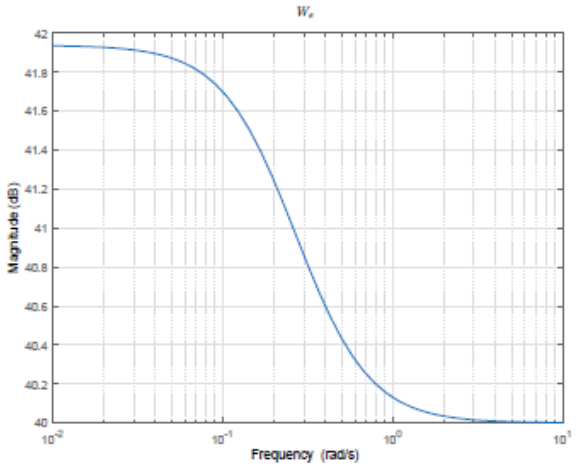
5.1 Odabir filtera

Prema [10] ulazi u model su obično su nisko frekvencijskog spektra, dok su pogreške modela koncentrirane u području visokih frekvencija. Prema tome se odabiru nisko ili visoko-propusni filteri.

Nisko propusni (eng. low pass) filter prvog reda definiran je prijenosnom funkcijom:

$$W_z = \frac{\frac{s}{M} + \omega_B}{s + \omega_B A} \tag{70}$$

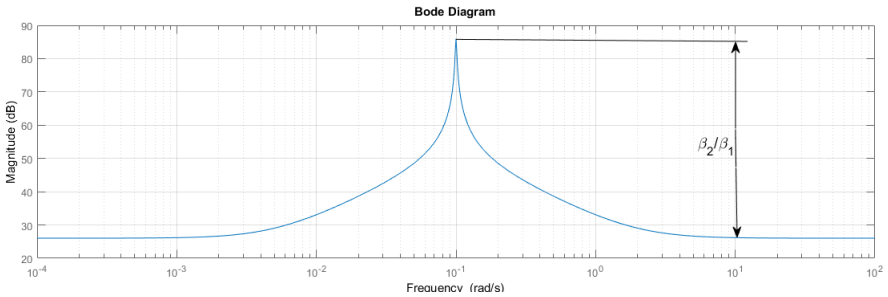
Ovakav filter se na izlaznom signalu greške s niskom frekvencijom amplitude $\frac{1}{A}$ postavljene otprilike jednako inverzu željene greške stacionarnog stanja, te pojačanjem visoke frekvencije $\frac{1}{M}$ postavljenim da ograniči prekoračenje. Granična frekvencija ω_B postavlja se tako da ograniči maksimalnu željenu vremensku konstantu zatvorenog kruga [11].



Slika 14: Frekvencijska karakteristika nisko propusnog filtera W_z

Posebnu vrstu filtera predstavlja tzv. notch filter koji djeluje da točno određenu frekvenciju. Koristi se kod eliminacije uzbuda poznate frekvencije a opisuje se prijenosnom funkcijom:

$$W_z = \frac{\frac{s^2}{{\omega_1}^2} + 2\beta_1\frac{s}{\omega_1} + 1}{\frac{s^2}{{\omega_2}^2} + 2\beta_2\frac{s}{\omega_2} + 1} \tag{71}$$

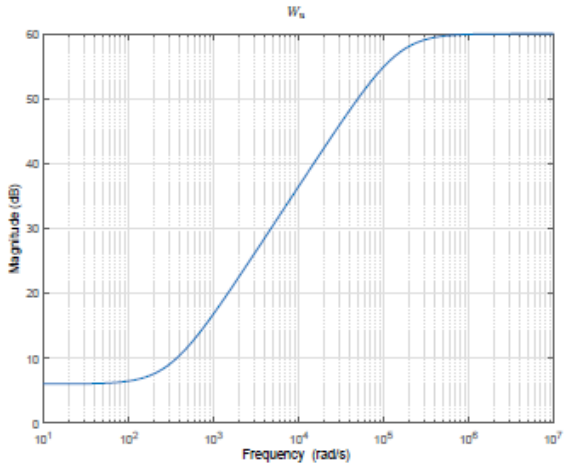


Slika 15: Frekvencijska karakteristika notch filtera W_z

Na ulaznim varijablama koristi se visoko propusni filter prijenosne funkcije:

$$W_u = \frac{s + \frac{\omega_B}{M}}{As + \omega_B} \tag{72}$$

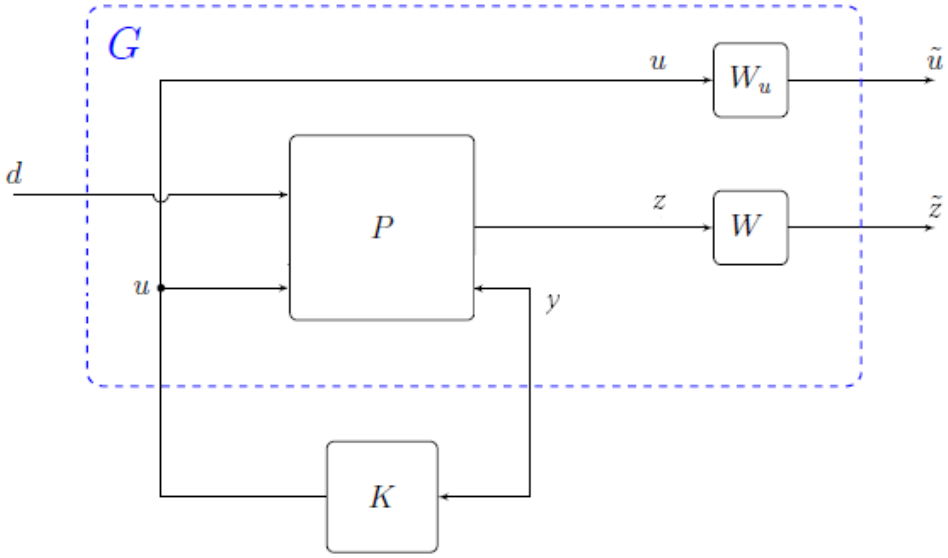
gdje M definira inverz nisko frekvencijskog a A inverz visoko frekvencijskog pojačanja. ω_B je granična frekvencija filtera [11].



Slika 16: Frekvencijska karakteristika visoko propusnog filtera W_u

5.2 Primjena filtera u modelu grede sa piezoparovima

U prethodnom poglavlju prikazan je i objašnjen generalni sustav bez filtera (Slika 13). Odlučeno je da će se oni postaviti na ulazne signale u koja predstavljaju napone aktuatora te izlazne signale pogreške z odnosno progibe u čvorovima. Time se želi ograničiti napon i progib na realne vrijednosti.



Slika 17: Generalni plant modela s filterima

Na slici je prikazan generalni sustav s filterima W_z na izlaznim signalima i W_u na ulaznim. Kako je spomenuto, W_z filter na izlazu izabran je visokopropusnim (72), dok je W_u izabran niskopropusni (73).

Svaki od filtera ima svoj zapis u prostoru stanja:

$$\begin{aligned} \dot{x}_z &= A_z x_z + B_z z \\ \tilde{z} &= C_z x_z + D_z z \end{aligned} \tag{73}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_u &= A_u x_u + B_u u \\ \tilde{u} &= C_u x_u + D_u u \end{aligned} \tag{74}$$

Kad novi generalni sustav s filterima zapišemo u prostoru stanja, dobijemo:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{filt} &= \tilde{A} x_{filt} + \tilde{B}_1 d + \tilde{B}_2 u \\ z_{filt} &= \tilde{C}_1 x_{filt} + \tilde{D_{11}} d + \tilde{D_{12}} u \\ y &= \tilde{C}_2 x_{filt} + \tilde{D_{21}} d + \tilde{D_{22}} u \end{aligned} \tag{75}$$

gdje je $x_{filt} = [x \quad x_z \quad x_u]^T$, $z_{filt} = [\tilde{z} \quad \tilde{u}]^T$ a modificirane matrice su:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ B_z C_1 & A_z & 0 \\ 0 & 0 & A_u \end{bmatrix} \tag{76}$$

$$\tilde{B}_1 = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_z D_{11} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{77}$$

$$\tilde{B}_2 = \begin{bmatrix} B_2 \\ B_z D_{12} \\ B_u \end{bmatrix} \tag{78}$$

$$\tilde{C}_1 = \begin{bmatrix} D_z C_1 & C_z & 0 \\ 0 & 0 & C_u \end{bmatrix} \tag{79}$$

$$\tilde{D}_{11} = \begin{bmatrix} D_z D_{11} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{80}$$

$$\tilde{D}_{12} = \begin{bmatrix} D_z D_{12} \\ D_u \end{bmatrix} \tag{81}$$

Matrice C_2,D_{21} i D_{22} prošire se nulama da se zadovolje dimenzije novih matrica.

Nakon sinteze s filterima, dobiveni kontroler potrebno je testirati na originalnom modelu bez filtera. U nastavku će biti prikazani rezultati simulacija dobiveni u MATLAB-u.

6 REZULTATI SIMULACIJA

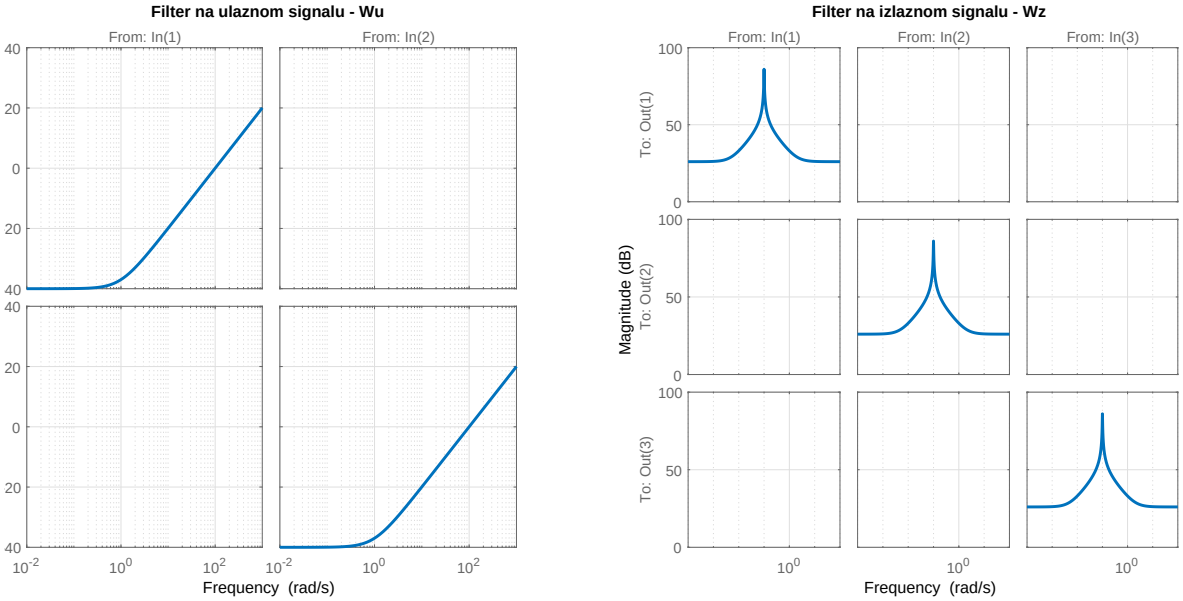
U Tablici 2. nalaze se numeričke vrijednosti svojstava grede i piezoelektričnog materijala.

Tablica 2: Svojstva grede i piezoelektričnog materijala

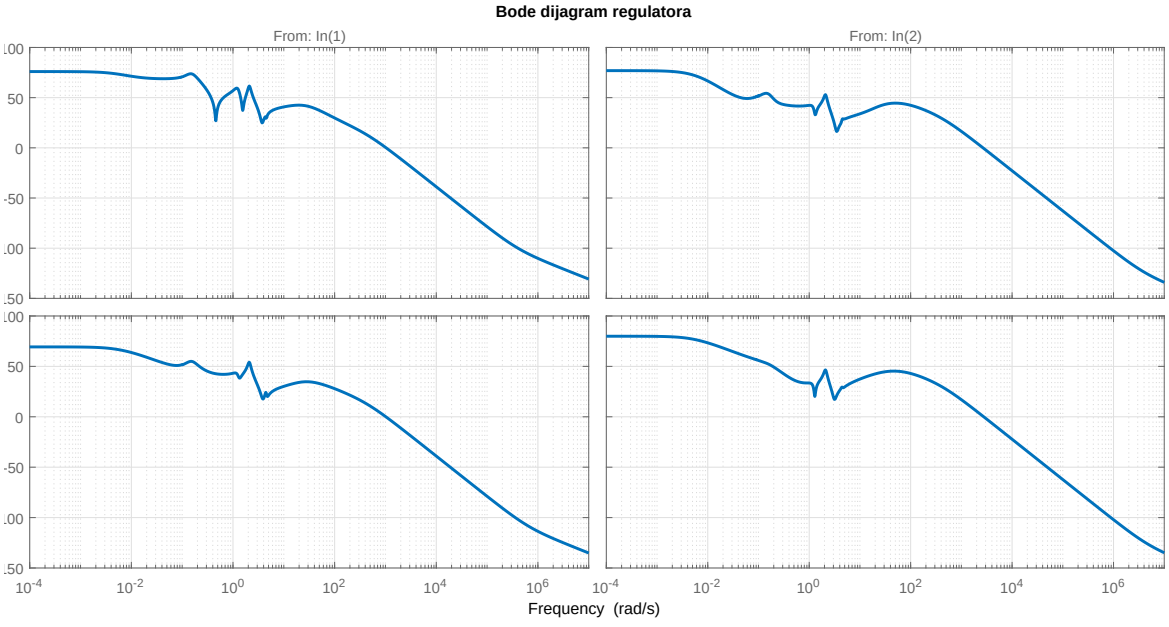
Greda	
Modul elastičnosti E	$193.06 \cdot 10^9 N/m^2$
Gustoća ρ	8030 kg/m^3
Širina b	0.15 m
Visina t	0.002 m
Duljina L	10 m
Piezoelektrični materijal	
Modul elastičnosti $E_p b$	$50 \cdot 10^9 N/m^2$
Gustoća ρ_p	7600 kg/m^3
Visina t_p	0.00035 m
Piezoelektrična konstanta e_{31}	-7.5 C^2/m
Konstanta senzora G_c	$1 \cdot 10^5$

Opisan model grede sadrži uklještenje s lijeve strane, što znači da su progib i kut zakreta u prvom čvoru jednaki nuli. Provedena je odgovarajuća redukcija za taj rubni uvjet opisana u Poglavlju 4.3. Model je uzbuđen sinusoidalnom uzbudom frekvencije 30 rad/s na zadnjem čvoru grede, dodani su notch filteri na izlazu i visokopropusni filter na ulazu kako bi se oblikovao odziv zatvorenog kruga (Slika 19).

Sintezom takvog modela dobiven je stabilizirajući regulator koji zadovoljava uvjete H_∞ teorije optimalnog upravljanja. Dinamika regulatora je opisana jednadžbom (65) a njegov frekvencijski odziv nalazi se na Slici 19. Ono što se sa slike može primjetiti je blago povećanje amplitude oko frekvencije na kojoj se nalazi vrh notch filtera. Na toj frekvenciji zadatak regulatora je da agresivnije djeluje na sustav.



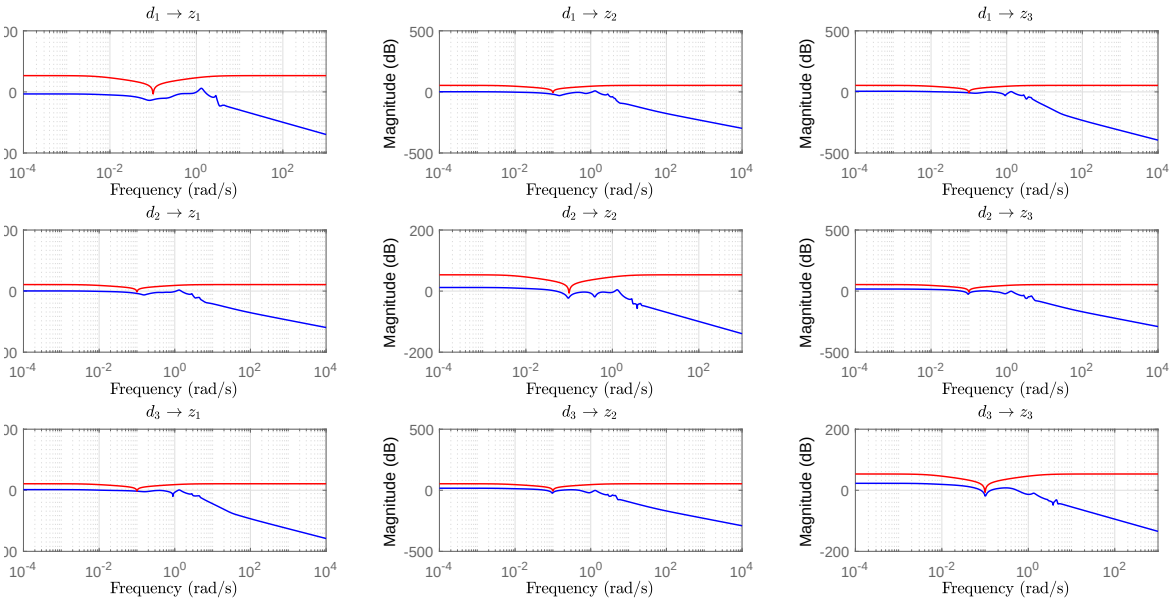
Slika 18: Odabrani filteri



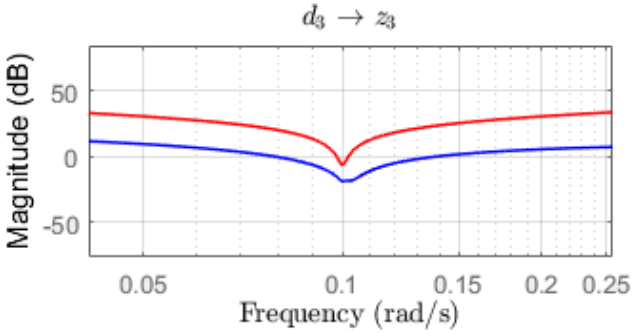
Slika 19: Frekvencijka karakteristika regulatora

Na grafu Slike 20 crvena linija predstavlja inverz filtera na izlazu dok plava predstavlja frekvencijsku karakteristiku prijenosne funkcije od pojedinog ulaza do pojedinog izlaza.

Ako pobliže razmotrimo detalj (Slika 21) vidimo kako odabirom filtera direktno utjećemo na odziv sustava kojim želimo upravljati.

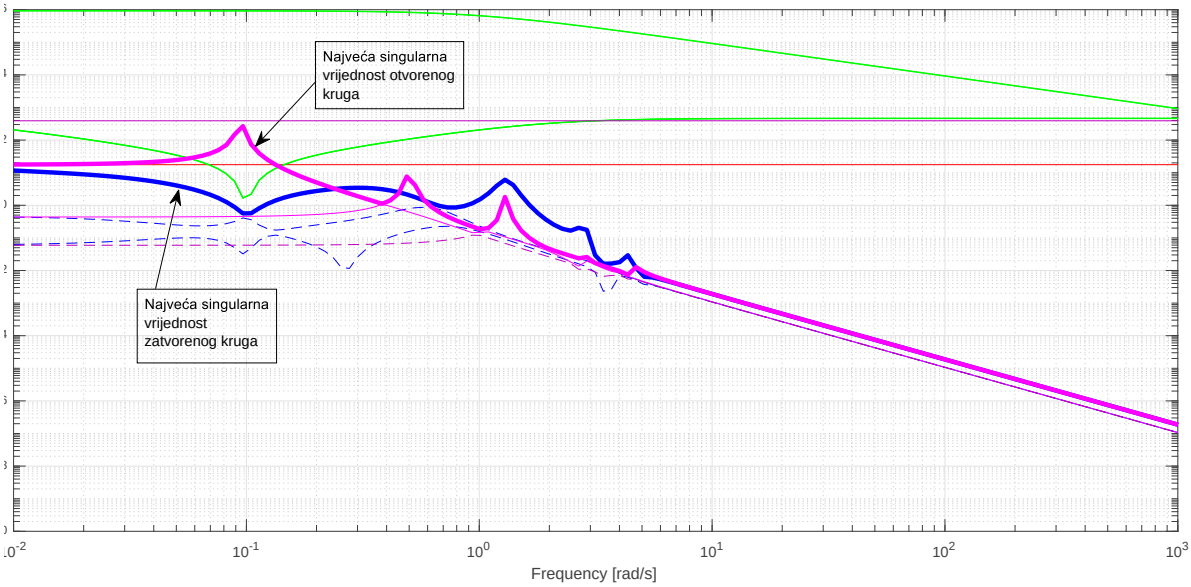


Slika 20: Prijenosne funkcije od ulaza do izlaza modela



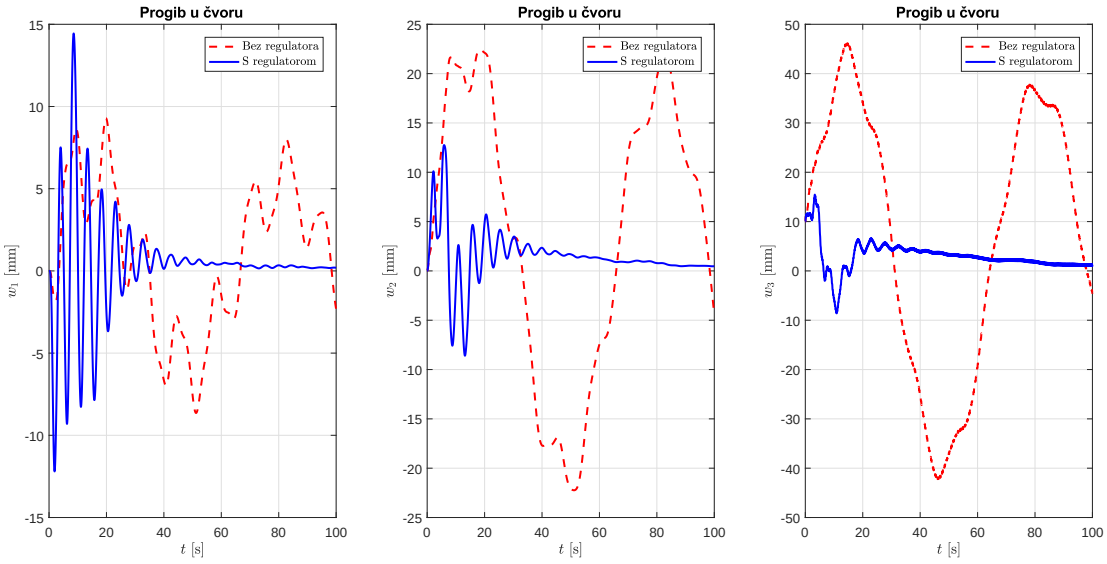
Slika 21: Detalj prijenosne funkcije od ulaza do izlaza

Na Slici 22 je prikazan konačni rezultat simulacije gdje se vidi pad norme upravljanog zatvorenog kruga u odnosu na onu otvorenog kruga bez regulatora. Inverz notch filtera svojim karakteristicnim izgledom "pritišće" singularnu vrijednost zatvorenog kruga što se i vidi upravo na njegovoj frekvenciji sa slike.

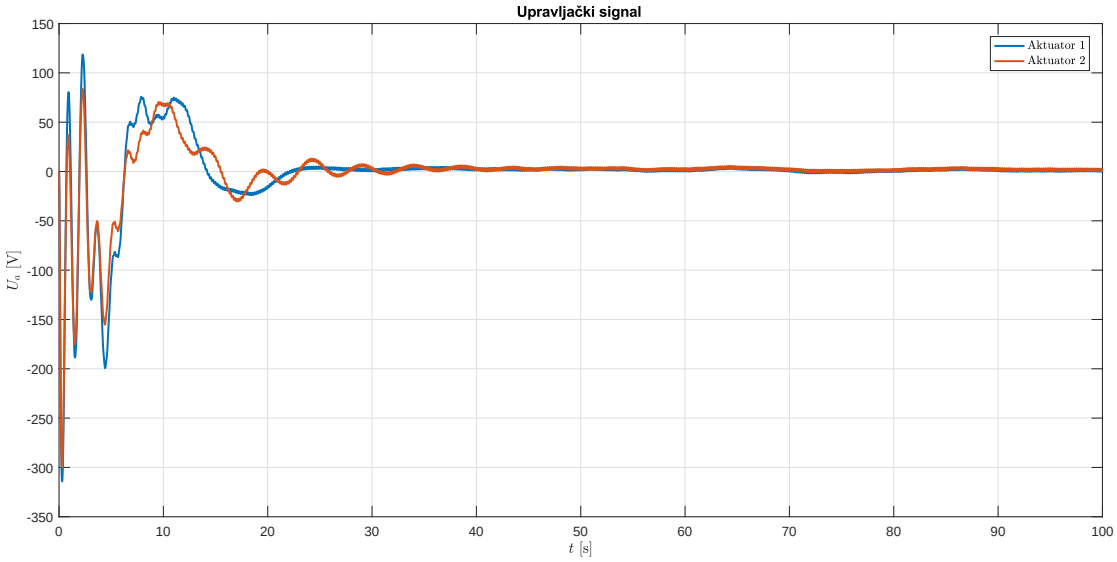


Slika 22: Singularne vrijednosti otvorenog i zatvorenog kruga

Na posljetku prikazani su odzivi otvorenog i zatvorenog kruga u vremenskoj domeni. Slika 23 prikazuje progibe u pojedinim čvorovima za oba slučaja pri sinusoidalnoj uzbudi. Slika 24 prikazuje napone na piezoaktuatorima korištenim za smirenje vibracija. Sa slika se vidi da aktuatori aktivno prigušuju vibriranje grede u prvih 50 sekundi nakon čega dolazi do smirivanja grede.



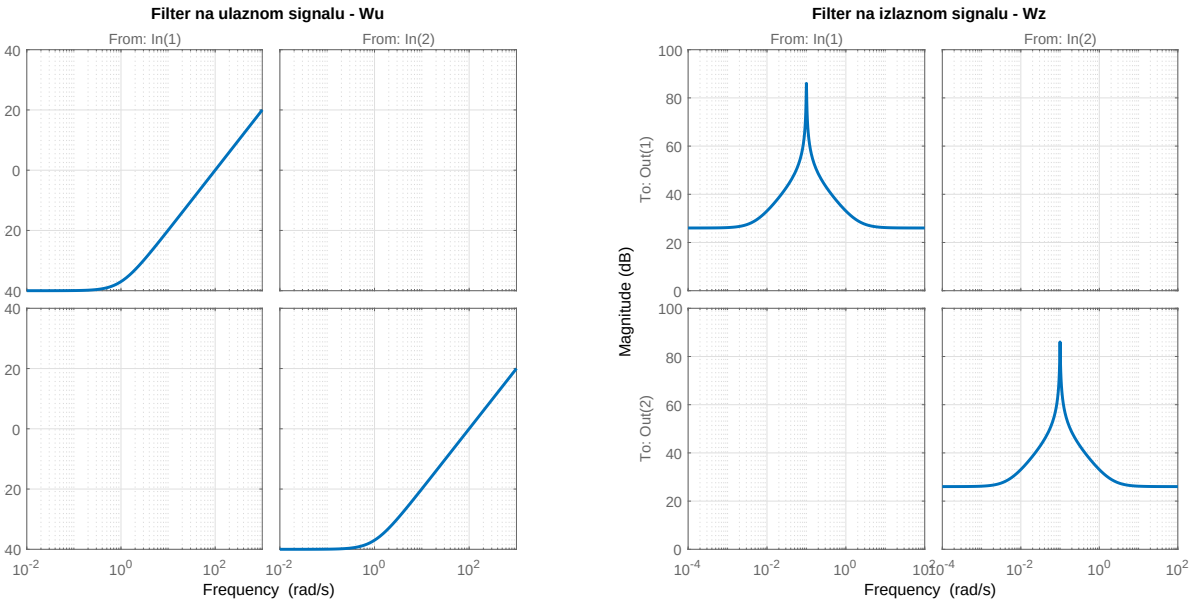
Slika 23: Progibi u čvorovima grede



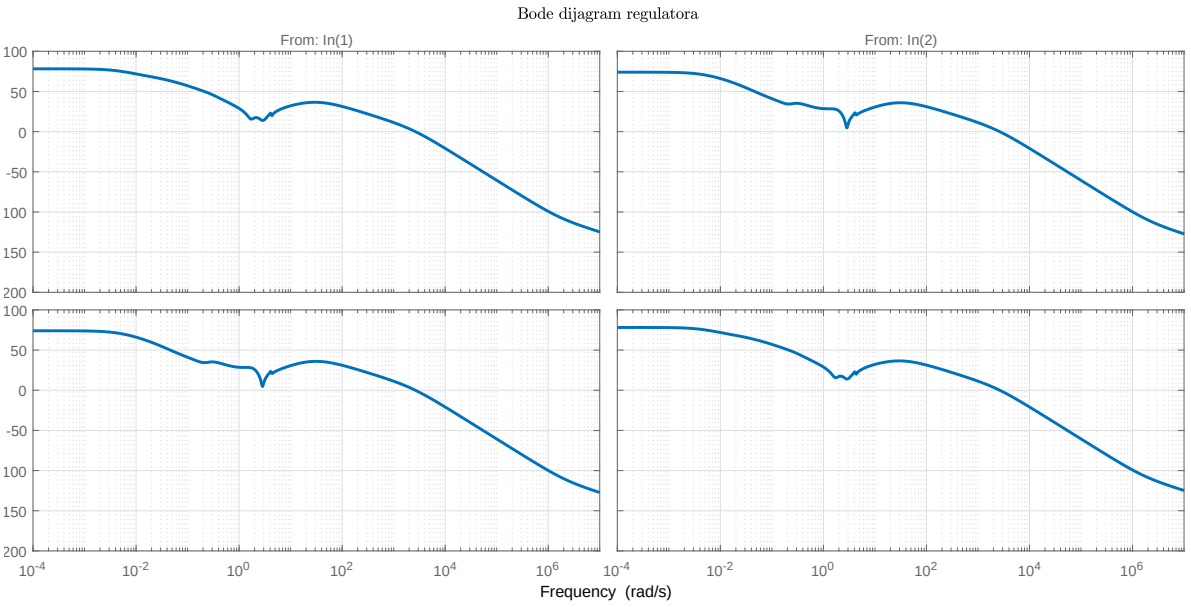
Slika 24: Naponi na piezoaktuatorima

Analogno objašnjenom modelu, napravljena je i simulacija za drugi rubni uvjet grede, s istim brojem konačnih elemenata. U tom slučaju, s desne strane grede se nalazi oslonac koji omogućava rotaciju a onemogućava pomak, a s lijeve strane je oslonac koji omogućava rotaciju i pomak duž osi grede. To znači da su progibi u prvom i zadnjem čvoru jednaki nuli. Prema tome se, iz matrica koje opisuju sustav u prostoru stanja, brišu redovi i stupci koji odgovaraju progibima i njihovim derivacijama u tim čvorovima te poremećajne sile i momenti od piezo pretvornika. Sinusoidalna uzbuda djeluje u predzadnjem čvoru grede. Dobiveni rezultati simulacije prikazani su u nastavku.

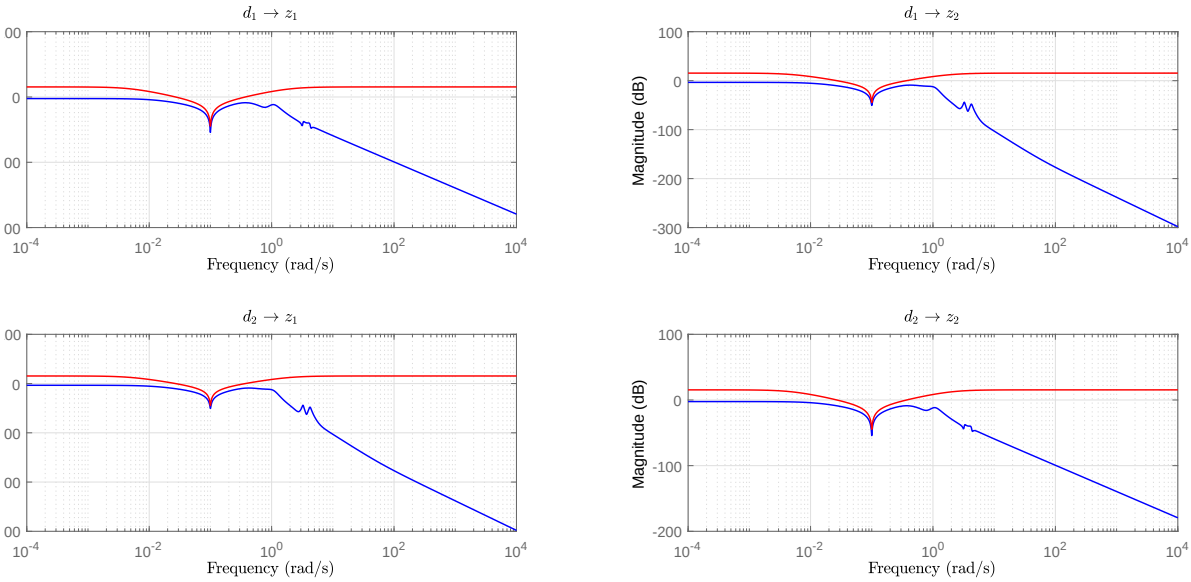
Sa Slike 25 vidimo da su odabrani isti parametri za filtere na ulaznim i izlaznim signalima. Frekvencijska karakteristika regulatora za drugi rubni uvjet blaža je od regulatora za prvi rubni uvjet (Slika 25). Na Slici 27 vidi se utjecaj notch filtera na prijenosnu funkciju od ulaza do izlaza. Regulator je, kao i za prvi rubni uvjet, smanjio normu upravljanog zatvorenog kruga (Slika 28). Sa odziva u vremenskoj domeni vidimo da se kod drugog rubnog uvjeta javljaju manji progibi u čvorovima, a da je početni napon veći te aktivno prigušenje traje kraće u odnosu na prvi rubni uvjet (Slika 29 i 30).



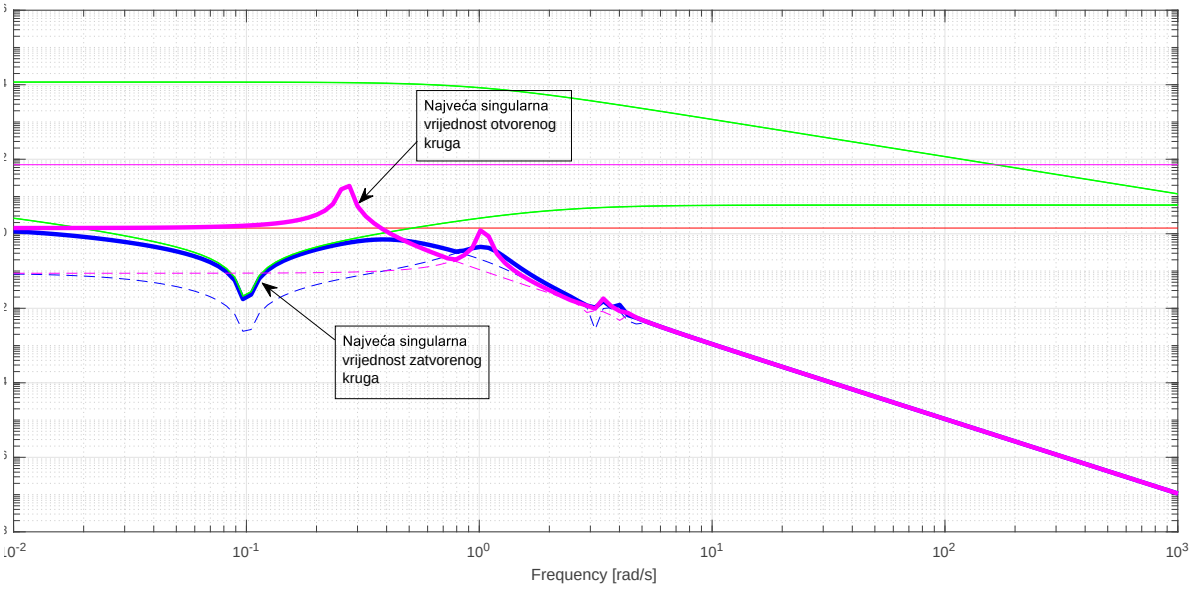
Slika 25: Odabrani filteri za drugi rubni uvjet



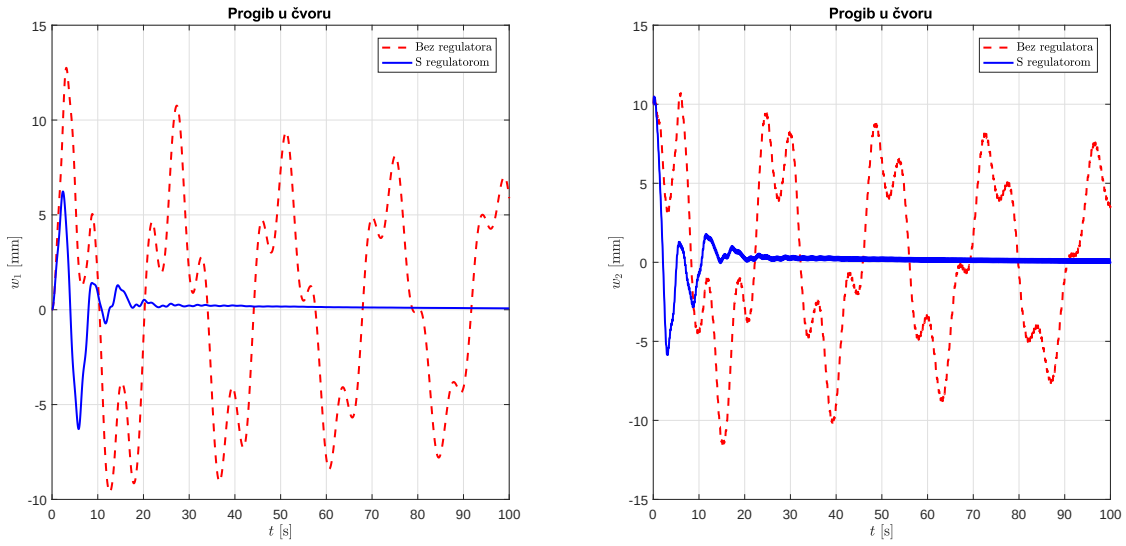
Slika 26: Frekvencijka karakteristika regulatora za drugi rubni uvjet



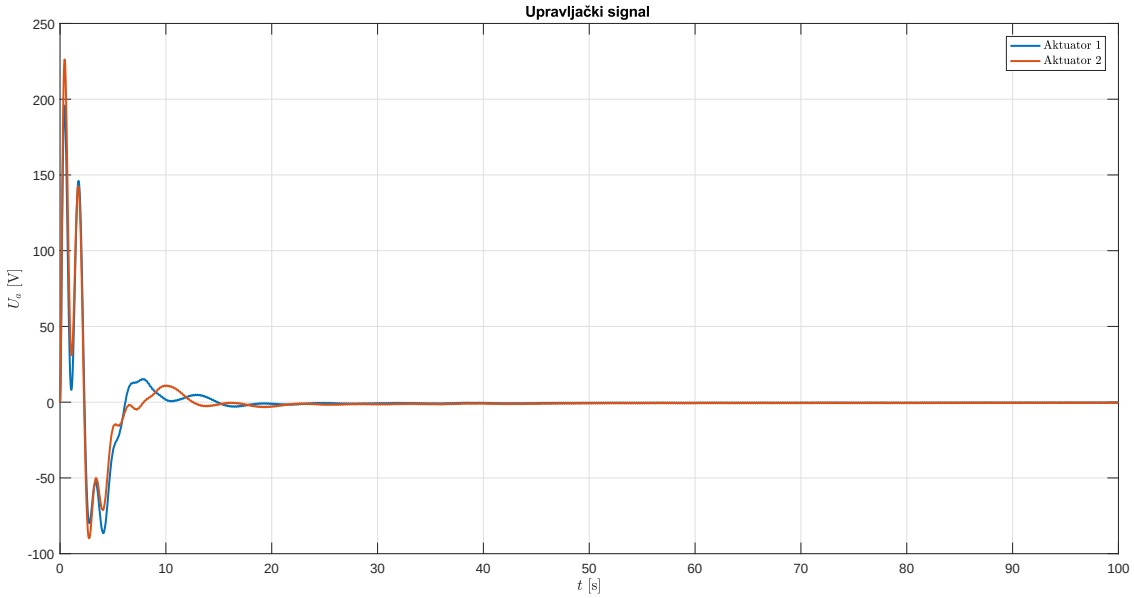
Slika 27: Prijenosne funkcije od ulaza do izlaza modela za drugi rubni uvjet



Slika 28: Singularne vrijednosti otvorenog i zatvorenog kruga za drugi rubni uvjet



Slika 29: Progibi u čvorovima grede za drugi rubni uvjet



Slika 30: Naponi na piezoaktuatorima za drugi rubni uvjet

7 ZAKLJUČAK

U ovom radu razrađen je matematički model grede na kojoj su pričvršćeni piezoelementi korišteni za prigušenje vibracija grede. Opisan je postupak sinteze i implemetacija H_∞ regulatora kojem je zadatak potisnuti utjecaj vanjskih poremećajnih sila na vibracije grede.

Pri matematičkoj formulaciji dinamičkog modela elastične grede korištena je diskretizacija metodom konačnih elemenata. Fizikalni zakoni opisani su jednadžbama piezo materijala. Sinteza optimalnog kontolera provedena je koristeći MATLAB-ov "Robust Control toolbox".

Glavni nedostatak u razradi problema predstavlja složeni matematički algoritam potreban za sintezu. To otežava simuliranje odziva kod većeg broja konačnih elemenata.

Ono što H_∞ teorija optimalnog upravljanja nudi jest mogućnost oblikovanja zahtjeva na sustav s obzirom na kontekst u kojem se nalazi. To znači da se za prikazani model, prikladnim izborom težinskih filtera, mogu dobiti različite performanse ovisno o željama dizajnera.

LITERATURA

[1] Preumont A. *Vibration Control of Active Structures: An Introduction*,3. izdanje. Springer, 2011.

[2] Halavanja A. *Završni rad*, Zagreb, FSB,2010.

[3] Bandyopadhyay B., Manjunath T.C., Umapathy M. *Modeling, Control and Implementation od Smart Structures: A FEM State Space Approach*, Springer, 2007.

[4] Sorić J. *Metoda konačnih elemenata*, Golden marketing – Tehnička knjiga, Zagreb, 2004.

[5] Kuster G.E. H_∞ *Norm Calculation via a State Space Formulation*, Sjedinjene Američke Države, 2012.

[6] Jokić A. *Robust Control*, predavanje 2, University of Technology Eindhoven

[7] Skogestad S., Postlethwaite I. *Multivariable Feedback Control; Analysis and design*, Sjedinjene Američke Države, Wiley, 2005.

[8] `https://wiki.csiamerica.com/display/kb/Damping+coefficients`, 28.5.2017.

[9] Singiresu S. Rao *Mechanical Vibrations*, poglavlje 8.5 Lateral Vibration of Beams, Prentice Hall, 2010.

[10] Bibel J.E., Malyevac D.S. *Guidlines for the selection of weighting functions for H-infinity control*, Sjedinjene Američke Države, Naval Surface Warfare Center, Dahlgren Division, 1992.

[11] Lobrović M. *Report*, FSB, Zagreb

PRILOG

I. IZVOD: Unutarnja energija piezoelektričnog pretvornika

II. IZVOD: Hamiltonov princip

III. Programski kod

IV. CD-R disc

I. IZVOD: Unutarnja energija piezoelektričnog pretvornika

$$P_{uk} = P_{el} + P_{meh} \tag{82}$$

$$\frac{dW}{dt} = Vi + f\dot{\Delta} \tag{83}$$

$$dW = Vidt + f\dot{\Delta}dt = VdQ + fd\Delta = dW_e \tag{84}$$

Integracijom izraza po Δ i Q dobivamo:

$$dW_e(Q, \Delta) = \frac{dW_e}{\delta Q}dQ + \frac{dW_e}{\delta \Delta}d\Delta \tag{85}$$

gdje je $\frac{dW_e}{\delta Q} = V$ i $\frac{dW_e}{\delta \Delta} = f$. Ako iz (3) izrazimo V i f

$$V = \frac{1}{C(1-k^2)}Q - \frac{nd_{33}K_a}{C(1-k^2)}\Delta \tag{86}$$

$$f = -\frac{K_a n d_{33}}{C(1-k^2)}Q + \frac{K_a}{1-k^2}\Delta \tag{87}$$

i uvrstimo u gornju jednadžbu, dobijemo:

$$dW_e(Q, \Delta) = \frac{QdQ}{C(1-k^2)} - \frac{nd_{33}K_a}{C(1-k^2)}(\Delta dQ + Qd\Delta) + \frac{K_a}{1-k^2}\Delta d\Delta \tag{88}$$

što predstavlja totalni diferencijal jednadžbe:

$$W_e(Q, \Delta) = \frac{Q^2}{2C(1-k^2)} - \frac{nd_{33}K_a}{C(1-k^2)}Q\Delta + \frac{K_a}{1-k^2}\frac{\Delta^2}{2} \tag{89}$$

Ako želimo unutarnju energiju zapisat kao funkciju Δ i V

$$dW_e(\Delta, V) = \frac{dW_e}{\delta\Delta}d\Delta + \frac{dW_e}{\delta V}dV \tag{90}$$

koristimo Legrendeovu transformaciju $W_e * (\Delta, V) = VQ - W_e(Q, V)$ da bi dobili:

$$dW_e * (\Delta, V)$$
$$= QdV + VdQ - \frac{dW_e}{\delta\Delta}d\Delta - \frac{dW_e}{\delta Q}dQ$$

$$= QdV + VdQ - fd\Delta - VdQ = QdV - fd\Delta \tag{91}$$

iz čega se zaključuje da je $Q = \frac{dW_e*}{\delta V}$ i $f - \frac{dW_e*}{\delta\Delta}$. Ako iz (4) izrazimo Q i f dobijemo:

$$dW_e * (\Delta, V) = C(1 - k^2)VdV + nd_{33}K_a(\Delta dV + Vd\Delta) - K_a\Delta d\Delta \tag{92}$$

što je totalni diferencijal od:

$$W_e * (\Delta, V) = C(1 - k^2)\frac{V^2}{2} + nd_{33}K_aV\Delta - K_a\frac{\Delta^2}{2} \tag{93}$$

II. Hamiltonov princip

$$\int_{t_1}^{t_2}[\delta(T^* + {W_e}^*) + \delta W_{nc}]dt = 0 \tag{94}$$

$$T^* = \frac{1}{2}\int_0^l (\varrho A\dot{w}^2)dx \tag{95}$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\delta T^* dt = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_0^l \varrho A\dot{w}\delta\dot{w}dx = -\int_{t_1}^{t_2} dt \int_0^l \varrho A\ddot{w}\delta w dx \tag{96}$$

$${W_e}^* = \frac{1}{2}\int_0^l dx \int_A (\varepsilon_{33}{E_3}^2 + 2S_1 e_{31}E_3 - c_{11}{S_1}^2)dA \tag{97}$$

Pojednostavljenja:

$$\int_A \varepsilon_{33}{E_3}^2 dA = \varepsilon_{33}{E_3}^2 b_p h_p \tag{98}$$

$$S_1 = -z\ddot{w} \tag{99}$$

$$\int_A z dA = \int_{h_1}^{h_2} b_p z dz = b_p h_p z_m \tag{100}$$

$$\mathfrak{D} = \int_A c_{11}z^2 dA \tag{101}$$

$${W_e}^* = \frac{1}{2}\int_0^l (\varepsilon_{33}{E_3}^2 b_p h_p - 2\ddot{w}e_{31}E_3 b_p h_p z_m - \mathfrak{D}\ddot{w}^2)dx \tag{102}$$

$$\delta{W_e}^* = \int_0^l [-\delta\ddot{w}(e_{31}E_3 b_p h_p z_m) - \mathfrak{D}\ddot{w}\delta\ddot{w})dx \tag{103}$$

$$\delta W_e{}^* = -(e_{31}E_3b_ph_pz_m)\delta\dot{w}_0^l + (e_{31}E_3b_ph_pz_m)'\delta w - \int_0^l (e_{31}E_3b_ph_pz_m)"\delta w dx$$
$$- \mathfrak{D}\ddot{w}\delta dotw_0^l + (\mathfrak{D}\ddot{w})'\delta w_0^l - \int_0^l (\mathfrak{D}\ddot{w})"\delta w dx \quad (104)$$

$$\delta W_{nc} = \int_0^l p(x,t)\delta w dx \quad (105)$$

Uvrštavanjam u Hamiltonov princip(59) dobivamo:

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_0^l [-\varrho A\ddot{w} - (e_{31}E_3b_ph_pz_m)'' - (\mathfrak{D}\ddot{w})'' + p]\delta w dx - [(e_{31}E_3b_ph_pz_m + \mathfrak{D}\ddot{w})']_0^l +$$
$$+ [\{(e_{31}E_3b_ph_pz_m)' + (\mathfrak{D}\ddot{w})'\}]_0^l = 0 \quad (106)$$

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%% MATEMATIČKI MODEL I Hinf SINTEZA %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%


clear all
clc
close all

global n A B1 tspan omega d A_cl B_cl


n = 3; %broj elemenata
y = 2*(n+1); %broj varijabli stanja

piezo_poz= [1 3]; %elementi na kojem se nalazi piezo

ogranicenje = 1; %ukljestenje-slobodno(1) oslonac-oslonac(2)

%greda
E = 193.06*10^9; %modul elasticnosti[N/m^2]
ro = 8030; %gustoca [kg/m^3]
b = 15e-2; %sirina [m]
t = 2e-3; %debljina/visina
[m] L = 10; %duljina [m]

l = L/n; %duljina elementa

I = (b*t^3)/12; %moment tromosti
A = b*t; %povrsina

%piezo
Ep =50*10^9; %modul elasticnosti[N/m^2]
rop = 7600; %gustoca [kg/m^3]
tp = 0.35e-3; %debljina/visina [m]
bp = b; %sirina [m]
e31 = -7.5; %piezo konstanta [C/m^2]

Ip = (bp*tp^3)/12+bp*tp*((t+tp)/2)^2; %momenttromosti
Ap = 2*bp*tp; %povrsina

zm = (tp+t)/2; %udaljenost od neutralne osi

ga = -e31*bp*zm; %konstanta aktuatora
Gc = 1e5; %konstanta pretvorbe senzora
gs = Gc*e31*zm*bp; %konstanta senzora


%%% MATRICE KRUTOSTI k I INERCIJE m %%%

a = 1/50;
me = ro*A*l*[1/2 0 0 0; 0 a*l^2 0 0; 0 0 1/2 0; 0 0 0 a*l^2];
%nedistribuirana matrica inercije grede
mep = (ro*A+rop*Ap)*l*[1/2 0 0 0; 0 a*l^2 0 0; 0 0 1/2 0; 0 0 0 a*l^2];
%greda s piezo

ke = E*I/l^3*[12 6*l -12 6*l; 6*l 4*l^2 -6*l 2*l^2; -12 -6*l 12 -6*l;
```

```
6*l 2*l^2 -6*l 4*l^2];
kep = (E*I+2*Ep*Ip)/l^3*[12 6*l -12 6*l; 6*l 4*l^2 -6*l 2*l^2; -12 -6*l 12
- 6*l; 6*l 2*l^2 -6*l 4*l^2];

m = {};
k = {};
for i = 1:n
    if any(piezo_poz==i)
        m{i} = mep;
        k{i} = kep;
    else
        m{i} = me;
        k{i} = ke;
    end
end

%Globalne matrice
K = zeros(y,y);
M = zeros(y,y);

for i=1:n
    K(2*i-1:2*(i+1),2*i-1:2*(i+1))=K(2*i-1:2*(i+1),2*i-1:2*(i+1))+k{i};
    M(2*i-1:2*(i+1),2*i-1:2*(i+1))=M(2*i-1:2*(i+1),2*i-1:2*(i+1))+m{i};
end


%Odredivanje alfa i beta za matricu
prigusenja
if ogranicenje==1
    K_mode = K(3:y,3:y);
    M_ mode = M(3:y,3:y);
else
    K_mode = [K(2:y-2,2:y-2) K(2:y-2,y); K(y,2:y-2) K(y,y)];
    M_mode = [M(2:y-2,2:y-2) M(2:y-2,y); M(y,2:y-2) M(y,y)];
end

[V_mode, D_mode] = eig(K_mode,M_mode);
w_n = sqrt(D_mode);
w_n = diag(w_n);

T = [1/(2*w_n(1)) w_n(1)/2; 1/(2*w_n(2)) w_n(2)/2; 1/(2*w_n(3))
w_n(3)/2; 1/(2*w_n(4)) w_n(4)/2];
V = [0.02; 0.02; 0.02; 0.02];

ab = T\V;

alfa = ab(1);
beta = ab(2);

Cd = alfa*M+beta*K; %matrica prigusenja


%%%MATRICE MODELA%%%

E = [eye(y) zeros(y,y); zeros(y,y) M];
A = [zeros(y,y) eye(y); -K -Cd];
```

```
B1 = zeros(y,n+1); %matrica poremecaja - sile u cvorovima(neparne
varijable stanja)
for i = 1:2:y
    B1(i,(i+1)/2) = 1;
end
B1 = [zeros(y,n+1); B1]; %globalna matrica poremecaja

B2 = zeros(y,length(piezo_poz)); %matrica ulaznih varijabli(ovisno o
piezo) for i = 1:length(piezo_poz);
    B2(2*piezo_poz(i),i) = -ga;
    B2(2*piezo_poz(i)+2,i) = ga;
end
B2 = [zeros(y,length(piezo_poz)); B2]; %globalna matrica ulaznih varijabli

C1 = zeros(y/2,y);
for i = 1:y/2
    C1(i,2*i-1) = 1;
end
C1 = [C1 zeros(y/2,y)]; %globalna matrica mjerenih varijabli modela(progiba)

C2 = zeros(length(piezo_poz),y);
for i = 1:length(piezo_poz);
    C2(i,2*piezo_poz(i)) = -gs;
    C2(i,2*piezo_poz(i)+2) = gs;
end
C2 = [zeros(length(piezo_poz),y) C2]; %globalna matrica mjerenja
modela (derivacije kuta zakreta)

D11 = zeros(size(C1,1),size(B1,2));
D12 = zeros(size(C1,1),size(B2,2));
D21 = zeros(size(C2,1),size(B1,2));
D22 = zeros(size(C2,1),size(B2,2));

A = inv(E)*A;
B1 = inv(E)*B1;
B2 = inv(E)*B2;

%%% MODEL S RUBNIM UVJETIMA %%%

if ogranicenje==1
    A = [A(3:y,3:y) A(3:y,y+3:end); A(y+3:end,3:y)
    A(y+3:end,y+3:end)]; B1 = [B1(3:y,2:end); B1(y+3:end,2:end)];
    B2 = [B2(3:y,:); B2(y+3:end,:)];
    C1 = [C1(2:end,3:y) C1(2:end,y+3:end)];
    C2 = [C2(:,3:y) C2(:,y+3:end)];
else
    A = [A(2:y-2,2:y-2) A(2:y-2,y) A(2:y-2,y+2:2*y-2) A(2:y-2,2*y); A(y,2:y-
2) A(y,y) A(y,y+2:2*y-2) A(y,2*y); A(y+2:2*y-2,2:y-2) A(y+2:2*y-2,y)
A(y+2:2*y-2,y+2:2*y-2) A(y+2:2*y-2,2*y); A(2*y,2:y-2) A(2*y,y) A(2*y,y+2:2*y-
2) A(2*y,2*y)];
    B1 = [B1(2:y-2,2:n); B1(y,2:n); B1(y+2:2*y-2,2:n); B1(2*y,2:n)]; B2
    = [B2(2:y-2,:); B2(y,:); B2(y+2:2*y-2,:); B2(2*y,:)];
    C1 = [C1(2:n,2:y-2) C1(2:n,y) C1(2:n,y+2:2*y-2) C1(2:n,2*y)];
```

```
    C2 = [C2(:,2:y-2) C2(:,y) C2(:,y+2:2*y-2) C2(:,2*y)];
end
D11 = zeros(size(C1,1),size(B1,2));
D12 = zeros(size(C1,1),size(B2,2));
D21 = zeros(size(C2,1),size(B1,2));
D22 = zeros(size(C2,1),size(B2,2));

B = [B1 B2];
C = [C1; C2];
D = [D11 D12; D21 D22];
olp     =     ltisys(A,B,[[C1;     zeros(size(B2,2),size(C1,2))];
C2],[[D11;          zeros(size(B2,2),size(B1,2))]          [D12;
eye(size(B2,2))]; D21 D22]); sinfo(olp)


%%%ODE-open loop%%%

tspan = 0:0.01:100;

xinit = zeros(1,size(A,1));
if ogranicenje==1
    xinit(1,5) = 10e-3;
else
    xinit(1,4) = 10e-3;
end

[tol,xol] = ode45(@open,tspan,xinit);
zol = C1*xol'; %izlaz

sysol = ss(A,B1,C1,D11);


%%%FILTERI%%%

%ulaz - high pass filter

FilterOrder_Wu = 1;
M_Wu = 1e2;             % lim_(s->0) Wu = 1/M
A_Wu  =1e-5;            % lim_(s->\infty) Wu = 1/A
omega_B_Wu = 100;       % traženi bandwidth [rad/s]
% M definira inverz niskofrekvencijskog pojacanja filtera
% A definira inverz visokofrekvencijskog pojacanja filtera
[numWu,denWu] = FilterHighPass(FilterOrder_Wu,M_Wu,A_Wu,omega_B_Wu); Wu
= tf(numWu,denWu);
[A_Fu,B_Fu,C_Fu,D_Fu] = ssdata(Wu);

Awu = zeros(length(piezo_poz),length(piezo_poz)); %za oba rubna
uvjeta Bwu = zeros(length(piezo_poz),length(piezo_poz));
Cwu   =   zeros(length(piezo_poz),length(piezo_poz));
Dwu   =   zeros(length(piezo_poz),length(piezo_poz));
for i = 1:length(piezo_poz)
    Awu(i,i) = A_Fu;
    Bwu(i,i) = B_Fu;
    Cwu(i,i) = C_Fu;
    Dwu(i,i) = D_Fu;
```

```
end

Wu = ss(Awu,Bwu,Cwu,Dwu);

%izlaz
izlaz_filter = 0; %notch (0) low-pass (1)

if izlaz_filter==0
    FilterOrder_Wz = 1;
    omega_o = 0.1;    % trazeni bandwidth [rad/s]
    Beta1 = 10; % Beta1/Beta2 odreduje oblik i smjer vrha frekv.kar.
    Beta2 = 0.01;
    [numWz,denWz] = FilterNotch(FilterOrder_Wz,Beta1,Beta2,omega_o);
    Wz =  tf(numWz,denWz);
    Wz = 20*Wz;
end
if izlaz_filter==1
    FilterOrder_Wz = 1;
    M_Wz = 1e3;          % lim_(s->\infty) We = 1/M
    A_Wz = 1;            % lim_(s->0) We = 1/A
    omega_B_Wz = 10;     % trazeni bandwidth [rad/s]
    % A definira maksimalno dopusteni steady-state offset
    % M definira vrh visoke frekvencije
    [numWz,denWz] = FilterLowPass(FilterOrder_Wz,M_Wz,A_Wz,omega_B_Wz); Wz
    = tf(numWz,denWz);
end
[A_Fz,B_Fz,C_Fz,D_Fz] = ssdata(Wz);

Awz = [];
Bwz = [];
Cwz = [];
Dwz = [];
for i=1:size(C1,1)
    Awz = blkdiag(Awz,A_Fz);
    Bwz = blkdiag(Bwz,B_Fz);
    Cwz = blkdiag(Cwz,C_Fz);
    Dwz = blkdiag(Dwz,D_Fz);
end

Wz=ss(Awz,Bwz,Cwz,Dwz);

bodeFilt = figure(1);
subplot(1,2,1)
bodemag(Wu);
grid on
ime = title('Filter na ulaznim signalima
"Wu"'); set(ime,'Interpreter','latex');

subplot(1,2,2)
bodemag(Wz);
grid on
ime = title('Filter na izlaznim signalima
"Wz"'); set(ime,'Interpreter','latex');

%Model s filterima
Afilt = [A zeros(size(A,1),size(Awz,2)) zeros(size(A,1),size(Awu,2)); Bwz*C1
Awz zeros(size(Awz,1),size(Awu,2)); zeros(size(Awu,1),size(A,2))
zeros(size(Awu,1),size(Awz,2)) Awu];
```

```
B1filt = [B1; Bwz*D11; zeros(size(Bwu,1),size(B1,2))];
B2filt = [B2; Bwz*D12; Bwu];
C1filt = [Dwz*C1 Cwz zeros(size(Cwz,1),size(Cwu,2));
zeros(size(Cwu,1),size(Dwz*C1,2)) zeros(size(Cwu,1),size(Cwz,2)) Cwu];
C2filt = [C2 zeros(size(C2,1),size(Awz,2))
zeros(size(C2,1),size(Awu,2))]; D11filt =
zeros(size(C1filt,1),size(B1filt,2)); D12filt = [Dwz*D12; Dwu];
D21filt = zeros(size(C2filt,1),size(B1filt,2));
D22filt = zeros(size(C2filt,1),size(B2filt,2));

Bfilt = [B1filt B2filt];
Cfilt = [C1filt; C2filt];
Dfilt = [D11filt D12filt; D21filt D22filt];

plant = ltisys(Afilt,Bfilt,Cfilt,Dfilt);
sinfo(plant)

%H_infinity sinteza kontrolera
br_mj = size(C2filt,1);
br_kont = size(B2filt,2);
R = [br_mj br_kont];
gtar = 1e-3; %ciljana vrijednost za ponasanje closed loop-
a tol = 1e-2; %relativna tocnost za gopt
options = [];
options(1) = 0.5; %[0,1] (default=0). Reducira normu R prilikom porasta
- sporija dinamika kontrolera
options(2) = 0.5; %isto za S
options(3) = 1e-3; %default = 1e-3. %Reducirana sinteza provodi se kad
je rho(X*Y) >= ( 1 - OPTIONS(3) ) * GOPT^2
options(4) = 0; %prikazuje progres LMI rješenja ako je OPTIONS(3)=0.
Default je 'On'
[gopt,K] = hinflmi(plant,R,gtar,tol,options);
[A_K,B_K,C_K,D_K] = ltiss(K);

sysK = ss(A_K,B_K,C_K,D_K);

bodeK = figure(2);
bodemag(sysK)
grid on
ime = title('Bode dijagram kontrolera');
set(ime,'Interpreter','latex');

%Closed loop
clp = slft(olp,K,size(B2,2),size(C2,1));
[A_cl, B_cl , C_cl, D_cl] = ltiss(clp); %closed loop bez
filtera
sinfo(clp)

if all(real(eig(A_cl))<0)
    disp('stabilno')
else
    disp('nestabilno')
    return
end
```

```
%%%ODE-closed loop%%%

xinitcl=zeros(1,length(A_cl));
if ogranicenje==1
    xinitcl(1,5) = 10e-3;
else
    xinitcl(1,4) = 10e-3;
end

[tcl,xcl] = ode15s(@closed,tspan,xinitcl);
zcl = C_cl*xcl';

ucl = zcl(size(C1,1)+1:end,:); %upravljacki signal

syscl = ss(A_cl,B_cl,C_cl,D_cl);

%Open loop vs. Closed loop
olvsclo = figure(3);
bodemag(sysol,'--r',syscl,'b')
grid on
t = title('Open-loop vs. Closed-
loop'); set(t,'Interpreter','latex');
set(x,'Interpreter','latex');
set(y,'Interpreter','latex');

%Progibi - Open loop vs. Closed loop
progib = figure(4);
for i = 1:size(C1,1)
    figure(4);
    subplot(1,size(C1,1),i)
    plot(tol,zol(i,:)*1e3,'--
    r',tcl,zcl(i,:)*1e3,'b','linewidth',1.5) grid on
    t = title('Progibi otvorenog i zatvorenog
    kruga'); xlabel('$t$ [s]');
    ylabel(sprintf('$w_{%d}$ [mm]',i));
    l = legend('Open-loop','Closed -
    loop'); set(t,'Interpreter','latex');
    set(x,'Interpreter','latex');
end

%Upravljacki signal
ulaz = figure(5);
plot(tcl,ucl,'linewidth',1.5)
grid on
for i = 1:size(C_K,1)
    legendInfo{i} = sprintf('Actuator %d',i);
end
t = title('Upravljaèki
signal'); l =
legend(legendInfo); xlabel('$t$
[s]'); ylabel('$U_{a}$ [V]');
set(t,'Interpreter','latex');
set(l,'Interpreter','latex'
```

```
%%%PRIJENOSNE FUNKCIJE
%Poremecaj -> Izlaz
Wz = ltisys(A_Fz,B _Fz,C_Fz,D_Fz);
invWo = minv(Wz);
Fdo = mmult(invWo,gopt);
[A_Fdo,B_Fdo,C_Fdo,D_Fdo] = ltiss(Fdo);

T_do = {};
for i = 1:size(B1,2)
    for j = 1:size(C1,1)
        T_do{i,j} = sel(clp,j,i);
        [A_do{i,j},B_do{i,j},C_do{i,j},D_do{i,j},] = ltiss(T_do{i,j});
    end
end

do = figure(6);
cnt = 1;
for i = 1:size(B1,2)
    for j = 1:size(C1,1)
        figure(6);
        subplot(size(B1,2),size(C1,1),cnt)

bodemag(ss(A_do{i,j},B_do{i,j},C_do{i,j},D_do{i,j}),'b',ss(A_Fdo,B_Fdo,C_Fdo,D
_Fdo),'r')
        grid on
        t = title(sprintf('$d _{%d}$ $\\rightarrow$
        $z_{%d}$',i,j)); xlabel('Frequency');
        ylabel('Magnitude');
        set(t,'Interpreter','latex');
        set(x,'Interpreter','latex');

        cnt=cnt+1;
    end
end

%Poremecaj -> Upravljacki signal
Wu = ltisys(A_Fu,B _Fu,C_Fu,D_Fu);
invWu = minv(Wu);
Fdu = mmult(invWu,gopt);
[A_Fdu,B_Fdu,C_Fdu,D_Fdu] = ltiss(Fdu);

T_du = {};
for i = 1:size(B1,2)
    for j = 1:size(B2,2)
        T_du{i,j} = sel(clp,size(C1,1)+j,i);
        [A_du{i,j},B_du{i,j},C_du{i,j},D_du{i,j},] = ltiss(T_du{i,j});
    end
end

du = figure(7);
cnt = 1;
for i = 1:size(B1,2)
    for j = 1:size(B2,2)
```

```
        figure(7);
        subplot(size(B1,2),size(B2,2),cnt)

bodemag(ss(A_du{i,j},B_du{i,j},C_du{i,j},D_du{i,j}),'b',ss(A_Fdu,B_Fdu,C_Fdu,D
_Fdu),'r')
        grid on
        t = title(sprintf('$d_{%d}$ $\\rightarrow$
        $u_{%d}$',i,j)); x xlabel('Frequency');
        y = ylabel('Magnitude');
        set(t,'Interpreter','latex');
        set(x,'Interpreter','latex');
        set(y,'Interpreter','latex');
        cnt=cnt+1;
    end
end


%%%SINGULARNE VRIJEDNOSTI%%%
%w - logspace
w = logspace(-2,5,200);

%Closedloop s filterima
%Prijenosna funkcija filtera
A_F = blkdiag(Awz,Awu);
B_F = blkdiag(Bwz,Bwu);
C_F = blkdiag(Cwz,Cwu);
D_F = blkdiag(Dwz,Dwu);
sysW = ss(A_F,B_F,C_F,D_F);
W = tf(sysW);
%Inverz filtera
W_sys = ltisys(A_F,B _F,C_F,D_F);
invW = minv(W_sys);
F_sys = mmult(invW,gopt*eye(size(C_cl,1)));
[A_inF,B_inF,C_inF,D_ inF] = ltiss(F_sys);
%Frekvencijski odziv
F_f = frsp(F_sys,w);
%Dekompozicija singularnih vrijednosti
[u_F,s_F,v_F] = vsvd(F_f);

%Closed-loop
sysT = ss(A_cl,B_cl,C_cl(1:3,:),D_cl(1:3,:)); %za prvi rubni uvjet
%sysT = ss(A_cl,B_cl,C_cl(1:2,:),D_cl(1:2,:)); %za drugi rubni uvjet
T = tf(sysT);
G = T;
%Prostor stanja
[A_WT,B_WT,C_WT,D_WT] = ssdata(G);
%Sistemska matrica
G_sys = ltisys(A_WT,B _WT,C_WT,D_WT);
%Frekvencijski odziv
G_f = frsp(G_sys,w);
%Dekompozicija singularnih vrijednosti
[u_G,s_G,v_G] = vsvd(G_f);
%H_infty norma
Hinf_G = normhinf(G_sys,0.001);
```

```
%Open-loop
%Sistemska matrica
[A_ol,B_ol,C_ol,D_ol] = ssdata(sysol);
G_sysol = ltisys(A_ol,B_ol,C_ol,D_ol);
%Frekvencijski odziv
G_fol = frsp(G_sysol,w);
%Dekompozicija singularnih vrijednosti
[u_Gol,s_Gol,v_ Gol] = vsvd(G_fol);
%H_infty norma
Hinf_Gol = normhinf(G_sysol,0.001);

singularne = figure(8);
vplot('liv,lm',s_G,'b',Hinf_G,'r',s_F,'g',s_Gol,'y',Hinf_Gol,'y');
%log(magnitude) vs. log(independent variable)
grid on
```

```
%%%FUNKCIJA ZA ODE RJEŠAVAC ZA
OTVORENI KRUG%%%
function dxdt = open(t,x)

global A B1 tspan omega d

% omega = 0;
omega = 30; %[rad/s]
d = zeros(size(B1,2),1); %poremećaj
d(size(B1,2),1) = 1;
d = sin(omega*t)*d;

dxdt = A*x+B1*d;

end
```

```
%%%FUNKCIJA ZA ODE RJESAVAC ZA
ZATVORENI KRUG%%%
function dxdt = closed(t,x)

global A_cl B_cl tspan omega d

% omega = 0;
omega = 30; %[rad/s]
d = zeros(size(B_cl,2),1);
%poremećaj d(size(B_cl,2),1) = 1;
d = sin(omega*t)*d;

dxdt = A_cl*x+B_cl*d;

end
```

```
%%%HIGH FILTER FUNKCIJA%%%
function [ numF,denF ] = FilterHighPass(FilterOrder,M,A,omega_B )

if FilterOrder==1
    numF = [1 omega_B/M];
    denF = [A omega_B];  %opis filtera
end
end
```

```
%%%LOW PASS FILTER FUNKCIJA%%%
function [ numF,denF ] = FilterLowPass( FilterOrder,M,A,omega_B )

if FilterOrder==1
    numF = [1/M omega_B];
    denF = [1 omega_B*A];  %opis filtera
end
end
```

```
%%%NOTCH FILTER FUNKCIJA%%%
function [ numF,denF ] = FilterNotch( FilterOrder,beta1,beta2,omega)

if FilterOrder==1
    numF = [1/(omega^2) 2*beta1/omega 1];
    denF = [1/(omega^2) 2*beta2/omega 1];  %opis filtera
end
end
```