Proračun čvrstoće vertikalnog spremnika

Škreb, Nikola

Undergraduate thesis / Završni rad

2017

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:235:848959

Rights / Prava: In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2024-03-29**

Repository / Repozitorij:

Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb







SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

ZAVRŠNI RAD

Nikola Škreb

Zagreb, 2017.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

ZAVRŠNI RAD

Mentor:

Doc. dr. sc. Ivica Skozrit

Student:

Nikola Škreb

Zagreb, 2017.

Izjavljujem da sam ovaj rad izradio samostalno koristeći stečena znanja tijekom studija i navedenu literaturu.

Zahvaljujem se mentoru doc. dr. sc. Ivici Skozritu na pruženoj pomoći, uloženom trudu i stručnom vodstvu tijekom izrade ovog rada te asistentu Damjanu Čakmaku, mag. ing. stroj., koji mi je također mnogo pomogao u izradi ovog rada.

Zahvaljujem se i svojoj obitelji na moralnoj i financijskoj podršci pruženoj tokom studija.

Nikola Škreb

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

Središnje povjerenstvo za završne i diplomske ispite

Povjerenstvo za završne ispite studija strojarstva za smjerove:

procesno-energetski, konstrukcijski, brodostrojarski i inženjersko modeliranje i računalne simulacije

Sveučilište u Zagrebu Fakultet strojarstva i brodogradnje	
Datum	Prilog
Klasa:	
Ur.broj:	

ZAVRŠNI ZADATAK

Student: **Škreb Nikola** Mat. br.: 0035194927

Naslov rada na hrvatskom jeziku: **Proračun čvrstoće vertikalnog spremnika**

Naslov rada na engleskom jeziku: **Strength Calculation of Vertical Tank**

Opis zadatka:

Spremnici su vjerojatno jedni od najraširenijih konstrukcija koje susrećemo svugdje oko nas. Proračun spremnika provodi se ovisno o namjeni na različite načine te se na kraju dodatno provjerava upotrebom raznih standardnih procedura.

Za definirane podatke o konstrukciji, dimenzijama te opterećenju i rubnim uvjetima vertikalnog spremnika potrebno je provjeriti da li spremnik zadovoljava uvjet čvrstoće tj. izvršiti kontrolni proračun spremnika. Proračun provesti analitički i numerički te usporediti dobivene rezultate. Numerički proračun provesti primjenom programskog paketa Abaqus® koji se temelji na metodi konačnih elemenata. U numeričkim analizama koristiti dostupne konačne elemente iz baze programskog paketa. Potrebno je izvršiti verifikaciju primijenjenih konačnih elemenata i procedura na jednostavnijim problemima te rezultate usporediti s dostupnim analitičkim rezultatima.

U radu treba navesti korištenu literaturu i eventualno dobivenu pomoć.

Zadatak zadan:

30. studenog 2016.

Rok predaje rada:
1. rok: 24. veljače 2017.
2. rok (izvanredni): 28. lipnja 2017.
3. rok: 22. rujna 2017.

Predviđeni datumi obrane:
1. rok: 27.2. - 03.03. 2017.
2. rok (izvanredni): 30. 06. 2017.
3. rok: 25.9. - 29. 09. 2017.

Zadatak zadao:

Skozrit Ivica

Doc. dr. sc. Ivica Skozrit

Predsjednik Povjerenstva:

Prof. dr. sc. Igor Balen

SADRŽAJ

SADRŽAJ I
POPIS SLIKA II
POPIS TABLICA V
POPIS OZNAKA VI
SAŽETAK VIII
SUMMARY IX
1. UVOD 1
2. Analitičko rješenje 3
2.1. Uvod u teoriju ljusaka 4
2.2. Membransko stanje naprezanja u cilindričnoj ljusci 4
2.3. Membransko stanje naprezanja u sfernoj ljusci 6
2.4. Savijanje tanke cilindrične ljuske 7
2.5. Savijanje strme sferne ljuske 9
2.6. Kružni prsten 10
2.7. Rezultati analitičkog pristupa 11
2.7.1. Raspodjela pomaka, naprezanja i momenata donjeg spoja ljusaka 11
2.7.2. Raspodjela pomaka, naprezanja i momenata gornjeg spoja ljusaka 18
2.7.3. Ekvivalentna naprezanja 24
3. Numeričko rješenje 31
3.1. Konačni element CAX8 31
3.2. Konačni element S4 35
3.3. Konačni element SAX2 38
3.4. Usporedba konačnih elemenata 40
3.5. Verifikacija na sferni ljusci 42
3.6. Analiza donjeg spoja ljusaka bez prstena 44
3.7. Analiza gornjeg spoja ljusaka sa prstenom 51
3.8. Očitavanje kritičnih ekvivalentnih naprezanja 59
3.9. Kontrola čvrstoće 61
4. Zaključak 63
LITERATURA 64
PRILOZI 65

POPIS SLIKA

Slika 1 Vertikalni spremnik [7] 1
Slika 2 Vertikalni spremnik 3
Slika 3 Opterećenje cilindrične ljuske 5
Slika 4 Membransko opterećenje sferne ljuske 6
Slika 5 Savijanje donjeg dijela spremnika 8
Slika 6 Savijanje gornjeg dijela spremnika 9
Slika 7 Raspodjela normalnog pomaka za donju sfernu ljusku 13
Slika 8 Raspodjela radijalnog pomaka za donju sfernu ljusku 13
Slika 9 Raspodjela cirkularnog naprezanja za donju sfernu ljusku 14
Slika 10 Grublja raspodjela meridijalnog naprezanja za donju sfernu ljusku 14
Slika 11 Finija raspodjela meridijalnog naprezanja za donju sfernu ljusku 15
Slika 12 Raspodjela meridijalnog momenta za donju sfernu ljusku 15
Slika 13 Raspodjela radijalnog pomaka za donji dio cilindrične ljuske 16
Slika 14 Raspodjela cirkularnog naprezanja za donji dio cilindrične ljuske 16
Slika 15 Raspodjela meridijalnog naprezanja za donji dio cilindrične ljuske 17
Slika 16 Raspodjela meridijalnog momenta za donji dio cilindrične ljuske 17
Slika 17 Raspodjela radijalni pomak za gornji dio cilindrične ljuske 19
Slika 18 Raspodjela cirkularnog naprezanja za gornji dio cilindrične ljuske 19
Slika 19 Raspodjela meridijalnog naprezanja za gornji dio cilindrične ljuske 20
Slika 20 Raspodjela meridijalnog momenta za gornji dio cilindrične ljuske 20
Slika 21 Raspodjela normalnog pomaka za gornju sfernu ljusku 21
Slika 22 Raspodjela radijalnog pomaka za gornju sfernu ljusku 21
Slika 23 Raspodjela cirkularnog naprezanja za gornju sfernu ljusku 22
Slika 24 Grublja raspodjela meridijalnog naprezanja za gornju sfernu ljusku 22
Slika 25 Finija raspodjela meridijalnog naprezanja za gornju sfernu ljusku 23
Slika 26 Raspodjela meridijalnog momenta za gornju sfernu ljusku 23
Slika 27 Raspodjela ekvivalentnog naprezanja duž vanjskog ruba donje sferne ljuske 25
Slika 28 Raspodjela ekvivalentnog naprezanja duž unutrašnjeg ruba donje sferne ljuske ..25
Slika 29 Raspodjela ekvivalentnog naprezanja duž vanjskog ruba donjeg dijela cilindrične ljuske 26
Slika 30 Raspodjela ekvivalentnog naprezanja duž unutrašnjeg ruba donjeg dijela cilindrične ljuske 27
Slika 31 Raspodjela ekvivalentnog naprezanja duž vanjskog ruba gornjeg dijela cilindrične ljuske 27
Slika 32 Raspodjela ekvivalentnog naprezanja duž unutrašnjeg ruba gornjeg dijela cilindrične ljuske 28
Slika 33 Raspodjela ekvivalentnog naprezanja duž vanjskog ruba gornje sferne ljuske 29
Slika 34 Raspodjela ekvivalentnog naprezanja duž unutrašnjeg ruba gornje sferne ljuske .29
Slika 35 Općeniti osnosimetrični elementi [8] 31
Slika 36 Osnosimetrični pravokutni element drugog reda [5] 32
Slika 37 Rubni uvjeti i opterećenje za model cilindra diskretiziran CAX8 elementima 33
Slika 38 Modeli diskretizirani CAX8 elementima: a) model sa 16 elemenata, b) model sa 130 elemenata, c) model s 390 elemenata, d) model sa 612 elemenata 33
Slika 39 Raspodjela cirkularnih naprezanja na CAX8 elementima u MPa 34
Slika 40 S4 ljuskasti konačni element [5] 35

Slika 41 Rubni uvjeti i opterećenje za model cilindra diskretiziran S4 elementima 36
Slika 42 Mreže S4 ljuskastih elemenata: a) model s 35 elemenata, b) model sa 117 elemenata, c) model s 352 elementa, d) model s 560 elemenata 37
Slika 43 Raspodjela cirkularnih naprezanja na S4 elementima u MPa 38
Slika 44 Ravni prstenasti element s 3 čvorne kružnice [5] 39
Slika 45 Rubni uvjeti i opterećenje za model cilindra diskretiziran SAX2 elementima.....39
Slika 46 Raspodjela cirkularnih naprezanja po SAX2 elementima u MPa: a) model s 15 elemenata, b) model s 50 elemenata, c) model s 300 elemenata, d) model s 500 elemenata 40
Slika 47 Konvergencija cirkularnog naprezanja za različite elemente 41
Slika 48 Konvergencija radijalnog pomaka za različite elemente 41
Slika 49 Rubni uvjeti i opterećenje za model sfere diskretiziran SAX2 elementima 42
Slika 50 Raspodjela naprezanje: a) merdijalna, b) cirkularna 43
Slika 51 Konvergencija radijalnog pomaka na rubu sferne ljuske 44
Slika 52 Rubni uvjeti i opterećenje za model donjeg spoja ljusaka.....44
Slika 53 Raspodjela naprezanja donjeg spoja u MPa: a) meridijalna, b) cirkularna 46
Slika 54 Raspodjela radijalnog pomaka za donju sfernu ljusku 47
Slika 55 Raspodjela cirkularnog naprezanja za donju sfernu ljusku 47
Slika 56 Raspodjela meridijalnog naprezanja za donju sfernu ljusku 47
Slika 57 Raspodjela meridijalnog momenta za donju sfernu ljusku.....48
Slika 58 Raspodjela radijalnog pomaka za donji dio cilindrične ljuske 48
Slika 59 Raspodjela cirkularnog naprezanja za donji dio cilindrične ljuske.....49
Slika 60 Raspodjela meridijalnog naprezanja za donji dio cilindrične ljuske.....49
Slika 61 Raspodjela meridijalnog momenta za donji dio cilindrične ljuske 49
Slika 62 Usporedba vrijednosti cirkularnih naprezanja na donjem dijelu cilindrične ljuske 50
Slika 63 Usporedba vrijednosti radijalnih pomaka na donjem dijelu cilindrične ljuske 50
Slika 64 Usporedba vrijednosti cirkularnih naprezanja na donjoj sfernoj ljusci 51
Slika 65 Usporedba vrijednosti radijalih pomaka na donjoj sfernoj ljusci 51
Slika 66 Rubni uvjeti i opterećenje za model gornjeg spoja ljusaka 52
Slika 67 Raspodjela naprezanja gornjeg spoja u MPa: a) meridijalna, b) cirkularna 53
Slika 68 Konvergencija cirkularnog naprezanja na spoju ljusaka sa prstenom.....54
Slika 69 Konvergencija radijalnog pomaka na spoju ljusaka sa prstenom 54
Slika 70 Raspodjela radijalnog pomaka za gornji dio cilindrične ljuske 55
Slika 71 Raspodjela cirkularnog naprezanja za gornji dio cilindrične ljuske 55
Slika 72 Raspodjela meridijalnog naprezanja za gornji dio cilindrične ljuske 55
Slika 73 Raspodjela meridijalnog momenta za gornji dio cilindrične ljuske.....56
Slika 74 Raspodjela radijalnog pomaka za gornju sfernu ljusku.....56
Slika 75 Raspodjela cirkularnog naprezanja za gornju sfernu ljusku 57
Slika 76 Raspodjela meridijalnog naprezanja za gornju sfernu ljusku 57
Slika 77 Raspodjela meridijalnog momenta za gornju sfernu ljusku 57
Slika 78 Usporedba vrijednosti cirkularnih naprezanja na gornjem dijelu cilindrične ljuske 58
Slika 79 Usporedba vrijednosti radijalnih pomaka na gornjem dijelu cilindrične ljuske 58
Slika 80 Usporedba vrijednosti cirkularnih naprezanja na gornjoj sfernoj ljusci.....59
Slika 81 Usporedba vrijednosti radijalnih pomaka na gornjoj sfernoj ljusci 59
Slika 82 Raspored ekvivalentnih naprezanja po donjem dijelu spremnika u MPa: a) unutrašnja strana, b) vanjska strana.....60
Slika 83 Raspored ekvivalentnih naprezanja po gornjem dijelu spremnika u MPa: a) unutrašnja strana, b) vanjska strana.....61

POPIS TABLICA

Tablica 1 Granični kutevi za kuglu i konus 9
Tablica 2 Usporedba analitičkog rješenja i rješenja dobivenih CAX8 elementima 35
Tablica 3 Usporedba analitičkog rješenja i rješenja dobivenih S4 elementima 38
Tablica 4 Usporedba numeričkih i analitičkih rješenja za donji spoj ljusaka 46

POPIS OZNAKA

a_i	-	koeficijenti interpolacijskih polinoma
D	Nmm	fleksijska krutost ljuske
E	MPa	modul elastičnosti
h	mm	debljina stijenke ljuske
J_1, J_2, J_3	mm, mm^2, mm^3	geometrijske karakteristike presjeka prstena
M_φ, M_ϑ	Nmm/mm	momenti savijanja u ljuskama
N_φ, N_ϑ	N/mm	sile u ljuskama
$N_\varphi^{\,c}$, $N_x^{\,c}$	N/mm	membranske sile cilindrične ljuske
$N_\varphi^{\,s}$, $N_\vartheta^{\,s}$	N/mm	membranske sile sferne ljuske
p	MPa	ispitni tlak
R	mm	polumjer
r	mm	radijus presjeka sfere okomitog na os x
r_1, r_2	mm	glavni polumjeri zakrivljenosti ljuske
s	mm	lokalna koordinata duž ruba konačnog elementa
S	-	faktor sigurnosti
u	mm	vektor pomaka
u_i, v_i, w_i	mm	komponente pomaka i-tog čvora konačnog elementa
u_i, w_i	mm	komponente pomaka i-tog čvora elementa osnosimetrične ljuske u pravcu globalnih cilindričnih koordinata r i z
$u_r^{\,ds}$, w^{ds}, $\sigma_\vartheta^{\,ds}$, $\sigma_\varphi^{\,ds}$, $M_\vartheta^{\,ds}$	mm, MPa, Nmm/mm	funkcije raspodjele pomaka, naprezanja i momenata duž izvodnice donje sferne ljuske
$u_r^{\,gs}$, w^{gs}, $\sigma_\vartheta^{\,gs}$, $\sigma_\varphi^{\,gs}$, $M_\vartheta^{\,ds}$	mm, MPa, Nmm/mm	funkcije raspodjele pomaka, naprezanja i momenata duž izvodnice gornje sferne ljuske
u_{ri}, w_i	mm	komponente pomaka i-tog čvora konačnog elementa u cilindričnom koordinatnom sustavu
$u_{r\mathrm{m}}^{\,s}$	mm	membranski radijalni pomak sfere
v		vektor stupnjeva slobode

$\mathbf{v}_i$		vektor stupnjeva slobode i-tog čvora konačnog elementa
w^{dc}, $\sigma_\vartheta{}^{dc}$, $\sigma_\varphi{}^{dc}$, $M_\vartheta{}^{dc}$	mm, MPa, Nmm/mm	funkcije raspodjele pomaka, naprezanja i momenata duž izvodnice donje cilindrične ljuske
w^{gc}, $\sigma_\vartheta{}^{gc}$, $\sigma_\varphi{}^{gc}$, $M_\vartheta{}^{gc}$	mm, MPa, Nmm/mm	funkcije raspodjele pomaka, naprezanja i momenata duž izvodnice gornje cilindrične ljuske
$w_m{}^c$	mm	membranski radijalni pomak cilindra
X_1, X_3, X_5	N/mm	poopćena sila u smislu sile po jedinici duljine
X_2, X_4, X_6	N	poopćena sila u smislu momenta po jedinici duljine
α	rad	kut zakreta
α_{11}, α_{12}, α_{21}, α_{22}	mm^2/N, mm/N, 1/N	uplivni koeficijenti
α_m	rad	membranski kut zakreta
β	mm^{-1}	geometrijsko-materijalna značajka ljuske
ϑ_{gr}	rad	granični kut ljuske
ν	-	Poissonov faktor
ξ	-	nezavisna bezdimenzijska varijabla
σ_e	MPa	granica elastičnosti
σ_{ekv}	MPa	ekvivalentno naprezanje
σ_{krit}	MPa	kritično naprezanje
$\sigma_x{}^c$, $\sigma_\varphi{}^c$	MPa	membranska naprezanja cilindrične ljuske
$\sigma_\vartheta{}^s$, $\sigma_\varphi{}^s$	MPa	membranska naprezanja sferne ljuske
$\sigma_\vartheta{}^U$, $\sigma_\varphi{}^U$	MPa	naprezanja na unutrašnjem rubu ljuske
$\sigma_\vartheta{}^V$, $\sigma_\varphi{}^V$	MPa	naprezanja na vanjskom rubu ljuske
φ_{ix}, φ_{iy}, φ_{iz}	rad	kutevi zakreta i-tog čvora konačnog elementa

SAŽETAK

Tema ovog završnog rada je kontrolni proračun čvrstoće vertikalnog spremnika koji je opterećen unutarnjim statičkim tlakom. Opisana je zadana konstrukcija te je dan osvrt o teoretskoj podlozi po kojoj se provodi proračun savijanja tankostjenih ljuskastih konstrukcija. Proračun je proveden analitički te numerički pomoću programskog paketa ABAQUS koji se temelji na metodi konačnih elemenata. Numerička analiza je započeta ispitivanjem konvergencije za tri različita konačna elementa na jednostavnom primjeru. Odabrani su osnosimetrični pravokutni element, ljuskasti pravokutni element te jednodimenzijski element za analizu osnosimetričnih ljuski. Prije analize svaki je element opisan. Za svaki konačni element generirane su četiri mreže konačnih elemenata različite gustoće. Provedena je dodatna verifikacija za najprikladniji na još jednom primjeru. Nakon toga provedena je analiza zadane konstrukcije na način da se posebno proračunao donji i gornji dio spremnika. Na kraju je izvršen kontrolni proračun na način da su se kritična naprezanja očitana na modelu u Abaqusu usporedila s dopuštenim naprezanjima.

Ključne riječi: ljuskaste konstrukcije, ABAQUS, metoda konačnih elemenata, osnosimetrični konačni element, ljuskasti konačni element, jednodimenzijski osnosimetrični konačni element

SUMMARY

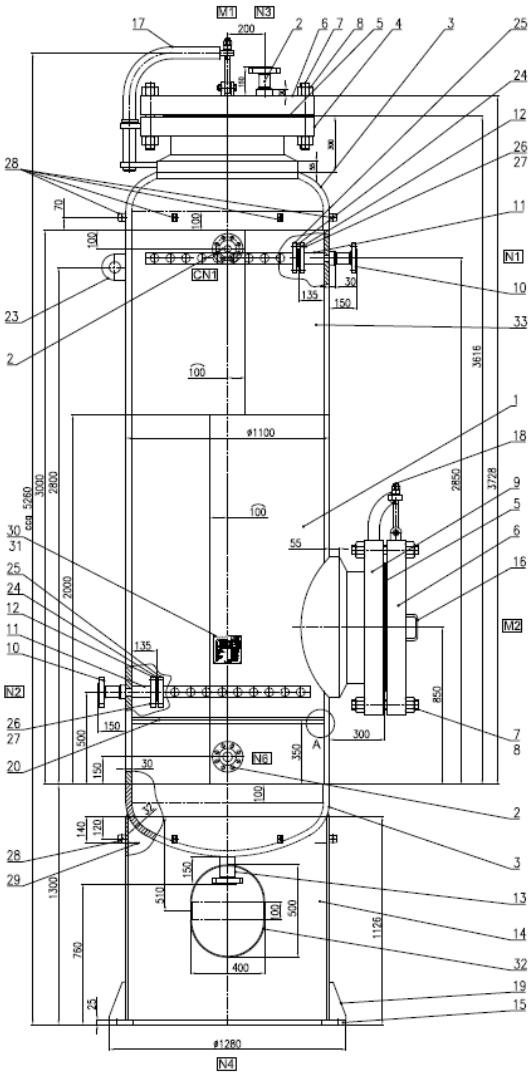
The subject of this final paper is strenght calculation of vertical tank subjected to inner static pressure. A short description of given structure is provided, as well a short review of theoretical basis by which flexion of thin-walled shell structures is calculated. The calculation was conducted analytically and numerically using software package called ABAQUS. ABAQUS is based on finite element method. Analysis was started by examining solution convergence for three different finite elements on a simple example. An axisymmetric quadrilateral element, a shell quadrilateral element and an axisymmetric shell element were selected for the analysis of axisymmetric shells. Before the analysis, the elements were described. For every finite element four meshes of different element density were created. An additional verification on a another simple example for the most appropriate element was done. The following analysis of the given structure was done by separately analysing the lower and the upper part of the tank. Finally, a strenght calculation was executed. It was done by comparing critical stress read in the Abaqus model with allowed stress.

Key words: flexion of thin-walled shell structures, ABAQUS, finite element method, 8-node biquadratic axisymmetric quadrilateral element, 4-node general-purpose shell element, 3-node quadratic axisymmetric thin or thick shell element

1. UVOD

Spremnici su vrlo raširene konstrukcije koje su svoju primjenu našle u različitim industrijama. U prehrambenoj industrije koriste se za fermentaciju i čuvanje vina, pohranu alkohola, meda, octa, ulja i dr. Spremnici za kemijsku industriju upotrebljavaju se za galvanizaciju, neutralizaciju, pohranu tehnološke vode, kiselina, lužina i drugih kemijskih spojeva. Također se koriste i u petrokemijskoj industriji za pohranu i filtriranje, a nalaze se i u kućanstvima u obliku spremnika za toplu vodu, plinskih boca, boca za ronjenje itd.

U nekim primjenama ti su spremnici opterećeni visokim unutarnjim tlakovima pa je provjera čvrstoće spremnika od iznimne važnosti. Slika 1 prikazuje konstrukciju vertikalnog spremnika koji se koristi u naftnoj industriji za filtriranje nafte. Radni tlak prikazanog spremnika iznosi 3,5 MPa, a ispitni tlak iznosi 7,2 MPa.



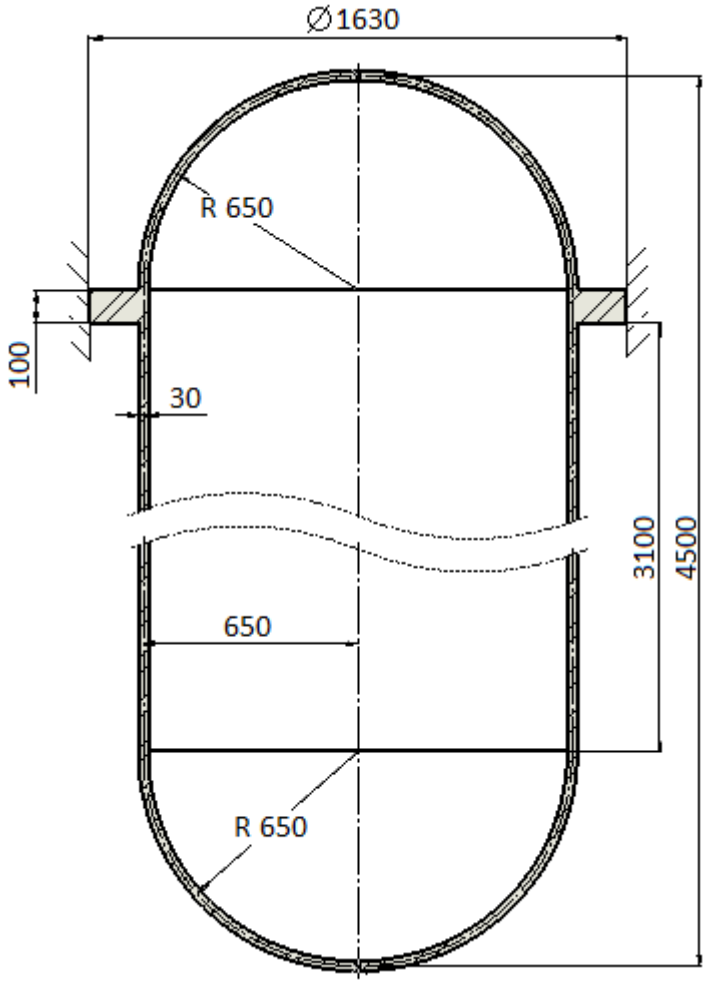
Slika 1 Vertikalni spremnik [7]

Spremnici koji su opterećeni tako velikim tlakovima nazivaju se tlačne posude. Tlačna posuda je prvi put dokumentirana u knjizi Leonarda da Vincija, gdje su spremnici sa stlačenim zrakom teoretski trebali pod vodom podizati terete velike težine. Tlačne posude koje danas vidimo poprimile su takav oblik u 19. stoljeću, kada je para dobivena u spremnicima tople vode pomagala industrijsku revoluciju. Zbog nekvalitetnih materijala, nedovoljno razvijenih proizvodnih tehnologija i nedovoljno znanja često su se pojavljivala oštećenja na tlačnim posudama i događale eksplozije, a kao posljedica, ljudi su stradavali.

Zahvaljujući napretcima ostvarenima inženjerstvu, današnje su tlačne posude sigurnije. Novi materijali s povećanom čvrstoćom i otpornošću na koroziju te nove zavarivačke tehnike spajanja također pridonose povećanju kvalitete. Napredne numeričke teorije poput metode konačnih elemenata omogućuju preciznije izračunavanje naprezanja, što znači da se spremnici mogu i ekonomičnije konstruirati.

2. Analitičko rješenje

Slika 2 prikazuje zadanu konstrukciju vertikalnog spremnika s definiranim dimenzijama opterećenu unutarnjim statičkim tlakom p = 7 MPa. S obzirom na geometriju i dimenzije vertikalnog spremnika, proračun je moguće provesti pomoću formulacija izvedenih za membransko stanje naprezanja i deformacija te savijanje osnosimetričnih ljuski. Uz analitički proračun, provest će se i numerički proračun pomoću programskog paketa ABAQUS [6]. Kako su formulacije za ljuske izvedene za ograničenja i pretpostavke koje vrijede za prikazani vertikalni spremnik, analitička rješenja će se smatrati referentnima prilikom uspoređivanja s numeričkim rješenjima. Svako dobiveno numeričko rješenje će se uvijek promatrati s mnogo kritičnosti, zbog grešaka koje mogu biti prouzročene od strane korisnika ili su rezultat korištenih algoritama u programskom paketu.



Slika 2 Vertikalni spremnik

2.1. Uvod u teoriju ljusaka

Ljuska je dio kontinuuma koji je omeđen s dvije zakrivljene plohe, a razmak između ploha mali je u odnosu na ostale dimenzije. Razmak između ploha predstavlja debljinu ljuske koja može biti promjenjiva ili konstantna. Srednja ploha je ploha koja raspolavlja debljinu. Svaka ljuska može biti zatvorena ili omeđena rubom. Geometrija ljuske potpuno je zadana ako je ona određena rubom, debljinom i srednjom plohom.

Vrijede sljedeće pretpostavke o deformiranju [3]:

- pretpostavlja se da je debljina ljuske h mala u odnosu na polumjere zakrivljenosti ($\frac{h}{R} << 1$);
- debljina stijenke je konstantna ili se neznatno mijenja ($\frac{\partial h}{\partial R} \leq \frac{h}{R} << 1$);
- pretpostavljaju se mali pomaci i male deformacije;
- naprezanja u pravcu normale na srednju plohu zanemaruju se;
- materijal je izotropan, homogen i linearno eleastičan;
- opterećenje je statičko.

Na zadanoj konstrukciji debljina svake ljuske je jako mala u odnosu na polumjere zakrivljenosti ($\frac{h}{R} = \frac{30}{650} = 0,046 << 1$). Također, debljina ljusaka je konstantna i iznosi 30 mm, a za opterećenje se uzima statički tlak od 7 MPa.

2.2. Membransko stanje naprezanja u cilindričnoj ljusci

Iz slike 2 lako se mogu izvući potrebni podaci za proračun ljusaka. Zadane su sljedeće dimenzije:

$$R = 650 \text{ mm}, \tag{2.1}$$

$$h = 30 \text{ mm}, \tag{2.2}$$

a uz pretpostavku da je materijal linearno elastičan uzete su sljedeće vrijednosti za modul elastičnosti E i Poissonov faktor ν:

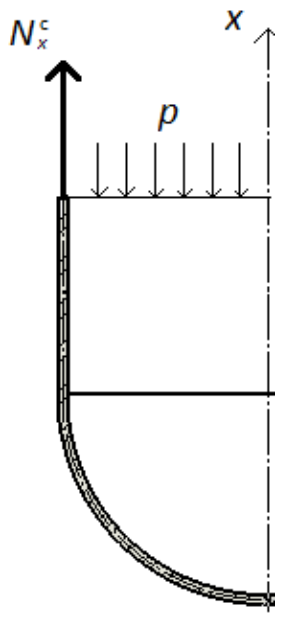
$$E = 205000 \text{ MPa}, \tag{2.3}$$

$$\nu = 0,3 \text{ mm}. \tag{2.4}$$

Spremnik je opterećen pretlakom koji je naveden u prošlom potpoglavlju:

$$p = 7 \text{ MPa} . \tag{2.5}$$

Za cilindričnu ljusku, meridijalna sila izračunava se prema slici 3.



Slika 3 Opterećenje cilindrične ljuske

Ako postavimo uvjete ravnoteže svih sila u smjeru osi *x,* dobivamo:

$$\begin{aligned} &\sum F_x = 0,\ N_x^c \cdot 2R\pi - pR^2\pi = 0 , \\ &N_x^c = \frac{pR}{2} = \frac{7 \cdot 650}{2} = 2275 \text{ N/mm} . \end{aligned} \tag{2.6}$$

Meridijalno naprezanje jednako je:

$$\sigma_x^c = \frac{N_x^c}{h} = \frac{2275}{30} = 75,83 \text{ MPa} . \tag{2.7}$$

Prema [3] glavni polumjeri zakrivljenosti za cilindar iznose:

$$r_1 = \infty , \tag{2.8}$$

$$r_2 = R . \tag{2.9}$$

Jednadžba ravnoteže membranskih sila prema [3] glasi:

$$\frac{N_\vartheta}{r_1} + \frac{N_\varphi}{r_2} = p . \tag{2.10}$$

Uvrštavanjem izraza (2.5), (2.6), (2.8) i (2.9) u (2.10), dobijemo iznos cirkularne sile u cilindru:

$$N_\varphi^c = pR = 7 \cdot 650 = 4550 \text{ N/mm} . \tag{2.11}$$

Slijedi cirkularno naprezanje koje je jednako:

$$\sigma_{\varphi}^{\mathrm{c}} = \frac{N_{\varphi}^{\mathrm{c}}}{h} = \frac{4550}{30} = 151{,}67 \text{ MPa} . \tag{2.12}$$

Sada se mogu izračunati radijalni pomak i kut zakreta za membransko stanje naprezanja prema [3]:

$$w_{\mathrm{m}}^{\mathrm{c}} = \frac{R}{Eh}(N_{\varphi}^{\mathrm{c}} - \nu \cdot N_{x}^{\mathrm{c}}) = 0{,}41 \text{ mm} , \tag{2.13}$$

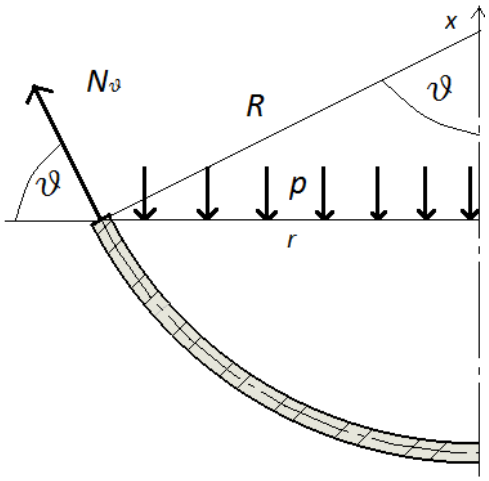
$$\alpha_{\mathrm{m}}^{\mathrm{c}} = \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} = 0 . \tag{2.14}$$

Kao što je i pretpostavljeno u potpoglavlju 2.1, pomaci su mali.

2.3. Membransko stanje naprezanja u sfernoj ljusci

Za sfernu ljusku glavni polumjeri su međusobno jednaki prema [3] pa vrijedi $r_1 = r_2 = R$. Sferna ljuska načinjena je od istog materijala kao i cilindrična ljuska. Da bi se izračunala meridijalna i cirkularna sila, potrebno je napisati jednadžbu ravnoteže svih sila duž osi x. Prema slici 4 slijedi:

$$\sum F_x = 0 \quad N_{\vartheta}^{\mathrm{s}}(\vartheta) \cdot \sin(\vartheta) \cdot 2r(\vartheta)\pi - p \cdot r(\vartheta)^2 \cdot \pi = 0 . \tag{2.15}$$



Slika 4 Membransko opterećenje sferne ljuske

Prema slici 4 također vrijedi:

$$r(\vartheta) = R \cdot \sin(\vartheta) . \tag{2.16}$$

Uvrštavanjem izraza (2.16) u (2.15) slijedi da je meridijalna sila konstantna i jednaka:

$$N_{\vartheta}^{\mathrm{s}} = \frac{p \cdot R}{2} = \frac{7 \cdot 650}{2} = 2275 \text{ N/mm} . \tag{2.17}$$

Sada možemo izračunati i cirkularnu silu uvrštavanjem izraza (2.17) u (2.10):

$$N_{\varphi}^{\mathrm{s}} = p \cdot R - N_{\vartheta}^{\mathrm{s}} = 7 \cdot 650 - 2275 = 2275 \text{ N/mm} . \tag{2.18}$$

Kako su meridijalna i cirkularna sila jednake, naprezanja su također međusobno jednaka:

$$\sigma_{\varphi}^{\mathrm{s}} = \sigma_{\vartheta}^{\mathrm{s}} = \frac{2275}{30} = 75{,}83 \text{ MPa} . \tag{2.19}$$

Preostaje još samo da se izračunaju membranski radijalni pomak i kut zakreta koji se dobivaju iz sljedećih izraza definiranih za sfernu ljusku prema [3]:

$$u_{rm}^{\mathrm{s}}(\vartheta) = \frac{R \cdot \sin(\vartheta)}{E \cdot h}(N_{\varphi}^{\mathrm{s}} - \nu \cdot N_{\vartheta}^{\mathrm{s}}), \tag{2.20}$$

$$\alpha_{\mathrm{m}}^{\mathrm{s}}(\vartheta) = \frac{1}{E \cdot h}\left\{\frac{\mathrm{d}N_{\varphi}^{\mathrm{s}}(\vartheta)}{\mathrm{d}x} - \nu\frac{\mathrm{d}N_{\vartheta}^{\mathrm{s}}(\vartheta)}{\mathrm{d}x} - (1+\nu)\cdot\cot(\vartheta)\cdot\left[N_{\vartheta}^{\mathrm{s}}(\vartheta) - N_{\varphi}^{\mathrm{s}}(\vartheta)\right]\right\}. \tag{2.21}$$

Na rubu ljuske, tj. na mjestu spoja s cilindričnom ljuskom, za $\vartheta_0 = 90^{\mathrm{o}}$, dobiva se:

$$u_{rm}^{\mathrm{s}}(90^0) = 0{,}168 \text{ mm}, \tag{2.22}$$

$$\alpha_{\mathrm{m}}^{\mathrm{s}}(90^0) = 0 . \tag{2.23}$$

Kako su gornja i donja sferna ljuska geometrijski identične, vrijednosti proračunate za membransko stanje naprezanja i deformacija vrijede za obje ljuske.

2.4. Savijanje tanke cilindrične ljuske

Da bi se mogao provesti proračun savijanja tanke cilindrične ljuske, potrebno je provjeriti ograničenja na geometriju i opterećenje [3], a koja su:

- ljuska je tanka, tj. $h/R < 1/20$;
- progibi su mali ($w_{\max}/h < 1/5$) ;
- ljuska je osnosimetrična, osnosimetrično opterećena i oslonjena ;
- komponente opterećenja p_x i p_n su konstantne ili se mijenjaju po zakonu pravca.

Ljuska je tanka (h/R = 0,046 < 0,05), osnosimetrična te osnosimetrično opterećena i oslonjena, a komponente opterećenja su konstantne (p_x = 0, $p_n = p$). Ljuska je definirana unutar zadanih ograničenja.

Prvo je potrebno izračunati geometrijsko-materijalnu značajku β_{c} i fleksijsku krutost D_{c} cilindrične ljuske :

$$\beta_{\mathrm{c}} = \frac{\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}}{\sqrt{R \cdot h}} = 0{,}0092 \text{ mm}^{-1}, \tag{2.24}$$

$$D_{\mathrm{c}} = \frac{E \cdot h^3}{12(1-\nu^2)} = 5{,}0687 \cdot 10^8 \text{ Nmm} . \tag{2.25}$$

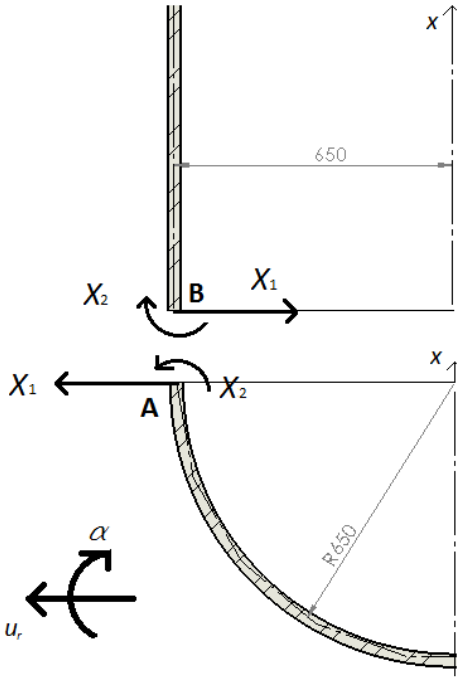
Sada se mogu izračunati uplivni koeficijenti za rub cilindrične ljuske prema [3]:

$$\alpha_{11c} = \frac{1}{2D_c\beta_c^3} = 0,001265 \text{ mm}^2/\text{N},$$

$$\alpha_{12c} = \frac{1}{2D_c\beta_c^2} = 1,1642 \cdot 10^{-5} \text{ mm/N},$$

$$\alpha_{12c} = \alpha_{21c}, \tag{2.26}$$

$$\alpha_{22c} = \frac{1}{D_c\beta_c} = 2,1433 \cdot 10^{-7} \text{ 1/N}.$$



Slika 5 Savijanje donjeg dijela spremnika

Prema slici 5 definira se izraz za ukupan radijalni pomak, odnosno kut zakreta, za točku B:

$$w_B = -\alpha_{11c}X_1 + \alpha_{12c}X_2 + w_m^c, \tag{2.27}$$

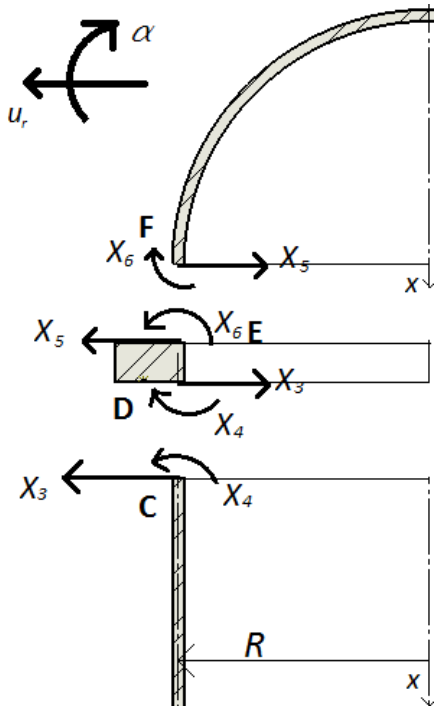
$$\alpha_B = -\alpha_{21c}X_1 + \alpha_{22c}X_2 + \alpha_m^c, \tag{2.28}$$

dok se prema slici 6 definiraju izrazi za točku C:

$$w_C = \alpha_{11c}X_3 + \alpha_{12c}X_4 + w_m^c, \tag{2.29}$$

$$\alpha_C = -\alpha_{21c}X_3 - \alpha_{22c}X_4 + \alpha_m^c. \tag{2.30}$$

Predznaci su definirani s obzirom na doprinos koji poopćene sile u promatranoj točki imaju na ukupan pomak, odnosno kut zakreta čiji su smjerovi definirani na slikama 5 i 6.



Slika 6 Savijanje gornjeg dijela spremnika

2.5. Savijanje strme sferne ljuske

Da bi rješavali problem savijanja sferne ljuske, potrebno je dokazati da je ona strma i duga. Ljuska je strma kada je njezin kut ϑ_0 veći od nekog graničnog kuta ϑ_{gr}. Kako je kut ϑ_0 za sferu jednak 90°, a omjer *h*/*R* je nešto manji od 1/20, prema tablici 1 koja je preuzeta iz [3] dokazano je da je sferna ljuska strma.

Tablica 1 Granični kutovi za kuglu i konus

h/r_1 i h/r_2		1/20	1/30	1/40	1/50
ϑ_{gr}	kugla	30,5	26,7	23,9	21,9
	konus	36,9	31,6	28	25,5

Sad je još potrebno dokazati da je ljuska duga. Uvjet da je ljuska duga jest:

$$\xi = \int_{s_0}^{s} \beta \cdot \mathrm{d}s > 3\,. \tag{2.31}$$

Prema [3] duljina sferne ljuske se provjerava na sljedeći način:

$$\xi_s(\vartheta) = -\sqrt[4]{3(1-\nu^2)} \cdot \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \frac{R \cdot \mathrm{d}\vartheta}{\sqrt{Rh}}\,, \tag{2.32}$$

$$\xi_s(0) = 9,398\,. \tag{2.33}$$

Dokazano je da je sferna ljuska i duga. Značajka β_s i krutost D_s imaju vrijednosti:

$$\beta_s = \frac{\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}}{\sqrt{Rh}} = 0,0092 \text{ mm}^{-1}, \tag{2.34}$$

$$D_s = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} = 5,0687 \cdot 10^8 \text{ Nmm}. \tag{2.35}$$

Uplivni koeficijenti za rub sferne ljuske su prema [3] tada:

$$\begin{aligned} \alpha_{11s} &= \frac{\sin(\vartheta_0)^2}{2D_s\beta_s^3} = 0,001265 \text{ mm}^2/\text{N}, \\ \alpha_{12s} &= \frac{\sin(\vartheta_0)}{2D_s\beta_s^2} = 1,1642 \cdot 10^{-5} \text{ mm/N}, \\ \alpha_{12s} &= \alpha_{21s}, \\ \alpha_{22s} &= \frac{1}{D_s\beta_s} = 2,1433 \cdot 10^{-7} \text{ 1/N}. \end{aligned} \tag{2.36}$$

Prema slici 5 definira se izraz za ukupni radijalni pomak, odnosno kut zakreta, za točku A:

$$u_{r\text{A}} = \alpha_{11s}X_1 + \alpha_{12s}X_2 + u_{r\text{m}}^{\text{s}}, \tag{2.37}$$

$$\alpha_{\text{A}} = -\alpha_{21s}X_1 - \alpha_{22s}X_2 + \alpha_{\text{m}}^{\text{s}}, \tag{2.38}$$

dok se prema slici 6 za točku F izvede izrazi:

$$u_{r\text{F}} = -\alpha_{11s}X_5 + \alpha_{12s}X_6 + u_{r\text{m}}^{\text{s}}, \tag{2.39}$$

$$\alpha_{\text{F}} = -\alpha_{21s}X_5 + \alpha_{22s}X_6 + \alpha_{\text{m}}^{\text{s}}. \tag{2.40}$$

2.6. Kružni prsten

Jedna od pretpostavki o deformiranju, koja čini teorijsku podlogu savijanja kružnih prstenova, kaže da se oblik poprečnog presjeka prstena ne mijenja u toku deformiranja. Drugim riječima, poprečni presjek se zakreće kao kruta figura. To znači da, ako je kut zakreta prstena na uklještenom kraju jednak nuli, onda se prsten uopće ne zakreće pa se analiza savijanja kružnog prstena neće provoditi. Sljedeći izrazi preuzeti su iz [3].

Radijalni pomak u točki D jednak je:

$$u_{r\text{D}} = \frac{0,5 \cdot M \cdot h_{\text{p}}}{E \cdot J_3} + \frac{N}{E \cdot J_1} = 0. \tag{2.41}$$

Radijalni pomak u točki E jednak je:

$$u_{r\text{E}} = -\frac{0,5 \cdot M \cdot h_{\text{p}}}{E \cdot J_3} + \frac{N}{E \cdot J_1} = 0. \tag{2.42}$$

Kut zakreta prstena jednak je:

$$\alpha_{\mathrm{p}} = -\frac{0,5 \cdot M}{E \cdot J_3} = 0 \,. \tag{2.43}$$

2.7. Rezultati analitičkog proračuna

Kako na mjestima spojeva mora postojati kontinuitet radijalnog pomaka, odnosno kuta zakreta, vrijede sljedeći rubni uvjeti:

$$\begin{aligned} u_{r\mathrm{A}} &= w_{\mathrm{B}}\,, \\ \alpha_{\mathrm{A}} &= \alpha_{\mathrm{B}}\,, \\ w_{\mathrm{C}} &= u_{r\mathrm{D}}\,, \\ \alpha_{\mathrm{C}} &= -\alpha_{\mathrm{p}}\,, \\ u_{r\mathrm{F}} &= u_{r\mathrm{E}}\,, \\ \alpha_{\mathrm{F}} &= -\alpha_{\mathrm{p}}\,. \end{aligned} \tag{2.44}$$

Valja primjetiti da zbog definicije smjera kuta zakreta kružnog prstena kut zakreta ljuske jednak je negativnoj vrijednosti kuta zakreta prstena, iako to u ovom slučaju nema utjecaja na rezultat. Ako se u izraze (2.44) uvrste izrazi (2.27), (2.28), (2.29), (2.30), (2.37), (2.38), (2.39) i (2.40), dobije se šest jednadžbi sa šest nepoznanica iz kojih se vrijednosti poopćenih sila izračunaju uz pomoć alata za računalnu matematiku:

$$\begin{aligned} X_1 &= 95,06 \text{ N/mm}\,, \\ X_2 &= 9,856 \cdot 10^{-8} \text{ Nmm/mm}\,, \\ X_3 &= -646,39 \text{ N/mm}\,, \\ X_4 &= 3511,1 \text{ Nmm/mm}\,, \\ X_5 &= 266,14 \text{ N/mm}\,, \\ X_6 &= 1445,6 \text{ Nmm/mm}\,. \end{aligned} \tag{2.45}$$

2.7.1. Raspodjela pomaka, naprezanja i momenata donjeg spoja ljusaka

Prema [3] možemo iskoristiti sljedeće funkcije za raspodjele pomaka, naprezanja i momenta donje sferne ljuske, odnosno donjeg dijela cilindrične ljuske gdje su predznaci definirani s obzirom na doprinos koji poopćene sile u promatranoj točki imaju na promatrane veličine.

Raspodjela radijalnog pomaka duž izvodnice donje sferne ljuske jednaka je:

$$u_r^{\mathrm{ds}} = \alpha_{11\mathrm{s}} \cdot X_1 \cdot f_4(\xi_\mathrm{s}) + \alpha_{12\mathrm{s}} \cdot X_2 \cdot f_3(\xi_\mathrm{s}) + u_{r\mathrm{m}}^{\mathrm{s}}(\vartheta)\,. \tag{2.46}$$

Raspodjela cirkularnog naprezanja duž izvodnice donje sferne ljuske jednaka je:

$$\sigma_\varphi^{\mathrm{ds}} = \frac{E}{R \cdot \sin(\vartheta)} \left[\alpha_{11\mathrm{s}} \cdot X_1 \cdot f_4(\xi_\mathrm{s}) + \alpha_{12\mathrm{s}} \cdot X_2 \cdot f_3(\xi_\mathrm{s}) \right] + \sigma_\varphi^{\mathrm{s}}\,. \tag{2.47}$$

Raspodjela meridijalnog naprezanja duž izvodnice donje sferne ljuske jednaka je:

$$\sigma_\vartheta^{\mathrm{ds}} = -\left[X_1 \cdot f_3(\xi_\mathrm{s}) - \frac{2\beta_\mathrm{s} X_2}{\sin(\vartheta_0)} \cdot f_2(\xi_\mathrm{s}) \right] \cdot \frac{\cos(\vartheta)}{h} + \sigma_\vartheta^{\mathrm{s}}\,. \tag{2.48}$$

Raspodjela meridijalnog momenta duž izvodnice donje sferne ljuske jednaka je:

$$M_\vartheta^{\mathrm{ds}} = \frac{\sin(\vartheta_0)}{\beta_\mathrm{s}} X_1 \cdot f_2(\xi_\mathrm{s}) + X_2 \cdot f_1(\xi_\mathrm{s})\,. \tag{2.49}$$

pri čemu vrijedi:

$$f_1(\xi) = e^{-\xi} \cdot (\cos(\xi) + \sin(\xi)) \tag{2.50}$$

$$f_2(\xi) = e^{-\xi} \cdot \sin(\xi)\,, \tag{2.51}$$

$$f_3(\xi) = e^{-\xi} \cdot (\cos(\xi) - \sin(\xi))\,, \tag{2.52}$$

$$f_4(\xi) = e^{-\xi} \cdot \cos(\xi)\,. \tag{2.53}$$

Raspodjela radijalnog pomaka duž izvodnice donjeg dijela cilindrične ljuske jednaka je:

$$w^{\mathrm{dc}} = -\alpha_{11\mathrm{c}} \cdot X_1 \cdot f_4(\xi_\mathrm{c}) + \alpha_{12\mathrm{c}} \cdot X_2 \cdot f_3(\xi_\mathrm{c}) + w_\mathrm{m}^{\mathrm{c}}(\vartheta)\,. \tag{2.54}$$

Raspodjela cilindričnog naprezanja duž izvodnice donjeg dijela cilindrične ljuske jednaka je:

$$\sigma_\varphi^{\mathrm{dc}} = \frac{2 \cdot R \cdot \beta_\mathrm{c}}{h} \left[-\frac{X_1}{\beta_\mathrm{c}} \cdot f_4(\xi_\mathrm{c}) + X_2 \cdot f_3(\xi_\mathrm{c}) \right] + \frac{p \cdot R}{h}\,. \tag{2.55}$$

Raspodjela meridijalnog naprezanja duž izvodnice donjeg dijela cilindrične ljuske jednaka je:

$$\sigma_\vartheta^{\mathrm{dc}} = \sigma_x^{\mathrm{c}}\,. \tag{2.56}$$

Raspodjela meridijalnog momenta duž izvodnice donjeg dijela cilindrične ljuske jednaka je:

$$M_\vartheta^{\mathrm{dc}} = -\frac{X_1 \cdot f_2(\xi_\mathrm{c})}{\beta_\mathrm{c}} + X_2 \cdot f_1(\xi_\mathrm{c}).\tag{2.57}$$

pri čemu vrijedi:

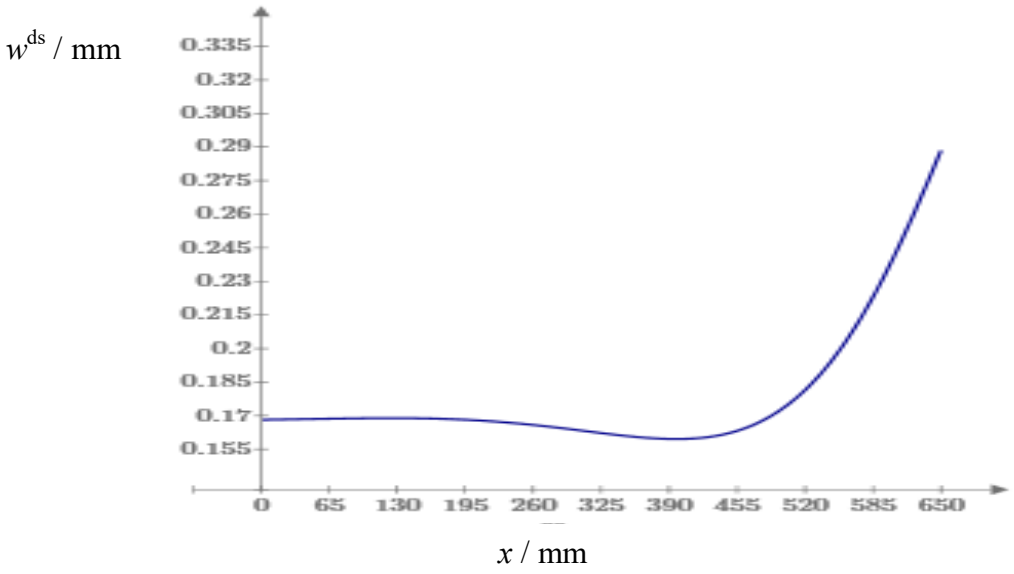
$$\xi_\mathrm{c}(x) = \beta_\mathrm{c} \cdot x\,. \tag{2.58}$$

Slika 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15 i 16 prikazuju dijagrame raspodjele spomenutih funkcija u ovisnosti o koordinati *x*. Pritom valja obratiti pažnju na koordinatne sustave zadane na slici 5 i slici 6. Prema njima mjesto spoja se u dijagramima cilindrične ljuske nalazi u ishodištu, a u

dijagramima sferne ljuske kod koordinate x = 650 mm. Da se bolje vidi prijelaz iz područja savijanja u područje membranskih naprezanja, na slici 7 prikazan je dijagram normalnog pomaka sferne ljuske, odnosno dijagram normalnog pomaka koji se izračuna prema sljedećoj funkciji:

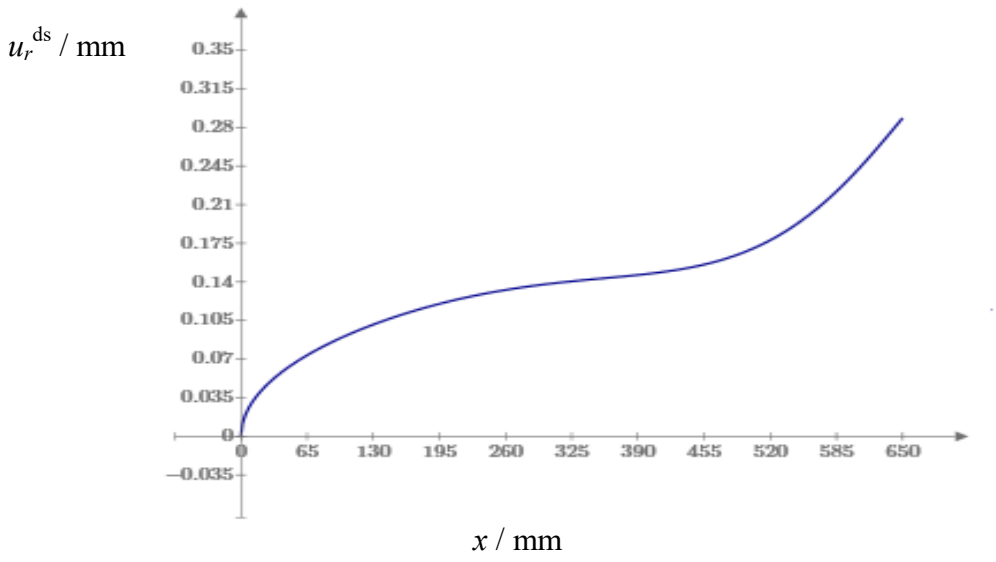
$$w^{\mathrm{ds}} = \frac{u_r^{\mathrm{ds}}}{\sin(\vartheta)} \ . \tag{2.59}$$

Slika 7 prikazuje raspodjelu normalnog pomaka duž izvodnice donje sferne ljuske.



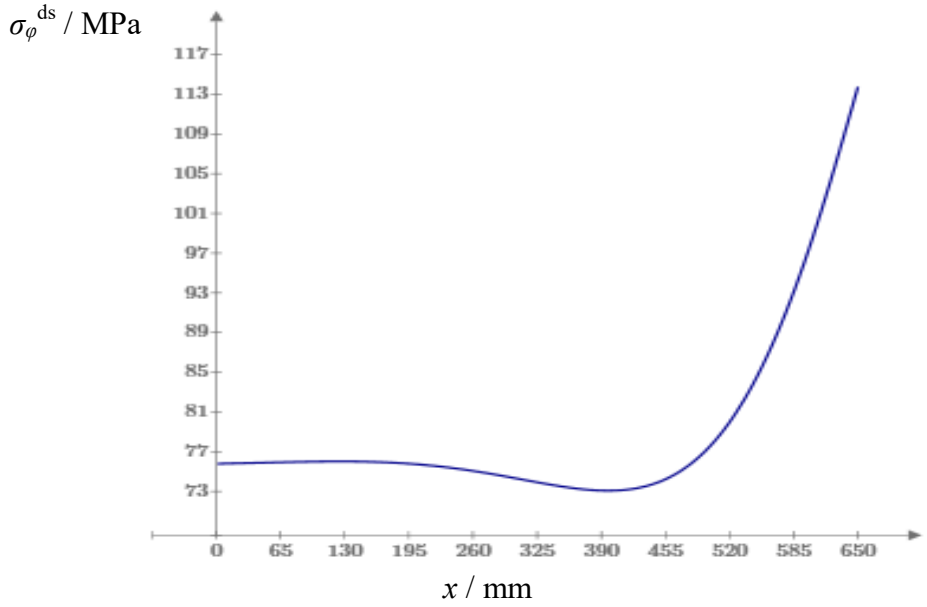
Slika 7 Raspodjela normalnog pomaka za donju sfernu ljusku

Slika 8 prikazuje raspodjelu radijalnog pomaka duž izvodnice donje sferne ljuske.



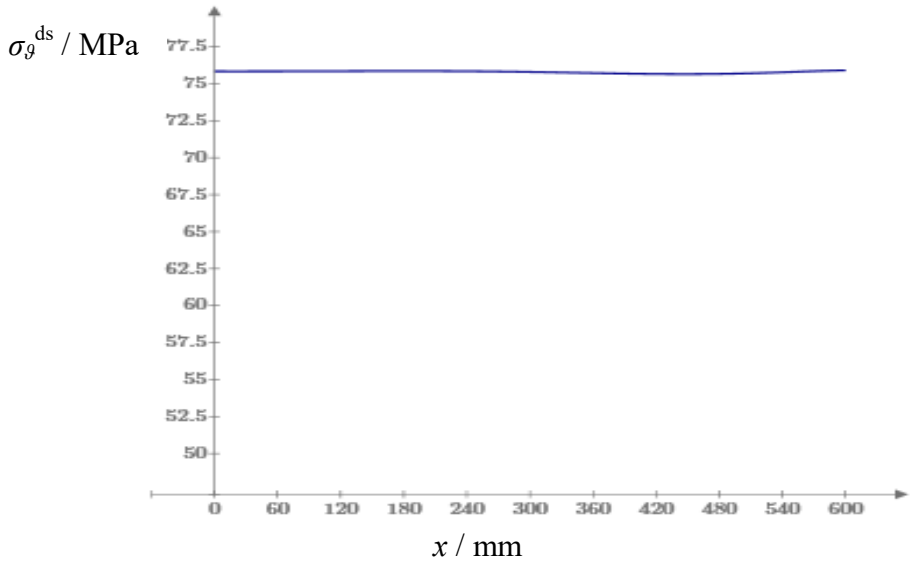
Slika 8 Raspodjela radijalnog pomaka za donju sfernu ljusku

Slika 9 prikazuje raspodjelu cirkularnog naprezanja duž izvodnice donje sferne ljuske.



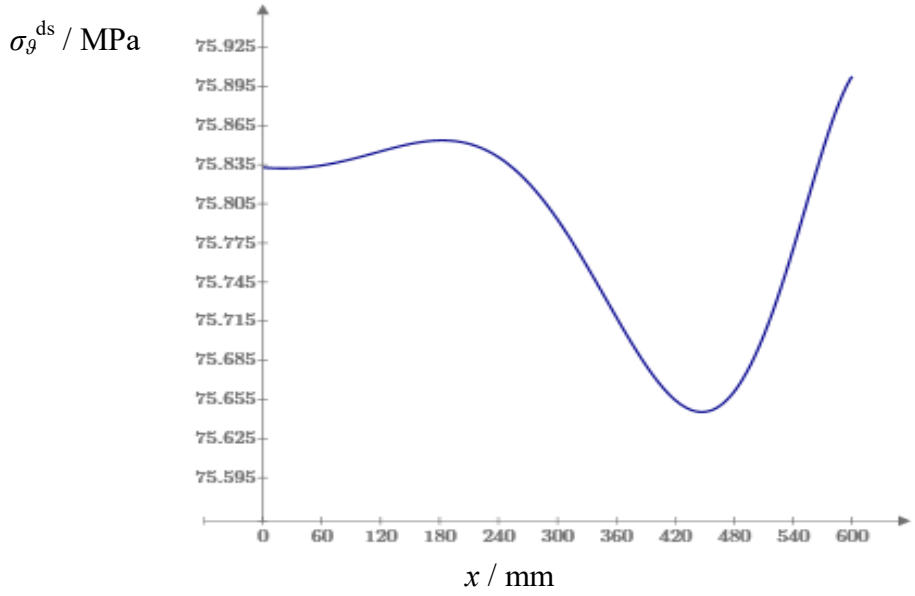
Slika 9 Raspodjela cirkularnog naprezanja za donju sfernu ljusku

Slika 10 prikazuje grublju raspodjelu meridijalnog naprezanja duž izvodnice donje sferne ljuske.



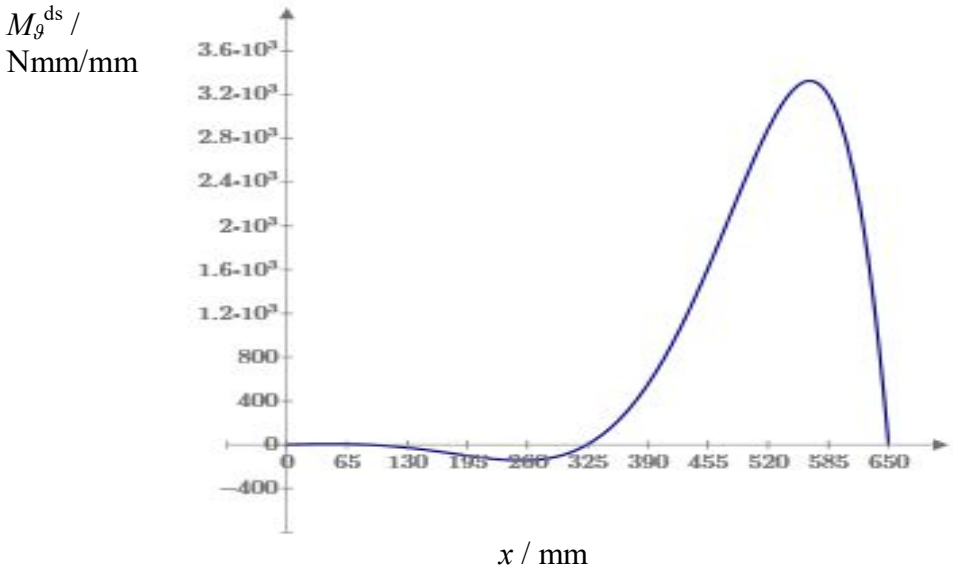
Slika 10 Grublja raspodjela meridijalnog naprezanja za donju sfernu ljusku

Slika 11 prikazuje finiju raspodjelu meridijalnog naprezanja duž izvodnice donje sferne ljuske.



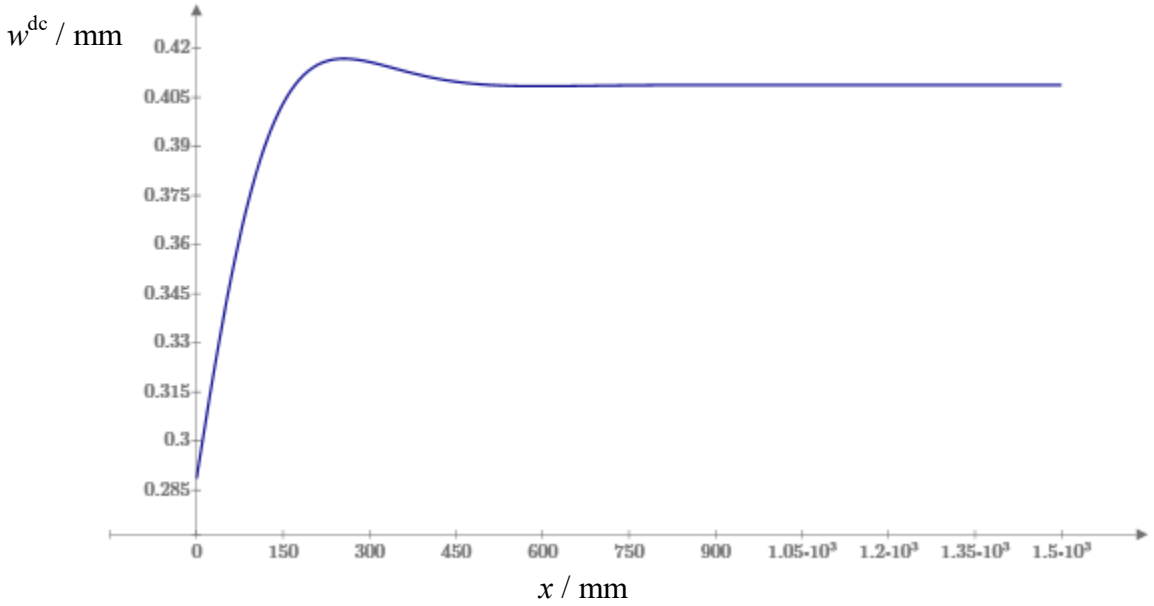
Slika 11 Finija raspodjela meridijalnog naprezanja za donju sfernu ljusku

Slika 12 prikazuje raspodjelu meridijalnog momenta duž izvodnice donje sferne ljuske.



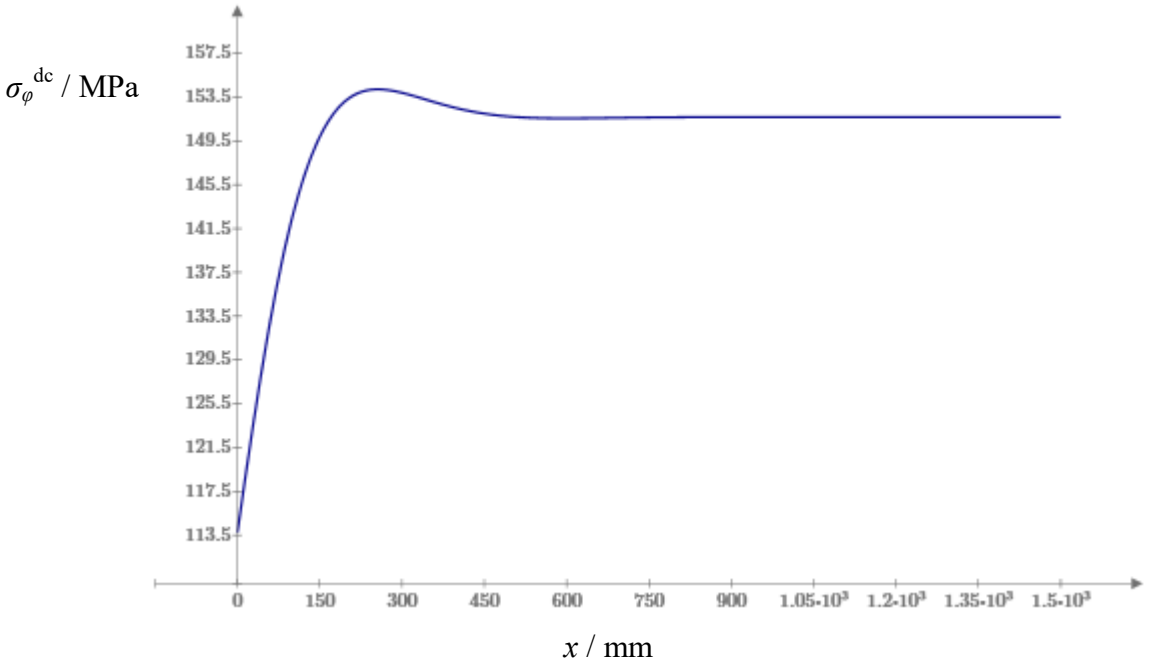
Slika 12 Raspodjela meridijalnog momenta za donju sfernu ljusku

Slika 13 prikazuje raspodjelu radijalnog pomaka duž izvodnice donjeg dijela cilindrične ljuske.



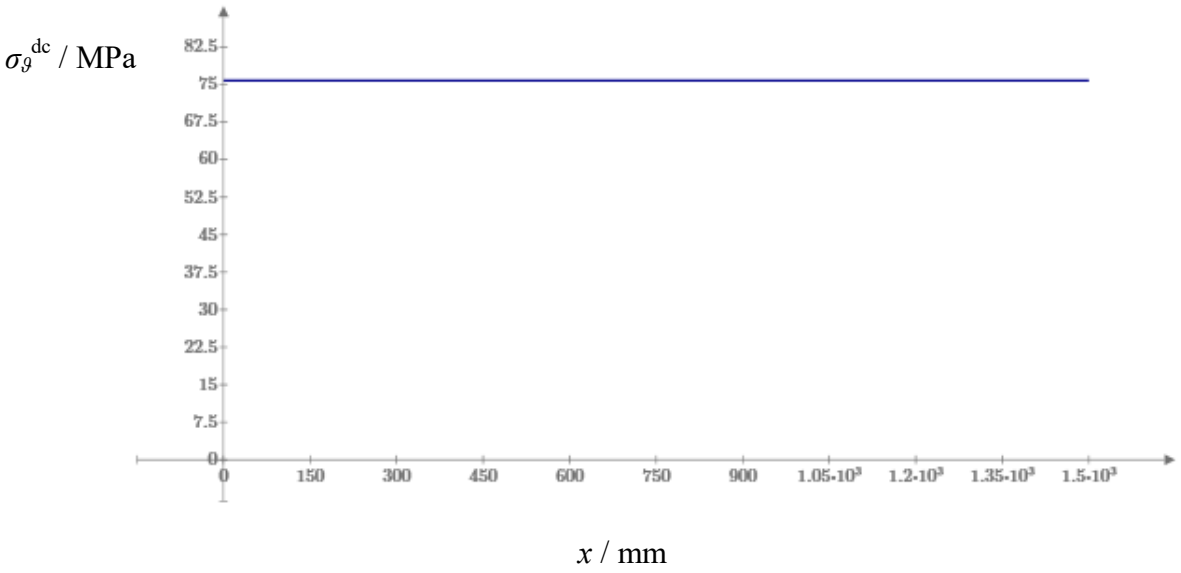
Slika 13 Raspodjela radijalnog pomaka za donji dio cilindrične ljuske

Slika 14 prikazuje raspodjelu cirkularnog naprezanja duž izvodnice donjeg dijela cilindrične ljuske.



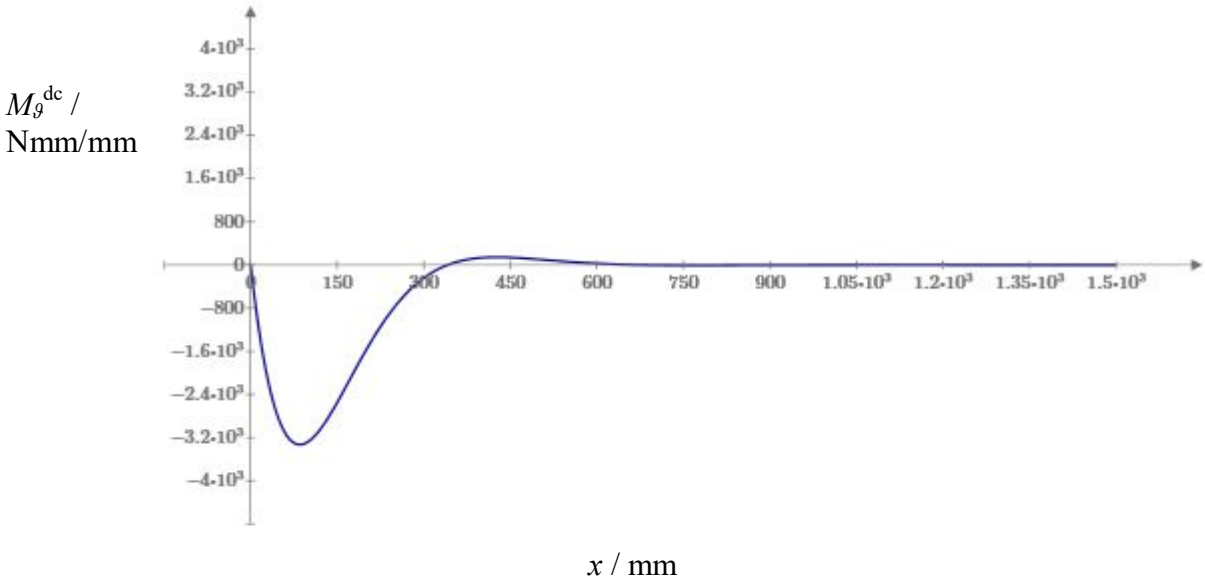
Slika 14 Raspodjela cirkularnog naprezanja za donji dio cilindrične ljuske

Slika 15 prikazuje raspodjelu meridijalnog naprezanja duž izvodnice donjeg dijela cilindrične ljuske.



Slika 15 Raspodjela meridijalnog naprezanja za donji dio cilindrične ljuske

Slika 16 prikazuje raspodjelu meridijalnog momenta duž izvodnice donjeg dijela cilindrične ljuske.



Slika 16 Raspodjela meridijalnog momenta za donji dio cilindrične ljuske

Valja napomenuti da meridijalno naprezanje za sfernu ljusku u dijagramu prikazanom na slici 11 varira između dvije vrijednosti, 75,6 MPa i 76 MPa . Ovako fina raspodjela stavljena je radi potvrđivanja ispravnosti provedenog analitičkog proračuna i numeričke analize, odnosno radi lakše usporedbe s dijagramom generiranim u Abaqusu koji je prikazan u poglavlju 3.6.

2.7.2. Raspodjela pomaka, naprezanja i momenata gornjeg spoja ljusaka

Raspodjela radijalnog pomaka duž izvodnice gornjeg dijela cilindrične ljuske jednaka je:

$$w^{\mathrm{gc}} = \alpha_{11\mathrm{c}} \cdot X_3 \cdot f_4(\xi_{\mathrm{c}}) + \alpha_{12\mathrm{c}} \cdot X_4 \cdot f_3(\xi_{\mathrm{c}}) + w_{\mathrm{m}}^{\mathrm{c}}(\vartheta)\,. \tag{2.60}$$

Raspodjela cirkularnog naprezanja duž izvodnice gornjeg dijela cilindrične ljuske jednaka je:

$$\sigma_{\varphi}^{\mathrm{gc}} = \frac{2 \cdot R \cdot \beta_{\mathrm{c}}}{h}\left[\frac{X_3}{\beta_{\mathrm{c}}} \cdot f_4(\xi_{\mathrm{c}}) + X_4 \cdot f_3(\xi_{\mathrm{c}})\right] + \frac{p \cdot R}{h}\,. \tag{2.61}$$

Raspodjela meridijalnog naprezanja duž izvodnice gornjeg dijela cilindrične ljuske jednaka je:

$$\sigma_{\vartheta}^{\mathrm{gc}} = \sigma_{x}^{\mathrm{c}}\,. \tag{2.62}$$

Raspodjela meridijalnog momenta duž izvodnice gornjeg dijela cilindrične ljuske jednaka je:

$$M_{\vartheta}^{\mathrm{gc}} = -\frac{X_3 \cdot f_2(\xi_{\mathrm{c}})}{\beta_{\mathrm{c}}} - X_4 \cdot f_1(\xi_{\mathrm{c}}). \tag{2.63}$$

Raspodjela radijalnog pomaka duž izvodnice gornje sferne ljuske jednaka je:

$$u_r^{\mathrm{gs}} = -\alpha_{11\mathrm{s}} \cdot X_5 \cdot f_4(\xi_{\mathrm{s}}) + \alpha_{12\mathrm{s}} \cdot X_6 \cdot f_3(\xi_{\mathrm{s}}) + u_{r\mathrm{m}}^{\mathrm{s}}(\vartheta)\,. \tag{2.64}$$

Raspodjela cirkularnog naprezanja duž izvodnice gornje sferne ljuske jednaka je:

$$\sigma_{\varphi}^{\mathrm{gs}} = \frac{E}{R \cdot \sin(\vartheta)}\left[-\alpha_{11\mathrm{s}} \cdot X_5 \cdot f_4(\xi_{\mathrm{s}}) + \alpha_{12\mathrm{s}} \cdot X_6 \cdot f_3(\xi_{\mathrm{s}})\right] + \sigma_{\varphi}^{\mathrm{s}}\,. \tag{2.65}$$

Raspodjela meridijalnog naprezanje duž izvodnice gornje sferne ljuske jednaka je:

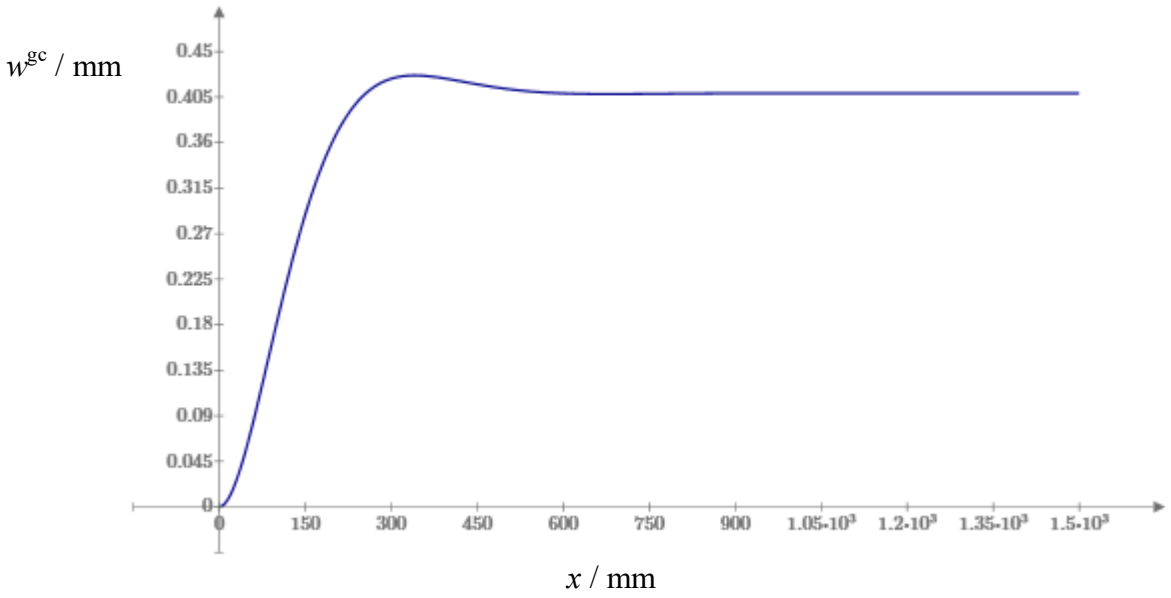
$$\sigma_{\vartheta}^{\mathrm{gs}} = -\left[X_5 \cdot f_3(\xi_{\mathrm{s}}) + \frac{2\beta_{\mathrm{s}} X_6}{\sin(\vartheta_0)} \cdot f_2(\xi_{\mathrm{s}})\right] \cdot \frac{\cos(\vartheta)}{h} + \sigma_{\vartheta}^{\mathrm{s}}\,. \tag{2.66}$$

Raspodjela meridijalnog momenta duž izvodnice gornje sferne ljuske jednaka je:

$$M_{\vartheta}^{\mathrm{gs}} = -\sin(\vartheta_0)\frac{X_5 \cdot f_2(\xi_{\mathrm{s}})}{\beta_{\mathrm{s}}} + X_6 \cdot f_1(\xi_{\mathrm{s}}). \tag{2.67}$$

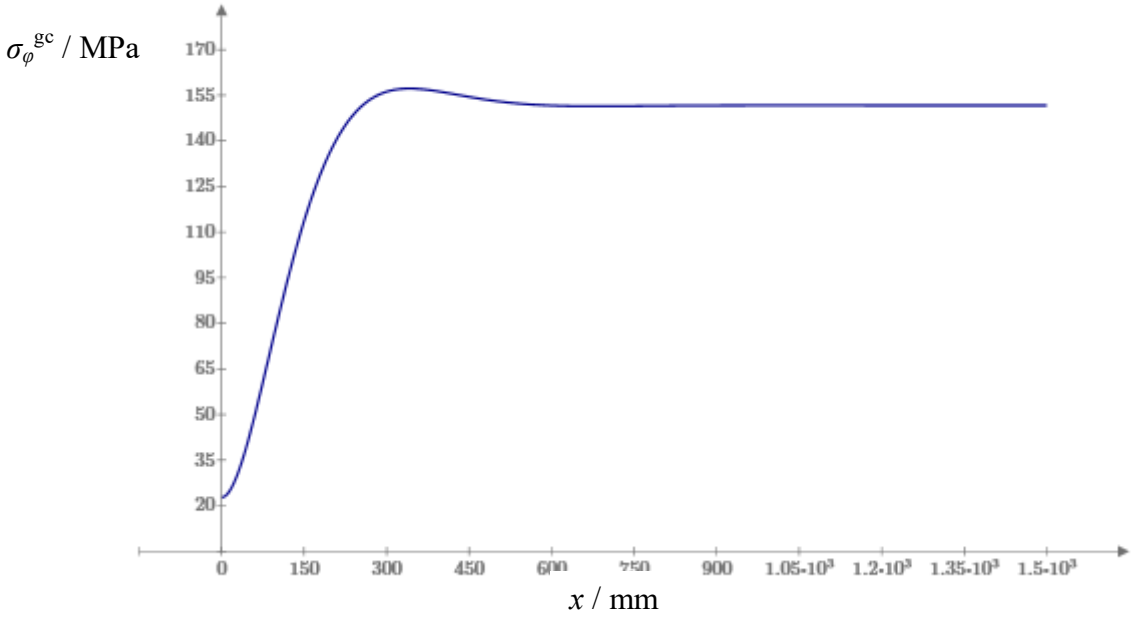
Sada možemo prikazati i raspodjele navedenih funkcija u ovisnosti o koordinati *x*. Napomena iz potpoglavlja 2.7.1 u pogledu koordinate mjesta spoja i dalje vrijedi.

Slika 17 prikazuje raspodjelu radijalnog pomaka duž izvodnice gornjeg dijela cilindrične ljuske.



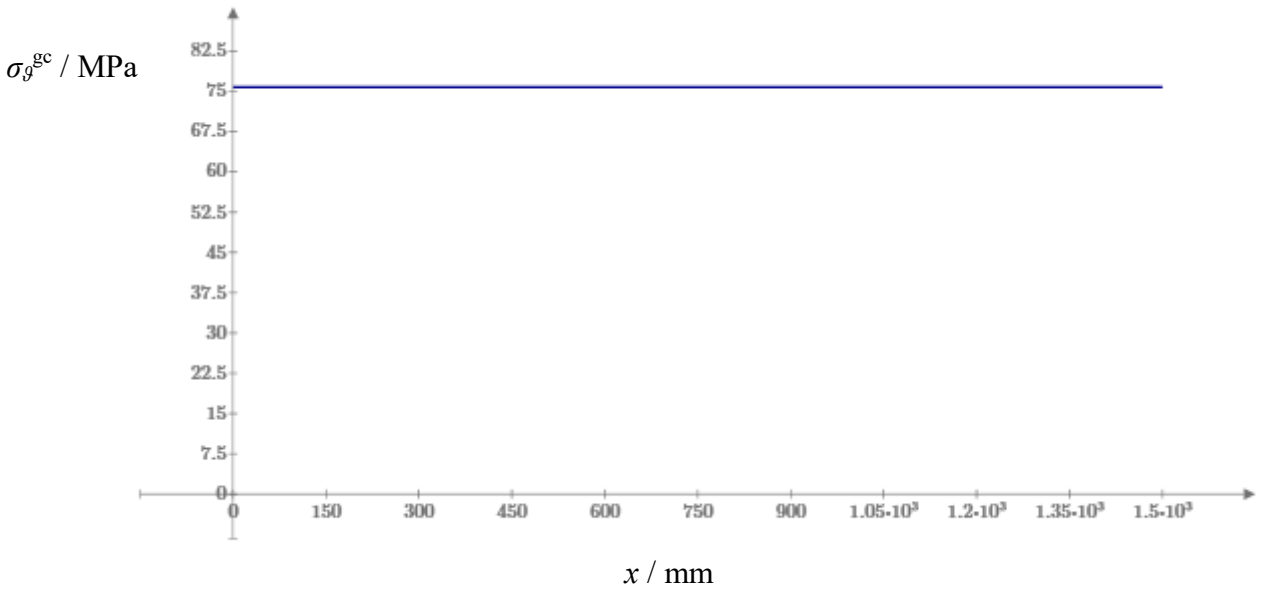
Slika 17 Raspodjela radijalni pomak za gornji dio cilindrične ljuske

Slika 18 prikazuje raspodjelu cirkularnog naprezanja duž izvodnice gornjeg dijela cilindrične ljuske.



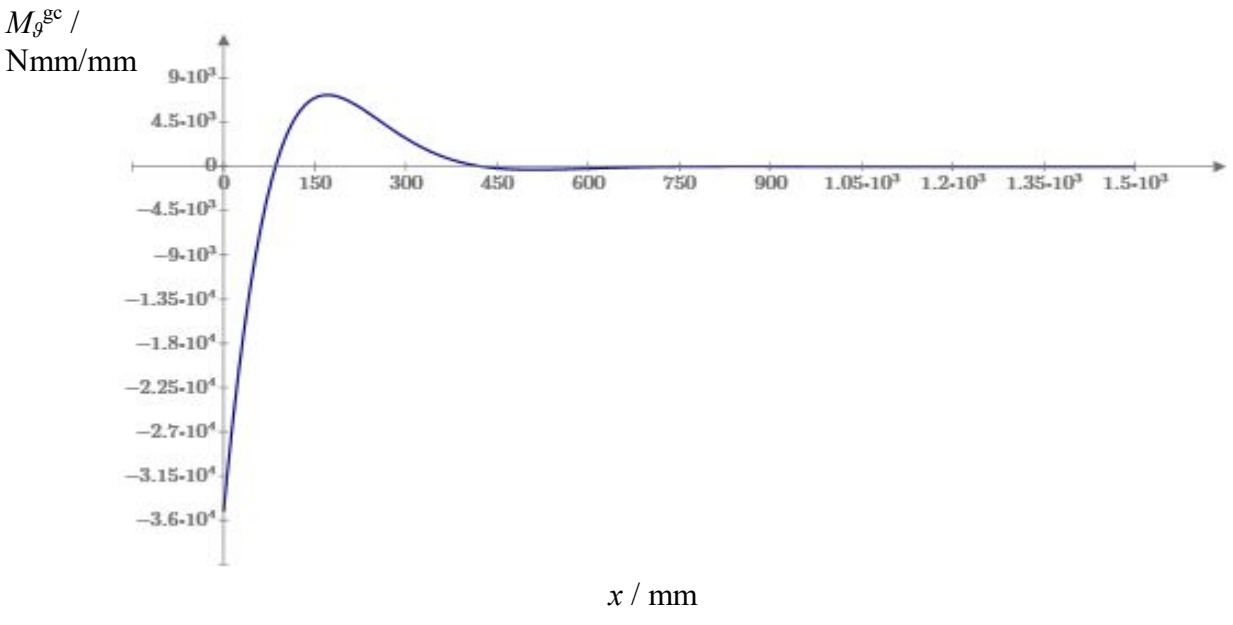
Slika 18 Raspodjela cirkularnog naprezanja za gornji dio cilindrične ljuske

Slika 19 prikazuje raspodjelu meridijalnog naprezanja duž izvodnice gornjeg dijela cilindrične ljuske.



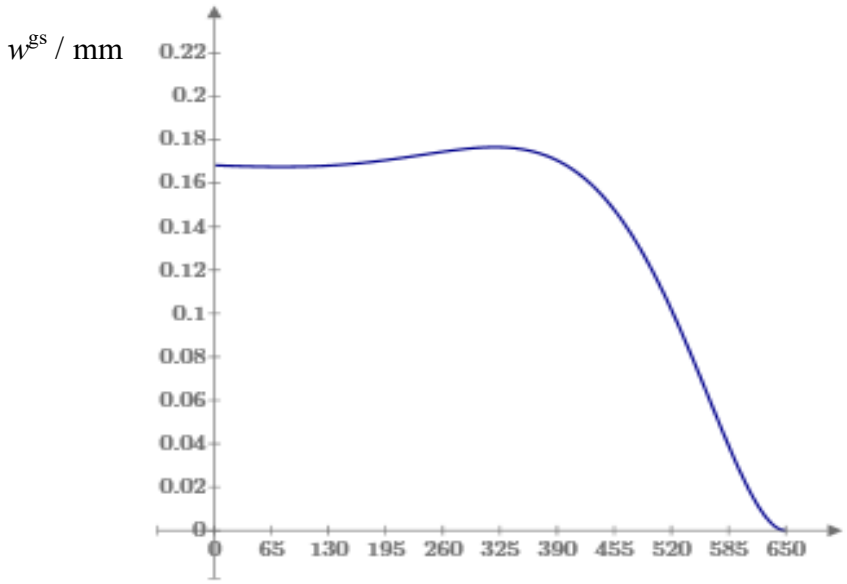
Slika 19 Raspodjela meridijalnog naprezanja za gornji dio cilindrične ljuske

Slika 20 prikazuje raspodjelu meridijalnog momenta duž izvodnice gornjeg dijela cilindrične ljuske.



Slika 20 Raspodjela meridijalnog momenta za gornji dio cilindrične ljuske

Slika 21 jasnije prikazuje prijelaz iz područja na koje savijanje ima veliki utjecaj u područje membranskih deformacija pomoću raspodjele normalnog pomaka duž izvodnice gornje sferne ljuske.

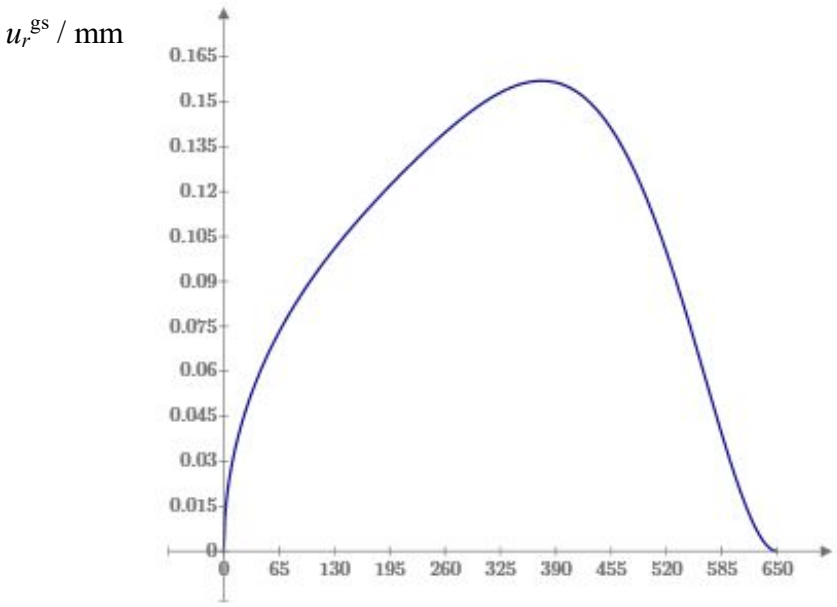


Slika 21 Raspodjela normalnog pomaka za gornju sfernu ljusku

Funkcija za raspodjelu normalnog pomaka duž izvodnice gronje sferne ljuske jednaka je:

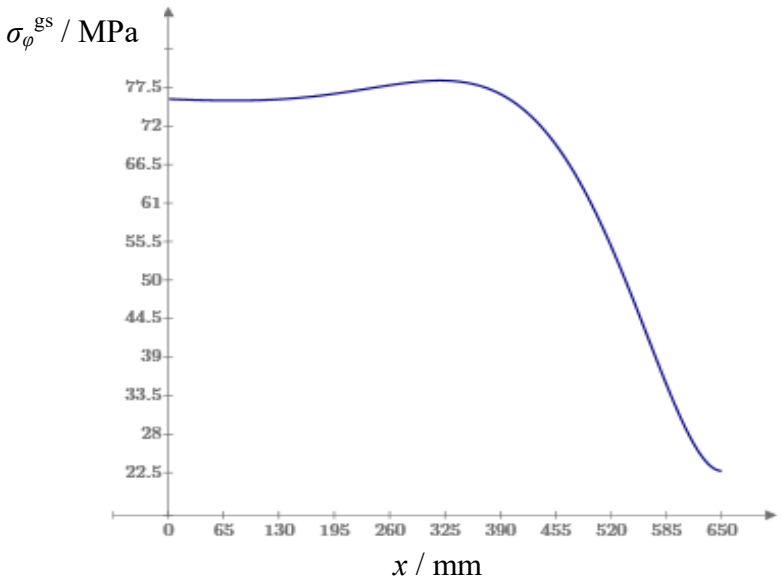
$$w^{gs} = \frac{u_r^{gs}}{\sin(\vartheta)}. \tag{2.68}$$

Slika 22 prikazuje raspodjelu radijalnog pomaka duž izvodnice gornje sferne ljuske.



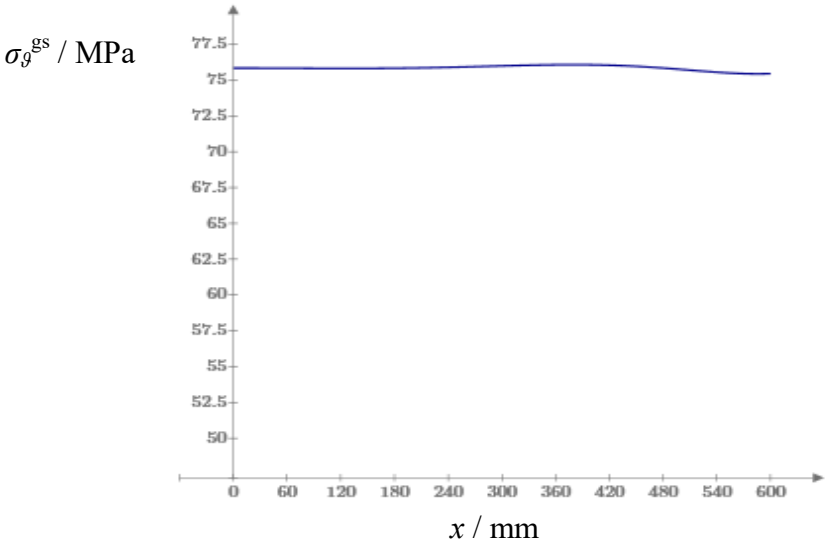
Slika 22 Raspodjela radijalnog pomaka za gornju sfernu ljusku

Slika 23 prikazuje raspodjelu cirkularnog naprezanja duž izvodnice gornje sferne ljuske.



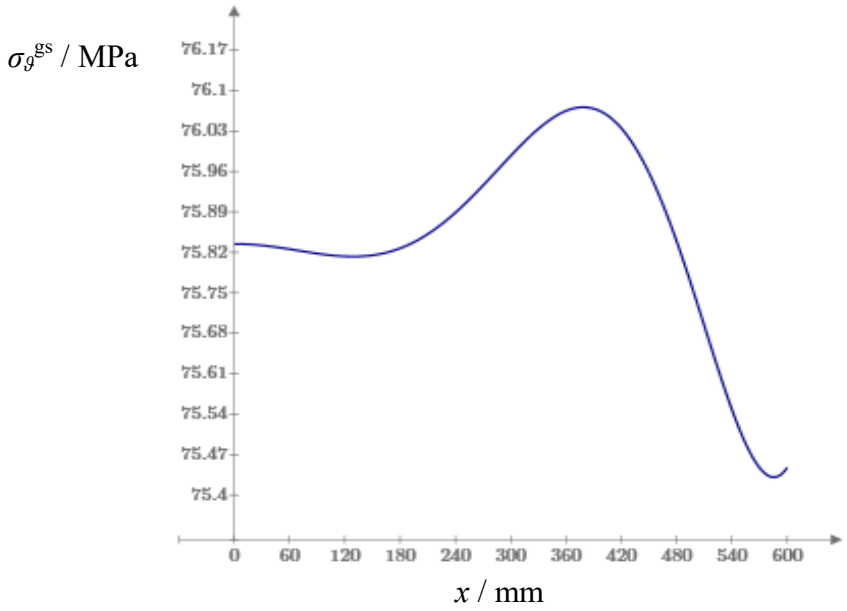
Slika 23 Raspodjela cirkularnog naprezanja za gornju sfernu ljusku

Slika 24 prikazuje grublju raspodjelu meridijalnog naprezanja duž izvodnice gornje sferne ljuske.



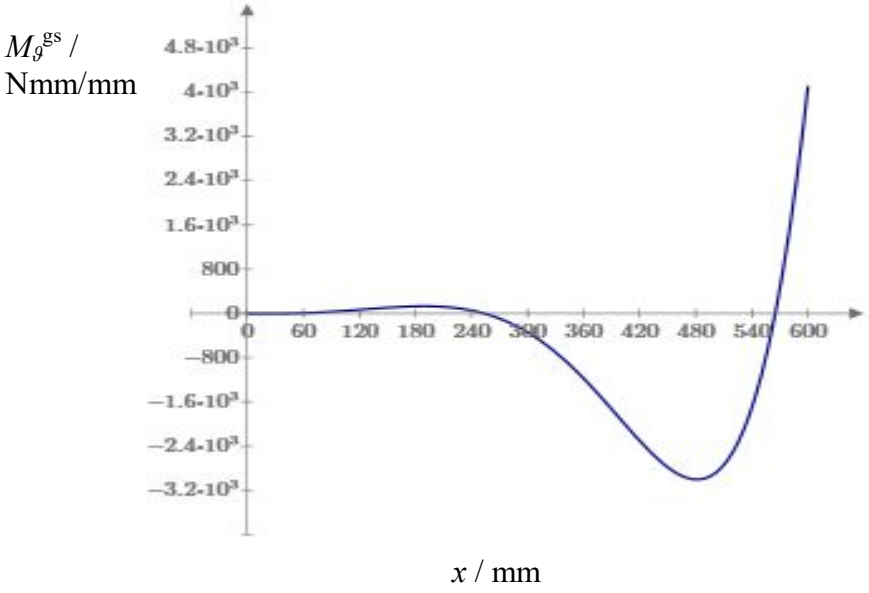
Slika 24 Grublja raspodjela meridijalnog naprezanja za gornju sfernu ljusku

Slika 25 prikazuje finiju raspodjelu meridijalnog naprezanja duž izvodnice gornje sferne ljuske.



Slika 25 Finija raspodjela meridijalnog naprezanja za gornju sfernu ljusku

Slika 26 prikazuje raspodjelu meridijalnog momenta duž izvodnice gornje sferne ljuske.



Slika 26 Raspodjela meridijalnog momenta za gornju sfernu ljusku

Kao što je već ranije spomenuto za donju sfernu ljusku, raspodjela meridijalnog naprezanja duž izvodnice gornje sferne ljuske je približno konstantna, jer ono varira između vrijednosti 75,4 i 76 MPa (slika 25). Ovako fina raspodjela stavljena je radi lakše usporedbe s dijagramom generiranim u Abaqusu koji je prikazan u poglavlju 3.7.

2.7.3. Ekvivalentna naprezanja

Da bismo analitički odredili kritično naprezanje, potrebno je odrediti funkcije raspodjele ekvivalentnih naprezanja duž unutrašnjih, odnosno vanjskih rubova ljusaka. Ekvivalentna naprezanja potrebno je proračunati na rubovima jer se tamo pojavljuju najveća naprezanja. Razlog tome je linearna raspodjela naprezanja uslijed savijanja. Kao što je navedeno u potpoglavlju 2.1, naprezanja u pravcu normale na srednju plohu zanemaruju se, stoga se ekvivalentno naprezanje računa po dvoosnom stanju naprezanja. Opći izrazi za naprezanja na rubovima prema [3] glase:

$$\sigma_{\vartheta}^{\mathrm{V,U}} = \sigma_{\vartheta} \pm \frac{6M_{\vartheta}}{h^2}, \tag{2.69}$$

$$\sigma_{\varphi}^{\mathrm{V,U}} = \sigma_{\varphi} \pm \frac{6M_{\varphi}}{h^2}. \tag{2.70}$$

Kako prema [3] vrijedi:

$$M_{\varphi} = \nu \cdot M_{\vartheta}, \tag{2.71}$$

ubacivanjem izraza (2.71) u (2.70) dobivamo:

$$\sigma_{\varphi}^{\mathrm{V,U}} = \sigma_{\varphi} \pm \nu \cdot \frac{6M_{\vartheta}}{h^2}. \tag{2.72}$$

Ekvivalentno naprezanje se po teoriji najveće distorzijske energije prema [4] računa:

$$\sigma_{\mathrm{ekv}} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2}. \tag{2.73}$$

Izraz (2.73) se može preformulirati u sljedeći izraz:

$$\sigma_{\mathrm{ekv}} = \sqrt{\sigma_{\vartheta}^2 + \sigma_{\varphi}^2 - \sigma_{\vartheta}\sigma_{\varphi}}. \tag{2.74}$$

Na vanjskome rubu donje sferne ljuske definirana su sljedeća meridijalna, odnosno cirkulrna naprezanja:

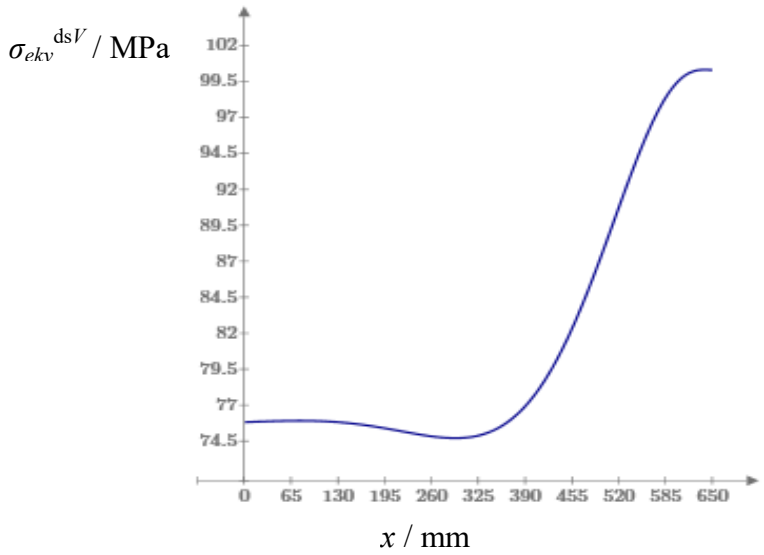
$$\sigma_{\vartheta}^{\mathrm{dsV}} = \sigma_{\vartheta}^{\mathrm{ds}} + \frac{6 \cdot M_{\vartheta}^{\mathrm{ds}}}{h^2}, \tag{2.75}$$

$$\sigma_{\varphi}^{\mathrm{dsV}} = \sigma_{\varphi}^{\mathrm{ds}} + \nu \cdot \frac{6 \cdot M_{\vartheta}^{\mathrm{ds}}}{h^2}. \tag{2.76}$$

Raspodjela ekvivalentnog naprezanje na vanjskome rubu donje sferne ljuske opisana je:

$$\sigma_{\mathrm{ekv}}^{\mathrm{dsV}} = \sqrt{\left(\sigma_{\vartheta}^{\mathrm{dsV}}\right)^2 + \left(\sigma_{\varphi}^{\mathrm{dsV}}\right)^2 - \sigma_{\vartheta}^{\mathrm{dsV}}\sigma_{\varphi}^{\mathrm{dsV}}}. \tag{2.77}$$

Slika 27 prikazuje raspodjelu ekvivalentnog naprezanja duž vanjskog ruba donje sferne ljuske.



Slika 27 Raspodjela ekvivalentnog naprezanja duž vanjskog ruba donje sferne ljuske

Na unutrašnjem rubu donje sferne ljuske definirana su sljedeća meridijalna, odnosno cirkularna naprezanja:

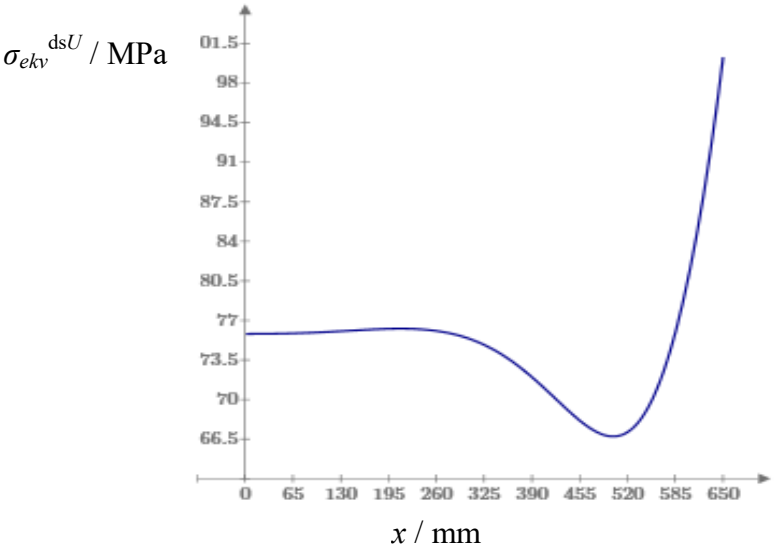
$$\sigma_{\vartheta}^{dsU} = \sigma_{\vartheta}^{ds} - \frac{6 \cdot M_{\vartheta}^{ds}}{h^2}, \tag{2.78}$$

$$\sigma_{\varphi}^{dsU} = \sigma_{\varphi}^{ds} - \nu \cdot \frac{6 \cdot M_{\vartheta}^{ds}}{h^2}. \tag{2.79}$$

Raspodjela ekvivalentnog naprezanje na vanjskome rubu donje sferne ljuske opisana je:

$$\sigma_{ekv}^{dsU} = \sqrt{\left(\sigma_{\vartheta}^{dsU}\right)^2 + \left(\sigma_{\varphi}^{dsU}\right)^2 - \sigma_{\vartheta}^{dsU}\sigma_{\varphi}^{dsU}}\,. \tag{2.80}$$

Slika 28 prikazuje raspodjelu ekvivalentnog naprezanja duž unutrašnjeg ruba donje sferne ljuske.



Slika 28 Raspodjela ekvivalentnog naprezanja duž unutrašnjeg ruba donje sferne ljuske

Na vanjskome rubu donjeg dijela cilindrične ljuske definirana su sljedeća meridijalna, odnosno cirkularna naprezanja:

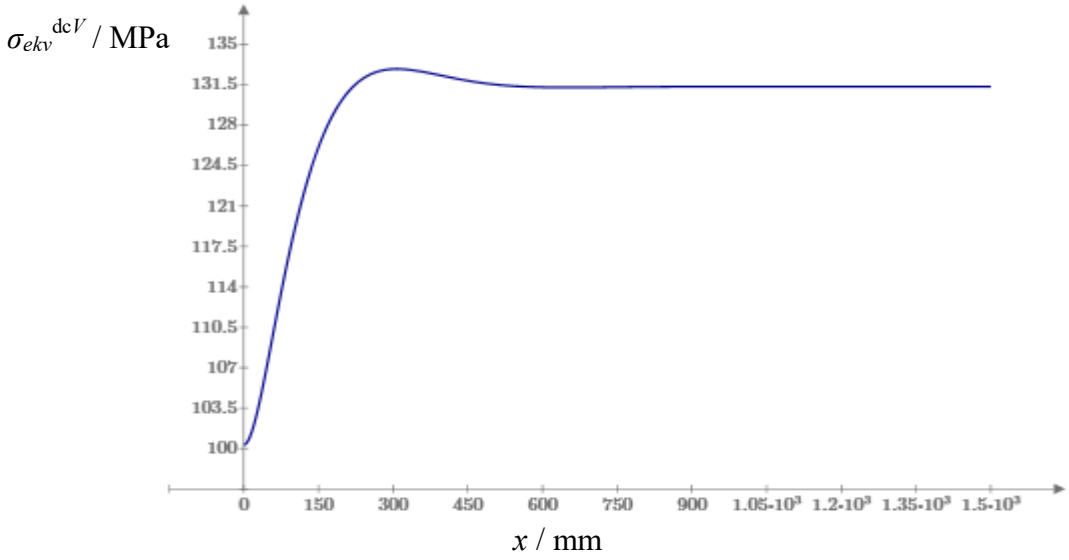
$$\sigma_{\vartheta}^{\mathrm{dcV}} = \sigma_{\vartheta}^{\mathrm{dc}} + \frac{6 \cdot M_{\vartheta}^{\mathrm{dc}}}{h^2}, \tag{2.81}$$

$$\sigma_{\varphi}^{\mathrm{dcV}} = \sigma_{\varphi}^{\mathrm{dc}} + \nu \cdot \frac{6 \cdot M_{\vartheta}^{\mathrm{dc}}}{h^2}. \tag{2.82}$$

Raspodjela ekvivalentnog naprezanje na vanjskome rubu donje sferne ljuske opisana je:

$$\sigma_{\mathrm{ekv}}^{\mathrm{dcV}} = \sqrt{\left(\sigma_{\vartheta}^{\mathrm{dcV}}\right)^2 + \left(\sigma_{\varphi}^{\mathrm{dcV}}\right)^2 - \sigma_{\vartheta}^{\mathrm{dcV}} \sigma_{\varphi}^{\mathrm{dcV}}}\ . \tag{2.83}$$

Slika 29 prikazuje raspodjelu ekvivalentnog naprezanja duž vanjskog ruba donjeg dijela cilindrične ljuske.



Slika 29 Raspodjela ekvivalentnog naprezanja duž vanjskog ruba donjeg dijela cilindrične ljuske

Na unutrašnjem rubu donjeg dijela cilindrične ljuske definirana su sljedeća meridijalna, odnosno cirkularna naprezanja:

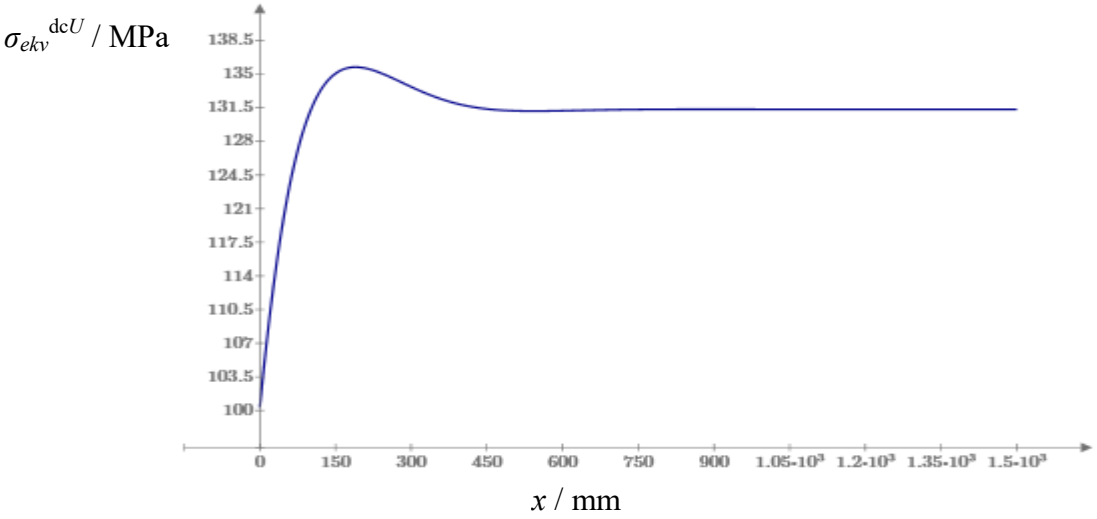
$$\sigma_{\vartheta}^{\mathrm{dcU}} = \sigma_{\vartheta}^{\mathrm{dc}} - \frac{6 \cdot M_{\vartheta}^{\mathrm{dc}}}{h^2}, \tag{2.84}$$

$$\sigma_{\varphi}^{\mathrm{dcU}} = \sigma_{\varphi}^{\mathrm{dc}} - \nu \cdot \frac{6 \cdot M_{\vartheta}^{\mathrm{dc}}}{h^2}. \tag{2.85}$$

Raspodjela ekvivalentnog naprezanje na unutrašnjem rubu donje sferne ljuske opisana je:

$$\sigma_{\mathrm{ekv}}^{\mathrm{dcU}} = \sqrt{\left(\sigma_{\vartheta}^{\mathrm{dcU}}\right)^2 + \left(\sigma_{\varphi}^{\mathrm{dcU}}\right)^2 - \sigma_{\vartheta}^{\mathrm{dcU}} \sigma_{\varphi}^{\mathrm{dcU}}}\ . \tag{2.86}$$

Slika 30 prikazuje raspodjelu ekvivalentnog naprezanja duž unutrašnjeg ruba donjeg dijela cilindrične ljuske.



Slika 30 Raspodjela ekvivalentnog naprezanja duž unutrašnjeg ruba donjeg dijela cilindrične ljuske

Na vanjskome rubu gornjeg dijela cilindrične ljuske definirana su sljedeća meridijalna, odnosno cirkularna naprezanja:

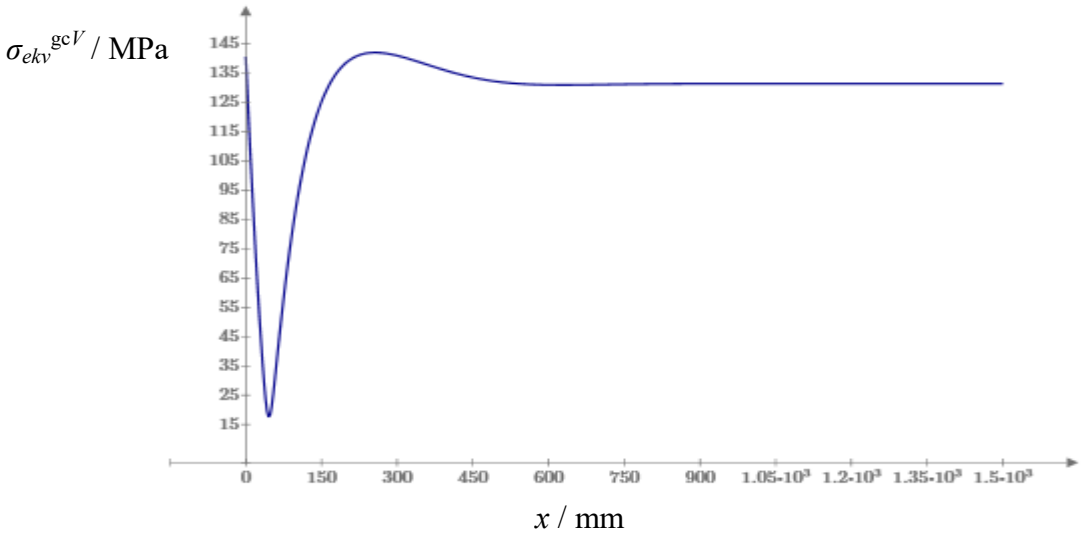
$$\sigma_{\vartheta}^{\mathrm{gcV}} = \sigma_{\vartheta}^{\mathrm{gc}} + \frac{6 \cdot M_{\vartheta}^{\mathrm{gc}}}{h^2}, \tag{2.87}$$

$$\sigma_{\varphi}^{\mathrm{gcV}} = \sigma_{\varphi}^{\mathrm{gc}} + \nu \cdot \frac{6 \cdot M_{\vartheta}^{\mathrm{gc}}}{h^2}. \tag{2.88}$$

Raspodjela ekvivalentnog naprezanje na vanjskome rubu gornje sferne ljuske opisana je:

$$\sigma_{\mathrm{ekv}}^{\mathrm{gcV}} = \sqrt{\left(\sigma_{\vartheta}^{\mathrm{gcV}}\right)^2 + \left(\sigma_{\varphi}^{\mathrm{gcV}}\right)^2 - \sigma_{\vartheta}^{\mathrm{gcV}} \sigma_{\varphi}^{\mathrm{gcV}}}\ . \tag{2.89}$$

Slika 31 prikazuje raspodjelu ekvivalentnog naprezanja duž vanjskog ruba gornjeg dijela cilindrične ljuske.



Slika 31 Raspodjela ekvivalentnog naprezanja duž vanjskog ruba gornjeg dijela cilindrične ljuske

Na unutrašnjem rubu gornjeg dijela cilindrične ljuske definirana su sljedeća meridijalna, odnosno cirkularna naprezanja:

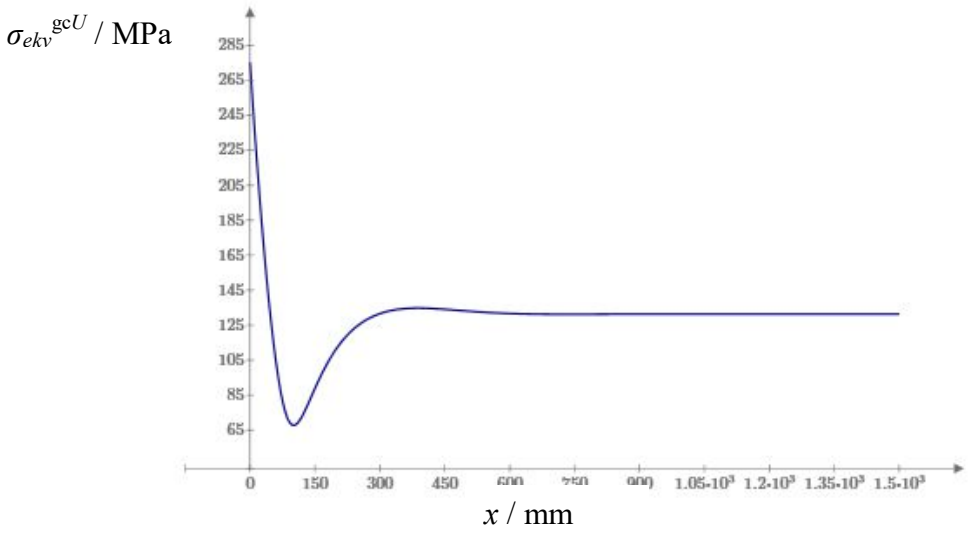
$$\sigma_{\vartheta}^{\mathrm{gcU}} = \sigma_{\vartheta}^{\mathrm{gc}} - \frac{6 \cdot M_{\vartheta}^{\mathrm{gc}}}{h^2}, \tag{2.90}$$

$$\sigma_{\varphi}^{\mathrm{gcU}} = \sigma_{\varphi}^{\mathrm{gc}} - \nu \cdot \frac{6 \cdot M_{\vartheta}^{\mathrm{gc}}}{h^2}. \tag{2.91}$$

Raspodjela ekvivalentnog naprezanje na unutrašnjem rubu donje sferne ljuske opisana je:

$$\sigma_{\mathrm{ekv}}^{\mathrm{gcU}} = \sqrt{\left(\sigma_{\vartheta}^{\mathrm{gcU}}\right)^2 + \left(\sigma_{\varphi}^{\mathrm{gcU}}\right)^2 - \sigma_{\vartheta}^{\mathrm{gcU}} \sigma_{\varphi}^{\mathrm{gcU}}}\ . \tag{2.92}$$

Slika 32 prikazuje raspodjelu ekvivalentnog naprezanja duž unutrašnjeg ruba gornjeg dijela cilindrične ljuske.



Slika 32 Raspodjela ekvivalentnog naprezanja duž unutrašnjeg ruba gornjeg dijela cilindrične ljuske

Na vanjskome rubu gornje sferne ljuske definirana su sljedeća meridijalna, odnosno cirkualrna naprezanja:

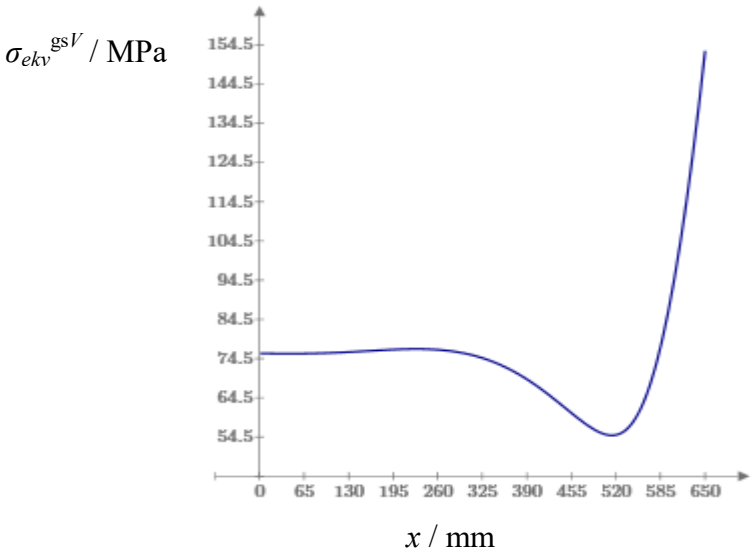
$$\sigma_{\vartheta}^{\mathrm{gsV}} = \sigma_{\vartheta}^{\mathrm{gs}} + \frac{6 \cdot M_{\vartheta}^{\mathrm{gs}}}{h^2}, \tag{2.93}$$

$$\sigma_{\varphi}^{\mathrm{gsV}} = \sigma_{\varphi}^{\mathrm{gs}} + \nu \cdot \frac{6 \cdot M_{\vartheta}^{\mathrm{gs}}}{h^2}. \tag{2.94}$$

Raspodjela ekvivalentnog naprezanje na vanjskome rubu gornje sferne ljuske opisana je:

$$\sigma_{\mathrm{ekv}}^{\mathrm{gsV}} = \sqrt{\left(\sigma_{\vartheta}^{\mathrm{gsV}}\right)^2 + \left(\sigma_{\varphi}^{\mathrm{gsV}}\right)^2 - \sigma_{\vartheta}^{\mathrm{gsV}} \sigma_{\varphi}^{\mathrm{gsV}}}\ . \tag{2.95}$$

Slika 33 prikazuje raspodjelu ekvivalentnog naprezanja duž vanjskog ruba gornje sferne ljuske.



Slika 33 Raspodjela ekvivalentnog naprezanja duž vanjskog ruba gornje sferne ljuske

Na unutrašnjem rubu gornje sferne ljuske definirana su sljedeća meridijalna, odnosno cirkularna naprezanja:

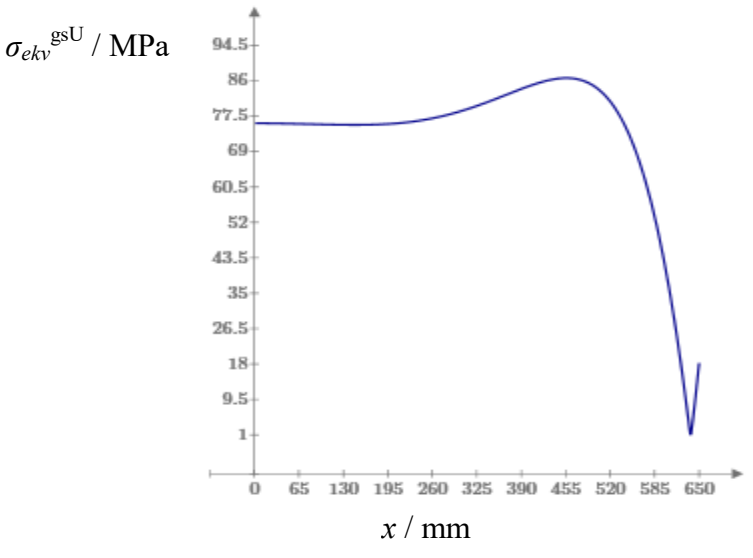
$$\sigma_{\vartheta}^{gsU} = \sigma_{\vartheta}^{gs} - \frac{6 \cdot M_{\vartheta}^{gs}}{h^2}, \tag{2.96}$$

$$\sigma_{\varphi}^{gsU} = \sigma_{\varphi}^{gs} - \nu \cdot \frac{6 \cdot M_{\vartheta}^{gs}}{h^2}. \tag{2.97}$$

Raspodjela ekvivalentnog naprezanje na unutrašnjem rubu gornje sferne ljuske opisana je:

$$\sigma_{ekv}^{gsU} = \sqrt{\left(\sigma_{\vartheta}^{gsU}\right)^2 + \left(\sigma_{\varphi}^{gsU}\right)^2 - \sigma_{\vartheta}^{gsU}\sigma_{\varphi}^{gsU}}. \tag{2.98}$$

Slika 34 prikazuje raspodjelu ekvivalentnog naprezanja duž unutrašnjeg ruba gornje sferne ljuske.



Slika 34 Raspodjela ekvivalentnog naprezanja duž unutrašnjeg ruba gornje sferne ljuske

Iz slike 32 se može očitati najveće ekvivalentno naprezanje u iznosu od 275 MPa. Naprezanje djeluje na unutrašnjem rubu gornjeg dijela cilindrične ljuske blizu spoja sa prstenom. Kako je na zadanu konstrukciju primjenjen statički tlak, možemo kritično naprezanje uspoređivati s granicom elastičnosti materijala. Kako se za izradu spremnika koriste konstrukcijski čelici poput St 52, granica elastičnosti iznosi 350 MPa [1]. Sigurnost računamo prema jednostavnom izrazu:

$$S = \frac{\sigma_{\mathrm{e}}}{\sigma_{\mathrm{krit}}} = \frac{350}{275} = 1,27\,. \tag{2.99}$$

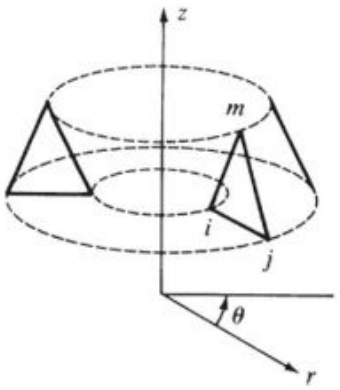
Kako je proračunski tlak od 7 MPa puno veći od radnog tlaka od 3,5 MPa, možemo smatrati da je izračunata sigurnost zadovoljavajuća.

3. Numeričko rješenje

Numerički proračun provest će se pomoću programskog paketa ABAQUS [6] koji se temelji na metodi konačnih elemenata. Metoda konačnih elemenata numerička je metoda koja se temelji na fizičkoj diskretizaciji kontinuuma. Razmatrani kontinuum s beskonačno stupnjeva slobode gibanja zamjenjuje se s diskretnim modelom međusobno povezanih elemenata s ograničenim brojem stupnjeva slobode. Ti elementi nazivaju se konačni elementi, a razmatrani kontinuum stoga postaje mreža konačnih elemenata. Prije same analize zadane konstrukcije najprije će biti dan opis odabranih konačnih elemenata, da bi se zatim provela njihova verifikacija na jednostavnom primjeru. Za početnu verifikaciju odabrani su osnosimetrični pravokutni element drugog reda (CAX8), ljuskasti pravokutni element drugog reda (S4) i jednodimenzijski osnosimetrični element drugog reda za analizu osnosimetričnih ljuski (SAX2). Kao jednostavan primjer uzeta je cilindrična ljuska opterećena unutarnjim tlakom p kao u potpoglavlju 2.2. Dimenzije analizirane ljuske jednake su onima u zadanoj konstrukciji. Radi dodatne jednostavnosti ljuska nije opterećena u meridijalnom smjeru pa novi progib iznosi 0.481 mm izračunat prema izrazu (2.13).

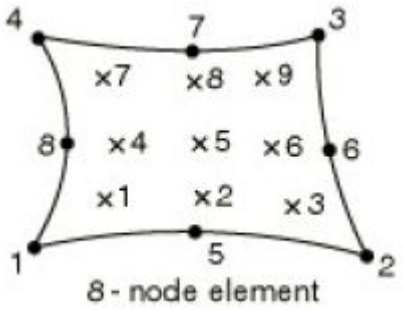
3.1. Konačni element CAX8

Kako su i geometrija i opterećenje ove konstrukcije osnosimetrični, za rješavanje problema u obzir dolaze osnosimetrični konačni elementi, a kako je materijal izotropan, problem je u matematičkom smislu dvodimenzijski. Slika 35 prikazuje općeniti osnosimetrični konačni element. Također je pokazano da kod osnosimetričnih elemenata čvorovi prelaze u čvorne kružnice.



Slika 35 Općeniti osnosimetrični elementi [8]

Ovi elementi su u obliku kružnih prstenova čiji presjek može biti trokut, pravokutnik ili proizvoljni četverokut pa se nazivaju i prstenastim elementima. CAX8 je osnosimetrični pravokutni element drugog reda prikazan na slici 36.



Slika 36 Osnosimetrični pravokutni element drugog reda [5]

Vektor pomaka sadrži radijalnu i osnu komponentu:

$$\mathbf{u}^T = \begin{bmatrix} u_r & w \end{bmatrix}, \tag{3.1}$$

a njihova je raspodjela opisana nepotpunim polinomima drugoga reda:

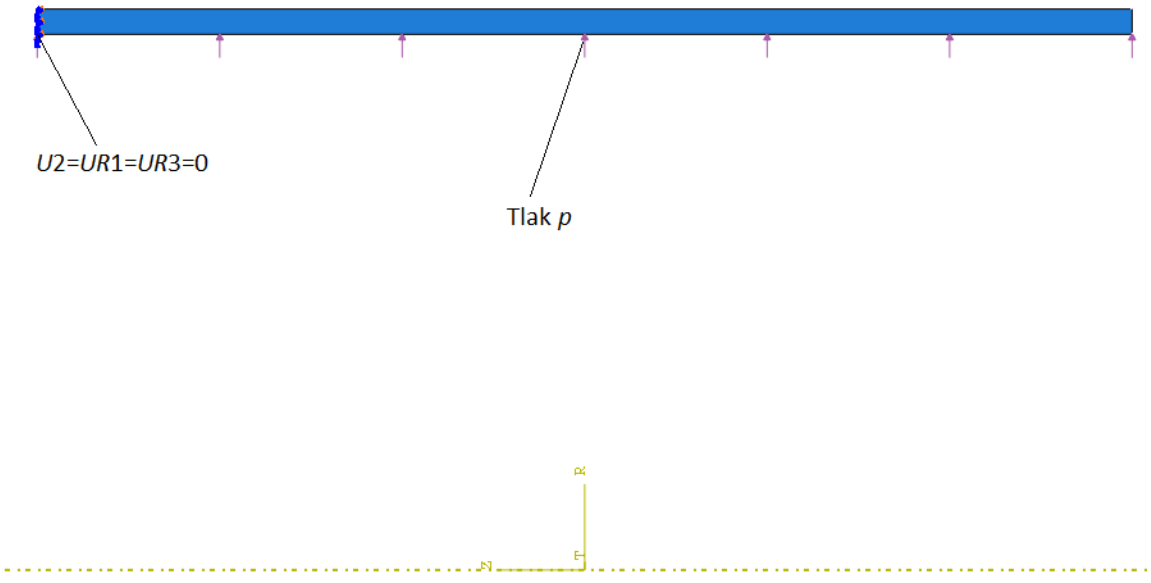
$$u_r = a_1 + a_2 r + a_3 z + a_4 rz, \tag{3.2}$$

$$w = a_5 + a_6 r + a_7 z + a_8 rz. \tag{3.3}$$

Vektor stupnjeva slobode jednak je

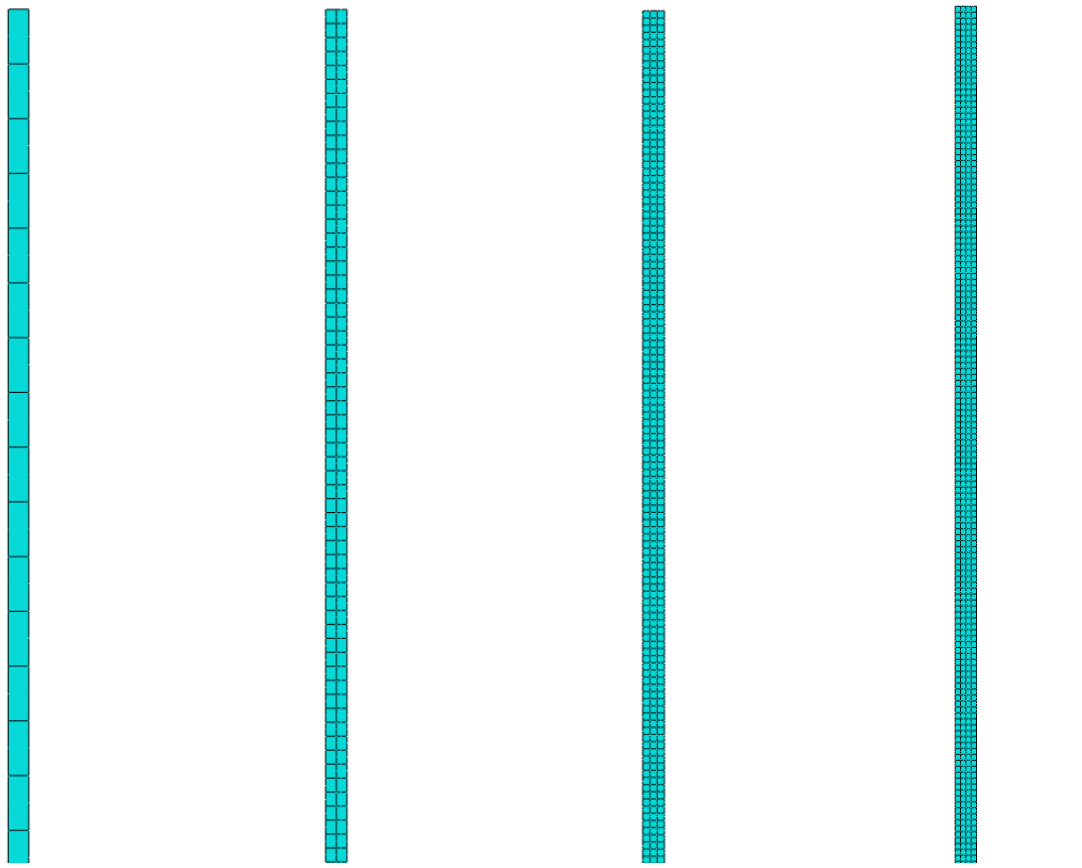
$$\begin{aligned} &\mathbf{v}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_i^T \end{bmatrix}, \\ &\mathbf{v}_i^T = \begin{bmatrix} u_{ri} & w_i \end{bmatrix} \text{ gdje su } i = 1...8. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Verifikacija elementa provodi se na cilindru čiji su rubni uvjeti i opterećenje prikazani na slici 37. Analiza se provodi na manjem dijelu ljuske jer se očekuju konstantne vrijednosti duž izvodnice. Na gornjem rubu spriječen je pomak u smjeru osi *y* Kartezijevog koordinatnog sustava definiranjem *y*-simetrije na jednom rubu.



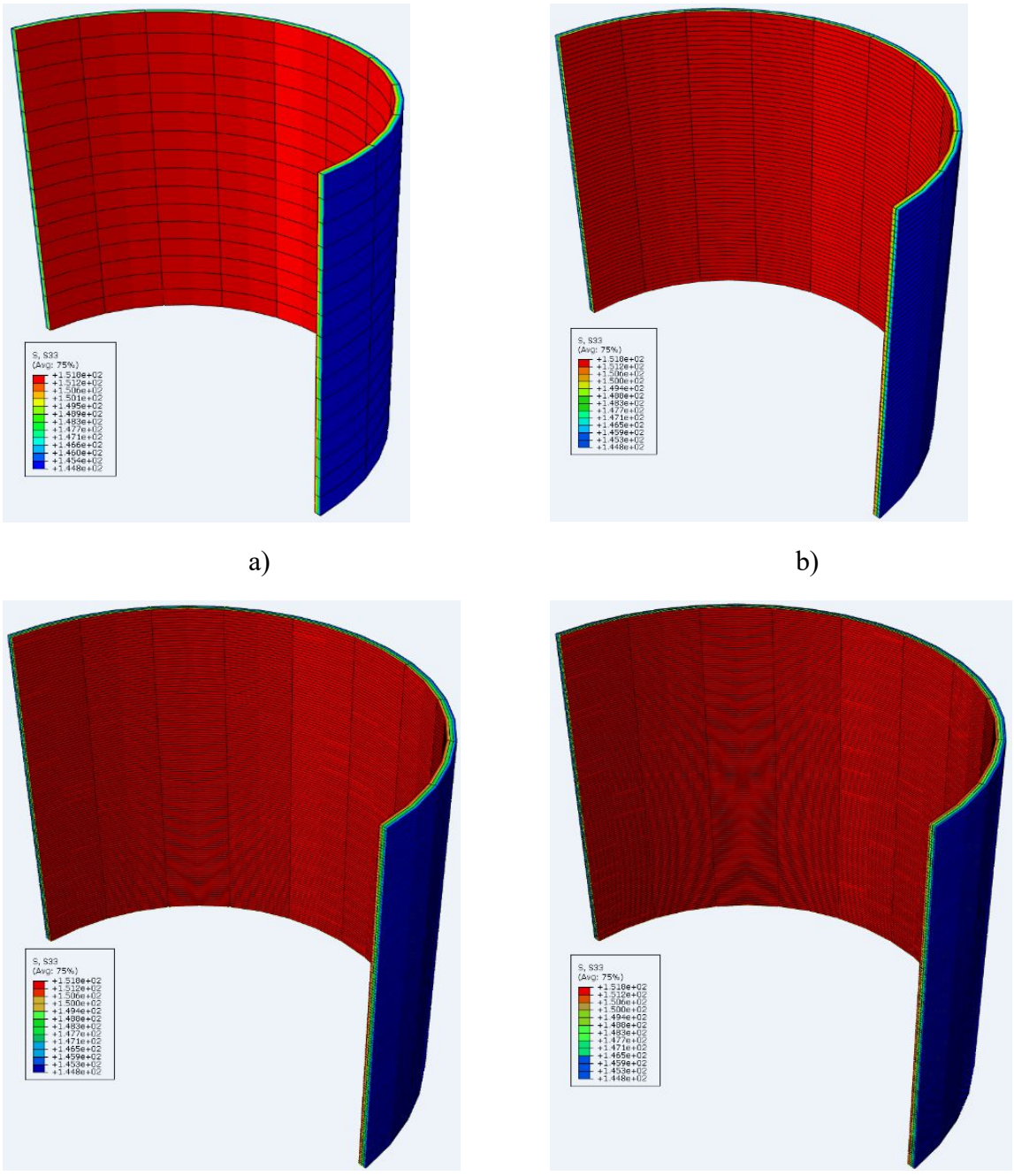
Slika 37 Rubni uvjeti i opterećenje za model cilindra diskretiziran CAX8 elementima

Slika 38 prikazuje četri generirane mreže. Na slici 38a prikazana je mreža sa 16 elemenata, na slici 38b mreža sa 130 elemenata, na slici 38c mreža s 390 elemenata, a na slici 38d mreža sa 612 elemenata



Slika 38 Modeli diskretizirani CAX8 elementima: a) model sa 16 elemenata, b) model sa 130 elemenata, c) model s 390 elemenata, d) model sa 612 elemenata

Slika 39 prikazuje raspodjelu cirkularnih naprezanja, a tablica 2 prikazuje usporedbu dobivenih cirkularnih naprezanja i radijalnih pomaka s analitičkim rješenjem za gornji rub ljuske. Navedena tablica sadrži i relativnu pogrešku izračunatu po formuli (analitički-numerički)/numerički čiji rezultati su prikazani u zagradama. Kako je u teoriji ljusaka proračun sveden na središnju plohu koja raspolavlja debljinu, u Abaqusu se numeričko rješenje očitava u čvoru koji se nalazi na sredini debljine ljuske.



a) b)

c) d)

Slika 39 Raspodjela cirkularnih naprezanja na CAX8 elementima u MPa

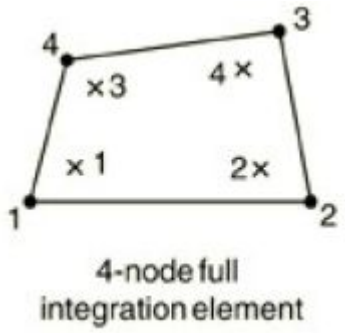
Tablica 2 Usporedba analitičkog rješenja i rješenja dobivenih CAX8 elementima

	Analitičko rješenje	16 elemenata	130 elemenata	390 elemenata	612 elemenata
σ_φ /MPa (greška)	151,667	148,09 (2,41%)	148,14 (2,38%)	148,12 (2,39%)	148,13 (2,39%)
u_r/mm (greška)	0,480891	0,472 (1,69%)	0,472 (1,69%)	0,472 (1,69%)	0,472 (1,69%)

Tablica 2 pokazuje da postoji greška koja je manja od greške najčešće dopuštene u inženjerskoj praksi (3-5%), ali za ovako jednostavan slučaj odstupanja bi trebala biti manja. Kod savijanja bi stoga mogli očekivati pogreške reda veličine 10% ili više, što nebi bilo prihvatljivo.

3.2. Konačni element S4

Kako je geometrija zadane konstrukcije sastavljena od ljusaka, prikladna je uporaba ljuskastih konačnih elemenata. Primjenit će se S4 element sa 16 stupnjeva slobode. Slika 40 prikazuje odabrani ljuskasti element.

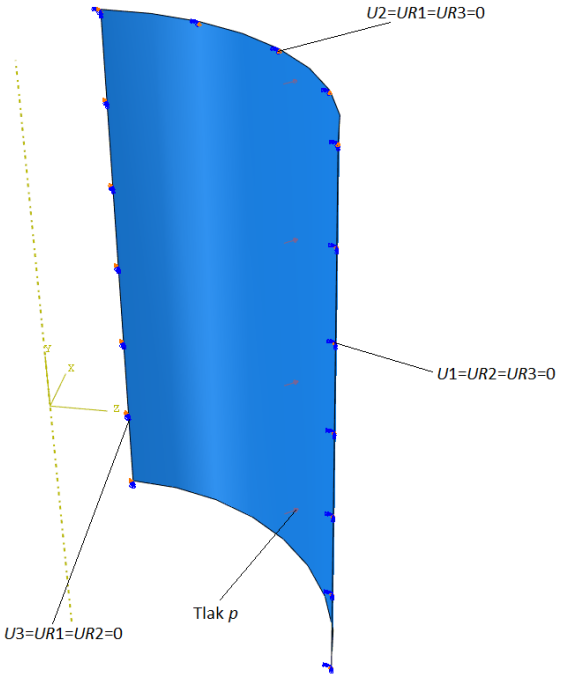


Slika 40 S4 ljuskasti konačni element [5]

Formulacija ovog elementa temelji se na superpoziciji dvodimenzijskih elemenata i elemenata za analizu savijanja ploča (uz dodatak šestog stupnja slobode φ_{iz}). Vektor stupnjeva slobode jednak je:

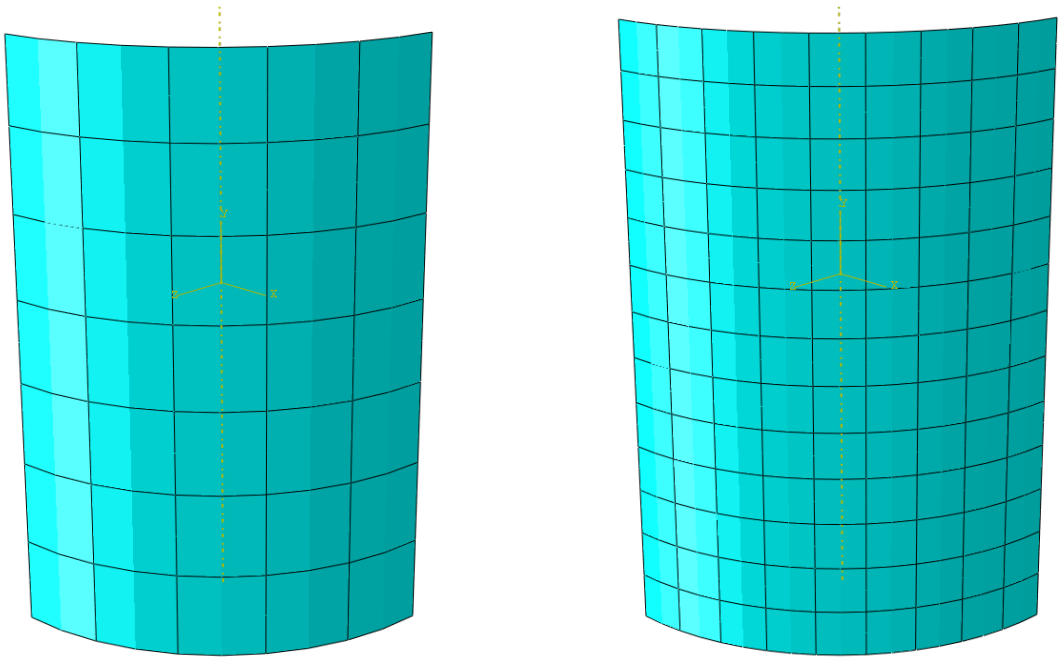
$$\mathbf{v}^T = \left[\mathbf{v}_i^T \right],$$
$$\mathbf{v}_i^T = \left[u_i \quad v_i \quad w_i \quad \varphi_{ix} \quad \varphi_{iy} \quad \varphi_{iz} \right] \text{ gdje su } i = 1...4 . \tag{3.5}$$

Sada možemo diskretizirati cilindar S4 elementima. Analiza se vrši na osmini cilindra zbog trostruke simetričnosti. Prvo se modelu dodjele rubni uvjeti kao što to prikazuje slika 41.

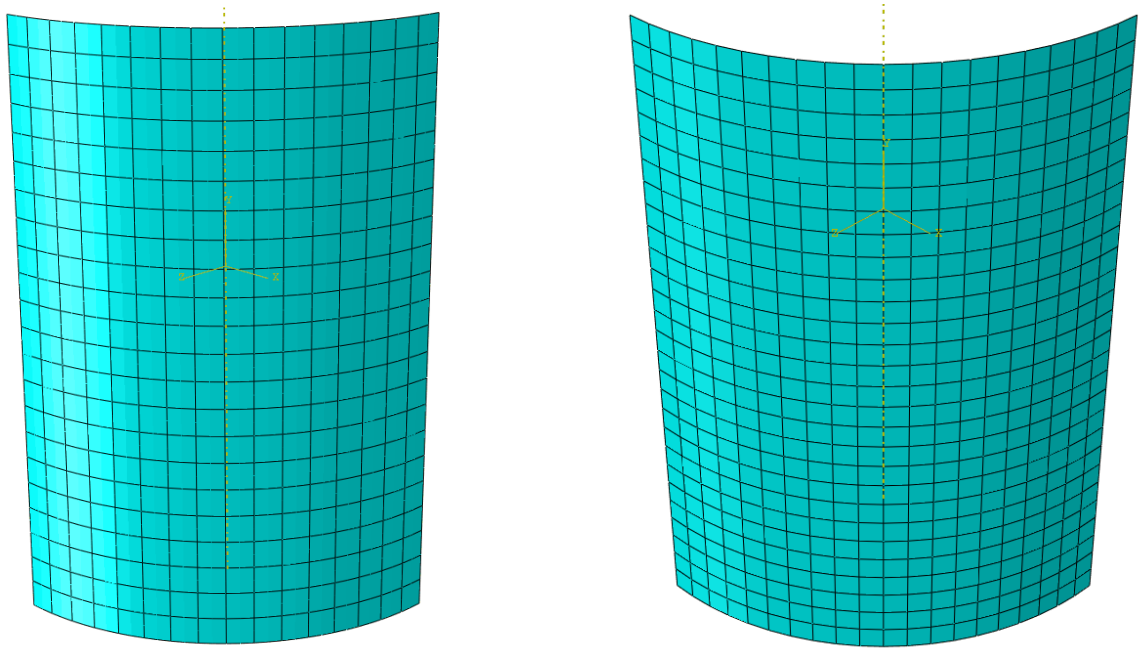


Slika 41 Rubni uvjeti i opterećenje za model cilindra diskretiziran S4 elementima

Slika 42 prikazuje mreže konačnih elemenata različite gustoće. Na slici 42a prikazana je mreža s 35 elemenata, na slici 42b sa 117 elemenata, na slici 42c s 352 elementa, a na slici 42d s 560 elemenata.



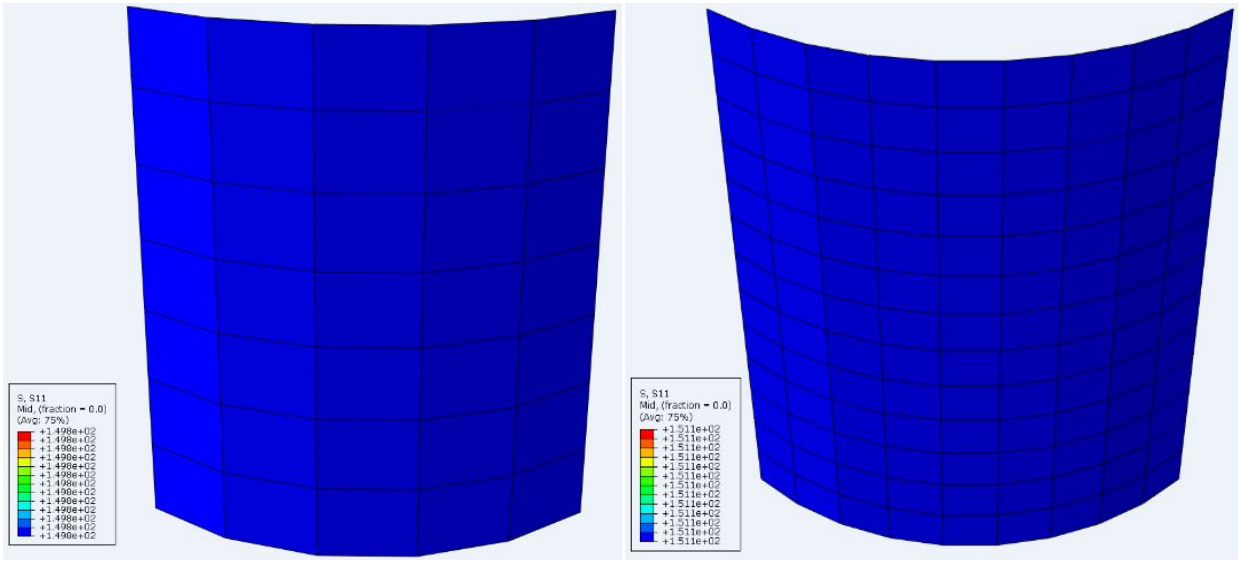
a) b)



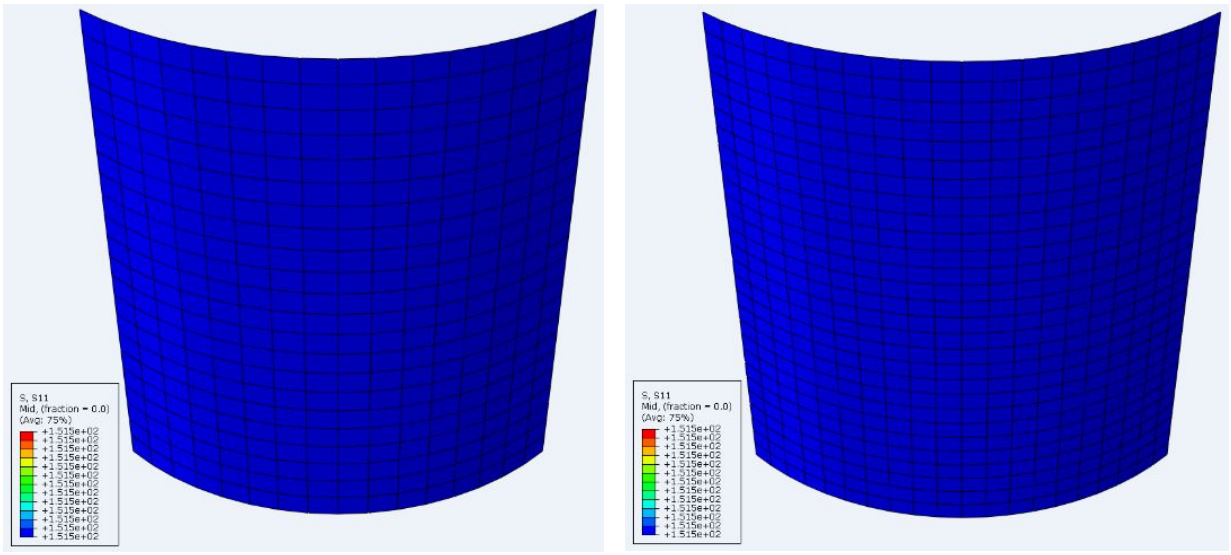
c) d)

Slika 42 Mreže S4 ljuskastih elemenata: a) model s 35 elemenata, b) model sa 117 elemenata, c) model s 352 elementa, d) model s 560 elemenata

Slika 43 prikazuje raspodjelu cirkularnih naprezanja na ljuskastim modelima, dok se u tablici 3 uspoređuju numerička rješenja s analitičkima. Numeričkim rješenjima pridružene su relativne greške kao što je to bio slučaj i za CAX8 element.



a) b)



c) d)

Slika 43 Raspodjela cirkularnih naprezanja na S4 elementima u MPa

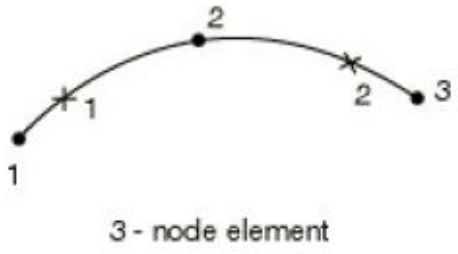
Tablica 3 Usporedba analitičkog rješenja i rješenja dobivenih S4 elementima

	Analitičko rješenje	35 elemenata	117 elemenata	352 elementa	560 elemenata
σ_φ /MPa (greška)	151,67	149,79 (1,25%)	151,09 (0,38%)	151,48 (0,12%)	151,55 (0,08%)
u_r/mm (greška)	0,481	0,475 (1,25%)	0,479 (0,38%)	0,480 (0,12%)	0,480 (0,08%)

Tablica 3 pokazuje da konačni element S4 konvergira ka rješenju. Da se uzeo element višeg reda, konvergencija bi bila brža. Konvergencija je pokazana u dijagramu u potpoglavlju 3.4.

3.3. Konačni element SAX2

SAX2 konačni element je jednodimenzijski osnosimetrični element drugog reda. On je jedan od jednostavnijih elemenata za opisivanje stanja osnosimetrične deformacije u osnosimetričnim ljuskama. Slika 44 prikazuje SAX2 konačan element s 3 čvorne kružnice.



Slika 44 Ravni prstenasti element s 3 čvorne kružnice [5]

Duž izvodnice elementa komponenta pomaka u mijenja se po paraboli drugog reda, dok je funkcija normalne komponente pomaka w opisana polinomom petog stupnja:

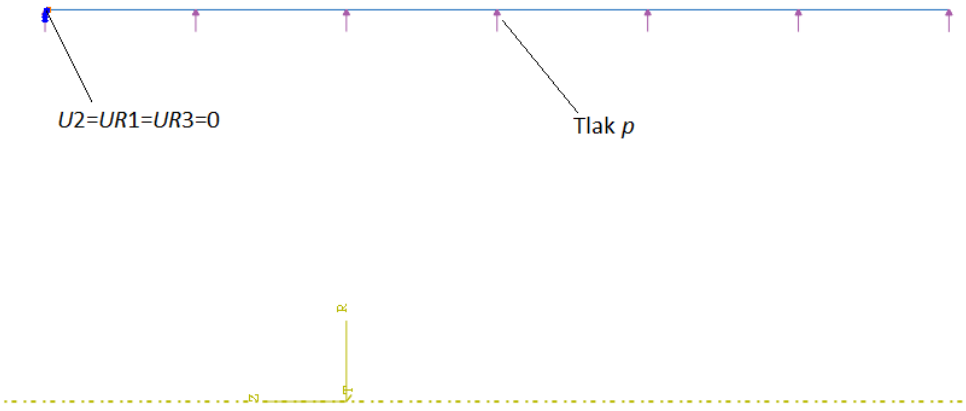
$$u = a_1 + a_2 s + a_3 s^2 , \tag{3.6}$$

$$w = a_4 + a_5 s + a_6 s^2 + a_7 s^3 + a_8 s^4 + a_9 s^5 . \tag{3.7}$$

Kao stupnjevi slobode uzimaju se radijalni i osni pomaci $\overline{u}$ i $\overline{w}$ u pravcu globalnih koordinatnih osi r i z te kut zakreta ϑ. Stoga je vektor stupnjeva slobode jednak:

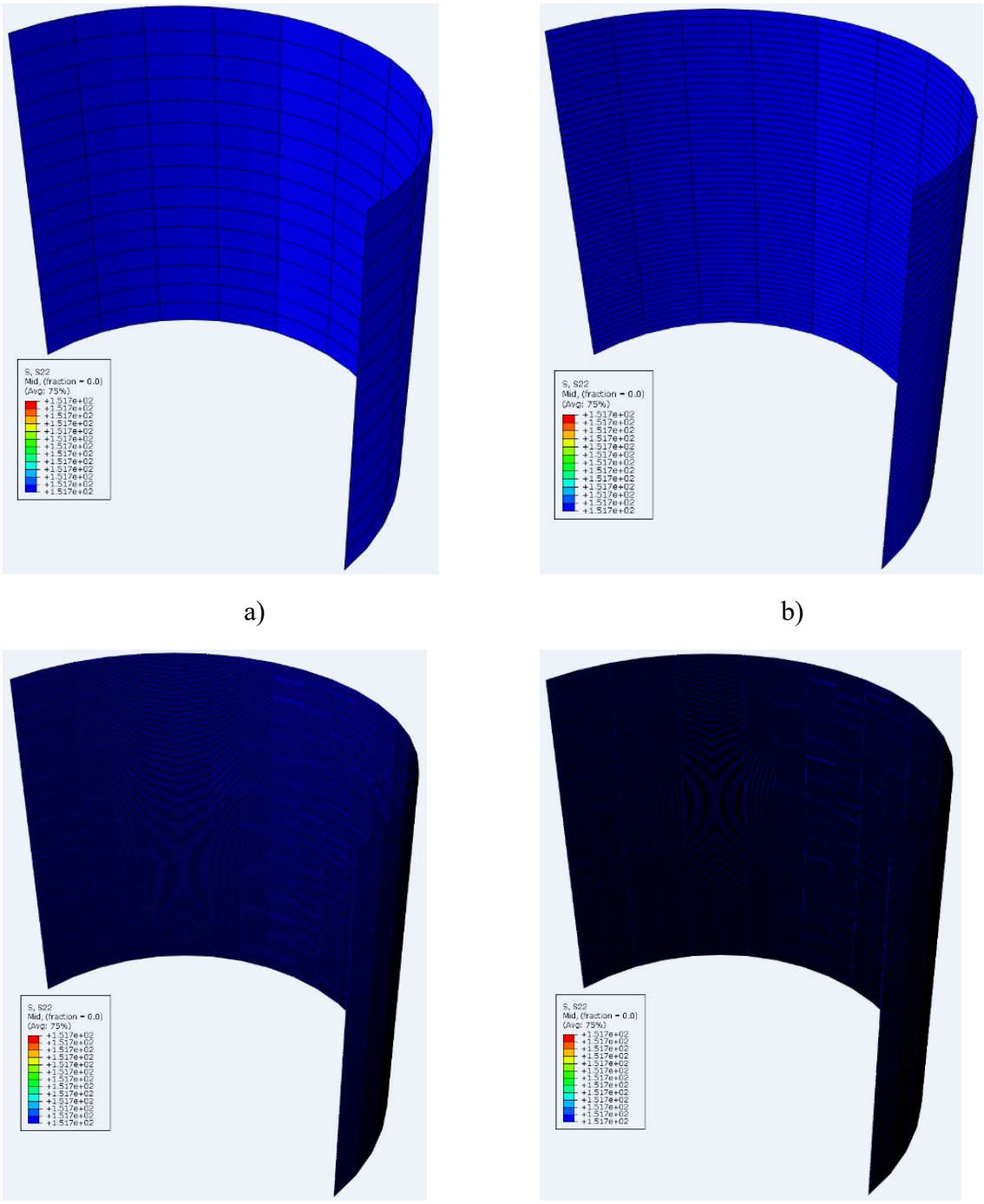
$$\mathbf{v}^T = \left[\mathbf{v}_i^T \right],$$
$$\mathbf{v}_i^T = \left[\overline{u}_i \quad \overline{w}_i \quad \vartheta_i \right] \text{ gdje su } i = 1...3 . \tag{3.8}$$

Slika 45 prikazuje model zajedno s rubnim uvjetom i opterećenjem koji će se diskretizirati SAX2 konačnim elementom. Analiza se provodi na polovici duljine ljuske zbog simetričnosti.



Slika 45 Rubni uvjeti i opterećenje za model cilindra diskretiziran SAX2 elementima

Kako je ovaj element jednodimenzionalan, nema smisla prikazivati modele diskretizirane njime, jer se gustoća mreže ne može razaznati. Generirane su mreže od 15, 50, 300 i 500 elemenata. Slika 46 prikazuje raspodjele cirkularnih naprezanja. Očitavanjem karakterističnih veličina na gornjem rubu cilindrične ljuske (na slici 45 to je lijevi rub), zamijeti se da već u najrjeđoj mreži od 15 elemenata dobivamo analitičko rješenje.



a) b)

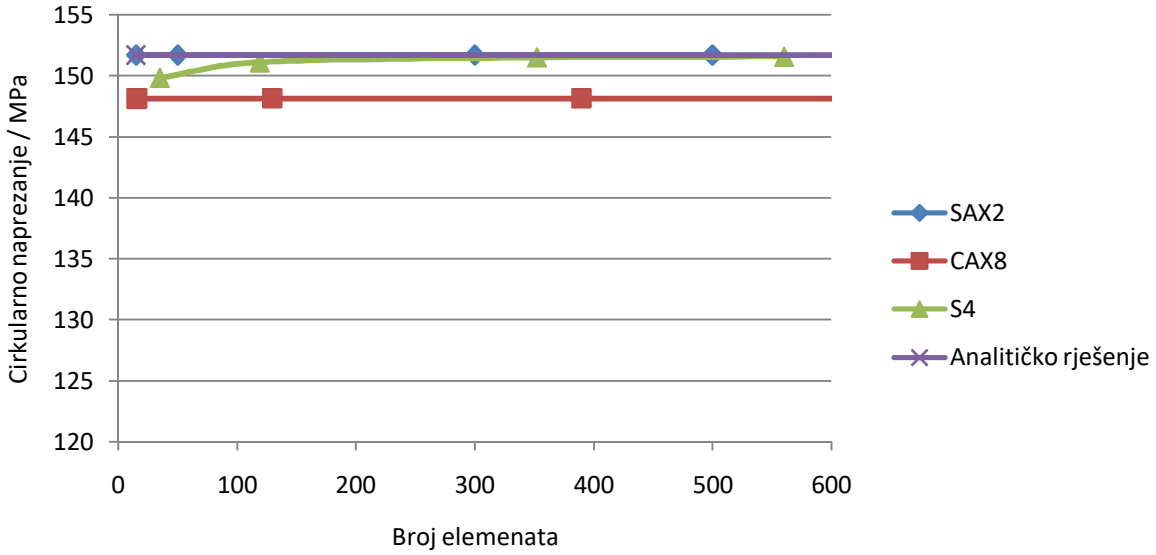
c) d)

Slika 46 Raspodjela cirkularnih naprezanja po SAX2 elementima u MPa: a) model s 15 elemenata, b) model s 50 elemenata, c) model s 300 elemenata, d) model s 500 elemenata

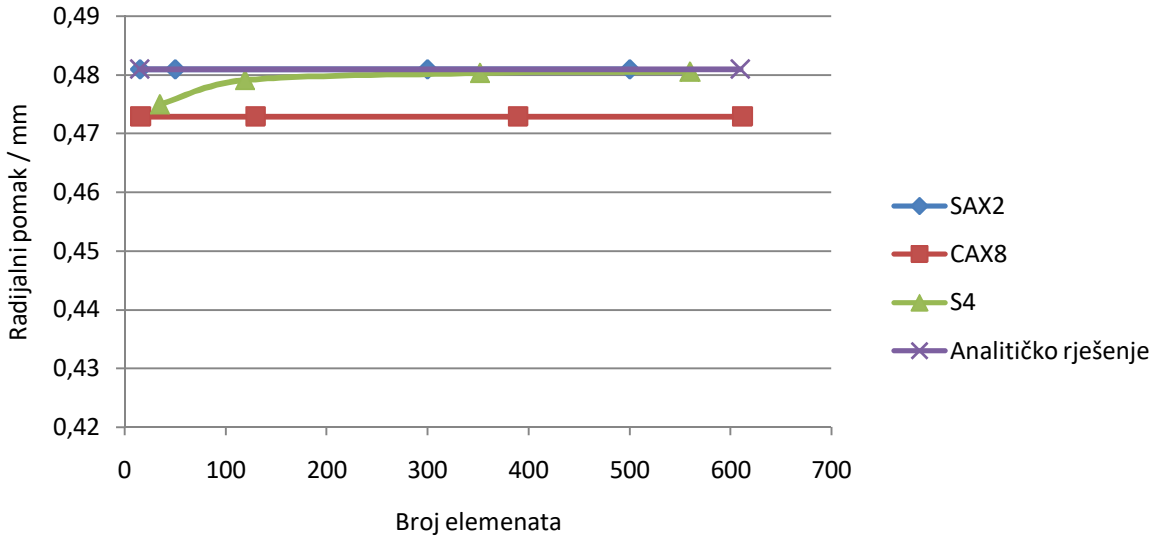
3.4. Usporedba konačnih elemenata

Iako se već u prošlim potpoglavljima moglo zamjetiti koji konačan element je najpogodniji za analizu ove konstrukcije, u ovom potpoglavlju se vrši ukupna usporedba. Slika 47 prikazuje

dijagram konvergencije cirkularnih naprezanja u ovisnosti o vrsti i broju konačnih elemenata, dok slika 48 prikazuje dijagram konvergencije radijalnih pomaka.



Slika 47 Konvergencija cirkularnog naprezanja za različite elemente



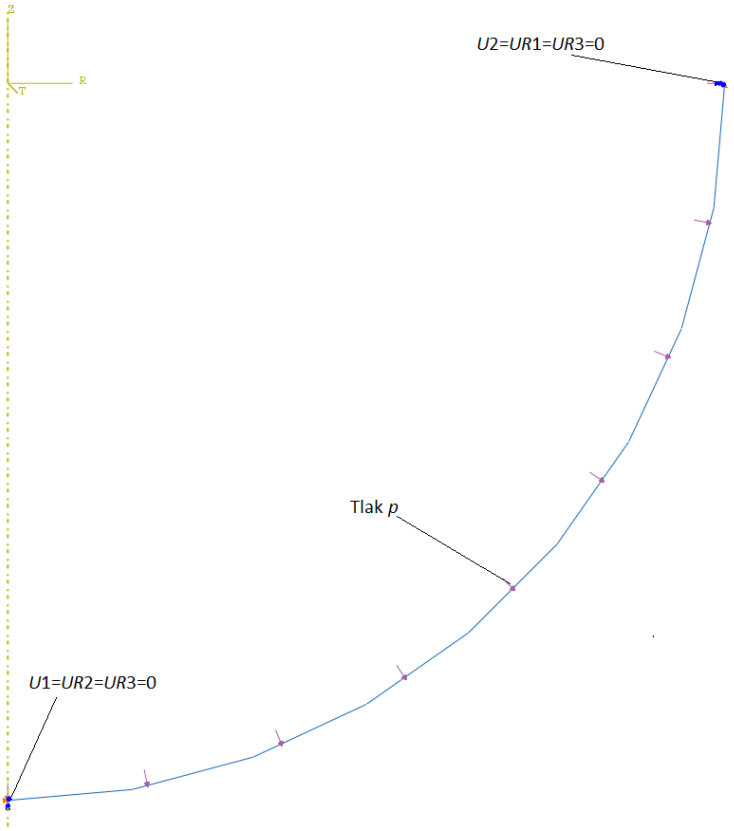
Slika 48 Konvergencija radijalnog pomaka za različite elemente

Iz dijagrama na slici 47 i na slici 48 vidljivo je da osnosimetrični pravokutni element CAX8 već kod rjeđih mreža daje ujednačena rješenja, ali ne konvergira k analitičkom rješenju. Ljuskasti pravokutni element S4 konvergira relativno brzo prema rješenju. S druge strane, osnosimetrični element s ravnom izvodnicom, SAX2, postiže analitičko rješenje već kod najrjeđe mreže. S obzirom na izraze (3.4), (3.5) i (3.8), element SAX2 postiže analitičko rješenje i za manji broj stupnjeva slobode kod istog broja elemenata. Ovaj element postiže i cirkularnu zakrivljenost, dok se ona kod primjene dvodimenzijskih ljuskastih elemenata mora

aproksimirati usitnjevanjem mreže konačnih elemenata. Doduše, u slučaju meridijalne zakrivljenosti, mora se usitniti i mreža osnosimetričnih elemenata, ali je i tada ukupan broj stupnjeva slobode relativno malen.

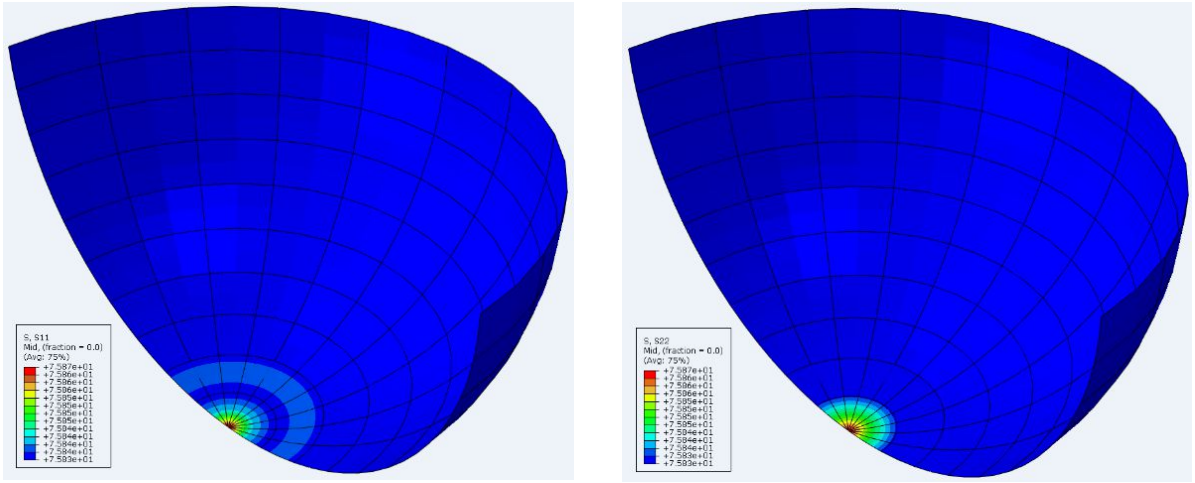
3.5. Verifikacija konačnih elemenata na sferni ljusci

Poželjno bi bilo SAX2 element još provjeriti na sfernoj ljusci u kojoj vlada membransko stanje naprezanja. Analitičko rješenje izračunato je u potpoglavlju 2.3. Zbog simetričnosti analiza se provodi na polovici modela ljuske. Slika 49 prikazuje rubne uvjete i opterećenje na modelu sfere.

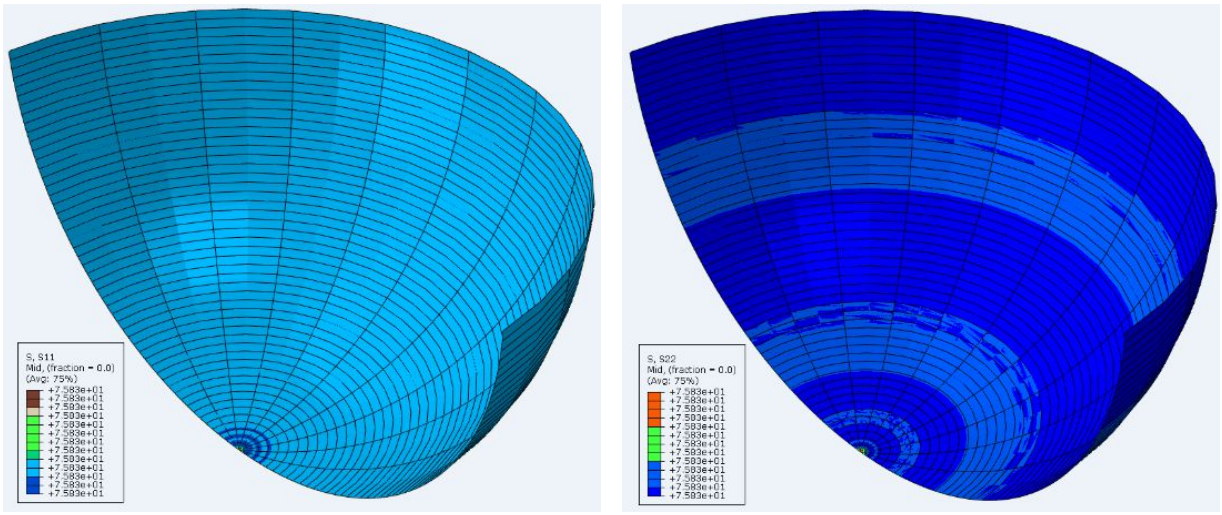


Slika 49 Rubni uvjeti i opterećenje za model sfere diskretiziran SAX2 elementima

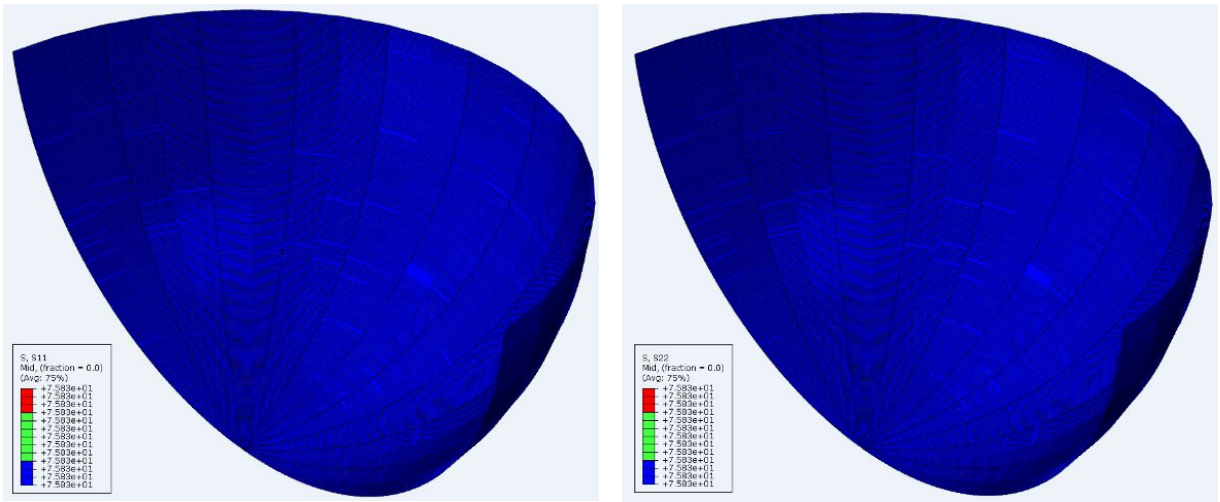
Iz razloga navedenog u potpoglavlju 3.3, nema smisla prikazivati diskretizaciju modela jednodimenzijskim elementima. Generirana je mreža od 10, 50 i 204 elementa. Slika 50 pokazuje da je raspodjela meridijalnih i cirkularnih naprezanja konstantna i jednaka analitičkom rješenju. Izuzetak je donji vrh modela koji kod rjeđe mreže pokazuje pogrešku od svega -0.05%.



10 elemenata



50 elemenata

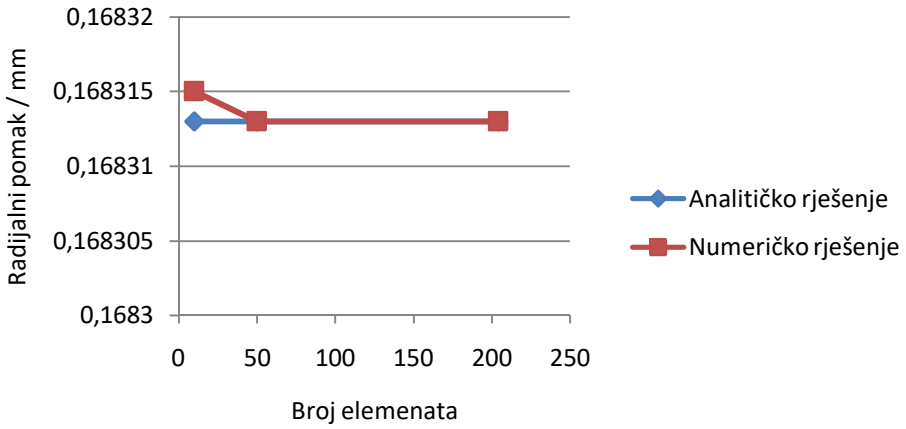


204 elementa

a) b)

Slika 50 Raspodjela naprezanje: a) merdijalna, b) cirkularna

Slika 51 prikazuje dijagram konvergencije radijalnog pomaka za gornji rub ljuske ($\vartheta = 90^0$). Vidljivo je da već druga mreža daje analitičko rješenje.

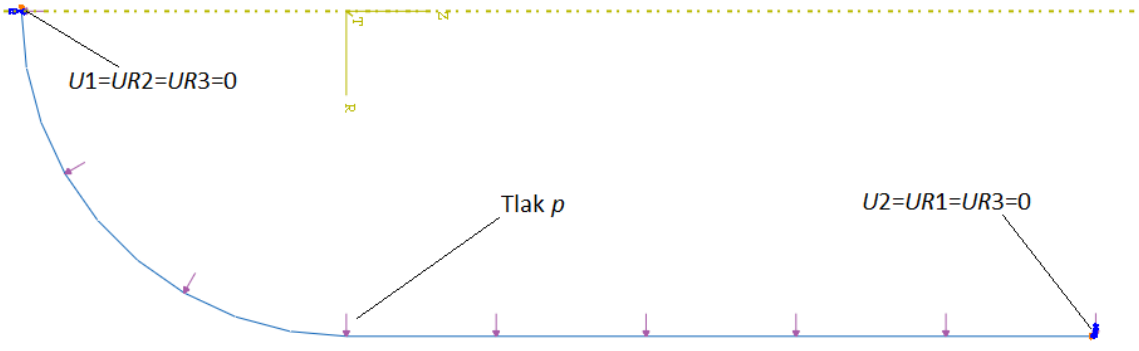


Slika 51 Konvergencija radijalnog pomaka na rubu sferne ljuske

Možemo s velikom sigurnošću zaključiti da je ovaj element iznimno pogodan za analizu zadane konstrukcije. U sljedećim potpoglavljima provest će se analiza donjeg, odnosno gornjeg spoja ljusaka.

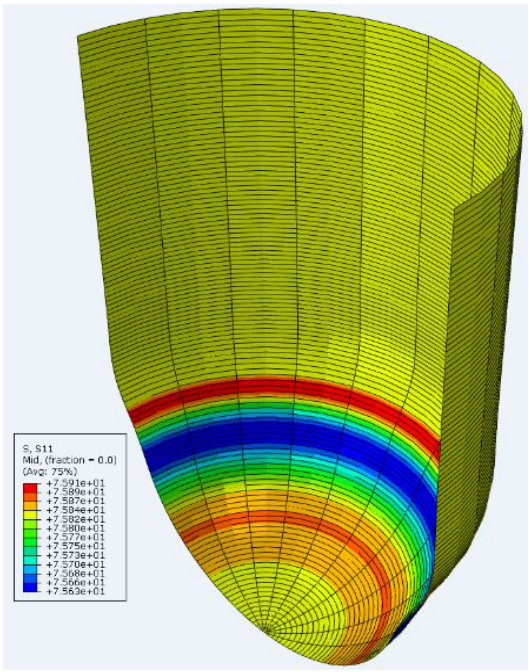
3.6. Analiza donjeg spoja ljusaka bez prstena

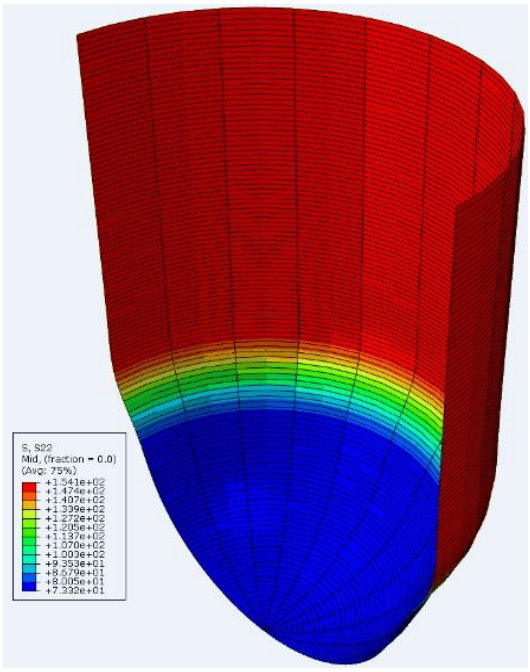
Kako je vertikalan spremnik sastavljen od dugih ljusaka, na većem djelu cilindra vlada membransko stanje naprezanja, koje je već poznato. Da se bespotrebno ne koristi velik broj stupnjeva slobode, posebno se analizira donji spoj ljusaka bez prstena, a posebno gornji spoj ljusaka sa prstenom. Slika 52 prikazuje model spoja sferne i cilindrične ljuske s dodijeljenim rubnim uvjetima i opterećenjem.



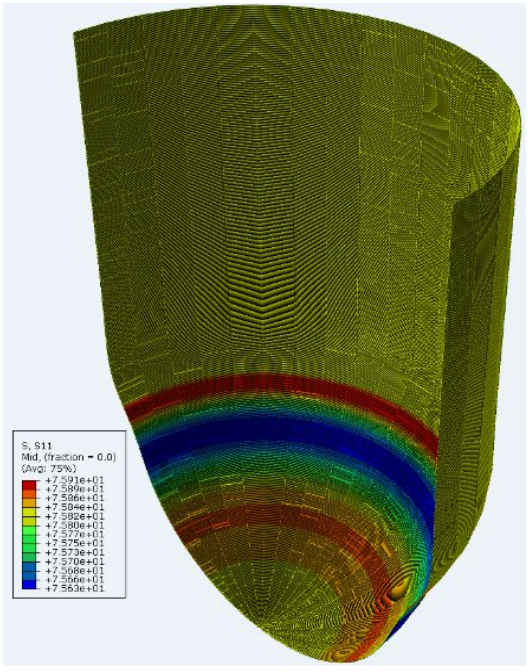
Slika 52 Rubni uvjeti i opterećenje za model donjeg spoja ljusaka

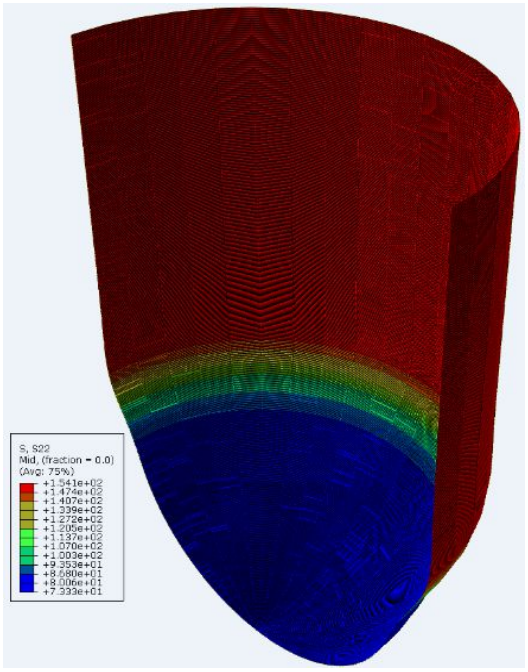
Slika 53 prikazuje raspodjelu cirkularnih i meridijalnih naprezanja za različiti broj elemenata.



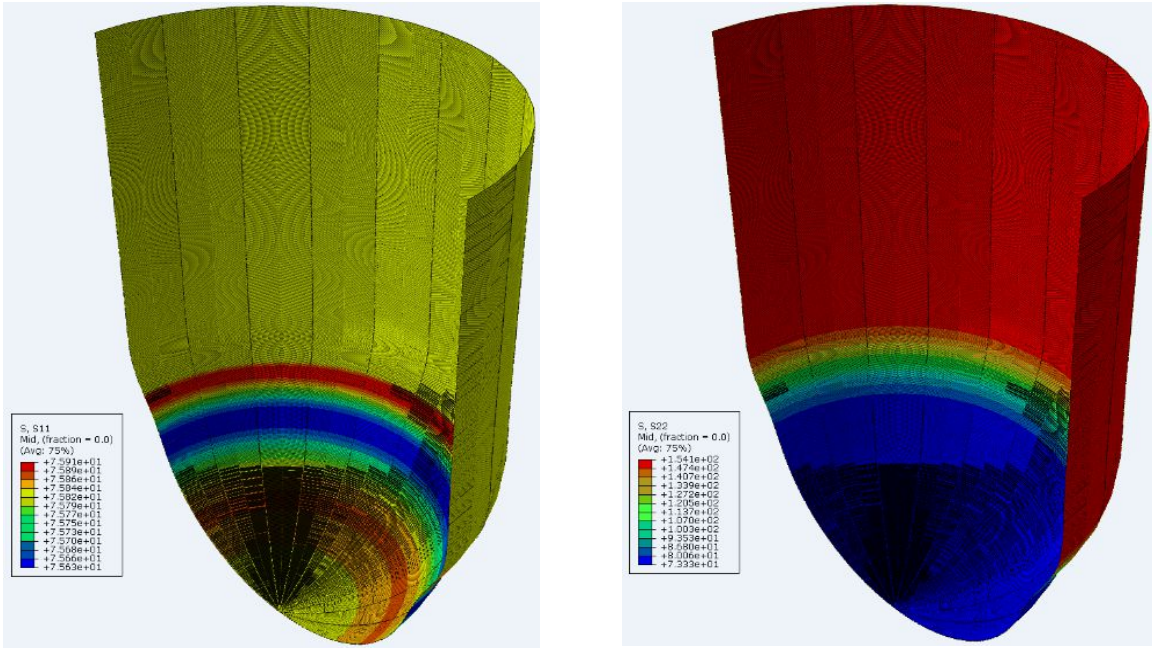


126 elemenata





630 elemenata



1261 elemenat

a) b)

Slika 53 Raspodjela naprezanja donjeg spoja u MPa: a) meridijalna, b) cirkularna

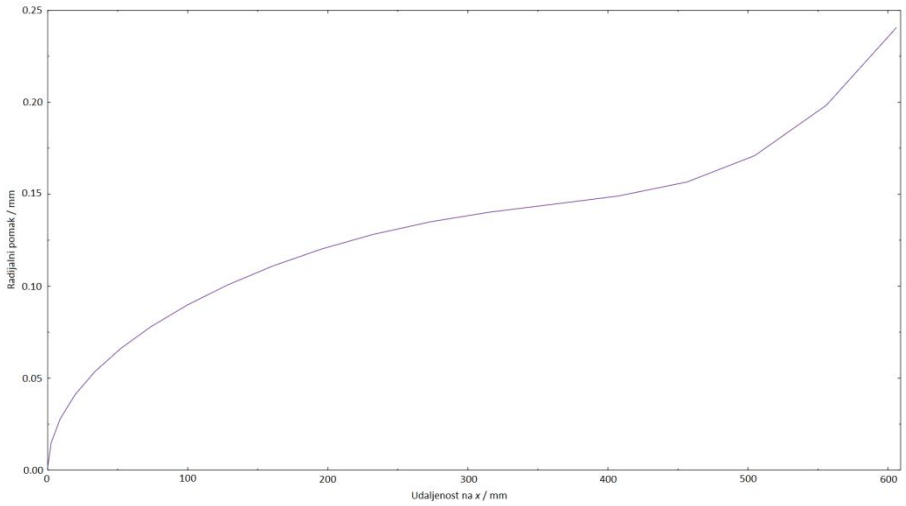
Provjeravajući vrijednosti veličina na mjestu spoja, vidi se da ona konvergiraju k rješenju već pri najrjeđi mreži. Tablica 4 pokazuje da su odstupanja vrijednosti veličina dobivenih numeričkom metodom izuzetno mala ili nepostojeća u odnosu na vrijednosti dobivenih analitičkim putem. U zagradama kraj numeričkih rješenja napisane su i relativne greške.

Tablica 4 Usporedba numeričkih i analitičkih rješenja za donji spoj ljusaka

	Analitičko rješenje	Numeričko rješenje
σ_φ / MPa	113,75	113,71 (0,035%)
σ_ϑ / MPa	75,83	75,83 (0%)
u_r / mm	0,289	0,288 (0,045%)

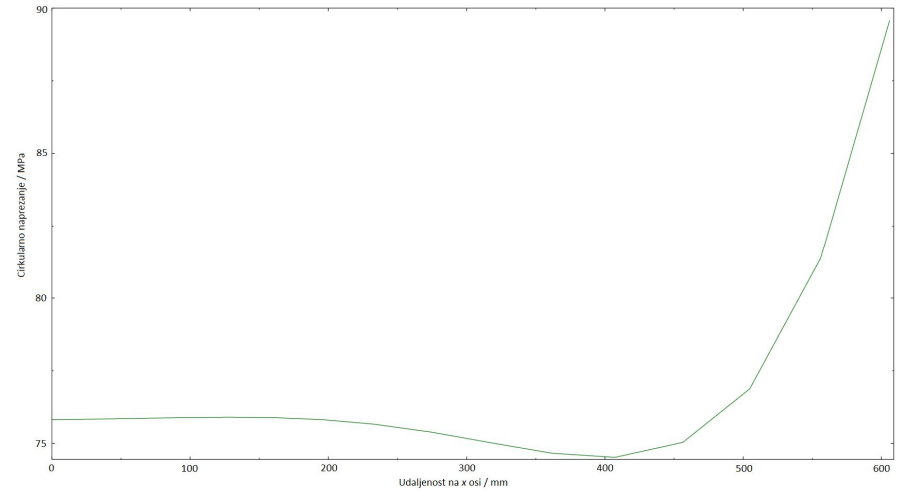
Iz raspodjela se vidi da naprezanja postaju konstantna udaljavajući se od mjesta spoja, odnosno prelaze u membranska naprezanja, što odgovara analitičkom proračunu. Raspodjele naprezanja i radijalnog pomaka mogu se bolje proučiti na sljedećim dijagramima generiranim u ABAQUSu za najgušću mrežu od 1261 elementa. Mjesto spoja se u dijagramima cilindrične ljuske nalazi u ishodištu, a u dijagramima sferne ljuske kod koordinate x = 650 mm.

Slika 54 prikazuje raspodjelu radijalnog pomaka duž izvodnice donje sferne ljuske.



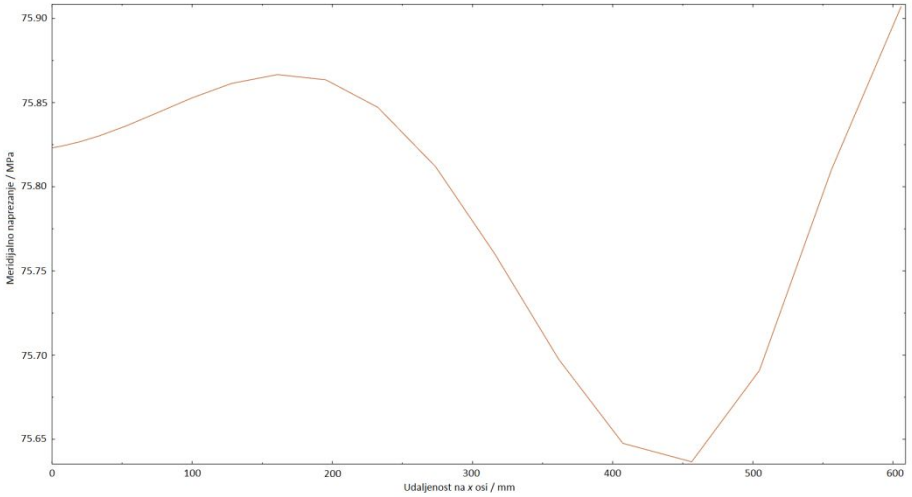
Slika 54 Raspodjela radijalnog pomaka za donju sfernu ljusku

Slika 55 prikazuje raspodjelu cirkularnog naprezanja duž izvodnice donje sferne ljuske.



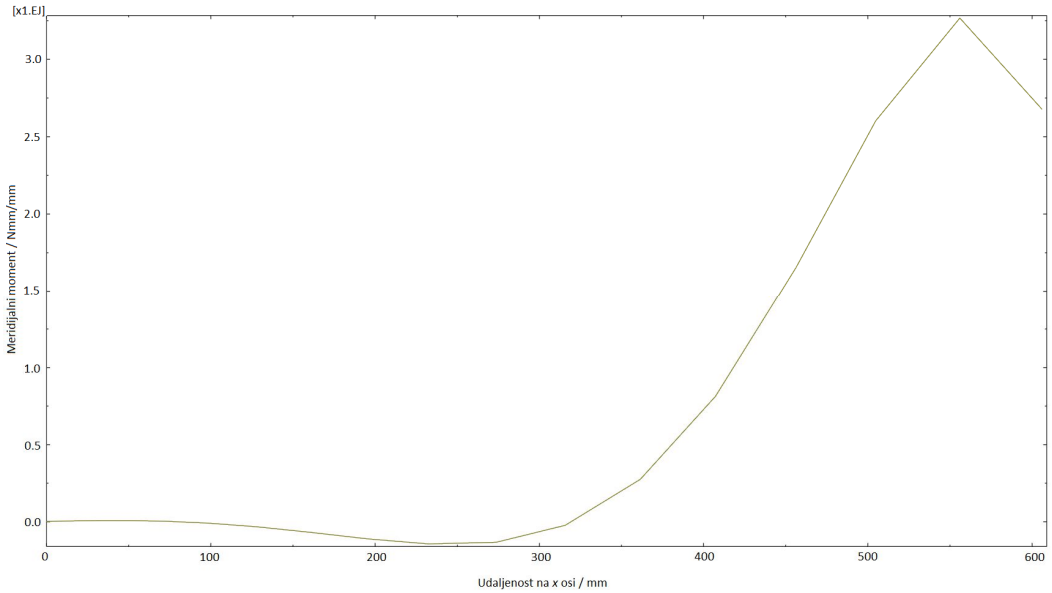
Slika 55 Raspodjela cirkularnog naprezanja za donju sfernu ljusku

Slika 56 prikazuje raspodjelu meridijalnog naprezanja duž izvodnice donje sferne ljuske.



Slika 56 Raspodjela meridijalnog naprezanja za donju sfernu ljusku

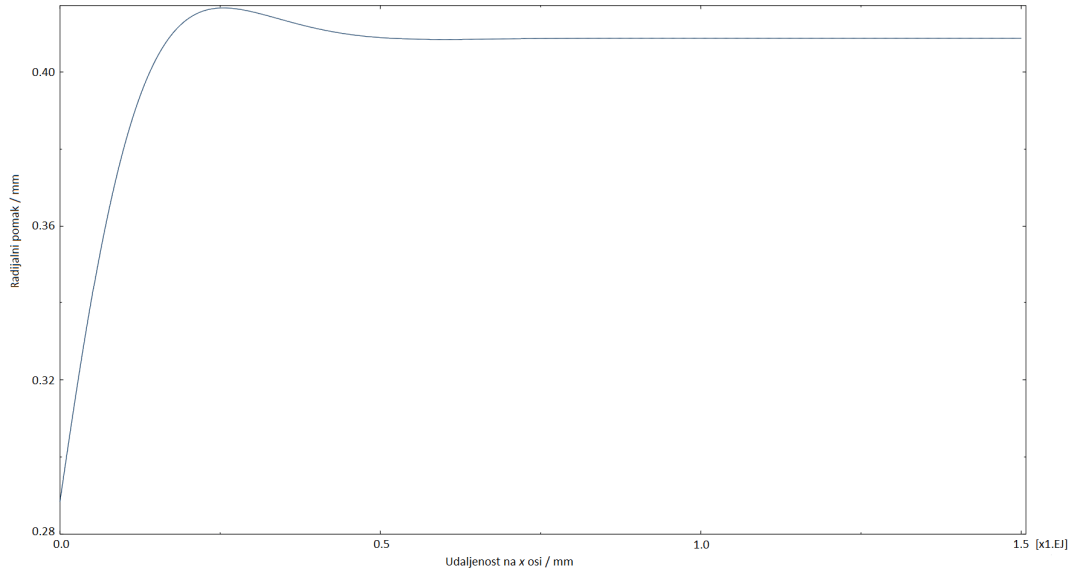
Slika 57 prikazuje raspodjelu meridijalnog momenta duž izvodnice donje sferne ljuske.



Slika 57 Raspodjela meridijalnog momenta za donju sfernu ljusku

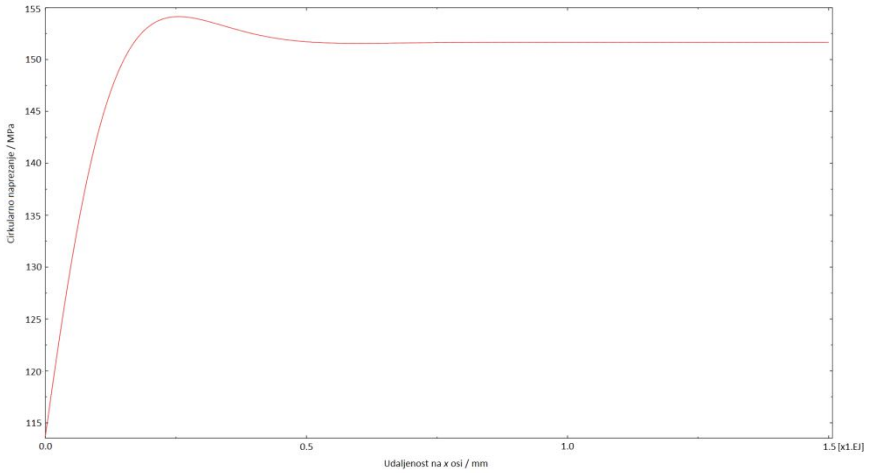
Usporedivši sliku 54 sa slikom 8, sliku 55 sa slikom 9, sliku 56 sa slikom 11 te sliku 57 sa slikom 12 može se uočiti da su raspodjele provjerenih veličina duž izvodnice donje sferne ljuske približno jednake. Slijede dijagrami za donji dio cilindrične ljuske.

Slika 58 prikazuje raspodjelu radijalnog pomaka duž izvodnice donjeg dijela cilindrične ljuske.



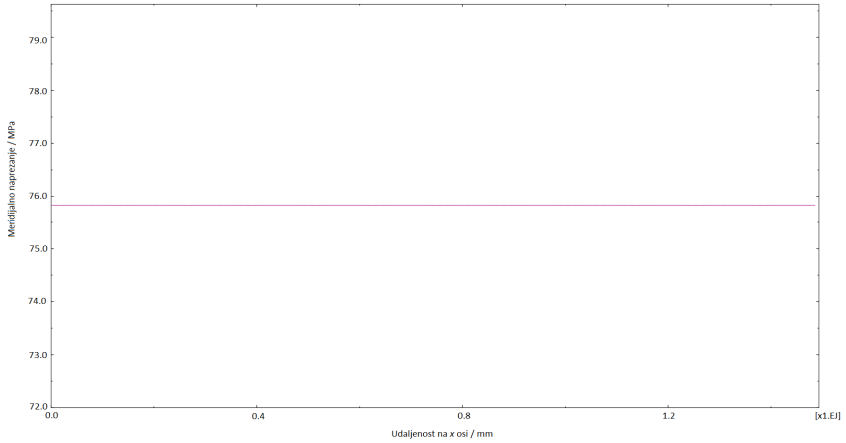
Slika 58 Raspodjela radijalnog pomaka za donji dio cilindrične ljuske

Slika 59 prikazuje raspodjelu cirkularnog naprezanja duž izvodnice donjeg dijela cilindrične ljuske.



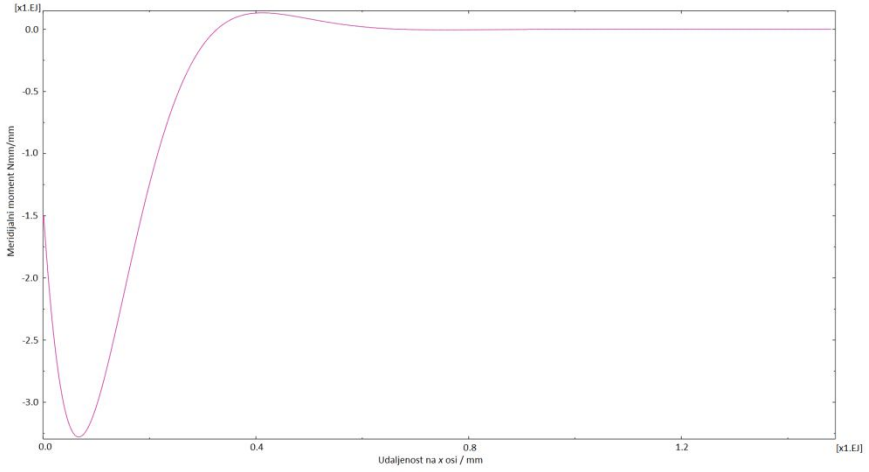
Slika 59 Raspodjela cirkularnog naprezanja za donji dio cilindrične ljuske

Slika 60 prikazuje raspodjelu meridijalnog naprezanja duž izvodnice donjeg dijela cilindrične ljuske.



Slika 60 Raspodjela meridijalnog naprezanja za donji dio cilindrične ljuske

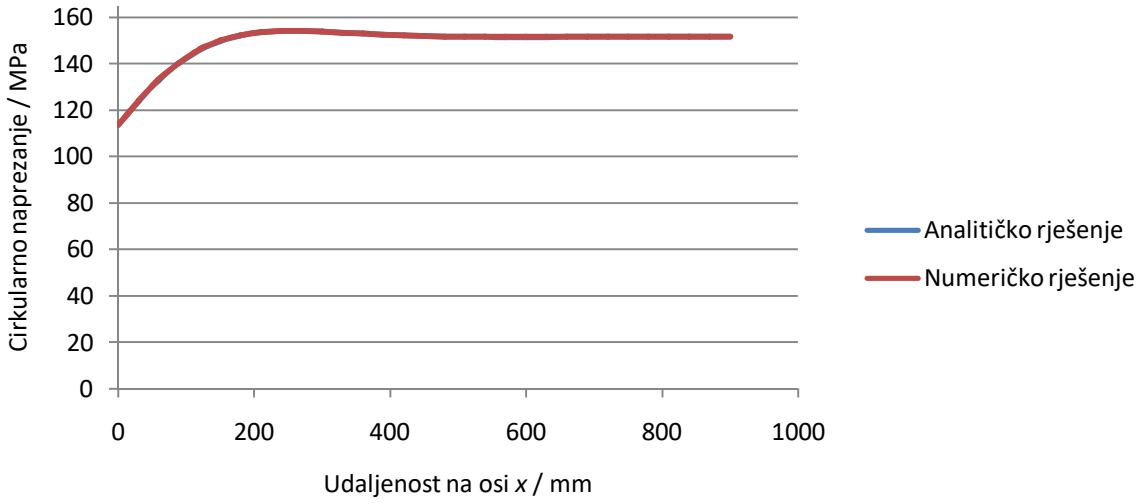
Slika 61 prikazuje raspodjelu meridijalnog momenta duž izvodnice donjeg dijela cilindrične ljuske.



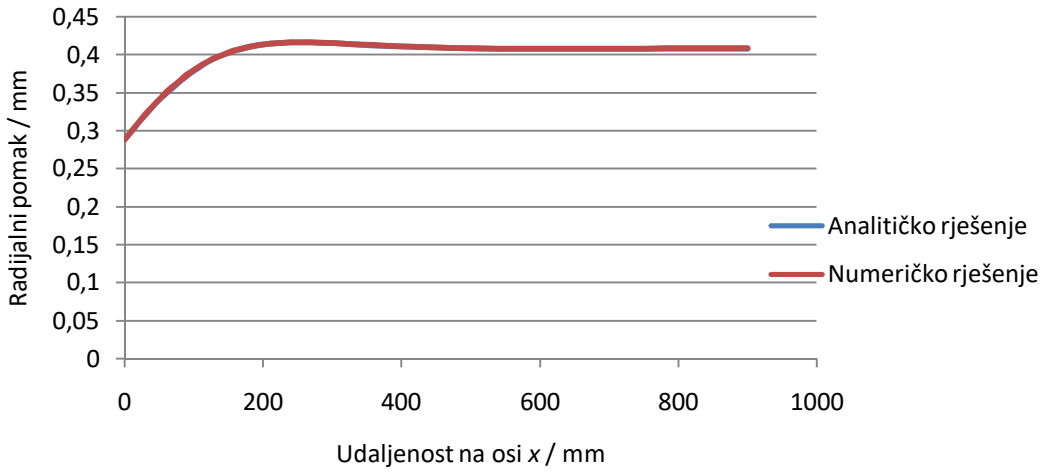
Slika 61 Raspodjela meridijalnog momenta za donji dio cilindrične ljuske

Uspoređivanjem slike 58 sa slikom 13, slike 59 sa slikom 14, slike 60 sa slikom 15 te slike 61 sa slikom 16 može se također vidjeti jednaka raspodjela promatranih veličina i za donji dio cilindrične ljuske.

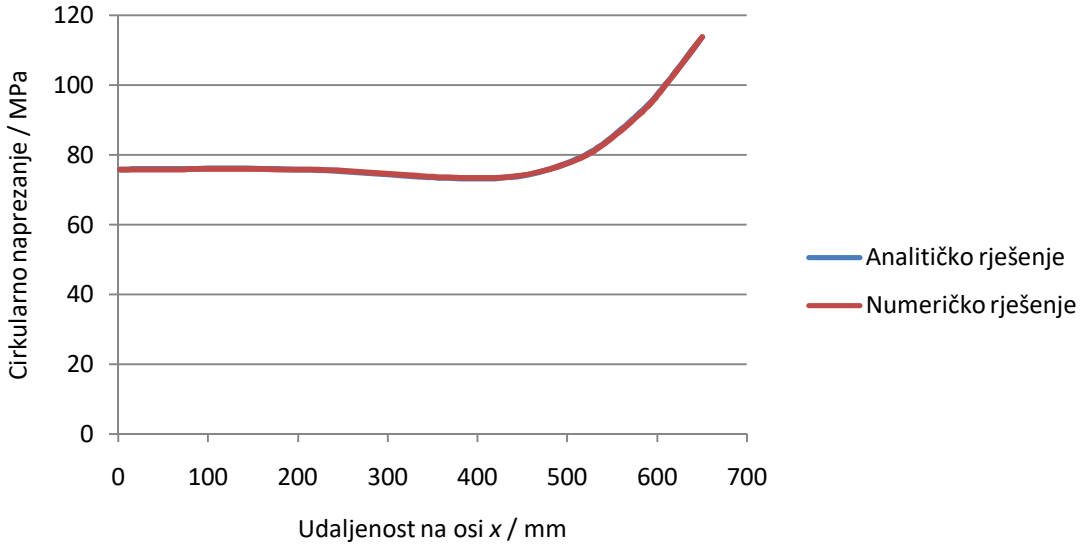
Iskustveno je poznato da ako se numeričkom metodom postiže analitičko rješenje u jednoj točki, to ne mora biti slučaj u svim ostalim točkama. Da bi bili sigurni da možemo očitavati kritična ekvivalentna naprezanja duž cijele izvodnice spremnika, radijalni pomak i cirkularno naprezanje se provjerava u 20 točaka na sfernoj ljusci te u 40 točaka u cilindričnoj ljusci. Meridijalno naprezanje se ne provjerava jer je duž izvodnice cilindrične ljuske konstantno i jednako analitičkom rješenju, dok kod sferne ljuske varira u uskome području koje je približno jednako na slici 11 i na slici 56. Slika 62, slika 63, slika 64 i slika 65 prikazuju poklapanje vrijednosti dobivenih analitičkim putem s onima dobivenih numeričkim putem.



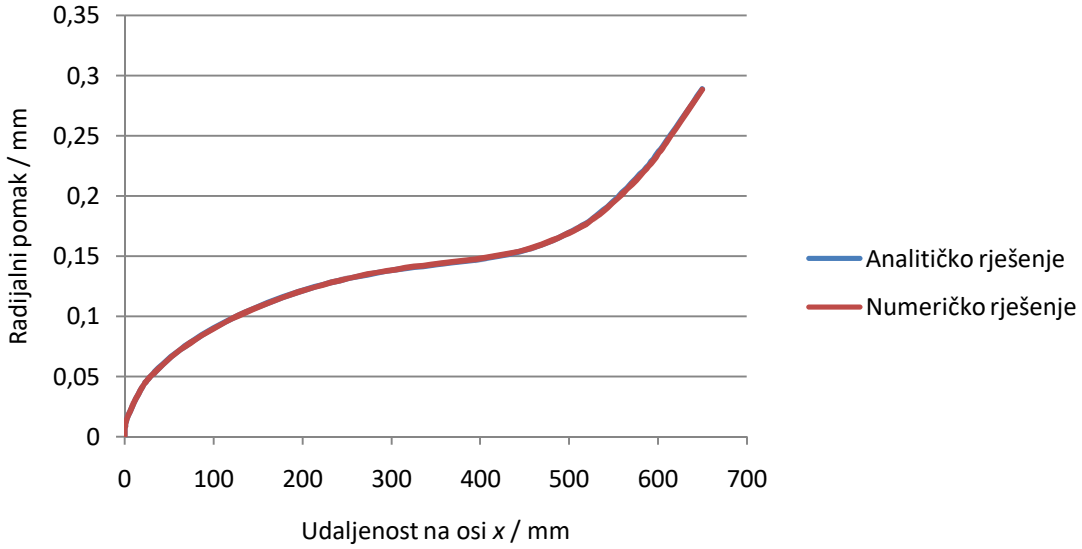
Slika 62 Usporedba vrijednosti cirkularnih naprezanja na donjem dijelu cilindrične ljuske



Slika 63 Usporedba vrijednosti radijalnih pomaka na donjem dijelu cilindrične ljuske



Slika 64 Usporedba vrijednosti cirkularnih naprezanja na donjoj sfernoj ljusci

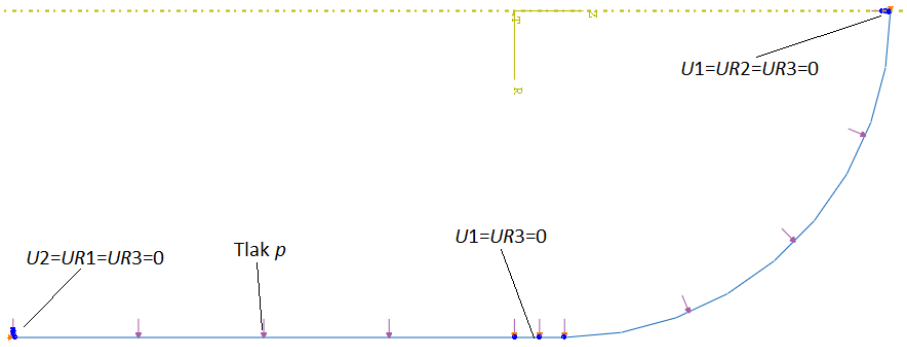


Slika 65 Usporedba vrijednosti radijalih pomaka na donjoj sfernoj ljusci

Iz slika 62, 63, 64 i 65 zaključujemo da numerička analiza donjeg dijela vertikalnog spremnika daje rješenje sa zanemarivim odstupanjima u odnosu na rješenja dobivena analitičkim putem.

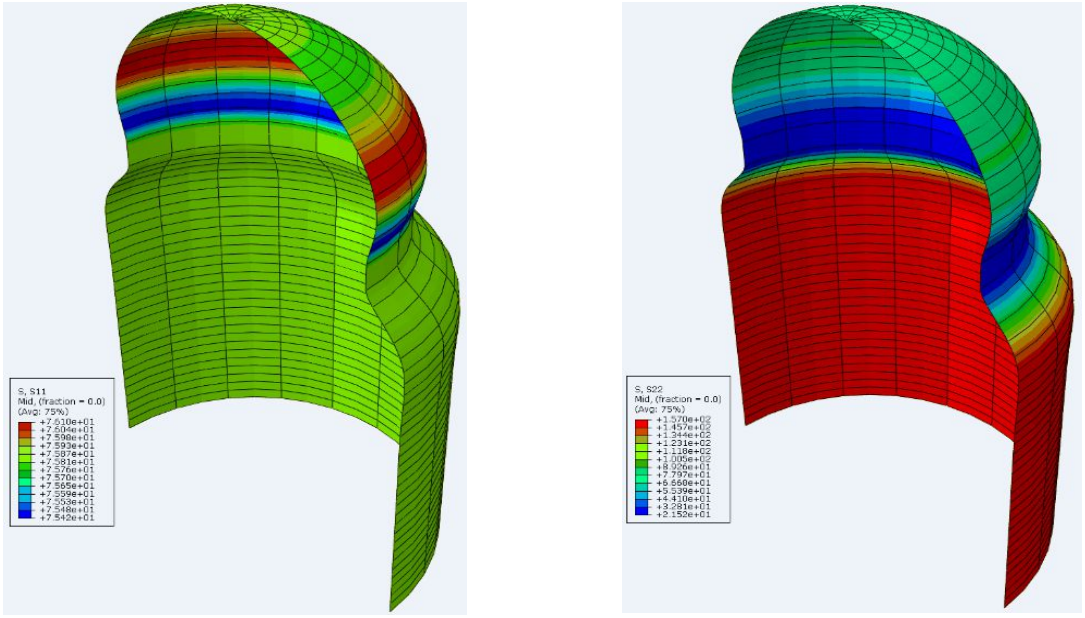
3.7. Analiza gornjeg spoja ljusaka sa prstenom

Slika 66 prikazuje model spoja sferne ljuske, prstena i cilindrične ljuske s rubnim uvjetima i opterećenjem. Iako je prsten uklješten, u ovom modelu mu je omogućen pomak $U2$ u pravcu osi y Kartezijevog sustava. Takav rubni uvjet je definiran za uklješteni prsten jer je na rubu cilindrične ljuske definirana y-simetrija ($U2=UR1=UR3=0$).

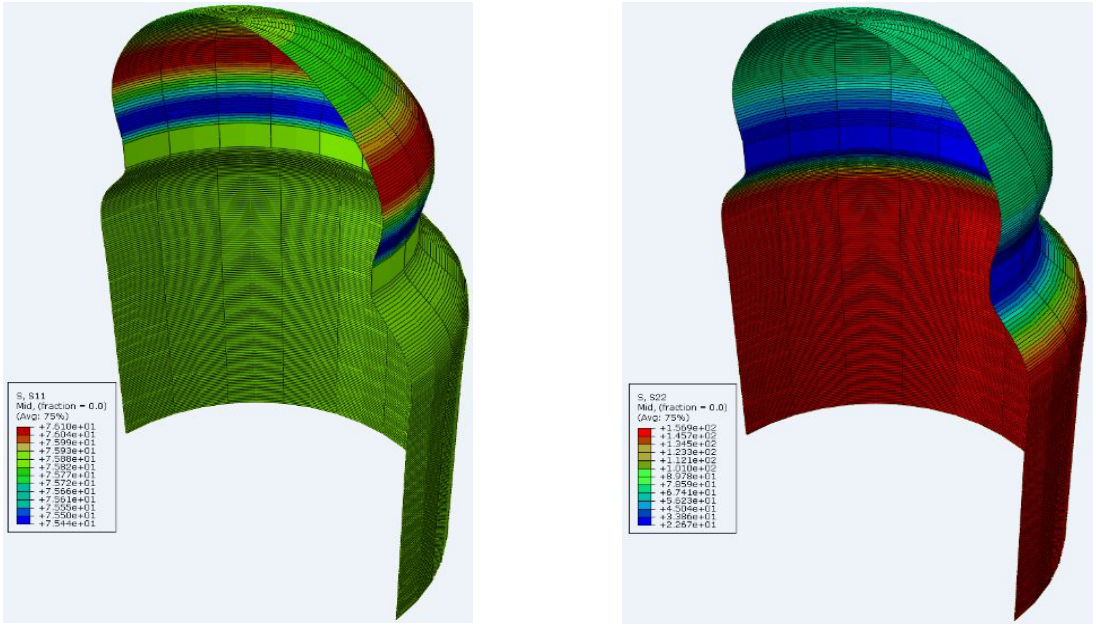


Slika 66 Rubni uvjeti i opterećenje za model gornjeg spoja ljusaka

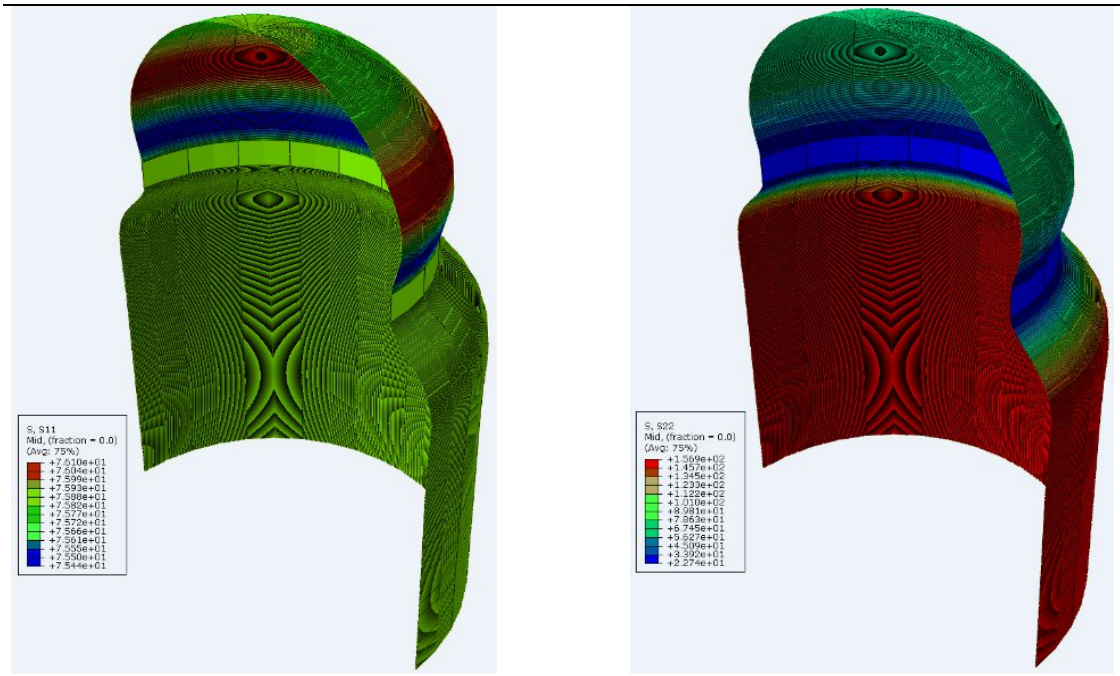
Slika 67 prikazuje raspodjelu cirkularnih i meridijalnih naprezanja.



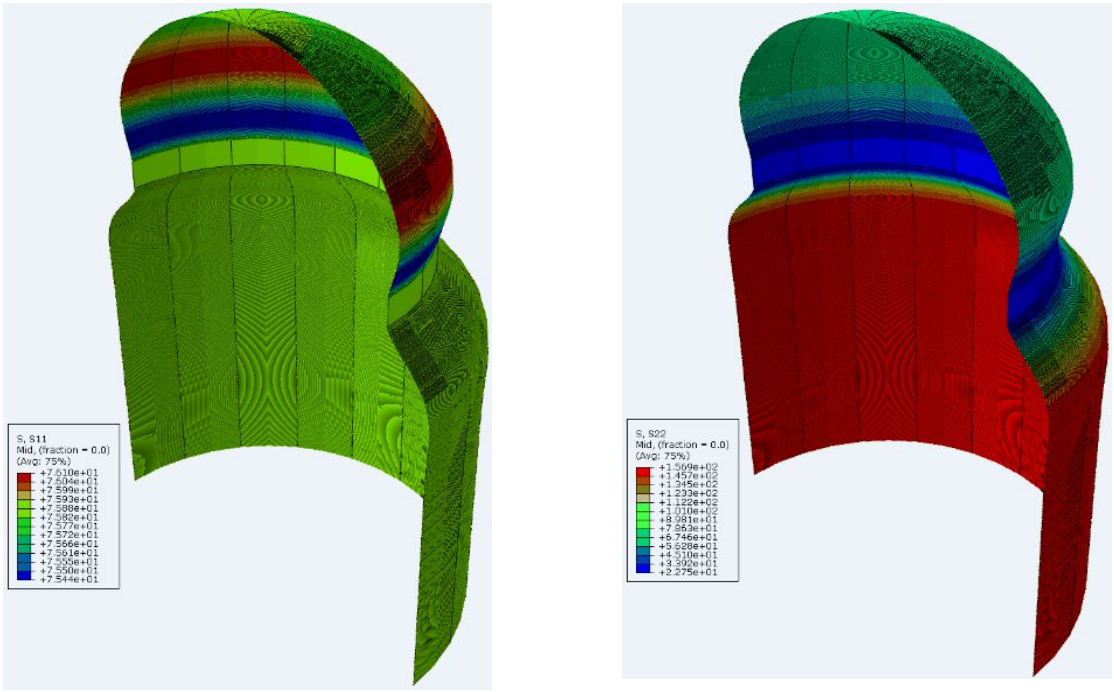
51 element



253 elementa



631 element

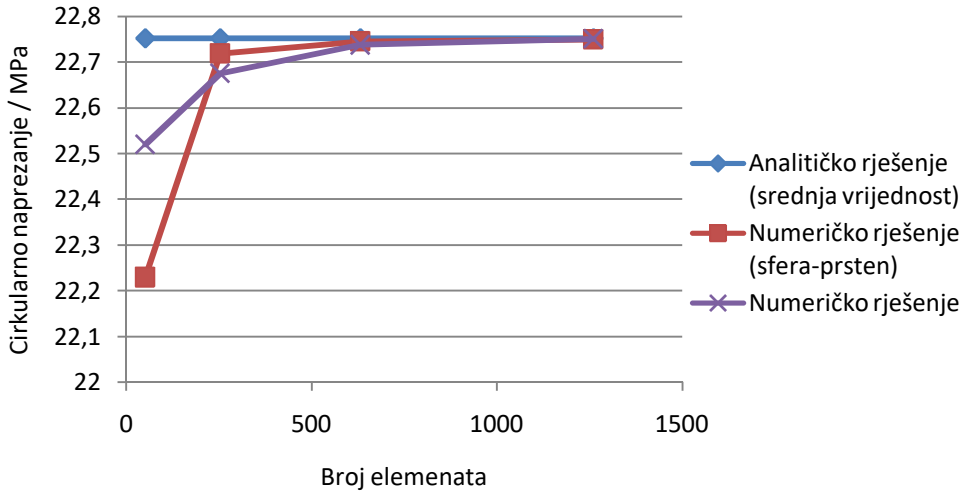


1261 element

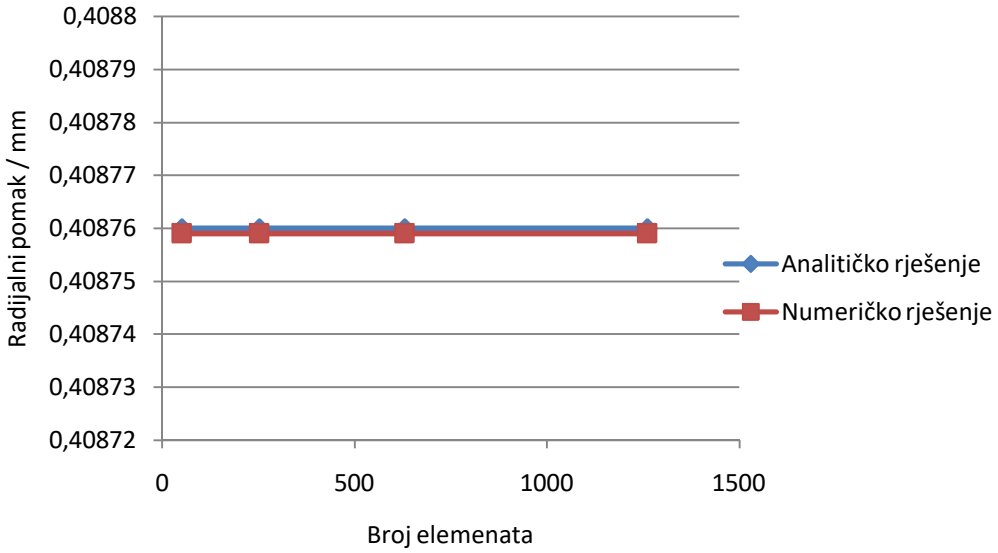
a) b)

Slika 67 Raspodjela naprezanja gornjeg spoja u MPa: a) meridijalna, b) cirkularna

Očitavanjem vrijednosti cirkularnog naprezanja na mjestu spoja sfere i prstena, odnosno cilindra i prstena te vrijednosti radijalnog pomaka na donjem rubu cilindrične ljuske, može se zaključiti da je u analizi spoja ljusaka sa prstenom gušća mreža potrebnija nego u analizi spoja ljusaka bez prstena. Slika 68 prikazuje konvergenciju cirkularnog naprezanja, a slika 69 prikazuje konvergenciju radijalnog pomaka.

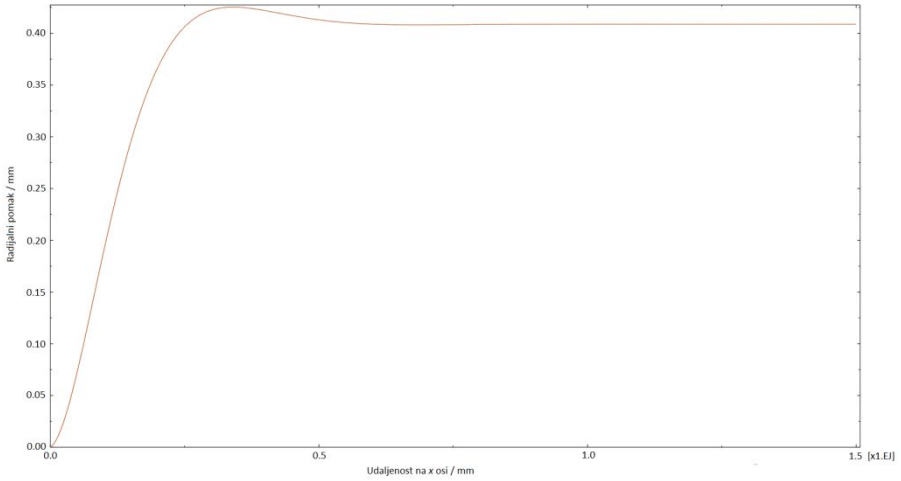


Slika 68 Konvergencija cirkularnog naprezanja na spoju ljusaka sa prstenom



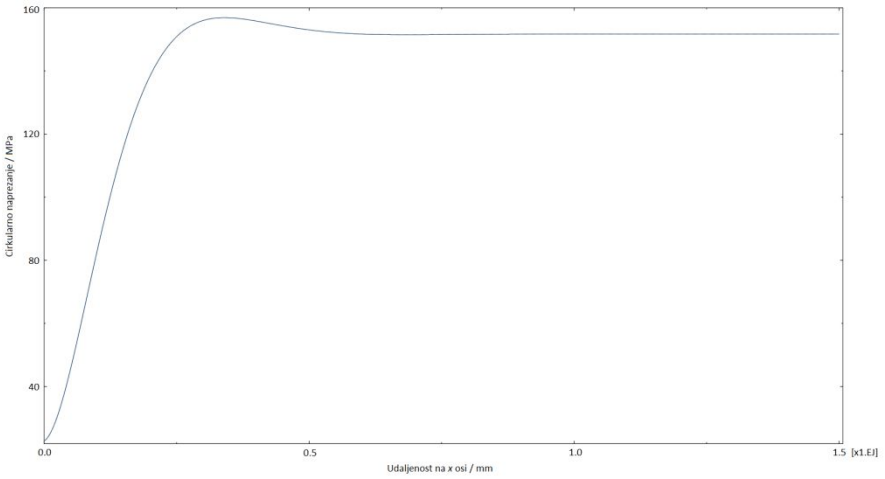
Slika 69 Konvergencija radijalnog pomaka na spoju ljusaka sa prstenom

Kod najgušće mreže cirkularno naprezanje u spoju cilindra i prstena postaje jednako analitičkom rješenju, dok cirkularno naprezanje u spoju sfere i prstena odstupa 0,02% , što je zanemarivo. Radijalni pomak na rubu cilindrične ljuske konvergira i kod najrjeđe mreže iz razloga što u području udaljenom od mjesta spoja vlada približno membransko stanje naprezanja i deformacija pa je odstupanje svega zanemarivih 0,0002%. Sada slijede slike s dijagramima raspodjele duž izvodnice gornjeg dijela cilindrične ljuske za najgušću mrežu od 1261 elementa. Slika 70 prikazuje raspodjelu radijalnog pomaka duž izvodnice gornjeg dijela cilindrične ljuske.



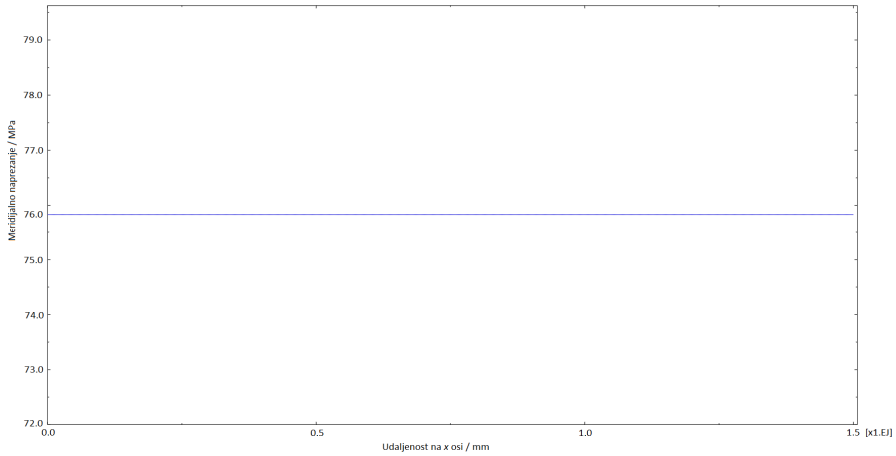
Slika 70 Raspodjela radijalnog pomaka za gornji dio cilindrične ljuske

Slika 71 prikazuje raspodjelu cirkularnog naprezanja duž izvodnice gornjeg dijela cilindrične ljuske.



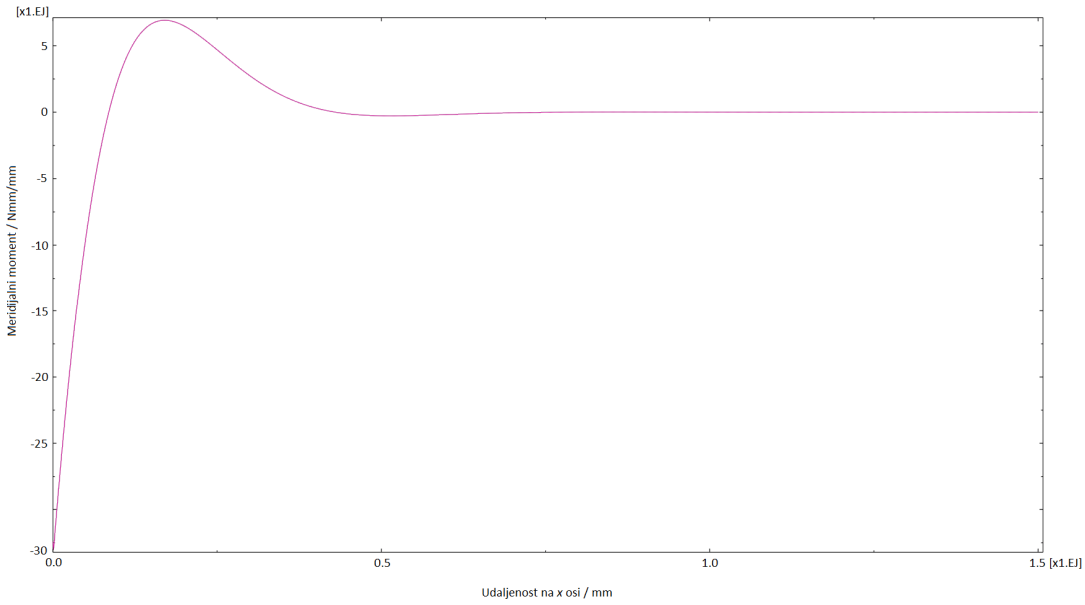
Slika 71 Raspodjela cirkularnog naprezanja za gornji dio cilindrične ljuske

Slika 72 prikazuje raspodjelu meridijalnog naprezanja duž izvodnice gornjeg dijela cilindrične ljuske.



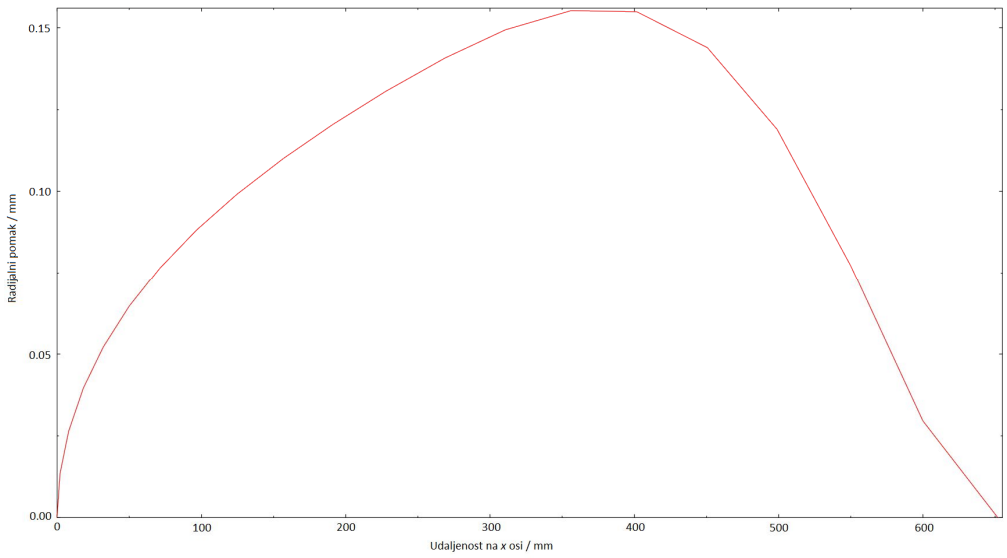
Slika 72 Raspodjela meridijalnog naprezanja za gornji dio cilindrične ljuske

Slika 73 prikazuje raspodjelu meridijalnog momenta duž izvodnice gornjeg dijela cilindrične ljuske.



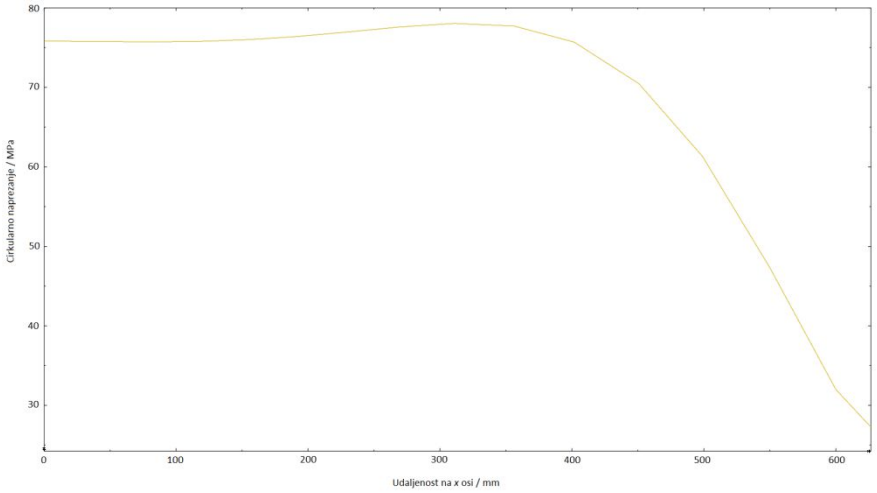
Slika 73 Raspodjela meridijalnog momenta za gornji dio cilindrične ljuske

Nakon uspoređivanja slike 70 sa slikom 17, slike 71 sa slikom 18, slike 72 sa slikom 19 te slike 73 sa slikom 20 može se zaključiti da je jednaka raspodjela promatranih veličina dobivena i analitičkom i numeričkom metodom. Sada slijede slike s dijagramima raspodjele duž izvodnice gornje sferne ljuske. Slika 74 prikazuje raspodjelu radijalnog pomaka duž izvodnice gornje sferne ljuske.



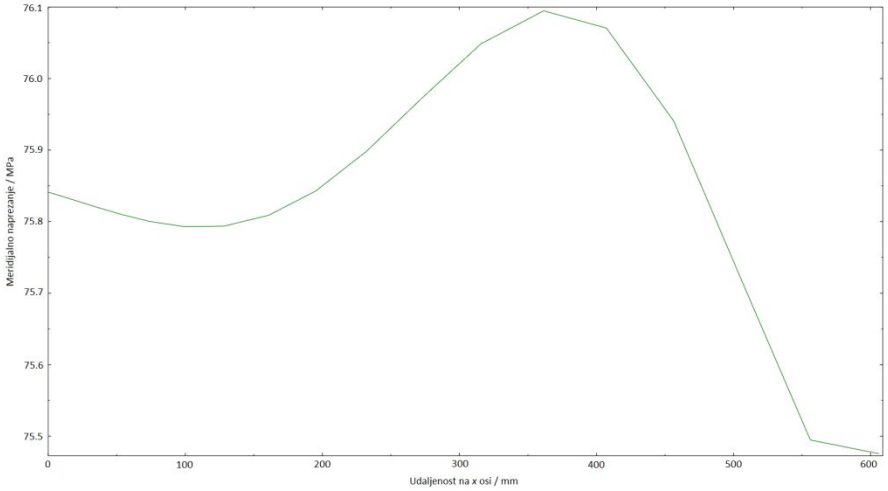
Slika 74 Raspodjela radijalnog pomaka za gornju sfernu ljusku

Slika 75 prikazuje raspodjelu cirkularnog naprezanja duž izvodnice gornje sferne ljuske.



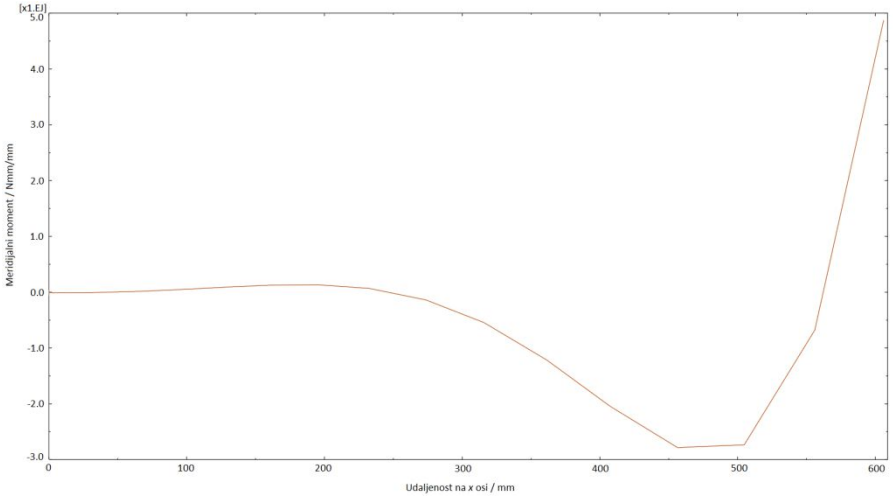
Slika 75 Raspodjela cirkularnog naprezanja za gornju sfernu ljusku

Slika 76 prikazuje raspodjelu meridijalnog naprezanja duž izvodnice gornje sferne ljuske.



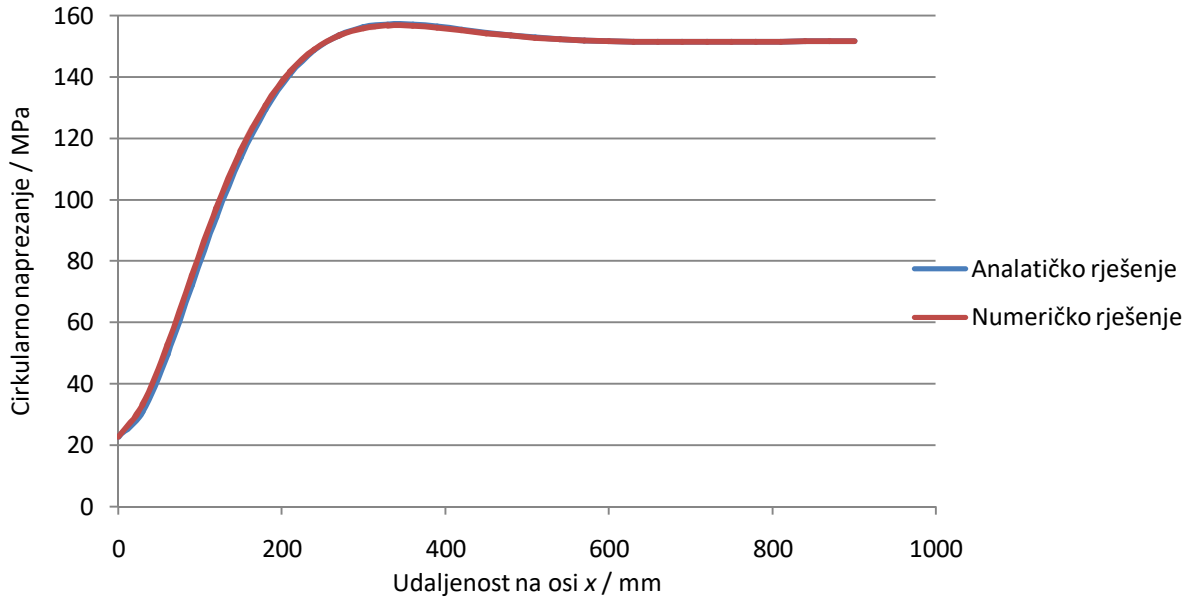
Slika 76 Raspodjela meridijalnog naprezanja za gornju sfernu ljusku

Slika 77 prikazuje raspodjelu meridijalnog momenta duž izvodnice gornje sferne ljuske.

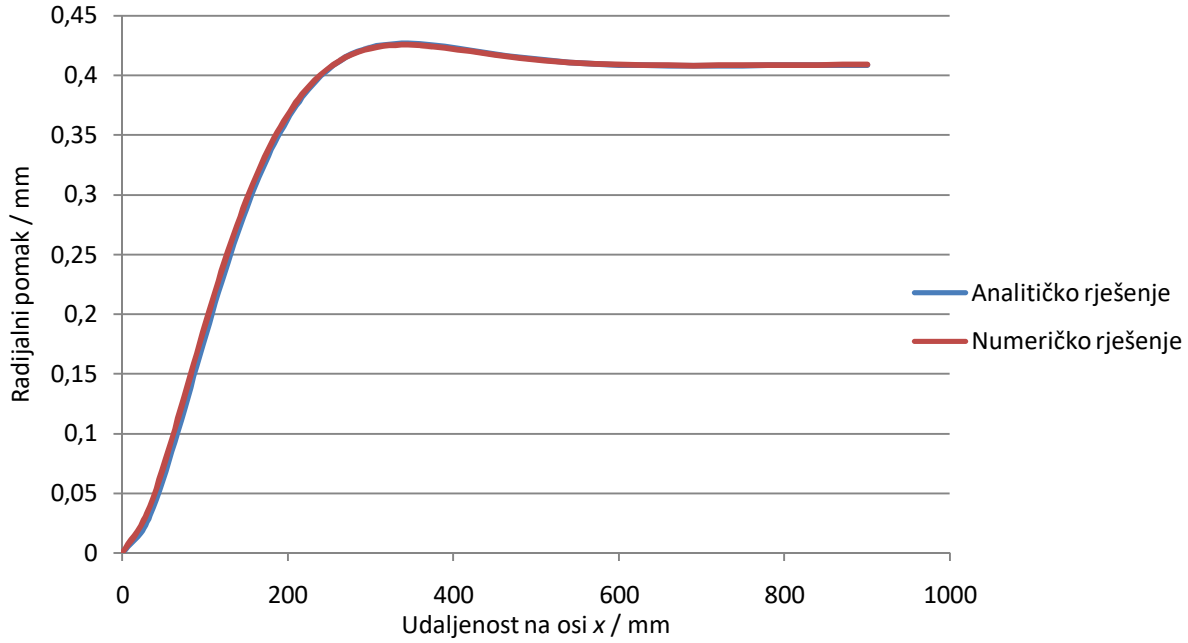


Slika 77 Raspodjela meridijalnog momenta za gornju sfernu ljusku

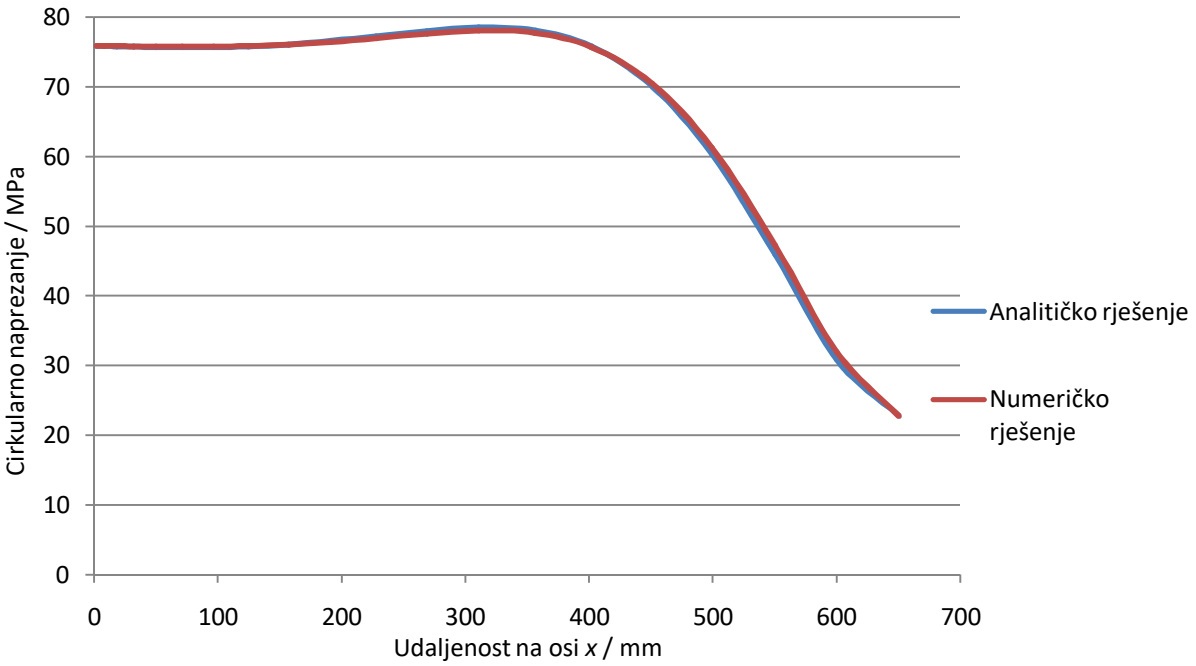
Uspoređivanjem slike 74 sa slikom 22, slike 75 sa slikom 23, slike 76 sa slikom 25 te slike 77 sa slikom 26 može se vidjeti da su raspodjele promatranih veličina i duž izvodnice gornje sferne ljuske također jednake. Kao što je napomenuto u prošlom potpoglavlju, potrebno je provjeriti u više točaka rezultate numeričke analize da bi bilo moguće očitavati kritična naprezanja sa većom sigurnošću. Slika 78, slika 79, slika 80 i slika 81 prikazuju preklapanje vrijednosti dobivenih analitičkim i numeričkim putem.



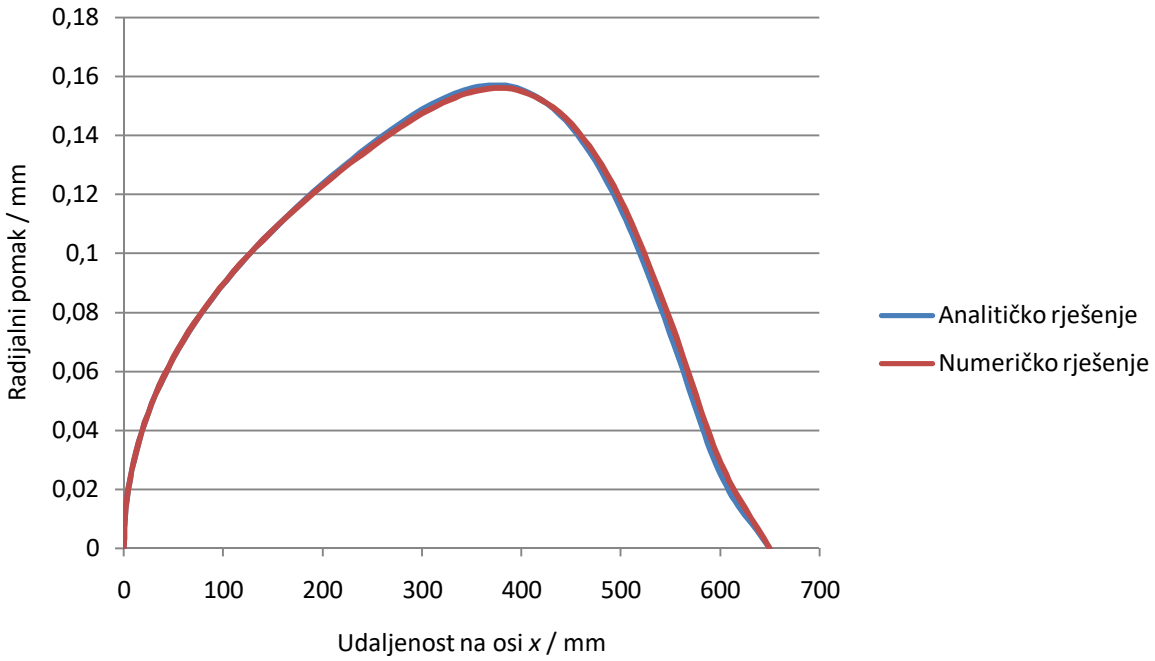
Slika 78 Usporedba vrijednosti cirkularnih naprezanja na gornjem dijelu cilindrične ljuske



Slika 79 Usporedba vrijednosti radijalnih pomaka na gornjem dijelu cilindrične ljuske



Slika 80 Usporedba vrijednosti cirkularnih naprezanja na gornjoj sfernoj ljusci



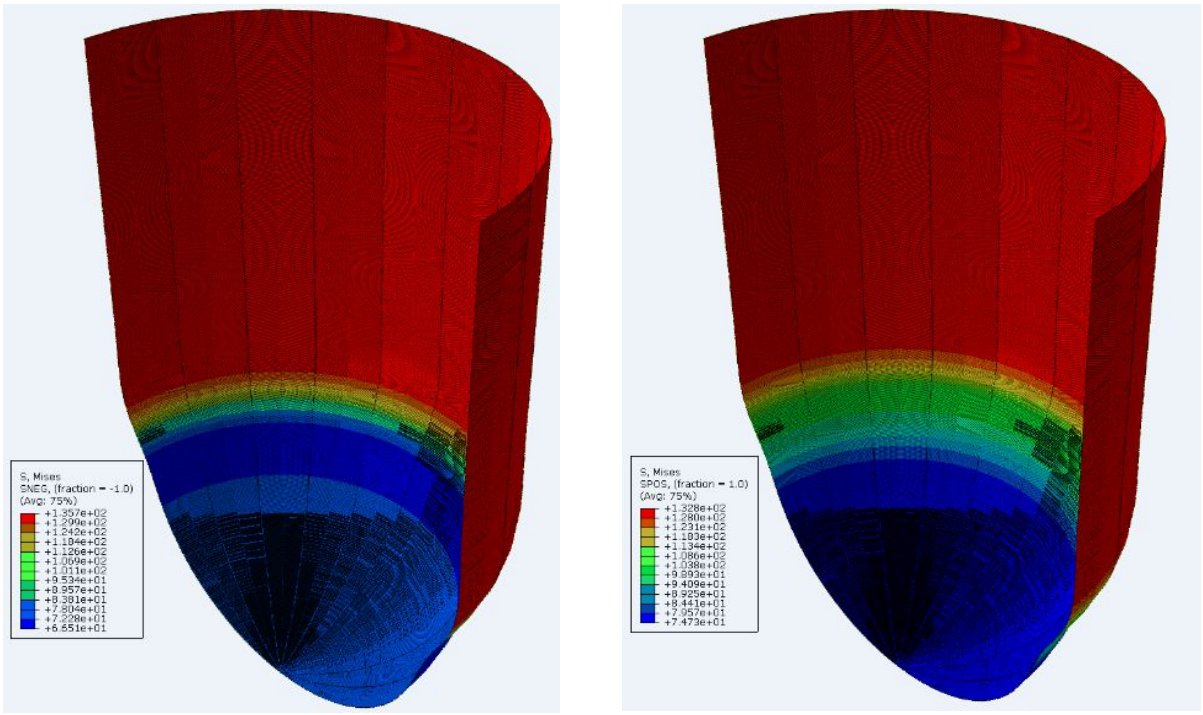
Slika 81 Usporedba vrijednosti radijalnih pomaka na gornjoj sfernoj ljusci

Iz ovih slika zaključujemo da i na gornjem dijelu vertikalnog spremnika numerička analiza daje rješenja s dovoljno malim odstupanjima.

3.8. Očitavanje kritičnih ekvivalentnih naprezanja

Zahvaljujući usporedbama koje su se provele u potpoglavljima 3.6 i 3.7, očitana kritična naprezanja mogu se uzeti s većom sigurnošću. Dosadašnja analiza provodila se po srednjoj

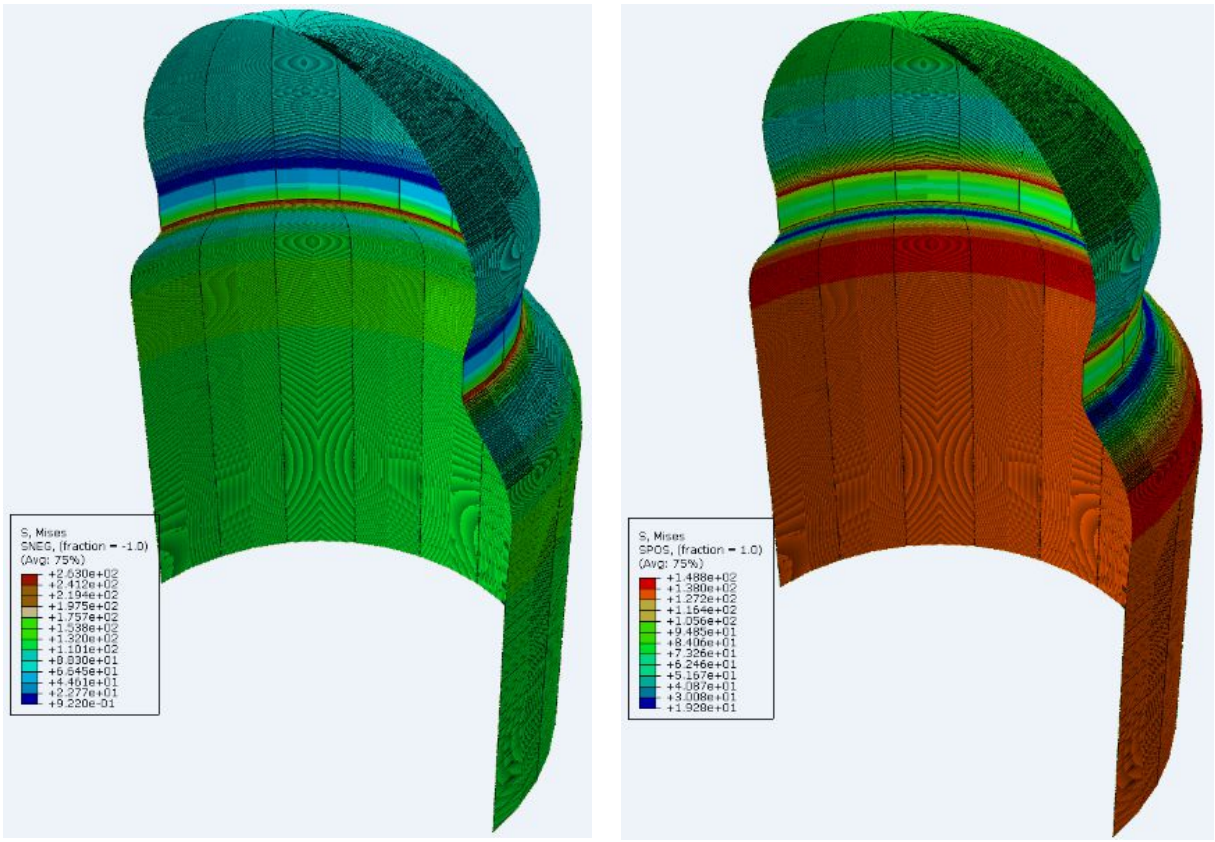
plohi, a kako je zadana konstrukcija opterećena na savijanje, kritična naprezanja potrebno je očitavati na unutrašnjoj i vanjskoj strani spremnika. Naime, na rubovima su naprezanja uslijed savijanja upravo najveća zbog linearne raspodjele. Opcije SPOS i SNEG omogućuju očitavanje naprezanje na vanjskoj, odnosno unutrašnjoj strani konstrukcije. Slika 82 prikazuje raspored ekvivalentnih naprezanja na unutrašnjoj strani donjeg dijela konstrukcije, odnosno raspored ekvivalentnih naprezanja na vanjskoj strani donjeg dijela konstrukcije.



a) b)

Slika 82 Raspored ekvivalentnih naprezanja po donjem dijelu spremnika u MPa: a) unutrašnja strana, b) vanjska strana

Na unutrašnjoj strani je na cilindričnome dijelu očitano je najveće naprezanje u iznosu od 135,7 MPa, a na vanjskoj strani najveće očitano ekvivalentno naprezanje iznosi 132,8 MPa. Slika 83 prikazuju istu takvu raspodjelu na gornjem dijelu spremnika.



a) b)

Slika 83 Raspored ekvivalentnih naprezanja po gornjem dijelu spremnika u MPa: a) unutrašnja strana, b) vanjska strana

Na unutrašnjoj strani gornjeg dijela cilindrične ljuske očitano je ekvivalentno naprezanje u iznosu od 265,2 MPa, dok je na vanjskoj strani gornje sferne ljuske očitano naprezanje od 149,7 MPa. Iz iznesenih podataka vidi se da najveće naprezanje u cijeloj konstrukciji vlada u gornjem dijelu cilindrične ljuske gdje je u spoju sa prstenom. To se moglo i očekivati jer cilindrična ljuska pri istome tlaku radi veći membranski pomak nego sferna ljuska (izrazi (2.13) i (2.22), a uklješteni prsten više spriječava pomak nego spoj s ljuskom različite geometrije. U analitičkom proračunu u potpoglavlju 2.7.3 najveće naprezanje iznosi 275 MPa. Numerički izračunato kritičko naprezanje odstupa 3,69 %, što je prihvatljivo.

3.9. Kontrola čvrstoće

Za izradu spremnika koriste se konstrukcijski čelici poput čelika St 52, čija granica elastičnosi iznosi 350 MPa [1]. Kako je na zadanu konstrukciju primjenjen statički tlak, možemo kritično naprezanje σ_{krit} = 265,2 MPa uspoređivati upravo s granicom elastičnosti.

Sigurnost računamo prema jednostavnom izrazu:

$$S = \frac{\sigma_e}{\sigma_{krit}} = \frac{350}{265,2} = 1,33 . \quad (3.9)$$

Proračunski tlak od 7 MPa je tlak na kojemu se ova konstrukcija ispituje. Iznos radnog tlaka je manji i iznosi 3,5 MPa. To znači da izračunatu sigurnost možemo uzeti kao zadovoljavajuću.

4. Zaključak

Da bi se proveo analitički proračun čvrstoće, potrebno je biti upoznat s prikladnom teorijom koja dobro opisuje raspodjelu deformacija i naprezanja za zadanu konstrukciju. Postoji mogućnost pogrešnog tumačenja nekih fizikalnih relacija ili se jednostavno dogodi *lapsus calami* (lat. pogreška u pismu). Da bi se provela numerička analiza pomoću nekog programskog paketa, potrebno je biti upoznat s mogućnostima koje taj program pruža. Konkretno, u ABAQUSu je potrebno poznavati pogodnosti i ograničenja koja se odnose na pojedine konačne elemente. Na raspolaganju stoji veliki broj različitih konačnih elemenata pa je na korisniku da odredi koji su najprikladniji. Pokazano je da se za proračunavanje konstrukcije zadane u zadatku mogu koristiti barem tri tipa konačnih elemenata. Međutim, ispitivanjem konvergencije na jednostavnom primjeru određen je najbolji konačni element. Odabrani konačni element je potom dodatno verificiran na još jednom primjeru. Također je potrebno znati pravilno definirati mehaničke rubne uvjete na modelima konstrukcija. Korisno je znati i način na koji program izračuna pojedine veličine da se lakše mogu komentirati rezultati i eventualna odstupanja. Iz navedenih razloga može se pojaviti pogreška zbog manjka iskustva korisnika. Analitičkom i numeričkom metodom pokazano je da savijanje ima utjecaj na naprezanja i deformacije samo u spoju ljusaka i okolnom području. To znači da su modeli za numeričku analizu mogli biti i kraći. Pokazano je brojnim usporedbama da numerička analiza dobro prati analitička rješenja. Također je pokazano da su najveća naprezanja dobivena analitičkom i numeričkom metodom međusobno približno jednaka te djeluju na istome mjestu. Iz svega navedenog, u slučaju nedostatka sigurnosti ili iskustva, proizlazi da provođenje proračuna analitički i numerički omogućuje međusobno potvrđivanje točnosti rezultata. Naravno, ponekad si inženjer ne može priuštiti toliko vremena da provjeri točnost rezultata analitičkog proračuna ili da ga uopće i provede. U tom slučaju do izražaja mora doći znanje i iskustvo u analizi metodom konačnih elemenata.

LITERATURA

[1] Kraut, B.: Strojarski priručnik, Tehnička knjiga, Zagreb, 1970.

[2] Sorić J.: Metoda konačnih elemenata, Golden marketing-Tehnička knjiga, Zagreb, 2004.

[3] Alfirević I.: Linearna analiza konstrukcija, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb, 2011.

[4] Alfirević I.: Nauka o čvrstoći I, Tehnička knjiga D.D., Zagreb, 1995.

[5] ABAQUS, *Abaqus Documentation: Version 6.14*. 2014, Dassault Systemes: 3DS Paris Campus, 10 rue Marcel Dassault, 78140 Vélizy-Villacoublay, FRANCE.

[6] ABAQUS, *Abaqus Software: Version 6.14*. 2014, Dassault Systemes: 3DS Paris Campus, 10 rue Marcel Dassault, 78140 Vélizy-Villacoublay, FRANCE

[7] Pireko d.o.o.

[8] http://www.ce.memphis.edu/7117/notes/presentations/chapter_09.pdf

PRILOZI

I. CD-R disc