

# Utjecaj mjerne nesigurnosti na $\bar{x}$ - R kontrolnu kartu

---

**Nikšić, Mile**

**Undergraduate thesis / Završni rad**

**2017**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:235:899122>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-03-14**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# ZAVRŠNI RAD

Mile Nikšić

Zagreb, 2017.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

**ZAVRŠNI RAD**  
**Utjecaj mjerne nesigurnosti na**  
 **$\bar{x} - R$  kontrolnu kartu**

Mentori:

Doc. Dr. sc. Gorana Baršić, dipl. ing.

Student:

Mile Nikšić

Zagreb, 2017.



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
**FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE**



Središnje povjerenstvo za završne i diplomske ispite  
Povjerenstvo za završne ispite studija strojarstva za smjerove:  
proizvodno inženjerstvo, računalno inženjerstvo, industrijsko inženjerstvo i menadžment, inženjerstvo  
materijala i mehatronika i robotika

Sveučilište u Zagrebu Fakultet strojarstva i brodogradnje	
Datum	Prilog
Klasa:	
Ur.broj:	

## ZAVRŠNI ZADATAK

Student: **Mile Nikšić** Mat. br.: 0035195992

Naslov rada na hrvatskom jeziku: **Utjecaj mjerne nesigurnosti na  $\bar{x} - R$  kontrolnu kartu**

Naslov rada na engleskom jeziku: **Influence of measurement uncertainty on  $\bar{x} - R$  control chart**

Opis zadatka:

Kontrolnom kartom prate se određeni statistički parametri uzoraka. Klasičan način izrade  $\bar{x} - R$  kontrolne karte temelji se na određivanju gornje i donje statističke granice aritmetičkih sredina uzorka i raspona uzorka temeljem rezultata mjerenja, ne uzimajući u obzir utjecaj mjerne nesigurnosti rezultata mjerenja. Uključujući u izradu  $\bar{x} - R$  kontrolne karte i nesigurnost rezultata mjerenja, granice kontrolne karte se redefiniraju, kao i način tumačenja pogrešaka tipa I i II. U okviru završnog rada student ima sljedeće zadatke:

1. Detaljno opisati svrhu i način izrade  $\bar{x} - R$  kontrolne karte, te definirati karakteristične pogreške kontrolnih karata (pogreške tipa I i II).
2. Opisati način procjene mjerne nesigurnosti prema JCGM 100:2008 Vrednovanje mjernih podataka – Upute za iskazivanje mjerne nesigurnosti.
3. Redefinirati način izrade  $\bar{x} - R$  kontrolne karte uzimajući u obzir mjerne nesigurnosti rezultata mjerenja. Komentirati utjecaj mjerne nesigurnosti na pogreške kontrolnih karata (pogreške tipa I i II).
4. Na zadanom primjeru praćenja procesa temeljem rezultata mjerenja karakteristične značajke, uz zadane procjene mjernih nesigurnosti izraditi dvije  $\bar{x} - R$  kontrolne karte. Jedna kontrolna karta neće uključivati mjernu nesigurnost rezultata mjerenja, dok će u drugu biti uključena procjena mjerne nesigurnosti.
5. Analizirati i komentirati nalaze koji proizlaze iz dva pristupa izrade  $\bar{x} - R$  kontrolne karte.

Zadatak zadan:  
30. studenog 2016.


Rok predaje rada:  
**1. rok:** 24. veljače 2017.  
**2. rok (izvanredni):** 28. lipnja 2017.  
**3. rok:** 22. rujna 2017.

Predviđeni datumi obrane:  
**1. rok:** 27.2. - 03.03. 2017.  
**2. rok (izvanredni):** 30. 06. 2017.  
**3. rok:** 25.9. - 29. 09. 2017.

Zadatak zadao:

  
Doc.dr.sc. Gorana Baršić

v.d. predsjednika Povjerenstva:

  
Izv. prof. dr. sc. Branko Bauer

Izjavljujem da sam ovaj rad izradio samostalno koristeći znanja stečena tijekom studija i navedenu literaturu.

Zahvaljujem se svojim roditeljima koji su me podržavali tijekom cijelog studija, te svojim kolegama i prijateljima na fakultetu. Također bi se zahvalio svojoj mentorici Doc. Dr. sc. Gorani Baršić za pruženu kvalitetnu podršku i usmjeravanje tijekom cijelog postupka izrade ovog završnog rada.

Mile Nikšić

## Sadržaj

Popis slika .....	III
Popis tablica .....	IV
Popis oznaka.....	V
Sažetak .....	VI
Summary .....	VII
1. UVOD.....	1
2. KONTROLNE KARTE.....	2
2.1. Povezanost rasipanja i kvalitete .....	3
2.2. Smjernice izrade kontrolnih karti.....	6
2.3. Revizija kontrolnih granica .....	12
2.4. Interpretacija $\bar{x}$ -R karte .....	13
2.5. Promjena veličine uzorka .....	16
2.6. Operativna karakteristična funkcija .....	17
2.7. Prosječno trajanje procesa (eng. <i>Average Run Length</i> ) za $\bar{x}$ kartu.....	20
2.8. Kontrolne granice i granice tolerancije .....	23
3. MJERNA NESIGURNOST.....	24
3.1. GUM metoda.....	26
3.2. Izvod mjerne nesigurnosti za kontrolne karte .....	28
3.3. Pogreške kontrolnih karata uz mjernu nesigurnost .....	31
4. PRIMJER I ANALIZA .....	36
4.1. Uključivanje nesigurnosti u kontrolne karte .....	40
5. ZAKLJUČAK .....	44
6. LITERATURA .....	45
7. PRILOZI .....	46

## Popis slika

Slika 1.	Razdioba osnovnog skupa i uzorka.....	2
Slika 2	Izlaz iz proizvodnog procesa .....	3
Slika 3.	Rasipanje i kontrola procesa .....	3
Slika 4.	Rasipanje veće od zahtjeva .....	4
Slika 5.	Grafički prikaz kontrolnih karti .....	10
Slika 6.	$\bar{x}$ i $R$ kontrolne karte .....	12
Slika 7.	Ciklički obrazac .....	13
Slika 8.	Mješoviti obraza.....	14
Slika 9.	Pomak u procesnoj razini .....	14
Slika 10.	Prikaz rastućeg trenda .....	15
Slika 11.	Prikaz stratifikacije .....	15
Slika 12.	Operativna-karakteristična krivulja $\bar{x}$ karte (za $L = 3$ ).....	18
Slika 13.	OK krivulja za $R$ kartu (za $L = 3$ ).....	19
Slika 14.	$ARL$ (broj uzoraka) za $\bar{x}$ kartu sa $3\sigma$ granicama .....	21
Slika 15.	$I$ za $\bar{x}$ kartu sa $3\sigma$ granicama .....	22
Slika 16.	Odnos granica .....	23
Slika 17.	Pravilo sukladnosti.....	25
Slika 18.	Dvije sastavnice standardne nesigurnosti .....	27
Slika 19.	Kontrolne karte s uključenim mjerim nesigurnostima.....	33
Slika 20.	$\bar{x}$ - $R$ kontrolne karte .....	39
Slika 21.	Novе kontrolne karte.....	39
Slika 22.	$\bar{x}$ kontrolna karta sa uključenim nesigurnostima .....	43
Slika 23.	$R$ kontrolna karta sa uključenim nesigurnostima .....	43

## Popis tablica

Tablica 1.	Podaci mjerenja .....	9
Tablica 2.	Novi uzorci mjerenja.....	11
Tablica 3.	Iznosi mjerenja debljine <i>Si</i> pločica.....	37
Tablica 4.	Vrijednosti za svaki uzorak .....	42



## Popis oznaka

Dimenzija	Oznaka	Mjerna jedinica
Očekivanje	$\mu$	m
Standardna devijacija	$\sigma$	-
Raspon	$R$	m
Pogreška tipa I	$\alpha$	%
Pogreška tipa II	$\beta$	%
Prosječno trajanje procesa	$ARL$	-
Prosječno vrijeme do signala	$ATS$	s
Sastavljena standardna nesigurnost	$u_c$	m
Gornja kontrolna granica	$UCL$	m
Donja kontrolna granica	$LCL$	m
Vjerojatnost uzorka izvan kontrolnih granica	$P_i$	%
Vjerojatnost da je proces izvan kontrole	$P_{uk}$	%

## Sažetak

U ovom završnom radu je prezentirana svrha i način izrade  $\bar{x}$ - $R$  kontrolne karte, te su definirane karakteristične pogreške kontrolnih karata, (pogreške tipa I i II). Opisan je način intepertacije nekih trendova koji mogu dovesti proces van kontrole, iako se trenutno sve točke nalaze unutar granica kontrole. Također je definirana izrada kontrolne karte i način izračuna granica kontrolne karte u situacijama kada broj uzoraka nije konstantan.

Prema *JCGM 100:2008, Vrednovanje mjernih podataka - Upute za iskazivanje mjerene nesigurnosti* opisan je postupak procjene mjerne nesigurnosti i razlozi zbog kojih se procjenjuje. Opisani su načini procjene standardnih mjernih nesigurnosti, te je dan izvod mjerne nesigurnosti za uzorke, te granice kontrolnih karata.

Redefiniran je način izrade  $\bar{x}$ - $R$  kontrolne karte uzimajući u obzir mjerne nesigurnosti, te je opisan utjecaj na pogreške tipa I i II. Prikazan je način izračuna vjerojatnosti da će proces biti izvan kontrole neovisno o položaju uzorka na kontrolnoj karti.

Na temelju zadanog primjera je izrađena  $\bar{x}$ - $R$  kontrolna karte bez uključene mjerne nesigurnosti i kontrolna karta s uključenom nesigurnosti, pri čemu je komentiran i naveden zaključak na kraju ovog rada.

Ključne riječi: kontrola kvalitete, kontrolne karte, mjerna nesigurnost

## Summary

In this final paper the purpose and method of making  $\bar{x}$ - $R$  control charts is presented, and characteristic errors of control charts, type I and II errors are defined. Interpretation is described for trends that can lead the process out of control even when all samples are within boundaries of control chart. Also presented is the development of charts and the method of calculating the new boundaries in situations where the number of samples is not constant.

According to *JCGM 100:2008, Vrednovanje mjernih podataka - Upute za iskazivanje mjerene nesigurnosti* estimation of measurement uncertainty is presented along with reasons for its estimation. Methods for estimation of measurement uncertainty is described, as well as estimation of uncertainties for samples, and boundaries of control chart.

The way of making  $\bar{x}$ - $R$  control charts is redefined taking into account the measurement uncertainty and the impact on type I and II errors has been described. Method of calculating the probability that the process will be out of control regardless of the position of the sample on the control chart is also presented.

Based on the set example  $\bar{x}$ - $R$  chart is made first without the measurement uncertainty, then with included. Brief review and the conclusion are given at the end of this paper.

Key words: Quality control, Control charts, Measurement uncertainty

## 1. UVOD

Kontrolne karte su statistički alat kontrole kvalitete i temeljni pokazatelj mogućnosti poboljšanja kvalitete procesa ili proizvoda. Izumitelj kontrolnih karti je Walter A. Shewhart koji je radeći u Bell laboratoriju 1920-tih tražio način kako povećati pouzdanost telefonskih sistema. Naglasio je kako dovođenje procesa proizvodnje u stanje statističke kontrole ključno za predviđanje budućih izlaznih proizvoda i kako bi proces bio ekonomičniji. Svoja istraživanja vezana uz kontrolne karte objavio je 1931. godine u knjizi "Economic Control of Quality of Manufactured Product". Korištenje kontrolnih karti je sve veće zahvaljujući implementiranju Statistical Process Control softvera (SPC) u proizvodne procese. Mnoge značajke kvalitete mogu se izraziti brojčanim vrijednostima, kao npr. kod mjerenja promjera ležajeva ili njihove mase. Takve značajke zovu se varijable. Kontrolne karte se često su u primjeni kao osnovni alat za praćenje i poboljšavanje kvalitete zbog jednostavnosti primjene i razumijevanja.

Kontrolne karte koriste se na način da se određeni proces prati uzorkovanjem gdje se uzimaju rezultati mjerenja karakteristične značajke i s odgovarajućom kontrolnom kartom se tumače ti rezultati. Ukoliko se rezultati odgovarajućih statističkih parametara ne nalaze unutar kontrolnih granica kontrolne karte smatra se da proces nije pod kontrolom. Parametri uzorka, kao i granice karte koje se koriste su diskretne vrijednosti. No u stvarnosti ti statistički parametri su stohastičke veličine. Iz razloga što su mjerenja podložna pogreškama, bilo to zbog djelovanja slučajnih utjecaja ili grešaka nesigurnosti mjerenja. Parametar koji opisuje rasipanje rezultata mjerenja od nazivne mjere u nekoj vjerojatnosti naziva se mjerna nesigurnost. Ona nam, dakle, opisuje područje unutar koje se nalazi prava vrijednost mjerene veličine. Taj parametar se uobičajeno ne koristi u kontrolnim kartama niti u SPC softverima. Zbog navedenog u ovom radu analizirat će se utjecaj mjerne nesigurnosti na kreiranje i tumačenje rezultata kontrolne karte. [1], [2]

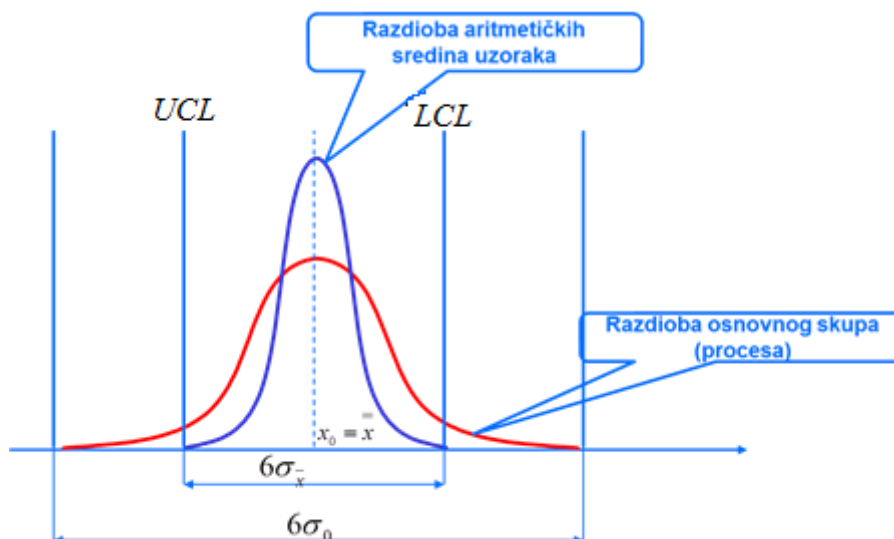
## 2. KONTROLNE KARTE

Kada je riječ o karakteristici kvalitete koja je promjenjiva, potrebno je pratiti srednju vrijednost i rasipanje praćene karakteristike. Praćenje srednje vrijednosti obično se provodi korištenjem  $\bar{x}$  kontrolne karte, dok rasipanje procesa može biti praćeno korištenjem  $s$  karte (procijenjena standardna odstupanja) ili  $R$  karte (rasponi).  $R$  karta je češća u primjeni.  $\bar{x}$  i  $R$  karte su jedni od najvažnijih i korisnijih načina praćenja procesa i kvalitete. Važno je zadržati kontrolu i aritmetičkih sredina i raspona. [3]

Osnova statističke metode primjene kontrolne karte je uzimanje većeg broja malih uzoraka iz osnovnog skupa. [4]

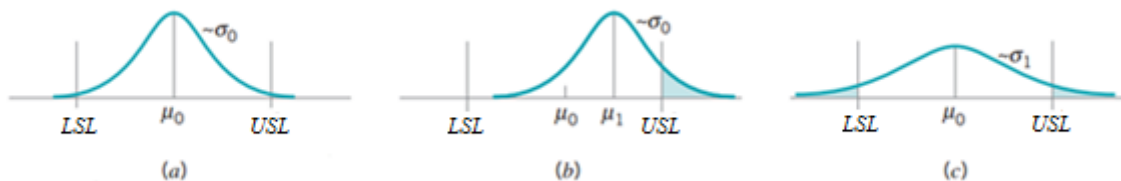
Veza između osnovnog skupa i jednog uzorka vrlo je labava, ali s većim brojem uzoraka posve je određena. Na slici 1 prikazane su dvije normalne distribucije. Jedna distribucija opisuje osnovni skup i definirana je rasipanjem  $\sigma$  i očekivanjem  $\mu$ . [4]

Procjenu osnovnog skupa (podatke iz kontrolne karte) možemo prikazati drugom normalnom distribucijom koja je definirana procijenjenim standardnim odstupanjem  $s$  i aritmetičkom sredinom  $\bar{\bar{x}}$ .



Slika 1. Razdioba osnovnog skupa i uzorka [4]

Slika 2 prikazuje izlaz iz proizvodnog procesa. Pod a) su srednja vrijednost  $\mu$  i standardna devijacija  $\sigma$  u nominalnim vrijednostima ( $\mu_0$  i  $\sigma_0$ ) prema tome veći dio procesa nalazi se unutar granica specifikacije. Međutim pod b), srednja vrijednost je pomaknuta na vrijednost  $\mu_1 > \mu_0$  što rezultira većim dijelom nesukladnih proizvoda. Pod c), standardna devijacija je pomaknuta na vrijednost  $\sigma_1 > \sigma_0$  što također rezultira većim brojem nesukladnih jedinica, iako je  $\mu$  na ciljanoj vrijednosti. [3]



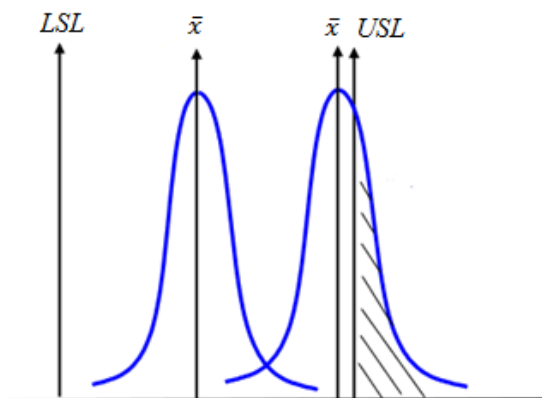
**Slika 2. Izlaz iz proizvodnog procesa [3]**

## 2.1. Povezanost rasipanja i kvalitete

Temeljna mjera kvalitete procesa, značajke proizvoda, alatnog stroja, mjernog uređaja, rezultata mjerenja i drugo je veličina rasipanja. Temeljni argument provedenog poboljšanja kvalitete je smanjeno rasipanje. [4]

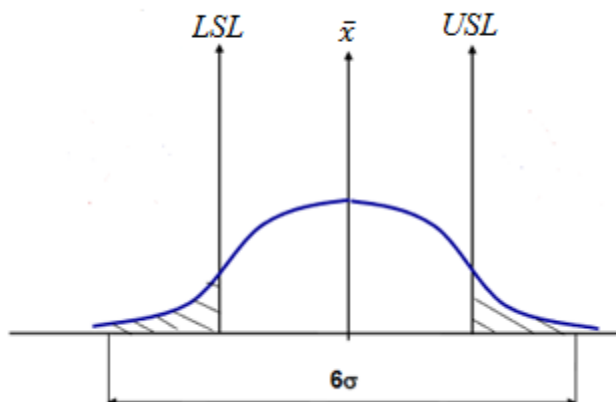
U statistici je  $\sigma$  mjera rasipanja. Možemo s toga reći da je  $\sigma$  mjera kvalitete.

Na slici 3 je na lijevoj strani prikazano rasipanje koje se nalazi unutar gornje granice tolerantnog polja (eng. *Upper specification limit - USL*) i donje granice tolerantnog polja (eng. *Lower specification limit - LSL*), dok na desnoj strani dolazi do pojave nesukladnih jedinica pod istim rasipanjem zbog nedostatne kontrole procesa. [4]



**Slika 3. Rasipanje i kontrola procesa [4]**

Na slici 4 dolazi do većeg rasipanja od zahtjeva te kažemo da je loša kvaliteta, te se javljaju nesukladne jedinice (šrafirano).



**Slika 4. Rasipanje veće od zahtjeva [4]**

Klasični način izrade  $\bar{x} - R$  kontrolne karte temelji se na određivanju gornje i donje statističke granice aritmetičkih sredina uzorka i raspona uzorka temeljem vrijednosti mjerenja. [2]

Neka je karakteristična veličina normalno distribuirana sa očekivanjem  $\mu$  i standardnim odstupanjem  $\sigma$ , gdje su  $\mu$  i  $\sigma$  poznati. Ako su  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  vrijednosti mjerenja u uzorku veličine  $n$ , onda će aritmetička sredina uzorka biti jednaka [2]:

(1)

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

gdje je  $\bar{x}$  normalno distribuiran s očekivanjem  $\mu$  i rasipanjem  $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ . Nadalje, s vjerojatnošću od  $1 - \alpha$  može se tvrditi da će sredina bilo kojeg uzorka biti u intervalu između:

(2)

$$\mu - Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \text{ i } \mu + Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Koji predstavlja granice  $\bar{x}$  kontrolne karte.

Ipak, s obzirom da  $\mu$  i  $\sigma$  obično nisu poznate veličine potrebno ih je procijeniti iz preliminarnih mjerenja temeljem najmanje 20 do 25 uzoraka. [2]

Neka postoji  $m$  uzoraka s  $n$  rezultata mjerenja, i neka su  $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_m$  aritmetičke sredine svakog od uzorka, tada će aritmetička sredina bit odlična procjena očekivanja  $\mu$  [2]:

(3)

$$\bar{\bar{x}} = \frac{\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \dots + \bar{x}_m}{m}$$

$\bar{\bar{x}}$  tada predstavlja središnju liniju  $\bar{x}$  kontrolne karte.

Standardno odstupanje  $\sigma$  može se procijeniti preko aritmetičkih sredina raspona uzoraka:

$$R = x_{max} - x_{min}$$

(4)

$$\bar{R} = \frac{R_1 + R_2 + \dots + R_m}{m}$$

sljedećim izrazom:

(5)

$$\hat{\sigma} = \frac{\bar{R}}{d_2}$$

Sada se korištenjem (5) i (2) te uz uobičajeni odabir  $Z_{\alpha/2} = 3$  što odgovara  $\alpha = 0,27\%$  mogu se postaviti kontrolne granice  $\bar{x}$  kontrolne karte [2]:

(6)

$$UCL_{\bar{x}} = \bar{\bar{x}} + 3 \frac{\bar{R}}{d_2 \sqrt{n}}$$

$$LCL_{\bar{x}} = \bar{\bar{x}} - 3 \frac{\bar{R}}{d_2 \sqrt{n}}$$



gdje je uz supstituciju:

(7)

$$A_2 = \frac{3}{d_2\sqrt{n}}$$

Jednadžba (6) prelazi u oblik:

(8)

$$UCL_{\bar{x}} = \bar{\bar{x}} + A_2\bar{R}$$

$$LCL_{\bar{x}} = \bar{\bar{x}} - A_2\bar{R}$$

Granice kontrolne karte raspona  $R$  određuju se istom analogijom uz  $\sigma_R = d_3\sigma$ :

(9)

$$UCL_R = \bar{R} + 3\sigma_R = \bar{R} + 3d_3\sigma = \bar{R} \left( 1 + 3\frac{d_3}{d_2} \right) = D_4\bar{R}$$

$$LCL_R = \bar{R} - 3\sigma_R = \bar{R} - 3d_3\sigma = \bar{R} \left( 1 - 3\frac{d_3}{d_2} \right) = D_3\bar{R}$$

Koeficijenti  $A_2$ ,  $D_3$  i  $D_4$  u funkciji su  $d_2$  i  $d_3$  te ovise o veličini uzorka  $n$  i uobičajeno se zadaju tablično. [2]

## 2.2. Smjernice izrade kontrolnih karti [3]

Kako bi se izradila  $\bar{x}$  i  $R$  kontrolna karta potrebno je odrediti veličinu uzorka, kontrolne granice i učestalost uzimanja uzorka. Ako se  $\bar{x}$  karta koristi za detekciju srednjih i većih pomaka procesa tada je potreban relativno mali uzorak ( $n = 4, 5, 6$ ).

Ukoliko se karta koristi za detekciju malih pomaka tada je potreban veći uzorak, ( $n = 15-25$ ). Veći broj uzoraka bi bio efikasniji, no kod povećanja broja uzoraka procjena standardne devijacije opada što  $n$  postaje veći,  $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ . Ekonomski utjecaj na uzorkovanje je takav da, ako je trošak izrade proizvoda visok, tada je bolje uzimati manje uzorke češće.

Broj proizvedenih jedinica također ima utjecaj na veličinu uzorka. Ukoliko je velika proizvodnja tada je poželjno da se češće uzrokuje jer kod velike proizvodnje će se proizvoditi velik broj loših proizvoda, škarta, u kraćem vremenu ukoliko dođe do pomaka u procesu.

Kontrolne karte se rade u dvije faze:

1. Faza 1:

Kada se koriste preliminarni uzorci za izradu  $\bar{x}$  i  $R$  kontrolne karte uobičajeno je koristiti jednačbe (8) i (9) kao probne kontrolne granice. One nam omogućuju da utvrdimo je li proces bio pod kontrolom kada su uzeti početni uzorci. Da bi se to odredilo, vrijednosti uzroka se unose u  $\bar{x}$  i  $R$  karte. Ukoliko su svi unutar probnih kontrolnih granica i nisu prisutni trendovi možemo zaključiti da je proces bio pod kontrolom i da su utvrđene granice kontrolne karte pogodne za praćenje sadašnje i buduće proizvodnje.

Poželjno je da su uzeta 20-25 uzorka s 3-5 jedinice za određivanje probnih kontrolnih granica. Ako se uzme manje uzoraka, pouzdanost utvrđenih granica biti će manja.

Ukoliko jedna ili više vrijednosti na  $\bar{x}$  ili  $R$  karti izlazi van granica potrebno je preispitati probne granice kontrolne karte, jer je potrebno da su bazirane na procesu koji je pod kontrolom.

To se radi ispitivanjem svake točke van granica i traženju uzroka toga. Ako je uzrok pronađen, točka se odbacuje i granice se preračunavaju sa preostalim točkama, te se ponovno provjerava da li su sve vrijednosti unutar novih kontrolnih granica. Taj postupak se ponavlja sve dok se ne potvrdi da je proces pod kontrolom.

Nekada nije moguće pronaći uzroke za vrijednosti uzoraka koje se nalaze van granica kontrolne karte, te postoje 2 načina djelovanja. Prvi je da se te vrijednosti (uzorci) ispuste iz daljnje analize.

Drugi je da se vrijednosti (uzorci) zadrže u određivanju kontrolnih granica, no ukoliko te točke stvarno ukazuju na proces van kontrole, onda to će takav postupak rezultirati preširokim granicama. Međutim, ako postoje samo jedna ili dvije takve vrijednosti onda one neće značajno utjecati na utvrđene granice.

Odbacivanjem većeg broja točaka (uzoraka) dolazi do toga da postoji sve manje podataka čime se smanjuje pouzdanost, a traganje za uzrokom većinom nije uspješno, poželjno je utvrditi da li su eventualno prisutni trendovi [str 13].

Primjer faze 1: Primjer izrade kontrolne karte preuzet je iz [3]. Sve veličine su izražene u  $\mu\text{m}$ .

**Tablica 1. Podaci mjerenja [3]**

Broj uzorka	1	2	3	4	5	$\bar{x}_i$	$R_i$
1	1,3235	1,4128	1,6744	1,4573	1,6914	1,4817	0,139
2	1,4314	1,3592	1,6075	1,4666	1,6109	1,4712	0,3521
3	1,4284	1,4871	1,4932	1,4324	1,5674	1,4882	0,3706
4	1,5028	1,6352	1,3841	1,2831	1,5507	1,4492	0,2674
5	1,5604	1,2735	1,5265	1,4363	1,6441	1,5805	0,4189
6	1,5955	1,5451	1,3574	1,3281	1,4198	1,5343	0,2447
7	1,6274	1,5064	1,8366	1,4177	1,5144	1,5076	0,3589
8	1,4190	1,4303	1,6637	1,6067	1,5519	1,5134	0,2658
9	1,3884	1,7277	1,5355	1,5176	1,3688	1,5242	0,3509
10	1,4039	1,6697	1,5089	1,4627	1,522	1,5284	0,4204
11	1,4158	1,7667	1,4278	1,5928	1,4181	1,3947	0,447
12	1,5821	1,3355	1,5777	1,3908	1,7559	1,5261	0,2422
13	1,2856	1,4106	1,4447	1,6398	1,1928	1,4083	0,3499
14	1,4951	1,4036	1,5893	1,6458	1,4969	1,5344	0,6823
15	1,3589	1,2863	1,5996	1,2497	1,5471	1,4874	0,3589
16	1,5747	1,5301	1,5171	1,1839	1,8662	1,4573	0,3153
17	1,3680	1,7269	1,3957	1,5014	1,4449	1,5777	0,3062
18	1,4163	1,3864	1,3057	1,621	1,5573	1,506	0,524
19	1,5796	1,4185	1,6541	1,5116	1,7247	1,4691	0,2185
20	1,7106	1,4412	1,2361	1,382	1,7601	1,539	0,1863
21	1,4371	1,5051	1,3485	1,567	1,488	1,5592	0,2533
22	1,4738	1,5936	1,6583	1,4973	1,472	1,5688	0,1156
23	1,5917	1,4333	1,5551	1,5295	1,6866	1,5264	0,3224
24	1,6399	1,5243	1,5705	1,5563	1,553	1,4817	0,139
25	1,5797	1,3663	1,624	1,3732	1,6887	1,4712	0,3521

Središnja linija  $\bar{x}$  karte je izračunata na način da se suma aritmetička sredina podijelila s brojem uzoraka.

$$\bar{\bar{x}} = \frac{\sum_{i=1}^{25} \bar{x}}{25} = \frac{37,6400}{25} = 1,5056$$

Središnja linija  $R$  karte je dobivena na isti način kao i središnja linija kod  $\bar{x}$  karte.

$$\bar{R} = \frac{\sum_{i=1}^{25} R}{25} = \frac{8,1302}{25} = 0,32521$$

Granice  $\bar{x}$  karte (a) i  $R$  karte (b) su dobivene preko formula (8) i (9), i sa koeficijentima iz tablice u prilogu 2:

(a)

$$UCL_{\bar{x}} = \bar{\bar{x}} + A_2 \times \bar{R} = 1,5056 + (0,577) \times (0,32521) = 1,69325$$

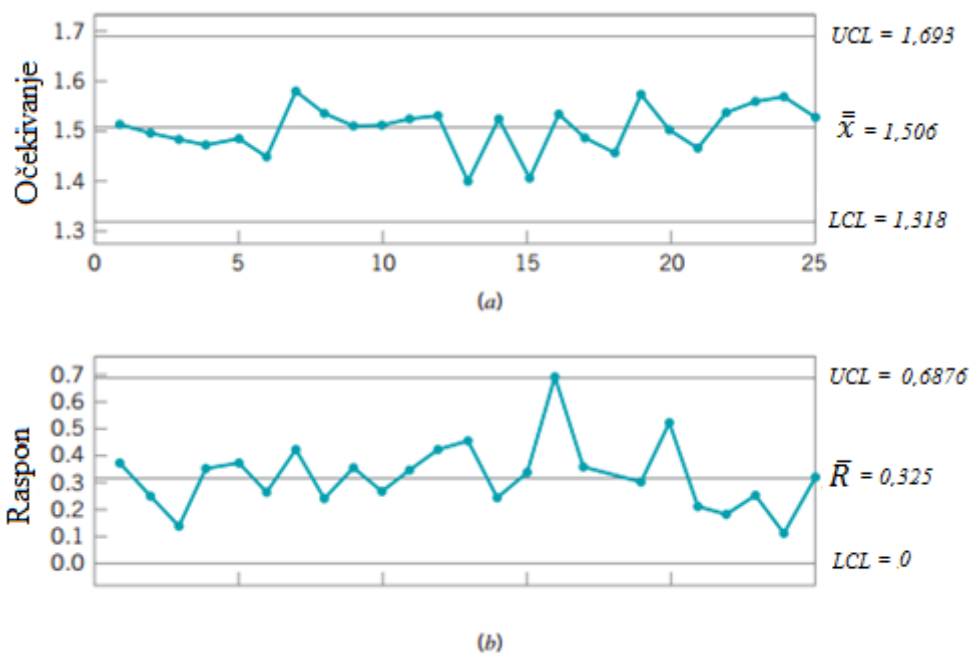
$$LCL_{\bar{x}} = \bar{\bar{x}} - A_2 \times \bar{R} = 1,5056 - (0,577) \times (0,32521) = 1,31795$$

(b)

$$LCL_R = \bar{R} \times D_3 = 0,32521 \times 0 = 0$$

$$UCL_R = \bar{R} \times D_4 = 0,32521 \times 2,114 = 0,68749$$

Na kraju se izrađuju obje karte preko izmjerenih i izračunatih vrijednosti.



**Slika 5. Grafički prikaz kontrolnih karti [3]**

Početni uzorci ne ukazuju da je proces van kontrole, stoga se može zaključiti da je proces pod kontrolom i da su granice dobre za daljnje korištenje za fazu 2.

## 2. Faza 2.

Nakon što su određene pouzdane kontrolne granice, mogu se koristiti za daljnji nadzor procesa. Gdje se uzimaju novi uzorci, te njihove vrijednosti se upišu na kontrolne karte.

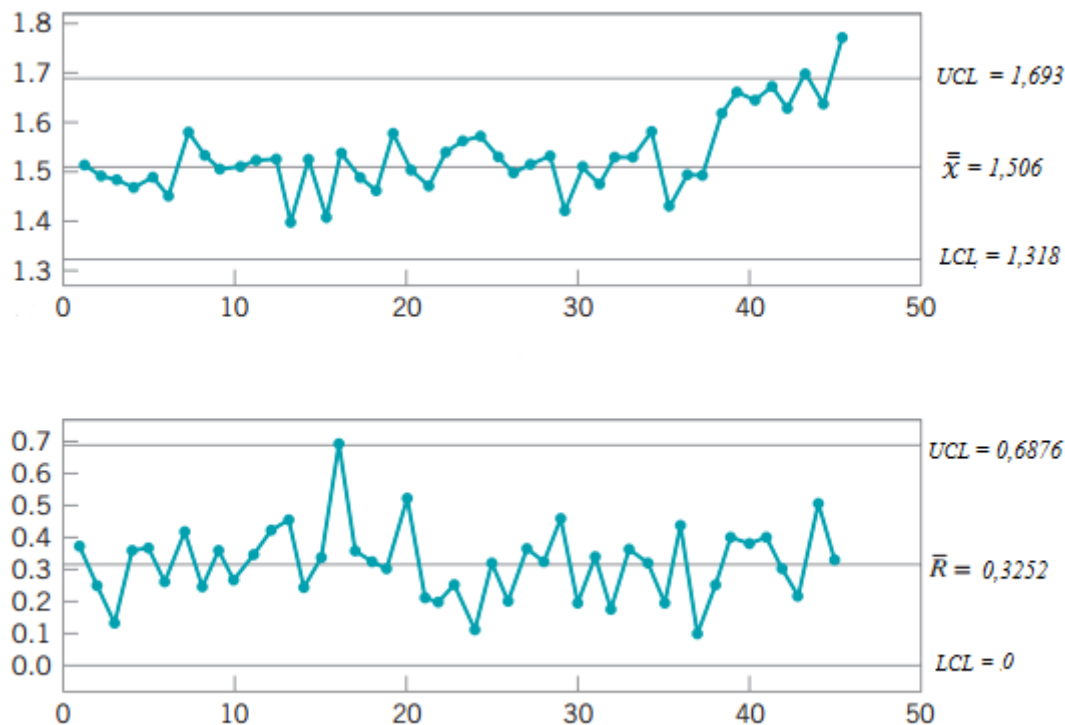
Primjer: Faza 2 primjera proizvodnje od primjera 1

20 novih uzorka je uzeto iz procesa nakon što su izrađene kontrolne granice i njihove vrijednosti su upisane u  $\bar{x}$  i  $R$  karte i prikazane u tablici 2.

**Tablica 2. Novi uzorci mjerenja [3]**

Broj uzorka	1	2	3	4	5	$\bar{x}_i$	$R_i$
26	1,4483	1,5458	1,4538	1,4303	1,6206	1,4998	0,1903
27	1,5435	1,6899	1,583	1,3358	1,4187	1,5142	0,3541
28	1,5175	1,3446	1,4723	1,6657	1,6661	1,5332	0,3215
29	1,5454	1,0931	1,4072	1,5039	1,5264	1,4152	0,4523
30	1,4418	1,5059	1,5124	1,462	1,6263	1,5097	0,1845
31	1,4301	1,2725	1,5945	1,5397	1,5252	1,4724	0,322
32	1,4981	1,4506	1,6174	1,5837	1,4962	1,5292	0,1668
33	1,3009	1,506	1,6231	1,5831	1,6454	1,5317	0,3445
34	1,4132	1,4603	1,5808	1,7111	1,7313	1,5793	0,3181
35	1,3817	1,3135	1,4953	1,4894	1,4596	1,4279	0,1818
36	1,5765	1,7014	1,4026	1,2773	1,4541	1,4824	0,4241
37	1,4936	1,4373	1,5139	1,4808	1,5293	1,491	0,092
38	1,5729	1,6738	1,5048	1,5651	1,7473	1,6128	0,2425
39	1,8089	1,5513	1,825	1,4389	1,6558	1,656	0,3861
40	1,6236	1,5393	1,6738	1,8698	1,5036	1,642	0,3662
41	1,412	1,7931	1,7345	1,6391	1,7791	1,6716	0,3811
42	1,7372	1,5663	1,491	1,7809	1,5504	1,6252	0,2899
43	1,5971	1,7394	1,6832	1,6677	1,7974	1,697	0,2003
44	1,4295	1,6536	1,9134	1,7272	1,437	1,6321	0,4839
45	1,6217	1,822	1,7915	1,6744	1,9404	1,77	0,3187

Kontrolne karte na slici 6 ukazuju kako je proces pod kontrolom do 43. uzorka.  $\bar{x}$  karta ukazuje da je došlo do pomaka srednje vrijednosti procesa od 38. uzorka.



Slika 6.  $\bar{x}$  i  $R$  kontrolne karte [3]

$\bar{x}$  karta ukazuje na pomak srednje vrijednosti procesa između 38. i 39. uzorka. Tolerancija kod primjera 1, preuzetog iz izvora [3], je  $1,50 \pm 0,5 \mu\text{m}$ . Prikazana je normalna distribucija uzoraka do 38. sa srednjom vrijednosti  $\mu=1,5056$  i nova normalna distribucija uzoraka nakon 38. uzorka sa srednjom vrijednosti  $\mu=1,6633$ . To govori kako bi postotak nesukladnih  $S_i$  pločica bio i veći ako bi nova srednja vrijednost ostala, stoga je potrebno otkriti uzrok utvrđenog pomaka.

### 2.3. Revizija kontrolnih granica

Efikasno korištenje kontrolnih karti podrazumijeva periodičnu provjeru kontrolnih granica. Provjera se može raditi svakih tjedan, mjesec ili svakih 25, 50, 100 uzoraka. [3]

## 2.4. Interpretacija $\bar{x} - R$ karte [3]

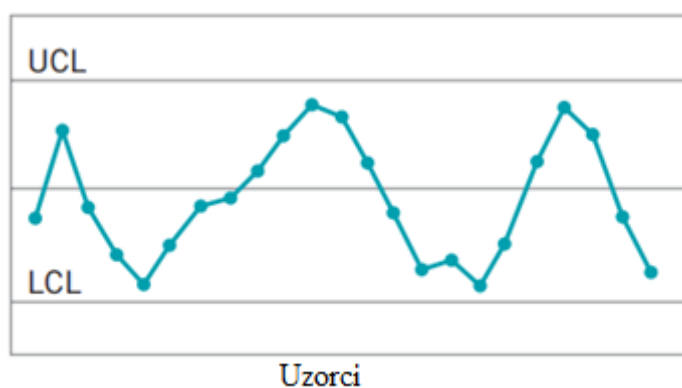
Kontrolna karta može ukazati na neke trendove koji mogu dovesti proces van kontrole, iako se trenutno sve točke nalaze unutar granice kontrole. U mnogim slučajevima će pružiti korisne dijagnostičke informacije o procesu, a ta informacija može se koristiti kako bi se smanjilo rasipanje procesa. Uklanjanje takvih trendova je često presudno u dovođenju procesa pod kontrolu. U tumačenju trendova prvo se mora utvrditi da li je  $R$  karta pod kontrolom i nikad se ne smije tumačiti  $\bar{x}$  karta ukoliko  $R$  karta pokazuje da proces nije pod kontrolom.

### Česti trendovi:

- Ciklički trend

Karakterističan primjer cikličkog trenda je prikazan na slici 7.

Takav uzorak na grafikonu može biti posljedica sustavnih promjena okoline, kao što su temperatura, umor operatera, redovite rotacije operatera i / ili strojeva, odnosno fluktuacije napona ili tlaka ili neke druge varijable na opremi.



**Slika 7. Ciklički obrazac [3]**

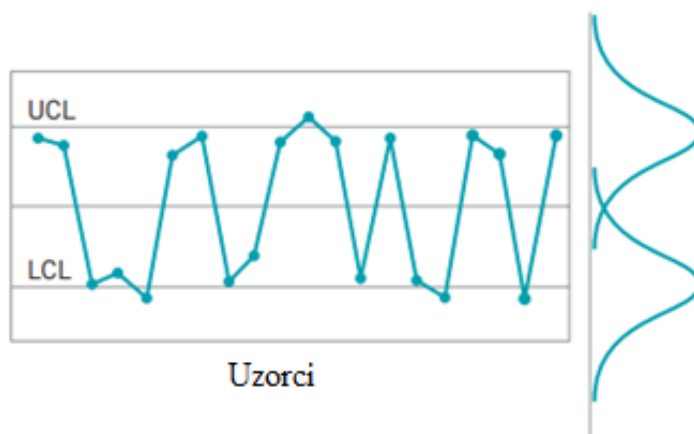
- Mješavina

Kada vrijednosti uzoraka imaju tendenciju da se nalaze blizu ili malo izvan granica kontrole, s relativno malim brojem vrijednosti oko središnje linije kao što je prikazano na slici 8.



Takav uzorak je karakterističan kada su prisutne dvije ili više distribucija. Distribucije koje mogu biti asocirane s takvim uzorkom su prikazane na desnoj strani slike 8. Jačina mješavine ovisi u kojoj se mjeri distribucije preklapaju.

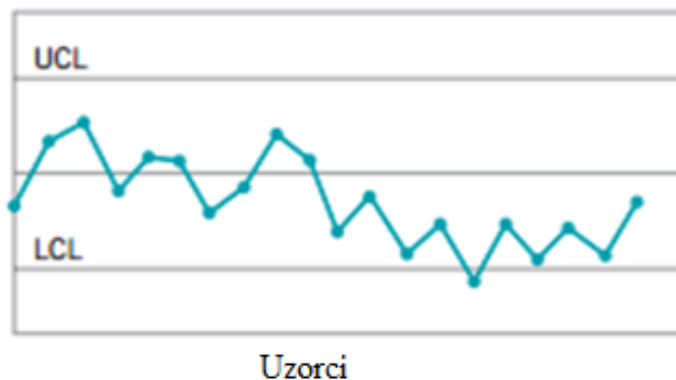
Trend „mješavine“ javlja se kada operateri prilagođavaju proces tako što reagiraju kada se vrijednosti približe gornjoj, odnosno donjoj granici kontrolne karte. Također uzrok može biti ako su vrijednosti izmjerene na jedinicama (proizvodima) iz više izvora (npr. različiti strojevi) uvode u zajedničku kontrolnu kartu u svrhu praćenja procesa.



**Slika 8. Mješoviti obrazac [3]**

- Pomak u procesnoj razini

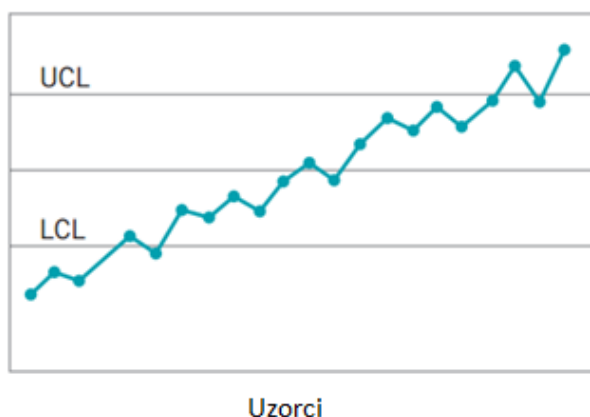
Prikazano na slici 9. Takvi pomaci mogu rezultirati iz uvođenja novih radnika, promjene u metodama, sirovina, ili strojeva. Promjena u postupku kontrole ili standarda. Ponekad je poboljšanje procesa vidljivo nakon uvođenja kontrolnih karti zbog motivacijskih čimbenika koji utječu na radnike.



**Slika 9. Pomak u procesnoj razini [3]**

➤ Kontinuirani rastući ili padajući trend

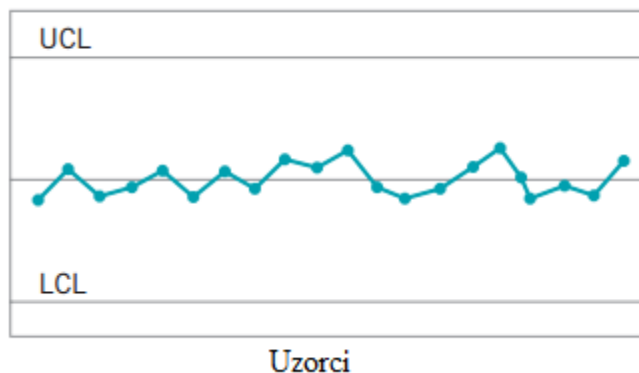
Trend ili kontinuirano kretanje u jednom smjeru, prikazan je na slici 10. Nastaju obično zbog postepenog trošenja alata ili drugih ključnih dijelova procesa. Oni također mogu biti rezultat ljudske prirode, kao što je umor. Također mogu biti rezultat sezonskog utjecaja, kao što je temperatura.



**Slika 10. Prikaz rastućeg trenda [3]**

➤ Stratifikacija

Stratifikacija ili sklonost umjetnog grupiranja oko centra linije je prikazan na slici 11. Uzrok može biti loše proveden račun kontrolnih granica ili kada je proces uzimanja uzoraka prikuplja jednu ili više jedinica iz nekoliko različitih osnovnih distribucija unutar svake podgrupe.



**Slika 11. Prikaz stratifikacije [3]**

## 2.5. Promjena veličine uzorka [3]

U ranije navedenom primjeru prikazana je izrada kontrolne karte za kada je broj uzorka konstantan. No postoje situacije gdje  $n$  nije konstantan. Jedna takva situacija je da svaki uzorak se sastoji od različitog broja.  $\bar{x}$  i  $R$  karte uobičajeno se tada ne koriste.

Druga situacija je kod permanentnog mijenjanja veličine uzorka zbog troškova ili je proces stabilan i manje resursa je potrebno za nadziranje. U tom slučaju je lagano preračunati nove granice preko starih bez prikupljanja dodatnih uzorka baziranih na novim uzorcima. Tada vrijedi:

$\bar{R}_{stari}$  = prosječni raspon starog uzorka

$\bar{R}_{novi}$  = prosječni raspon novog uzorka

$n_{stari}$  = veličina starog uzorka

$n_{novi}$  = veličina novog uzorka

$d_{2(stari)}$  = faktor  $d_2$  starog uzorka

$d_{2(novi)}$  = faktor  $d_2$  novog uzorka

Kontrolne granice za  $\bar{x}$  kartu su :

(10)

$$UCL = \bar{\bar{x}} + A_2 \left[ \frac{d_{2(novi)}}{d_{2(stari)}} \right] \bar{R}_{stari}$$

(11)

$$LCL = \bar{\bar{x}} - A_2 \left[ \frac{d_{2(novi)}}{d_{2(stari)}} \right] \bar{R}_{stari}$$

Granice za  $R$  kartu su :

(12)

$$UCL = D_4 \left[ \frac{d_2(novi)}{d_2(stari)} \right] \bar{R}_{stari}$$

(13)

$$\bar{R}_{novi} = \left[ \frac{d_2(novi)}{d_2(stari)} \right] \bar{R}_{stari}$$

(14)

$$LCL = \max \left\{ 0, D_3 \left[ \frac{d_2(novi)}{d_2(stari)} \right] \bar{R}_{stari} \right\}$$

Gdje su  $D_3$  i  $D_4$  uzeti za novu veličinu uzorka.

## 2.6. Operativna karakteristična funkcija [3]

Sposobnost  $\bar{x}$  i  $R$  karte za detekciju promjene u kvaliteti procesa opisana je njihovom operativnom karakteristikom (eng. *operating characteristic*).

OK krivulja za  $\bar{x}$  kartu.

Ako se pretpostavi da je  $\sigma$  poznata i konstantna i ako se srednja vrijednost  $\mu_0$  pomakne na novu vrijednost  $\mu_1 = \mu_0 + k\sigma$ , vjerojatnost da pomak nije detektiran na prvom uzorku kod kojeg je prisutan pomak, ili  $\beta$  je :

(15)

$$\beta = P\{LCL \leq \bar{x} \leq UCL | \mu = \mu_1 = \mu_0 + k\sigma\}$$

Kako je  $\bar{x} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$  i  $UCL = \mu_0 + L \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ ,  $LCL = \mu_0 - L \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$  može se zapisati (15) kao:

(16)

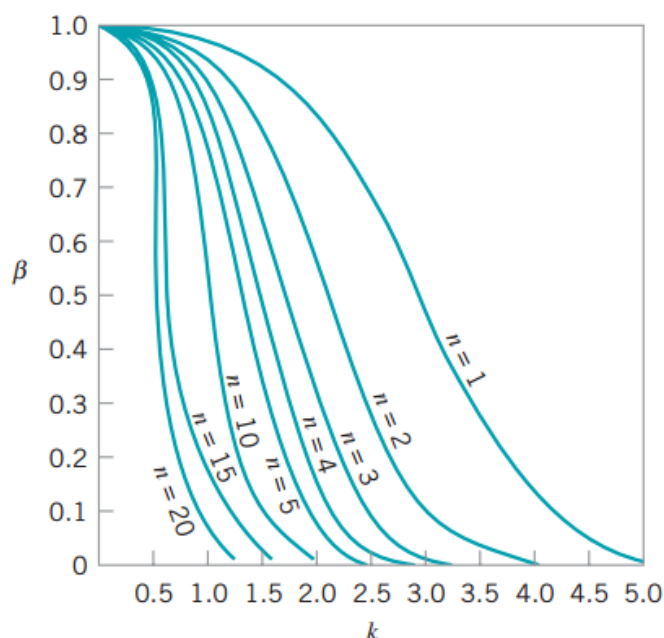
$$\begin{aligned} \beta &= \Phi \left[ \frac{UCL - (\mu_0 + k\sigma)}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \right] - \Phi \left[ \frac{LCL - (\mu_0 + k\sigma)}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \right] \\ &= \Phi \left[ \frac{\mu_0 + L \frac{\sigma}{\sqrt{n}} - (\mu_0 + k\sigma)}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \right] - \Phi \left[ \frac{\mu_0 - L \frac{\sigma}{\sqrt{n}} - (\mu_0 + k\sigma)}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \right] \end{aligned}$$

Gdje  $\phi$  označava standardnu normalnu kumulativnu funkciju, te vrijedi

(17)

$$\beta = \Phi(L - k\sqrt{n}) - \Phi(-L - k\sqrt{n})$$

OK krivulja prikazana je na slici 12.



**Slika 12.** Operativna-karakteristična krivulja  $\bar{x}$  karte (za  $L = 3$ ) [3]

Slika 12 pokazuje kako za manje veličine uzoraka (4, 5 i 6)  $\bar{x}$  karta nije efektivna za detekciju manjih pomaka ( $1,5\sigma$  ili manje) na prvom uzorku nakon pomaka.

Npr. ako je pomak  $1\sigma$  sa  $n = 5$ . Prema krivulji  $\beta = 0,75$  što govori da je vjerojatnost detekcije pomaka na prvom uzorku je samo  $1-\beta = 0,25$ . Vjerojatnost da pomak bude detektiran na drugim uzorcima je:

(18)

$$\beta^{r-1}(1 - \beta)$$

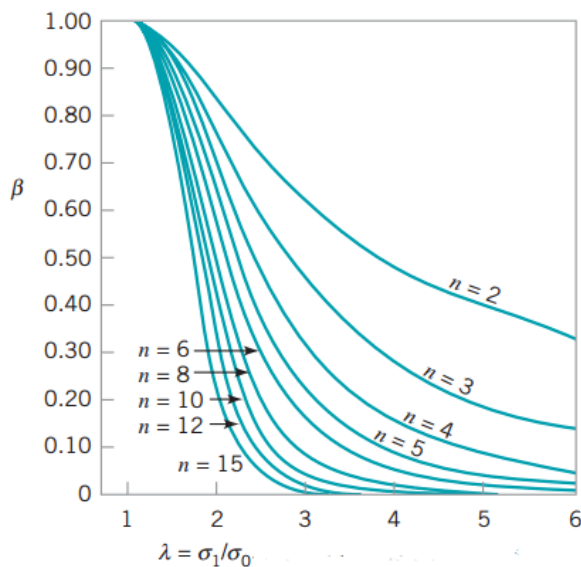
Pri čemu je  $r$  redni broj uzorka.

Potreban broj uzorka prije negoli se pomak otkrije je prosječno trajanje procesa (eng. *Average Run Length*), *ARL*.

(19)

$$ARL = \frac{1}{1 - \beta}$$

OK krivulja za  $R$  kartu se određuje iz  $\beta$  i  $\lambda$ . Gdje je  $\lambda = \frac{\sigma_1}{\sigma_0}$  omjer nove i stare vrijednosti standardne devijacije i prikazana je na slici 13.



**Slika 13. OK krivulja za  $R$  kartu (za  $L = 3$ ) [3]**

Iz slike 13 može se zaključiti kako OK  $R$  karte nije dovoljno osjetljiva za otkrivanje pomaka kod malog broja uzorka  $n$  (npr. 4, 5, 6) . Npr. ako se standardna devijacija duplo poveća ( $\lambda=2$ ), sa brojem uzoraka  $n = 5$ , vjerojatnost da pomak bude otkriven je 40%. Kod  $n > 10$  ili 12 koristila bi se  $s$  karta umjesto  $R$  karte.

## 2.7. Prosječno trajanje procesa (eng. *Average Run Length*) za $\bar{x}$ kartu

Potreban broj uzoraka za detekciju pomaka procesa.

$ARL_0$  - očekivani broj uzoraka dok kontrolna karta ne signalizira pomak procesa, po uvjetom da je proces pod kontrolom. [3]

(20)

$$ARL_0 = \frac{1}{\alpha}$$

$ARL_1$  - očekivani broj uzoraka dok kontrolna karta ne signalizira pomak procesa, pod uvjetom da je proces van kontrole. [3]

(21)

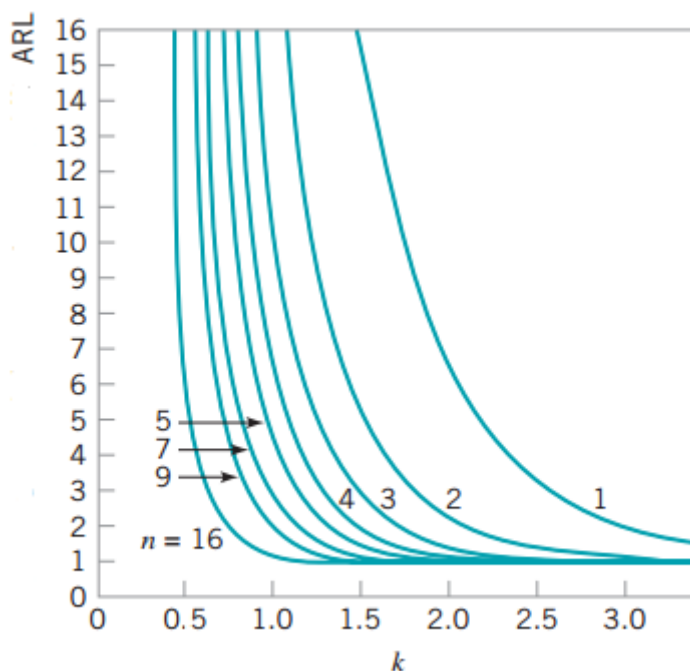
$$ARL_1 = \frac{1}{1 - \beta}$$

$ARL_0$  daje podatak o prosječnom broju uzoraka kod koga će kontrolna karta dati signal, upozoriti, da je proces van kontrole dok zapravo proces je pod kontrolom. tj. signalizirati će lažnu uzbunu. [5]

Kod  $\alpha = 0,0027$ ,  $ARL_0 \sim 370$

Slika 14 prikazuje  $ARL_1$  krivulje za uzorke broja  $n = 1, 2, 3, 4, 5, 7, 9$  i  $16$  za  $\bar{x}$  kontrolnu kartu, gdje je  $ARL_1$  potreban broj uzoraka za otkrivanje pomaka u procesu.

Primjer: Ako želimo otkriti pomak od  $1,5\sigma$  koristeći  $n = 3$  po uzorku, onda potreban broj uzoraka koji je potreban je  $ARL_I = 3$ . [3]



Slika 14.  $ARL$ (broj uzoraka) za  $\bar{x}$  kartu sa  $3\sigma$  granicama [3]

Druge dvije mjere učinka na temelju  $ARL$  su  $ATS$  i  $I$ .

$ATS$ , ili prosječno vrijeme do signala, je broj vremenskih perioda koja se dogode do trenutka generiranja signala na kontrolnoj karti. Ako su uzorci uzimani u jednakim vremenskim intervalima,  $h$ , onda je [3]:

(22)

$$ATS = ARL [h]$$

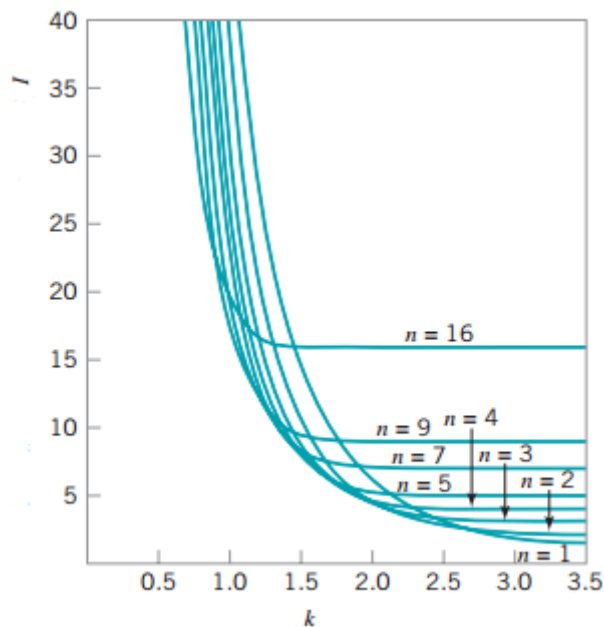
Što govori da će kontrolna karta u prosjeku svakih  $ATS$  sati dati signal, da je proces van kontrole dok zapravo je pod kontrolom. Kod  $\alpha = 0.0027$ ,  $ATS \sim 370h$ .



$I$  je očekivani broj jedinica dobiven množenjem veličine uzorka,  $n$ , i broja uzoraka  $ARL$ . [3]

(23)

$$I = n \times ARL$$

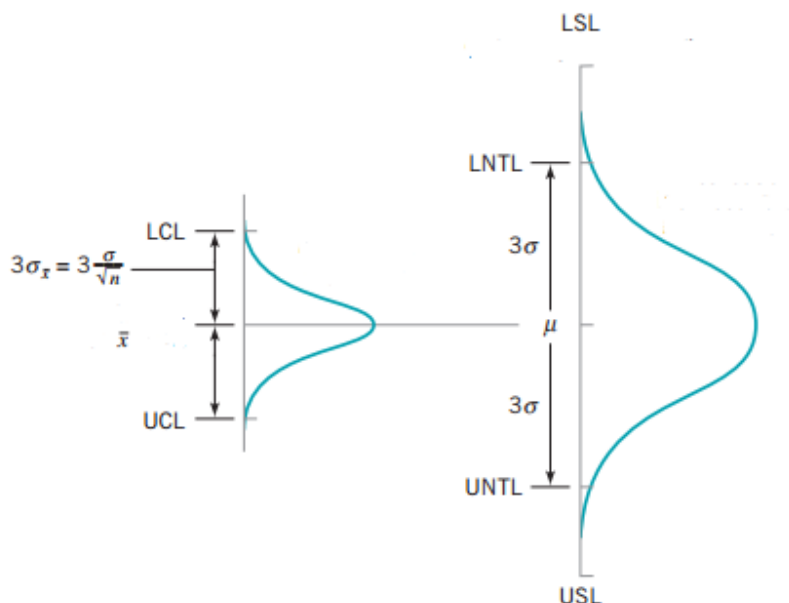


Slika 15.  $I$  za  $\bar{x}$  kartu sa  $3\sigma$  granicama [3]

Na slici 15 su prikazane krivulje za potreban broj jedinki unutar uzorka,  $I$ , koji treba uzeti kako bi se otkrio pomak,  $k\sigma$ . Ako se želi detektirati pomak od  $1.5\sigma$  sa brojem uzoraka  $n = 16$ , onda je potrebno 16 jedinki unutar uzorka. Dok sa brojem uzorka  $n = 3$ , samo 9 jedinki je tada potrebno.

## 2.8. Kontrolne granice i granice tolerancije

Granice kontrole su postavljene prema varijabilnosti procesa, tj prirodnim granicama kontrole (eng. *Natural Tolerance Limit, NTL*). Uobičajeno se definiraju s  $3\sigma$  iznad srednje vrijednosti  $\mu$  (*UNTL*) i ispod srednje vrijednosti  $\mu$  (*LNTL*). Granice tolerancije ili granice specifikacija su određene izvana. Određuju ih konstruktori ili kupci i nisu ni u kojem slučaju vezane sa kontrolnim statističkim granicama kontrolne karte. Važno je napomenuti kako se granice tolerancije ne ucrtavaju na kontrolne karte kao što je i prikazano na slici 16. [3]



Slika 16. Odnos granica [3]

### 3. MJERNA NESIGURNOST

Sva mjerenja podliježu određenim pogreškama koje uzrokuju da se mjerni rezultat razlikuje od prave vrijednosti mjerene veličine. Kako sam izraz "nesigurnost" upućuje na sumnju, onda kad se koristi pojam "mjerna nesigurnost" pod njim se podrazumijeva određena sumnja u valjanost mjernog rezultata. Međutim, svaki mjerni rezultat daje se s određenom pouzdanošću. [6]

Mjerna nesigurnost je parametar pridružen rezultatu mjerenja koji opisuje rasipanje vrijednosti mjerene veličine uz neku određenu vjerojatnost. [7]

Nesigurnost je količinska mjera kvalitete mjernog rezultata koja omogućuje uspoređivanje mjernih rezultata s drugim rezultatima, referencijama ili često etalonima.

Izvori nesigurnosti mjerenja [8]:

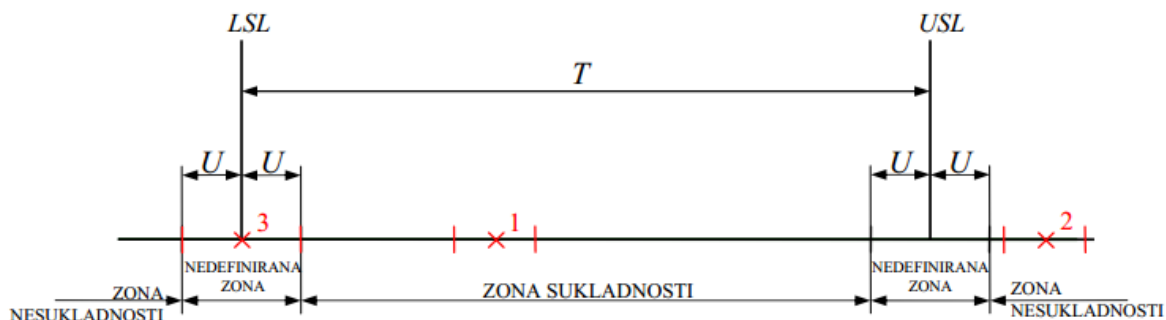
- nepotpuna definicija mjerene veličine
- nesavršeno ostvarenje definicije mjerene veličine
- nereprezentativno uzorkovanje
- nedostatno poznata djelovanja uvjeta okoliša ili njihovo nesavršeno mjerenje
- osobna pristranost pri očitavanju analognih mjerila
- razlučivanje mjerila ili prag pokretljivosti
- netočne vrijednosti mjernih etalona i referentnih materijala

Razlozi zbog kojih se procjenjuje mjerna nesigurnost [7]:

- Mjerna nesigurnost procjenjuje se zbog nedvosmislenog iskazivanja i usporedbe mjernih rezultata dobivenih u različitim ispitnim laboratorijima
- Mjerna nesigurnost se procjenjuje radi usporedbe rezultata sa specifikacijama proizvođača ili zadane tolerancije.

Ono što je čest slučaj u proizvodnji jest da se traženi rezultat nalazi na granici tolerancijskog polja i tada se obično detalji definiraju ugovorom između proizvođača i kupca. Postoji nepisano pravilo da se rezultati koji se nalaze na granici tolerancijskog polja prihvaćaju, no tada postoji rizik da je 50% rezultata dobro, a drugih 50% se nalazi izvan dopuštenih granica.

Iz tog razloga, uvodi se pravilo sukladnosti, grafički prikazano na slici 17, a koje točno definira zonu sukladnosti, odnosno zonu unutar tolerancijskog polja, zatim zonu nedefiniranosti koja se uglavnom rješava ugovorom, te zonu nesukladnosti koja podrazumijeva polje izvan dopuštenih granica. [7]



**Slika 17. Pravilo sukladnosti [7]**

Slika 17 prikazuje pravilo sukladnosti gdje se grafički može vidjeti koje područje upada unutar tolerancijskog polja (granice  $LSL$  i  $USL$ ). Unutar tog područja nalazi se jedan mjerni rezultat označen crvenim brojem 1 koji pokazuje rezultat mjerenja te područje nesigurnosti oko rezultata. Taj rezultat zadovoljava. Drugi po redu mjerni rezultat, označen crvenim brojem 2, nalazi se u zoni nesukladnosti te se takvi rezultati odbacuju dok se treći mjerni rezultat (crveni broj 3) točno poklapa s donjom dopuštenom granicom ( $LSL$ ) i takvi slučajevi se u proizvodnji rješavaju ugovorom kao što je gore spomenuto. [7]

Tri su načina procjene mjerne nesigurnosti [7]:

1. *GUM* metoda (engl. *Guide to Expression of Uncertainty in Measurement*)
2. *MCS* metoda (engl. *Monte Carlo Simulation*)
3. Procjena ponovljivosti i obnovljivost rezultata mjerenja sukladno normi 21748:2004

### 3.1. GUM metoda

GUM metoda je najčešće korištena metoda za procjenu mjerne nesigurnosti, a temelji se na filozofiji nesigurnosti prema GUM-u koja se sastoji od 5 točaka i glasi [7]:

- Mjerna veličina  $X$ , čija vrijednost nije točno poznata, smatra se stohastičkom varijablom s funkcijom vjerojatnosti.
- Mjerni rezultat  $x$  je procjena očekivane vrijednosti tj.  $E(X)$ .
- Standardna nesigurnost  $u(x)$  jednaka je drugom korijenu procjene varijance  $V(X)$ .
- Određivanje sastavnice A-vrste: Očekivanje i varijanca procijenjuju se statističkom obradom ponovljenih mjerenja.
- Određivanje sastavnice B-vrste: Očekivanje i varijanca procijenjuju se drugim metodama. Najčešće se koristi iskustvo procijenitelja koji pretpostavlja razdiobu vjerojatnosti. (npr. pravokutna, trokutasta razdioba itd.).

GUM metoda, temeljena na gore danoj filozofiji, sastoji se od pet koraka [7]:

1. Postavljanje mjernog modela
2. Određivanje standardnih nesigurnosti  $u(x_i)$
3. Određivanje sastavljene standardne nesigurnosti  $u_c$
4. Određivanje proširene nesigurnosti  $U$
5. Prikaz mjernog rezultata

GUM metoda po koracima [7]:

Prvi korak u GUM metodi jest postavljanje mjernog modela, odnosno matematičkog modela koji povezuje izlaznu veličinu s ulaznima. Model se postavlja zato jer se u većini slučajeva mjerna veličina ne mjeri izravno, nego se određuje iz drugih veličina  $x_1, x_2, \dots, x_n$  na temelju funkcijskog odnosa ulaznih veličina i izlazne veličine.

(24)

$$X = f(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

Standardna nesigurnost određuje se na dva načina: iz tipa A i iz tipa B.



**Slika 18. Dvije sastavnice standardne nesigurnosti [7]**

Gdje standardna neigurnost A-vrste odgovara slučajnim pogreškama, vrijednost joj opada s brojem uzastopnih mjerenja i uzorci su nepoznati.

Dok sastavnica B-vrste odgovara sustavnim pokreškama, vrijednosti joj ne ovise o broju uzastopnih mjerenja i uzorci potječu iz različitih izvora.

Sastavljena nesigurnost izračunava se sastavljanjem pojedinačnih sastavnica nesigurnosti u skladu sa zakonom prijenosa nesigurnosti, odnosno ona se određuje sastavljanjem standardnih nesigurnosti procjena ulaznih veličina. Sastavljena standardna nesigurnost različito se računa za nekorelirane i korelirane ulazne veličine. [7]

Nekorelirane ulazne veličine:

(25)

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^N \left( \frac{\delta f}{\delta x_i} \right) u^2(x_i)$$

Korelirane ulazne veličine:

(26)

$$u_c = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 \times u(x_i)^2 + 2 \times \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \frac{\partial f}{\partial x_i} \times \frac{\partial f}{\partial x_j} \times u(x_i, x_j)}$$

Gdje su:

$u_c$  Sastavljena standardna nesigurnost

$c_i$  Koeficijent osjetljivosti

Proširena nesigurnost je veličina koja određuje interval oko mjernog rezultata za koji se može očekivati da obuhvaća veliki dio razdiobe vrijednosti koje bi se razumno mogle pripisati mjerenoj veličini. [7]

(27)

$$U = u_c \times k$$

Gdje je  $u_c$  sastavljena standardna nesigurnost,  $k$  faktor pokrivanja.

Prikaz mjernog rezultata se pokazuje u obliku:

(28)

$$X = x; U; k; P$$

### 3.2. Izvod mjerne nesigurnosti za kontrolne karte [2]

Sastavljena standardna nesigurnost za slučaj nekoreliranih ulaznih veličina procjenjuje se prema izrazu:

(29)

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\delta f}{\delta x_i}\right) u^2(x_i)$$

Sastavljena standardna nesigurnost aritmetičke sredine  $k$  – tog uzorka računa se kao:

(30)

$$u_c^2(\bar{x}_k) = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\delta \bar{x}_k}{\delta x_i} \right) u^2(x_i)$$

s obzirom da se može pretpostaviti da je mjerna nesigurnost svih rezultata mjerenja ista tj.

$u_c(x_1) = u_c(x_2) = u_c(x_i) = u_c(x)$  za  $i = 1$  do  $n$  izraz (29) prelazi u:

(31)

$$u_c^2(\bar{x}_k) = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\delta \bar{x}_k}{\delta x_i} \right) u^2(x)$$

derivacijom izraza (1) po  $x_1, x_2, \dots, x_n$  član  $\sum_{i=1}^n \left( \frac{\delta \bar{x}_k}{\delta x_i} \right)$  iznosi  $1/n$ , stoga je:

(32)

$$u_c^2(\bar{x}_k) = \frac{u_c^2(x)}{n}$$

Istom analogijom može se izračunati i sastavljena standardna nesigurnost aritmetičke sredine sredina svih uzoraka.

(33)

$$u_c^2(\bar{x}) = \frac{u_c^2(\bar{x}_k)}{m}$$

Ako je svaki uzorak veličine  $n$  onda se može smatrati da je  $u_c(\bar{x}_1) = u_c(\bar{x}_2) = u_c(\bar{x}_k) = u_c(\bar{x})$ , gdje je  $k = 1$  do  $m$ .



Uzimajući u obzir jednadžbu (32) i (33) može se pisati:

(34)

$$u_c^2(\bar{x}) = \frac{u_c^2(x)}{mn}$$

Sastavljena standardna nesigurnost raspona  $k$  – tog uzorka gdje je  $k = 1$  do  $m$  računa se kao:

(35)

$$u_c^2(R_k) = \left(\frac{\delta R_k}{\delta x_{max}}\right) u_c^2(x_{max}) + \left(\frac{\delta R_k}{\delta x_{min}}\right) u_c^2(x_{min})$$

gdje je  $\left(\frac{\delta R_k}{\delta x_{max}}\right) = 1$  i  $\left(\frac{\delta R_k}{\delta x_{min}}\right) = 1$  te ako se pretpostavi da je  $u_c(x_{min}) = u_c(x_{max}) = u_c(x)$

izraz (35) prelazi u:

(36)

$$u_c^2(R_k) = 2u_c^2(x)$$

Ako se pretpostavi da je nesigurnost raspona ista za svaki uzorak  $u_c(R_k) = u_c(R)$ , sastavljena standardna nesigurnost aritmetičke sredine raspona svih uzoraka bit će:

(37)

$$u_c^2(\bar{R}) = \frac{u_c^2(R_k)}{m} = \frac{2u_c^2(x)}{m}$$

Ako se razmotre izrazi za granice  $\bar{x}$  kontrolne karte (8), utjecajne veličine koje potječu iz mjerenja su  $\bar{R}$  i  $\bar{x}$  dok  $A_2$  ovisi o veličini uzorka  $n$  te se može smatrati konstantnom vrijednosti:

Iz jednadžbi (8), (36) i (37) možemo raspisati:

$$\begin{aligned}
 u_c^2(UCL_{\bar{x}}) &= u_c^2(\bar{x}) + A_2^2 u_c^2(\bar{R}) = \frac{u_c^2(x)}{mn} + A_2^2 \frac{2u_c^2(x)}{m} \\
 u_c^2(LCL_{\bar{x}}) &= u_c^2(\bar{x}) + A_2^2 u_c^2(\bar{R}) = \frac{u_c^2(x)}{mn} + A_2^2 \frac{2u_c^2(x)}{m}
 \end{aligned}
 \tag{38}$$

Na isti način uzmemo li u obzir jednadžbe (9) i (37) možemo raspisati:

$$\begin{aligned}
 u_c^2(UCL_R) &= D_4 u_c^2(\bar{R}) = D_4 \frac{2u_c^2(x)}{m} \\
 u_c^2(LCL_R) &= D_3 u_c^2(\bar{R}) = D_3 \frac{2u_c^2(x)}{m}
 \end{aligned}
 \tag{39}$$

U izrazima (38) i (39) zanemarena je nesigurnost aproksimacije osnovnog skupa  $\sigma$  s vrijednostima  $\bar{R}$  i  $\sigma_R$  tj, nesigurnost koeficijenata  $d_2$  i  $d_3$ .

### 3.3. Pogreške kontrolnih karata uz mjernu nesigurnost

Kontrolne karte su povezane sa 2 tipa pogrešaka. Pogreška tipa I ili  $\alpha$  su povezane s rizikom da karta pokazuje da je proces izvan kontrole kada to nije istina. Pogreška tipa II ili  $\beta$ , odgovara vjerojatnosti da proces postaje izvan kontrole. Za razliku od tipa I, tip II greške ne može se odrediti bez poznavanja pravog prosjeka procesa, međutim, strategija uzrokovanja treba biti određena tako da se minimizira vjerojatnost ne otkrivanja značajnih promjena.[9]

Pogreška tipa I je netočno odbacivanje istinite hipoteze  $H_0$ . Obično greška tipa I dovodi do zaključka da jedan efekt postoji dok u stvarnosti ne postoji. [10]

Pogreška tipa II je neuspješno odbacivanje lažne hipoteze  $H_0$ . Nastaje kada se određeno stanje koje je istinito proglasi kao neistinito. [10]

Vjerojatnosti tih pogrešaka zapisana su kao [3]:

$$\alpha = P\{\text{pogreška tipa I}\} = P\{\text{odbacivanje } H_0 | H_0 \text{ je istinit}\}$$

$$\beta = P\{\text{pogreška tipa II}\} = P\{\text{neuspjelo odbacivanje } H_0 | H_0 \text{ je lažan}\}$$

Hipoteza  $H_0$  je izraz koji se koristi u statistici, te se odnosi na opće izjave ili neko zadano stanje. U slučaju kontrolnih karti označuje da je proces pod kontrolom.

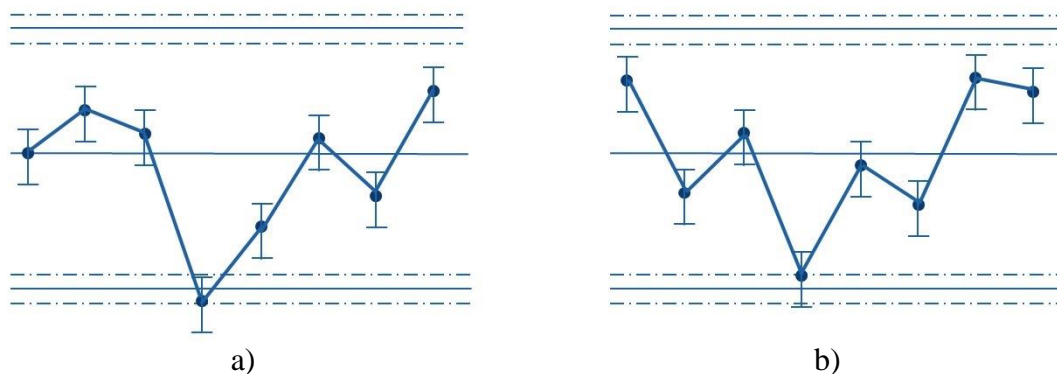
U kontroli kvalitete  $\alpha$  rizik je poznat i kao rizik proizvođača, jer označava vjerojatnost da će dobra isporuka biti odbijena, ili vjerojatnost da proces biti proglašen van kontrole iako tome nije slučaj.  $\beta$  rizik je poznat i rizikom kupca, jer označava vjerojatnost prihvatanja isporuke loše kvalitete, ili vjerojatnost da će proces koji nije pod kontrolom biti proglašen za proces pod kontrolom. [3]

Određivanje granica kontrolne karte je jedna od ključnih odluka koje se donose pri stvaranju kontrolnih karta. Pomicanjem kontrolne granice dalje od središnje linije, možemo smanjiti rizik pogreške tipa I, to jest, rizik da se vrijednosti uzoraka nađu izvan granica kontrole što ukazuje da je proces izvan kontrole.

Međutim širenjem kontrolnih granica će se također povećati rizik tipa II, to jest, da se vrijednosti uzoraka nađu između granica, dok je proces u stvarnosti izvan kontrole. Ako granice pomičemo bliže središnjoj liniji tada dolazi do suprotnog efekta. Rizik pogreške tipa I je povećan dok je rizik tipa II smanjen. [3]

Kada se u kontrolnu kartu uključe rasponi mjernih nesigurnosti i raspodjele vjerojatnosti za pojedine uzorke, te za granice kontrolnih karata, tada vrijednosti u kontrolnoj karti nisu više diskretne vrijednosti, nego rasponi koji predstavljaju područja unutar kojih se nalaze prave vrijednosti mjerenih veličina.

Na slici 19 prikazana su dva slučaja koja prikazuju utjecaj mjerne nesigurnosti na položaj aritmetičke sredine uzorka u odnosu na granice kontrolne karte. [2]



**Slika 19. Kontrolne karte s uključenim mjerim nesigurnostima [2]**

Promotrimo li slučaj a) tada vidimo da iako je vrijednost uzorka izvan granice kontrolne karte dio intervala nesigurnosti tog uzorka nalazi se unutar granica kontrolne karte, stoga možemo zaključiti kako postoji vjerojatnost da je proces pod kontrolom (pogreška tipa I). S druge strane, kako je prikazano na slučaju b), vrijednost uzorka se nalazi unutar granica kontrolne karte no dio intervala nesigurnosti izlazi van granica kontrolne karte, te postoji vjerojatnost da je proces izvan kontrole, iako vrijednost uzorka ne upućuje na to (pogreška tipa II). [2]

Kako bi utvrdili da li je proces pod statističkom kontrolom, potrebno je izračunati vjerojatnosti da li se pojedini uzorak nalazi unutar granice kontrolne karte, temeljem izraza [2]:

(40)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_g(\bar{x}) \cdot f_u(\bar{x}) d\bar{x}$$

gdje je  $f_g$  funkcija gustoće vjerojatnosti kontrolnih granica, a  $f_u$  funkcija gustoće vjerojatnosti uzorka.

Kako bi se pojednostavio i izbjegao račun integrala iz izraza (40) mogu se odrediti kritične kontrolne granice  $CL_{krit}$ .

Kritične vrijednosti kontrolnih granica predstavljaju redefinirane granice kontrolnih karata s uključenim vrijednostima mjernih nesigurnosti [2]:

(41)

$$UCL_{krit} = UCL \pm u(CL_{krit})$$

$$LCL_{krit} = LCL \pm u(CL_{krit})$$

Vjerojatnost da će se vrijednost uzorka nalazi izvan kontrolnih granica zbog raspodjele mjernih nesigurnosti tada je definirana kao [2]:

(42)

$$P_i = P(\bar{x}_i \geq UCL_{krit}) + P(\bar{x}_i \leq LCL_{krit})$$

Izraze za gornju i donju kontrolnu granicu, kako za  $\bar{x}$  tako i za  $R$  dio kontrolne karte, možemo zapisati [2]:

(43)

$$UCL = \mu + Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad LCL = \mu - Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

gdje je  $\mu$  očekivanje, a  $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$  rasipanje. Vrijednost  $\alpha$  u izrazu (43) odnosi se na vjerojatnost da je uzorak izvan granica kontrolne karte, a da je proces pod statističkom kontrolom (lažni alarm). U tom slučaju govorimo o pogrešci tipa I, koja se uobičajeno postavlja na  $\alpha = 0,27\%$ . Za navedenu vrijednost  $\alpha$  odgovara  $Z$  vrijednost jednaka 3. Dakle radi se o procesu kod kojeg su kontrolne granice postavljene na  $3\sigma$ , te ih možemo napisati u obliku:

(44)

$$UCL = \mu + 3 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad LCL = \mu - 3 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Međutim, uzmemo li u obzir kritične vrijednosti kontrolnih granica (41) vrijednost  $\alpha$  se mijenja.  $\alpha_{krit}$  sada predstavlja vjerojatnost da je normalno distribuiran uzorak izvan kritičnih vrijednosti kontrolnih granica, a da je proces unutar statističke kontrole, te se računa prema [2]:

(45)

$$\alpha_{krit} = 1 - P(LCL_{krit} \leq \bar{x}_i \leq UCL_{krit})$$

Vjerojatnost da je uzorak izvan kritičnih granica kontrolne karte i da je proces nije pod kontrolom dana je izrazom [2]:

(46)

$$P_{uk,\alpha} = P_i (1 - \alpha_{krit})$$

Možemo imati i slučaj kada je proces izvan statističke kontrole, iako su vrijednosti individualnih uzoraka unutar granica kontrolne karte (pogreška tipa II). [2]

Vjerojatnost da će nastupiti takva pogreška definirana je s  $\beta$ . Vjerojatnost da će se pojaviti pogreška tipa II, uzimajući u obzir kritične vrijednosti kontrolnih granica nazivamo  $\beta_{krit}$ . [2]

Vjerojatnost da je proces izvan kontrole, a da je vrijednost uzorka unutar granica kontrolne karte dana je izrazom [2]:

(47)

$$P_{uk,\beta} = (1 - P_i) \beta_{krit}$$

Vjerojatnost da će proces biti izvan kontrole  $P_{uk}$ , neovisno o položaju uzorka na kontrolnoj karti može se iskazati kao suma vjerojatnosti iz izraza (46) i (47) [2]:

(48)

$$P_{uk} = (P_i)(1 - \alpha_{krit}) + (1 - P_i) \beta_{krit}$$

---

## 4. PRIMJER I ANALIZA [3]

U sljedećem primjeru je prikazana izrada kontrolne karte, te primjena granica nesigurnosti na uzorke i proces. Proces je izrada *Si* pločica kod *Hard-Bake* procesa, te je potrebno mjerenjem debljine premaza utvrditi da li je proces pod statičkom kontrolom.

Podaci su preuzeti iz statističkog priručnika Montgomery, te su sve veličine izražene u mikrometrima.

Analiza je izvedena tako što su nasumično uzeta  $m = 42$  uzorka po  $n = 5$  poduzorka. Vrijednosti tih mjerenja su prikazana u tablici 3.

Tablica 3. Iznosi mjerenja debljine  $S_i$  pločica [3]

Uzorak broj					
1	1,3235	1,4128	1,6744	1,4573	1,6914
2	1,4314	1,3592	1,6075	1,4666	1,6109
3	1,4284	1,4871	1,4932	1,4324	1,5674
4	1,5028	1,6352	1,3841	1,2831	1,5507
5	1,5604	1,2735	1,5265	1,4363	1,6441
6	1,5955	1,5451	1,3574	1,3281	1,4198
7	1,6274	1,5064	1,8366	1,4177	1,5144
8	1,419	1,4303	1,6637	1,6067	1,5519
9	1,3884	1,7277	1,5355	1,5176	1,3688
10	1,4039	1,6697	1,5089	1,4627	1,522
11	1,4158	1,7667	1,4278	1,5928	1,4181
12	1,5821	1,3355	1,5777	1,3908	1,7559
13	1,2856	1,4106	1,4447	1,6398	1,1928
14	1,4951	1,4036	1,5893	1,6458	1,4969
15	1,3589	1,2863	1,5996	1,2497	1,5471
16	1,5747	1,5301	1,5171	1,1839	1,8662
17	1,368	1,7269	1,3957	1,5014	1,4449
18	1,4163	1,3864	1,3057	1,621	1,5573
19	1,5796	1,4185	1,6541	1,5116	1,7247
20	1,7106	1,4412	1,2361	1,382	1,7601
21	1,4371	1,5051	1,3485	1,567	1,488
22	1,4738	1,5936	1,6583	1,4973	1,472
23	1,5917	1,4333	1,5551	1,5295	1,6866
24	1,6399	1,5243	1,5705	1,5563	1,553
25	1,5797	1,3663	1,624	1,3732	1,6887
26	1,4483	1,5458	1,4538	1,4303	1,6206
27	1,5435	1,6899	1,583	1,3358	1,4187
28	1,5175	1,3446	1,4723	1,6657	1,6661
29	1,5454	1,0931	1,4072	1,5039	1,5264
30	1,4418	1,5059	1,5124	1,462	1,6263
31	1,4301	1,2725	1,5945	1,5397	1,5252
32	1,4981	1,4506	1,6174	1,5837	1,4962
33	1,3009	1,506	1,6231	1,5831	1,6454
34	1,4132	1,4603	1,5808	1,7111	1,7313
35	1,3817	1,3135	1,4953	1,4894	1,4596
36	1,5765	1,7014	1,4026	1,2773	1,4541
37	1,4936	1,4373	1,5139	1,4808	1,5293
38	1,5729	1,6738	1,5048	1,5651	1,7473
39	1,8089	1,5513	1,825	1,4389	1,6558
40	1,6236	1,5393	1,6738	1,8698	1,5036
41	1,412	1,7931	1,7345	1,6391	1,7791
42	1,7372	1,5663	1,491	1,7809	1,5504



Nakon izvršenih mjerenja, idući korak je izračunavanje početnih kontrolnih granica za  $\bar{x}$ -karta i  $R$  kontrolnu kartu pomoću sljedećih formula.

$$UCL_{\bar{x}} = \bar{\bar{x}} + A_2 \times \bar{R}$$

$$LCL_{\bar{x}} = \bar{\bar{x}} - A_2 \times \bar{R} \quad LCL_R = \bar{R} \times D_3$$

$$UCL_R = \bar{R} \times D_4$$

Gdje su  $\bar{\bar{x}}$  i  $\bar{R}$  izračunati pomoću formula (3) i (4), a  $A_2$ ,  $D_3$  i  $D_4$  su uzeti iz priloga 2, te iznose:

$$A_2 = 0,577$$

$$D_3 = 0 \mu\text{m}$$

$$D_4 = 2,115 \mu\text{m}$$

Te uvrštavanjem u formule se dobiju iznosi kontrolnih granica.

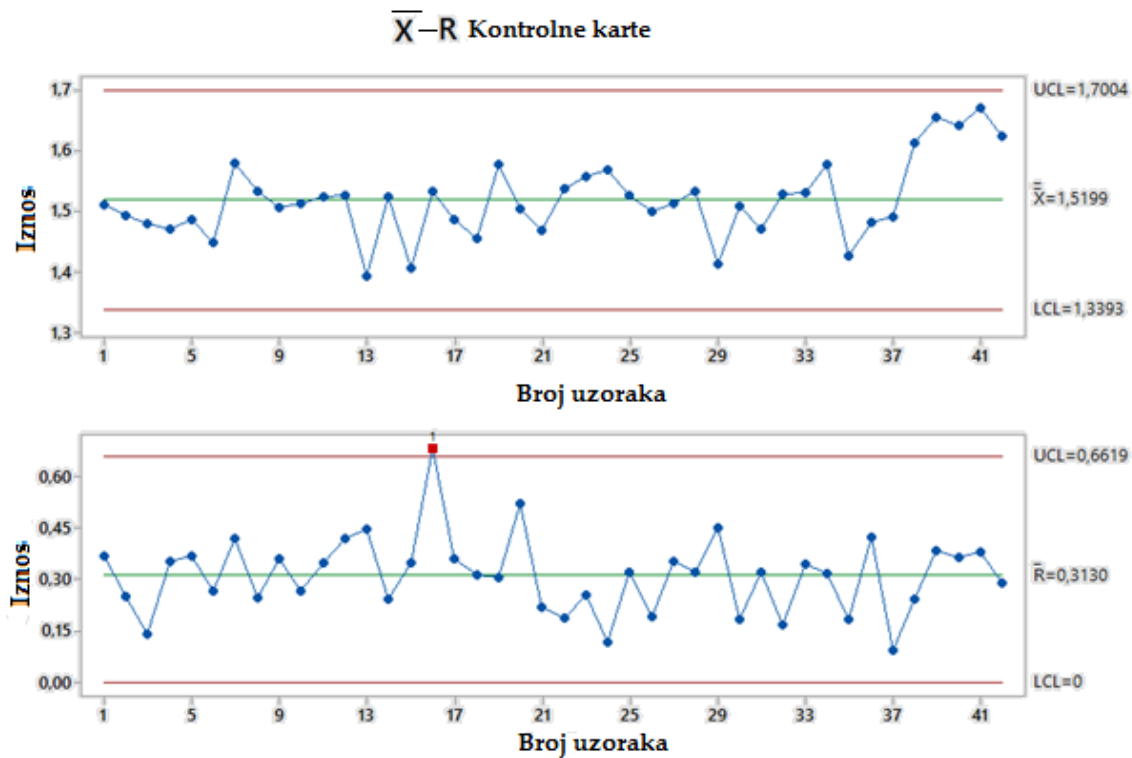
$$UCL_{\bar{x}} = 1,6949 \mu\text{m}$$

$$LCL_{\bar{x}} = 1,3441 \mu\text{m}$$

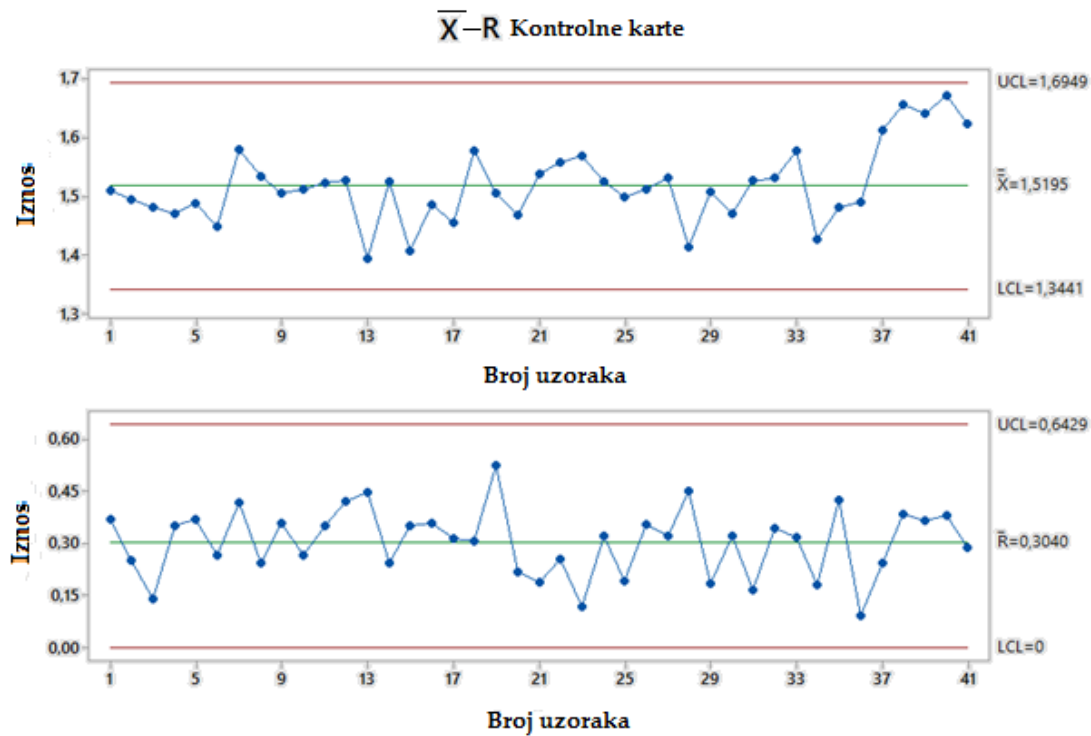
$$LCL_R = 0 \mu\text{m}$$

$$UCL_R = 0,6429 \mu\text{m}$$

Zatim su izrađene kontrolne karte kao na slici 20 iz koje je vidljivo kako uzorak broj 16 izlazi van granica  $R$  karte, te potrebno je formirati nove granice, bez uzorka 16 koji je označen crveno u tablici 3.



Nove granice se računaju na isti način kao početne.



Slika 21 ukazuje da se svi uzorci nalaze unutar granica kontrolnih karte, te se zaključuje kako su granice dobre za daljnje praćenje procesa.

#### 4.1. Uključivanje nesigurnosti u kontrolne karte

Slijedeći korak je uključivanje mjerne nesigurnosti u kontrolne karte kako bi se ocijenio učinak po pitanju dali je proces pod kontrolom. Proširena nesigurnost iznosi  $U = 0,06 \mu\text{m}$ , a mjerna nesigurnost svih rezultata mjerenja ista tj.  $u_c(x_i) = 0,03 \mu\text{m}$ .

Mjerna nesigurnost kontrolnih granica se računa prema formulama:

$$u_c^2(UCL_{\bar{x}}) = u_c^2(\bar{x}) + A_2^2 u_c^2(\bar{R}) = \frac{u_c^2(x)}{mn} + A_2^2 \frac{2u_c^2(x)}{m}$$

$$u_c^2(LCL_{\bar{x}}) = u_c^2(\bar{x}) + A_2^2 u_c^2(\bar{R}) = \frac{u_c^2(x)}{mn} + A_2^2 \frac{2u_c^2(x)}{m}$$

$$u_c^2(UCL_R) = D_4 u_c^2(\bar{R}) = D_4 \frac{2u_c^2(x)}{m}$$

$$u_c^2(LCL_R) = D_3 u_c^2(\bar{R}) = D_3 \frac{2u_c^2(x)}{m}$$

Uvrštavanjem vrijednosti u formule se dobe slijedeći iznosi.

$$U(UCL_{\bar{x}}) = U(LCL_{\bar{x}}) = 2 \times u_c^2(UCL_{\bar{x}}) = 2 \times 0,001901 = 0,004 \mu\text{m}$$

$$U(UCL_R) = 2 \times u_c^2(UCL_R) = 2 \times 0,000196 = 0,000393 \mu\text{m}$$

$$U(LCL_R) = 2 \times u_c^2(LCL_R) = 2 \times 0 = 0 \mu\text{m}$$

Zbog vrlo malih vrijednosti nesigurnosti kontrolnih granica mogu se zanemariti, te koristiti dalje bez nesigurnosti.

$\alpha$ , vjerojatnost da je uzorak izvan granica kontrolne karte, a da je proces pod statističkom kontrolom. Uobičajeno se postavlja na  $\alpha = 0,27 \%$ . Za navedenu vrijednost  $\alpha$  odgovara  $Z$  vrijednost jednaka 3. Dakle radi se o procesu kod kojeg su kontrolne granice postavljene na  $3 \cdot \sigma$ . Za sve uzorke je konstantna.

$\beta$ , odgovara vjerojatnosti da proces postaje izvan kontrole te se ne može se odrediti bez poznavanja pravog prosjeka procesa. Za svaki uzorak je različita jer ovisi o razlici srednje vrijednosti uzorka i srednjoj vrijednosti procesa, tj  $\delta = \mu_i - \bar{x}$ .

Računa se preko formule:

$$\beta = \Phi\left(Z_{\alpha/2} - \frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right) + \Phi\left(-Z_{\alpha/2} - \frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right)$$

Gdje  $Z_{\alpha/2} = kon. = 3$ , te se sigma računa preko iduće formule i konstantna je za sve uzorke.

$$\sigma = \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}$$

$$\hat{\sigma} = \frac{\bar{R}}{d_2}$$

$$\sigma = \frac{\bar{R}}{d_2 \sqrt{n}} \times \frac{3}{3}$$

$$\sigma = \frac{3 \times \bar{R}}{d_2 \times \sqrt{n} \times 3}$$

Gdje je uz supstituciju:

$$A_2 = \frac{3}{d_2 \sqrt{n}}$$

Formula prelazi u oblik:

$$\sigma = \frac{A_2 \bar{R}}{3} = 0,058477$$

$P_{uk}$ , vjerojatnost da će proces biti izvan kontrole neovisno o položaju uzorka na kontrolnoj karti te se može se iskazati kao suma vjerojatnosti iz idućeg izraza.

$$P_{uk} = (P_i)(1 - \alpha) + (1 - P_i) \beta$$

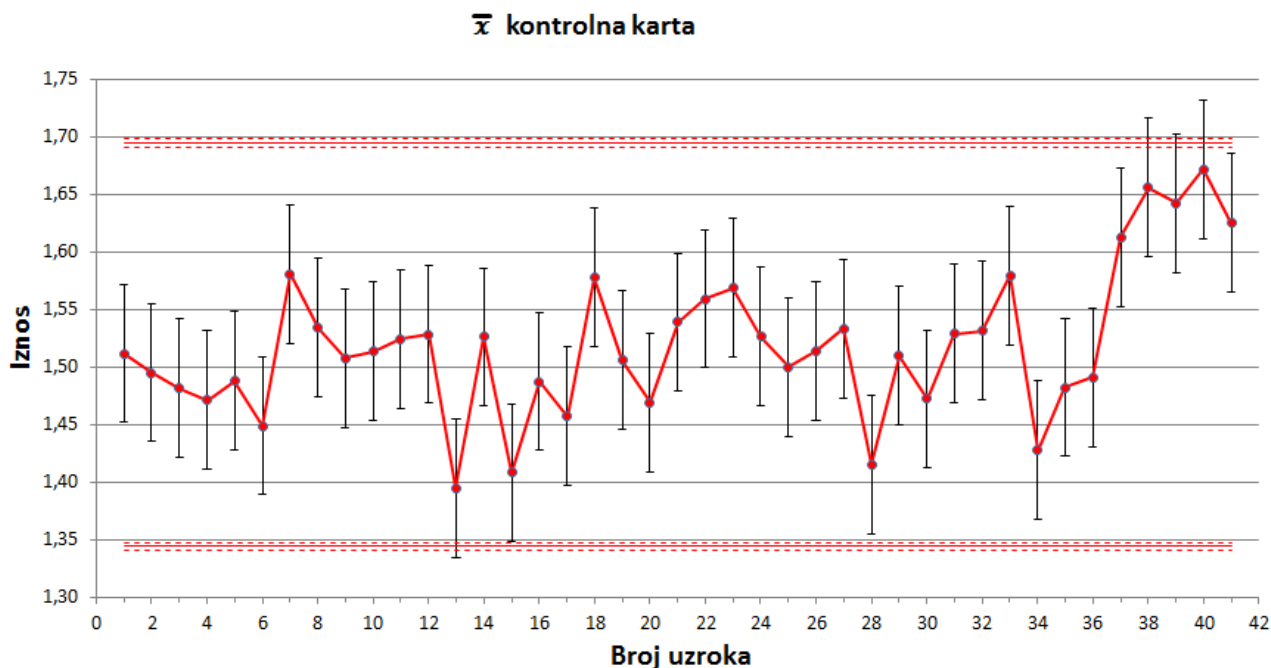
Prvi umnožak,  $(P_i)(1 - \alpha)$ , govori o vjerojatnost da je uzorak izvan kritičnih granica kontrolne karte i da proces nije pod kontrolom. Drugi umnožak,  $(1 - P_i) \beta$ , govori o vjerojatnost da je proces izvan kontrole, a da je vrijednost uzorka unutar granica kontrolne karte.

U tablici 4 su prikazane vrijednosti za svaki uzorka izračunate prema datim formulama.

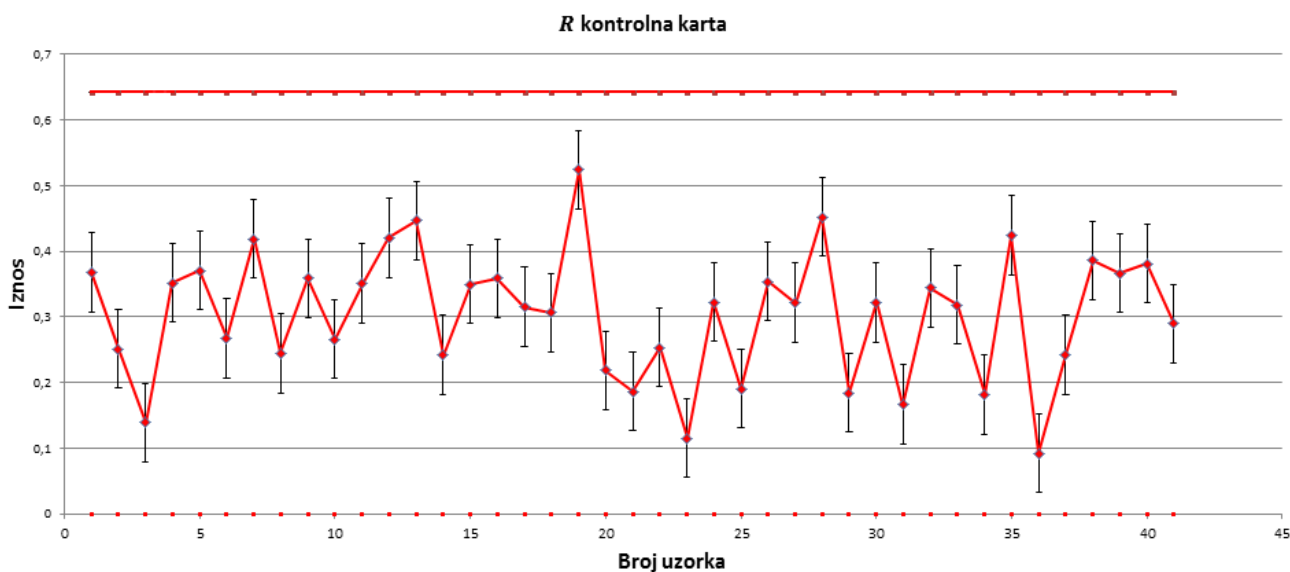
**Tablica 4. Vrijednosti za svaki uzorak**

Uzorka broj	$\alpha/2$	$Z_{\alpha/2}$	$\delta$	$\sigma$	$\beta$	$P_i$	$P_{uk}$
1	0,00135	3	-0,00762	0,058477	0,0039	0	0,004
2	0,00135	3	-0,02438	0,058477	0,0194	0	0,019
3	0,00135	3	-0,0378	0,058477	0,0600	0	0,060
4	0,00135	3	-0,04832	0,058477	0,1246	0	0,125
5	0,00135	3	-0,03134	0,058477	0,0358	0	0,036
6	0,00135	3	-0,07032	0,058477	0,3778	0	0,378
7	0,00135	3	0,061004	0,058477	0,2523	0	0,252
8	0,00135	3	0,014824	0,058477	0,0077	0	0,008
9	0,00135	3	-0,0119	0,058477	0,0057	0	0,006
10	0,00135	3	-0,00606	0,058477	0,0034	0	0,003
11	0,00135	3	0,004744	0,058477	0,0031	0	0,003
12	0,00135	3	0,008904	0,058477	0,0043	0	0,004
13	0,00135	3	-0,1248	0,058477	0,9618	0,0455	0,963
14	0,00135	3	0,006644	0,058477	0,0036	0	0,004
15	0,00135	3	-0,11118	0,058477	0,8946	0,0162	0,896
16	0,00135	3	-0,03212	0,058477	0,0382	0	0,038
17	0,00135	3	-0,06216	0,058477	0,2666	0	0,267
18	0,00135	3	0,058204	0,058477	0,2194	0	0,219
19	0,00135	3	-0,0135	0,058477	0,0067	0	0,007
20	0,00135	3	-0,05036	0,058477	0,1413	0	0,141
21	0,00135	3	0,019504	0,058477	0,0122	0	0,012
22	0,00135	3	0,039744	0,058477	0,0694	0	0,069
23	0,00135	3	0,049304	0,058477	0,1325	0	0,132
24	0,00135	3	0,006884	0,058477	0,0037	0	0,004
25	0,00135	3	-0,01974	0,058477	0,0125	0	0,012
26	0,00135	3	-0,00532	0,058477	0,0033	0	0,003
27	0,00135	3	0,013744	0,058477	0,0069	0	0,007
28	0,00135	3	-0,1043	0,058477	0,8384	0,0089	0,840
29	0,00135	3	-0,00982	0,058477	0,0047	0	0,005
30	0,00135	3	-0,0471	0,058477	0,1152	0	0,115
31	0,00135	3	0,009704	0,058477	0,0047	0	0,005
32	0,00135	3	0,012204	0,058477	0,0059	0	0,006
33	0,00135	3	0,059844	0,058477	0,2383	0	0,238
34	0,00135	3	-0,0916	0,058477	0,6923	0,0026	0,693
35	0,00135	3	-0,03712	0,058477	0,0570	0	0,057
36	0,00135	3	-0,02852	0,058477	0,0281	0	0,028
37	0,00135	3	0,093284	0,058477	0,7147	0,0031	0,716
38	0,00135	3	0,136484	0,058477	0,9868	0,0968	0,988
39	0,00135	3	0,122524	0,058477	0,9540	0,0392	0,956
40	0,00135	3	0,152064	0,058477	0,9976	0,2177	0,998
41	0,00135	3	0,105664	0,058477	0,8509	0,0102	0,852

Grafički prikaz kontrolnih karti sa uključenim nesigurnostima je prikazan na slici 22 i 23.



**Slika 22.  $\bar{x}$  kontrolna karta sa uključenim nesigurnostima**



**Slika 23. R kontrolna karta sa uključenim nesigurnostima**

Može se uočiti kako se srednje vrijednosti svih uzoraka nalaze unutar kontrolnih granica. Kada se uključe mjerne nesigurnosti, vidljivo je da se neki uzorci mogu nalaziti izvan granica kontrole, što bi ukazalo da proces nije pod kontrolom. Također, vjerojatnost da se proces nalazi izvan kontrole,  $P_{uk}$ , raste što se sredina uzorka nalazi bliže jednoj od kontrolnih granica  $\bar{x}$  kontrolne karte.

## 5. ZAKLJUČAK

Kako je dovođenje procesa proizvodnje u stanje statističke kontrole ključno za predviđanje kvalitete izlaznih proizvoda i kako bi proces bio ekonomičniji koriste se kontrolne karte.

Kontrolne karte koriste se kako bi se uzrokovanjem pratio proces na način da, ukoliko se rezultati određenih parametara ne nalaze unutar kontrolnih granica kontrolne karte, smatra se da proces nije pod kontrolom. Kada je riječ o karakteristikama kvalitete koja je promjenjiva, potrebno je pratiti srednju vrijednost i rasipanje praćene karakteristike. U klasičnoj primjeni kontrolne karte, veličine srednje vrijednosti i rasipanja, promatraju se kao diskretne vrijednosti. No u stvarnosti ti statistički parametri su stohastičke veličine, iz razloga što su mjerenja podložna pogreškama. Mjerenja su podložna pogreškama, kako zbog djelovanja slučajnih utjecaja, tako i zbog ograničenih mogućnosti i nesigurnosti korekcije sustavnih pogrešaka. Stoga mjerni rezultat ne predstavlja pravu vrijednost mjerene veličine, nego samo njenu procjenu. Parametar koji opisuje rasipanje vrijednosti rezultata mjerenja koje bi se, uz određenu vjerojatnost, moglo pripisati mjerenoj veličini naziva se mjerna nesigurnost. Mjerna nesigurnost nam stoga daje područje unutar kojeg bi se trebala nalaziti prava vrijednost mjerene veličine. Pridruživanjem mjernih nesigurnosti parametrima uzorka i posljedično vrijednostima granica kontrolne karte dobiva se realnija slika procesa.

U analizi kontrolnih karata navode se i karakteristične pogreške kontrolnih karata (pogreške tipa I i II). Pogreška tipa I ili  $\alpha$  definira vjerojatnost gdje karta pokazuje da je proces izvan kontrole kada to nije istina. Pogreška tipa II ili  $\beta$ , odgovara vjerojatnosti da proces izvan kontrole, a kontrolna karta ne upućuje na to. Pridruživanjem mjernih nesigurnosti parametrima uzorka i granicama kontrolne karte mijenja se i način tumačenja pogrešaka tipa I i II. U radu je dan izraz za vjerojatnost da je proces van kontrole neovisno o položaju uzorka na kontrolnoj karti. Izraz uključuje vjerojatnost dva događaja; prvi daje vjerojatnost da je uzorak izvan kritičnih granica kontrolne karte i da proces nije pod kontrolom, a drugi vjerojatnost da je proces izvan kontrole, dok je vrijednost uzorka unutar kritičnih granica kontrolne karte.

Može se zaključiti kako su kontrolne karte osnovni alat za praćenje i poboljšavanje kvalitete zbog jednostavnosti primjene i razumijevanja. Ukoliko se u analizu kontrolne karte uključe i procjene mjernih nesigurnosti valjalo bi težiti što manjim vrijednostima nesigurnost rezultata mjerenja, te kako bi se dobila što točnija slika kvalitete procesa, odnosno proizvoda.

---

## 6. LITERATURA

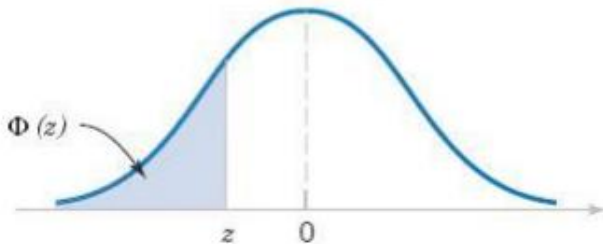
- [1] [https://en.wikipedia.org/wiki/Control\\_chart](https://en.wikipedia.org/wiki/Control_chart), (15.11.2016)
- [2] G. Baršić, V. Šimunović, M. Katić: Utjecaj mjerne nesigurnosti kontrolne karte, 2016
- [3] Douglas C. Montgomery: Introduction to statistical quality control, John Wiley & Sons, inc., Arizona state University, 2009
- [4] Vedran Mudronja: Kontrola Kvalitete, FSB, 2015.
- [5] Yu Ding: Advanced Quality Control, chapter 2\_P2, Industrial & systems engineering, Texas A&M University, 2010
- [6] <http://www.svijet-kvalitete.com/index.php/umjeravanje/1533-mjerna-nesigurnost>, (14.12.2017)
- [7] Biserka Runje: Autorizirana predavanja iz kolegija Teorija i tehnika mjerenja, Zagreb, 2014.
- [8] JCGM 100:2008, Vrednovanje mjernih podataka - Upute za iskazivanje mjerene nesigurnosti, Državni zavod za mjeriteljstvo, 2008.
- [9] Pedro S. Hack, Carla S. Ten Caten: Effect of Measurement Uncertainty in Control Charts, Portugal, 2012.
- [10] [https://en.wikipedia.org/wiki/Type\\_I\\_and\\_type\\_II\\_errors](https://en.wikipedia.org/wiki/Type_I_and_type_II_errors), (12.1.2017)



## 7. PRILOZI

Prilog 1: Statistička tablica

$$\Phi(z) = P(Z \leq z) = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}u^2} du$$



**druga decimala**

Z	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
-3.40	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0002
-3.30	0.0005	0.0005	0.0005	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0003
-3.20	0.0007	0.0007	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005
-3.10	0.0010	0.0009	0.0009	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0007	0.0007
-3.00	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010
-2.90	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
-2.80	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
-2.70	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
-2.60	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
-2.50	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
-2.40	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
-2.30	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
-2.20	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
-2.10	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
-2.00	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
-1.90	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
-1.80	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
-1.70	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
-1.60	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
-1.50	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
-1.40	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
-1.30	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
-1.20	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
-1.10	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
-1.00	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
-0.90	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
-0.80	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
-0.70	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
-0.60	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
-0.50	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
-0.40	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
-0.30	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
-0.20	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
-0.10	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
0.00	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641

Prilog 2 :

Koeficijenti kontrolnih granica za  $\bar{X} - R$  kartu.

n	A <sub>2</sub>	D <sub>3</sub>	D <sub>4</sub>	d <sub>2</sub>
2	1,880	0	3,267	1,128
3	1,023	0	2,575	1,693
4	0,729	0	2,282	2,059
5	0,577	0	2,115	2,326
6	0,483	0	2,004	2,534
7	0,419	0,076	1,924	2,704
8	0,373	0,136	1,864	2,847
9	0,337	0,184	1,816	2,970
10	0,308	0,223	1,777	3,078