

Frekvencijska stabilizacija lasera za mjeriteljstvo duljine

Vjencislav, Barać

Master's thesis / Diplomski rad

2016

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:235:257724>

Rights / Prava: [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2024-07-10**

Repository / Repozitorij:

[Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

DIPLOMSKI RAD

Vjencislav Barać

Zagreb, 2016.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

DIPLOMSKI RAD

Mentor:

Dr. sc. Marko Katić, dipl. ing., doc.

Student:

Vjencislav Barać

Zagreb, 2016

Izjavljujem da sam ovaj rad izradio samostalno koristeći stečena znanja tijekom studija i navedenu literaturu.

Posebno se zahvaljujem svom mentoru, dr. sc. Marku Katiću, na mentoriranju, pruženoj pomoći, strpljenju, te iznimno korisnim savjetima i informacijama potrebnim za izradu ovog rada.

Neizmjereno hvala cijeloj grupi za hladne atome sa Instituta za fiziku, a posebno hvala dr. sc. Ticijani Ban i mag. phys. Nevenu Šantiću na vodstvu, bezuvjetnoj pomoći, korisnim savjetima, informacijama, uloženom trudu i vremenu.

Posebne zahvale dugujem svojoj obitelji i prijateljima na potpori tijekom cijelog studija. –Hvala Vam!

Vjencislav Barać



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE



Središnje povjerenstvo za završne i diplomske ispite
Povjerenstvo za diplomske ispite studija strojarstva za smjerove:
proizvodno inženjerstvo, računalno inženjerstvo, industrijsko inženjerstvo i menadžment, inženjerstvo
materijala i mehatronika i robotika

Sveučilište u Zagrebu Fakultet strojarstva i brodogradnje	
Datum	Prilog
Klasa:	
Ur.broj:	

DIPLOMSKI ZADATAK

Student: **Vjencislav Barać** Mat. br.: 0035182604

Naslov rada na hrvatskom jeziku: **Frekvencijska stabilizacija lasera za mjeriteljstvo duljine**

Naslov rada na engleskom jeziku: **Frequency stabilisation of lasers for length metrology**

Opis zadatka:

Sljedivost rezultata mjerenja, kao fundamentalna komponenta mjeriteljstva, u slučaju mjerenja duljine počiva na realizaciji stabilnih valnih duljina izvora svjetlosti; sama definicija metra u SI sustavu se praktično realizira uporabom jedno stabiliziranog lasera. Kako bi se uspostavio neprekinut lanac sljedivosti od klasičnih mjernih sustava do primarnog etalona nužna je upotreba sekundarnih etalona valne duljine, koji se realiziraju različitim sustavima stabilizacije frekvencije lasera. U okviru diplomskog rada student ima sljedeće zadatke:

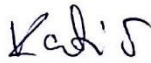
1. Opisati izvedbe lasera koji se koriste u mjeriteljstvu duljine;
2. Opisati vrste stabilizacije frekvencije lasera, s naglaskom na parametre koji su od značaja u mjeriteljstvu;
3. Provesti mjerenja karakteristika sekundarnih lasera koji se koriste u Nacionalnom laboratoriju za duljinu (temperaturno stabilizirani helij-neon laser i poluvodički laser), te analizirati mogućnosti stabilizacije njihovih frekvencija;
4. Ukoliko provedena mjerenja ukazuju na mogućnost frekvencijske stabilizacije ispitanih lasera, u suradnji s Institutom za fiziku izraditi elektrooptički sustav za frekvencijsku stabilizaciju odabranog lasera, te analizirati ostvarene rezultate.

Zadatak zadan:
29. rujna 2016.


Rok predaje rada:
1. prosinca 2016.

Predvideni datum obrane:
7., 8. i 9. prosinca 2016.

Zadatak zadao:


Doc. dr. sc. Marko Katić

Predsjednik Povjerenstva:


Prof. dr. sc. Franjo Čajner

SADRŽAJ

SADRŽAJ	I
POPIS SLIKA	III
POPIS TABLICA.....	V
POPIS OZNAKA	VI
SAŽETAK.....	VIII
SUMMARY	IX
1. UVOD.....	1
2. OSNOVE POLUVODIČKIH LASERA	2
2.1. Struktura poluvodiča	2
2.2. Energetska struktura poluvodiča	3
2.3. E-k diagram.....	7
2.4. Gustoća stanja	9
2.5. Koncentracija nosioca naboja i Fermi-Dirac distribucija	13
2.6. Intrinzični i ekstrinzični poluvodiči	22
2.6.1. Intrinzična svojstva poluvodiča	23
2.6.2. Ekstrinzična svojstva poluvodiča.....	24
2.7. PN-spoj.....	26
2.8. Laseri s homospojem	28
2.9. Laseri s dvostrukim heterospojem	30
3. OSNOVE PLINSKIH LASERA I LASERA ČVRSTOG STANJA.....	34
3.1. Sustav sa dvije razine	34
3.2. Sustav sa tri razine	39
3.3. Sustav sa četiri razine.....	41
4. METODE STABILIZACIJE FREKVENCIJE.....	47
4.1. Zeemanova stabilizacija	48
4.2. Polarizacijska stabilizacija	50
4.3. Saturacijska spektroskopija (Lambov pad)	52
4.4. Jodno stabilizirani HeNe laser	57
4.5. Pound-Drever-Hall- PDH stabilizacija	61
5. EKSPERIMENTALNI DIO	66
5.1. HTPS helij-neonski laser	66
5.1.1. Specifikacije.....	66
5.1.1.1. Udaljenost longitudinalnih modova.....	67
5.1.1.2. Filtriranje rezonantnih frekvencija.....	68
5.1.2. Karakterizacija	69
5.2. CUBE 405-100C poluvodički laser	73
5.2.1. Specifikacije.....	73
5.2.2. Karakterizacija	74
5.3. Stabilizacija poluvodičkog lasera valne duljine 780nm.....	77
6. ZAKLJUČAK.....	83

LITERATURA.....	84
PRILOZI.....	86

POPIS SLIKA

Slika 1.	Kubični kristalni sustav poluvodiča [3].....	2
Slika 2.	Povezanost interakcije atoma i energetske razine [2]	4
Slika 3.	Ovisnost energetske razine o udaljenosti i broju atoma [4]	4
Slika 4.	Jednodimenzionalni model rešetke i Kronig-Penney model [2]	5
Slika 5.	Kronig-Penney model za jedno energetske stanje [2].....	5
Slika 6.	Tehnički prikaz klastera energetske razine [3]	6
Slika 7.	Reducirani E-k dijagram [2].....	7
Slika 8.	Pravokutna trodimenzionalna potencijalna jama [3].....	10
Slika 9.	Stacionarni valovi i vjerojatnost pronalaska elektrona [3].....	10
Slika 10.	k prostor [2]	11
Slika 11.	1/8 sfere k prostora [2]	12
Slika 12.	Fermi-Dirac funkcija s ovisnošću o temperaturi [3]	14
Slika 13.	Fermi razina za vodljivi i valentni pojas [2].....	15
Slika 14.	Grafički prikaz koncentracije elektrona i šupljina za intrinzični poluvodič [5]....	16
Slika 15.	Grafički prikaz koncentracije elektrona i šupljina za n-tip poluvodiča [5].....	17
Slika 16.	Grafički prikaz koncentracije elektrona i šupljina za n-tip poluvodiča [5].....	18
Slika 17.	Dinamika apsorpcije, radijacije i termalizacija [1]	19
Slika 18.	Fermi-Diracove funkcije u kvazi ravnoteži [2]	20
Slika 19.	Energetski dijagram PN-spoja [6]	21
Slika 20.	Dopiranje fosfora u kristalnu rešetku silicija [7].....	24
Slika 21.	Dopiranje bora u kristalnu rešetku silicija [7]	25
Slika 22.	Dinamika pn spoja [9]	26
Slika 23.	Potencijalna energija a) u slučaju pn spoja u termičkoj ravnoteži, b) u slučaju propusno polariziranog pn spoja [6].....	29
Slika 24.	Osnovna struktura PN homospoja [6]	30
Slika 25.	GaAs Laser s dvostrukim heterospojem [6]	31
Slika 26.	Dvostruka heterostruktura; (a) struktura energetske procjepa, (b) transverzalni profil laserske zrake, (c) indeks loma pojedinog područja [6]	31
Slika 27.	Dijagram konstante rešetke i energetske procjepa [10]	32
Slika 28.	Apsorpcija fotona [11].....	34
Slika 29.	Spontana emisija [11]	35
Slika 30.	Stimulirana emisija [11]	35
Slika 31.	Zasićenje sustava sa dvije razine [11]	38
Slika 32.	Sustav sa tri razine [11]	39
Slika 33.	Prikaz principa svjetlosnog pojačanja [11]	39
Slika 34.	Komponente rubinskog lasera [15]	40
Slika 35.	Dinamika rubinskog lasera [12]	41
Slika 36.	Sustav sa četiri razine [11]	41
Slika 37.	Apsorpcijski spektar YAG lasera [16]	42
Slika 38.	Spektar ksenonske i kriptonske bljeskalice [12]	43
Slika 39.	Dinamika YAG lasera [12].....	44
Slika 40.	Komponente HeNe lasera [12]	44
Slika 41.	Dinamika HeNe lasera [12]	45
Slika 42.	Klasifikacija stabilizacije HeNe laserskih izvora [17]	48
Slika 43.	Zeemanovo cijepanje moda [17]	49

Slika 44.	Shematski prikaz tipične stabilizacije Zeemanovim efektom [17]	49
Slika 45.	Longitudinalni modovi kod polarizacijske stabilizacije [17]	50
Slika 46.	Shematski prikaz polarizacijske stabilizacije [17]	51
Slika 47.	Pretvorba FM u AM na apsorpcijskoj liniji [19]	52
Slika 48.	Preklapanje pumpne i probne zrake [19].....	54
Slika 49.	Broj atoma u nepobuđenom i pobuđenom stanju za probnu i pumpnu zraku [19]	55
Slika 50.	Suma signala dvije probne zrake [19]	55
Slika 51.	Shema stabilizacije FM saturacijskom spektroskopijom [19].....	56
Slika 52.	Krivulja pojačanja HeNe i jodne ćelije [17].....	57
Slika 53.	Signal a) prvog i b) trećeg harmonika joda u odnosu na frekvenciju [17].....	59
Slika 54.	Shematski prikaz jodne stabilizacije HeNe lasera [17]	59
Slika 55.	Jodno stabilizirani HeNe laser na FSB	60
Slika 56.	Promjena reflektiranog intenziteta s varijacijom frekvencije [25]	62
Slika 57.	Shema Pound-Drever-Hall stabilizacije [22]	62
Slika 58.	Odnos intenziteta i faznog pomaka s varijacijom frekvencije [24].....	64
Slika 59.	Error signal kod PDH metode [24].....	65
Slika 60.	HTPS-EC Tunable HeNe Laser [26].....	66
Slika 61.	a) Rezonantne frekvencije, b) Slobodni spektralni raspon [12]	67
Slika 62.	Promjena valne duljine mijenjanjem kuta Littrowe prizme	69
Slika 63.	Varijacija valne duljine sa vremenom za HeNe ~633nm	70
Slika 64.	Graf Allanove i modificirane Allanove devijacije za HeNe ~633nm	70
Slika 65.	Varijacija valne duljine sa vremenom za HeNe ~543nm	71
Slika 66.	Graf Allanove i modificirane Allanove devijacije za HeNe ~543nm	72
Slika 67.	CUBE 405-100C Coherent [28]	73
Slika 68.	Ovisnost nazivne snage o električnoj struji	74
Slika 69.	Promjena valne duljine mijenjanjem el.struje	75
Slika 70.	Postav stabilizacije CUBE 405-100C lasera	76
Slika 71.	Energetski dijagram 85Rb i 87Rb [31]	77
Slika 72.	Doppler prošireni apsorpcijski spektar [32]	77
Slika 73.	Saturacijski spektar hiperfinih prijelaza 87Rb s $Fg = 2 \rightarrow Fe = 1,2,3$ [30]	78
Slika 74.	Generacija Lock-in signala [30][33]	79
Slika 75.	Saturacijski spektar i error signal [30]	80
Slika 76.	Praktični postav stabilizacije	80
Slika 77.	Varijacija valne duljine sa vremenom za a) nestabilizirani i b) stabilizirani laser	81
Slika 78.	Stabilnost a) nestabiliziranog i b) stabiliziranog lasera.....	82

POPIS TABLICA

Tablica 1. Broj valentnih elektrona određenih elemenata [2]	3
Tablica 2. Vrijednosti efektivnih masa za elektron i šupljine [2]	9
Tablica 3. HTPS-EC Tunable HeNe Laser specifikacije [26].....	66
Tablica 4. CUBE 405-100C Coherent Laser specifikacije [28].....	73
Tablica 5. Tablična usporedba vrijednosti prikazanih na slici 69	75

POPIS OZNAKA

Oznaka	Jedinica	Opis
z, L	[m]	udaljenost
N	–	brojnost
a	[Å]	međuatomski razmak $1\text{Å} = 10^{-10}\text{m}$
V	[J]	potencijalna energija
r	[m]	udaljenost od jezgre
T	[K]	termodinamička temperatura
E_g	[eV]	energetski procjep ($1\text{eV} = 1.602176565 \times 10^{-19}\text{ J}$)
\hbar	[$\text{m}^2 \text{kg s}^{-1}$]	reducirana Planckova konstanta $\hbar = h/2\pi$
h	[$\text{m}^2 \text{kg s}^{-1}$]	Planckova konstanta ($6.62606957 \times 10^{-34}$)
\vec{k}	[m^{-1}]	valni vektor
m	[kg]	masa
E	[J]	energija
π	–	Ludolfov broj ($\pi \approx 3,14159\ 26535\ 89793$)
K	[J]	kinetička energija
ν	[Hz]	frekvencija
p	[kg m s^{-1}]	moment
F	[N]	sila
N_x	–	populacija određene energetske razine
k_b	[JK^{-1}]	Boltzmanova konstanta ($1.3806488 \times 10^{-23}$)
ω	[rad s^{-1}]	kružna frekvencija
I	[A]	struja
J	[A m^{-2}]	gustoća struje
$R_{a \rightarrow b}$	–	stopa apsorpcije
$R_{b \rightarrow a}$	–	stopa emisije
A	–	Einsteinov koeficijent za spontanu emisiju
B	–	Einsteinov koeficijent za stimuliranu emisiju/apsorpciju
$u(\nu)$	[J m^{-3}]	gustoća energije fotona (energija po jedinici volumena i jediničnom intervalu frekvencija)
$\rho(\omega)$	[J m^{-3}]	gustoća energije fotona
λ	[nm]	valna duljina ($1\text{nm} = 10^{-9}\text{m}$)
c	[ms^{-1}]	brzina svjetlosti ($299\ 792\ 458$ u vakuumu)
e	–	prirodni logaritam

τ	[s]	vrijeme trajanja elektrona na određenoj energetskej razini
t	[s]	vrijeme trajanja
A	[m ²]	površina
I	[W m ⁻²]	intenzitet, gustoća zračenja
v_s	[m s ⁻¹]	brzina
P	[W]	snaga
R	–	refleksijski koeficijent
M	–	atomska masa molekule (relativan broj, izražava se preko jedinice u koja iznosi $(1,6605 \times 10^{-27} \text{ kg})$)
n	–	refrakcijski koeficijent

SAŽETAK

Tema ovog diplomskog rada je frekvencijska stabilizacija lasera za mjeriteljstvo duljine. Kako bi se razumjeli efekti koji doprinose nestabilnosti lasera, a tako i efekti pomoću koji se stabilizira laser, ovaj rad u prvom dijelu ulazi u područje iza teorije kontinuuma. U tom djelu se objašnjava kako funkcionira laser na atomskoj razini sa naglaskom na efekte koji su od značaja pri frekvencijskoj stabilizaciji. U drugom dijelu rada se objašnjavaju popularne metode stabilizacije lasera za mjeriteljstvo duljine potkrijepljeno nužnim matematičkim aparatom. Konačno, u trećem dijelu rada se provode praktična mjerenja danih lasera sa nužnom obradom i tumačenjem rezultata. Na kraju je provedena stabilizacija poluvodičkog lasera metodom saturacijske spektroskopije na hiperfina prijelaz rubidija.

Ključne riječi: laseri, fizika lasera, HeNe laser, poluvodički laser, frekvencijska stabilizacija lasera, metode stabilizacije u mjeriteljstvu, laseri u mjeriteljstvu

SUMMARY

The subject of this Master thesis is the laser frequency stabilisation for length metrology. In order to understand the effects that contribute to the instability of a laser, as well as the effects used to stabilise lasers, this thesis has been split into three sections which include background theory and practical work. The first section comprises a literature review on physics beyond continuum theory and an explanation of how lasers work on atomic scale with focus on effects which are important in frequency stabilisation. The second section explains popular techniques of laser frequency stabilisation for length metrology supported by the necessary mathematical apparatus. In the third section, measurements of given lasers are made with necessary processing and interpretation of results. Finally, stabilisation of a semiconductor laser is made following a method of saturation spectroscopy of hyperfine transition in rubidium.

Key words: lasers, laser physics, HeNe laser, semiconductor laser, laser frequency stabilisation, methods of frequency stabilisation in metrology, lasers in metrology

1. UVOD

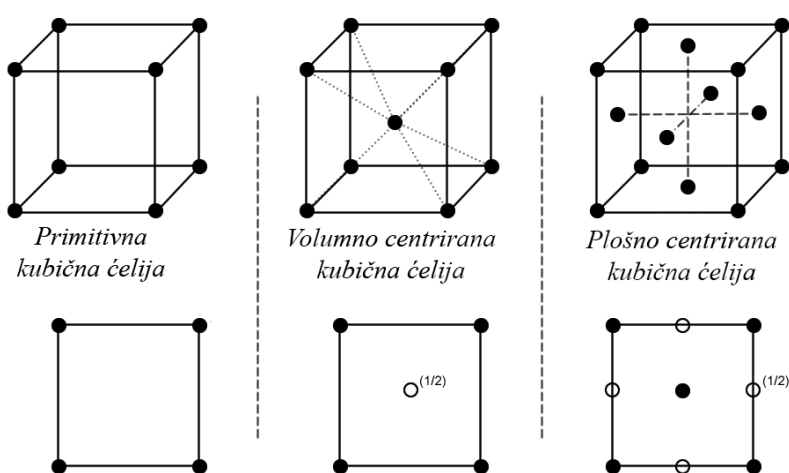
LASER je akronim za *Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation*, laseri predstavljaju oscilatore sa frekvencijama od teraherca do petaherca ($10^{12} - 10^{15}$ Hz). Laser općenito je izvor svjetlosti kod kojeg se, za razliku od konvencionalnih izvora svjetlosti, svjetlost generira mehanizmom stimulirane emisije. Stimulirana emisija je fizikalna pojava odgovorna za pojačanje zračenja koju je objasnio Albert Einstein 1917. godine u svom radu u svom radu „*On the Quantum Theory of Radiation*“ u kojem je pretpostavio razvoj MASERA (*Microwave Amplification by Stimulated Emission of Radiation*) i postojanje stimulirane emisije koja je bila temelj za početak istraživanja tog područja. Prvi funkcionalni laser je konstruirao Theodore Maiman sa krutom jezgrom rubina u istraživačkom centru Hughes 1960. godine. Od tada laseri su doprinijeli velikim postignućima u području znanosti, inženjerstva i tehnologije. U strojarstvu, lasere se često susreće na području zavarivanja, rezanja, bušenja, mjeriteljstva i mnogim drugim područjima.

Velika duljina koherentnosti i monokromatičnost čini lasere vrlo zanimljivim uređajima za mjeriteljstvo. Laseri mogu emitirati u vidljivom elektromagnetskom spektru što je poželjno za mjerenje duljine optičkim uređajima visoke preciznosti. Pritom je optička interferometrija osnovna mjerna tehnika za mjerenje duljine u mjeriteljstvu kao i u tehnološki naprednoj industriji. Preciznost interferometrije doseže nano svijet što lasere čini sastavnim dijelom najpreciznijih i najtočnijih komercijalnih mjernih uređaja. No, postizanje da laser emitira svjetlost nije samo po sebi dovoljno da bi se ostvarilo mjerenje visoke točnosti uz minimalnu mjernu nesigurnost. Kako bi se postigli relevantni rezultati, a posebno u nanotehnologiji, teži se stabilnoj frekvenciji emitiranog svjetla, odnosno stabilnoj valnoj duljini. Da se postigne stabilna frekvencija laser se treba aktivno stabilizirati; većina lasera u mjeriteljstvu su komercijalno stabilizirani, ali za postizanje visokih točnosti uz minimalnu mjernu nesigurnost postoji mogućnost eksperimentalne stabilizacije široko dostupnih nestabilnih lasera koji potom mogu poslužiti kao sekundarni etaloni za umjeravanje ostalih lasera. Primarni laser u svakom Nacionalnom mjeriteljskom laboratoriju je jedno stabilizirani HeNe laser kojim je definirana praktična realizacija definicije metra: metar je $1/299792458$ dio puta koju svjetlost prođe za jednu sekundu u vakuumu (1992). Ovaj rad teži objasniti teoretsku pozadinu rada određenih vrsta lasera i efekata koji utječu na njegovu stabilnost duboko ispod mehanike kontinuuma, te objasniti principe i metode stabilizacije frekvencije (valne duljine).

2. OSNOVE POLUVODIČKIH LASERA

2.1. Struktura poluvodiča

Poluvodič (*engl. semiconductor*) je materijal koji ima električnu vodljivost u sredini između izolatora i vodiča. Poluvodič postaje izolator na vrlo niskim temperaturama, a na sobnoj temperaturi postaje električki vodljiv, iako je ta vodljivost znatno manja nego što je vodljivost vodiča. Poluvodiči su obično karakterizirani kubičnim kristalnim sustavom. U kubičnom kristalnom sustavu postoje tri strukture: primitivna kubična ćelija (*engl. primitive cubic*), volumno centrirana kubična ćelija (*engl. body-centered cubic, BCC*), plošno centrirana kubična ćelija (*engl. face-centered cubic, FCC*) što je prikazano na slici 1. [1][2].



Slika 1. Kubični kristalni sustav poluvodiča [3]

Primitivna kubična ćelija ima jedan atom po ćeliji, volumno centrirana kubična ćelija ima dva atoma po ćeliji te plošno centrirana kubična ćelija ima četiri atoma po ćeliji. Broj atoma po ćeliji može poslužiti za procjenu broja valentnih elektrona. Ukoliko se uzme primitivna kubična rešetka poluvodiča, tipični međuatomski razmak (oznaka a) je oko 3 – 7 Å (Ångström). Ukoliko se uzme vrijednost od 5 Å može se izračunati volumen rešetke koji je jednak izračunu volumena kocke, $V = 125 \text{ Å}^3$, odnosno $125 \times 10^{-24} \text{ cm}^3$. Dakle, navedena vrijednost predstavlja prostor koji zauzima jedna primitivna kubična ćelija tipičnog poluvodiča. Jednostavnim računom može se vidjeti koliko zapravo ima atoma u jednom kubičnom centimetru. [2]

$$\text{broj atoma/kubični centimetar} = \frac{1}{125 \times 10^{-24}} = 0,8 \times 10^{22} \text{ atoma / cm}^3$$

Iz računa se može zaključiti da se radi o tipičnom broju atoma po kubičnom centimetru kod poluvodiča što ukazuje da ako svaki atom ima jedan valentni elektron tada je broj valentnih

elektrona po kubičnom centimetru isti kao i prethodno izračunati broj elektrona. Točne vrijednosti valentnih elektrona po atomu su prikazane tablicom.

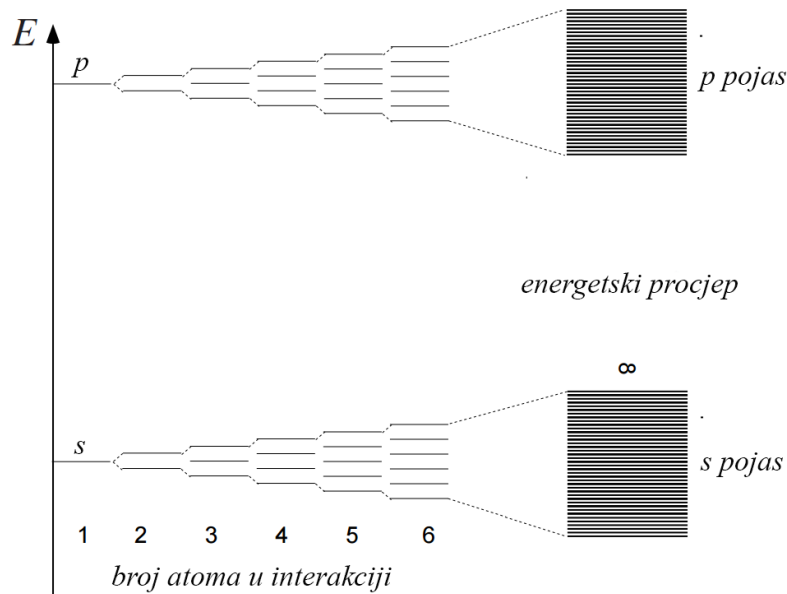
Tablica 1. Broj valentnih elektrona određenih elemenata [2]

Element	Atomski broj	Elektronske ljuske	Broj valentnih elektrona
Si	14	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^2$	4
Ge	32	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^2$	4
Ga	31	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^1$	3
As	33	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^3$	5

Ukoliko bi se radilo o atomu sa više valentnih elektrona bilo bi dovoljno samo pomnožiti izračunati broj atoma sa brojem valentnih elektrona, odnosno tipične vrijednosti bi bile približno veličine $10^{22} - 10^{23}$. [2]

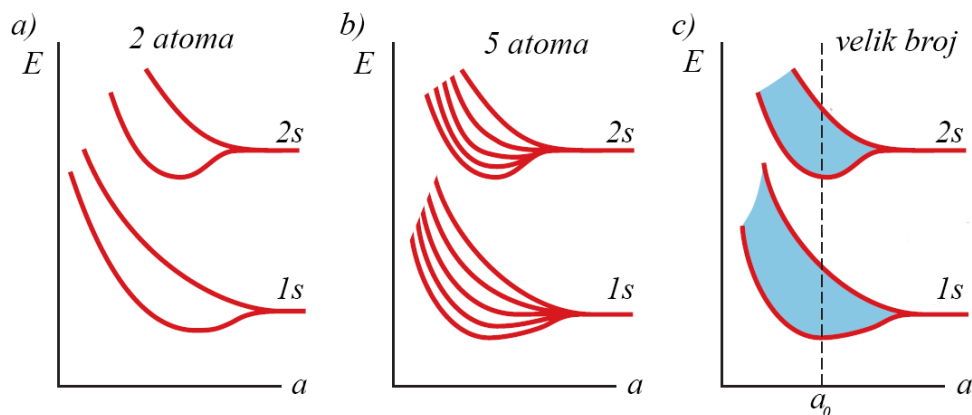
2.2. Energetska struktura poluvodiča

Poluvodiči su obično kristalne građe, postoje i amorfni, ali oni nisu ovdje tema. Kruto stanje je stanje materije, materija je građena od atoma, a atomi su građeni od pozitivno nabijene jezgre i negativno nabijenog elektronskog omotača. Kruto stanje čine čestice međusobno tako povezane da jedna u odnosu prema drugoj ne može mijenjati svoj položaj. Zato tvar u čvrstom agregatnom stanju (za razliku od tekućega i plinovitoga) pruža otpor svakom pokušaju promjene oblika i volumena. U pojedinom atomu elektroni imaju određenu energiju s obzirom na jezgru atoma; nalaze se na određenim energetske razine. Diskretne energetske razine i pripadne valne funkcije dobivaju se rješavanjem Schrödingerove jednadžbe. Kako se udaljenost između atoma smanjuje, dolazi do preklapanja valnih funkcija, te se kao posljedica interakcije, svako energetske stanje cijepa u dva nova stanja, jedno više, a drugo niže energije. Ako se za primjer uzme plinska komora pod niskim tlakom tada je relativno veliki međuatomski razmak čije se veličine kreću od 100 \AA do 1 \mu m . U tom slučaju kada elektroni “ne vide” elektrostatsko polje drugog elektrona, energetske razine ostaju diskretne, što bi izgledalo kao razine za jedan atom na slici 2. Ukoliko se atomi približe (kao u krutini) tada elektrostatsko polje jednog elektrona počinje utjecati na elektrostatsko polje drugog, kao što je za dva ili više atoma na slici 2. Približavanje atoma rezultira dijeljenjem energetske razine u više njih. Za slučaj dva atoma, odnosno dva elektrostatska polja elektrona u interakciji, nastaju dvije razine, odnosno veći broj razina za više atoma u interakciji. Općenito vrijedi da međudjelovanjem N atoma, svaka energetska razina se cijepa na N bliskih energetske stanja, pri čemu je N broj atoma. [2]



Slika 2. Povezanost interakcije atoma i energetske razine [2]

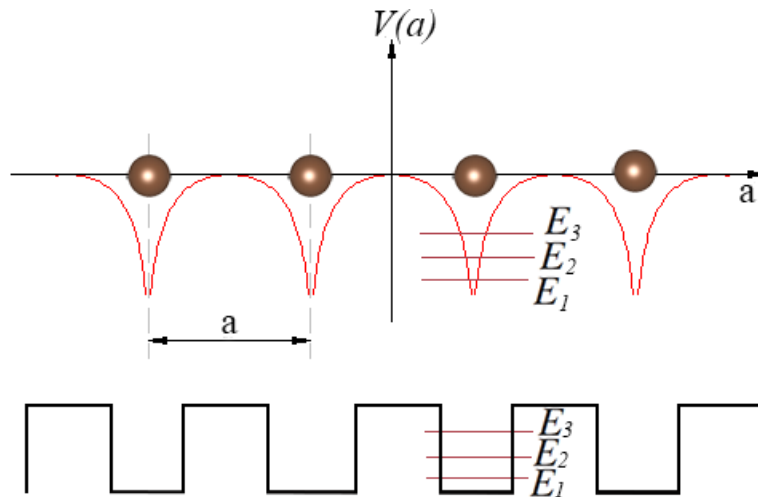
Može se pojednostavniti da za veći broj atoma koji su međusobno u interakciji posljedica su klasteri energetske razine (*engl. energy bands*) kao što prikazuje slika 2 za velik broj atoma u interakciji. Slikom 3 je prikazano kako varira broj energetske razine s promjenom udaljenosti atoma i promjenom broja atoma u interakciji. [4]



Slika 3. Ovisnost energetske razine o udaljenosti i broju atoma [4]

Na slici 3.c) je prikazan tipični međuatomski razmak npr. 5 Å. Vidljivo je da je taj razmak dovoljno mali da postoje klasteri energetske razine, odnosno pojasevi, ukoliko je u interakciji veći broj atoma. Slika 3.a) i 3b) prikazuju kako se za npr. isti međuatomski razmak kao na slici 3.c) energetske razine dijele. Pojasevi energetske razine su razdvojeni energetskim procjepom koji predstavlja zabranjene vrijednosti energije, odnosno u tom području neće biti energetske razine (u slučaju idealnog poluvodiča). Na slici 3.c) se može označiti niži energetski pojas kao valentni pojas, ali u stvarnosti valentni pojas je najviši energetski pojas koji je kompletno nastanjen, tako da na ovoj slici može biti nekolicina pojasa ispod spomenutog valentnog pojasa.

Vodljivi pojas je uvijek slijedeći pojas iznad valentnog. Također isto vrijedi i za vodljivi energetske pojas, iznad vodljivog energetskeg pojasa može još postojati nekolicina, ali s obzirom da oni nisu nastanjeni – ni ne razmatraju se. Dokaz širenju pojaseva smanjenjem međuatomskog razmaka može predočiti iz jednodimenzionalnog modela rešetke i Kronig-Penney aproksimacije kao što prikazuje slika 4 [2].

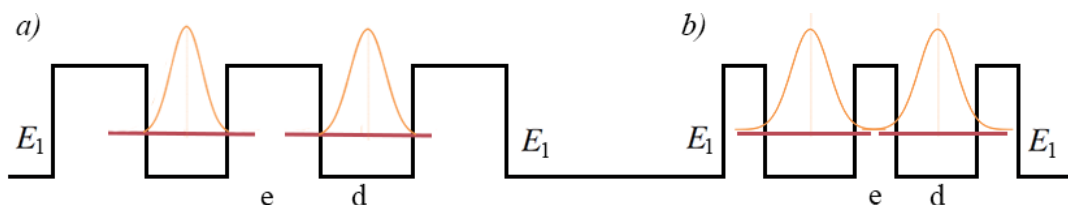


Slika 4. Jednodimenzionalni model rešetke i Kronig-Penney model [2]

Sa slike 4 je vidljivo kako potencijalna energija počinje rasti u blizini atoma prema izrazu:

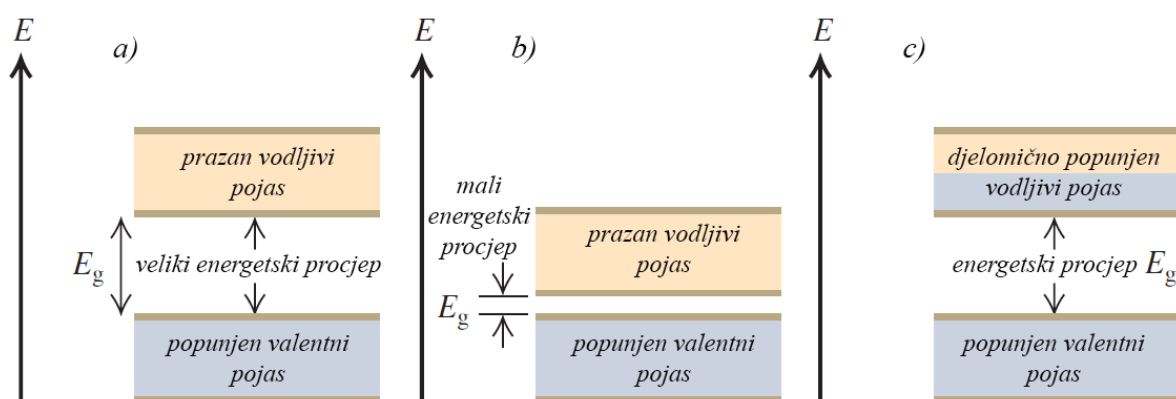
$$V = \frac{-q_1 q_2}{r} \quad (2.2.1)$$

Gdje q_1 i q_2 predstavljaju naboje, a r predstavlja udaljenost od jezgre. Kada je $r = 0$ tada je $V = \infty$, što je razlog zašto na slici krivulje nisu spojene. Za više atoma u jednodimenzionalnom prikazu vidljivo je da je promjena energije periodična, svaki atom ima dozvoljene diskretne energetske razine što je prikazano sa E_1, E_2 i E_3 . Na slici ispod je prikazan Kronig-Penney model koji aproksimira varijaciju potencijalne energije s periodičnom potencijalnom kutijom koje ako su dovoljno razdvojene interakcija atoma biti će zanemariva. Kao što je na slici naznačeno postoji velik broj energetske razine. Za slučaj dozvoljenog jednog energetskeg stanja, Kronig-Penney model je prikazan slijedećom slikom 5. [2]



Slika 5. Kronig-Penney model za jedno energetske stanje [2]

Slika 5.a) prikazuje da valna funkcija nestaje izvan aproksimiranog područja potencijalne energije, a unutar oscilira. Ukoliko je između tih područja veliki razmak e , tada potencijalna kutija nije u interakciji sa susjednom (*engl. non interacting wells*), ali ukoliko se parametar e smanjuje, kao što prikazuje slika 5.b) tada dijelovi krivulje koji nestaju započinju interakciju (*engl. interacting wells*) što će rezultirati sa dva moguća rješenja umjesto prethodnog jednog. Ista analogija vrijedi i za tri potencijalne kutije u interakciji što će tada dati tri dozvoljena rješenja, odnosno za n potencijalnih kutija u interakciji će omogućiti n dozvoljenih rješenja. Drugim riječima, kada postoji velik broj blisko povezanih atoma u nekoj strukturi tada postoji velik broj energetski dozvoljenih stanja za sve energetske razine. Sve to dovodi do konačne slike energetskih pojaseva koja se sastoji od klastera energetskih razina koja se obično u tehnici označuju kao jedna cjelina [2].



Slika 6. Tehnički prikaz klastera energetskih razina [3]

Sa slike 6.c) je vidljivo da metali imaju potpuno puni valentni pojas i djelomično popunjen vodljivi pojas što znači da ima veliki broj slobodnih stanja dostupnih za okupaciju, u nekim slučajevima se valentni pojas i vodljivi pojas preklapaju pa je moguće lagano kretanje elektrona iz jednog u drugi pojas. Poluvodiči prikazani slikom 6.b) imaju vodljivi i valentni pojas razmaknuti energetskim procjepom koji je za poluvodiče tipične veličine od 0,1 eV do 3 eV, postoje spojevi koji imaju veći energetski procjep kao što je galij nitrid koji ima 3,4 eV, ali on je izuzetak. [2] Kod poluvodiča je valentni pojas potpuno popunjen i vodljivi pojas je potpuno prazan pri temperaturi od 0 K, pri nekoj konačnoj temperaturi elektroni prelaze u vodljivi pojas, a iza sebe ostavljaju šupljine. Kod izolatora prikazanih slikom 6.a) energetski procjep je vrlo visok tako da je kretanje elektrona iz jednog u drugi pojas je jako otežano, tipične vrijednosti izolatora imaju energetski procjep veći od 4 eV. No ovakva gruba klasifikacija na metale, poluvodiče i izolatore ne govori previše o samoj strukturi energetskih pojaseva, takav opis je više tehničke prirode kako bi se naglasila razlika. Za točnije vrijednosti potrebno je razmotriti najmanje reducirani E-k dijagram koji je dovoljno točan za tehničku uporabu.

2.3. E-k dijagram

S obzirom da poluvodiči koji su ovdje tema imaju kristalnu rešetku, a u kristalnoj rešetki su atomi periodično poredani, što znači da vrijedi tvrdnja iz točke 1.2. u vezi periodične varijacije potencijalne energije. Kretanje elektrona je opisano zakonima kvantne mehanike, zbog složenosti kristala izuzetno je teško riješiti Schrödingerovu jednadžbu, pa se poseže za pojednostavljenjima [3]. Felix Bloch je primijetio da s obzirom da potencijalna energija varira periodički, vjerojatnost pronalaska elektrona bi isto trebala varirati periodički, što znači da bi valna funkcija isto trebala varirati periodički [2]. Iznio je hipotezu da bi tada valna funkcija u takvom periodičnom mediju treba biti oblika:

$$\psi_k = u_k(r) e^{i\vec{k}\vec{r}} \quad (2.3.1)$$

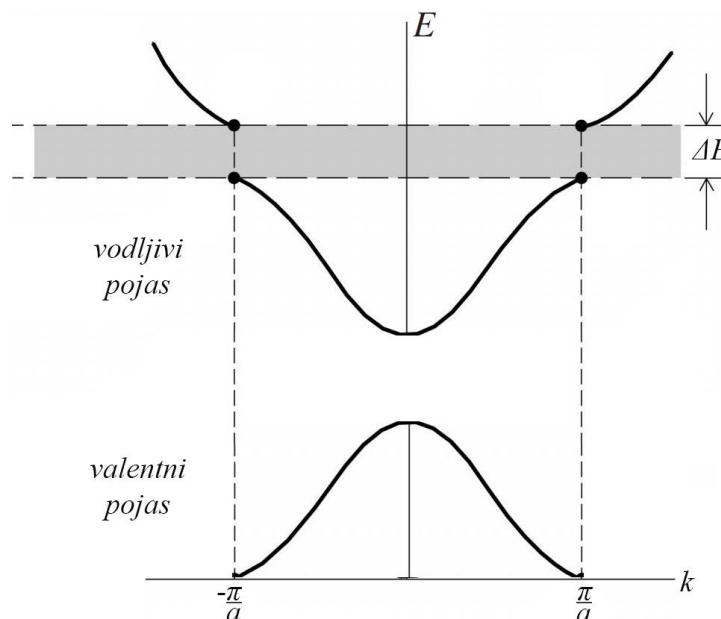
Gdje $u_k(r)$ predstavlja Bloch-ovu periodičnu funkciju, a $e^{i\vec{k}\vec{r}}$ predstavlja ravni val. Pritom je:

$$u_k(r) = u_k(r + a) \quad (2.3.2)$$

Pri čemu je a međuatomski razmak. Ukoliko se izraz (1.3.1) uvrsti u Schrödingerovu jednadžbu:

$$\nabla^2\psi + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V)\psi = 0 \quad (2.3.3)$$

Pri čemu je ψ valna funkcija, m je masa elektrona, a E eigen vrijednost. Iz izraza se dobiva da su energetske eigen vrijednosti (*engl. energy eigenvalues*) također periodične u k prostoru. Grafički prikaz E-k dijagrama prikazan je slikom 7.



Slika 7. Reducirani E-k dijagram [2]

S obzirom da je E-k dijagram periodičan za sve energetske razine dovoljno je promatrati samo reduciranu zonu od $-\pi/a$ do π/a , koja se naziva prva Brillouinova zona prikazana slikom 7. Reducirana zona je relevantna u tehnici tako da će se ovdje smatrati adekvatnom. Na slici je sivom bojom prikazana zabranjena energetska zona, a iznad nje je prikazano kako bi se širio prošireni E-k dijagram od $-\pi/a$ do $-2\pi/a$ te na drugu stranu od π/a do $2\pi/a$. Za svaku vrijednost k (vrijednost valnog vektora) koja može biti samo diskretna vrijednost postoji određeno rješenje, s obzirom da tih rješenja ima jako puno, crta se kontinuirana krivulja. Postoje materijali u kojima se minimum vrijednosti vodljivog pojasa ne poklapa sa maksimalnom vrijednosti valentnog pojasa, odnosno vrhovi ne leže na istoj k vrijednosti. Takvi materijali se nazivaju se indirektni poluvodiči. Bitni dijelovi slike 7 koji sudjeluju u optoelektroničkim procesima su donji dio krivulje vodljivog pojasa i gornji dio krivulje valentnog pojasa. Ukoliko se neki elektron nalazi udaljen od minimuma vodljivog pojasa (*engl. hot electron*) on će se postepeno spuštati na minimum krivulje usred fenomena termalizacije (*engl. thermalisation*). Gornji i donji dio krivulje mogu se aproksimirati parabolom pa njihove energije iznose [2]:

$$E = E_C + \frac{\hbar^2 k^2}{2 m_c} \quad (2.3.4)$$

$$E = E_v - \frac{\hbar^2 k^2}{2 m_v} \quad (2.3.5)$$

Pri čemu je E_C energija u vodljivom pojasu, m_c je efektivna masa u vodljivom pojasu, E_v je energija u valentnom pojasu, dok je m_v efektivna masa u valentnom pojasu. Razlog zašto su ovi izrazi bitni je E-k dijagram koji izgleda u obliku parabole i ne smiju se sve vrijednosti aproksimirati crtom kao što prikazuje slika 6 već se ovim izrazima kompenzira to odstupanje od pravca. Jednostavno rečeno vidi se da se porastom vrijednosti k mijenja oblik krivulje, za što se može reći da se odstupanje energije mijenja kao kvadratna vrijednost vektora k . Bitno je primijetiti da ako je k jednak nuli da će u oba izraza desni član biti jednak nuli, što znači da će se tada vrijednost aproksimacije "linijom" kao u slici 6 biti istinita, ukoliko vrijednost k nije nula desna strana oba izraza će poprimiti neku vrijednost, a ta vrijednost biti će kao i vrijednost kinetičke energije slobodne čestice koja je dana izrazom [2]:

$$K = \frac{p^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k^2}{2 m} \quad (2.3.6)$$

Razlog zašto se čestica može smatrati slobodnom proizlazi iz kristalnog momenta (*engl. crystal momentum*) elektrona u poluvodičima. Ukoliko se uzme elektron koji se giba pod utjecajem elektrostatskih sila u kristalu (*engl. crystal field*) na njega djeluju interne sile. No, ukoliko se na kristal primjeni vanjsko električno polje, tada su sile koje djeluju na elektron:

$$F = F_{int} + F_{ext} \quad (2.3.7)$$

Odnosno unutarnje sile elektrostatskog polja i vanjske sile električnog polja. Pritom kristalni moment podliježe samo promjeni električnog polja pa se može pisati: [2]

$$\frac{dp}{dt} = F_{ext} \quad (2.3.8)$$

Ukoliko se definira da se elektron giba efektivnom masnom:

$$m_{c,v} = \left(\frac{1}{\hbar^2} \frac{d^2 E}{dk^2} \right)^{-1} \quad (2.3.9)$$

Tada se može reći da se elektron unutar poluvodiča giba kao slobodna čestica. Efektivna masa je zapravo masa koju čestica osjeća unutar poluvodiča, analogija se može povući s teškim trupom za manipuliranje na kopnu i relativno laganim za manipuliranje kada pluta na vodi zbog uzgona. Neke od vrijednosti efektivnih masa za elektron i šupljine dane su tablicom [2]:

Tablica 2. Vrijednosti efektivnih masa za elektron i šupljine [2]

Materijal	Elektron	Šupljina
Si	0,98 m_0	0,49 m_0
Ge	0,08 m_0	0,28 m_0
GaAs	0,07 m_0	0,45 m_0
InP	0,07 m_0	0,64 m_0
GaP	0,82 m_0	0,60 m_0
Pri čemu je $m_0 = 9,1 \times 10^{-31} kg$		

Što je efektivna masa manja, veća je mobilnost elektrona/šupljina.

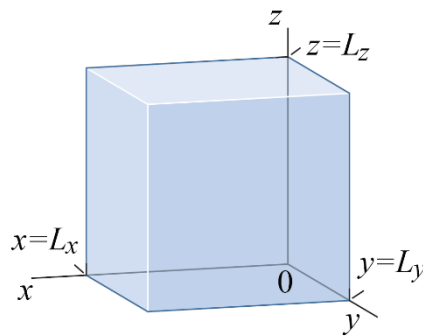
2.4. Gustoća stanja

Broj kvantnih stanja po jediničnom volumenu materijala između k i $k + dk$ je gustoća stanja, također moguće ju je izraziti i u broju stanja po jedinici energije. Slika 7 na kojoj su gornji i donji dio krivulje aproksimirati parabolom po izrazima (2.3.4) i (2.3.5) prikazuje kako se kretanjem po k -osi mijenja energija u valentnom i vodljivom pojasu. Odnosno, za određenu vrijednost k postoji energija E , također za diferencijalni pomak dk mijenja se i energija za vrijednost dE . No vrijednosti koje k može imati nisu bilo koji brojevi, nego su točno definirani cijeli brojevi. Ako se pozove Bloch-ov teorem iz izraza (2.3.1), odnosno valna funkcija povezana s elektronima u poluvodiču koja glasi:

$$\psi_k = u_k(r) e^{i\vec{k}\vec{r}} \quad (2.4.1)$$

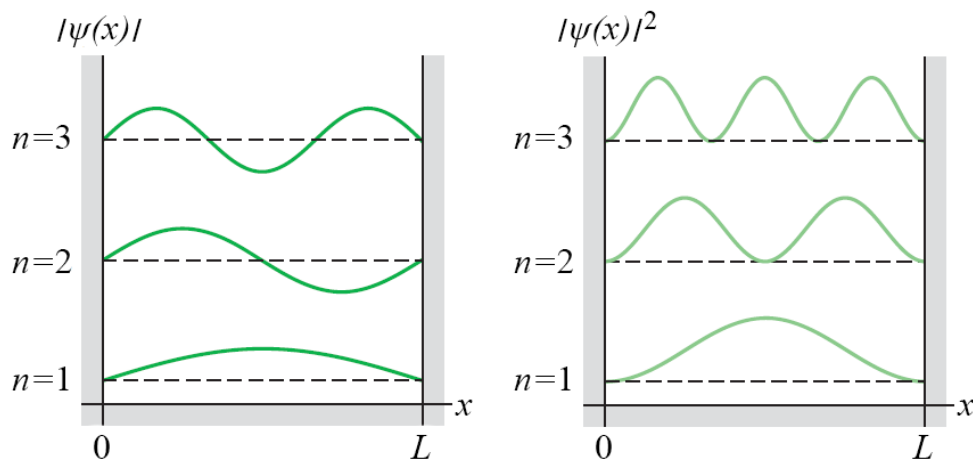
Gdje $u_k(r)$ predstavlja Bloch-ovu periodičnu funkciju, a $e^{i\vec{k}\vec{r}}$ predstavlja ravni val. [2]

Ukoliko se uzme konačni volumen nekog poluvodiča dimenzija $L_x L_y L_z$, prikazan slikom 8,



Slika 8. Pravokutna trodimenzionalna potencijalna jama [3]

tada će vjerojatnost pronalaska elektrona unutar zadanih dimenzija biti $|\psi_k|^2 = 1$, odnosno elektron će biti moguće pronaći unutar zadanih dimenzija, ali ne i izvan, vrijednost $|\psi_k|^2$ će na granicama biti 0. Ako se uzme u obzir da je vrijednost valne funkcije na granicama 0, te da je ona periodična funkcija tada se može zaključiti da će unutar zadanog volumena postojati stacionarni val. Na slici 9 su prikazana tri moda oscilacije, $\lambda = 2L$, $\lambda = L$ i $\lambda = 2L/3$. Svima je zajedničko da je granicama pomak jednak nuli, odnosno sva tri su stacionarni valovi. [2]



Slika 9. Stacionarni valovi i vjerojatnost pronalaska elektrona [3]

Za stacionarni val je uvjet da faza, odnosno put od npr. prema slici 8, $x = 0$ do $x = L_x$ i nazad do $x = 0$ mora biti:

$$2 \vec{k} \vec{r} = N2\pi \quad (2.4.2)$$

U prijevodu, povratno putovanje vala mora biti jednako cijelom broju N množeno sa 2π . Ukoliko se taj uvjet ne zadovolji, neće postojati stacionarni val. Vektor \vec{k} u prostoru prikazanom na slici 10 ima oblik:

$$\vec{k} = \hat{i}k_x + \hat{j}k_y + \hat{k}k_z \quad (2.4.3)$$

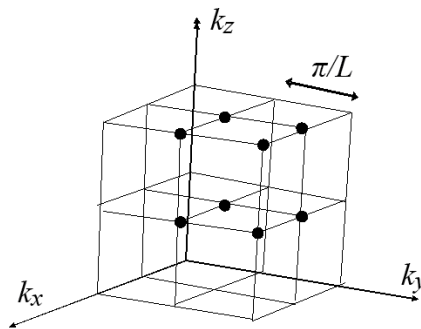
odnosno tri prostorne komponente:

$$\vec{k} = (k_x, k_y, k_z) \quad (2.4.4)$$

Produkt $\vec{k} \vec{r}$ je jednak $k_x x + k_y y + k_z z$ pa se s obzirom na sliku 10 i uvjet (2.4.2) može pisati:

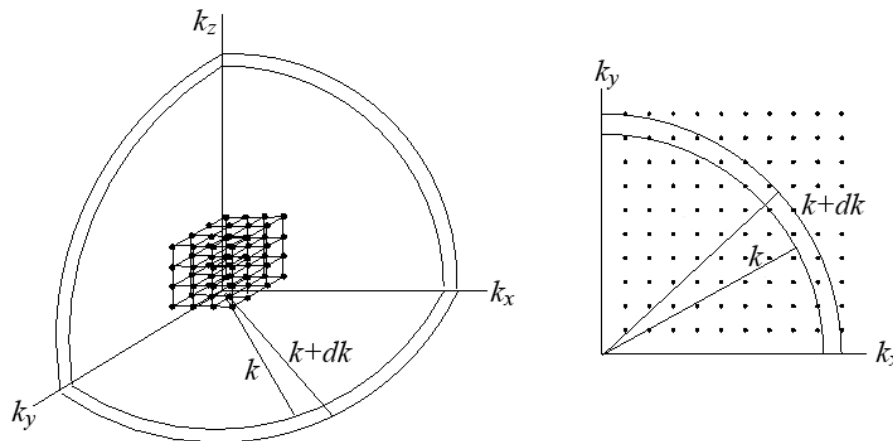
$$\begin{aligned} 2k_x L_x &= m 2\pi \rightarrow k_x = \left(\frac{\pi}{L_x}\right) m \\ 2k_y L_y &= p 2\pi \rightarrow k_y = \left(\frac{\pi}{L_y}\right) p \\ 2k_z L_z &= q 2\pi \rightarrow k_z = \left(\frac{\pi}{L_z}\right) q \\ m, p, q &= 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (2.4.5)$$

Što znači da se svaka od komponenta \vec{k} vektora također sastoji od cijelih brojeva. Ukoliko se pogleda k prostor može se vidjeti da je međusobna udaljenost k vrijednosti iste osi jednaka π/L .



Slika 10. k prostor [2]

Kombinacija vrijednosti k ima jako puno, najmanja vrijednost k po odabranoj osi bi bila $k = 2\pi/\lambda$ pri čemu λ odgovara de Broglie-voj valnoj duljini. Za prvi slučaj sa slike 9, $\lambda=2L$, što daje $k_{min} = \pi/L$, za dimenziju $L = 1 \text{ mm}$, $k_{min} = 10^3 \pi \text{ m}^{-1}$. Najveća vrijednost koju k može imati bi onda odgovarala najmanjoj valnoj duljini koju elektron može imati što je razmak između dvije atomske jezgre, odnosno $2a$. Pri čemu je a , interatomska razmak. Za tipični a veličine 5 \AA , $k_{max} = 2 \times 10^9 \pi \text{ m}^{-1}$. Iz ova dva rezultata je vidljivo da samo na jednoj osi ima milijun vrijednosti k razmaknutim u koracima od π/L . Ukoliko se razmatra cijeli trodimenzionalni prostor postaje jasno koliko kombinacija \vec{k} vektor može imati. Pri računu gustoće stanja u obzir se uzima stacionarni val koji ima smjer nekoj od $+k$ osi i povratni put u nekoj od $-k$ osi, zbog tog razloga dovoljno promatrati samo 1/8 sfere k prostora koju prikazuje slika 11. [2]



Slika 11. 1/8 sfere k prostora [2]

Sa slike se mogu primijetiti elementarni volumeni dimenzija $\left(\frac{\pi}{L_x}\right)\left(\frac{\pi}{L_y}\right)\left(\frac{\pi}{L_z}\right)$. Svaka dozvoljena točka k prostora je u dodiru sa osam susjednih elementarnih volumena, svaki od njih je okupiran s jednim dozvoljenim stanjem k prostora. Konačno, slika daje ideju kako dobiti gustoću stanja. Volumen u k prostoru između k i $k + dk$ (dvije ljuske) potrebno je podijeliti s jednim elementarnim volumenom što će dati broj dozvoljenih stanja koji kada se podjele s jediničnim volumenom daju gustoću stanja. Volumen prostora između k i $k + dk$ je jednak volumenu sfere množen s debljinom dk . [2]

$$N = \frac{1}{8} \cdot \frac{4\pi k^2 dk}{\left(\frac{\pi}{L_x}\right)\left(\frac{\pi}{L_y}\right)\left(\frac{\pi}{L_z}\right)} \cdot 2 \quad (2.4.6)$$

Bitno je napomenuti množitelj 2 na kraju koji čini broj dozvoljenih stanja dvostruko većim, a proizlazi iz spinskog magnetskog kvantnog broja koji može poprimiti samo dvije vrijednosti, $m_s = \pm \frac{1}{2}$. Iz izraza (2.4.6) definicija postaje jasnija, konačno izraz za gustoću stanja u k prostoru glasi:

$$\begin{aligned} \rho(k)dk &= \frac{\pi k^2 dk}{\pi^3} \frac{L_x L_y L_z}{L_x L_y L_z} \\ \rho(k) &= \frac{k^2}{\pi^2} \end{aligned} \quad (2.4.7)$$

Obično je potrebno imati gustoću stanja u energetsom stanju, jer je korisna za daljnji rad. Prema E-k dijagramu se može zaključiti da su gustoće direktno povezane.

$$\rho(E)dE = \rho(k)dk \quad (2.4.8)$$

$$\rho(E) = \frac{k^2}{\pi^2} \cdot \frac{1}{\frac{dE}{dk}} \quad (2.4.9)$$

Potrebno se prisjetiti aproksimacije E-k dijagrama izrazima (2.3.4) i (2.3.5).

$$E = E_c + \frac{\hbar^2 k^2}{2 m_c} / \frac{d}{dt}$$

$$\frac{dE}{dk} = \frac{\hbar^2 2k}{2 m_c}$$

Što kada se ubaci u izraz (2.4.9) daje:

$$\rho_c(E) = \frac{k^2}{\pi^2} \frac{2 m_c}{\hbar^2 2k} \quad (2.4.10)$$

Kako bi se riješilo k , izlučuje se k iz izraza (2.3.4) i uvrštava ga se u (2.4.10).

$$k = (E - E_c)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{2 m_c}{\hbar^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\rho_c(E) = \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{2 m_c}{\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}} (E - E_c)^{\frac{1}{2}} \quad (2.4.11)$$

Konačni izraz daje gustoću stanja u vodljivom pojasu izraženo preko energije. $E - E_c$ se odnosi na pozitivnu razliku, odnosno energija E je iznad energije E_c u E-k dijagramu. Ukoliko nije, nema smisla računati jer tada bi se smatralo da se računa gustoća stanja u zabranjenom pojasu, što se vidi i iz izraza. Analogno vrijedi i za valentni pojas:

$$\rho_v(E) = \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{2 m_v}{\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}} (E_v - E)^{\frac{1}{2}} \quad (2.4.12)$$

Ukoliko se oba izraza prikažu grafički tada će biti vidljivo da je krivulja vodljivog pojasa strmija od krivulje valentnog pojasa. Razlog tome proizlazi iz masa m_c i m_v , odnosno u većini slučajeva je masa šupljina m_v puno veća od mase elektrona m_c . Gustoća stanja daje uvid i omogućava izračun tehničkih informacija kao što je koncentracija nosioca naboja koja je bitna pri izračunu struje. [2]

2.5. Koncentracija nosioca naboja i Fermi-Dirac distribucija

Koncentracija nosioca naboja dana je izrazom:

$$n = \int n(E) dE \quad (2.5.1)$$

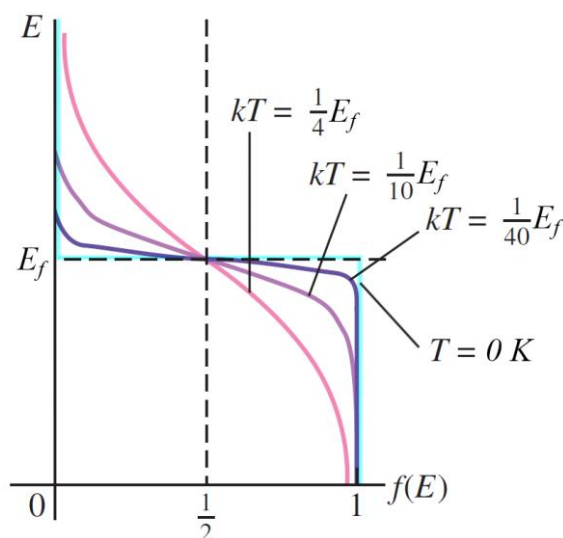
Pri čemu je $n(E)$ gustoća nosioca naboja, gustoću nosioca naboja moguće je dobiti preko prethodnih izračuna gustoća stanja i vjerojatnosti okupacije stanja što je definirano Fermi-Diracovom funkcijom raspodjele. [2]

$$n = \int \rho_c(E) f(E) dE \quad (2.5.2)$$

Pri čemu je Fermi-Diracova funkcija raspodjele:

$$f(E) = \frac{1}{e^{(E-E_f)/kT} + 1} \quad (2.5.3)$$

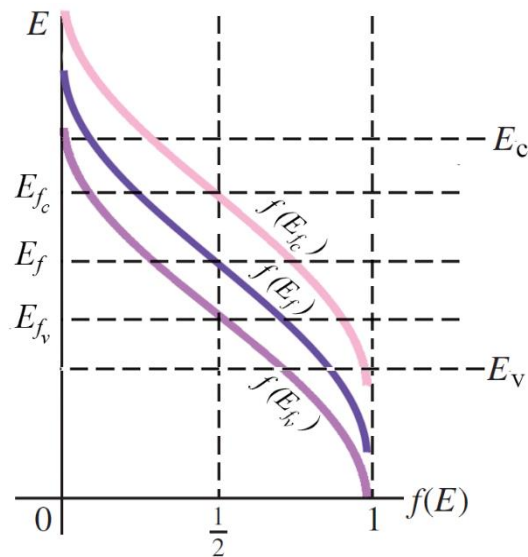
E_f je Fermijeva energija. Ako se promatra energetski pojas može se zaključiti da u njemu ima veliki broj dozvoljenih energetskih stanja, ali neće sva stanja biti okupirana. Vjerojatnost okupacije tih stanja je dana Fermi-Diracovom funkcijom prikazanom na slici 12, koja prikazuje kako se Fermi-Dirac funkcija mijenja sa promjenom temperature. Pri temperaturi od 0 K vjerojatnost okupacije se kreće po pravcu označenom s $T = 0$ K, vidljivo je na spomenutom pravcu vjerojatnost raste od 0 do 1 tek u području što bi kod poluvodiča bilo zabranjeno područje što znači da je vodljivi pojas potpuno prazan. Za sve temperature iznad 0 K kada je $E_f = E$ postoji vjerojatnost okupacije vodljivog pojasa, štoviše vjerojatnost je 1/2. [2]



Slika 12. Fermi-Dirac funkcija s ovisnošću o temperaturi [3]

Ukoliko je $f(E)$ vjerojatnost okupacije slobodnog mjesta, tada je $1 - f(E)$ vjerojatnost da slobodno mjesto nije okupirano. Ukoliko se pogleda funkcija $f(E_f)$ na slici 13 pri kojoj je Fermijeva razina na sredini između vodljivog i valentnog pojasa, može se primijetiti da je mala vjerojatnost $f(E_f)$ okupacije slobodnog mjesta u vodljivom pojasu, ali je pritom vjerojatnost da je mjesto u valentnom pojasu okupirano vrlo velika. Mali odsječak kojeg zatvaraju funkcija $f(E_f)$, vjerojatnost 1 i razina E_C predstavlja vjerojatnost da slobodno mjesto nije okupirano $1 - f(E_f)$. Takav intrinzični poluvodič ne daje previše smisla kod laserskih dioda, ali ukoliko je moguće pomicati razinu Fermijeve energije kako bi se povećala vjerojatnost okupacije željenog energetskog pojasa tada se dobiva uvid tehničke mogućnosti. Ukoliko se Fermijeva razina pomakne prema razini E_C tada će funkcija $f(E_{f_c})$ sa razinom E_C zatvarati vidljivo veću

površinu, što znači da je veća vjerojatnost okupacije slobodnog mjesta u vodljivom pojasu odnosno da je broj slobodnih elektrona relativno velik u odnosu na slučaj $f(E_f)$. [2]



Slika 13. Fermi razina za vodljivi i valentni pojas [2]

Isto tako je vidljivo da je vjerojatnost da slobodno mjesto nije okupirano, odnosno da postoji šupljina u valentnom pojasu $1 - f(E_{f_c})$ vrlo mala. Analogno vrijedi za slučaj kada se Fermijeva razina pomakne prema razini E_v . Tada je vjerojatnost $f(E_{f_v})$ slobodnih elektrona u vodljivom pojasu jako mala, dok je dominantna vjerojatnost šupljina u valentnom pojasu $1 - f(E_{f_v})$. Za intrinzični poluvodič silicija tipična koncentracija nosioca naboja je reda veličine $10^{10}/\text{cm}^3$ dok je gustoća stanja za malu energetska razliku 0,1 eV reda veličine 10^{18} . Razlog zašto je koncentracija nosioca naboja kod intrinzičnog silicija toliko mala se nalazi u maloj vjerojatnosti Fermi-Diracove funkcije koja teži nuli što je vidljivo sa slike 13, funkcije $f(E_f)$ i izraza (2.5.2). Matematički dokaz iz izraza (2.5.2), (2.5.3) i (2.4.11): [2]

$$n = \int_{E_c}^{\infty} \rho_c(E) f(E) dE$$

$$n = \int_{E_c}^{\infty} \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{2m_c}{\hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} (E - E_c)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{e^{(E_c - E_f)/kT} + 1} dE \quad (2.5.4)$$

Za rješavanje potrebno napraviti pomoćne varijable η i η_F

$$dE = d\eta kT; \quad (E - E_c)/kT = \eta; \quad (E_c - E_f)/kT = \eta_F$$

Što bi uvrštavanjem u integral dalo:

$$n = \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{2m_c}{\hbar^2} kT \right)^{\frac{3}{2}} \int_{E_c}^{\infty} \frac{\eta_F^{1/2}}{e^{(\eta - \eta_F)} + 1} d\eta$$

Pri čemu se integral naziva Fermijev polu integral kojeg se procjenjuje numerički i može ga se pisati kao:

$$n = \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{2 m_c}{\hbar^2} kT \right)^{\frac{3}{2}} F_{1/2}(\eta_F) \quad (2.5.5)$$

Jednostavnije rješenje se može dobiti Boltzmanovom aproksimacijom koja se može koristiti kada je $(E - E_f) \gg kT$, tada se izraz za Fermijevu funkciju (2.5.3) može pisati kao:

$$f(E) = e^{-(E-E_f)/kT} \quad (2.5.6)$$

Jer je $e^{(E-E_f)/kT} \gg 1$, tada se rješavanjem (2.5.2) dobiva:

$$n = 2 \left(\frac{m_c kT}{2\pi\hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} e^{(E_f-E_c)/kT} \quad (2.5.7)$$

U navedenom izrazu su svi izrazi konstante osim m_c pa se može pisati:

$$n = N_C e^{(E_f-E_c)/kT} \quad (2.5.8)$$

Gdje je N_C :

$$N_C = 2 \left(\frac{m_c kT}{2\pi\hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} \quad (2.5.9)$$

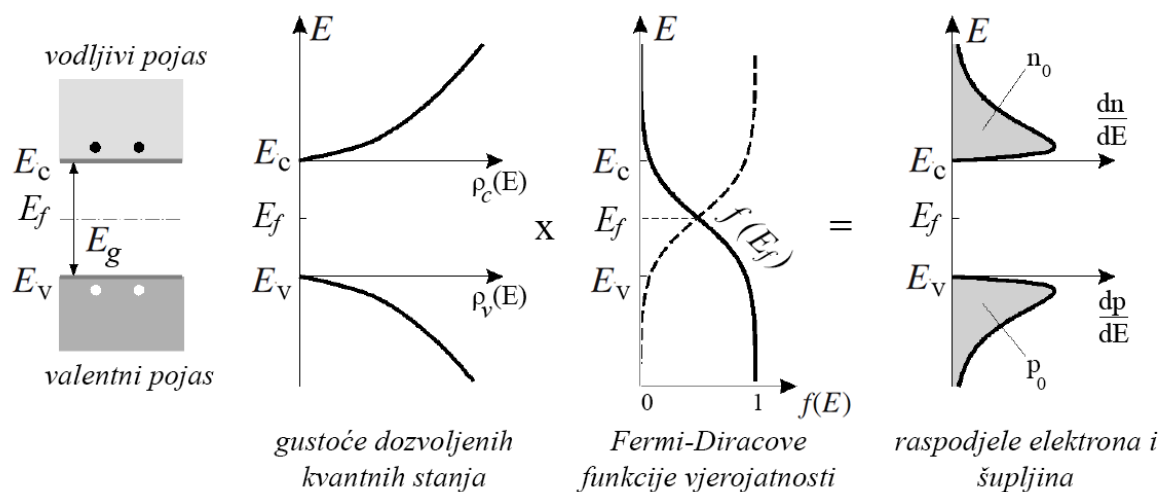
Analogno vrijedi i za valentni pojas:

$$p = 2 \left(\frac{m_v kT}{2\pi\hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} e^{(E_v-E_f)/kT} \quad (2.5.10)$$

$$N_v = 2 \left(\frac{m_v kT}{2\pi\hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} \quad (2.5.11)$$

$$p = N_v e^{(E_v-E_f)/kT} \quad (2.5.12)$$

Grafički prikaz koncentracije nosioca naboja za intrinzični poluvodič dan je slikom 14.



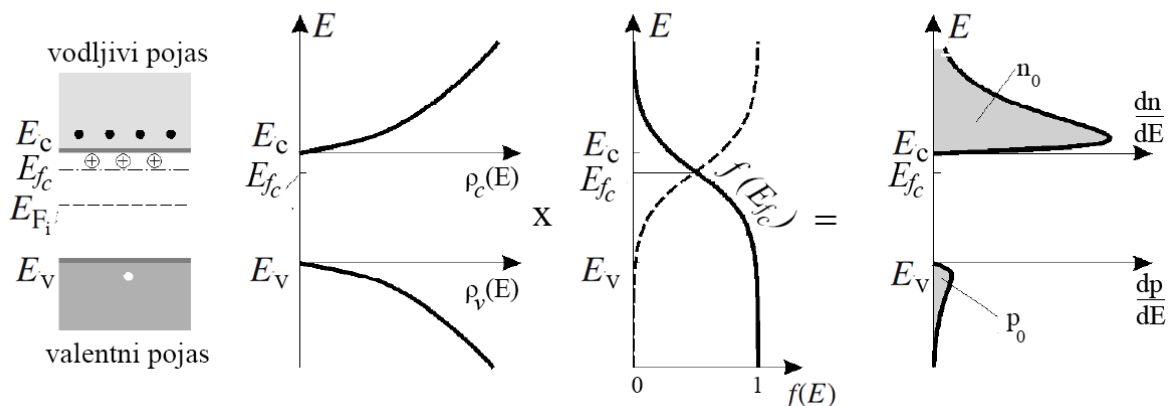
Slika 14. Grafički prikaz koncentracije elektrona i šupljina za intrinzični poluvodič [5]

Grafički je prikazan produkt integrala iz izraza (2.5.13) i (2.5.14) za intrinzični poluvodič.

$$n = \int n(E)dE = \int \rho(E)f(E)dE \quad (2.5.13)$$

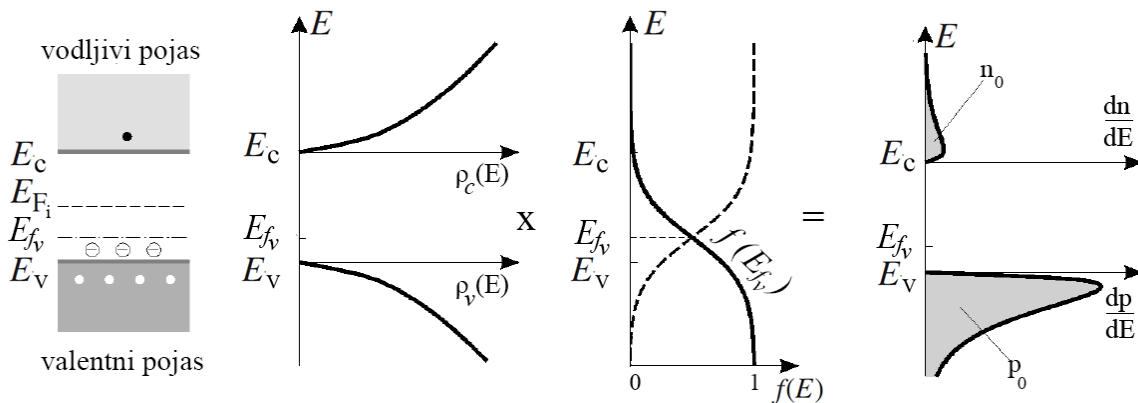
$$p = \int p(E)dE = \int \rho(E)[1 - f(E)]dE \quad (2.5.14)$$

Sa slike je vidljivo je da je broj šupljina jednak broju elektrona, to odgovara izrazima (2.5.13) i (2.5.14) koji za n i p koncentraciju koristi istu gustoću stanja, ali i istu vjerojatnost. Vjerojatnost okupacije stanja u vodljivom pojasu dana je Fermi-Diracovom funkcijom $f(E)$, dok je vjerojatnost slobodnog stanja u valentnom pojasu iste veličine $[1 - f(E)]$. Prikaz gustoće dozvoljenih kvantnih stanja kada se množi sa Fermi-Diracovom funkcijom vjerojatnosti daje jednaku raspodjelu elektrona i šupljina u valentnom i vodljivom pojasu što je također očito iz površina ispod krivulja $n(E)$ i $p(E)$. Za prethodno spomenuto pomicanje Fermijeve razine prema vodljivom pojasu, potrebno je dopirati poluvodič određenim elementima (poglavlje 2.6.2) kako bi se dobio n-tip. Slika 15 prikazuje produkt integrala iz izraza (2.5.2) i konačnu raspodjelu elektrona i šupljina: [2]



Slika 15. Grafički prikaz koncentracije elektrona i šupljina za n-tip poluvodiča [5]

Vidljivo je da za istu gustoću stanja, Fermi-Diracova distribucija se podiže prema vodljivom pojasu, pritom veliki broj gustoće stanja množen sa većom vjerojatnošću okupiranog stanja nego na slici 14 daje veću koncentraciju elektrona u vodljivom pojasu. Zbog pomaknute Fermijeve razine prema vodljivom pojasu, može se primijetiti kako je pala vjerojatnost da postoji slobodno stanje za okupaciju u valentnom pojasu, odnosno većina stanja je okupirana. Analogno se može razmotriti za p-tip poluvodiča prikazan slikom 16. [2]



Slika 16. Grafički prikaz koncentracije elektrona i šupljina za n-tip poluvodiča [5]

Kod p-tipa poluvodiča Fermi-Diracova distribucija se spušta prema valentnom pojasu, što množeći sa gustoćom stanja daje veliku koncentraciju slobodnih mjesta za okupaciju u valentnom pojasu. Iz izraza (2.5.8) i (2.5.12) se može pisati:

$$pn = N_C N_V e^{(-E_g)/kT} \quad (2.5.15)$$

Gdje su N_C i N_V dani izrazima (2.5.9) i (2.5.11). Iz izraza (2.5.15) se može uočiti da ne ovisi o E_f što znači da nije bitno radi li se o p-tipu, n-tipu ili intrinzičnom poluvodiču, uvijek će vrijediti $np = n_i^2$ u slučaju Boltzmanove aproksimacije. Za intrinzični poluvodič vrijedi $n = p = n_i$ pa vrijedi:

$$N_V e^{(E_V - E_f)/kT} = N_C e^{(E_f - E_C)/kT}$$

Rješavanjem se dobiva izraz za poziciju Fermi razine:

$$E_{fi} = \frac{E_C + E_V}{2} + \frac{3}{4} kT \ln \left(\frac{m_v}{m_c} \right) \quad (2.5.16)$$

Iz izraza (2.5.16) se vidi da je Fermi razina točno na sredini samo u slučaju kada bi $m_v = m_c$, ukoliko je njihov odnos višestruko veći cijeli produkt ne bi prelazio vrijednost od 10^{-2} eV pa se inženjerski može izjaviti da je Fermi razina kod intrinzičnog poluvodiča na sredini. Kod p-tipa i n-tipa izrazi za Fermi razinu se mogu dobiti iz izraza (2.5.8) i (2.5.12) pa se nakon rješavanja dobiva:

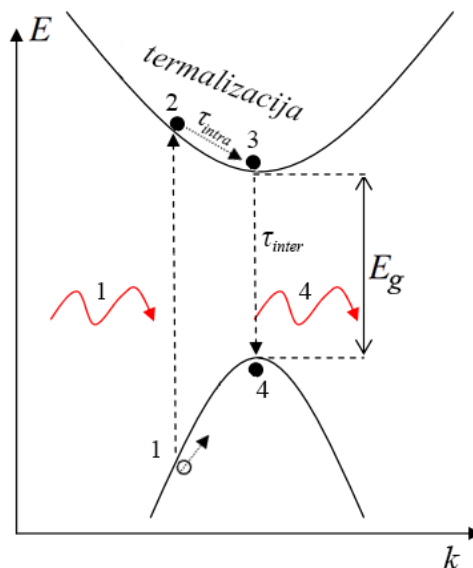
$$E_{f_c} = E_C + kT \ln \left(\frac{n}{N_C} \right) \quad (2.5.17)$$

$$E_{f_v} = E_V - kT \ln \left(\frac{p}{N_V} \right) \quad (2.5.18)$$

Bitno je napomenuti da je broj N_C veći od n pa će logaritam biti negativan, odnosno E_{f_c} će biti manji od E_C , obrnuto se može reći za E_{f_v} i E_V . Ukoliko se ne može računati po Boltzmanovoj

aproksimaciji onda se mora posegnuti za numeričkim rješavanjem Fermijevog poluintegrala. [2]

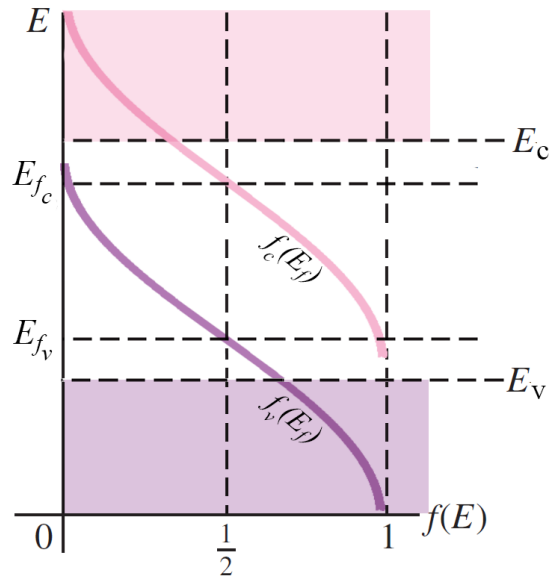
Spajanjem p-tipa i n-tip poluvodiča dobiva se pn-spoj koji istovremeno ima dvije razine Fermijeve energije, kao bi se opisala vjerojatnost okupacije u vodljivom i valentnom pojasu pn-spoja uvode se kvazi Fermijeve razine (*engl. quasi fermi levels*) u kvazi ravnoteži. U termalnoj ravnoteži kada se razmatra samo dovodjenje toplinske energije postoji stacionarno stanje koje je definirano kroz prosječan broj slobodnih mjesta u valentnom pojasu i prosječan broj okupiranih mjesta u vodljivom pojasu. To stacionarno stanje ne znači da je sustav stao u vremenu, radi se o dinamičkoj ravnoteži u kojoj ima veliki broj rekombinacija i prijelaza elektrona u vodljivi pojas, ali se može dobiti prosječno stacionarno stanje zbog ravnoteže sustava. Ukoliko neki elektron prijeđe u stanje više energije vodljivog pojasa 1-2 na slici 17 tada će uslijed termalizacije doći u stanje niže energije 2-3 u vremenu τ_{intra} . [2]



Slika 17. Dinamika apsorpcije, radijacije i termalizacija [1]

Termalizacija znači da se energija predaje fononima, elektron se nalazi u stanju 3, te nakon određenog vremena τ_{inter} prelazi u stanje 4 gdje se spoji s šupljinom. Šupljina koja je nastala kada je elektron napustio atom (stanje 1) ima visoku energiju, ubrzo je popuni elektron iz susjednog atoma, te se tako ona slijedom događaja kreće prema samom vrhu valentnog pojasa, odnosno prema stanju najniže energije. Tipično vrijeme termalizacije τ_{intra} je reda veličine 10^{-12} s do 10^{-19} s (*engl.intra band recombination time* ili *intra band carrier time*). Vrijeme tranzicije između vodljivog i valentnog pojasa τ_{inter} je reda veličina 10^{-8} s do 10^{-9} s. Ako se sa danim vremenima zamisli dinamika ovog procesa, mentalna slika će izgledati kao dva rezervoara pri čemu će voda od donjeg do gornjeg dizati pumpom, a iz gornjeg u donji će voda kapati kroz tanke rupice. Kroz neko vrijeme će sustav doći u stanje ravnoteže, ali ukoliko se

postavi još jedna pumpa tada će se stvoriti novo stanje ravnoteže. Ako se s istom idejom dodatne pumpe vrati na kvazi ravnotežu u poluvodiču, dolazi se do zaključka da se s jednom Fermi funkcijom ne mogu opisati termalna ravnoteža i dodatni poremećaj u sustavu koji stvara novo stanje ravnoteže. S obzirom na veliki broj elektrona u vodljivom pojasu i istovremeno velik broj šupljina u valentnom pojasu, pokušaj opisivanja stanja s jednom Fermi funkcijom bi završilo s vjerojatnosti okupacije većom od 1 za oba pojasa. Slikom 18 su prikazane dvije Fermi-Diracove funkcije pomoću kojih se opisuje koncentracija nosioca. [2]



Slika 18. Fermi-Diracove funkcije u kvazi ravnoteži [2]

Kada je jedan materijal u termičkoj ravnoteži moguće ga je opisati jednom Fermi funkcijom, ali kada postoji dodani poremećaj u sustavu (npr. radijacija, aktivna regija pn-spoja itd.) tada je materijal u kvazi ravnoteži i opisuje ga se s dvije Fermi funkcije. Na slici 18. funkcija koja opisuje stanje u vodljivom pojasu glasi:

$$f_c(E) = \frac{1}{e^{(E-E_{f_c})/kT} + 1} \quad (2.5.19)$$

Odsječak koji zatvaraju os E energetska razina E_c i funkcija daje vjerojatnost elektrona u vodljivom pojasu. Analogno vrijedi za valentni pojas, a funkcija glasi:

$$f_v(E) = \frac{1}{e^{(E-E_{f_v})/kT} + 1} \quad (2.5.20)$$

Za Boltzmanovu aproksimaciju u termičkoj ravnoteži vrijedi izraz (2.5.8) i (2.5.12) dok za kvazi ravnotežu vrijedi isto samo s promjenom oznake Fermijeve energije.

$$n = N_C e^{(E_{f_c}-E_C)/kT} \quad (2.5.21)$$

$$p = N_V e^{(E_V-E_{f_v})/kT} \quad (2.5.22)$$

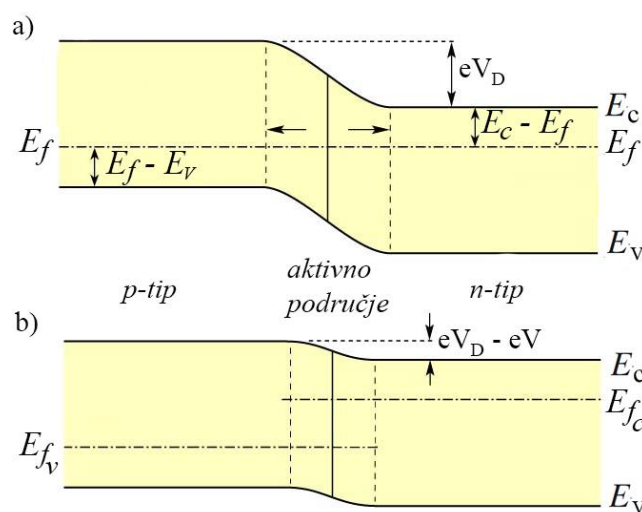
Rješavanjem kao za izraz (2.5.15) dobiva se:

$$pn = N_C N_V e^{(-E_g)/kT} e^{(E_{fc} - E_{fv})/kT}$$

Uz uvjet $np = n_i^2$ i izraz (2.5.15) dobiva se:

$$pn = n_i^2 e^{(E_{fc} - E_{fv})/kT} \quad (2.5.23)$$

U termičkoj ravnoteži postoji jedna Fermi razina pa je pri rješavanju izraza (2.5.15) njihova razlika jednaka nuli, ali u kvazi ravnoteži su dvije Fermi razine pa je $E_{fc} - E_{fv} > 0$, u tom slučaju je iz izraza jasno da je $np > n_i^2$, ako je $E_{fc} - E_{fv} < 0$, tada je $np < n_i^2$. Primjer se može dati slikom 19 koja prikazuje energetske dijagrame PN-spoja koji ujedino i opisuju dinamiku cijelog procesa.[2]



Slika 19. Energetski dijagram PN-spoja [6]

Na slici 19. u slučaju a) postoji termička ravnoteža te se stanje da opisati s jednom Fermijevom funkcijom. Na energetske razine E_C na strani n-tipa postoji velik broj elektrona, a na razini E_V p-tipa postoji veliki broj šupljina. U slučaju b) kada se propusno polarizira dioda, odnosno p-tip spoji na + izvora, a n-tip na – izvora, desna strana spoja (n-tip) se podiže gore u odnosu na lijevu stranu (p-tip), jer elektroni tada imaju veću potencijalnu energiju. Kao rezultat Fermi razina na lijevoj strani ostaje na istoj razini kao u slučaju a), a Fermi razina na desnoj strani se podiže, zbog razdvajanja Fermi razine uvode se oznake za kvazi ravnotežu E_{fc} i E_{fv} . Zbog smanjenje razlike potencijala elektroni sa E_C razine n-tipa se „prelijevaju“ u aktivno područje, isto se događa na razini E_V gdje se šupljine p-tipa također „prelijevaju“ u aktivno područje. Iz slučaja b) je vidljivo da je razlika $E_{fc} - E_{fv} > 0$ pa je $np > n_i^2$. Konačno se događa da u jednoj točki imaginarnog x osi postoji veliki broj šupljina i veliki broj elektrona, tada počinje rekombinacija. Kada je dioda nepropusno polarizirana tada vrijedi $E_{fc} - E_{fv} < 0$ i $np < n_i^2$. [2]

2.6. Intrinzični i ekstrinzični poluvodiči

Potrebno se prisjetiti da svaka energetska razina iznad najvišeg valentnog pojasa je vodljivi pojas. Dijagram energetskih razina indicira da se poluvodiči ponašaju drugačije od vodiča i izolatora. Također postoje i valentni pojasevi (unutarnji) ispod promatranog valentnog pojasa, no ovdje je tema samo vanjski valentni pojas, odnosno onaj koji je u interakciji s vodljivim pojasom. Ukoliko su elektroni prisutni u vodljivom pojasu onda su to slobodni elektroni. Kada se dovede određena količina energije elektronu iz valentnog pojasa on preskoči u vodljivi pojas i postaje slobodni elektron. Razlika koju elektron preskoči zapravo definira radi li se o izolatoru, vodiču ili poluvodiču.

Neka se uzme primjer slijedećim elementima: Natrij (*Na*, *engl. Sodium*), Silicij (*Si*, *engl. Silicon*) i Klor (*Cl*, *engl. Chlorine*), te se razmatra kristal koji ima raspored atoma prema nekom uzorku, odnosno periodično. Elektronska konfiguracija natrija je takva da ima atomski broj 11, odnosno strukturu $1s^2 2s^2 2p^6 3s^1$. Ukoliko ga se razmatra u nekoj kristalnoj rešetci tada će vanjske ljuske biti u interakciji sa susjednima, između atoma će se pojaviti mala repulzivna sila koja će biti dovoljna da izbacij jedan (jedini) elektron iz vanjske ljuske i on postane slobodan elektron čime su ispunjeni uvjeti vodiča. Za izbacivanje elektrona iz valentnog u vodljiv pojas nije bila potrebna nikakva eksterna sila što znači da je energetski procjep bio približno jednak nuli. Kod nekih metala vodljivi i valentni pojas se preklapaju što u dijagramu energetskih razina izgleda tako da je E_V iznad razine E_C . Kod poluvodiča energetski procjep je tipično manji od 3 eV što znači da je potrebna određena sila da elektron pređe iz valentnog u vodljivi pojas. Ukoliko se Silicij razmatra u kristalnoj rešetci tada će njegove vanjske ljuske također biti u interakciji sa susjednima, ali za razliku od natrija, kod silicija je u vanjskoj rešetki četiri elektrona ($1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^2$) te slabe repulzivne sile nisu dovoljne da izbace elektron iz valentne ljuske. Iako je atomu silicija težnja izbaciti sva četiri elektrona iz vanjske ljuske ili prihvatiti četiri dodatna kako bi bio stabilan, to je moguće samo uz vanjsku silu (tipično manja od 3 eV). Ako se za isti primjer razmatra kristalna rešetka klora, koji u vanjskoj ljusci ima sedam elektrona tada postaje jasno kako bi atom postao stabilan treba izbaciti sedam elektrona ili prihvatiti jedan. Za izbacivanje elektrona iz valentne ljuske treba puno veća energija nego za Silicij, s obzirom da ta energija prelazi 3 eV, Klor se klasificira je izolator [2][6].

2.6.1. *Intrinzična svojstva poluvodiča*

U prirodi su nađena samo dva elementarna poluvodiča, Silicij i Germanij. Intrinzični poluvodič je čisti poluvodič, koji nema dodatnih primjesa. Ako se uzme Silicij u kristalnoj rešetki on će težiti stabilnosti, što znači da će kovalentnom vezom prihvatiti četiri elektrona od susjednih atoma silicija, odnosno sa svakim susjednim atomom će dijeliti po jedan elektron kako bi postao stabilan. Kada se kovalentnim vezama atomi silicija spoje, dobije se stabilna struktura od osam elektrona u valentnoj ljusci, bez slobodnih elektrona što znači da se u tom slučaju Silicij ponaša kao izolator. Ukoliko se dovodi termalna energija, kovalentne veze počinju pucati i elektroni se počinju oslobađati, odnosno pojavljuju se slobodni elektroni, prazna mjesta u uništenim kovalentnim vezama postaju šupljine. Novonastale šupljine nisu ništa drugo nego imaginarna oznaka nedostatka elektrona, odnosno svako prazno mjesto nastalo odlaskom elektrona se naziva šupljina, te kao indikacija suprotnosti predstavljaju pozitivan naboj. Kao što je prethodno navedeno, na temperaturi od 0 K valentni pojas će biti potpuno nastanjen dok će vodljivi pojas biti potpuno prazan, rastom temperature elektroni djelomično prelaze (preskaču) u vodljivi pojas, a iza sebe ostavljaju šupljine u valentnom pojasu, što se može zapisati kao $p = n = n_i$ ili $n_p = n_n = n_i$ ili $n_e = n_h = n_i$, pri čemu n_i označava intrinzičnu koncentraciju nositelja naboja (*engl. intrinsic carrier concentration*), dok indeks e predstavlja elektrone (*engl. electron*), a h šupljine (*engl. holes*). Odnosno broj elektrona u vodljivom pojasu je isti kao i broj šupljina u valentnom pojasu. Takva tvrdnja je dosta logična jer iza svakog elektrona koji je izašao iz kovalentne veze ostaje šupljina, što indicira na to da je broj šupljina isti kao i broj slobodnih elektrona. Ukupna struja kod intrinzičnog poluvodiča se sastoji od struje elektrona i struje šupljina [2][5][6]:

$$I = I_p + I_N \quad (2.6.1.1)$$

pri čemu je I_N struja elektrona koja je uzrokovana strujanjem slobodnih elektrona, a I_p je struja koja nastaje zbog popunjavanja nastalih šupljina s ostalim elektronima valentnog pojasa, te istovremeno nastajanjem novih. Odnosno ukoliko elektron iz valentnog pojasa popuni šupljinu koja je ostala zbog odlaska nekog elektrona u vodljivi pojas, tada dolazi do efekta pomicanja šupljina. Kada bi se misaono spriječio svaki slijedeći odlazak elektrona iz valentnog u vodljivi pojas, tada bi se u vodljivom pojasu nalazile šupljine koje bi elektroni konstantno popunjavali, ali zbog deficita elektrona u valentnom pojasu nikad sve šupljine ne bi mogle biti popunjene. S obzirom da se šupljine stalno popunjavanju, ali istovremeno nastaju nove može se pričati o pomicanju šupljina odnosno struji šupljina, I_p . Fizikalno gledano obje struje su struje elektrona,

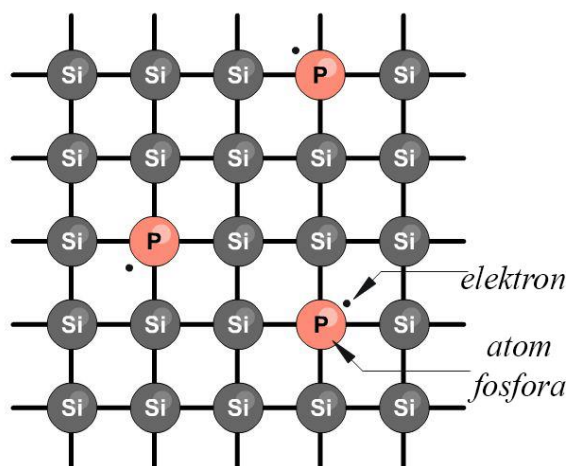
ali zbog protoka elektrona u vodljivom i u valentnom pojasu uvodi se oznaka struje šupljina kako bi se bez zabune kvantificirao protok elektrona u valentnom pojasu [5][6].

2.6.2. Ekstrinzična svojstva poluvodiča

Ekstrinzične poluvodiče čine poluvodički materijali kojim se dodaje dodatnog materijala često zvanog dopant u količinama od par komada po milionu (*ppm, engl. parts per milion*), a kod opto-elektroničkih uređaja često je dopiranje i do 30% s ciljem povećanja vodljivosti. Odgovarajući dopant je onaj koji ima sličnu veličinu atoma kao i poluvodič kako bi minimalno narušio kristalnu rešetku poluvodiča. Ako se pogleda tablica periodnog sustava elemenata, Silicij i Germanij se nalaze u grupi 4 periodnog sustava, što znači da se dopanti nalaze pokraj što bi odgovaralo grupi 3 i grupi 5. Ukoliko se poluvodič dopira sa elementom grupe 5 tada on postaje n-tip poluvodiča, a ukoliko se dopira sa elementom grupe 3 tada postaje p-tip poluvodiča [2].

2.6.2.1. N-tip poluvodiča

U n-tipu poluvodiča se nalazi dopant iz grupe 5 s pet valentnih elektrona, ukoliko se uzme Fosfor (*P, engl. Phosphorus*) strukture $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^3$ te se dopira u kristalnu rešetku silicija koji ima četiri valentna elektrona, tada će četiri elektrona fosfora biti vezana kovalentnom vezom s susjednim elektronima silicija, a jedan elektron će ostati bez kovalentne veze kao što prikazuje slika 20, te će ga kao takvog biti relativno lako izbaciti iz ljuske. [2]



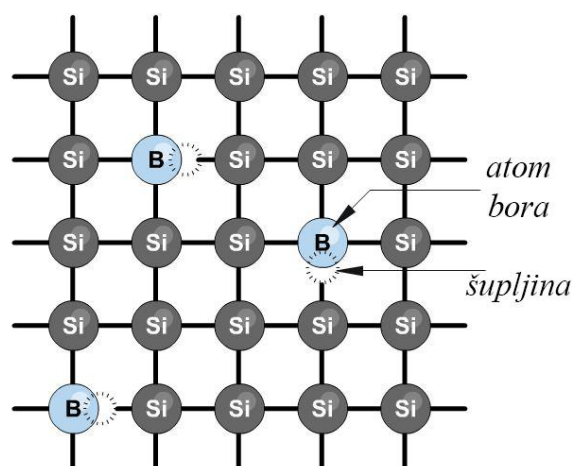
Slika 20. Dopiranje fosfora u kristalnu rešetku silicija [7]

Dovođenjem energije prvi elektron koji će se osloboditi i postati slobodni elektron će biti upravo jedini preostali bez kovalentne veze. S obzirom da su svi atomi silicija stabilni zbog nastalih kovalentnih veza, može se zaključiti da je u kristalnoj rešetci „višak“ elektrona što indicira da je broj elektrona u N-tipu poluvodiča veći od broja šupljina. Stoga se može slobodno

reći da su u N-tipu poluvodiča većinski nositelji naboja slobodni elektroni, a manji šupljine. Ukoliko se razmatra dijagram energetske razine za poluvodič dopiran elementom grupe 5, pravilno bi bilo označiti još jednu energetska razinu E_d neposredno ispod najniže energije vodljivog pojasa. Dodatna razina nosi naziv energetska razina donora (*engl. donor energy level*) te se nalazi približno 0.1 eV ispod vodljivog pojasa. Da bi elektroni došli na tu razinu potrebna je izuzetno mala količina energije koja je ekvivalent energije koju tvar prima na sobnoj temperaturi, odnosno ukoliko se dopirani element nalazi na sobnoj temperaturi, energetska razina E_d će biti nastanjena. [2]

2.6.2.2. P-tip poluvodiča

U p-tipu poluvodiča nalazi se dopant iz grupe 3 s tri valentnih elektrona, ukoliko se uzme Bor (*B, engl. Boron*) strukture $1s^2 2s^2 2p^1$ te se dopira u kristalnu rešetku silicija koji ima četiri valentna elektrona jasno je da svi susjedni atomi oko aluminijske neće biti stabilni jer će jednom atomu silicija faliti jedan elektron, odnosno jedno mjesto će biti slobodno što se označuje kao šupljina, odnosno odsutnost elektrona što je vidljivo na slici 21. [2]

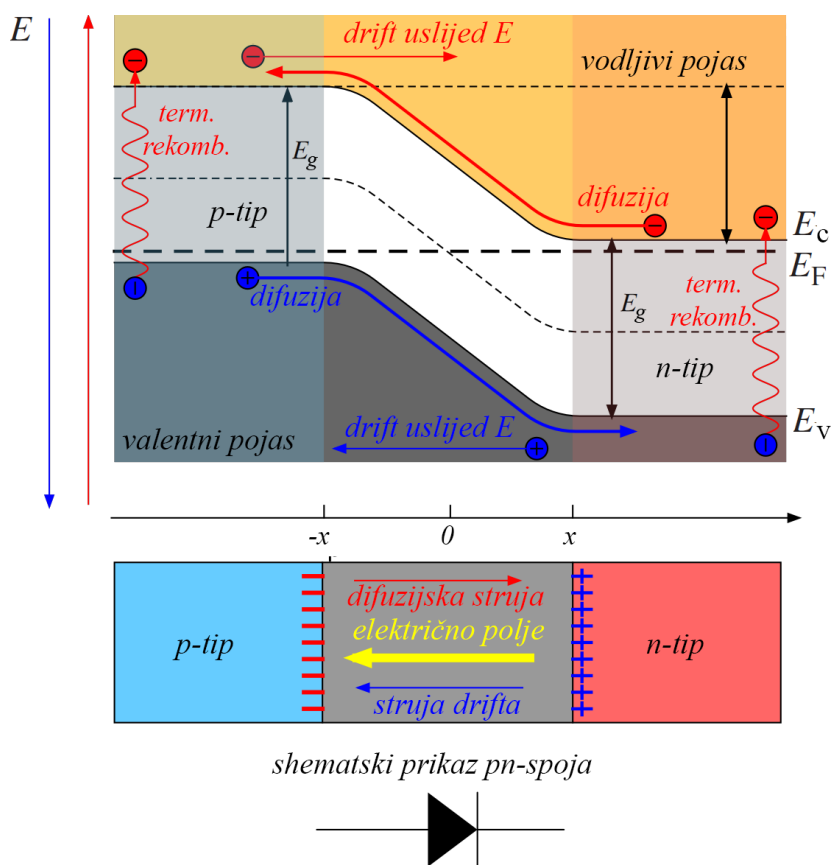


Slika 21. Dopiranje bora u kristalnu rešetku silicija [7]

Suprotno n-tipu, u p-tipu poluvodiča je „manjak“ elektrona što indicira da je broj šupljina uvijek veći od broja slobodnih elektrona. Stoga se može slobodno reći da su u p-tipu poluvodiča većinski nositelji naboja šupljine, a manji slobodni elektroni. Također u dijagramu energetske razine za poluvodič dopiran elementom grupe 3 može se označiti dodatna energetska razina E_a približno 0,1 do 0,5 eV iznad najviše energije valentnog pojasa koja se zove energetska razina akceptora (*engl. acceptor energy level*). Na energetska razinu E_a uz malu količinu dovedene energije nastanjuju se elektroni koji iza sebe ostavljaju dodatne šupljine [2].

2.7. PN-spoj

Poznato je da u n-tipu poluvodiča prevladava koncentracija slobodnih elektrona, dok u p-tipu prevladavaju šupljine. Pri spajanju p i n tipa poluvodiča dolazi do difuzije (*engl. diffusion*) odnosno do kretanja slobodnih elektrona iz područja veće koncentracije u područja manje koncentracije (p-tip) prikazano slikom 22, isto se događa i sa šupljinama koje se kreću u smjeru n-tipa poluvodiča. Odmah po prijelazu elektrona sa n na p stranu elektron nailazi na velik broj šupljina što daje veliku vjerojatnost rekombinacije. Elektron se nakon nekog kratkog puta po ulasku u p stranu (difuzijske duljine) rekombinira tj. „nestaje“, nije više slobodan. [2][8]



Slika 22. Dinamika pn spoja [9]

Pri rekombinaciji „nestaje“ i jedna šupljina na p strani s kojom se elektron rekombinirao. Na p strani u blizini dodirne površine značajno se smanji koncentracija šupljina aproksimacijski se može uzeti da pada na nulu, tj. da tamo više niti nema šupljina, jer nadolazeći elektroni iz n strane “popunjavaju” sve šupljine u blizini kontakta sa n stranom, pa se tada u tom području p strane javlja manjak pozitivnog naboja, posljedica difuzije je da u blizini kontakta sa n stranom na p strani ostaju samo nepokretni negativni akceptorski ioni. Na isti način, odmah po prijelazu šupljine sa p na n stranu šupljina nailazi na velik broj sl. elektrona što daje veliku vjerojatnost rekombinacije. Šupljina se nakon nekog kratkog puta po ulasku u n stranu isto rekombinira, kao

i odgovarajući slobodni elektron na n strani. Na n strani u blizini dodirne površine nema slobodnih nositelja naboja jer nadolazeće šupljine vežu sve slobodne elektrone u blizini kontakta sa p stranom, pa se tada u tom području javlja manjak sl. elektrona koji su prije postojali. U blizini kontakta sa p stranom na n strani ostaju samo nepokretni pozitivni donorski ioni. Matematički gledano ako se pretpostavi da se koncentracija mijenja samo u smjeru osi x, gustoća struje zbog difuzije je proporcionalna negativnom gradijentu koncentracije (zbog negativne promjene koncentracije) u smjeru osi x. Difuzijska struja će također biti proporcionalna sposobnosti čestice da difundira tj. konstanti difuzije D. Stoga, difuzijska struja elektrona, nastala kao posljedica prostorne promjene koncentracije (grad n) [2][5][8] :

$$J_{DN} = -q_e D_N (-grad n) = -q_e D_N \left(-\frac{\partial n}{\partial x} \right) = q_e D_N \frac{\partial n}{\partial x} \quad (2.7.1)$$

i analogno tome, za šupljine:

$$J_{DP} = q_e D_P (-grad p) = -q_e D_P \frac{\partial p}{\partial x} \quad (2.7.2)$$

Iz prethodnih jednačbi slijedi ukupna struja difuzije:

$$J_D = q_e \left(D_n \frac{\partial n}{\partial x} - D_p \frac{\partial p}{\partial x} \right) \quad (2.7.3)$$

Kao posljedica difuznog kretanja većinskih naboja na suprotnu stranu, javlja se usko područje oko kontakta p i n strane u kojima nema pokretnih naboja, već ostaju samo nepokretni ioni donora na n strani tj. akceptora na p strani. Područje u kojem “fali” pokretnih naboja je siromašno, odnosno naziva se osiromašeno područje (*engl. depletion region*) s obzirom da su tema ovog rada laserske diode čiji se rad temelji na tom području koristi će se naziv aktivno područje (*engl. active region*). Na početku je aktivno područje vrlo usko, no kako se difuzija nastavlja, širina aktivnog područja raste. Međutim, između sloja pozitivnih donorskih iona na n strani i negativnih akceptorskih iona na p strani se javlja električno polje pri čemu je polje kontakta orijentirano je od n prema p strani. Polje kontakta djeluje na način se suprotstavlja difuznom kretanju elektrona u p stranu i šupljina u n stranu. Drugim riječima, polje kontakta sada počinje umanjivati difuzno kretanje (nositelji naboja sa nižom kinetičkom energijom više se ne mogu probiti kroz polje na drugu stranu). Međutim, difuzija se i dalje nastavlja samo što je difuzna struja sada zbog polja kontakta manja, jer manje većinskih nositelja uspijeva savladati polje kontakta. Sa nastavkom difuzije, još malo se proširi aktivno područje odnosno poraste polje kontakta. Dok postoji ikakvo difuzno kretanje, polje kontakta koje sprječava difuziju, raste. Na kraju polje kontakta toliko poraste da difuzno kretanje gotovo potpuno prestane što znači da je uspostavljeno je ravnotežno stanje. Širenje aktivnog područja je prestalo onog trenutka kada je razlika potencijala p i n dijela postala takva da više ne omogućuje širenje

aktivnog područja, ta razlika se naziva potencijal barijere (*engl. barrier potencial*) ili visina barijere (*engl. barrier height*). No i dalje vrlo mala difuzija ostaje koja točno poništava driftno (*engl. drift*) gibanje manjinskih nositelja. Šupljine koje su manjinski nositelji na n-strani se kaotično (termalno) kreću bez prisile prelaska na p stranu jer je tamo veća koncentracija šupljina. Dakle, u n strani šupljina se ne giba difuzno, samo termalno. No, kada šupljina u n strani upadne u aktivno područje na n strani, na nju počinje djelovati polje kontakta (usmjereno od n ka p strani). Polje će šupljinu ubrzavati i prebaciti na p stranu, odnosno javlja se usmjereno, driftno gibanje manjinskih nositelja kao posljedica polja kontakta što se naziva driftna struja. Odmah po dolasku ove nove šupljine u p stranu iz n strane, gdje je bila manjinski nositelj, malo se povećala koncentracija većinskih nositelja u p strani, pa se difuzija malo poveća. Takvo stanje omogućuje nekoj šupljini da se može difuzno vratiti iz p u n stranu gdje se rekombinira. U ravnotežnom stanju dakle, postoji mala difuzna struja koja točno poništava driftnu struju manjinskih nositelja koja je vrlo mala jer su koncentracije manjinskih nositelja vrlo male. Ukupna gustoća struje uslijed struja i drifta i difuzije [2][5][8] :

$$J = J_d + J_D \quad (2.7.4)$$

Pri čemu je ukupna gustoća struje za šupljine:

$$J_p = \sigma_p E - q_e D_p \frac{\partial p}{\partial x} = q_e p \mu_p E - q_e D_p \frac{\partial p}{\partial x} = q_e \left(p \mu_p E - D_p \frac{\partial p}{\partial x} \right) \quad (2.7.5)$$

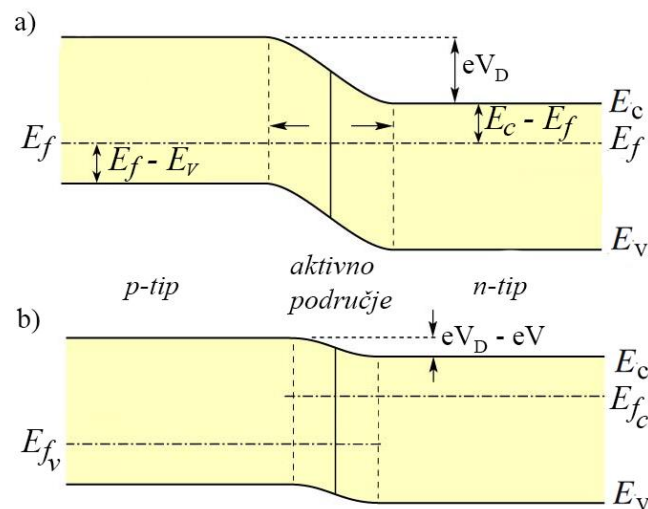
A za elektrone:

$$J_n = \sigma_n E + q_e D_n \frac{\partial n}{\partial x} = q_e n \mu_n E + q_e D_n \frac{\partial n}{\partial x} = q_e \left(n \mu_n E + D_n \frac{\partial n}{\partial x} \right) \quad (2.7.6)$$

Vidljivo je da se za pozitivne naboje gustoće struje međusobno odbijaju, a za negativne naboje zbrajaju. Kada je pn spoj u ravnoteži tada je neto vrijednost struje jednak nuli, ali će i dalje postojati razlika potencijala između p i n dijela poluvodiča [2][8].

2.8. Laseri s homospojem

Efikasna emisija svjetlosti iz poluvodiča zahtjeva prisutnost velikog broja elektrona i šupljina istom dijelu kristalne rešetke (točka 2.5.). Takav uvjet može biti ostvaren u aktivnom području pn spoja. Kod n-tipa poluvodiča na slobodni elektroni okupiraju energetska stanja u vodljivom pojasu. Sličan princip se može pronaći u p-tipu poluvodiča gdje šupljine okupiraju energetske razine u valentnom pojasu. Kada se p i n tip poluvodiča spoje, kao što je prethodno detaljno opisano u točki 2.7., nakon nekog vremena dolazi do stanja ravnoteže u kojem su Fermijeve energetske razine p i n tipa izjednačene $E_{f_v} = E_{f_c}$, prikazano slikom 23.a).[6]

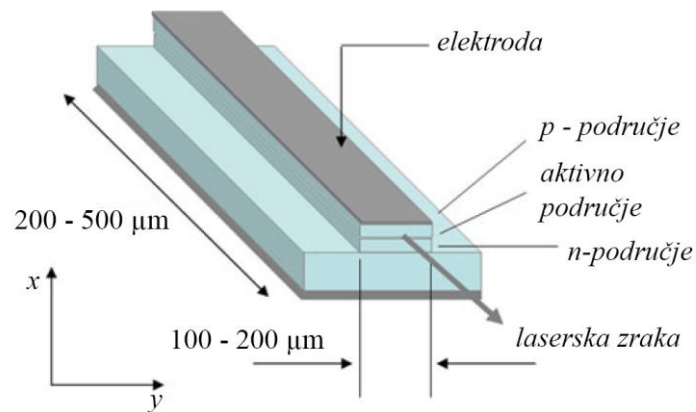


Slika 23. Potencijalna energija a) u slučaju pn spoja u termičkoj ravnoteži, b) u slučaju propusno polariziranog pn spoja [6]

Kada se propusno polarizira pn spoj, odnosno postavi vanjski napon između p i n tipa, električna struja teče kroz spoj, pri čemu većinski nositelji u spojevima stvaraju velike koncentracije slobodnih elektrona i šupljina u aktivnom području što uzrokuje velik broj procesa rekombinacija elektron-šupljina. Ukoliko poluvodič napravljen od indirektnog materijala poluvodiča, tada je energija od ne radijativne kombinacije prenesena na kristalnu rešetku u obliku energije vibracije. Ako je spoj napravljen od direktnog materijala poluvodiča, tada je rekombinacija radijativna, a aktivna zona pn spoja postaje emiter svjetlosti u valnoj duljini približno λ_g . Pri niskoj gustoći struje dolazi pretežno do spontane emisije. Kod velikih koncentracija nosioca, stimulirana rekombinacija parova elektron-šupljina postaje moguća i značajna jer omogućuje optičko pojačavanje. Kao što je vidljivo na prethodnoj slici 23, propusna polarizacija PN spoja uzrokuje ne jednakost Fermijevog levela enerije (točka 2.5.), odnosno E_{F_c} postaje veći od E_{F_v} . Razlika $\Delta E_F(J) = E_{F_c} - E_{F_v}$ raste kao funkcija gustoće struje koja teče kroz pn spoj. Moguće je ostvariti optičko pojačanje samo ako $\Delta E_F(J)$ postane veći od zabranjenog energetskog pojasa E_g . Točnije emisija svjetlosti se događa u frekvencijskom području definiranom uvjetom:

$$\Delta E_F(J) \geq h\nu \geq E_g \quad (2.2.1)$$

Prvi poluvodički laser je konstruiran 1962. godine korištenjem GaAs (*Galijev arsenid, engl. Gallium arsenide*) pn spoja. S obzirom da se laseri koji koriste isti materijal za p i n dio spoja zovu homospoj, taj laser je poznat kao pn homospoj. Emisija svjetlosti je bila približno valne duljine $\lambda_g = 0,85 \mu\text{m}$. Osnovna struktura pn homospoja je prikazana slikom 24. [6]



Slika 24. Osnovna struktura PN homospoja [6]

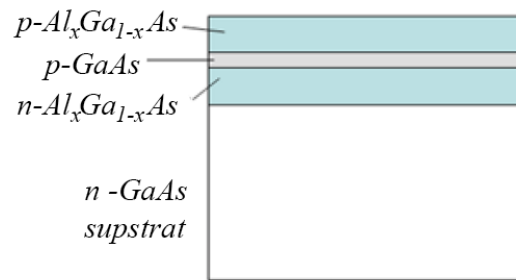
Prema slici električna struja teče uz x-os. Aktivna regija je dimenzija oko 0.2 – 0.5 mm, a širina u smjeru osi x 0.1 – 0.2 mm. Debljina aktivnog sloja uz x-os je vrlo mala, tipično oko 1 μm. Povratna veza potrebna za lasersku akciju unutar Fabry-Perot šupljine je osigurana refleksijom sa dvije paralelne reflektivne površine koje su napravljene rascjepom uzduž kristalne ravnine. S obzirom da je prijelomni indeks poluvodiča velik, razlika indeksa između zraka i poluvodiča daje dovoljno veliku refleksiju tako da nema potrebe za reflektivnim premazima na krajevima. Laser je radio u kontinuiranom modu na temperaturi od 77 K hlađen tekućim dušikom sa pragom gustoće struje (*engl. threshold current density*) od $J_{th} \approx 1 \text{ kA/cm}^2$. Kada bi se temperatura T povisila, sve više i više elektrona bi okupiralo razine iznad razine Fermijeve energije te bi takav efekt smanjio optičko pojačanje. Matematički se može prikazati da prag gustoće struje povezan eksponencijalno sa temperaturom T, prema zakonu:

$$J_{th}(T) = J_{th}(T_0)e^{\left(\frac{T}{T_0}-1\right)} \quad (2.2.2)$$

Pri sobnoj temperaturi J_{th} postaje reda veličine 100 kA/cm². Za takve velike gustoće struje, spoj se lako ošteti, kako bi se to spriječilo samo rad u pulsirajućem modu je moguć. Nedostatak pn homospoja je što je veličina laserske zrake u smjeru x-osi veća od debljine aktivnog područja, kao posljedica, velik dio zrake putuje unutar p i n područja gdje se apsorbira [6].

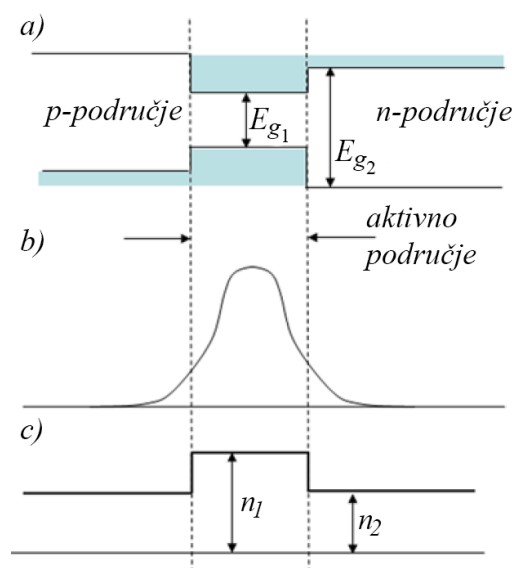
2.9. Laseri s dvostrukim heterospojem

Performanse poluvodičkih lasera su bitno poboljšane korištenjem dvostrukih heterospojeva umjesto homospojeva. Aktivni medij lasera s dvostrukim heterospojem je smješten između p i n materijala koji su različiti od aktivnog medija. Kao što prikazuje slika 25 aktivno područje $p - GaAs$ je smješteno unutar $p - Ga_{1-x}Al_xAs$ i $n - Ga_{1-x}Al_xAs$ pri čemu je x udio aluminijskih atoma, tipične veličine $x = 0.3$. [2][6]



Slika 25. GaAs Laser s dvostrukim heterospojem [6]

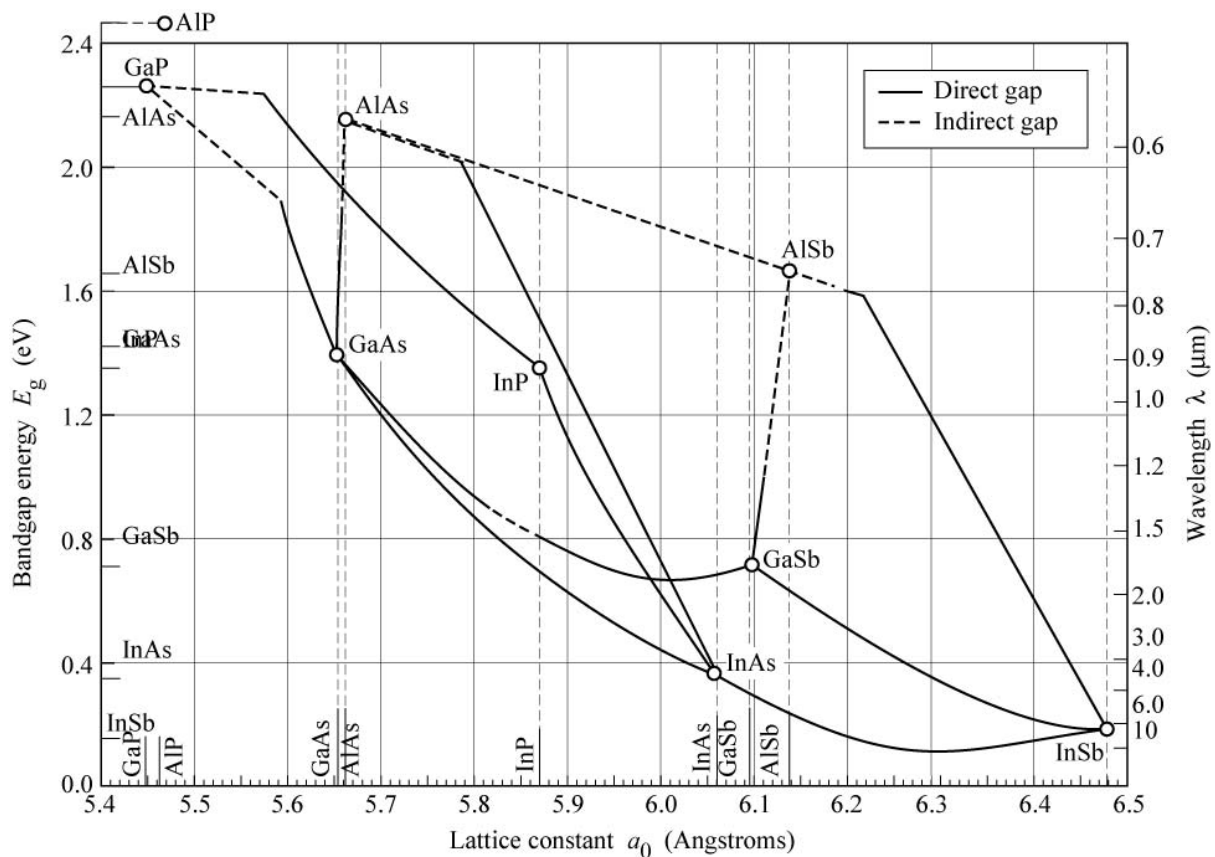
Takva struktura ima mnogo prednosti, kao što ilustrira slika 26, energetski procjep aktivnog sloja $GaAs$ je veličine $E_{g1} = 1.5$ eV, tj. manji od susjednih $Ga_{0.7}Al_{0.3}As$, $E_{g2} = 1.8$ eV.



Slika 26. Dvostruka heterostruktura; (a) struktura energetskih procjepa, (b) transverzalni profil laserske zrake, (c) indeks loma pojedinog područja [6]

Posljedica je da vanjski promjer laserske zrake nije apsorbiran u susjednim područjima, jedan od uzroka je što promjena u strukturi poluvodiča (grupa 3 i 5) dovodi do povećanja energetskog procjepa, ali i smanjenja indeksa loma. Tako je indeks loma $n(Ga_{0.7}Al_{0.3}As) = 3,4$, odnosno manji nego $GaAs$ što stvara optički put laserskoj zraci. Dodatna prednost dvostrukog heterospoja je da razlika u visini energetskih procjepa stvara energetsku barijeru koja povećava koncentraciju nosioca u aktivnoj regiji. Kako se povećava koncentracija nosioca tako raste optičko pojačanje. Kod dvostrukog heterospoja na sobnoj temperaturi prag gustoće struje je smanjen za dva reda veličine te iznosi $J_{th} = 0.5$ kA/cm². Pri proizvodnji dvostrukog heterospoja nije dovoljno samo birati kombinaciju elemenata s obzirom na energetske procjepe, nužno je i pomno pratiti konstantu rešetke koja kod aktivnog sloja mora biti približno ista kao kod susjednih slojeva. Ukoliko se zanemari to pravilo, dolazi do pojave dislokacije koje su u tom slučaju zaslužne za ne radijativnu rekombinaciju parova elektron-šupljina što smanjuje

optičko pojačanje. Razlog tome je vrlo jednostavan, ako se zamisli jednodimenzijaska rešetka nekog materijala i na nju se dodaje drugi materijal koji ima drugačiju konstantu rešetke (različita udaljenost između atoma) dolazi do nepravilnog povezivanja atoma što ostavlja neke atome bez mogućih veza. Takvi atomi imaju energetska stanja u zabranjenom pojasu te kada treba doći do rekombinacije parova elektron-šupljina, elektroni ne preskaču iz vodljivog pojasa u valentni nego se stepeničasto spuštaju do valentnog pojasa preko energetske razine nastalih uslijed dislokacija u kristalnoj rešetci (*engl. trap-assisted recombination*). Da bi se izbjegle dislokacije konstanta rešetke se očitava iz eksperimentalnih dijagrama, jedan takav je prikazan slikom 27. [2][6]



Slika 27. Dijagram konstante rešetke i energetskog procjepa [10]

Na dijagramu je na horizontalnoj osi prikazana konstanta rešetke, dok je na vertikalnoj energija energetskog procjepa. Može se primijetiti da par *AlAs* ($a = 5.66\text{\AA}$) i *GaAs* ($a = 5.65\text{\AA}$) leže na skoro pa vertikalnoj osi, što znači da je njihova konstanta odlično ujednačena. Ukoliko se bolje razmotri promatrana točka *GaAs* tada se može pisati da je u toj točki omjer elemenata Al_0Ga_1As , odnosno ukoliko se ide prema višim energijama energetskog procjepa upravo po promatranoj vertikalnoj osi, može se zaključiti da udio aluminijsa tada raste, a galija pada. Na 30% puta od točke *GaAs* struktura je $Al_{0.3}Ga_{0.7}As$. Isto vrijedi i kada bi se kretalo uzduž x osi,

u točki $GaAs$ udio indija je jednak nuli pa se može pisati da je u toj točki sastav In_0Ga_1As , a kako se kreće prema točki $InAs$ tako udio indija raste. U točki $a = 5.87\text{\AA}$, nalazi se struktura $In_{0,57}Ga_{0,47}As$ koja ima istu konstantu rešetke kao InP , ali različiti energetske procjep ($E_{gIn_{0,57}Ga_{0,47}As} = 0,74eV$, $E_{InP} = 1.35eV$). Ukoliko se želi za istu konstantu rešetke povećati energetske procjep onda se u strukturi pojavljuje fosfor pa je izraz za strukturu $In_xGa_{1-x}As_{1-y}P_y$. Također vidljivo je da postoje iscrtane linije koje predstavljaju indirektni energetske procjep i pune linije koji predstavljaju direktni energetske procjep. U slučaju $Al_xGa_{1-x}As$ može se primjetiti da je sve do vrijednosti $x = 0.4$ indirektan energetske procjep, a u slučaju vrijednosti iznad $x = 0.4$, direktan. [2][6]

3. OSNOVE PLINSKIH LASERA I LASERA ČVRSTOG STANJA

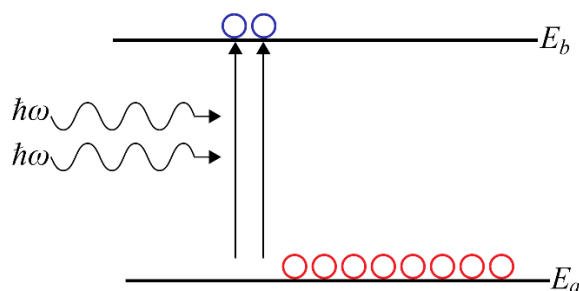
Albert Einstein sa svojim radom o stimuliranoj emisiji dao ideju, a sada je već to činjenica da jedan foton koji nailazi na atom koji se već nalazi u pobuđenom stanju potiče na emisiju istovrsnog fotona. Emisija novog fotona svjetlosti koja je rezultat pada elektrona iz višeg u niži energetska nivo ima isti smjer, frekvenciju, fazu i polarizaciju kao i upadni foton. S obzirom da je foton bozon odnosno čestica za koju ne vrijedi Paulijev princip isključenja fizikalno je moguće da dva fotona zauzimaju isto kvantno stanje istovremeno. [11]

3.1. Sustav sa dvije razine

Ako se uzme energetska sustav sa dvije razine (može se nalaziti unutar atoma, iona ili molekule), neka je prva razina E_a i označava najniže razmatrano energetska stanje sustava bitno za ovaj rad, odnosno nepobuđeno stanje ili osnovo stanje (*engl. ground state*) u kojem elektroni ne mogu prelaziti na niže razine. Neka je druga razina pobuđeno stanje E_b , odnosno viša energetska razina (*engl. upper energy level*). Tada između tih dvaju razina postoji točno određeni energetska procjep ΔE (*engl. energy gap, band gap*) iznosa [11][12]:

$$\Delta E = E_b - E_a = h\nu = \hbar\omega \quad (3.1.1)$$

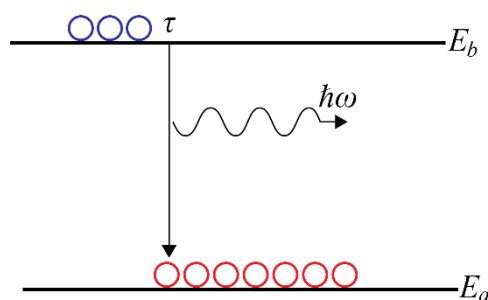
Neka se jedan elektron nalazi na nižoj energetska razini, dolazeći foton energije $\hbar\omega$ koja je po iznosu jednaka energetska procjepu između razina E_a i E_b će uzбудiti elektron na višu energetska razinu, kao što je prikazano na slici 28.



Slika 28. Apsorpcija fotona [11]

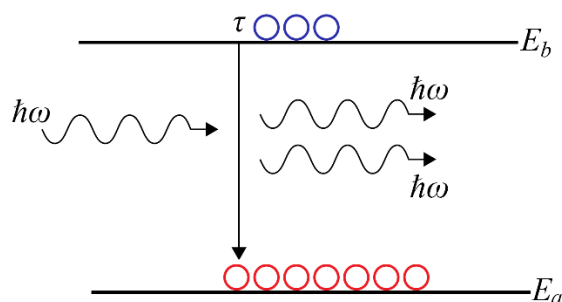
Takva fizikalna pojava se naziva apsorpcija fotona (*engl. absorption*). Ako se uzme isti sustav samo sa različitim položajem elektrona kao što je prikazano na slici 29, odnosno neka se elektron nalazi na višoj energetska razini, on će se kroz određeno vrijeme τ pokušati vratiti na razinu niže energije. Skokom elektrona iz stanja više energije u stanje niže energije biti će emitiran foton iste energije kao i energetska procjep između razina E_a i E_b . U ovom slučaju će se atom ponašati kao emiter, odnosno dolazi do pojave spontanog emitiranja fotona (*engl. spontaneous emission*). Spontana emisija je isto vrsta stimulirane emisije, jer spontana emisija

je uzrokovana energijom vakuuma (*engl. vacuum energy*), ali će se u ovom radu zanemariti. [11]



Slika 29. Spontana emisija [11]

Drugim riječima elektronu u stanju više energije nije potrebna nikakva pobuda da skoči u stanje niže energije, postoji određeno vrijeme τ koje definira koliko će elektron u prosjeku biti u stanju više energije, odnosno to je vrijeme trajanja elektrona u višem energetske stanju. Navedene dvije fizikalne pojave apsorpcije i emisije su bile poznate u doba prije Einsteina i one nisu dostatne za rad lasera, treća pojava za koju je Einstein postavio hipotezu je stimulirana emisija (*engl. stimulated emission*), prikazana na slici 3. [11]



Slika 30. Stimulirana emisija [11]

Neka je elektron u pobuđenom stanju, odnosno u višoj energetskej razini iznad koje nema viših razina za istu energiju fotona kao između E_a i E_b , drugim riječima ne postoji mogućnost apsorpcije u višu razinu. Pritom će nadolazeći foton energije $\hbar\omega$ koja je po iznosu ista kao i energetskej procjep ΔE izazvati elektron da emitira foton iste faze i frekvencije kao i nadolazeći foton. Nakon čega u sustavu postoje dva identična fotona što čini zračenje koherentnim i monokromatskim što su dvije ključne značajke laserskog svijetla. Kao posljedica dvije navedene značajke pojavljuje se i treća značajka koja se odnosi na usmjerenost, odnosno kolimiranost fotona. Nakon što elektron emitira foton gubi energije onoliko kolika je energija emitiranog fotona, odnosno kolika je energetskej procijep između dvaju energetskej razina. Nakon što elektron padne u stanje niže energije potrebno ga je je nekim fizikalnim postupkom „pumpanja“ uzbuditi u višu energetskej razinu kako bi se proces mogao ponavljati. [11].

Kako bi se ostvario rad lasera vidljivo je da je potrebno konstruirati sustav tako da prevladava stimulirana emisija nad apsorpcijom i spontanom emisijom što je jedan od osnovnih uvjeta rada lasera. Kako bi se ostvario uvjet potrebno je pomno izračunati stope tranzicije (*engl. rates of transition*). Ako se uzme pojava apsorpcije, postoje definirani izrazi koji mogu opisati njeno ponašanje:

$$R_{a \rightarrow b} = \frac{dN_b}{dt} = B_{a \rightarrow b} N_a u(\nu) = B_{a \rightarrow b} N_a \rho(\omega) \quad (3.1.2)$$

Gdje je $R_{a \rightarrow b}$ stopa apsorpcije, odnosno stopa povećanja populacije u višoj energetske razine, N_b je populacija više energetske razine, $B_{a \rightarrow b}$ je Einsteinov koeficijent za apsorpciju, N_a je populacija niže energetske razine, a $u(\nu)$ je gustoća energije fotona (energija po jedinici volumena i jediničnom intervalu frekvencija, opisano u točki 2.4) koja će se ovdje označavati sa $\rho(\omega)$. Jednostavnije objašnjeno $\rho(\omega)$ predstavlja broj fotona u nekom prostoru koji imaju frekvenciju ω , te se taj zbroj pomnoži s energijom svakog fotona, te konačno se podjeli s volumenom. Slično vrijedi za stopu emisije:

$$R_{b \rightarrow a} = -\frac{dN_b}{dt} = A N_b + B_{b \rightarrow a} N_b \rho(\omega) \quad (3.1.3)$$

Gdje je $R_{b \rightarrow a}$ konačna stopa emisije, N_b je populacija više energetske razine, A je Einsteinov koeficijent za spontanu emisiju, $B_{b \rightarrow a}$ je Einsteinov koeficijent za stimuliranu emisiju, a $\rho(\omega)$ je gustoća energije fotona. Vidljivo je da se izraz za konačnu stopu emisije sastoji od spontane i stimulirane emisije, također vidljivo je da spontana emisija ne ovisi o gustoći energije fotona nego ovisi samo o broju elektrona na višoj energetske razine. U stanju dinamičke ravnoteže potrebno je da navedene stope budu jednake, pa slijedi:

$$B_{a \rightarrow b} N_a \rho(\omega) = A N_b + B_{b \rightarrow a} N_b \rho(\omega)$$

Nakon rješavanja slijedi:

$$\rho(\omega) = \frac{A}{B_{a \rightarrow b} \left(\frac{N_a}{N_b} \right) - B_{b \rightarrow a}} \quad (3.1.4)$$

prema Plancku izraz za gustoću energije fotona glasi:

$$\rho(\omega) = \frac{\hbar \omega^3}{\pi^2 c^3} \frac{1}{e^{\left(\frac{\hbar \omega}{k_b T} \right)} - 1} \quad (3.1.5)$$

$$u(\nu) = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{\left(\frac{h \nu}{k_b T} \right)} - 1}$$

Pri čemu je, c je brzina svjetlosti u vakuumu, a k_b je Boltzmanova konstanta. [11][12][13]

Izraz daje matematičku ovisnost gustoće zračenja o temperaturi na pojedinoj valnoj duljini. Što znači da ako se uzme laserska šupljina i zagriju se njezine membrane na temperaturu T zidovi će emitirati određeno zračenje, fotoni koji se nalaze unutar šupljine će imati definiranu distribuciju frekvencija (ω) odnosno valnih duljina. [11] Planckov izraz ga gustoću energije fotona i Einsteinov izraz za spontanu emisiju i apsorpciju fotona moraju odgovarati, odnosno predstavljati istu stvar, matematički to je moguće samo ako su koeficijenti:

$$B_{b \rightarrow a} = B_{a \rightarrow b} = B \quad (3.1.6)$$

Odnosno ako su koeficijenti apsorpcije i stimulirane emisije jednaki, drugim riječima proces apsorpcije i emisije se događaju u jednakim omjerima, što je slučaj samo u stanju ravnoteže. Ako se uzme sustav sa dvije energetske razine Boltzmanov izraz za populaciju više i niže energetske razine će glasiti:

$$N_a = e^{\left(\frac{-E_a}{k_B T}\right)} \quad (3.1.7)$$

$$N_b = e^{\left(\frac{-E_b}{k_B T}\right)} \quad (3.1.8)$$

Ako se uzme da energija E_a i E_b predstavljaju razliku energetskog procijepa tada se ta dva izraza uz uvjet (3.1.6) uvrste u Einsteinovu (3.1.4) i Planckovu jednadžbu (3.1.5) koje predstavljaju istu stvar te moraju biti jednake, dobiva se:

$$\frac{8\pi h \nu^3}{c^3} \frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{k_b T}\right) - 1} = \frac{A}{B \left(\frac{N_a}{N_b}\right) - B}$$

$$A = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3} B \quad (3.1.9)$$

Što pokazuje da je koeficijent spontane emisije A je proporcionalan kubu frekvencija množeno sa koeficijentom apsorpcije/stimulirane emisije što znači da će spontana emisija biti češća na višim frekvencijama, odnosno manjim valnim duljinama. To je jedan od razloga zašto su laseri koji rade u području visokih frekvencija (npr. uv-laseri, x-laseri) teže izvedivi od lasera nižih frekvencija (npr. infracrveni laseri, MASER-i) [11][12][13].

Kako bi se našli omjeri za rad za rad lasera, može se pisati:

$$\frac{R_{b \rightarrow a} \text{ (emisija)}}{R_{a \rightarrow b} \text{ (apsorpcija)}} = \frac{A N_b + B N_b \rho(\omega)}{B N_a \rho(\omega)} \quad (3.1.10)$$

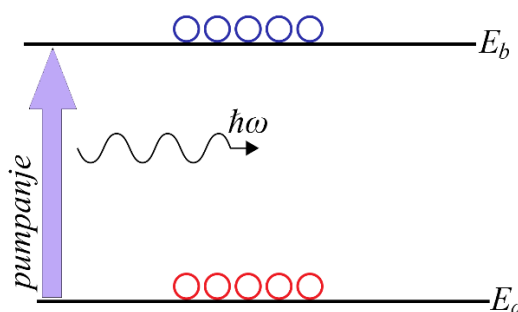
$$= \left[1 + \frac{A}{B\rho(\omega)}\right] \left(\frac{N_b}{N_a}\right)$$

Za rad lasera potrebno je postići da član $\frac{A}{B\rho(\omega)}$ teži u 0 a to se postiže povećanjem koeficijenta apsorpcije ili stimulirane emisije u odnosu na spontanu emisiju. U tom slučaju omjeri apsorpcije i emisije će biti približno jednaki $\frac{N_b}{N_a}$ za koje u stanju ravnoteže vrijedi izraz:

$$\frac{N_b}{N_a} = e^{\left(\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right)} \quad (3.1.11)$$

Vidljivo je da bi se dobio zadovoljavajući omjer emisije nad apsorpcijom potrebno je da viša energetska razina bude više popunjena od niže energetske razine, što očito nije ravnotežno stanje, odnosno za tu pojavu se uvodi naziv inverzne populacije (*engl. population inversion*) i ona je nužna za rad lasera. Ukoliko viša energetska razina nije popunjena više od niže energetske razine (ukoliko nije postignuta inverzija populacije), u prvim trenucima velik broj emitiranih fotona će biti apsorbiran što onemogućuje rad lasera. [11][12]

Na praktičnom primjeru se može utvrditi da ako se uzme funkcionalan helij-neonski laser (u nastavku HeNe laser, *engl. Helium–Neon laser, HeNe laser*) sa četiri razine te se njegov izlaz usmjeri na drugi HeNe laser u kojem atomi nisu u pobuđenom stanju, intenzitet zračenja, (*engl. intensity*) laserske zrake će drastično pasti jer će dio dolazećih fotona u nepobuđenom laseru biti apsorbirani, odnosno u tom trenutku prvi HeNe laser će služiti kao pumpa za podizanje elektrona u drugom laseru u viši energetske nivo. [12] Na slici 31. je prikazan energetski sustav sa dvije razine koji imaju jednaku populaciju na energetskoj razini E_a i E_b koja je postignuta nekim fizikalnim postupkom podizanja elektrona u višu energetske razine (pumpanje). Nadolazeći foton će imati jednaku vjerojatnost da bude apsorbiran ili da uzrokuje stimuliranu emisiju, odnosno u sustavu sa dvije energetske razine nije moguće postići inverznu populaciju, maksimalna populacija energetske razine E_b je u slučaju kada je jednaka populaciji razine E_a .

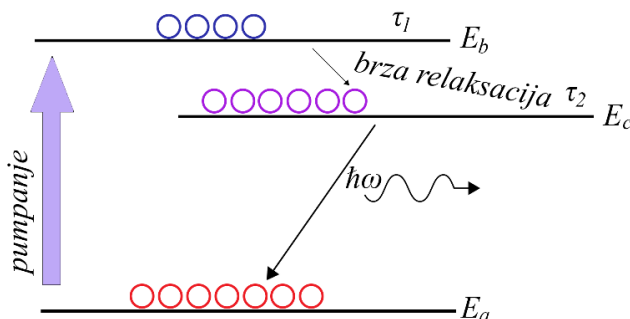


Slika 31. Zasićenje sustava sa dvije razine [11]

U takvom stanju sustav postaje transparentan za svjetlost, odnosno svjetlost unutar šupljine ponaša se kao da atoma nema i takva pojava naziva se zasićenje (*engl. saturation*). Kako bi se postigao funkcionalan laser potrebno je imati sustav sa bar tri energetske razine. [11]

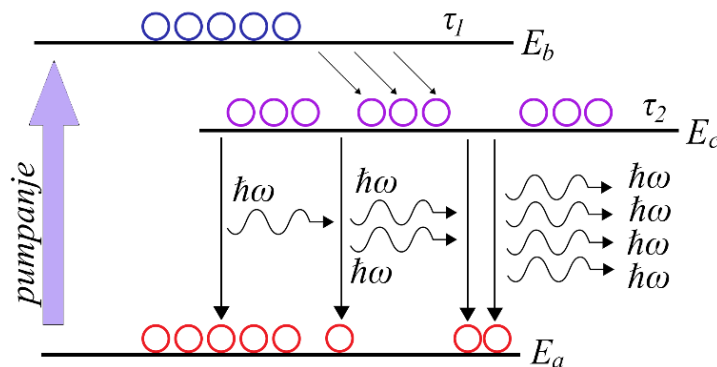
3.2. Sustav sa tri razine

Ako se uzme sustav sa tri energetske razine, kakvog je imao Rubinski laser (*engl. Ruby laser*) što je prvi konstruirani laser (1960. godine) u stanju ravnoteže on će imati energetske razine popunjene po zakonu $N_a > N_c > N_b$. [11][14]



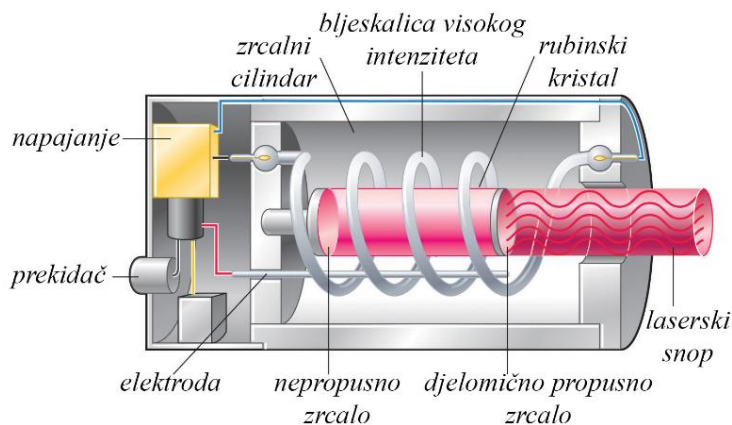
Slika 32. Sustav sa tri razine [11]

Ako se nekim fizikalnim mehanizmom uzbude elektroni na najvišu energetske razine (pumpanje) N_b i dalje će ostati omjer $N_a > N_b$, odnosno N_b nikad neće biti veći od N_a zbog prethodno navedenog razloga u sustavu sa dvije energetske razine. Elektroni na razini E_b imaju vrijeme trajanja τ (obično reda veličine mikro ili nanosekunde), koje definira koeficijent spontane emisije $A = 1/\tau$. Nakon popunjavanja energetske razine E_b , elektroni brzo prelaze u nižu energetske razine E_c , odnosno metastabilno stanje (nazvano po svom relativno dugom vijeku trajanja koje stanje čini skoro stabilnim) gdje se zadržavaju duže zbog dužeg vijeka trajanja τ (reda veličine milisekunde). Zbog razlike u brzinama popunjavanja energetske razine između razine E_c i E_a stvara se inverzija populacije. Nakon kratkog vremena na razini E_c dolazi do prve spontane emisije koja zbog velikog broja elektrona u metastabilnom stanju izaziva eksponencijalni rast stimulirane emisije fotona energije jednake razlici energetske razine između razine E_c i E_a . Takva lančana reakcija stimulirane emisije fotona prikazana je na slici 33, a naziva se svjetlosno pojačanje (*engl. light amplification*). [11][12][13]



Slika 33. Prikaz principa svjetlosnog pojačanja [11]

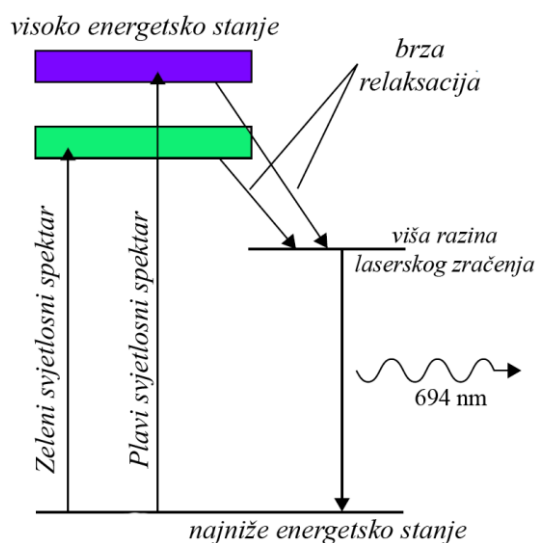
Svjetlosno pojačanje je fizikalni princip koji postoji, ali se rijetko spominje pod tim nazivom, obično se podrazumijeva pod pojačanje medija. [11] Na sličnom principu funkcionira i rubinski laser. Na slici 33. se vidi da je na jednoj strani rubinskog lasera je približno totalno reflektivno zrcalo, na drugoj je djelomično propusno zrcalno (kako bi se dobila izlazna laserska zraka), oko kristala rubina nalazi se ksenonska bljeskalica visokog intenziteta. Rubinski kristal je aluminijev oksid dopiran atomima kroma u obliku trostruko nabijenog kationa. Ti atomi kroma su aktivni medij u rubinskom laseru. Fizikalni mehanizam koji pobuđuje elektrone iz najniže energetske razine (*engl. ground state*) koja je u ovom slučaju i niža razina laserskog zračenja (*engl. lower laser level- LLL*) u relativno najviše energetske stanje (*engl. pump level*) je ksenonska bljeskalica koja u ovom slučaju služi kao optička pumpa (*engl. optical pump*). Ksenonska bljeskalica je izabrana iz razloga što najveću gustoću zračenja isijava na frekvencijama na kojima rubinski kristal ima najveću apsorpciju (zeleni i plavi spektar). [11]



Slika 34. Komponente rubinskog lasera [15]

Dinamika rubinskog lasera prikazana je na slici 35. Nakon uključivanja visokonaponske bljeskalice ioni prelaze u najviše energetske stanje koje ima relativno kratko vrijeme trajanja ($1 \mu\text{s}$) što uzrokuje brzi pad iona u višu razinu laserskog zračenja (*engl. upper laser level- ULL*) u kojoj je vrijeme trajanja duže (3 ms). Relativno dugo vrijeme trajanja više razine omogućuje da dođe do inverzije populacije te povećava vjerojatnost stimulirane emisije. Emitirani fotoni reflektiraju se od zrcala kroz medij unutar laserske šupljine pri čemu dolazi do pojačanja optičke snage laserske zrake koja konačno izlazi iz laserske šupljine kroz djelomično propusno zrcalo. [12]

Nakon jednog optičkog pumpanja dolazi do male odgode emitiranje laserske zrake zbog tromosti sustava, konačno nakon početka emitiranja na izlazu se dobiva laserska zraka valne duljine 694 nm (crvena boja), za stalni rad lasera potrebno je uzastopno uključivati/isključivati bljeskalicu, odnosno laser funkcionira u pulsirajućem načinu rada zbog zahtjeva za velikom

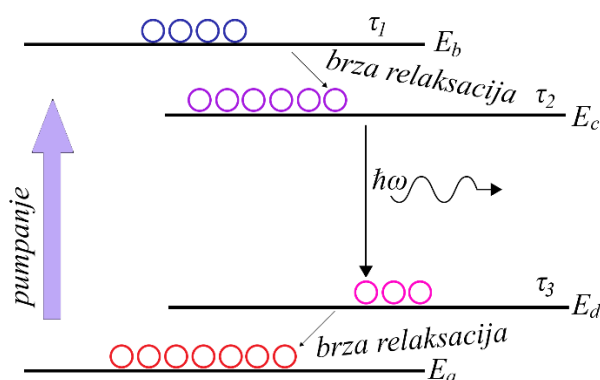


Slika 35. Dinamika rubinskog lasera [12]

Na primjeru rubinskog lasera spomenuta je samo jedna vrsta pumpanja elektrona u više energetska razinu, no postoji više metoda kao što su lasersko pumpanje, električno pumpanje, pobuda sudarom itd. [14] Vidljivo je da bi se ostvario rad lasera potrebno je imati sustav sa bar tri energetska razine, no postoje sustavi sa više energetska razine koji su ekonomičniji. [12]

3.3. Sustav sa četiri razine

Na slici 36. je prikazan sustav sa četiri energetska razine u kojem mehanizmom pumpanja elektroni prelaze iz E_a u E_b energetska razinu, zatim se brzo spuštaju na energetska razinu E_c na kojoj se stvara inverzija populacije u odnosu na energetska razinu E_d .

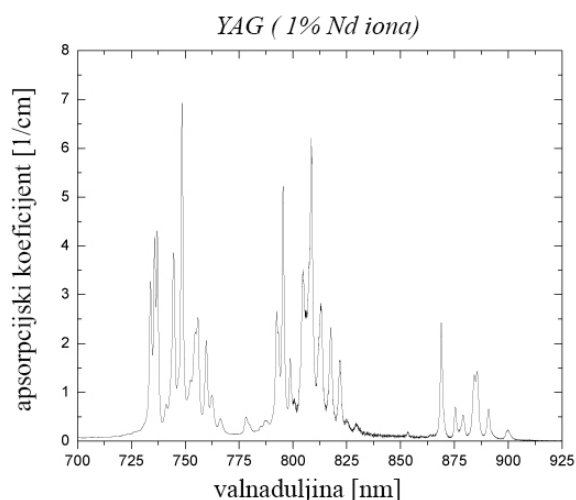


Slika 36. Sustav sa četiri razine [11]

Između razina E_c i E_d . se ostvaruje inverzija populacije, nakon čega kreće emitiranje fotona koju započinje spontana emisija koja potiče stimuliranu emisiju ostalih fotona. Nakon pada elektrona na razinu E_d oni se brzo spuštaju na početnu razinu E_a . [11]

Bitno je spomenuti da u sustavu sa četiri razine se puno lakše ostvaruje inverzija populacije jer ako se promatra stanje nakon kratkog vremena neizbježno je da bude postignuta inverzija populacije između E_c i E_d jer to je prirodan put pada elektrona u niže energetske razine. Moguća je situacija da elektroni preskaču iz E_c u E_a ali se to događa u puno manjem broju u odnosu na pad iz E_c u E_d . U slučaju pada elektrona iz E_c u E_a elektroni emitiraju fotone veće energije odnosno veće frekvencije i manje valne duljine zbog veće razlike energetske procjepa između tih razina u odnosu na E_c u E_d . Kao takav, sustav za četiri razine zahtjeva manje energije za rad od sustava sa tri razine, te se obično koristi u kontinuiranom načinu rada. [11]

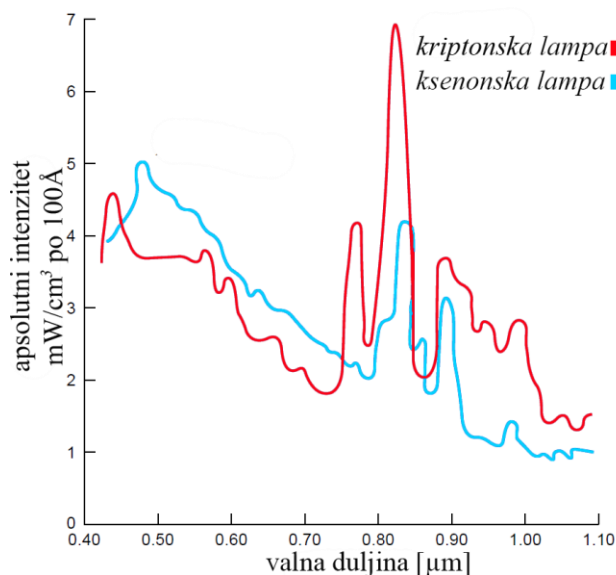
Jedan od poznatijih lasera sa četiri energetske razine koji ima diskretna niska energetska stanja je Nd:YAG (u nastavku samo YAG, *engl. Neodymium-doped yttrium aluminium garnet*) laser koji također za aktivni medij ima krutu jezgru kao rubinski laser. Kruta jezgra se sastoji od štapića itrij-aluminijevog granata (YAG), dopiranog atomima neodimija. Aktivni medij lasera su trostruko ionizirani ioni neodimija. Sustav YAG lasera je karakteriziran bliskom skupinom visokih energetske stanja sa kojih ioni brzo padaju u višu energetske razine laserskog zračenja. Veći broj visokih energetske stanja omogućava sustavu da apsorbira energiju na više različitih frekvencija, odnosno inverzija populacije se lakše ostvaruje zbog većeg apsorpcijskog spektra. Za razliku od rubinskog lasera koji koristi ksenonsku bljeskalicu, YAG laser obično koristi kriptonsku bljeskalicu kao optičku pumpu. Na slici 37 je prikazan apsorpcijski spektar YAG lasera iz koje je vidljivo da je apsorpcija najviše izražena u području od oko 750 i 800 nm, odnosno crveni i infracrveni spektar, što znači da je poželjno imati optičku pumpu koja u tom spektru ima najveći intenzitet zračenja. [12]



Slika 37. Apsorpcijski spektar YAG lasera [16]

Na slici 38 prikazan je spektar zračenja kriptonske i ksenonske bljeskalice, vidljivo je da ksenonska bljeskalice pokazuje visok intenzitet u plavo-zelenom spektru u kojem YAG laser

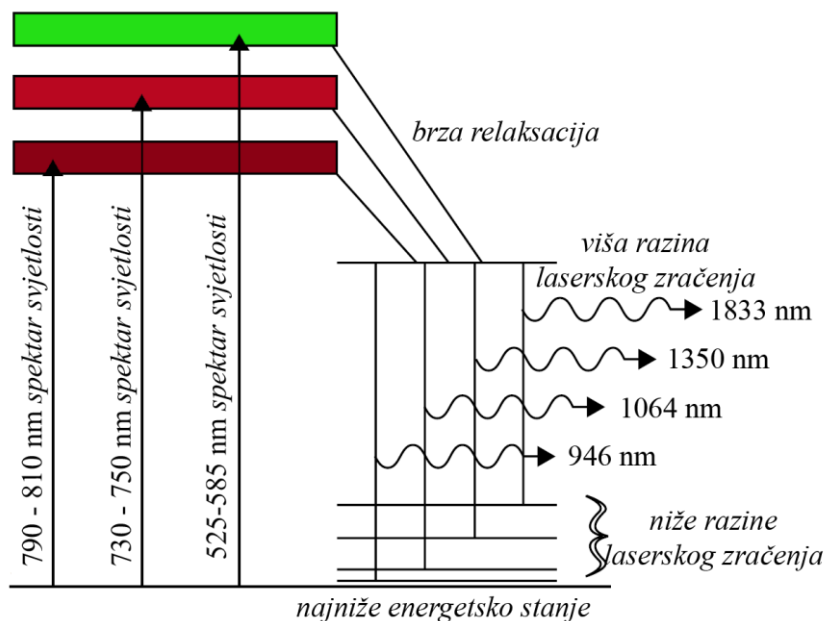
ima slabu apsorpciju, dok kriptonska bljeskalica pokazuje visok intenzitet u crvenom-infracrvenom spektru gdje je apsorpcija YAG lasera izražena [12]. Razuman izbor za optičku pumpu je kriptonska bljeskalica u slučaju YAG lasera, moguće je korištenje ksenonske bljeskalice, ali efikasnost sustava neće biti kao kod kriptonske. Isto vrijedi i za prethodno spomenuti rubinski laser kojem je potreban spektar u plavo-zelenom području zbog čega je tamo opravdan izbor ksenonske bljeskalice.



Slika 38. Spektar ksenonske i kriptonske bljeskalice [12]

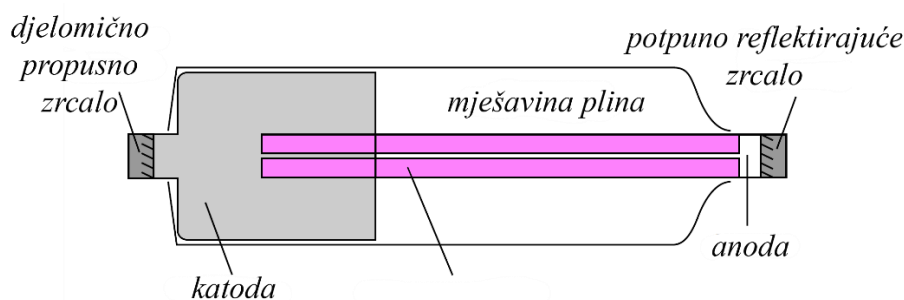
Jedna od bitnih značajka YAG lasera je da sva visoka energetska stanja imaju vrijeme trajanja reda veličine 100ns te brzo padaju u višu energetska razinu laserskog zračenja koja ima relativno dugi vijek trajanja od 1,2 ms što omogućuje brzo postizanje inverzne populacije. Nakon emitiranja fotona različitih valnih duljina kao što prikazuje slika 39. ioni padaju na najniže energetska stanja za oko 30 ns. YAG laser ima više mogućih emitiranih valnih duljina od kojih je najintenzivnija ona na 1064 nm, dok je najslabija ona na 946 nm zbog bliskosti sa najnižim energetska stanjem. Razlog tome je što YAG laser za svaku energetska razinu ima skupinu bliskih razina, tako recimo emitiranje fotona na 946 nm pada u energetska razinu koja je 0,1 eV iznad najniže energetske razine, dok je emitiranje fotona na 1064 nm spušta ion u energetska razinu koja je na 1,2 eV iznad najnižeg energetska stanja, obje navedene energetske razine spadaju u skupinu bliskih nižih razina laserskog zračenja, ali razine koje su izuzetno blizu najnižem energetska stanju imaju dovoljno energije da u toj razini ostanu. Kako bi se ostvarila inverzija populacije za emitiranje fotona valne duljine 964nm potrebno je uložiti relativno veliku količinu energije, no čak i tada bi bilo teško postići inverziju populacije, također tada bi se mogla ugroziti efikasnost sustava. Kao bolje rješenje smatra se hlađenje lasera

tekućim dušikom na temperature ispod 100 K, tada je populacija energetske razine na 0,1 eV drastično smanjena [12].



Slika 39. Dinamika YAG lasera [12]

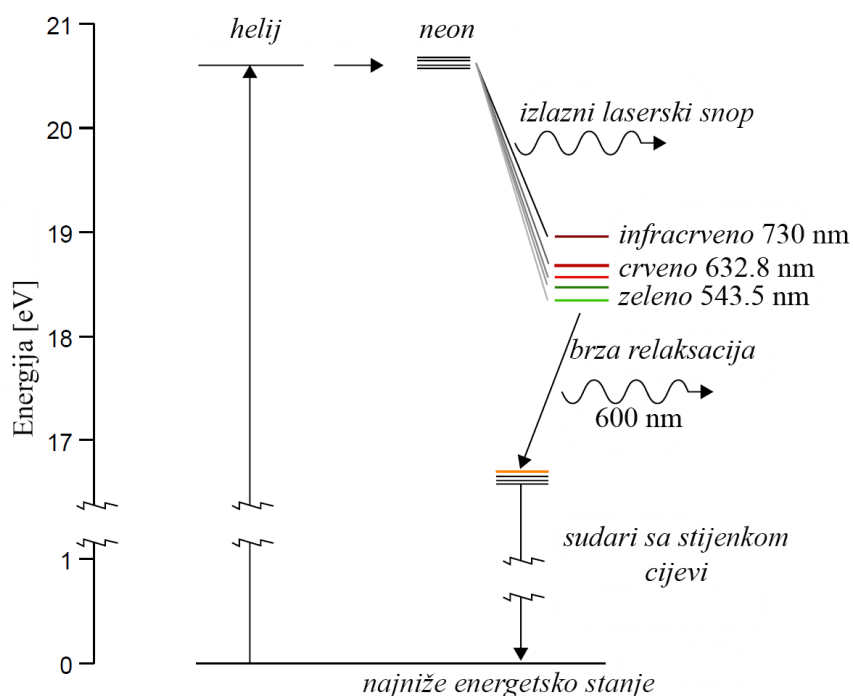
Također poznati laser koji se klasificira u lasere sa četiri energetske razine je helij-neonski laser (HeNe), koji je uz poluvodičke lasere najbitniji u ovom radu. Konstruiran je 1960. godine (nakon rubinskog lasera). Donedavno je imao široku primjenu od holografije do skeniranja bar kodova sve dok ih nisu zamijenili poluvodički laseri. Pojednostavljena konstrukcija lasera sastoji se od staklene cijevi ispunjene helijem i neonom (prikazano na slici 40) u omjeru 10:1 (omjer obično varira do 5:1 do 10:1), tlak unutar boce je otprilike 0.001 – 0.003 bar što omogućuje održavanje električnog izboja. [11][14]



Slika 40. Komponente HeNe lasera [12]

Oko cijevi ispunjene helijem i neonom nalazi se rezervoar sa plinskom mješavinom iz preventivnih razloga (zbog difuzije helija kroz stijenke cijevi). Potrebna električna energija se dobavlja iz visokonaponskog napajanja, pod kojim cijev isijava rozu boju. Većina HeNe lasera ima izlaznu zraku u crvenom spektru svjetlosti, no moguće je postići i lasersku zraku u narančastom, žutom i zelenom spektru svjetlosti. Električni izboj se događa između male anode

i mnogo veće katode kroz cijev malog promjera. Na oba kraja laserske šupljine postavljena su zrcala, jedno je potpuno reflektirajuće dok je drugo djelomično propusno. Mala količina svjetlosti (otprilike 1%) se propagira kroz djelomično propusno zrcalo što zapravo čini izlaznu lasersku zraku. Električno izbijanje između anode i katode uzbuđuje atome helija sudarom sa elektronima. Velika količina energije se neefikasno troši, jedan dio u obliku isijavanja cijevi, a veći dio u obliku topline. Pobuđeni atomi helija na energetske razine od 20,66 eV sudaraju se sa atomima neona što za posljedicu ima transfer energije na nepobuđene atome neona koji tada prelaze na energetske razine od 20,61 eV (koja je skupina četiri bliske energetske razine) što je ujedno i viša razina laserskog zračenja za neon (prikazano na slici 41). Kroz taj proces atomi neona su selektivno pobuđeni na višu razinu laserskog zračenja s kojeg može početi emitiranje fotona, nakon sudara atomi helija padaju u nisko energetske stanje koje je i dalje značajno ispod niže razine laserskog zračenja neona (18,69 eV) tako da nije moguća situacija da atomi helija sudarom pobuđuju atome neona u nižu energetske razine laserskog zračenja koja bi u tom slučaju otežala postizanje inverzije populacije. Nije slučajnost što se helij koristi u kombinaciji sa neonom, helijevo uzbuđeno stanje je vrlo blizu višoj razini laserskog zračenja neona. Ako bi se električni izboj odvijalo u atmosferi čistog neona teško bi se uspjelo uzbuđiti dovoljan broj atoma u višu energetske razine kako bi se izazvala inverzija populacije, jer bi se u isto vrijeme i nastanjivale niže razine [12].



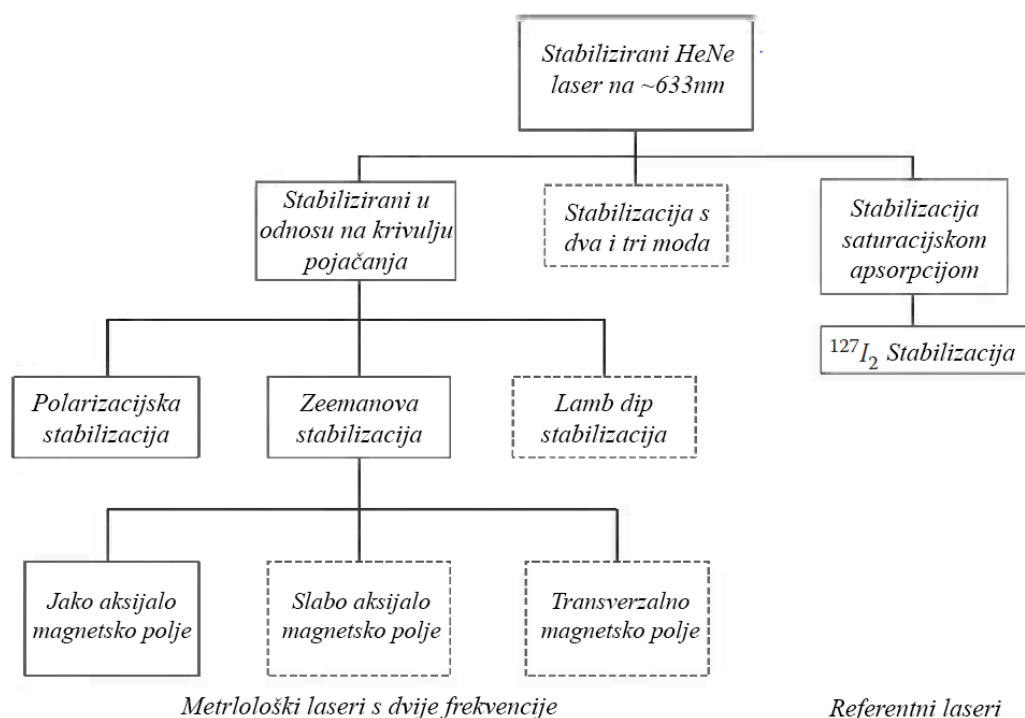
Slika 41. Dinamika HeNe lasera [12]

Nakon pada u skupini bliskih nižih energetske razine laserskog zračenja atomi mogu brzo pasti u metastabilno stanje što pridonosi depopulaciji nižih razina te olakšava inverziju populacije.

Pri brzom propadanju u metastabilno stanje dolazi do emitiranja svjetlosti valne duljine od 600 nm nastale spontanom emisijom, ne pridonosi ciljanom radu lasera, ali postoji, i preko spektroskopa se može vidjeti kao narančasta linija ako se ispituje spektar svjetlosti koji emitira cijev. Iz metastabilnog stanja atomi se moraju sudariti sa stjenkom cijevi kako bi se vratili u najniže energetske stanje. U principu rada HeNe lasera vidljivo je da u grubo uključuje četiri energetske razine u aktivnom mediju što je u ovom slučaju neon i jednu energetske razine u heliju koja služi za selektivno pumpanje atoma neona, ali se klasificira kao laser sa četiri energetske razine. [12]

4. METODE STABILIZACIJE FREKVENCIJE

Izvori svjetlosti za heterodinu interferometriju moraju zadovoljiti neke optičke i mjeriteljske zahtjeve kao što je npr. emisija dvije linearno polarizirane međusobno ortogonalne frekventno pomaknute zrake pri stabilnoj i poznatoj valnoj duljini. Iz primjera navedenog zahtjeva dolazi i mogućnost uspostavljanja sljedivosti jedinice duljine i pretvorba faznog pomaka u jedinicu duljine. Tipične primjene interferometrijskih metoda često zahtijevaju koherentnu zraku reda veličine metra, no manje duljine koherencije su često primjenjive, a ponekad i predstavljaju bolji izbor. Neka od praktičnih svojstva uređaja za interferometriju trebala bi uključivati male dimenzije, veliku optičku snagu, visoku razinu stabilnosti, optičku izolaciju od reflektirane zrake, željenu polarizaciju itd. Laserski izvori svjetlosti, a posebno plinski laseri, zadovoljavaju većinu optičkih i mjeriteljskih zahtjeva. Jedan od prvih lasera korištenih u interferometrijskim metodama bio je modificirani HeNe laser ubrzo nakon što je postignuta kontinuirana emisija laserske zrake 1962. godine. Danas postoji više tehnologija koje se koriste u metrologiji, odnosno s kojima je moguće realizirati jedinicu metra, ali HeNe laser valne duljine ~ 633 nm i dalje predstavlja najpouzdaniji izbor za mjeriteljske primjene. Iznos valne duljine HeNe lasera i pripisana frekventna mjerna nesigurnost su ključni parametri u dimenzionalnom mjeriteljstvu. Ako se uzme u obzir da svjetlost ima konstantnu brzinu u vakuumu i zadanu valnu duljinu tada se iz veze može zaključiti da ima i točnu definiranu frekvenciju. Nažalost, takav slučaj je moguć samo teoretski, u realnim uvjetima nije moguće postići definitivnu valnu duljinu odnosno frekvenciju, zbog različitih utjecaja okoliša na laser uvijek će postojati relativna mjerna nesigurnost valne duljine. Jednostavnije rečeno, frekvencija (valna duljina) lasera nikad neće biti konstantna, te se nastoji zadati određeno područje varijacije frekvencije kako bi se sa određenom nesigurnošću mogla uspostaviti sljedivost. Kod HeNe lasera valna duljina je definirana atomskim prijelazom neona, pri čemu širina krivulje pojačanja iznosi ~ 1.4 GHz što znači da laserska emisija može biti bilo gdje unutar tog područja. Tada se u odnosu na frekvenciju lasera može izračunati relativna varijacija (mjerna nesigurnost) frekvencije koja je za ovaj tipičan slučaj 3×10^{-6} . Iz toga proizlazi i preporuka CCL-a (*engl. Consultative Committee for Length*) koji djeluje unutar CIPM-a (*engl. International Committee for Weights and Measures*) da se postavi relativna mjerna nesigurnost frekvencije u iznosu $u = 1.5 \times 10^{-6}$, za nestabilizirane HeNe lasere. Da bi se postigla sljedivost po preporučenim standardima za određene metode dimenzionalnog mjeriteljstva poseže se za stabilizacijom frekvencije. Slika 42 predstavlja klasifikaciju tehnika stabilizacije HeNe laserskih izvora za interferometriju. [17]

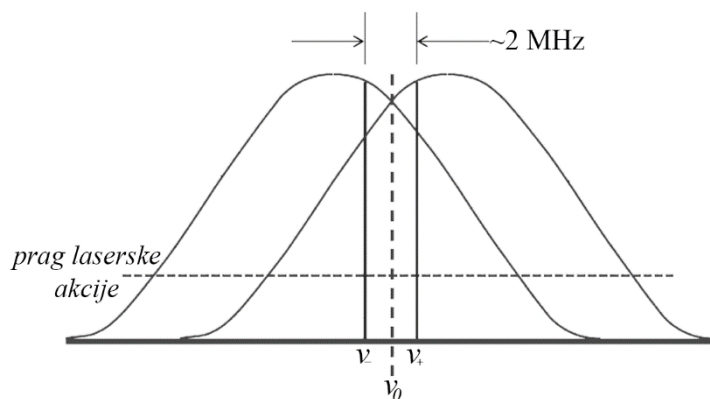


Slika 42. Klasifikacija stabilizacije HeNe laserskih izvora [17]

Sa lijeve strane su prikazane tehnike stabilizacije lasera sa dvije frekvencije, dok je sa desne strane je prikazana metoda za stabilizaciju referentnih lasera kao što je jodno stabilizirani HeNe laser kojim se ostvaruje definicija metra do visokog stupnja točnosti, te se koristi za umjeravanje ostalih mjeriteljskih lasera prema preporukama BIPM-a (*engl. International Bureau of Weights and Measures*). Komercijalno dostupni HeNe laseri su obično stabilizirani kontroliranjem pozicije dva ortogonalno polarizirana moda u odnosu na krivulju pojačanja. Podešavanjem dimenzija laserske šupljine unutar zatvorene petlje teži se ostvariti minimalna apsolutna razlika intenziteta dvaju moda, pri čemu je u idealnom slučaju razlika intenziteta jednaka nuli. Dvije navedene metode u ovom radu koje se koriste za stabilizaciju u odnosu na krivulju pojačanja su: Zeemanova stabilizacija i polarizacijska stabilizacija. [17][18] Stabilizacija referentnog jodno stabiliziranog HeNe lasera opisana je kao varijacija na *Doppler-free* saturacijsku spektroskopiju koja je ujedino opisana i za poluvodički laser. Također na primjeru poluvodičkog lasera opisana je i Pound-Drever-Hall stabilizacija.

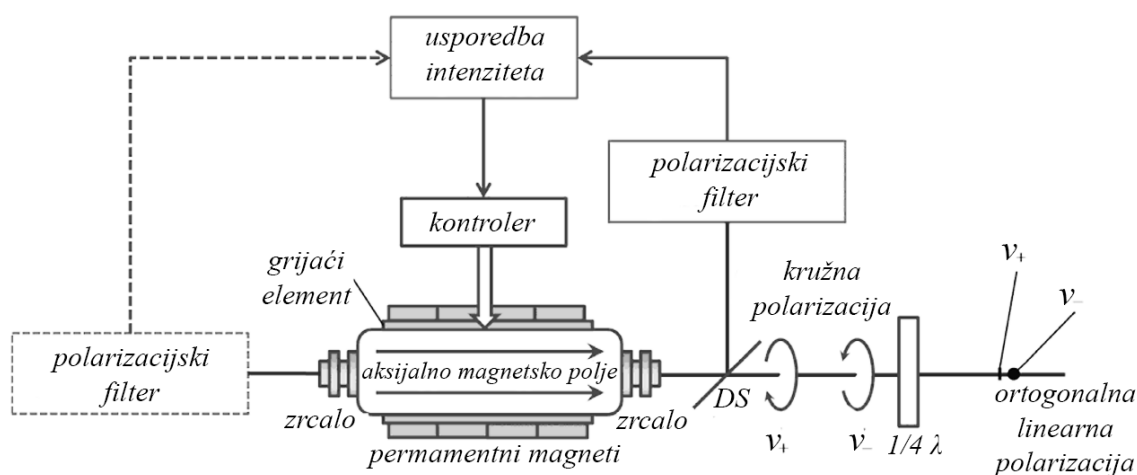
4.1. Zeemanova stabilizacija

Metoda Zeemanove stabilizacije temelji se na Zeemanovom efektu: primjena relativno snažnog magnetskog polja uzduž osi cijevi rezultira sa cijepanjem jednog moda lasera u dva kružno polarizirana moda, kao što prikazuje slika 43.



Slika 43. Zeemanovo cijepanje moda [17]

Pritom je jedna frekvencija iznad, a druga ispod centralne frekvencije ν_0 , koje se označavaju sa ν_+ i ν_- . Zeemanovo cijepanje pruža razliku u frekvencijama potrebnu za heterodinu interferometriju i za stabilizaciju frekvencije. Razlika frekvencije nastala Zeemanovim cijepanjem ovisi o jačini primijenjenog magnetskog polja, a tipično varira između 1 i 4 MHz. [17][18] Slika 44 prikazuje shematski prikaz tipične stabilizacije Zeemanovim efektom.



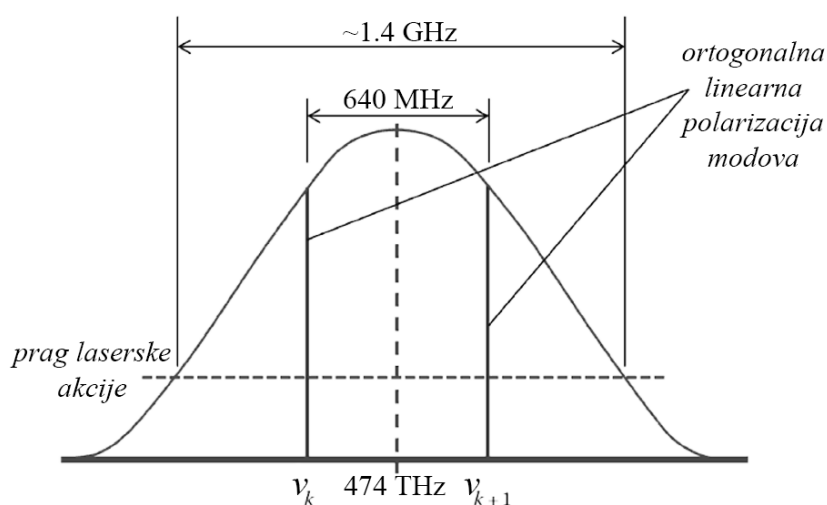
Slika 44. Shematski prikaz tipične stabilizacije Zeemanovim efektom [17]

Ukoliko se uzme dovoljno mala laserska šupljina koja dopušta titranje samo jednog moda (slijedeći longitudinalni mod ne prelazi prag laserske akcije ili nije unutar krivulje pojačanja – velik FSR) unutar krivulje pojačanja, tada će HeNe laser imati samo po jedan lateralni i longitudinalni mod na ~ 633 nm. Manja dimenzija laserske šupljine znači i manju optičku snagu lasera za koju se može smatrati da je dovoljna za većinu mjeriteljskih zahtjeva. Permanentni magnet koji okružuje lasersku cijev izaziva pojavu aksijalnog magnetskog polja, te dolazi do dijeljenja prvotnog jednog moda u sada dva moda prikazana slikom 43. Laserska zraka koja se sada sastoji od dvije kružno polarizirane frekvencije se dijeli na djelitelju snopa,

DS (*engl. beam splitter, BS*) tako da jedan dio zrake odlazi u polarizacijski filter gdje se dvije kružno polarizirane zrake filtriraju u ortogonalno linearno polarizirane zrake. Zrake tada idu na detektore koji pomoću razlike intenziteta generiraju *error* signal za povratnu vezu koja kontrolira duljinu laserske šupljine piezoelektrikom (ili grijačem) koja je direktno povezana s lokacijom emitiranih frekvencija u odnosu na krivulju pojačanja. Jednostavno rečeno, ukoliko razlika intenziteta dva moda postane veća od nule to indicira da su se frekvencije pomakle u odnosu na krivulju pojačanja, kako bi ih se vratilo u prethodno stanje potrebno je regulirati duljinu laserske šupljine. Alternativna metoda koristi *beat* frekvencije dva moda što se postiže postavljanjem dva moda da interferiraju, nakon čega lociranje minimuma u *beat* frekvenciji kao funkcije laserske šupljine kontrolira njezinu duljinu. Laserska zraka koja prolazi kroz djeljitelj snopa ide na četvrt-valnu ploču (*engl. quarter wave plate, QWP*) te nastavlja prema detektoru. Na slici 44 crtkane linije predstavljaju mogućnost emitiranja laserske zrake (slabije) s zadnje strane lasera u svrhu stabilizacije kako bi glavna zraka bila dostupna za ispunjenje mjeriteljskih zahtjeva. Jedan od nedostataka Zeemanove stabilizacije lasera s jednim modom je prethodno navedena optička snaga koja je vrlo mala, a rezultat je kratke laserske cijevi (tipične veličine 10 cm). Ukoliko je potrebna veća optička snaga lasera tada je potrebno razmatrati duže laserske cijevi što često znači titranje više longitudinalnih laserskih modova. U slučaju dva longitudinalna moda koristiti se polarizacijska stabilizacija. [17][18]

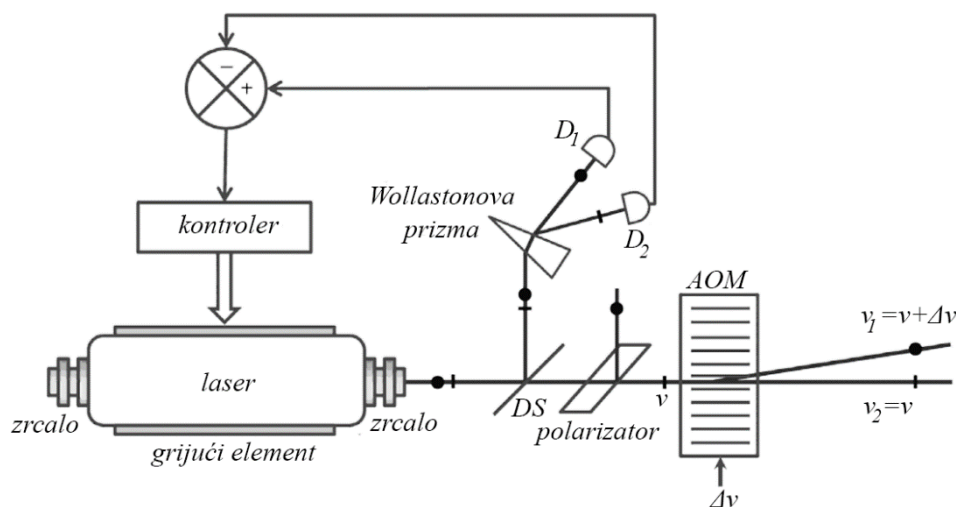
4.2. Polarizacijska stabilizacija

U odnosu na Zeemanovu stabilizaciju, polarizacijska stabilizacija se temelji na ujednačavanu intenziteta dva susjedna longitudinalna moda kao što prikazuje slika 45.



Slika 45. Longitudinalni modovi kod polarizacijske stabilizacije [17]

Prisutnost dva ortogonalno polarizirana moda ispod krivulje pojačanja omogućuje veću duljinu laserske cijevi nego kod Zeemanove stabilizacije (tipično ~ 30 cm). [17][18] Shematski prikaz polarizacijske stabilizacije prikazan je slikom 46.



Slika 46. Shematski prikaz polarizacijske stabilizacije [17]

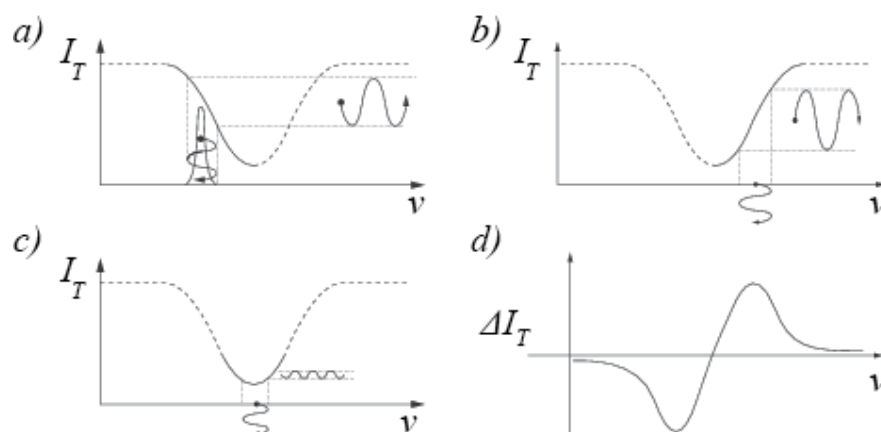
Djelitelj snopa usmjerava mali dio laserske zrake na Wollastonovu prizmu (ili neku drugu prikladnu optičku prizmu) koja dijeli zraku na dvije ortogonalno polarizirane zrake, odnosno dva moda koja su prisutna u laserskoj šupljini. Dvije odvojene zrake (moda) idu na detektore D_1 i D_2 . Upravljački sustav teži minimizirati razliku intenziteta detektiranih na dva detektora podešavajući duljinu laserske šupljine. Kao što je prikazano slikom 45, dva longitudinalna moda su jednako udaljena od centralne frekvencije, te su pozicionirani simetrično u odnosu na krivulju pojačanja što znači da njihovi intenziteti u idealnom slučaju trebaju biti isti, odnosno u realnom slučaju njihova razlika treba težiti u nulu. U trenutku kada je njihova razlika teži u nulu, te se takvom i održava može se reći da je laser stabiliziran. Laserska zraka koji prolazi kroz djelitelj snopa ide na polarizacijski filter koji propušta samo jedan mod, odnosno jednu vrstu polarizacije koja tada prolazi kroz akusto-optički modulator (u nastavku AOM, *engl. acousto-optic modulator, AOM*) koji proizvodi dvije međusobno ortogonalno linearno polarizirane frekvencijsko pomaknute laserske zrake koji se preklapaju i izlaze međusobno paralelno nakon prolaska kroz dodatnu optičku prizmu. Frekvencijska razlika Δv između laserskih zraka nakon izlaska iz AOM-a odgovara frekvenciji AOM-a. Iako je jedan mod odbačen na polarizacijskom filteru veća dužina laserske cijevi u odnosu na Zeemanovu metodu omogućuje titranje dva moda što daje ukupnu optičku snagu veću nego kod Zeemanove metoda stabilizacije. Navedena metoda AOM-a za stvaranje frekvencijskog pomaka omogućuje veće frekvencijske razlike u odnosu na Zeemanovu metodu, tipična razlika frekvencija je oko 20 MHz. S obzirom da se u svakom slučaju jedan mod gubi na polarizacijskom filteru, moguće

jer umjesto polarizacijskog filtera staviti još jednu Wollastonovu prizmu koja bi tada razdvojila glavnu zraku kako bi se mogla koristiti na dva interferometra. Komercijalno stabilizirani laseri tipično navode relativnu točnost frekvencije u vakuumu koja se tipično kreće u rasponu $\pm 0.1 - 0.8 \times 10^{-6}$ što je u najgorem slučaju približno dva puta točnije nego što preporuča CIPM. Provjera točne frekvencije se može napraviti s usporedbom s referentnim laserom, kao što je jedino stabilizirani HeNe laser ili često korišteni frekventni češalj. Često su specifikacije komercijalnih lasera zadane s velikim faktorom sigurnosti zbog mogućih raznih poremećaja u okolišu. Jedno od takvih poremećaja je refleksija zrake u lasersku šupljinu, ponekad samo $\sim 0.01\%$ reflektirane zrake može uzrokovati nestabilnosti. Obično se koristi Faradayev kavez kako bi se spriječila refleksija povratne zrake, korištenje AOM-a također osigurava visoku razinu zaštite od povratne zrake, a postiže ju usmjeravanjem od laserske šupljine ili je frekventno pomiče izvan krivulje pojačanja. [17][18]

4.3. Saturacijska spektroskopija (Lambov pad)

Kod stabilizacije saturacijskom spektroskopijom laser se stabilizira na neku od željenih apsorpcijskih linija danih para. Kada dođe ispunjenja određenih uvjeta koji se objašnjavaju kasnije u tekstu dolazi do smanjenja apsorpcije laserske zrake na frekvenciji prijelaza što se naziva Lambov pad (*engl. Lamb dip*). S obzirom da je Lambov pad samo efekt koji služi za stabilizaciju, dalje u tekstu će biti korišten naziv metode dan u naslovu ovog poglavlja.

Ukoliko se zamisli situacija u kojoj je laser moduliran niskom frekvencijom (u nastavku FM) s malom amplitudom modulacije (u nastavku AM), tada bi se moglo primijetiti da se središnja frekvencija lasera blago snižava i povećava. Takva situacija je prikazana slikom 47.a) na kojoj je pretpostavljeno da je širina spektralne linije višestruko manja od širine apsorpcijske linije. [19]



Slika 47. Pretvorba FM u AM na apsorpcijskoj liniji [19]

Sa slike 47.a) i 47.b) se može uočiti kako moduliranjem frekvencije lasera u području apsorpcijske linije dolazi do promjene intenziteta laserske zrake zbog kretanja po apsorpcijskoj liniji, odnosno frekvencijska modulacija lasera se pretvara u amplitudnu modulaciju kroz apsorpciju. S obzirom da fotodiode ne može detektirati promjenu frekvencije, takva pretvorba FM u AM omogućava fotiodiodi da detektira modulaciju. Također sa slika je vidljiva veza faze između laserskog FM-a i apsorpcijskog AM-a. Slika 47.c) prikazuje kako je pretvorba FM u AM izuzetno mala u točki maksimalne apsorpcije, odnosno za dovoljno malu amplitudu modulirane frekvencije teži u nulu. Na drugoj strani apsorpcijske linije prikazano slikom 47.b) može se vidjeti kako opet raste odnos FM u AM, ali sada s obzirom na lijevu stranu apsorpcije faza je obrnuta. Ukoliko se skeniranje nastavi izvan područja apsorpcijske linije AM nestaje zbog nedostatka apsorpcije. Ukoliko se sve promjene koje se događaju skeniranjem zabilježe moguće je uočiti da nakon prelaska središnje frekvencije apsorpcije dolazi do promjene u fazi odnosno promjene predznaka na krivulji 47.d) koja zapravo predstavlja derivaciju apsorpcije. [19].

Ukoliko je frekvencija lasera ν modulirana na frekvenciji Ω sam amplitudom modulacije m , tada se za transmitirani intenzitet I_T može pisati:

$$I_T(n) = I_T(n + m \sin\Omega t) \quad (4.3.1)$$

Ukoliko se raspiše Taylorov red:

$$\begin{aligned} I_T(\nu + m \sin\Omega t) &= I_T(\nu) + (m \sin\Omega t) \frac{dI_T}{d\nu} + \\ &\left(\frac{m^2 \sin^2\Omega t}{2!} \right) \frac{d^2 I_T}{d\nu^2} + \left(\frac{m^3 \sin^3\Omega t}{3!} \right) \frac{d^3 I_T}{d\nu^3} + \dots \end{aligned} \quad (4.3.2)$$

Te se uvrsti u izraz 4.3.1, dobiva se:

$$\begin{aligned} I_T(\nu + m \sin\Omega t) &= \left[I_T(\nu) + \frac{m^2}{4} \frac{d^2 I_T}{d\nu^2} + \dots \right] + \\ &\sin\Omega t \left[m \frac{dI_T}{d\nu} + \frac{m^3}{8} \sin^2\Omega t \frac{d^3 I_T}{d\nu^3} + \dots \right] + \\ &\cos 2\Omega t \left[-\frac{m^2}{4} \frac{d^2 I_T}{d\nu^2} + \dots \right] + \dots \end{aligned} \quad (4.3.3)$$

Iz izraza se može primijetiti da transmitirani intenzitet sadrži DC komponentu, komponentu koja oscilira na frekvenciji Ω , 2Ω itd. Ako se fazno osjetljiva detekcija provodi na frekvenciji Ω , tada komponenta $\sin\Omega t$ može biti izlučena iz signala. Ukoliko se radi o maloj amplitudi modulacije m , tada se koeficijent $\sin\Omega t$ množi sa prvom derivacijom transmitiranog

intenziteta, analogno vrijedi za detekciju 2Ω koja koristi drugu derivaciju, te za 3Ω koja se koristi kod jednog stabiliziranog HeNe lasera. [18][19]

Kao što je prethodno navedeno frekventna modulacija može pružiti bolje rezultate ukoliko se koristi saturacijska spektroskopija. Kod saturacijske spektroskopije se uz probnu zraku koja prolazi kroz apsorpcijsku ćeliju šalje i pumpna zraka koja propagira u $-\vec{k}$ smjeru. Navedene dvije zrake su međusobno pod jako malim kutem ili se pumpna zraka većeg intenziteta preklapa s probnom zrakom, jednostavno rečeno cilj je postići da njihovi snopovi zraka čine čim veći zajednički volumen, prikazano slikom 48. [18]



Slika 48. Preklapanje pumpne i probne zrake [19]

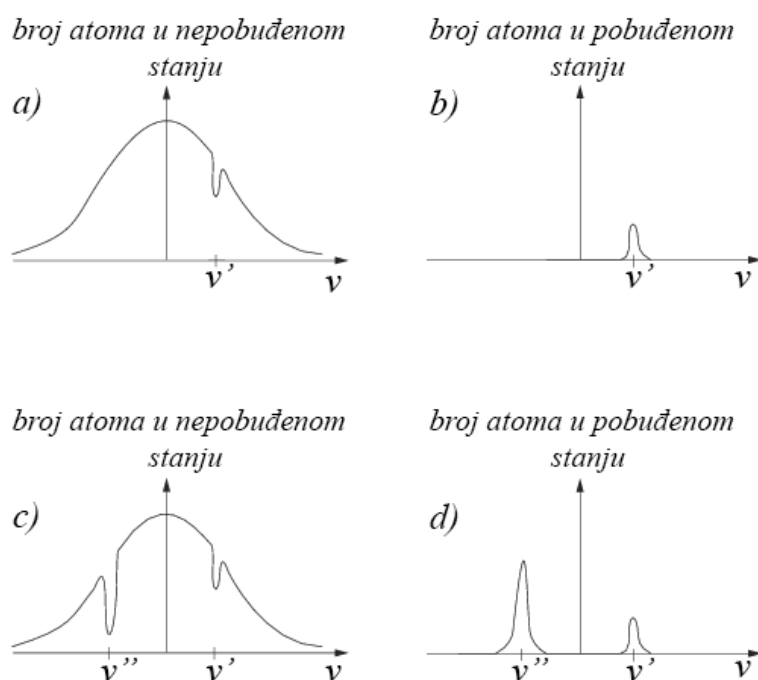
Rezultat preklapanja zraka značajno „smanjuje“ širinu apsorpcijske linije tako što eliminira Dopplerovo širenje apsorpcijskih linija, što je obično najznačajniji uzrok proširenih linija. Dopplerovo proširivanje apsorpcijskih linija se događa zbog kretanja atoma (ili molekula), no s njegovom eliminacijom moguće je uočiti hiperfinu strukturu atoma (ili molekula). Atom s nekom brzinom kretanja čija je frekvencija ν_0 apsorbira svjetlost iz lasera sa frekvencije ν samo ako je zadovoljen Dopplerov uvjet:

$$\nu - \nu_0 = \vec{v}' \cdot \vec{k} \quad (4.3.4)$$

Pri čemu je valni vektor \vec{k} definiran u točki 2.4, izrazom (2.4.5). Uvjet se može i pisati kao:

$$\nu = \nu_0 \left(1 + \frac{v'}{c} \right) \quad (4.3.5)$$

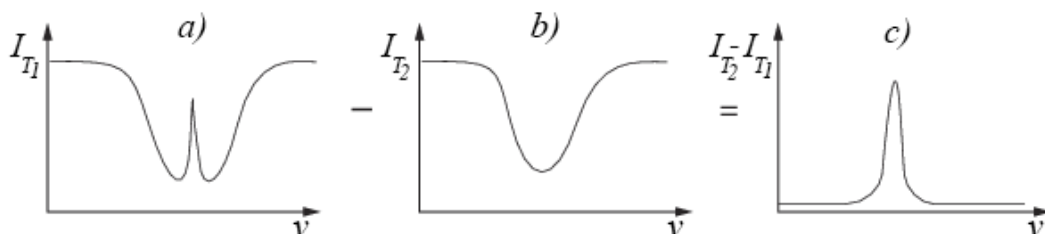
Gdje v' predstavlja komponentu brzine atoma, iz uvjeta je vidljivo da frekvencija lasera ne mora biti potpuno ista kao i frekvencija apsorpcije atoma da bi atom koji se kreće apsorbirao svjetlost. S obzirom da je distribucija brzina tipično po Maxwell-Boltzmannovoj distribuciji prisutan je širok raspon brzina što pridonosi širini spektra rezonantnih frekvencija. Pri skeniranju apsorpcijske linije pri svakoj laserskoj frekvenciji svjetlost koja propagira u \vec{k} smjeru apsorbirati će samo određeni atomi, ti atomi se klasificiraju kao određene brzinske skupine koji zadovoljavaju Dopplerov uvjet. Slika 49.a) prikazuje broj atoma u nepobuđenom stanju, te nakon apsorpcije određena brzinska skupina koja je jedina zadovoljava Dopplerov uvjet prelazi u pobuđeno stanje prikazano slikom 49.b). [18][19]



Slika 49. Broj atoma u nepobuđenom i pobuđenom stanju za probnu i pumpnu zraku [19]

Također može se primijetiti kako u nepobuđenom stanju postoji određeno područje na kojem atomi nedostaju, razlog tome je što je brzinska skupina iz tog područja sada u pobuđenom stanju. Na slici 49.c) je prikazano stanje nakon što kroz apsorpcijsku ćeliju prođe pumpna laserska zraka višeg intenziteta u odnosu na probnu, iste frekvencije s smjerom propagacije $-\vec{k}$. Vidljivo je kako je ona pobudila veći broj atoma u odnosu na probnu zraku, ali druge brzinske skupine. Ukoliko je laserska frekvencija ν blizu vrlo blizu rezonantne atomske frekvencije ν_0 tada će pumpna i probna zraka biti u interakciji s istom brzinskom skupinom, odnosno istim atomima. S obzirom da je pumpna zraka jača ona će saturirati veći broj atoma dok će probna zraka zbog već saturirane brzinske skupine, gotovo proći bez interakcije s atomima (interakcija s malim brojem atoma), odnosno probna zraka neće biti apsorbirana. [18][19]

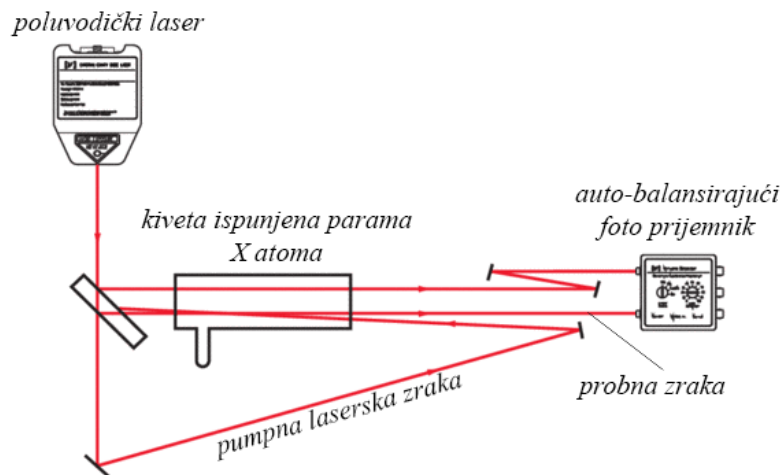
Transmitirani intenzitet probne zrake će tada izgledati kao na slici 50.c).



Slika 50. Suma signala dvije probne zrake [19]

Apsorpcijska linija prikazana slikom 50.a). u sredini ima izražen pad apsorpcije što je posljedica saturacije pumpnom laserskom zrakom, konačno stanje transmitiranog intenziteta probne zrake

će izgledati kao na 50.c). U tom izraženom padu apsorpcije se izvodi frekvencijska modulacija kao što je prikazano slikom 47, za to područje će biti dobiven *error* signal kojim će se kontrolirati sustav. Jedna vrsta djelomično automatiziranog sustava za stabilizaciju na prikazano *Doppler free* područje prikazana je slikom 51. [19]



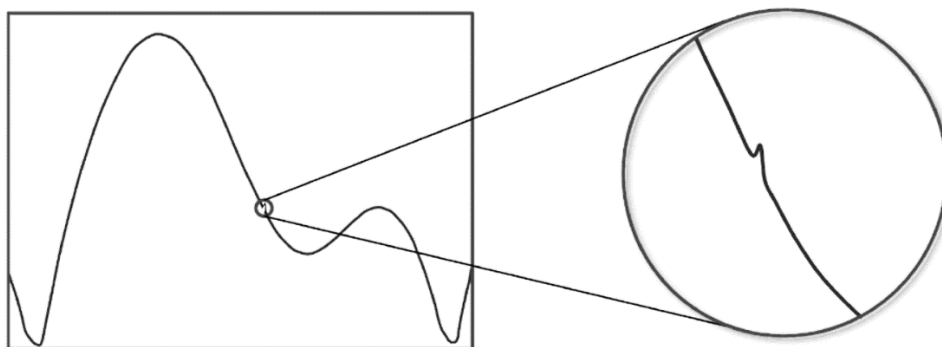
Slika 51. Shema stabilizacije FM saturacijskom spektroskopijom [19]

Pumpna saturacijska zraka se preklapa i propagira obrnuto ($-\vec{k}$) od slabe probne zrake (\vec{k}). Kroz kivetu prolaze obje slabe probne zrake no prva probna zraka prolazi kroz saturirano područje, razlike apsorpcijskih linija koje one vide su prikazane slikom 50, odnosno dva različita signala na fotodiodama omogućuju eliminaciju proširene Dopplerove linije, te ostaje samo *Doppler free* područje prikazano slikom 50.c). Konačno, intenziteti dvaju zraka mogu biti balansirani, ta se tada šum intenziteta lasera poništava. Takav postav se obično koristi kako bi se vidjela hiperfina struktura određenog atoma koja je obično nevidljiva zbog Dopplerovog širenja apsorpcijske linije. [19]

4.4. Jodno stabilizirani HeNe laser

Metoda koja se koristi za stabilizaciju primarnog lasera u dimenzionalnom mjeriteljstvu pomoću kojeg se definira jedinica metra je saturacijsko apsorpcijska *doppler free* spektroskopija koja je objašnjena u točki 4.3. S obzirom da se radi o najbitnijem laseru u dimenzionalnom mjeriteljstvu u ovom potpoglavlju će se dati uvid stabilizacije jodno stabiliziranog HeNe lasera. [20]

Apsorpcijski spektar molekule joda ima mnoštvo hiperfinskih prijelaza u zelenom i crvenom području vidljivog elektromagnetskog spektra što se poklapa s određenim valnim duljinama emisije HeNe lasera.[18] Valna duljina koja se koristi za definiciju metra je ~ 633 nm ili točnije prema preporukama BIPM-a $632\,991\,212.58$ fm što odgovara frekvenciji od $473\,612\,353\,604$ kHz sa mjernom relativnom nesigurnošću od 2.1×10^{-11} . [21] Na ~ 633 nm se poklapaju emisijska linija proširena Dopplerovim efektom izotopa ^{22}Ne i vibracijskog prijelaza $11 - 5 R(127)$ linije izotopa $^{127}\text{I}_2$. [18] Za razliku od stabilizacije opisane u točki 4.3 ovdje probna i pumpna zraka nisu odvojene već se apsorpcijska ćelija joda nalazi unutar laserske šupljine (ali odvojena od aktivnog medija) tako da uspostavljeni stacionarni valovi unutar laserske šupljine predstavljaju pumpnu i probnu zraku. Takav postav omogućava apsorpcijskoj ćeliji neovisnost od perturbacija koje se događaju uslijed procesa nastajanja laserske zrake kao što su varijacije tlaka uslijed električnog pražnjenja unutar cijevi HeNe. [17] Kao što je detaljno opisano točkom 4.3 uslijed saturacije molekula dolazi do pojave Lambog pada u obliku Lorenzove krivulje. Karakteristika takvih malih krivulja je što su *Doppler free*, imaju visoku obnovljivost i relativno su imune na perturbacije. [17][20] Zbog njihovih pojava dolazi do smanjenja gubitaka unutar laserske šupljine uslijed pada apsorpcije što rezultira blagim povećanjem optičke snage lasera ($\sim 0.1\%$). [18] Prikaz *Doppler free* krivulje superimponirane na Doppler proširenu krivulju pojačanja HeNe aktivnog medija prikazana je slikom 52.



Slika 52. Krivulja pojačanja HeNe i jodne ćelije [17]

Kao što je vidljivo sa slike, takav mali pad apsorpcije, odnosno povećanje optičke snage gotovo nije moguće detektirati zbog varijacije optičke snage povezane s električnim pražnjenjem unutar aktivnog medija. Ukoliko se laserska frekvencija modulira u odnosu na apsorpcijsku liniju joda tada je varijacija optičke snage do 10%. Kako bi se stabilizirala frekvencija na centar takvog slabog signala sakrivenog u relativno visokom pozadinskom šumu, primjenjuju se tehnike modulacije frekvencije višeg reda. Kako bi se modulirala frekvencija lasera, duljina laserske šupljine se periodično mijenja s frekvencijom od par kHz preko visokog napona primijenjenog na piezoelektrik koji se nalazi na jednom od laserskih zrcala. Fazno osjetljivi detektor (*lock-in* pojačalo) koji mijenja polaritet svakih pola ciklusa modulacijskog signala, uzrokuje u kasnijoj integraciji signala poništavanje svih frekvencijskih komponenta u detektiranom signalu osim onih koje se događaju kao posljedica frekvencijske modulacije. Ukoliko se razmatra varijacija optičke snage lasera $P_L(\omega)$ kao funkcija kružne frekvencije lasera ω tada kao posljedica harmoničke modulacije kružne frekvencije lasera oko laserske središnje frekvencije ω_0 , optička snaga varira:

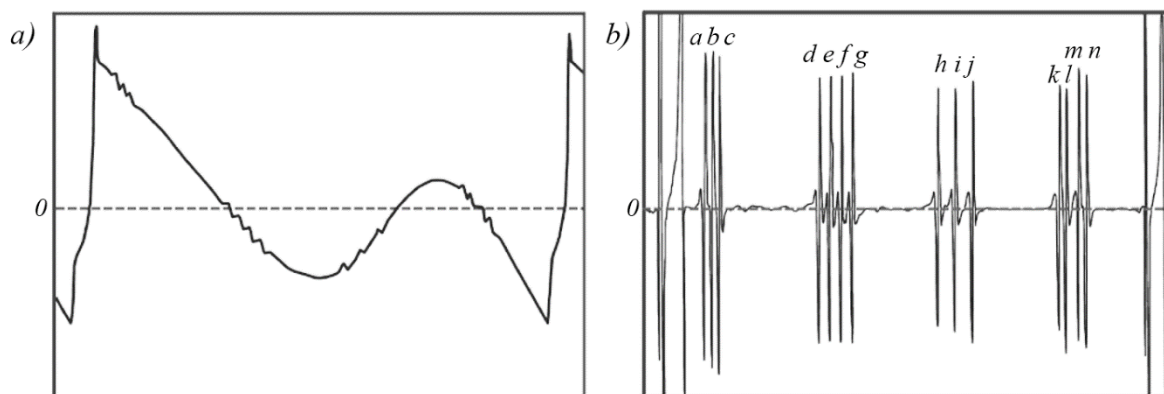
$$P_L(\omega) = P_L(\omega_0 + \Delta\omega \sin \omega_m t) \quad (4.4.1)$$

Gdje je $\Delta\omega$ amplituda frekvencijske modulacije. Raspisivanje preko Taylorovog reda:

$$\begin{aligned} P_L(\omega) = P_L(\omega_0) + \Delta\omega \sin \omega_m t \left. \frac{dP_L(\omega)}{d\omega} \right|_{\omega_0} + \frac{\Delta\omega^2}{2!} \sin^2 \omega_m t \left. \frac{d^2P_L(\omega)}{d\omega^2} \right|_{\omega_0} \\ + \frac{\Delta\omega^3}{3!} \sin^3 \omega_m t \left. \frac{d^3P_L(\omega)}{d\omega^3} \right|_{\omega_0} + \dots \end{aligned} \quad (4.4.2)$$

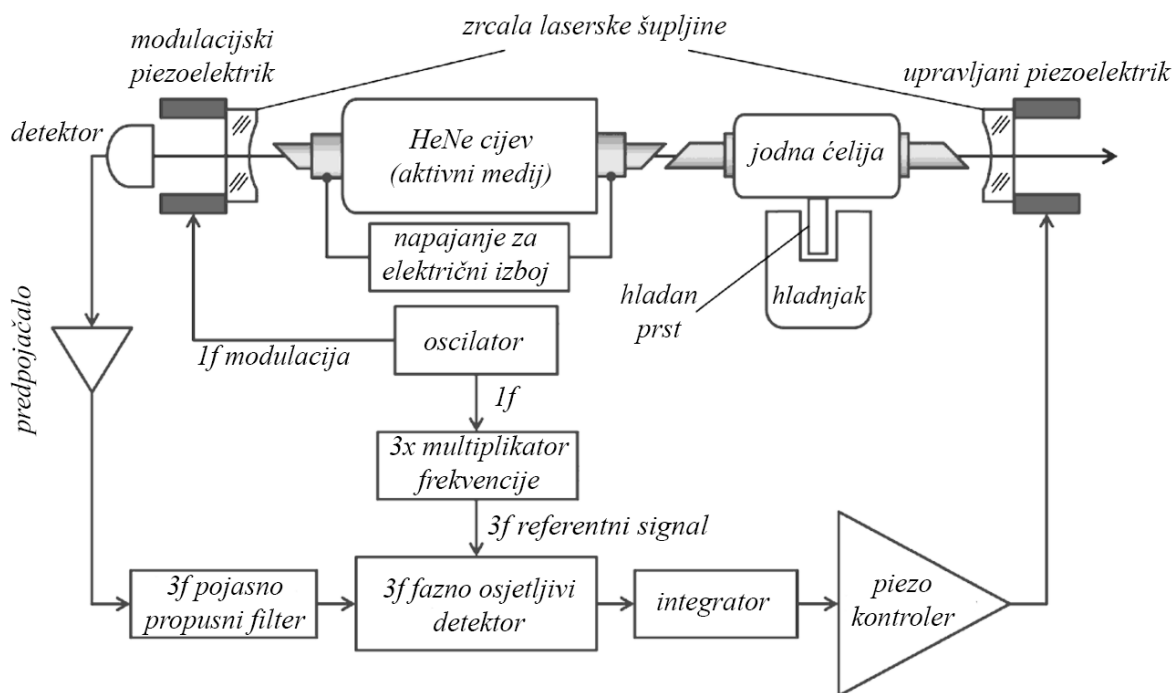
Vidljivo je da $P_L(\omega)$ sadrži komponente višeg reda $\sin^n \omega_m$, odnosno prema trigonometrijskim pravilima harmoničkih funkcija $\sin^n \omega_m$ sadrži komponente proporcionalne $\sin n\omega_m$. Može se reći da $P_L(\omega)$ sadrži više harmonike, $n\omega_m$, modulirane frekvencije čija je amplituda proporcionalna n -toj derivaciji optičke snage lasera. U tipičnom postavu jodno stabiliziranog HeNe lasera za stabilizaciju se koristi metoda trećih harmonika, odnosno komponente s kružnom frekvencijom $3\omega_m$ su filtrirane iz detektiranog signala i poslane u fazno osjetljivi detektor koji se pobuđuje na frekvenciju $3\omega_m$. [18]

Metoda trećeg harmonika određuje treću derivaciju signala što rezultira asimetričnim signalom koji prelazi nulu na lokaciji koja odgovara središnjim frekvencijama apsorpcijskih linija, te se na jednu od njih stabilizira laser (prema preporuci BIPM-a, f linija). [17][21] Slikom 53 prikazana je prva i treća derivacija signala.



Slika 53. Signal a) prvog i b) trećeg harmonika joda u odnosu na frekvenciju [17]

Sa slike je vidljiva razlika između prve i treće derivacije, ukoliko se promatraju sve derivacije apsorpcije na slici 53.a) može se primijetiti da su daleko od referentne nule, jedina linija koja je blizu nule je *d* linija. Pri trećoj derivaciji apsorpcijskih linija (slika 53.b) točka u kojoj signal za pojedinu liniju prelazi nulu (približno) odgovara središnjoj frekvenciji apsorpcijske linije što je razlog zašto se one koriste za stabilizaciju frekvencije. Slikom 54 je prikazana shema jedno stabilizacije HeNe lasera. [17][18]



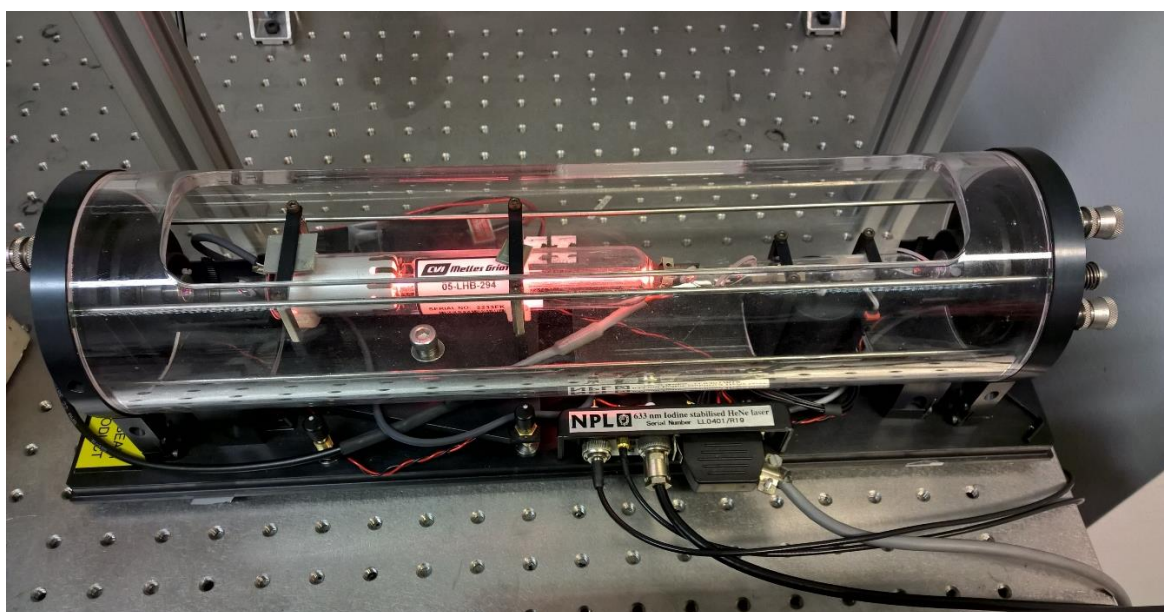
Slika 54. Shematski prikaz jodne stabilizacije HeNe lasera [17]

Laserska emisija aktivnog medija (neona) uspostavlja stacionarni val na valnoj duljini ~ 633 nm unutar laserske šupljine obložene s dva zrcala. Uspostavljeni stacionarni val prolazi u oba smjera kroz temperaturno i tlačno reguliranu jodnu ćeliju gdje se dio laserske zrake apsorbira (detaljno opisano na početku potpoglavlja). Modulacijski piezoelektrik harmonički

modulira frekvenciju lasera sa $1f$ što se očituje na optičkoj snazi laserske zrake koju detektor na izlazu detektira i šalje na predpojačalo. Zatim signal ide na $3f$ pojasno propusni filter koji propušta sve frekvencije između dviju graničnih frekvencija, a guši ostale. Treći harmonik signala detektora koji prolazi kroz pojasno propusni filter tada je fazno demoduliran sa referentnim $3f$ signalom koji dolazi sa oscilatora preko $3f$ frekvencijskog multiplikatora (odnosno referentni treći harmonik). Konačni dobiveni signal treće derivacije služi kao *error* signal za upravljanje piezoelektrikom koji regulacijom duljine laserske šupljine teži eliminirati vrijednost *error* signala. [17][18]

Frekvencija jodno stabiliziranog HeNe lasera ovisi o više radnih parametara kao što je amplituda, $\Delta\omega$, frekvencijske modulacije, tlak unutar jodne ćelije ili optička snaga lasera unutar laserske šupljine. Temperatura jodne ćelije mijenja tlak unutar ćelije, te utječe na broj sudara molekula joda što vodi do tlačnog širenja i pomaka apsorpcijske linije. Tipično frekvencija varira za 6 kHz/ Pa na oko 15 °C. Prema provedenim istraživanjima jodno stabilizirani HeNe laseri na ~ 633 nm se razlikuju u granicama od 10 kHz ukoliko svi rade pod istim uvjetima koje propisuje CIPM. Prema uvjetima, temperatura stjenke jodne ćelije bi se trebala držati na $25^\circ\text{C} \pm 5^\circ\text{C}$ sa temperaturom joda na $15^\circ\text{C} \pm 0,2^\circ\text{C}$ kako bi pritisak unutar jodne ćelije bio konstantan. Frekvencija modulacije laserske frekvencije je $6\text{ MHz} \pm 0,3\text{ MHz}$ sa internom optičkom snagom propagacije laserske zrake $10\text{ mW} \pm 5\text{ mW}$. Ukoliko su navedeni uvjeti zadovoljeni, *mise en pratique* specificira mjernu nesigurnost lasera od $2,5 \times 10^{-11}$. [18]

Slikom 55 prikazan je jodno stabilizirani HeNe laser Nacionalnog laboratorija za duljinu na FSB-u.



Slika 55. Jodno stabilizirani HeNe laser na FSB

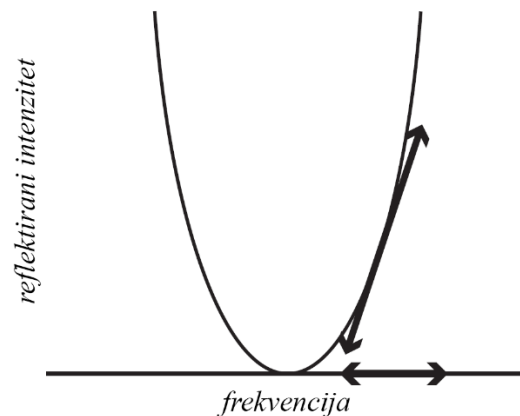
4.5. Pound-Drever-Hall- PDH stabilizacija

Jedna od trenutno poznatijih metoda stabilizacije je PDH metoda zbog njezine primjene kod LIGO-a (*Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory*) odnosno detekcije gravitacijskih valova, te stabilnosti bolje od 100 Hz ili relativne frekvencijske stabilnosti bolje od 1.7×10^{-13} . [22][23] Metoda se temelji na stabilizaciji frekvencije na Fabry-Perot lasersku šupljinu poznate stabilnosti. Ukoliko se frekvencija lasera dinamički podešava da odgovara rezonantnoj frekvenciji Fabry-Perot šupljine, tada će biti postignuta stabilnost lasera koja je ista kao i stabilnost Fabry-Perot šupljine. Metodu je osmislio Ron Drever temeljeno na sličnoj metodi u području mikrovalova koju je koristio R.V.Pound, dok je praktičnu primjenu razvio Jan Hall. [24]

Ukoliko se laser nestabilne frekvencije pokušava stabilizirati na stabilnu Fabry-Perot šupljinu tada će biti neizbježno odstupanje laserske frekvencije od rezonantne frekvencije navedene šupljine, $\delta\nu$. Kako bi se minimiziralo odstupanje $\delta\nu$ potrebno ga je konstantno mjeriti, a problem nastaje zbog činjenice što trenutno nema razvijene elektronike koja bi odstupanje mogla direktno mjeriti, pa se poseže za indirektnim metodama. Jedna od mogućih metoda je putem reflektivnih svojstva Fabry-Perot šupljine, odnosno kada je laserska frekvencija (odnosni se na svjetlost, laserski sop, lasersku zraku) daleko od rezonantne frekvencije šupljine, sva svjetlost će biti reflektirana. Kada je laserska frekvencija blizu rezonantne frekvencije šupljine, tada reflektivni koeficijent, F , ovisi o $\delta\nu$. [24]

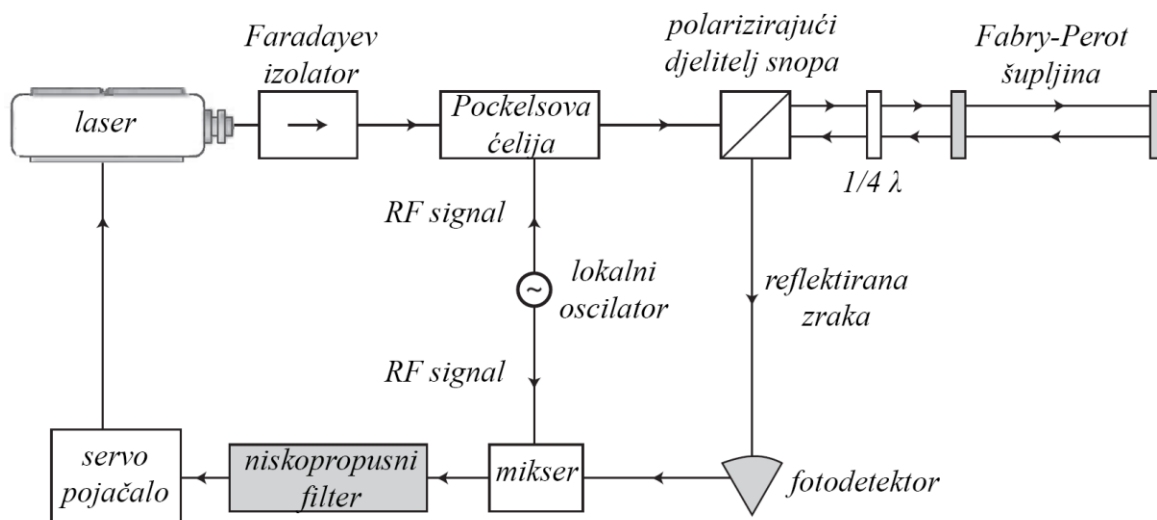
Starije metode stabilizacije su koristile ovisnost o F za stabilizaciju, no s obzirom da je F simetričan oko rezonantne frekvencije nije moguće razlučiti s koje strane rezonantne frekvencije šupljine se nalazi laser. Fino podešavajući frekvenciju lasera nije bilo moguće razlučiti između fluktuacije laserske frekvencije koja mijenja intenzitet transmitiranog signala i fluktuacije samog intenziteta laserske zrake. [25]

PDH metoda uspješno izbjegava navedeni problem koristeći reflektiranu zraku i derivaciju F s odnosu na $\delta\nu$ što rezultira s asimetričnim signalom oko rezonantne frekvencije šupljine. Takav signal je proporcionalan frekvencijskom pomaku, a koristi se kao *error* signal koji indicira s koje strane rezonancije se laserska frekvencija nalazi. Kako bi se ustanovila derivacija u svakoj točki, moguće je fino podešavati frekvenciju lasera te promatrati varijaciju intenziteta reflektirane laserske zrake koju prikazuje slika 56. [23]



Slika 56. Promjena reflektiranog intenziteta s varijacijom frekvencije [25]

Iznad rezonantne frekvencije šupljine, intenzitet reflektirane zrake će veći i u fazi s varijacijom frekvencije. Povećanjem frekvencije lasera u području ispod rezonantne frekvencije šupljine intenzitet će se postupno povećavati i biti 180° izvan faze. Na rezonantnoj frekvenciji Fabry-Perot šupljine intenzitet se neće mijenjati značajno. S malim varijacijama frekvencije moguće je uočiti na kojoj strani rezonantne frekvencije Fabry-Perot šupljine se laser nalazi što je osnovni princip rada PDH metode. Na slici 57 je prikazan shematski prikaz stabilizacije PDH metodom. [23]



Slika 57. Shema Pound-Drever-Hall stabilizacije [22]

Kao što prikazuje slika laserska zraka prolazi kroz Faradayev izolator, zatim kroz Pockelsovu ćeliju (spojenu na lokalni oscilator) koja modulira frekvenciju te nastavlja prema Fabry-Perot šupljini. Reflektirana laserska zraka tada prolazi kroz optički izolator koji se sastoji od četvrtvalne ploče i polarizirajućeg djelitelja snopa koji služi kako se reflektirana zraka ne bi vratila u laser i destabilizirala ga. Djelitelj snopa usmjerava lasersku zraku na fotodetektor. Mikser čiji

je izlaz produkt ulaznih signala (odnosno izlaz lokalnog oscilatora i izlaz fotodetektora) sadrži signal sa DC komponentom (ili vrlo niskom frekvencijom) i dvostrukom frekvencijom modulacije. Signal s vrlo niskom frekvencijom je u ovom slučaju od interesa jer on definira derivaciju reflektiranog signala koja se izolira preko niskopropusnog filtra. Bitno je napomenuti da je predznak mikserovog izlaza različit sa obje strane rezonantne frekvencije Fabry-Perot šupljine, a točno na frekvenciji rezonancije izlaz je jednak nuli. Niske frekvencije koje su prošle kroz niskopropusni filter tada idu na servo pojačalo, te nastavljaju prema laseru koji se tada može smatrati stabiliziranim sa maksimalnom stabilnošću koju definira Fabry-Perot šupljina. Opisana stabilizacija vrijedi u slučaju kada je modulirana frekvencija mala. U slučaju visoke frekvencije moguće je da zbog nedovoljno vremena da se laserska zraka unutar šupljine izgradi krivulja prikazana slikom 56 će imati drugačiji oblik. No, ovakav postav i dalje može funkcionirati pri visokim frekvencijama modulacije, te će u tom slučaju svojstva šuma i propusnost servo pojačala biti poboljšana (no problem krivulje i dalje ostaje). [22][23][24]

Princip stabilizacije ne govori previše o signalima koji su ključni za stabilizaciju, te je potrebno razmotriti što se zapravo događa unutar elektronike. Ako se krene sa Fabry-Perot šupljinom i pretpostavkom da upadna i reflektirana zraka imaju konstantne frekvencije, tada se može pisati električno polje upadne zrake kao:

$$E_{inc} = E_0 e^{i\omega t} \quad (4.5.1)$$

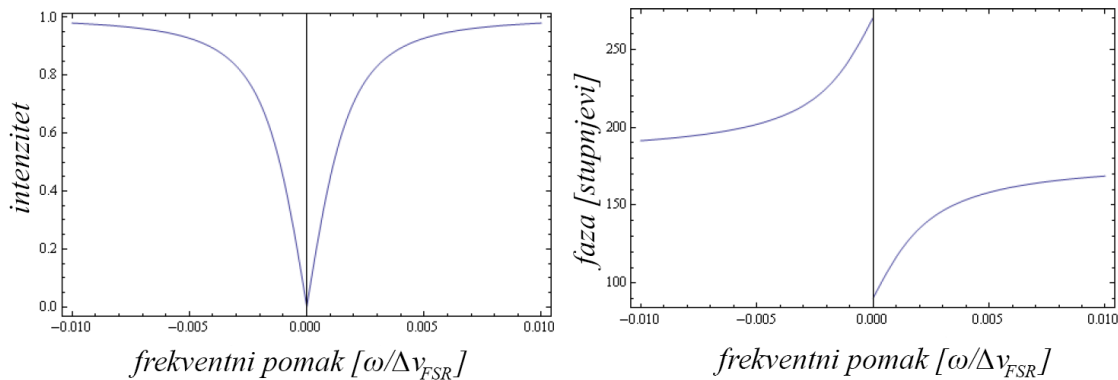
Dok se ukupna reflektirana zraka sastoji od zrake reflektirane od zrcala i zraka koje „cure“ iz Fabry-Perot šupljine koje su dio uspostavljenog stacionarnog vala. Faza reflektirane zrake ima pomak u fazi od π , dok se zrake koje „cure“ iz šupljine sastoje od više faznih pomaka, prvi povratni put zrake šupljinom duljine L ima fazni pomak od $-2L\omega/c$, druga zraka sa prijeđenim dva puta većim putem ima fazni pomak od $-4L\omega/c$ itd. U slučaju šupljine sa simetričnim zrcalima kojoj je refleksija r i transmisija $t = \sqrt{1 - r^2}$ za reflektiranu zraku se može pisati:

$$E_{ref} = E_0 (r e^{i(\omega t + \pi)} + t^2 r e^{i(\omega t - 2L/c)} + t^2 r^3 e^{i(\omega t - 4L/c)} + \dots) \quad (4.5.2)$$

Što se čita kao reflektirana zraka sa faznim pomakom od π , zraka koja je napravila jedan povratni put unutar šupljine te izašla van, zraka koja je napravila dva povratna puta te izašla van itd. Pojednostavljeno za refleksijski koeficijent $F(\omega)$ se može pisati:

$$F(\omega) = \frac{E_{ref}}{E_{inc}} = \frac{r(e^{i\omega/\Delta\nu_{FSR}} - 1)}{1 - r^2 e^{i\omega/\Delta\nu_{FSR}}} \quad (4.5.3)$$

Gdje je $\Delta\nu_{FSR} = c/2L$ slobodni spektralni raspon (objašnjeno u točki 5.1.1.1). Slika 58 prikazuje intenzitet i fazu $F(\omega)$. [23][24]



Slika 58. Odnos intenziteta i faznog pomaka s varijacijom frekvencije [24]

Laserska zraka koja je modulirana Pockelsovom ćelijom na frekvenciji $\Omega/2\pi$ će imati električno polje:

$$E_{inc} = E_0 e^{i(\omega t + \beta \sin \Omega t)} \quad (4.5.4)$$

$$E_{inc} = E_0 (J_0(\beta) e^{i\omega t} + J_1(\beta) e^{i(\omega + \Omega)t} - J_1(\beta) e^{i(\omega - \Omega)t})$$

Uz pretpostavku malog β , pri čemu je β modulacijska dubina a J su Besselove funkcije. Iz izraza je vidljivo da postoje tri različite upadne zrake na Fabry-Perot šupljini, primarna zraka frekvencije $\omega/2\pi$ i dvije *sideband* zrake frekvencije $(\omega + \Omega)/2\pi$ i $(\omega - \Omega)/2\pi$ koje su produkt modulacije na frekvenciji $\Omega/2\pi$. Kada se opisana fazno modulirana zraka odbije od Fabry-Perot šupljine, svaka frekvencijska komponenta se biti transformirana refleksijskim koeficijentom $F(\omega)$ što rezultira sa električnim poljem reflektirane zrake:

$$E_{ref} = E_0 [F(\omega) J_0(\beta) e^{i\omega t} + F(\omega + \Omega) J_1(\beta) e^{i(\omega + \Omega)t} - F(\omega - \Omega) J_1(\beta) e^{i(\omega - \Omega)t}] \quad (4.5.5)$$

No s obzirom da se s fotodetektorom mjeri snagu reflektirane zrake, $P_{ref} = |E_{ref}|^2$ slijedi:

$$\begin{aligned} P_{ref} = & P_c |F(\omega)|^2 + P_s \{|F(\omega + \Omega)|^2 + |F(\omega - \Omega)|^2\} \\ & + 2\sqrt{P_c P_s} \operatorname{Re}\{F(\omega) F^*(\omega + \Omega) - F^*(\omega) F(\omega - \Omega)\} \cdot \cos \Omega t \\ & + 2\sqrt{P_c P_s} \operatorname{Im}\{F(\omega) F^*(\omega + \Omega) - F^*(\omega) F(\omega - \Omega)\} \cdot \sin \Omega t \\ & + (O[2\Omega]) \end{aligned} \quad (4.5.6)$$

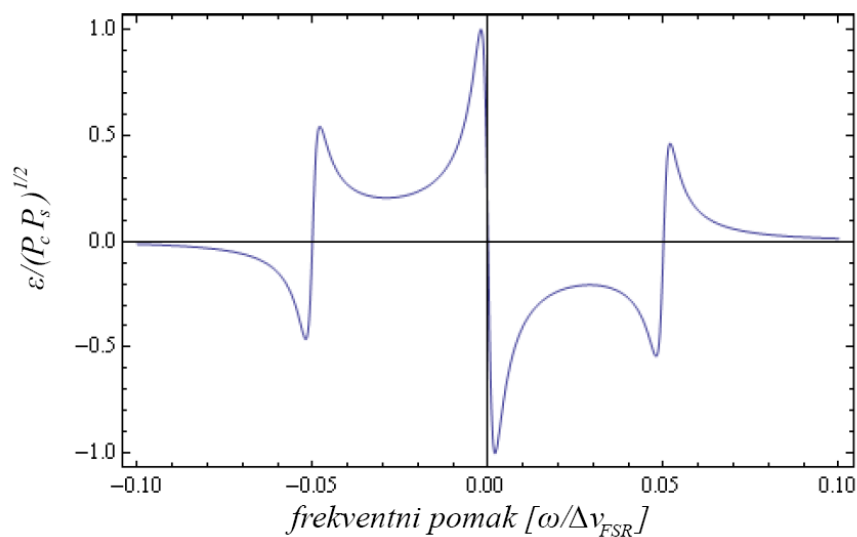
Pri čemu je P_c snaga reflektirane glavne zrake, a P_s je snaga *sideband* komponenta. Iz izraza je vidljivo da ukupna reflektirana zraka sadrži više komponenta, odnosno DC komponentu, dvije komponente koje osciliraju na frekvenciji modulacije pomaknute za $\pm\Omega$ od centralne frekvencije i komponente višeg reda. Kako bi se dobile informacije o fazi potrebno je izolirati jednu od komponenta oscilacije, za visoku frekvenciju modulacije komponenta $\sin \Omega t$ sa imaginarnom komponentom $F(\omega)$ će biti dominantna. S obzirom da je ona proporcionalna

početnom signalu koji prolazi kroz Pockelsovu ćeliju mikser će dati produkt detekirane snage $\sin\Omega t$ komponente i $\sin\Omega t$ lokalnog oscilatora što će rezultirati DC komponentom i $\cos 2\Omega t$. [23][24][25]

Prolaskom kroz niskopropusni filter dobiti će se *error* signal:

$$\varepsilon = 2\sqrt{P_c P_s} \operatorname{Im}\{F(\omega)F^*(\omega + \Omega) - F^*(\omega)F(\omega - \Omega)\} \quad (4.5.7)$$

Slika 59 prikazuje *error* signal s obzirom na frekvencijski pomak od rezonancije za frekvenciju modulacije 5% od FSR-a Fabry-Perot šupljine.



Slika 59. Error signal kod PDH metode [24]

Sa slike je vidljivo da u blizini rezonancije signal ima veliki nagib što ima pozitivan utjecaj na servo kontroler koji za malu promjenu frekvencije bilježi veliku grešku. Ukoliko se frekvencija modulacije poveća tada će se povećati i Ω što znači da će dva *sidebanda* prikazana na slici biti više udaljena od centralne frekvencije te će biti totalno reflektirani od Fabry-Perot šupljine. Navedeni *error* signal se šalje u neku vrstu servo sustava kao što je PID kontroler, kod poluvodičkih lasera obično se koristi samo PI kontroler jer poluvodički laseri imaju brz odaziv pa D član nije potreban. Kod HeNe lasera se može koristiti zrcalo s piezoelektrikom unutar laserske šupljine koje mijenjanjem duljine laserske šupljine mijenja frekvenciju na kojoj se mogu formirati stacionarni valovi, odnosno piezoelektrikom održava stalnu frekvenciju poništavajući razne tipove okolišnih utjecaja, od kojih je temperaturno širenje najznačajnije. [24]

5. EKSPERIMENTALNI DIO

Cilj eksperimentalnog dijela diplomskog rada je karakterizirati lasere dostupne u Laboratoriju za precizna mjerenja dužina na Katedri za mjerenje i kontrolu na FSB-u, provedbom mjerenja na Institutu za fiziku u Zagrebu. Dva tipa lasera koji su trenutno dostupni za rad su: „CUBE 405-100C“ proizvođača Coherent i „HTPS-EC Tunable HeNe Laser“ proizvođača Thorlabs.

5.1. HTPS helij-neonski laser

HTPS laserski sustav sastoji se od plazma cijevi niskih gubitaka sa jednim prozorom pod Brewsterovim kutem te vanjske Littrow prizme. Podešavajući kut Littrow prizme s mikrometarskim vijkom sa zadnje strane laserskog sustava, moguće je birati između određenih neonskih tranzicija u vidljivom spektru. Slika 60 prikazuje HTPS laserski sustav.



Slika 60. HTPS-EC Tunable HeNe Laser [26]

5.1.1. Specifikacije

Tablica 3. HTPS-EC Tunable HeNe Laser specifikacije [26]

Specifikacija	Vrijednost
Valna duljina	633/612/604/594/543 nm
Maksimalna izlazna snaga	10.0 mW
Minimalna izlazna snaga	4.0/2.5/0.5/0.6/0.3 mW
Udaljenost longitudinalnih modova	428 MHz
Polarizacija	Linearna > 500:1
$1/e^2$ Promjer laserske zrake	0.77/0.76/0.75/0.74/0.71 mm
Divergencija laserske zrake	1.05/1.03/1.02/1.02/0.97 mrad
Kratkoročni drift laserske zrake	<0.20 mrad
Dugoročni drift laserske zrake	<0.05 mrad
Početni napon	<10 kVDC
Šum (30Hz-10Mhz)	<0,1% RMS
Transferzalni mod	TEM ₀₀ > 99%
Vrijeme zagrijavanja	30min
Radni napon	2200 VDC
Radna struja	5.25 mA

Kako bi se u potpunosti razumjele neke od ključnih specifikacija potrebnih za upravljanje laserom, bitno ih je teoretski pojasniti.

5.1.1.1. Udaljenost longitudinalnih modova

U prethodnim poglavljima usputno se spominjao pojam optičkog rezonatora ili optičke laserske šupljine (*engl. optical resonator, optical cavity*) koja predstavlja ključnu komponenta lasera.

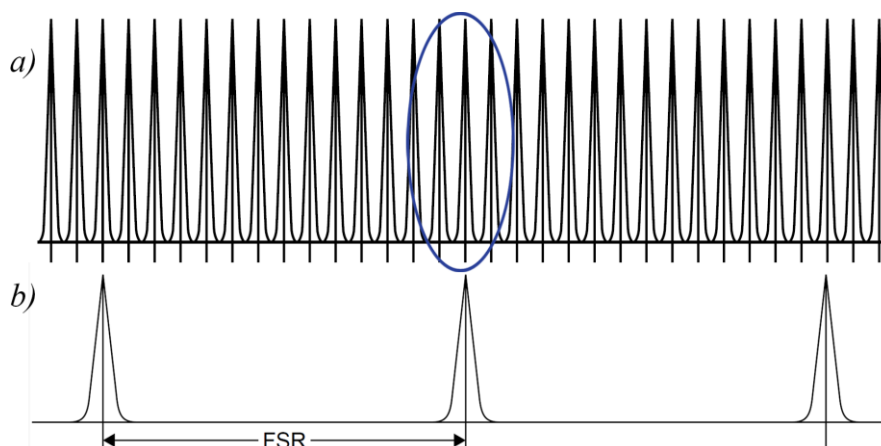
U najjednostavnijem obliku sastoji od šupljine sa dva ogledala. Konstrukcija laserske šupljine je pomno proračunata jer on služi i kao rezonantna optička šupljina koja je zapravo primitivni filter frekvencija laserskog zračenja. Slika 9.a) u točki 2.5. može poslužiti kao prikaz laserske šupljine sa tri dozvoljene frekvencije unutar duljine L . Matematička veza rezonantnih frekvencija unutar laserske šupljine i duljine laserske šupljine glasi:

$$L = m \times \frac{\lambda}{2} \quad (5.1.1.1.1)$$

Odnosno, duljina L je jednaka umnošku cijelog broja m ($m = 1, 2, 3, \dots$) i polovici valne duljine λ . Izraz (5.1.1.1.1) sa osnovnim izrazom za povezanost valne duljine i frekvencije $\lambda = c/v$, daje vezu između frekvencije i duljine laserske šupljine:

$$v = m \times \frac{c}{2Ln} \quad (5.1.1.1.2)$$

U izrazu je dodana komponenta indeks loma n . Unutar laserske šupljine dolazi do pojave rezonantnih valnih duljina (*engl. resonant wavelenghts*), rezonantnih frekvencija (*engl. resonant frequencies*) longitudinalnih modova (*engl. longitudinal modes*) ili stacionarnih valova (*engl. standing waves*) svi nazivi predstavljaju istu fizikalnu pojavu, a ovdje kada se priča o laserskoj šupljini kao komponenti lasera će se koristiti naziv longitudinalnih modova. Sve rezonantne frekvencije su definirane jednadžbom (5.1.1.1.2). Sve frekvencije za koje m nije cijeli broj nestati će zbog destruktivne interferencije (princip objašnjen u točki 2.4).



Slika 61. a) Rezonantne frekvencije, b) Slobodni spektralni raspon [12]

Usprkos filtraciji frekvencija, unutar laserske šupljine postoji veliki broj dopuštenih rezonantnih frekvencija. [12]

Slika 61.a) prikazuje rezonantne frekvencije koje imaju definirani razmak između dva susjedna maksimuma koji se naziva slobodni spektralni raspon (*engl. free spectral range – FSR*) ili kao što je u specifikacijama navedeno udaljenost longitudinalnih modova, prikazani slikom 61.b).

5.1.1.2. Filtriranje rezonantnih frekvencija

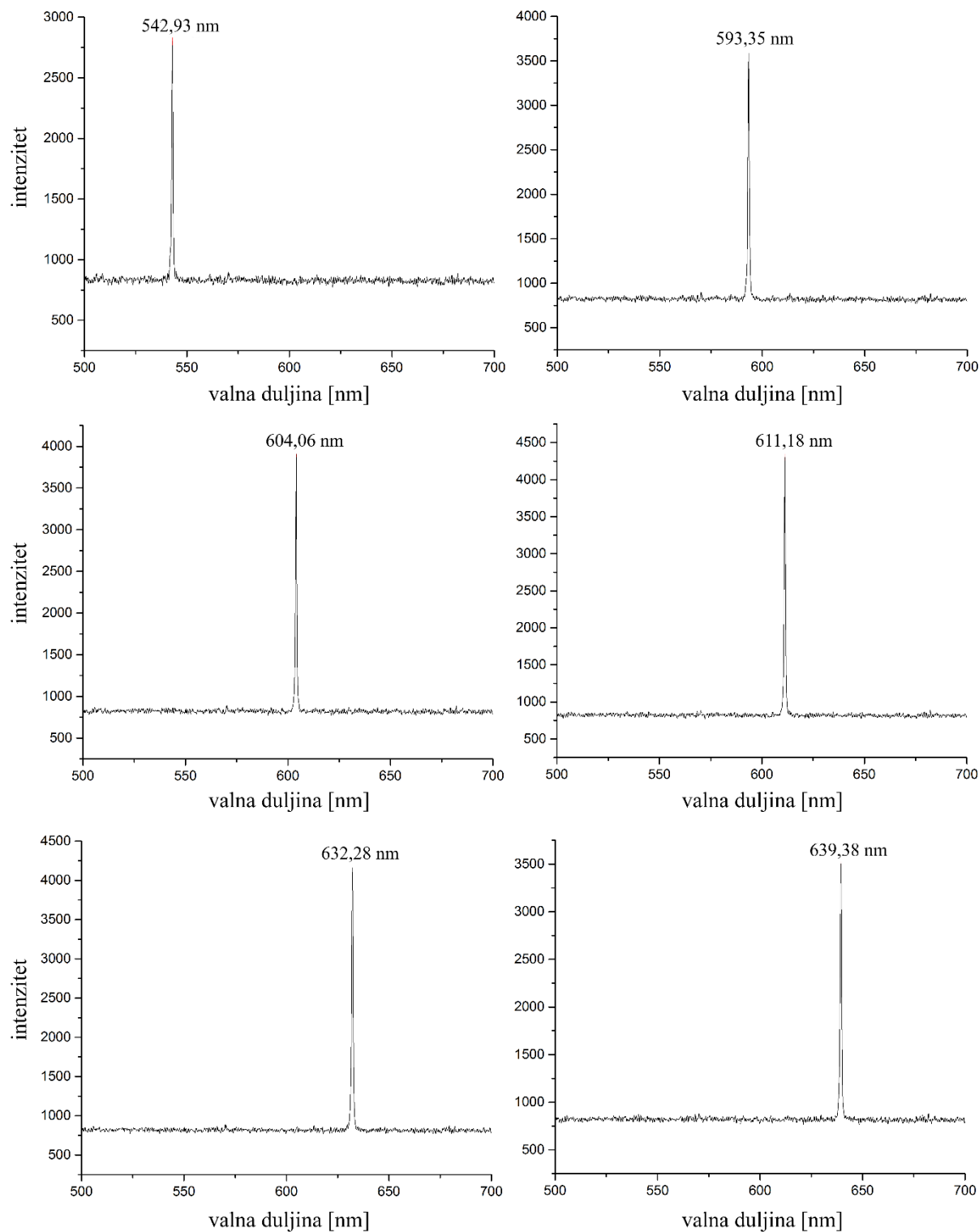
U specifikacijama lasera je navedeno kako je moguće mijenjati valne duljine, na temelju usvojenog znanja iz točke (5.1.1.1). može se zaključiti da laseri mogu funkcionirati u jednomodnom (*engl. single mode laser*) i višemodnom (*engl. multimode laser*) načinu rada.

Višemodni način rada znači da će istovremeno laser emitirati više longitudinalnih modova što znači i veći ukupni intenzitet zračenja zbog više dopuštenih energetskih tranzicija na različitim frekvencijama. Kako bi se dobio samo jedan longitudinalni mod može se koristiti više metoda kojima je cilj suzbiti osciliranje neželjenih frekvencija. Moguće je podešavanje zrcala koje ima visok koeficijent refleksije samo za neke frekvencije, kao posljedica, druge frekvencije u manjoj mjeri osciliraju. Takva zrcala se često koriste kod HeNe lasera kod kojih se teži postići visoki koeficijent refleksije na valnoj duljini ~ 633 nm, a manji na ostalima. Uz zrcala za filtriranje se koriste još prizme i etaloni. [12]

U navedenom HeNe laseru koristi se Littrow prizma koju je moguće podešavati na određeni kut. Podešavanjem kuta prizme neke frekvencije osciliraju dok druge imaju velike gubitke pa na ih na izlazu laserske zrake nije moguće uočiti.

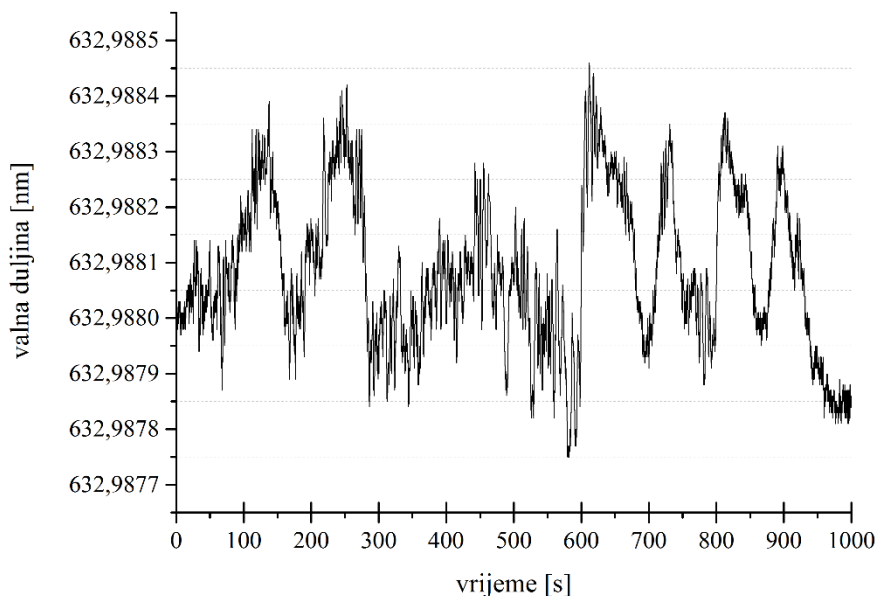
5.1.2. Karakterizacija

Na HTPS HeNe laseru je provedeno ispitivanje svake pojedinačne valne duljine dobiveno podešavanjem Littrowe prizme. Svaka pojedinačna valna duljina je prikaza spektrometerskim prikazom na slici 62.



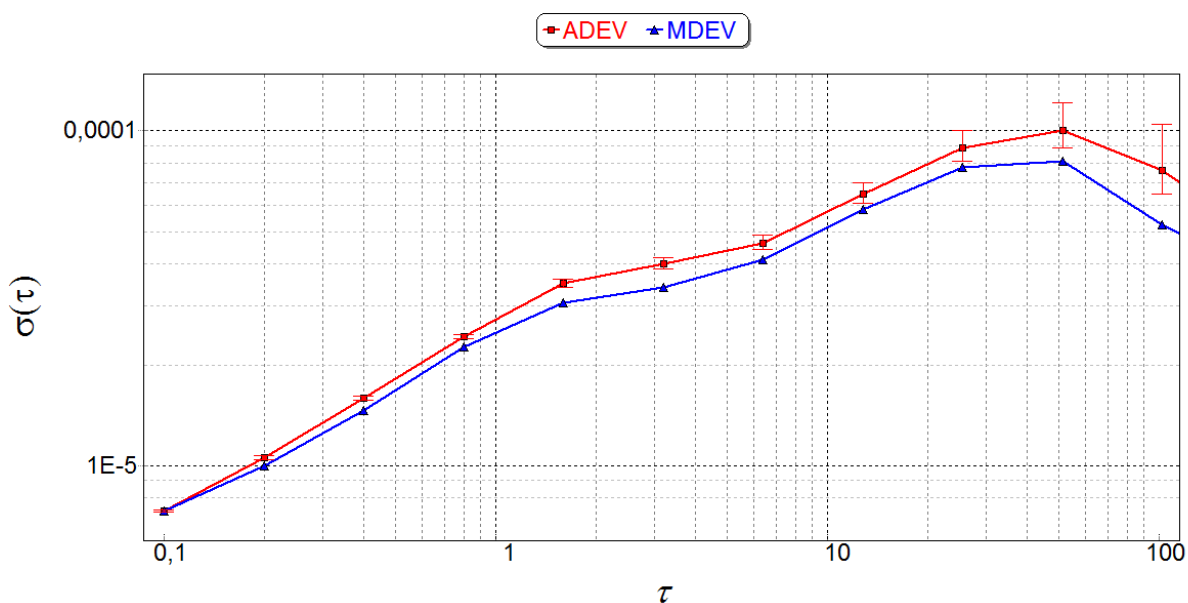
Slika 62. Promjena valne duljine mijenjanjem kuta Littrowe prizme

Na slici 62. svaki prikaz ima navedenu valnu duljinu koja je okvirna, naime spektrometar nema dovoljno veliku rezoluciju da bi mogao točno izmjeriti svaku valnu duljinu, zato se poseže za točnijim instrumentom kao što je lambdametar čije je mjerenje za valnu duljinu od ~ 633 nm provedeno za 1000 s i prikazano slikom 63.



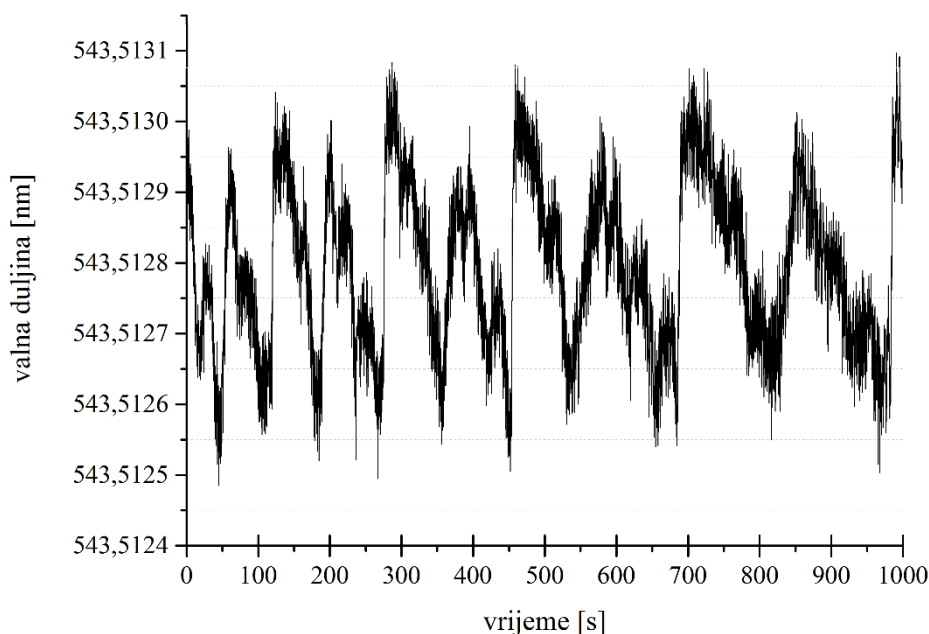
Slika 63. Varijacija valne duljine sa vremenom za HeNe ~ 633 nm

Slika prikazuje varijaciju valne duljine sa vremenom, srednja vrijednost valne duljine je 632,988 nm uz određeno standardnu devijaciju. S obzirom da pri mjerenju postoji utjecaj okoliša, odnosno šumovi, devijacija se može izraziti grafički kroz neki određeni vremenski period. No, za prikaz stabilnosti lasera koristi se Allanova devijacija umjesto standardne devijacije čiji je prikaz dan slikom 64 za kratkoročnu stabilnost od 100 s i $\tau = 100$ ms



Slika 64. Graf Allanove i modificirane Allanove devijacije za HeNe ~ 633 nm

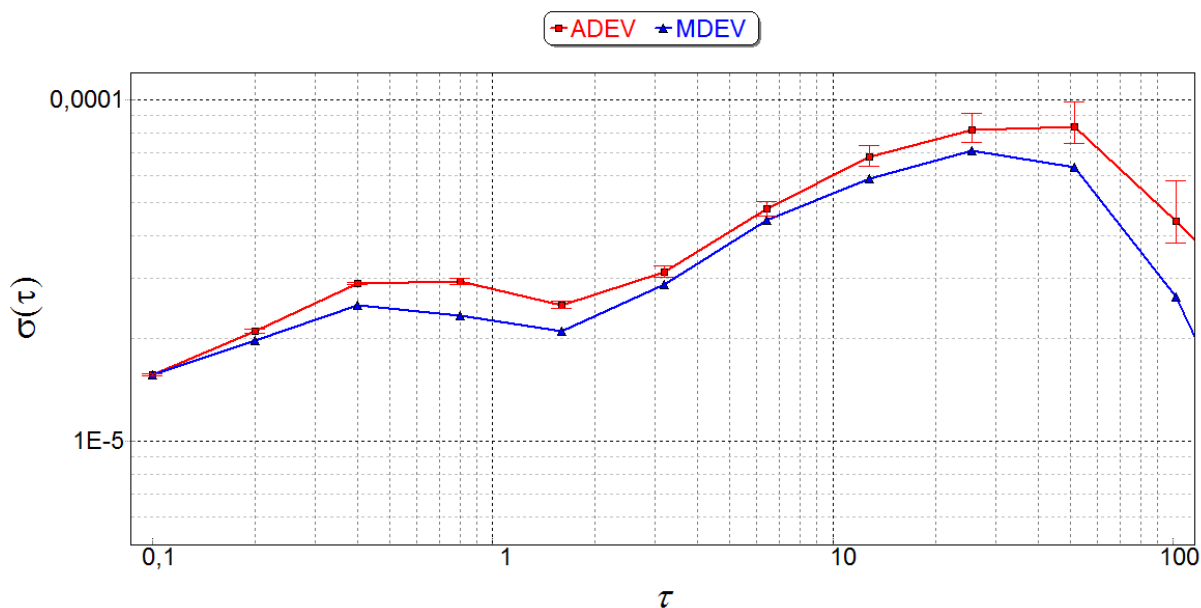
Razlog korištenju Allanove varijance (devijacije) je što se standardna devijacija koja proizlazi iz varijance računa kao odstupanje od prosječne vrijednosti što unosi veliku grešku pri opisivanju stabilnosti lasera. Razlog unosa greške je što standardna devijacija ne konvergira za određene tipove šumova što često u usporedbi sa Allanovom devijacijom izgleda kao krivulje koje divergiraju za iste podatke, a pritom Allanova devijacija ostaje gotovo ravna linija. Općenito pravilo pri analizi frekvencijske stabilnosti je ne koristiti standardnu devijaciju. [27] Na slici 64. je prikazana stabilnost lasera preko Allanove devijacije (ADEV) i modificirane Allanove devijacije (MDEV) koja se koristi češće zbog bolje iskoristivosti podataka. Na lijevoj strani grafa je prikazana devijacija valne duljine umjesto frekvencije, razlog tome je što se u dimenzijskom mjeriteljstvu radi direktno sa valnom duljinom, te je takav prikaz grafa smisleniji. Šum na slici 64 približno odgovara šumu kokica ($1/f^2$) dobiveno preko spektralne gustoće šuma. Prikaz varijacije valne duljine s vremenom za HeNe 543,5128 nm dan je slikom 65.



Slika 65. Varijacija valne duljine sa vremenom za HeNe ~543nm

Odmah pri pogledu na sliku 65 vidljivo je da je šum drugačiji nego na slici 63 za HeNe ~633 nm. Šum na slici 65 približno odgovara šumu iskrenja ili ljubičastom šumu ($1/f$) dobiveno preko spektralne gustoće šuma. Slikom 66 prikazana je stabilnost lasera također preko Allanove devijacije i modificirane Allanove devijacije. Kako bi se približili rezultati mjerenja praktičnoj primjeni potrebno je razmotriti neke od ključnih parametra lasera uz maksimalna pojednostavljenja. Širina krivulje pojačanja HeNe lasera koja iznosi ~1,4 GHz (maksimalna širina za općeniti slučaj), ako se uzme srednja vrijednost valne duljine iz podataka

koji čine sliku 63 tada se može reći da laser ima valnu duljinu od 632,988 nm, odnosno frekvenciju od ~473,615 THz.



Slika 66. Graf Allanove i modificirane Allanove devijacije za HeNe ~543nm

Na temelju uzetih podataka može se izračunati relativna mjerna nesigurnost koja iznosi $2,956 \times 10^{-6}$ za dane podatke. Vidljivo je da je ta mjerna nesigurnost u okvirima klasične varijacije relativne nesigurnosti HeNe lasera koja iznosi 3×10^{-6} i ne može biti bitno veća jer je definirana atomskom tranzicijom neona. Zaključak je da se bez mjerenja za HeNe laser može tvrditi da će imati relativnu mjernu nesigurnost ne bitno veću od 3×10^{-6} . Ukoliko se uzme relativna mjerna nesigurnost od 3×10^{-6} za HeNe valnu duljinu od 633 nm, tada se može reći da će po svakom pojedinačnom elektromagnetskom valu postojati nesigurnost valne duljine od 0,0019 nm. Takva nesigurnost djeluje vrlo neznajno, ali ukoliko se mjeri predmet veličine 1 m tada u njegovu duljinu stane ~1579778 punih valih duljina, što znači da je mjerna nesigurnost izmjenjenog predmeta izazvana samo laserom koji radi u idealnim okolišnim uvjetima; 3 μm . Što vrijedi samo u slučaju teoretski idealnog mjerenja predmeta, bez mjerne nesigurnosti izazvane dodatnim optičkim puta kojeg zraka prelazi da dođe do predmeta. Konačno prikazana mjerenja dobivaju smisao, na slici 65 i 63 za HTPS-EC HeNe laser vidljiva je varijacija valne duljine od 0,0007 nm uz pripadajuće šumove mjereno kroz period od 1000 s. Dok slike Allanove i modificirane Allanove devijacije uz značajnu eliminaciju šuma prikazuju da se radi laseru koji ima mjernu nesigurnost bitno manju od 3×10^{-6} .

5.2. CUBE 405-100C poluvodički laser

CUBE poluvodički laser dolazi iz serije poluvodičkih lasera različitih valnih duljina, sastoji se od laserske glave, kontrolne kutije, napajanja, komponentnih kablova te opcionalnog pasivnog hladnjaka. CUBE 405-100C emitira lasersku zraku valne duljine 405 ± 5 nm, maksimalne snage 100 mW. Spomenuti laser prikazan je na slici 67.



Slika 67. CUBE 405-100C Coherent [28]

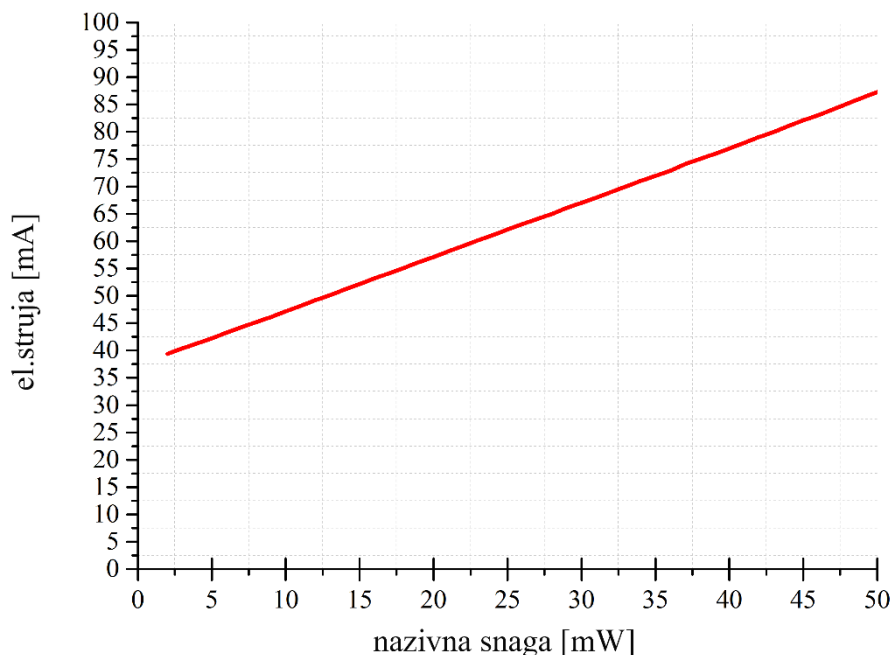
5.2.1. Specifikacije

Tablica 4. CUBE 405-100C Coherent Laser specifikacije [28]

<i>Specifikacija</i>	<i>Vrijednost</i>
<i>Valna duljina</i>	405±5 nm
<i>Maksimalna izlazna snaga</i>	100,0 mW
<i>Polarizacija</i>	Linearna > 100:1
<i>1/e² Promjer laserske zrake</i>	1,4 mm
<i>Divergencija laserske zrake</i>	0,4 mrad
<i>Raspon temperature</i>	10°C – 50°C
<i>Maksimalni raspon analogne modulacije</i>	350 kHz
<i>Maksimalni raspon digitalne modulacije</i>	<150 MHz
<i>Stabilnost snage</i>	< ±2%
<i>RMS šum</i>	= 0,1%
<i>Transferzalni mod</i>	TEM ₀₀
<i>Vrijeme zagrijavanja</i>	<5min
<i>Radni napon</i>	4,8-5 VDC
<i>Radna struja</i>	2,5 mA

5.2.2. Karakterizacija

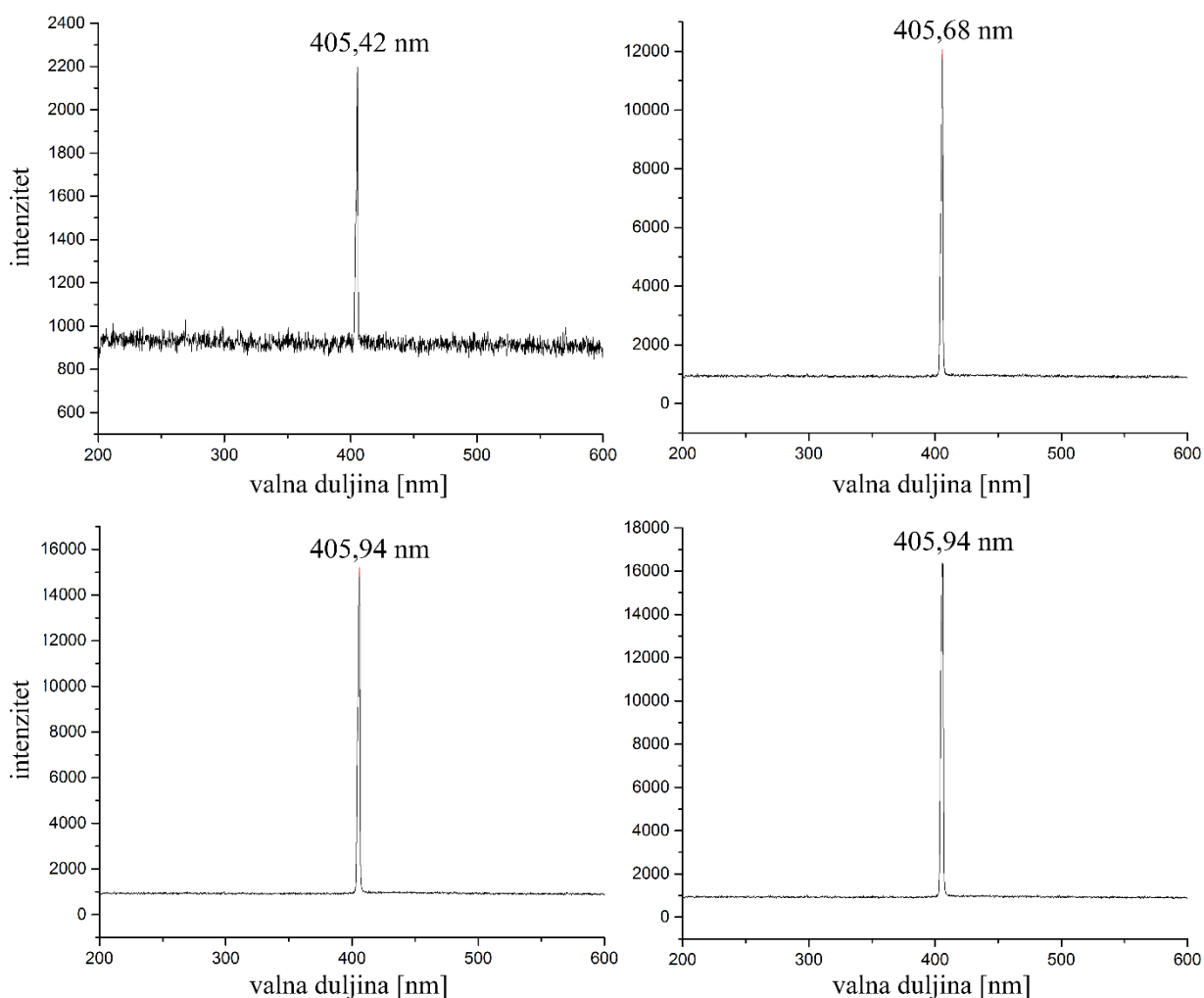
Na navedenom laseru moguće je preko programske platforme direktno mijenjati nazivnu snagu (u softveru: *Set Power*) što postavlja i emitiranu snagu (u softveru: *Power*) koja je malo različita od postavljene, ali ne i električnu struju, odnosno mijenjanje struje moguće je samo indirektno preko snage ili modulacijom. Prikaz ovisnosti snage o električnoj struji prikazana je slikom 68.



Slika 68. Ovisnost nazivne snage o električnoj struji

Prema podacima za prikaz grafa može se procijeniti da je struja praga laserske akcije $39,4\text{mA}$. S obzirom da se radi kompaktnom uređaju kojim se upravlja preko računalnog softvera teško je sa sigurnošću potvrditi koje su prave vrijednosti. Primjer takvog slučaja bi bila minimalna struja laserske akcije, postoji mogućnost da je prag na 37mA , ali to nije moguće potvrditi s obzirom da je minimalna rezolucija nazivne snage u softveru 1mW . Također, ispravnije bi bilo koristiti se ovisnošću napona o struji, ali s obzirom da ti podaci nisu dostupni preko softvera potrebno je naći kompromis. Mjerenje napona preko vanjskog uređaja također gotovo nije moguće jer lasersko kućište sadrži Peltierov element za regulaciju temperature rezolucijom od $0,1\text{K}$ kojemu je potrebno napajanje. Jedini način konkretnog mjerenja bi bio destruktivnom metodom demontaže kućišta i odvajanjem same laserske diode od ostalih komponenata. Daljnjim razmatranjem plan je bio odrediti ovisnost valne duljine o temperaturi, ali zbog Peltierovog elementa to nije bilo moguće zbog stalne temperature diode od 22°C regulirane automatski s rezolucijom od $0,1\text{K}$. Na temelju teorije iz poglavlja 1. jasno je da se promjenom snage, odnosno indirektnom promjenom električne struje mijenja i valna duljina poluvodičkog lasera, te je provedeno mjerenje za četiri različite struje s početnom vrijednosti nazivne snage

od 5 mW koja odgovara struji od 42,23 mA. Približna promjena valne duljine indirektnom promjenom električne struje prikazana je slikom 69.



Slika 69. Promjena valne duljine mijenjanjem el.struje

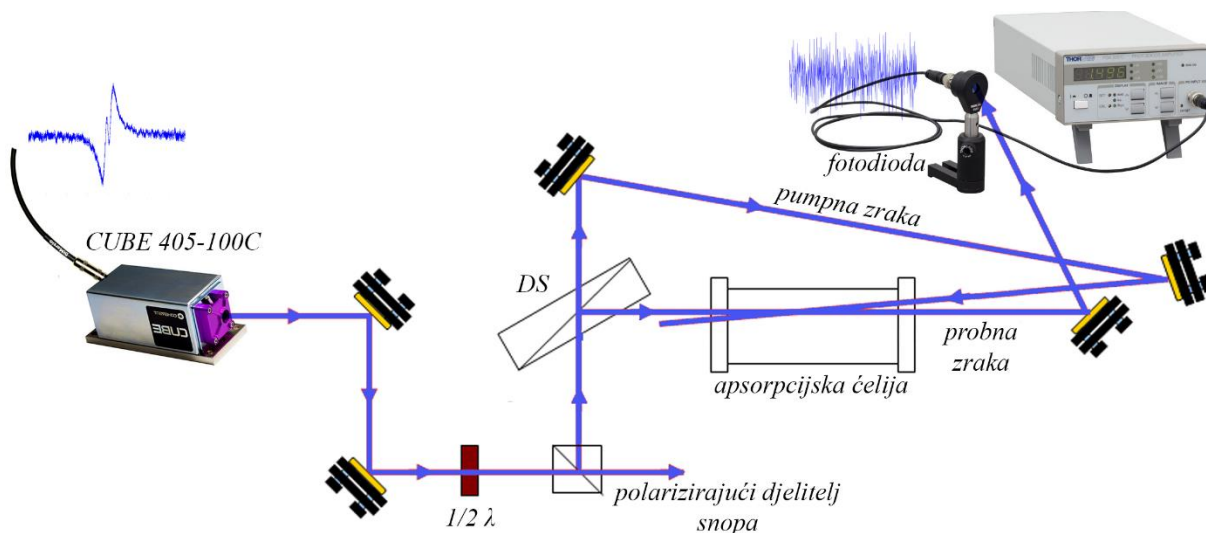
Tablica 5. Tablična usporedba vrijednosti prikazanih na slici 69

	Nazivna snaga [mW]	Emitirana snaga [mW]	El.Struja [mA]	Valna duljina [nm]
a	5	4,18	42,23	405,42
b	30	29,59	67,00	405,68
c	40	39,83	76,91	405,94
d	50	49,94	87,29	405,94

Kao što prikazuje slika 69 i tablica 5, postoji porast valne duljine s strujom koji se spektrometrom ne može točno utvrditi, ali vrijednosti valne duljine c i d bi poprimile različite valne duljine ukoliko se mjeri s točnijim uređajem. Prema mjerenju spektrometrom može se zaključiti da valna duljina lasera varira za 0.5 nm za cijelu domenu računalno indirektno postavljenih struja, što je red veličine manje nego što tehničke specifikacije propisuju. No kako

spektrometar mjeri valnu duljinu prema srednjoj vrijednosti intenziteta mjerenje se ne smije uzimati kao pouzdan i točan podatak, nego više kao okvirni. Slični rezultati bi bili vidljivi ukoliko bi bilo moguće mijenjati temperaturu diode. Kako se temperatura diode povećava, lomni indeks poluvodičkog materijala se mijenja. S obzirom da rezonantna frekvencija laserske šupljine ovisi o lomnom indeksu materijala, valna duljina se pomiče prema većim valnim duljinama kako se temperatura aktivnog materijala mijenja. Navedeni laser nije pogodan za mjerenje većih duljina, no ukoliko je njegova glavna primjena pri ispitivanju hrapavosti površina tada je on vrlo pogodan. Ukoliko se uzme velika mjerna nesigurnost 0,5 nm pri konstantnoj struji tada će pogreška na 10 μm iznositi $\sim 12,35$ nm, odnosno $\sim 0,01235$ μm što je dosta mala greška mjerenja s obzirom na uzetu veliku mjernu nesigurnost. U slučaju mjerenja duljine od 1 m s navedenim laserom pogreška je 1,235 mm ($\sim 0,012\%$) što često ne zadovoljava industrijske zahtjeve.

Kada bi CUBE 405-100C imao vanjsku lasersku šupljinu tada bi se njegova stabilizacija mogla provesti metodom saturacijske spektroskopije kao što je napravljeno u točki 5.3. U slučaju vanjske modulacije frekvencije preko elektro-optičkog modulatora bilo bi moguće koristiti Pound-Drever-Hall- PDH metodu, koja ne osigurava uspješnost s obzirom na karakteristike uređaja. U slučaju korištenja saturacijske apsorpcije, apsorpcijska ćelija bi sadržavala kalijeve pare, a laser bi se stabilizirao na prijelaz kalija $4s_{1/2} \rightarrow 5p_{3/2}$. Postav stabilizacije prikazan je slikom 70.

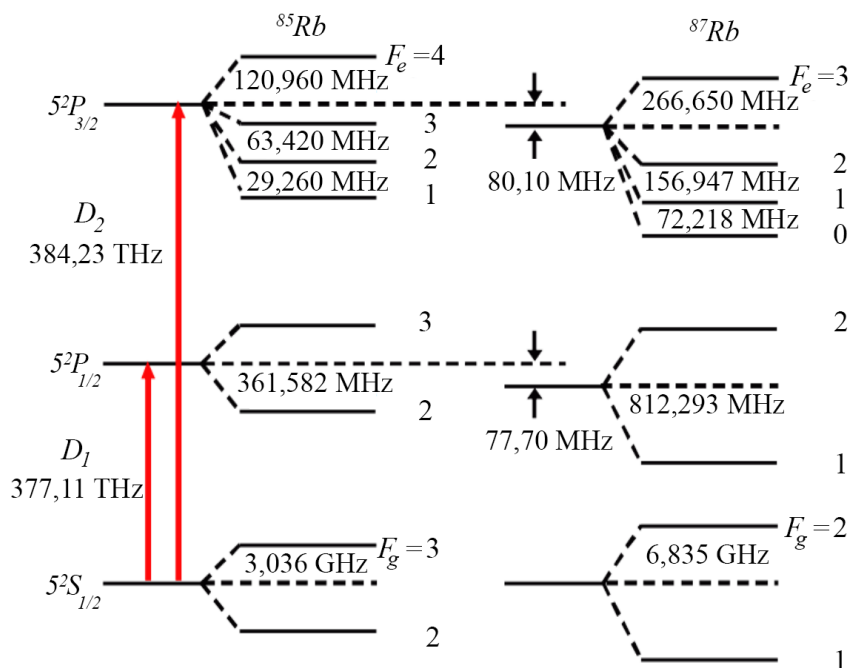


Slika 70. Postav stabilizacije CUBE 405-100C lasera

Lock-in regulator nije prikazan slikom 70, ali on je obvezna komponenta koja obrađuje signal s fotodiode i generira *error* signal koji bi u izgledao kao na slici 75. Odnosno stabilizacija bi se radila preko prve derivacije odabranog hiperfinog prijelaza.

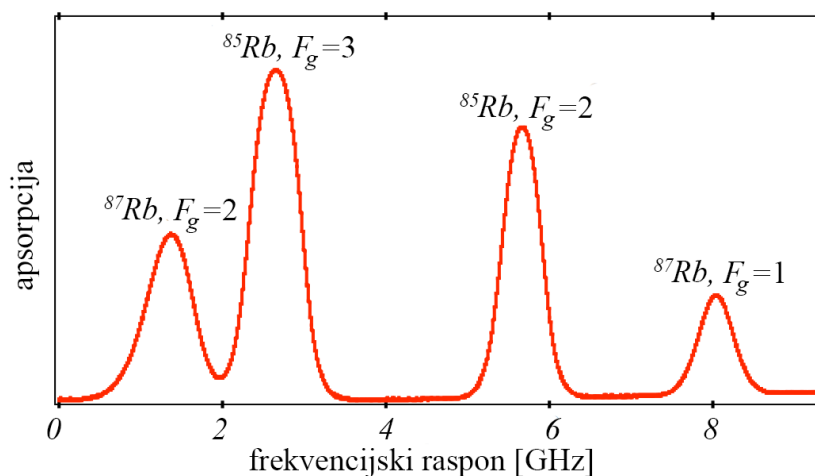
5.3. Stabilizacija poluvodičkog lasera valne duljine 780nm

Za stabilizaciju poluvodičkog lasera valne duljine 780 nm koristila se metoda saturacijske spektroskopije (opisane u točki 4.3) rubidijevim parama. Rubidij ima dva izotopa, ^{85}Rb i ^{87}Rb , koji se u prirodi nalaze u omjeru 72,2% za ^{85}Rb i 27,8% za ^{87}Rb [29] Pri ovoj stabilizaciji cilj je stabilizirati frekvenciju lasera na $5s_{1/2}(F_g = 2) \rightarrow 5p_{3/2}(F_e = 3), D_2$ prijelaz koji približno iznosi 780.24 nm.[30] Energetski dijagram atoma ^{85}Rb i ^{87}Rb prikazan je slikom 71 za pripadajućom hiperfinom strukturom, D_1 i D_2 prijelazima.



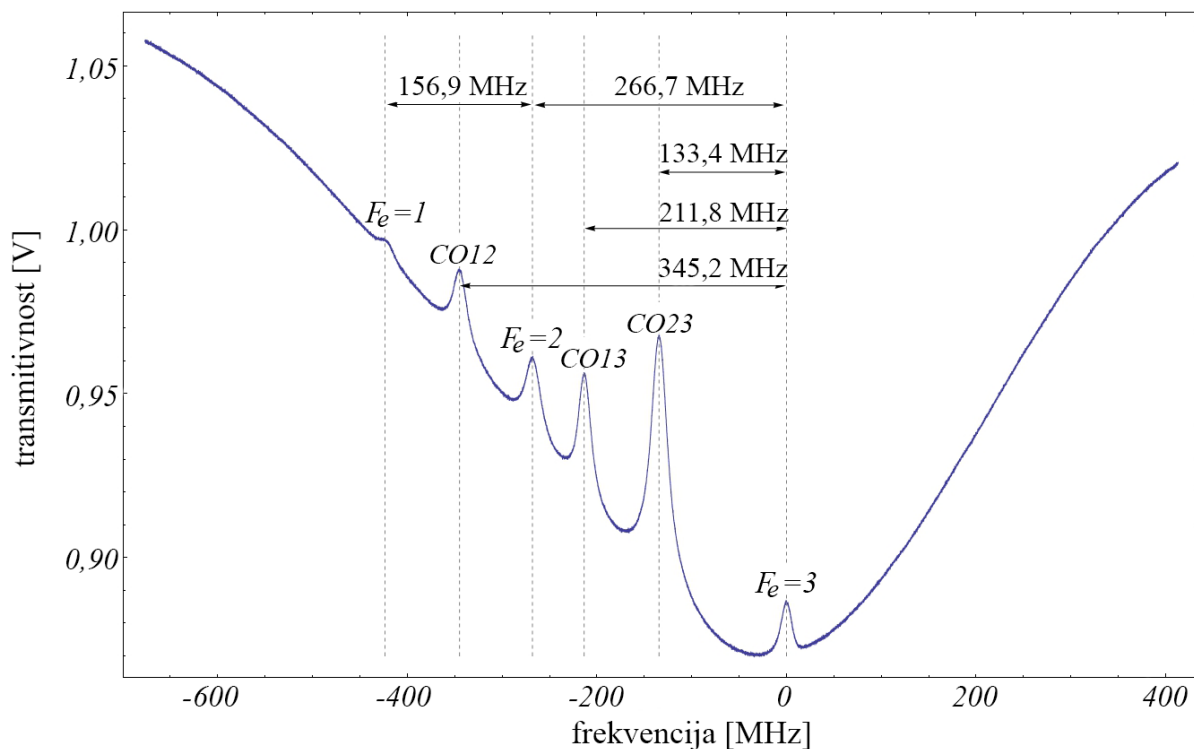
Slika 71. Energetski dijagram ^{85}Rb i ^{87}Rb [31]

Tipičan Doppler prošireni spektar povezan sa prijelazom $5s_{1/2}(F = 2) \rightarrow 5p_{3/2}(F = 3)$ prikazan je slikom 72.



Slika 72. Doppler prošireni apsorpcijski spektar [32]

Na slici 72 je vidljivo najniže energetske stanje sustava oba izotopa koje se dijeli u dva hiperfina prijelaza. Pobuđeno stanje hiperfina prijelaza je sakriveno sa Dopplerovim širenjem od ~ 500 MHz pa pojedinačni prijelazi nisu razlučivi jednostavnim spektroskopskim metodama. [29]. Svaka apsorpcijska linija je širine, $FWHM = 518 \pm 15$ MHz pri sobnoj temperaturi što je dva reda veličine veće od širine poluvodičkog lasera. [32] Pri čemu je FWHM područje frekvencija na punoj spektralnoj širini pri polovici maksimuma krivulje (*engl. full width at half maximum – FWHM*). [31] Mijenjanjem laserske frekvencije preko Doppler proširenog spektra teži se zadovoljiti Dopplerov uvjet iz točke 4.3.4 kako bi se dobio Lambov pad. [30] Tipičan spektar za ^{87}Rb , $F_g = 2 \rightarrow F_e = 1, 2, 3$ prikazan je slikom 73.



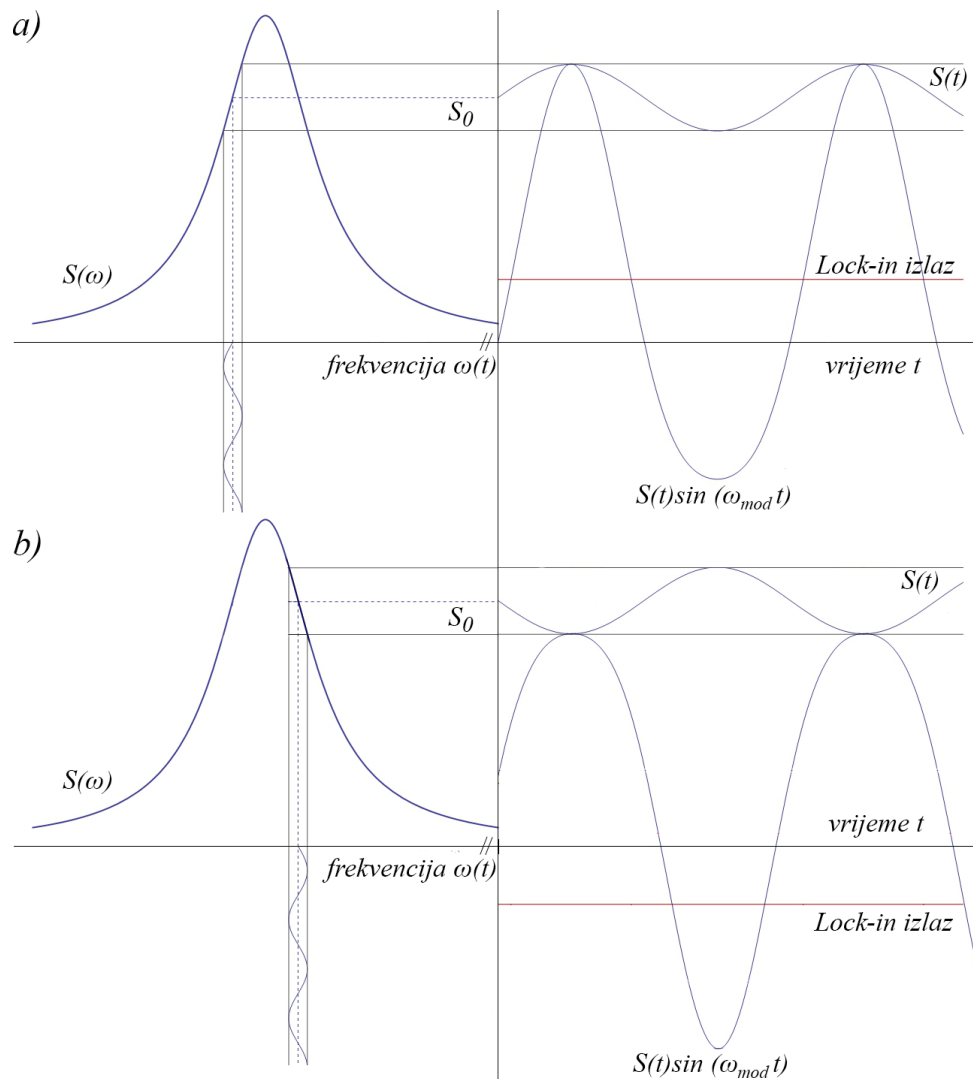
Slika 73. Saturacijski spektar hiperfina prijelaza ^{87}Rb s $F_g = 2 \rightarrow F_e = 1, 2, 3$ [30]

Kao što je vidljivo sa slike, hiperfina prijelazi nisu jedine vidljive linije saturacijskom spektroskopijom. Kada dva bliska prijelaza dijele osnovno energetske stanje dolazi do pojave *cross-over* (CO) linija pa su dodatne rezonancije vidljive. Za stabilizaciju frekvencije koristi se negativna povratna veza preko *lock-in* regulatora koji generira *error* signal, te pomoću PID kontrolera regulira odstupanje od željene linije na koju se stabilizira laser. [30]

Samo odstupanje frekvencije od željene frekvencije hiperfina prijelaza radi na istom principu kao što je opisano u točki 4.3.

Princip *lock-in* detekcije je modulirati frekvenciju lasera ω_0 malom amplitudom $\Delta\omega$, te usporediti signal na detektoru $\omega_0 + \Delta\omega$ sa signalom $\omega_0 - \Delta\omega$. Tako *lock-in* regulator utvrđuje

imali li signal pozitivni ili negativni nagib, te računa apsolutnu vrijednost nagiba signala. Generacija *lock-in* signala je prikazana slikom 74. Preporuka je da pri modulaciji $\Delta\omega \ll FWHM$ referentnog signala na koji se laser stabilizira. [33]



Slika 74. Generacija Lock-in signala [30][33]

Sa slike 74 je vidljivo kako *lock-in* regulator promjenom faze signala mijenja svoj izlaz. Kada je frekvencija lasera na lijevom dijelu krivulje (a), odnosno ispod središnje frekvencije tada će generirani signal biti pozitivan te će PID težiti smanjiti *error* signal na nulu tako što će povećati frekvenciju lasera. Analogno vrijedi i za desni dio krivulje (b), zbog promjene faze *lock-in* signal će biti negativan, te će PID kontroler težiti eliminirati svako odstupanje smanjujući frekvenciju lasera. Matematički opis bi bio:

$$\omega(t) = \omega_0 + \Delta\omega \sin(\omega_{mod}t) \quad (5.3.1)$$

Pri čemu je ω_{mod} frekvencija modulacije. Pritom je aproksimirani detektirani signal:

$$S(t) = S_0 + S'(\omega_0) \Delta\omega \sin(\omega_{mod}t) \quad (5.3.2)$$

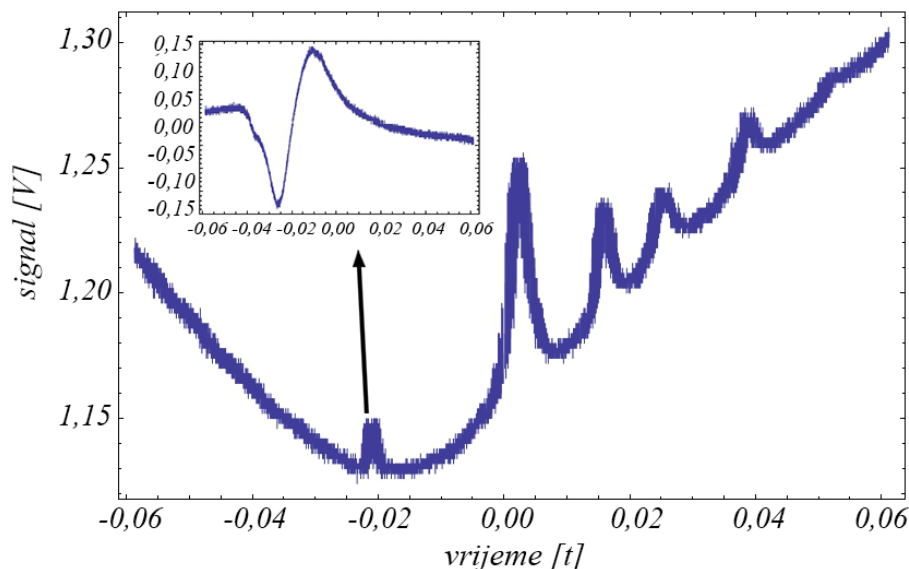
Miješanjem detektiranog i referentnog signala u mikseru, dobiva se:

$$S(t) \sin(\omega_{mod}t) = S_0 \sin(\omega_{mod}t) + \frac{1}{2} S'(\omega_0) \Delta\omega - \frac{1}{2} S'(\omega_0) \Delta\omega \cos(2\omega_{mod}t) \quad (5.3.3)$$

Prolaskom signala kroz niskopropusni filter ostaje:

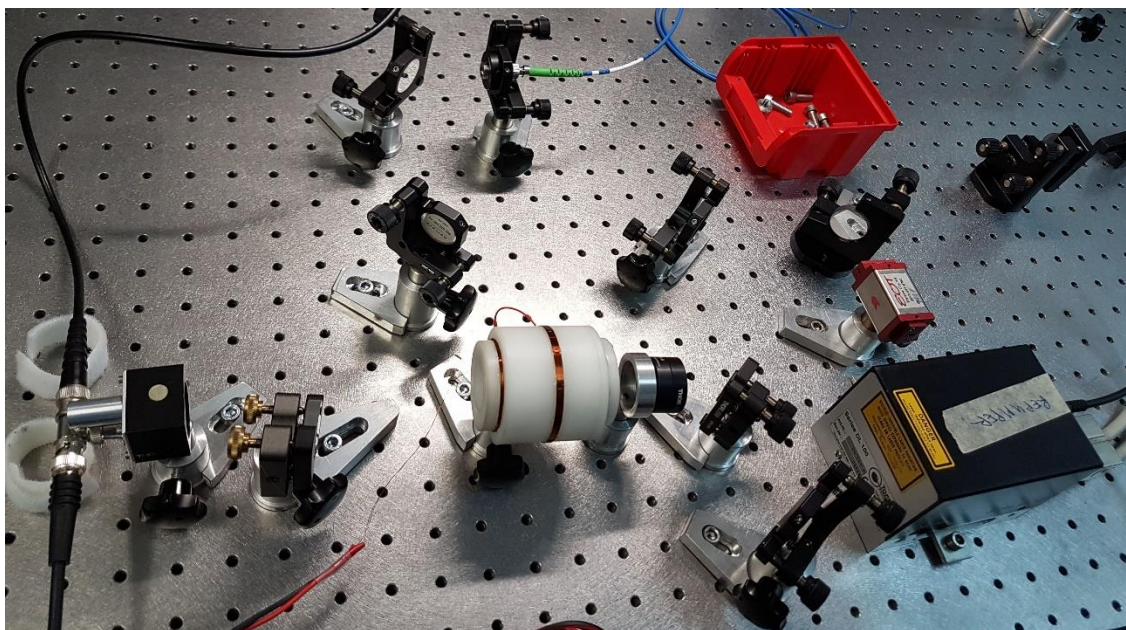
$$\varepsilon = \frac{1}{2} S'(\omega_0) \Delta\omega \quad (5.3.4)$$

Odnosno *error* signal je proporcionalan prvom derivaciji signala što prikazuje slika 75 (manja).



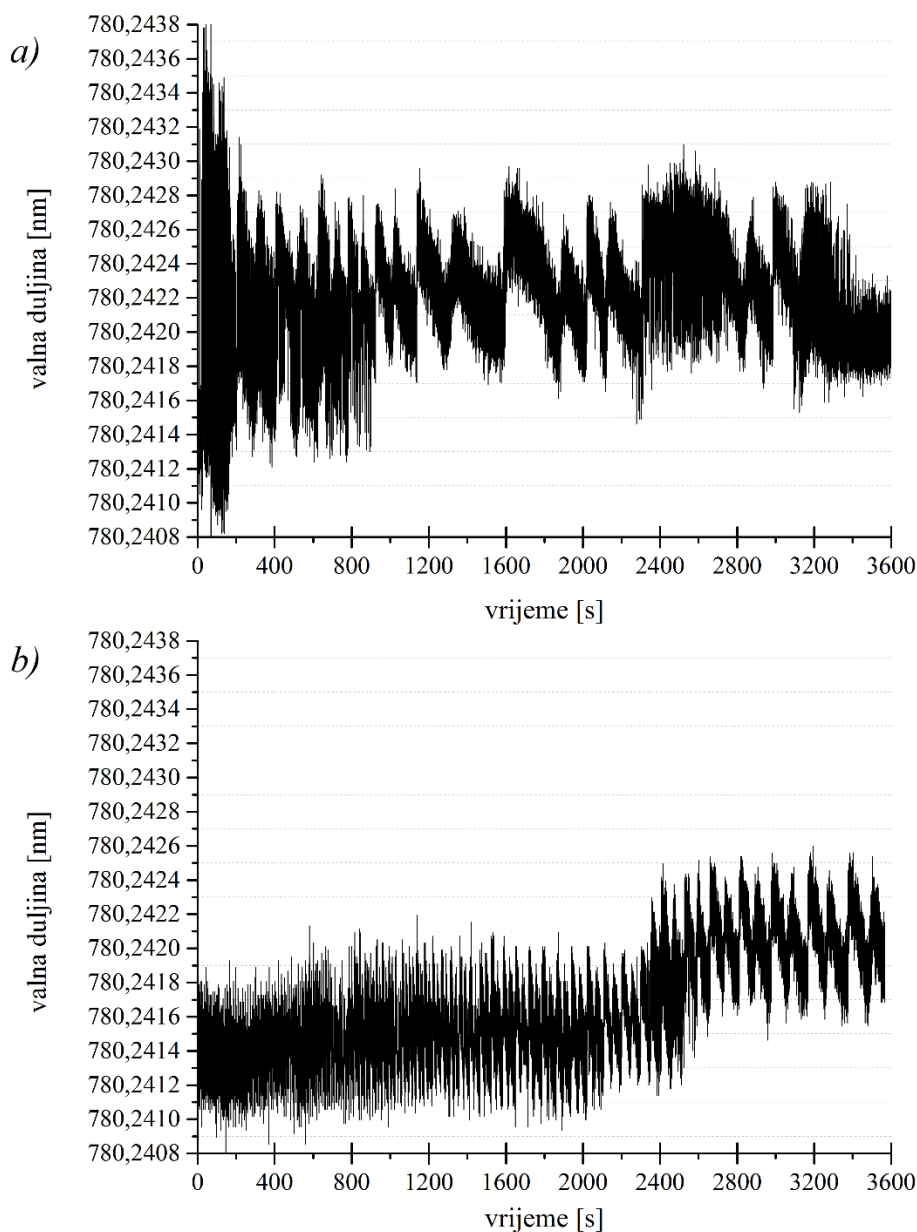
Slika 75. Saturacijski spektar i error signal [30]

Na slici 75 vidljive su posljedice modulacije signala što je prikazano kao pikselizirana krivulja koja prikazuje D_2 prijelaz. Na manjoj slici je prikazan *error* signal vrha na koji se stabilizira laser. Ukoliko se bolje pogleda manja slika vidljivo je kako središnja frekvencija vrha na koji se laser stabilizira odgovara točki u kojoj asimetrični signal prelazi nulu na manjoj slici. [30]



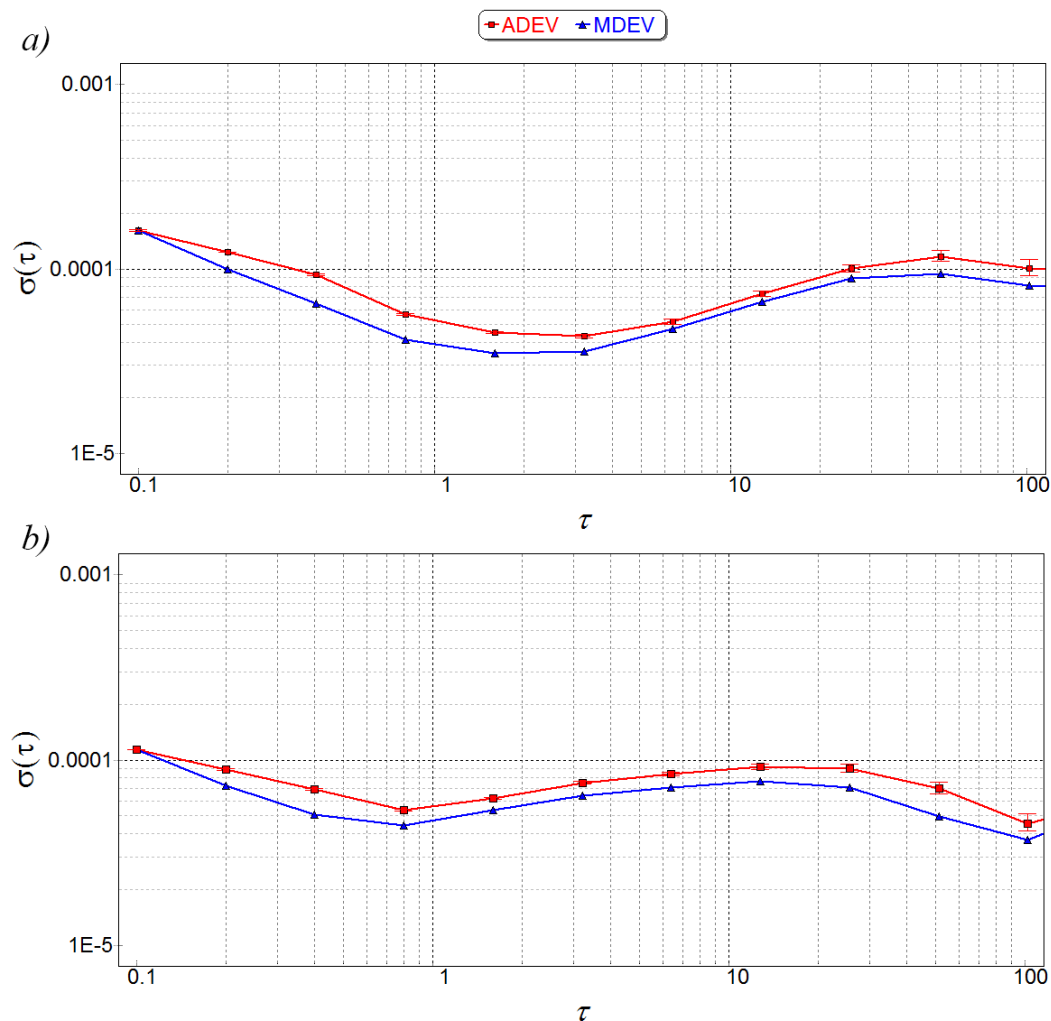
Slika 76. Praktični postav stabilizacije

Opisana vrsta stabilizacije je prikazana slikom 76, dodatni optički kabel i dva zrcala postavljene su kako bi laserska zraka mogla nastaviti dalje prema mjeranju. Mjerenjem valne duljine na lambdametru u periodu od 3600 s dobiva se varijacija valne duljine u vremenu prikazana slikom 77.



Slika 77. Varijacija valne duljine sa vremenom za a) nestabilizirani i b) stabilizirani laser

Ukoliko se usporede slike a) i b) vidljivo je da za stabilizirani laser varijacija valne duljine kontrolirana, za svaki pokušaj dritfa valne duljine, kontroler ga vraća u prvotno stanje. U odnosu na prethodno ispitani HeNe laser, vidljivo je da razina šuma u ovom laseru veća nego kod HeNe. Za vjerodostojnije rezultate potrebno je statistički obraditi podatke kako bi se nastojao eliminirati šum. Za mjerenje na lambdametru u periodu od 3600 s i $\tau = 0,1$ s slikom 78 je dana Allanova devijacija i modificirana Allanova devijacija.



Slika 78. Stabilnost a) nestabiliziranog i b) stabiliziranog lasera

Šum na slici 78 približno odgovara šumu iskrenja ili ljubičastom šumu ($1/f$) dobiveno preko spektralne gustoće šuma. Po usporedbi slika vidljivo je da stabilizirani laser (b) nakon većeg vremenskog uzorka počinje bilježiti pad devijacije, što bi predstavljalo značajnu razliku kada bi se radila dugoročna stabilnost. Također općenito gledajući stabilizirani laser ima manju devijaciju valne duljine od nestabiliziranog. U usporedbi sa prethodno karakteriziranim HeNe laserom vidljivo je da se dobiva veća stabilnost, odnosno manja devijacija. Varijacija valne duljine s vremenom za poluvodički laser bila veća nego za HeNe laser, ali nakon statističke obrade Allanovom devijacijom može se potvrditi da je metoda konvergentna za šum koji je bio prisutan kod ovih mjerenja. Ukoliko pozovu idealni uvjeti mjerenja iz točke 5.1.2., te se mjerenom stabiliziranom laseru pridoda relativna mjerna nesigurnost frekvencije od 1×10^{-7} , tada će u duljinu od 1 m stati ~ 1281657 punih valnih duljina. Svaka valna duljina će imati pripisanu mjernu nesigurnost od $7,8024 \times 10^{-5}$ nm, pripadna mjerna nesigurnost na 1 m iznositi 100 nm. Što je jedan red veličine manje nego za mjereni HeNe laser u točki 5.1.2.

6. ZAKLJUČAK

Tema ovog rada je bila frekvencijska stabilizacija lasera. Laser kao izvor zračenja predstavlja osnovu modernog mjeriteljstva duljine, te se koristi od primarnog etalona metra sve do različitih mjernih sredstava. Stabilnost valne duljine, odnosno frekvencije, lasera iz tog razloga predstavlja ključan parametar u mjernim mogućnostima sustava koji ih koriste. Stabilizacija i razumijevanje lasera je vrlo interdisciplinarna tema u kojoj treba imati dobru podlogu iz fizike lasera, koja uključuje klasičnu i modernu fiziku. Za dobro razumijevanje rada lasera potrebno je proučiti odabrana poglavlja klasične fizike kao što su elektrodinamika i optika, te odabrana poglavlja moderne fizike kao što su kvantna mehanika, atomska fizika i fizika čvrstog stanja. Navedena poglavlja nisu dio kurikuluma studija strojarstva, stoga je u uvodnom dijelu dat pregled teorijskih osnova ovih tema koji je nužan za razumijevanje rada lasera, a potom i njihove stabilizacije.

Mjeriteljstvo je područje strojarstva koje uključuje sve teoretske i praktične aspekte mjerenja, bavi se metodama mjerenja fizikalnih veličina i ono je referentna točka za mjerne jedinice, kao takvo jasno je da treba imati vrhunsku tehnologiju kako bi moglo zadržati referentnu poziciju. S brzim napretkom tehnologije dimenzionalno mjeriteljstvo postaje interdisciplinarno područje koji obuhvaća i osnove ranije navedenih tema u svrhu potpunog razumijevanja tehnoloških zahtjeva. Stoga se u ovom radu nastojalo pružiti sažeto znanje za razumijevanje rada lasera i efekata koji se obično u mehanici kontinuuma zanemaruju jer ne unose značajnu grešku u rezultat. Nakon teoretske pozadine, objašnjene su neke od metoda stabilizacije lasera koje imaju široku primjenu u dimenzionalnom mjeriteljstvu. S obzirom na širok opseg posla najčešće se poseže za komercijalno stabiliziranim laserima, ali upravo to predstavlja problem jer tu nestaje prostor za razvoj novih tehnologija mjeriteljstva (što je također jedan od zadataka mjeriteljstva), a značajno i podiže troškove implementacije lasera u mjerne sustave. Kako bi se uvidjele mogućnosti lasera dostupnih u Nacionalnom laboratoriju za duljinu provedena je karakterizacija dvaju lasera što pruža bolji uvid u njihovo „ponašanje“ u realnim uvjetima i definira njihovo buduće korištenje. Nakon provedene karakterizacije lasera, provela se praktična stabilizacija poluvodičkog lasera u akademske svrhe, ali odabrana metoda stabilizacije je korisna i provediva u dimenzionalnom mjeriteljstvu ukoliko se napravi na prethodno planiranoj lokaciji. Kao što se može zaključiti eksperimentalna stabilizacija lasera u većini slučajeva nije prenosiva, te se da bi bila od koristi mora provesti i koristiti na fiksnoj lokaciji.

LITERATURA

- [1] Saleh, B.E.A., Teich M.C.: Fundamentals of Photonics, Wiley, 2007
- [2] Shenoy, M.R.: Semiconductor Optoelectronics, NPTEL, IIT Delhi
- [3] Young, H.D., Freedman, R.A.: Sears and Zemansky's University Physics with Modern Physics 13th, Pearson, 2015
- [4] Serway, R.A., Jewett, J.W.: Physics for Scientists and Engineers with Modern Physics 9th, Cengage, 2013
- [5] Butković, Ž., Divković Pukšec, J., Barić A.: Elektronika 1, FER, Sveučilište u Zagrebu
- [6] Degiorgio, V., Cristiani, I.: Photonics A Short Course, Springer, 2014
- [7] Slika 9,10: <http://iamtechnical.com/silicon-lattice-doping-silicon-boron-phosphorous>
- [8] Papić, V.: Predavanja iz osnova elektronike, PMFST, Sveučilište u Splitu, 2005
- [9] Slika 22: http://wanda.fiu.edu/teaching/courses/Modern_lab_manual/pn_junction.html
- [10] Slika 27: <https://www.ecse.rpi.edu/~schubert/Light-Emitting-Diodes-dot-org/chap12/>
- [11] Muhammad, S.A.: Laser Fundamentals, Khwarizmi Science Society, 2010
- [12] Csele, M.: Fundamentals of Light Sources and Lasers, Wiley, 2004
- [13] Orazio, S.: Principles of Lasers, Springer, 2010
- [14] Bistričić, L.: Fizika lasera, FER, Sveučilište u Zagrebu
- [15] Averill, B.A., Eldredge, P.: Principles of General Chemistry, Creative Commons, 2012
- [16] Slika 37: <http://www.scientificmaterials.com/products/>
- [17] Harding, K.: Handbook of Optical Dimensional Metrology, 1st, CRC Press, 2013
- [18] Riehle, F.: Frequency Standards: Basics and Applications, Wiley, 2006
- [19] Newport Application Notes: FM Spectroscopy With Tunable Diode Lasers
- [20] Leach, R.: Fundamental Principles of Engineering Nanometrology, William A., 2009
- [21] BIPM, MEP 2003: Iodine ($\lambda \approx 633 \text{ nm}$)
- [22] Milonni, P., Eberly, J.: Laser Physics, Wiley, 2010
- [23] Black, E.: Notes on the Pound-Drever-Hall technique, LIGO
- [24] Nickerson, M.: A review of Pound-Drever-Hall laser frequency locking, JILA
- [25] Black, E.: An introduction to Pound–Drever–Hall laser frequency stabilization, LIGO
- [26] THORLABS: Product Specification Sheet, Wavelength Selectable HeNe Lasers, HTTPS
- [27] Riley, W.J.: Handbook of Frequency Stability Analysis, NIST
- [28] Operator's Manual Coherent CUBE™ Laser System
- [29] Photodigm: Rubidium Absorption Spectroscopy
- [30] Šantić, Neven: Lasersko hlađenje atoma, PMF, Sveučilište u Zagrebu

-
- [31] Yan, Z.Z.: Nonlinear Spectroscopy of Rubidium and Frequency Stabilization of a 1560 nm Diode Laser
- [32] Jacques V., Hingant, B., Allafort, A., Pigéard, M., Roch, J.F.: Non-linear spectroscopy of rubidium
- [33] Toptica: DL 100 Diode Laser System, Manual, 2001

PRILOZI

I. CD-R disc