

# Numerička simulacija viskoznog strujanja oko trupa broda

---

**Farkas, Andrea**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2016**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:235:860554>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-01-28**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# **DIPLOMSKI RAD**

**Andrea Farkas**

Zagreb, 2016.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# DIPLOMSKI RAD

Mentori:

Prof. dr. sc. Nastia Degiuli, dipl. ing.

Student:

Andrea Farkas

Zagreb, 2016.

Izjavljujem da sam ovaj rad izradio samostalno koristeći stečena znanja tijekom studija i navedenu literaturu.

Zahvaljujem se prije svega svojoj mentorici prof. dr. sc. Nastiji Degiuli, dipl. ing., Ivanu Muniću, dipl. ing., Ivani Martić, dipl. ing., prof. dr. ing. Milovanu Periću te doc. dr.sc. Severinu Kuzmaniću, dipl.ing. na svim korisnim savjetima i pomoći koji su mi uvelike olakšali pri izradi ovoga rada. Također, zahvaljujem se svim profesorima na prenesenim znanjima tijekom studiranja te svojoj obitelji i najbližima na podršci i strpljenju. Na kraju, hvala i tebi Bože.

Andrea Farkas



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
**FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE**  
Središnje povjerenstvo za završne i diplomske ispite  
Povjerenstvo za završne i diplomske ispite studija brodogradnje



Sveučilište u Zagrebu Fakultet strojarstva i brodogradnje	
Datum	Prilog
Klasa:	
Ur.broj:	

## DIPLOMSKI ZADATAK

Student: **Andrea Farkas** Mat. br.: 0035185786

Naslov rada na hrvatskom jeziku: **NUMERIČKA SIMULACIJA VISKOZNOG STRUJANJA OKO TRUPA BRODA**

Naslov rada na engleskom jeziku: **NUMERICAL SIMULATION OF THE VISCOUS FLOW AROUND A SHIP HULL**

Opis zadatka:

Poznavanje značajki strujanja vode oko trupa broda predstavlja vrlo važan element u procesu projektiranja broda. Za određivanje hidrodinamičkih značajki danas se najčešće provode pokusi s modelima brodova u bazenu koji su vrlo skupi i dugotrajni. Razvojem računalne dinamike fluida moguće je odrediti hidrodinamičke značajke više projekata čime se znatno skraćuje vrijeme i smanjuju troškovi projektiranja broda. Primjenom računalne dinamike fluida moguće je u ranoj fazi projektiranja broda dobiti uvid u detalje strujanja oko trupa broda i dobiti preporuku kako poboljšati određeni projekt ili pak odabrati najpovoljniji projekt za modelsko ispitivanje.

U diplomskom radu potrebno je, uz pomoć programskog paketa za računalnu dinamiku fluida, numerički simulirati viskozno strujanje vode oko trupa broda. Pri tome treba koristiti model stacionarnog trodimenzijskog strujanja viskoznog fluida sa slobodnom površinom.

U radu je potrebno:

1. Dati pregled literature vezane za numeričke simulacije viskoznog strujanja oko trupa broda.
2. Dati matematičku osnovu numeričkih metoda za simulaciju viskoznog strujanja sa slobodnom površinom.
3. Pripremiti proračunsku mrežu, početne i rubne uvjete potrebne za numeričku simulaciju viskoznog strujanja fluida.
4. Opisati računalni model gibanja broda na slobodnoj površini vode.
5. Izvršiti numeričku simulaciju pokusa otpora modela broda koristeći programski paket za računalnu dinamiku fluida.
6. Usporediti numerički dobivene rezultate sile ukupnog otpora s eksperimentalnim rezultatima.

Rezultate proračuna prikazati odgovarajućim tablicama, dijagramima i slikama.

U radu koristiti programski paket STAR-CCM+.

U radu treba navesti literaturu i eventualno dobivenu pomoć tijekom izrade.

Zadatak zadan:

Rok predaje rada:

Predvideni datumi obrane:

5. svibnja 2016.

7. srpnja 2016.

13., 14. i 15. srpnja 2016.

Zadatak zadao:

*Nastja Degiuli*  
Prof. dr. sc. Nastja Degiuli

Predsjednica Povjerenstva:

*Nastja Degiuli*  
Prof. dr. sc. Nastja Degiuli

## SADRŽAJ

SADRŽAJ .....	I
POPIS SLIKA .....	III
POPIS OZNAKA .....	V
SAŽETAK.....	VIII
SUMMARY .....	IX
1. UVOD.....	1
1.1. Pregled dosadašnjih istraživanja .....	2
2. OTPOR BRODA .....	6
2.1. Raščlana otpora .....	6
2.1.1. Otpor trenja .....	7
2.1.2. Viskozni otpor tlaka.....	9
2.1.3. Otpor valova.....	9
2.2. Dodatni otpor .....	10
3. RAČUNALNA DINAMIKA FLUIDA .....	12
3.1. Osnovni koraci računalne dinamike fluida .....	12
3.2. Osnovni zakoni mehanike fluida.....	14
3.3. Rubni uvjeti Navier – Stokesovih jednadžbi.....	16
3.4. Značajke turbulentnog strujanja .....	16
3.4.1. Modeliranje turbulencije .....	17
3.4.1.1. Reynoldsove osrednjene Navier – Stokesove jednadžbe.....	18
3.4.1.2. Model turbulencije .....	20
3.4.1.3. $k - \epsilon$ model turbulencije.....	21
3.5. Metoda konačnih volumena .....	26
3.5.1. Aproksimacija volumenskih i površinskih integrala.....	27
3.5.2. Numeričke sheme.....	29
3.5.2.1. Uzvodna shema.....	30
3.5.2.2. Linearno uzvodna shema .....	30
3.5.3. Rubni uvjeti.....	31
3.5.4. Kriterij završetka iterativnog postupka .....	31
3.5.5. Podrelaksacija .....	33
3.5.6. Rješavanje sustava linearnih algebarskih jednadžbi .....	33
3.5.6.1. Metoda konjugiranih gradijenata (eng. Conjugate Gradient (CG) method) .....	33
3.5.6.2. Višemrežna metoda (eng. multigrid method) .....	33
3.6. Model slobodne površine – udio fluida u volumenu (eng. volume of fluid) .....	33
4. RAČUNALNI MODEL GIBANJA BRODA PO SLOBODNOJ POVRŠINI VODE .	36
4.1. Ulaz u STAR-CCM+ .....	36
4.1.1. Temeljna geometrija modela.....	36
4.1.2. Kreiranje domene.....	38
4.1.3. Unos podataka u STAR-CCM+ .....	39
4.1.4. Kontrola unesene geometrije [22].....	39
4.1.4.1. Probijene stranice (eng. pierced faces) .....	40

4.1.4.2.	Kvaliteta stranice (eng. face quality) .....	40
4.1.4.3.	Bliske stranice (eng. face proximity) .....	41
4.1.4.4.	Slobodni rubovi (eng. free edges) .....	41
4.1.4.5.	Ne manifoldni rubovi (eng. non manifold edges) .....	42
4.1.4.6.	Ne manifoldni vrhovi (eng. non manifold vertices) .....	42
4.1.4.7.	Detektiranje problema površinske mreže i njihovo uklanjanje .....	43
4.1.5.	Dodjeljivanje dijelova regiji .....	44
4.2.	Diskretizacija (računalna mreža) .....	44
4.2.1.	Modeliranje u blizini zida .....	46
4.2.2.	Postupak diskretizacije [22] .....	47
4.2.2.1.	Alat za rediskretizaciju površina (eng. Surface Remesher) .....	47
4.2.2.2.	Alat za odsijecanje suvišnih površina (eng. Trimmer) .....	47
4.2.2.3.	Alat za diskretizaciju prizmama u graničnom sloju (eng. Prism Layer Mesher) .....	48
4.2.2.4.	Postavke modela diskretizacije .....	49
4.2.2.5.	Volumetrijske kontrole .....	50
4.2.2.6.	Vizualizacija računalne mreže .....	52
4.2.2.7.	Evaluacija mreže .....	54
4.3.	Fizikalni modeli .....	55
4.3.1.	Dvoslojno razrješavanje zidne turbulencije (eng. Two–Layer All y+ Wall Treatment) .....	56
4.3.2.	Odijeljeno rješavanje jednadžbi strujanja (eng. Segregated Flow) .....	56
4.3.3.	Nestacionarni implicitni rješavač (eng. Implicit Unsteady) .....	57
4.3.4.	Udio fluida u volumenu (VOF) .....	57
4.3.5.	Eulerov višefazni model (eng. Eulerian Multiphase) .....	57
4.3.6.	Gravitacija (eng. Gravity) .....	57
4.3.7.	Metoda određivanja gradijenata: Hibridna Gausova-najmanjih kvadrata (eng. Gradient Method: Hybrid Gauss–LSQ) .....	57
4.3.8.	Model razvoja slobodne površine (eng. VOF Waves) .....	58
4.4.	Postavljanje početnih i rubnih uvjeta .....	58
4.5.	Prigušivanje VOF valova .....	58
4.6.	Definiranje DFBI – a .....	60
4.7.	Postavljanje parametara rješavača i kriteriji zaustavljanja .....	61
5.	REZULTATI .....	62
5.1.	Vizualizacija rezultata .....	62
5.1.1.	Prizori .....	62
5.1.2.	Grafovi .....	67
5.2.	Rezultati i usporedba rezultata .....	69
6.	ZAKLJUČAK .....	74
	LITERATURA .....	75
	PRILOZI .....	77

**POPIS SLIKA**

Slika 1	Osnovni koraci računalne dinamike fluida [17] .....	14
Slika 2	Vremensko osrednjavanje za statistički stacionarno strujanje .....	18
Slika 3	Dio diskretiziranog područja proračuna [17] .....	26
Slika 4	Linearna ekstrapolacija iz uzvodnih čvorova [17] .....	30
Slika 5	Dijagram toka vremenske integracije implicitnom metodom [17] .....	32
Slika 6	3D model tankera u naravnoj veličini .....	36
Slika 7	Nacrt rebara, pramčana i krmena kontura [24].....	37
Slika 8	Domena računalne simulacije .....	39
Slika 9	Probijena stranica [22].....	40
Slika 10	Kvaliteta stranice [22] .....	40
Slika 11	Nabor na površini uzrokovan bliskim stranicama [22] .....	41
Slika 12	Slobodni rubovi [22] .....	42
Slika 13	Ne manifoldni rub [22].....	42
Slika 14	Ne manifoldni vrh [22].....	42
Slika 15	Problemi površinske mreže .....	43
Slika 16	Naredba urušavanje vrhova [22] .....	43
Slika 17	Uklonjeni problemi probijenih stranica.....	44
Slika 18	Heksaedarski volumen [22].....	45
Slika 19	Alat za rediskretizaciju površina .....	47
Slika 20	Alat za diskretizaciju prizmama u graničnom sloju .....	48
Slika 21	Stopa rasta .....	49
Slika 22	Pramac i krma – volumetrijske kontrole .....	51
Slika 23	Wake far – volumetrijske kontrole .....	52
Slika 24	Diskretizirana računalna domena .....	54
Slika 25	Parametar $y_+$ na prvim volumenima do trupa kod $Fn=0,2117$ .....	55
Slika 26	Parametar $CCN$ na prvim volumenima do trupa kod $Fn=0,1669$ .....	55
Slika 27	Odabrani fizikalni modeli.....	56
Slika 28	Funkcija $dvar$ u ovisnosti o vremenu za $Fn=0,1669$ .....	60
Slika 29	Izgled slobodne površine kod $Fn=0,2117$ .....	63
Slika 30	Položaj slobodne površine na trupu broda .....	63
Slika 31	Slika valova pri $Fn=0,2117$ (fina mreža) .....	64
Slika 32	Prikaz valova pri $Fn=0,2117$ s boka (gruba mreža) .....	64
Slika 33	Kelvinov kut dobiven finom mrežom .....	65
Slika 34	Polje brzine na izopovršini .....	65
Slika 35	Polje brzine na ravnini simetrije.....	66
Slika 36	Slika strujnica (pogled s boka) .....	66
Slika 37	Slika strujnica (pogled na krmu) .....	67
Slika 38	Slika strujnica (pogled na pramac).....	67
Slika 39	Grafovi sile otpora dobiveni grubom mrežom za $Fn=0,2117$ .....	68
Slika 40	Trim i uron/izron dobiven grubom mrežom za $Fn=0,2117$ .....	68
Slika 41	Ovisnost koeficijenta ukupnog otpora o Froudeovom broju.....	70
Slika 42	Slika valova dobivena finom mrežom pri $Fn=0,0642$ .....	71
Slika 43	Slika valova dobivena srednjom mrežom za različite vrijednosti $Fn$ .....	72
Slika 44	Usporedba slike valova dobivene grubom (lijevo) i fine (desno) mrežom za $Fn=0,1926$ .....	73



---

**POPIS TABLICA**

Tablica 1	Standardne vrijednosti koeficijenata [17].....	24
Tablica 2	Glavne značajke broda i modela broda [24].....	37
Tablica 3	Udaljenosti granica domene .....	38
Tablica 4	Postavke grube mreže.....	50
Tablica 5	Kvadri za opis slobodne površine .....	51
Tablica 6	Odabrani rubni uvjeti na granicama .....	53
Tablica 7	Ovisnost duljine prigušivanja o duljini broda .....	59
Tablica 8	Postavke parametara rješavača i kriterija zaustavljanja .....	61
Tablica 9	Vrste mreža za $Fn=0,1926$ .....	62
Tablica 10	Rezultati sile otpora.....	69
Tablica 11	Usporedba dobivenih rezultata s provedenim mjerenjima .....	69

**POPIS OZNAKA**

Oznaka	Jedinica	Opis
$\bar{k}$	$m^2/s^2$	kinetička energija turbulencije
$\overline{\rho v_i v_j}$	$N/mm^2$	Reynoldsov tenzor naprezanja
$\bar{u}$	$m/s$	komponenta brzine glavnog strujanja paralelna sa stijenkom
$\tilde{n}$		bezdimenzijska koordinata
$B$	$m$	širina
$C_A$		koeficijent dodatnog otpora
$CCN$		Courantov broj
$C_D$		koeficijent aproksimacije turbulentnih transportnih jednažbi
$C_F$		koeficijent otpora trenja
$C_{FO}$		koeficijent otpora trenja ravne ploče
$C_P$		koeficijent otpora tlaka
$C_{PV}$		koeficijent viskoznog otpora tlaka
$C_T$		koeficijent sile otpora
$C_V$		koeficijent viskoznog otpora
$C_W$		koeficijent otpora valova
$D_{ij}$	$s^{-1}$	tenzor brzine deformacije
$du/dy$	$s^{-1}$	komponenta gradijenta brzine u smjeru okomitom na razmatrano tijelo
$E$	$J$	energija
$f_1$		linearna konstanta prigušenja
$f_2$		parabolična konstanta prigušenja
$f_i$	$m/s^2$	gustoća masene sile
$Fn$		Froudeov broj
$g$	$m/s^2$	konstanta gravitacije
$G$	$N/m^2$	generacija kinetičke energije
$k$		faktor forme
$k_F$		koeficijent proporcionalnosti otpora trenja
$k_{PV}$		koeficijent proporcionalnosti viskoznog otpora tlaka
$L$	$m$	duljina broda
$L_{pp}$	$m$	duljina između okomica
$L_{WL}$	$m$	duljina vodne linije
$n$		eksponent prigušenja
$n_j$		vektor normale
$p$	$N/mm^2$	tlak
$q_z^d$		proizvoljni moment izvora
$R$		koeficijent determinacije
$R_A$	$N$	dodatni otpor

$R_{AA}$	N	otpor zraka i vjetra
$R_{AP}$	N	otpor privjesaka
$R_{AR}$	N	otpor hrapavosti oplata
$R_{AS}$	N	otpor kormilarenja
$R_F$	N	otpor trenja
$Rn$		Reynoldsov broj
$Rn_t$		Reynoldsov broj definiran na temelju karakterističnih veličina turbulencije
$R_P$	N	otpor tlaka
$R_{PV}$	N	viskozni otpor tlaka
$R_T$	N	sila otpora
$R_V$	N	viskozni otpor
$R_W$	N	otpor valova
$S$	m <sup>2</sup>	oplakana površina
$T$	m	gaz
$t$	m	ukupna debljina sloja prizmi
$u_\tau$	m/s	brzina trenja
$v$	m/s	brzina
$V$	m <sup>3</sup>	volumen
$v_i$	m/s	vektor brzine
$W$	s <sup>-2</sup>	kvadrat fluktuacija vrtložnosti
$w$	m/s	vertikalna komponenta brzine
$x$	m	smjer propagacije valova
$x_{CG}$	m	položaj težišta u smjeru $x$ – osi
$x_{ed}$	m	završna koordinata sloja prigušenja
$x_{sd}$	m	početna koordinata sloja prigušenja
$y$	m	koordinata okomita na stjenku
$y^+$		parametar $y^+$
$y_{CG}$	m	položaj težišta u smjeru $y$ – osi
$z_{CG}$	m	položaj težišta u smjeru $z$ – osi
$\alpha_l$		volumni udio vode
$\Delta$	t	istisnina
$\delta_{ij}$		Kroneckerov simbol
$\Delta n$		udaljenost čvorova
$\varepsilon$	m <sup>2</sup> s <sup>-3</sup>	brzina disipacije energije turbulencije
$\kappa$		Von Karmanova konstanta
$\mu$	Pas	koeficijent dinamičke viskoznosti
$\mu_t$	Pas	koeficijent turbulentne dinamičke viskoznosti
$\nu$	m <sup>2</sup> /s	kinematički koeficijent viskoznosti
$\rho$	kg/m <sup>3</sup>	gustoća
$\rho_g$	kg/m <sup>3</sup>	gustoća zraka

---

$\rho_l$	kg/m <sup>3</sup>	gustoća vode
$\Sigma_{ij}$	N/mm <sup>2</sup>	devijatorski dio tenzora naprezanja
$\sigma_{ji}$	N/mm <sup>2</sup>	tenzor naprezanja
$\tau$	N/mm <sup>2</sup>	smično naprezanje
$\varphi$		razmatrano fizikalno svojstvo

---

**SAŽETAK**

Poznavanje značajki strujanja oko trupa broda predstavlja vrlo važan element u procesu projektiranja broda. Danas se najčešće za određivanje hidrodinamičkih značajki provode pokusi s modelima brodova u bazenu koji su vrlo skupi i dugotrajni. Računalnom dinamikom fluida (RDF) moguće je odrediti hidrodinamičke značajke u znatno kraćem vremenu, uz smanjenje troškova projektiranja broda. Ovim pristupom moguće je u ranoj fazi projektiranja dobiti uvid u detalje strujanja oko trupa broda te dobiti preporuku kako poboljšati određeni projekt ili pak odabrati najpovoljniji projekt za modelsko ispitivanje. U ovom radu provedena je numerička simulacija viskoznog strujanja oko trupa broda pomoću programskog paketa STAR-CCM+. Dan je matematički model koji se temelji na Reynoldsovima osrednjenim Navier – Stokesovim jednadžbama (eng. *Reynolds Averaged Navier – Stokes equations*),  $k - \varepsilon$  model turbulencije i metoda udjela fluida u volumenu (eng. *Volume of Fluid-VOF*) za opis gibanja dvofaznog medija. Također su opisani potrebni rubni uvjeti za matematički model te način diskretizacije domene. Utjecaj gustoće mreže na rezultate ukupnog otpora broda je ispitan koristeći tri gustoće mreže. Rezultati ukupnog otpora broda dobiveni numeričkim simulacijama uspoređeni su s dostupnim eksperimentalnim rezultatima. Pokazano je da je za sve tri gustoće mreže moguće postići zadovoljavajuće slaganje s eksperimentalnim rezultatima.

Ključne riječi: računalna dinamika fluida (RDF), metoda udjela fluida u volumenu (VOF),  $k - \varepsilon$  model turbulencije, otpor broda

---

**SUMMARY**

Knowing the characteristics of the flow around the ship hull is a very important element in the process of ship design. Nowadays, the most widely used method for the determination of the hydrodynamic characteristics is to conduct experiments with ship models in the towing tank, which is a very expensive and time consuming method. In order to determine the hydrodynamic characteristics in a much shorter period of time and to reduce the costs of ship design it is possible to use computational fluid dynamics (CFD). With this approach it is possible to gain insight into the details of the flow around the ship hull at an early design stage and to get a recommendation on how to improve a specific project or to choose the most suitable project for model testing. In this thesis, numerical simulation of viscous flow around the ship hull was carried out by use of software package STAR-CCM+. A mathematical model based on Reynolds averaged Navier – Stokes equations,  $k - \varepsilon$  turbulence model and Volume of Fluid method (VOF) for describing the motion of two-phase media are given. Also, necessary boundary conditions for the mathematical model and the method of implementation of discretization are described. The influence of the grid density on the results for the total ship resistance was investigated using three different grid densities. Results of total ship resistance, obtained by numerical simulations, were compared to available experimental results. It has been shown that for all three grid densities satisfactory agreement with experimental results can be achieved.

Key words: Computational Fluid Dynamics (CFD), Volume of Fluid method (VOF),  $k - \varepsilon$  turbulence model, ship resistance

## 1. UVOD

Osnovni zadatak svakoga brodograditelja prilikom osnivanja broda jest određivanje forme trupa koja će pri plovidbi zadanom brzinom na površini vode, odnosno ispod nje, stvarati što je moguće manji otpor. Time će i energija koju treba utrošiti na gibanje broda zadanom brzinom biti manja te su stoga smanjeni investicijski troškovi gradnje broda i troškovi goriva u eksploataciji broda. Temeljne metode za određivanje otpora su: empiričko – statističke metode, eksperimentalne metode i numeričke metode. Empiričko – statističke metode sadrže sustavne serije i statistički obrađene podatke izmjerene u naravi [1]. Ove metode korisne su u početnim fazama osnivanja broda, jer su brze i jednostavne za korištenje, no u kasnijim fazama osnivanja nisu prikladne zbog svoje ograničene točnosti. Za korištenje ovih metoda moraju se zadovoljiti ograničenja svake metode [2]. Eksperimentalne metode dijele se na ispitivanje fizičkih (materijalnih) modela i mjerenja na brodovima u naravi. Eksperimentalne metode mjerenja na brodovima u naravnoj veličini su komplicirane i skupe, što je posebice slučaj ukoliko želimo mijenjati neke značajke trupa. Mjerenja u naravi standardno se obavljaju u okviru pokusnih plovidbi na novogradnjama [1].

Danas, za određivanje značajki strujanja vode oko trupa broda, se najčešće koriste numerički i fizički modeli, odnosno numeričke i eksperimentalne metode. Kombinacija ovih metoda, uz analizu rezultata mjerenja u naravi, najbolji je put osnivanju kvalitetne brodske forme i dobivanje pouzdanih prognoza hidrodinamičkih značajki novog broda [1]. Naime, provođenje pokusa s modelima brodova u bazenu vrlo je skupo i dugotrajno. Primjenom računalne dinamike fluida moguće je u ranijoj fazi osnivanja broda dobiti uvid u detalje strujanja oko trupa broda te dobiti preporuku kako poboljšati određeni projekt ili pak odabrati najpovoljniji projekt za modelsko ispitivanje.

U diplomskom radu uz pomoć programskog paketa za računalnu dinamiku fluida STAR-CCM+, numerički je simulirano viskozno strujanje vode oko trupa broda te su dobiveni rezultati proračuna uspoređeni s eksperimentalnim rezultatima provedenog mjerenja modela broda u bazenu. U radu je dan pregled literature vezane za numeričke simulacije viskoznog strujanja oko trupa broda sa slobodnom površinom, dana je matematička osnova tih metoda te je opisan računalni model gibanja broda na slobodnoj površini vode.

## 1.1. Pregled dosadašnjih istraživanja

Numeričko simuliranje problema strujanja oko trupa broda počinje se razvijati krajem dvadesetog stoljeća. Prvi viskozni proračuni problema sa slobodnom površinom datiraju još iz 1970-ih, a bavili su se problemima zapljuskivanja unutar tanka (eng. *sloshing*). Napredovanje u brodskoj hidrodinamici se ogleda u međunarodnim časopisima i glavnim konferencijama vezanim uz ovo područje, kao što su Symposium on Naval Hydrodynamics, International Conference on Numerical Ship Hydrodynamics, kao i Workshops on CFD in Ship Hydrodynamics. Tako su za vrijeme CFD Workshop 1990. godine u Gothenburgu programski paketi za proračune sa slobodnom površinom bili temeljeni na potencijalnom strujanju, dok se programski paketi temeljeni na Reynoldsovim osrednjenim Navier – Stokes jednadžbama koriste isključivo za proračun strujanja oko krme. Za praktično projektiranje brodova proračuni otpora numeričkim metodama su zanemarivali viskozne učinke, dok su viskozni proračuni otpora zanemarivali stvaranje valova te su se koristili za proračune dvostrukog tijela. Istraživači su pokušavali unutar jednoga programskog paketa razviti mogućnost proračunavanja svih komponenata otpora, uzimajući u obzir združene te nelinearne efekte. Pravi napredak dogodio se u Tokiju na CFD Workshop 1994. godine gdje je razvijeno deset metoda vezano za viskozno strujanje oko trupa broda. Izuzev jedne metode (Kodama et al.) [3], sve su ostale metode koristile metodu diskretizacije slobodne površine temeljenu na praćenju slobodne površine, odnosno pomične mreže u kojoj se mreža prilagođava slobodnoj površini i prati njen oblik kako se val deformira. Uskoro ograničenja ovog pristupa postaju sve jasnija, prvenstveno u nemogućnosti rukovanja sa složenom geometrijom broda i povratnim valovima. Stoga su metode razlučivanja površine koristeći metodu udjela fluida u volumenu (eng. *Volume of fluid -VOF*) i njihove varijacije "ponovno otkrivene" za strujanje oko broda i implementirane u mnoge kodove, dokazujući nadmoć pri rukovanju s nelinearnošću i zbog toga su i danas najbolji izbor za proračun složenih problema sa slobodnom površinom [3].

Viskozne metode daju točnije rezultate od potencijalnih (panelnih) metoda prilikom proračuna otpora podvodnog, a i nadvodnog dijela broda. Glavni problem ovih metoda, osim ispravnoga modeliranja turbulencije, još je uvijek razlučivost (odnosno utjecaj mreže), ali se očekuje rješavanje ovog problema u budućnosti [3].

Danas većina autora koristi standardni model turbulencije  $k - \epsilon$  s funkcijama zida za opisivanje utjecaja turbulencije na osrednjeno strujanje [4] definiran od strane Laundera i Spaldinga 1974. godine [5].



Pokus otpora broda (bazenska ispitivanja) može biti proveden s fiksnim ili slobodnim modelom.

Do kraja dvadesetoga stoljeća većina proračuna otpora broda koja su koristila računalnu dinamiku fluida provodila su se s fiksnim modelima. Azcueta [3] 2001. godine razvija mogućnost proračuna otpora broda s dinamičkim trimom i uronom/izronom, a sve u svrhu točnijeg proračuna otpora broda povezujući dinamiku krutog tijela (sa šest stupnjeva slobode gibanja) s rješenjem strujanja dobivenog pomoću Reynoldsovih osrednjenih Navier – Stokesovih jednadžbi. Također razmatra utjecaj parametra  $y^+$  na rezultate proračuna i zaključuje kako su vrijednosti oko 50 najbolje.

U nastavku dan je prikaz recentnih radova koji se tiču numeričkih simulacija viskozna strujanja oko trupa broda.

Na primjeru KCS kontejnerskog broda ispitan je utjecaj gustoće mreže na kvalitetu rezultata proračuna uspoređujući rezultate s provedenim ispitivanjima u bazenu [4]. Mreža je varirana mijenjajući osnovnu veličinu volumena za 1,5. Jedino je sloj prizama definiran apsolutnom debljinom kako bi se zadržavala vrijednost  $y^+$  parametra oko 50. Proučavan je i utjecaj izbora modela turbulencije koristeći  $k - \varepsilon$ ,  $k - \omega$  (SST, eng. *Shear Stress Turbulence*), te RSM (eng. *Reynolds – stress model*) na rezultate proračuna te je zaključeno kako model  $k - \varepsilon$  daje najbolje rezultate.

Na istom modelu broda, Banks, Philips i Turnock [6] također istražuju utjecaj profinjavanja mreže na rezultate numeričke simulacije strujanja oko trupa broda. Proučavaju i utjecaj izbora modela turbulencije na rezultate proračuna, razmatrajući dva modela: SST i BSL (eng. *Baseline Turbulence model*) te dobivaju kako BSL model daje bolje rezultate na ovom primjeru. Razdvajanjem ukupnoga otpora broda na podvodni i nadvodni dio, zaključuju kako je za dobivanje točnijih rezultata otpora nadvodnog dijela broda (otpor zraka) potrebno detaljno modelirati nadvodni dio broda.

U radu [7] predstavljena su načela numeričkog simuliranja strujanja oko trupa tankera koristeći programski paket STAR-CCM+. Opisani su osnovni parametri geometrijskog i matematičkog modeliranja korištenog numeričkog modela. Proračuni su provedeni za balastno i projektno stanje pri jednoj brzini koristeći  $k - \omega$  model turbulencije, a rezultati su uspoređeni s provedenim mjerenjima. U konačnici, istaknute su mogućnosti daljnjeg poboljšavanja prikazanog modela.

Guedes Soares i Ahmed provode numeričke simulacije nestlačivog strujanja sa slobodnom površinom na primjeru tankera i to VLCC forme za jednu brzinu za koju su dostupni rezultati modelskih ispitivanja [8]. Uspoređuju rezultate programskog paketa temeljenog na viskoznom strujanju koji koristi metodu konačnih volumena (računalni program Ansys CFX) i  $k - \omega$  model

turbulencije i programskog paketa temeljenog na potencijalnom strujanju (kod Kelvin) za  $Fn=0,1285$  s eksperimentalnim rezultatima. Upućuju na razlike ova dva programska paketa temeljene na njihovoj različitoj matematičkoj formulaciji. Ukazuju na manu programskog paketa temeljenog na potencijalnom strujanju pri određivanju otpora valova pri manjim vrijednostima Froudeovih brojeva, kao i na jasnu ne mogućnost određivanja otpora trenja.

U radu [9] autori procjenjuju mogućnosti korištenja programskog paketa STAR-CCM+ za projektiranje, analizu i izvodljivost računalnih simulacija na primjeru brzog broda uspoređujući rezultate provedenih simulacija s bazenskim ispitivanjima. Pokazali su kako se  $k - \epsilon$  model turbulencije dobro slaže s eksperimentalnim rezultatima, osim u situacijama pojave odvajanja strujanja, kao i za veće vrijednosti Froudeovih brojeva, gdje je dana preporuka korištenja modela turbulencije s malim Reynoldsovima brojevima koji zahtijevaju znatno više vremena za proračun. Također zaključuju kako finije mreže daju točnije rezultate, ali znatno povećavaju vrijeme potrebno za proračun pa je potrebno odrediti kompromis između zadovoljavajuće točnosti i vremena proračuna. Za male vrijednosti Froudeovih brojeva, otpor valova je zanemariv pa je dana preporuka koristiti proračun dvostrukog uronjenog tijela. Autori zaključuju kako je STAR-CCM+ vrlo koristan alat za predviđanje krivulje otpora za vrijednosti Froudeovih brojeva manjih od 0,25.

Rad [10] naglašava razlike u strujanju oko modela broda i cijeloga broda koristeći računalnu dinamiku fluida. Ove razlike su prvenstveno u relativno drugačijem graničnom sloju (granični sloj kod cijelog broda relativno je manji od graničnog sloja kod modela broda), ali i u razbijanju valova (eng. *wave breaking*) pogotovo iza zrcalne krme te u odvajanju strujanja i nastajanju vrtloga. Važno je napomenuti kako ove razlike nisu zanemarive i većinom ovise o geometriji krme.

Dok većina autora za simulaciju strujanja oko trupa broda koristi metode temeljene na Navier – Stokesovim osrednjenim jednadžbama, metode diskretizacije slobodne površine znatno se razlikuju. Mnoge, iako znatno različite metode, se koriste s uspjehom. U [11] autori opisuju tri različite metode diskretizacije slobodne površine, a to su:

- 1) praćenje površine/pomične mreže u programskom paketu PARNASOS
- 2) razlučivanje površine koristeći metodu udjela fluida u volumenu u programskom paketu ISIS-CFD
- 3) metoda Level-Set u programskom paketu SURF

Autori zaključuju kako odabir pojedine metode ovisi o situaciji u kojoj se koristi te koji će biti zahtjevi primjene metode. Tako primjerice prilikom stvaranja valova metoda praćenja površine

rezultira znatnom numeričkom točnošću te brzom konvergencijom. S druge strane druge dvije metode su općenitije te se mogu koristiti u više različitih slučajeva. Metode razlučivanja površine lako rješavaju složene geometrije kao što su primjerice geometrije s bulbom, privjescima ili uronjenim krmenim zrcalom, dok metode praćenja površine kod ovih slučajeva mogu imati problema, ali su zato znatno brže. Metode razlučivanja površina najtočnije rješavaju problem razbijanja valova.

Jedna od mana metoda temeljenih na viskoznom strujanju nad metodama temeljenim na potencijalnom strujanju je vrijeme proračuna. U [12] autori predstavljaju dvije numeričke procedure koje ubrzavaju vrijeme proračuna prilikom rješavanja Reynoldsovih osrednjenih Navier – Stokesovih jednadžbi uz metodu udjela fluida u volumenu. Prva procedura temelji se na diskretizaciji vremena jednadžbe volumenskih udjela (VOF jednadžba) (91) dopuštajući korištenje većih vremenskih koraka bez smanjivanja točnosti. No, ovo utječe na točnost u slučaju proračuna gibanja broda. Druga procedura temelji se na kvazi–statičkom pristupu rješavanja dinamičke ravnoteže. Usporedbom ovih procedura s klasičnim procedurama, autori su pokazali da se realni problemi mogu riješiti i do četiri puta brže.

U radu [13] autori pokušavaju pronaći utjecajne faktore na rezultate numeričke simulacije viskoznoga strujanja oko trupa broda. Primjerice, istražuju utjecaj izbora modela turbulencije, profinjavanja mreže i odabir modela diskretizacije. Analizom rezultata proračuna, postavke te pravilan odabir parametara, dane su za inženjersku primjenu.

U konačnici važno je napomenuti kako je ITTC (eng. *International Towing Tank Conference*) izdao preporuke i smjernice kako postaviti parametre prilikom proračuna koristeći računalnu dinamiku fluida. U [14] dan je opis problema, upute o izradi i modifikaciji geometrije, izradi mreže, rubnim uvjetima, pravilnom izboru vremenskog koraka, izboru kriterija konvergencije, modela slobodne površine, izboru modela turbulencije itd.

## 2. OTPOR BRODA

Brod svojom plovidbom uzrokuje poremećaje u okolišu, vodi i zraku. Sila kojom tekućina djeluje na brod suprotno od smjera gibanja broda naziva se otpor broda. Sila otpora broda predstavlja silu tegljenja, odnosno silu potrebnu za održavanje jednolike brzine broda, bez upotrebe propulzora [15].

Ukupni otpor broda  $R_T$  složena je funkcija koja ovisi o:

- geometriji broda
- brzini plovidbe broda,  $v$
- svojstava tekućine,  $\mu$  – dinamički koeficijent viskoznosti,  $\rho$  – gustoća tekućine
- ubrzanja zemljine sile teže,  $g$ .

Obično se otpor broda zapisuje u obliku:

$$R_T = C_T(\text{geometrija trupa}, Rn, Fn) \frac{1}{2} \rho v^2 S \quad (1)$$

gdje je  $C_T$  koeficijent ukupnog otpora broda ovisan o geometriji trupa, Reynoldsovom broju  $Rn$  i Froudeovom broju  $Fn$ , a  $S$  oplakana površina trupa [1].

$$Rn = \frac{\rho v L}{\mu} \quad (2)$$

$$Fn = \frac{v}{\sqrt{gL}} \quad (3)$$

gdje je  $L$  duljina broda.

### 2.1. Raščlana otpora

Zbog složenosti funkcije otpora broda potrebno je raščlaniti otpor broda na komponente, odnosno pojedine vrste otpora. Ukoliko su tangencijalna naprezanja i hidrodinamički tlakovi u smjeru normale poznati za sve točke oplakane površine trupa, ukupni otpor može se odrediti izrazom:

$$R_T = \int_S \tau_0 \cos(\tau_0, x_1) dS + \int_S p \cos(p, x_1) dS \quad (4)$$

gdje prvi dio izraza predstavlja otpor trenja, a drugi otpor tlaka. Stoga je moguće pisati:

$$R_T = R_F + R_P \quad (5)$$

pri čemu je  $R_F$  otpor trenja, a  $R_P$  otpor tlaka.

Ova podjela temelji se na saznanju da tekućina djeluje na trup kontinuirano raspoređenim površinskim silama.

Strujanje oko broda može se podijeliti na područje s dominantnim utjecajem viskoznosti, u što spadaju granični sloj i hidrodinamički trag te vanjsko područje s zanemarivim utjecajem viskoznosti (potencijalno strujanje). Otpor u idealnoj tekućini postoji samo ako se gibanjem tijela na slobodnoj površini generiraju površinski valovi. Stoga je moguće ukupni otpor podijeliti:

$$R_T = R_V + R_W \quad (6)$$

gdje je  $R_V$  viskozni otpor, a  $R_W$  otpor valova.

Viskozni otpor funkcija je Reynoldsovog broja, dok je otpor valova funkcija Froudeovog broja. Viskozni otpor moguće je podijeliti na otpor trenja  $R_F$  koji nastaje kao posljedica tangencijalnih napreznja između vode i oplata broda te na viskozni otpor tlaka  $R_{PV}$  koji nastaje kao posljedica promjene tlaka duž trupa broda uzrokovane viskoznim pojavama unutar graničnog sloja. Daljnja promjena tlaka duž trupa uzrokuje stvaranje valova na površini. Stoga vrijedi:

$$R_P = R_{PV} + R_W \quad (7)$$

$$R_P = C_P(Rn, Fn) \frac{1}{2} \rho v^2 S \quad (8)$$

$$R_{PV} = C_{PV}(Rn) \frac{1}{2} \rho v^2 S \quad (9)$$

$$R_W = C_W(Fn) \frac{1}{2} \rho v^2 S \quad (10)$$

$$R_V = R_F + R_{PV} \quad (11)$$

$$R_V = [C_F(Rn) + C_{PV}(Rn)] \frac{1}{2} \rho v^2 S \quad (12)$$

$$R_V = C_V(Rn) \frac{1}{2} \rho v^2 S \quad (13)$$

gdje je  $C_P$  koeficijent otpora tlaka,  $C_{PV}$  koeficijent viskoznog otpora tlaka,  $C_W$  koeficijent otpora valova,  $C_F$  koeficijent otpora trenja, a  $C_V$  koeficijent viskoznog otpora [1].

### 2.1.1. Otpor trenja

Otpor trenja komponenta je ukupnog otpora dobivena integriranjem tangencijalnih napreznja preko oplakane površine trupa broda u smjeru gibanja broda. Tangencijalna napreznja, odnosno trenje, uzrokovano je viskoznošću realne tekućine. Viskoznost ovisi o tipu tekućine i obliku strujanja, a mjeri se otporom tekućine prema smičnoj ili kutnoj deformaciji pri gibanju. Dinamički koeficijent viskoznosti određuje se omjerom smičnog napreznja i jedinice gradijenta brzine:

$$\mu = \frac{\tau}{\frac{du}{dy}} \quad (14)$$

gdje je  $\tau$  smično naprezanje, a  $du/dy$  komponenta gradijenta brzine u smjeru okomitom na razmatrano tijelo [1].

Kinematički koeficijent viskoznosti je omjer dinamičkog koeficijenta viskoznosti i gustoće tekućine:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (15)$$

Svojstvo viskoznosti tekućine ovisi o temperaturi i tlaku. U razmatranjima problema otpora broda, promjena viskoznosti promjenom tlaka je zanemariva. Porastom temperature tekućine, viskoznost tekućina se smanjuje, što je potrebno uzeti u obzir.

Otpor trenja računa se prema izrazu:

$$R_F = C_F (Rn) \frac{1}{2} \rho v^2 S \quad (16)$$

Zbog velike složenosti problema, ne postoje analitičke metode koje bi vjerodostojno opisale i odredile komponente otpora. Stoga se koeficijent otpora trenja računa ili primjenom računalne dinamike fluida ili prema regresijskom izrazu predloženom 1957. godine od strane ITTC-a (International Towing Tank Conference) koji glasi [16]:

$$C_F = \frac{0,075}{(\log Rn - 2)^2} \quad (17)$$

Reynoldsov broj je bezdimenzijski parametar koji pokazuje odnos viskoznih i inercijskih sila u tekućini. Iz izraza (17) moguće je uočiti da će se povećanjem Reynoldsovog broja, odnosno povećanjem brzine koeficijent otpora trenja smanjivati pa će udio otpora trenja u ukupnom otporu biti manji.

Brodaska forma je zakrivljena u poprečnom i uzdužnom smjeru. Uslijed zakrivljenosti brodskog trupa tlak će se duž trupa mijenjati, a isto tako će se mijenjati i brzina vanjskog potencijalnog strujanja. To uzrokuje promjene strujanja u graničnom sloju, a time i promjenu tangencijalnog naprezanja trenja u odnosu na ono kod ravne ploče za koju je ustanovljeno da se tlak duž ploče ne mijenja. Tako u području pramca gdje je gradijent tlaka negativan dolazi do ubrzavanja vode i granični sloj je tanji od onoga kod ravne ploče. Idući prema krmi gradijent je pozitivan te se strujanje usporava, a granični sloj postaje deblji nego kod ravne ploče odgovarajuće duljine. Teorijskim i eksperimentalnim istraživanjima pokazala su da je koeficijent otpora trenja,

ukoliko nema odvajanja strujanja, proporcionalan koeficijentu otpora trenja ekvivalentne ravne ploče  $C_{F0}$  [1]:

$$C_F = C_{F_0} k_F \quad (18)$$

### 2.1.2. Viskozni otpor tlaka

Viskozni otpor tlaka ili otpor forme nastaje kao posljedica postojanja graničnog sloja. Ovisi o obliku trupa broda i o Reynoldsovom broju. Predstavlja integral dijela normalnih napreznja nastao uslijed viskoznosti i turbulencije u graničnom sloju po oplakanoj površini broda. Znatno se razlikuje u laminarnom ili mješovitom graničnom sloju od onoga u turbulentnom graničnom sloju. Viskozni otpor tlaka ovisi i o području na kojem dolazi do odvajanja graničnog sloja.

Za dobro oblikovane forme, u kojima ne dolazi do odvajanja strujanja u graničnom sloju, koeficijent viskoznog otpora tlaka proporcionalan je koeficijentu otpora trenja ekvivalentne ravne ploče  $C_{F0}$  koja ima istu oplakanu površinu i duljinu kao i model.

$$C_{PV} = k_{PV} C_{F_0} \quad (19)$$

Kako viskozni otpor u sebi sadržava otpor trenja ekvivalentne ravne ploče, otpor trenja uslijed zakrivljenosti oplata i otpor forme moguće je pisati:

$$C_V = (k_F + k_{PV}) C_{F_0} = (1 + k) C_{F_0} \quad (20)$$

gdje je  $k$  faktor forme i odnosi se na povećanje otpora uslijed zakrivljenosti trupa i otpora forme. Ovisan je o geometrijskim značajkama i može se odrediti na više načina.

### 2.1.3. Otpor valova

Valovi nastaju promjenom tlaka u blizini slobodne površine. Simetričan poremećaj površine koji nastaje u skladu s Bernoullijevom jednačbom naziva se i primarnim valnim sustavom, dok se valni sustavi pramca, pramčanog i krmenog ramena te krme nazivaju sekundarnim valnim sustavima. Kako se primarni valni sustav ne može održati zbog svojstava inercije i viskoznosti realne tekućine, ostala četiri sekundarna valna sustava interferiraju u rezultirajući valni sustav. Pramčani i krmeni sustav valova zbog većeg tlaka započinju s brijegom, dok sustav pramčanog i krmenog ramena zbog niskog tlaka započinju s dolom.

Početkom 20. stoljeća Lord Kelvin bavio se problemom otpora valova. Razmatranjem putujuće točke tlaka, ustvrdio je kako ispred pramca broda postoji područje visokog tlaka zbog čega se

formira značajni pramčani val kao dio sustava poprečnih i razilaznih valova. Brijeg pramčanog vala je u blizini broskog trupa okomit na smjer gibanja, savija se prilikom približavanja razilaznim valovima, u kojima na kraju i nestaje. Brijegovi ovih sustava ne prelaze granice područja, koje je omeđeno pravcima koji sa simetralom tvore kut od  $18^\circ - 20^\circ$ . Ovaj kut u dubokoj vodi ne ovisi o brzini broda i obliku trupa. Ovakav sustav valova formira se i na pramčanom i krmenom ramenu, kao i na krmi broda. Krmeni sustav valova često je nejasan, kako je poremećen sustavom valova pramca, pramčanog te krmenog ramena. Slika valova giba se zajedno s brodom, odnosno slika poprečnih valova duž trupa broda pri konstantnoj brzini neće se mijenjati s vremenom. Udaljenost između dva uzastopna poprečna vala ovisi o brzini gibanja broda.

Otpor valova dijeli se na otpor slike vala te na otpor lomljenja vala. Otpor lomljenja vala javlja se kod punijih formi trupa, formi trupa s omjerom duljine i širine manjim od 6 kao i kod formi s tupim pramcem. Tupi pramac uzrokuje porast tlaka na pramcu te stvaranje pramčanog vala. Lomljenjem pramčanog vala nastaju vrtlozi koji se slijevaju uzduž broskog trupa. Gubitak energije u vrtložnom tragu od slomljenog vala ovisi o Reynoldsovom broju, dok samo generiranje pramčanog vala, kao i lomljenje valova ovisi o Froudeovom broju.

Otpor valova moguće je odrediti modelskim ispitivanjima u bazenu, mjerenjem profila valova iza modela broda kao i numeričkim metodama koje se temelje na teoriji potencijalnog strujanja [1].

## 2.2. Dodatni otpor

Dodatni otpor moguće je prikazati sljedećom formulom:

$$R_A = C_A \frac{1}{2} \rho v^2 S \quad (21)$$

gdje je  $C_A$  koeficijent dodatnog otpora. Dakle ukupni otpor se može prikazati u obliku:

$$R_T = [C_F(Rn) + C_{pV}(Rn) + C_W(Fn) + C_A] \frac{1}{2} \rho v^2 S \quad (22)$$

uz napomenu kako je dodatni otpor uglavnom viskoznog porijekla, ali dijelom može biti i posljedica stvaranja valova.



U dodatne komponente otpora ubrajaju se [1]:

- otpor privjesaka –  $R_{AP}$  (otpor nogavica, skrokova, osovina, ljuljnih kobilica, otvora za poprečne propulzore, itd.)
- otpor hrapavosti oplata –  $R_{AR}$  (nastaje uslijed hrapavosti oplata izazvane korozijom ili obraštanjem trupa)
- otpor zraka i vjetra –  $R_{AA}$  (otpor nadvodnog dijela trupa uslijed gibanja broda kroz zrak i vjetar)
- otpor kormilarenja –  $R_{AS}$  (nastaje zbog upotrebe kormila za korekciju putanje broda i održavanje ravnoga kursa).

Ukoliko na modelu nema privjesaka govorimo o otporu golog trupa. Porast otpora može uslijediti i zbog utjecaja okoline, odnosno uslijed plovidbe u ograničenoj vodi (ograničenje u horizontalnoj ravnini) ili u plitkoj vodi (ograničenje u vertikalnoj ravnini). U uvjetima službe dolazi do povećanja otpora zbog utjecaja zraka i vjetra, gibanja broda na valovima, odbijanja valova o trup broda te zaošijanja broda uslijed valova, vjetra i kormila.

U ovom radu od gore navedenih dodatnih komponenata otpora uzet je u obzir samo otpor zraka i to samo za nadvođe. Naime, proračunavan je otpor modela broda bez privjesaka.

### 3. RAČUNALNA DINAMIKA FLUIDA

Mehanika fluida je teorijsko eksperimentalna znanost. Teorijski pristup zasniva se na analitičkom rješavanju matematičkih modela strujanja fluida te se analitičkim rješenjem dobiva kompletan uvid u fiziku nekog problema. No, kako je većina problema vezana za strujanje fluida opisana nelinearnim parcijalnim diferencijalnim jednačbama te ukoliko je riječ i o turbulentnom strujanju, koje je stohastičke naravi, nije moguće pronaći opće analitičko rješenje. Eksperimentalni pristup usko je povezan s teorijskim pristupom, jer se svako mjerenje temelji na teoriji. Eksperimentalnim pristupom dobiva se ograničeni broj podataka o nekoj pojavi, no ponavljanjem eksperimenta za različite kombinacije vrijednosti utjecajnih parametara moguće je stvoriti sliku o pojavi. Razvojem računala stvorili su se preduvjeti za numeričko rješavanje matematičkih modela strujanja fluida te se počinje razvijati treća grana mehanike fluida – računalna dinamika fluida. Ova grana temelji se na teorijskom pristupu, ali ima i sličnosti s eksperimentalnim pristupom, kako iz jednog numeričkog rješenja nekog problema nije moguće zaključiti ništa o utjecaju pojedinih parametara. Prednosti ove metode nad eksperimentalnim pristupom su skraćivanje vremena projektiranja, dobivanje potpunije slike polja strujanja, moguće je simulirati uvjete koji se ne mogu ostvariti u eksperimentu, troši se manje energije i s vremenom postaje jeftinija. Nedostaci su ograničena primjena na slučajeve za koje postoje dobri matematički modeli, te ukoliko se traži ograničeni broj rezultata ovaj pristup može biti skuplji [17].

#### 3.1. Osnovni koraci računalne dinamike fluida

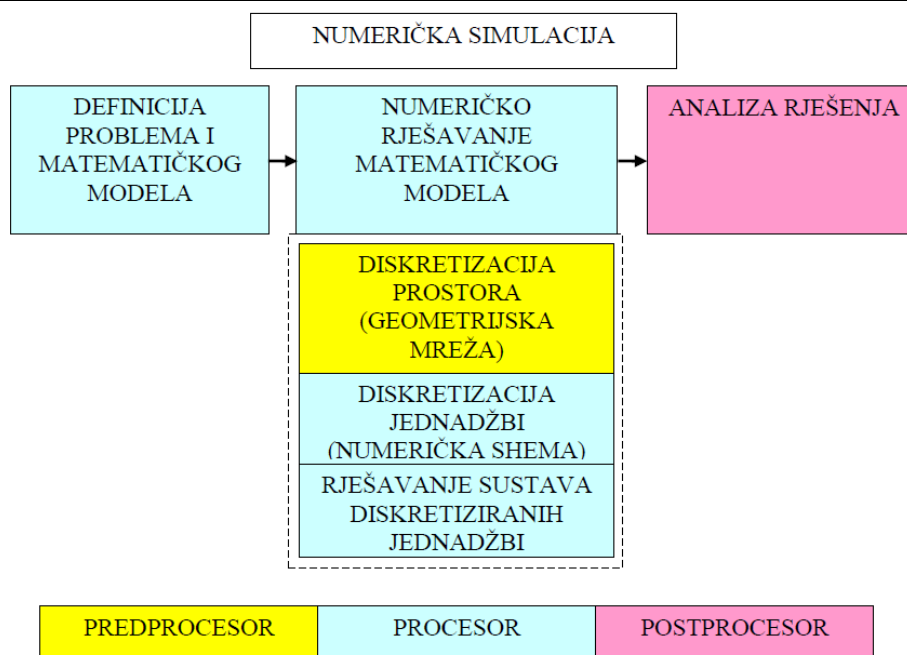
Simulacija započinje definicijom problema i izborom odgovarajućeg matematičkog modela. Matematički model predstavlja matematički zapis fizikalnog modela koji obuhvaća niz pretpostavki pri aproksimaciji stvarnog svijeta. Rezultat fizikalnog modeliranja strujanja fluida sustav je parcijalno diferencijalnih jednačbi. Pretpostavke su sljedeće:

- kontinuum
- homogenost, izotropnost
- jednokomponentan/višekomponentan
- jednofazan/višefazan
- 1D/2D/3D
- stacionarno/nestacionarno
- neviskozno/laminarno/turbulentno.

Kontinuum je zamišljena tvar koja bi u potpunosti ispunjavala prostor i zadržavala fizikalna svojstva i za slučaj infinitezimalno malog volumena. Ovo je idealizacija (kako je materija diskretne strukture), ali za probleme strujanja u kojima je dimenzija područja strujanja dovoljno velika u odnosu na međumolekularni razmak, predstavlja dovoljno dobru aproksimaciju stvarnog svijeta. Homogenost predstavlja da su sva fizikalna svojstva ista u svim točkama fluida, a izotropnost da su fizikalna svojstva ista u svim smjerovima. Ukoliko u strujanju dolazi do promjene faza i strujanje postaje višefazno to je potrebno modelirati. Homogenu smjesu plinova tretiramo kao jednodimenzionalan fluid, no ukoliko je koncentracija pojedinog plina različita u različitim točkama, potrebno ju je promatrati kao višekomponentan fluid. Ukoliko je moguće zanemariti promjene fizikalnih veličina u nekom od smjerova, 3D problem može se svesti na 2D ili 1D. Strujanje je u stvarnosti nestacionarno, ali moguće je uvesti pretpostavku o stacionarnosti te tako pojednostavniti problem. Strujanje je u prirodi uglavnom turbulentno, a laminarno strujanje se pojavljuje samo kod niskih vrijednosti Reynoldsovih brojeva. Pri optjecanju tijela mogu se pojaviti i obje vrste strujanja. O modeliranju turbulencije bit će govora u nastavku.

Drugi korak u numeričkoj simulaciji je numeričko rješavanje postavljenog matematičkog modela. Ono se sastoji od tri koraka. Prvi korak predstavlja diskretizaciju područja proračuna (prostora), odnosno prostor se podijeli na određeni broj manjih volumena. Svakom volumenu dodijeli se jedan ili više ćvorova u kojima će se računati vrijednosti polja fizikalnih veličina, koja se pojavljuju u jednadžbama matematičkog modela. Rezultat provedene diskretizacije prostora je geometrijska mreža. Nadalje, u drugom koraku potrebno je diskretizirati parcijalne diferencijalne jednadžbe na definiranoj geometrijskoj mreži, uvažavajući rubne uvjete. Diskretizacija se provodi nekom od metoda (metoda konačnih elemenata, metoda konačnih volumena, metoda konačnih razlika, itd.). Sustavi diskretiziranih jednadžbi rješavaju se iterativnim postupkom koji u sebi sadrži rješavanje sustava linearnih algebarskih jednadžbi (treći korak).

U konačnici potrebno je dobiveno numeričko rješenje analizirati. To podrazumijeva prikaz skalarnih, vektorskih, tenzorskih polja, integraciju protoka, sile, momenata, itd. te dijagramski prikaz željenih veličina.



**Slika 1 Osnovni koraci računalne dinamike fluida [17]**

Gledajući organizacijski, numerička simulacija provodi se kroz tri programa: predprocesor, procesor i postprocesor. Predprocesor je računalni program za generiranje geometrijske mreže. Pri generiranju mreže treba voditi računa o rubnim uvjetima. Primjerice u području graničnog sloja koji nastaje prilikom opstrujavanja tijela, gdje postoje veliki gradijenti fizikalnih veličina, potrebno je prostor popuniti manjim volumenima, za razliku od područja daleko od tijela. Procesor je program koji numerički rješava željeni matematički model s zadanim početnim i rubnim uvjetima. On može biti koncipiran tako da ima fiksno ugrađeni matematički model gdje korisnik bira hoće li koristiti puni ili neki njegov dio, ili temeljen na objektnom programiranju gdje korisnik praktički slobodno zadaje matematički model koji će rješavati. Postprocesor je program koji služi za vizualizaciju rezultata proračuna, odnosno za izračunavanje pojedinih integralnih veličina [17].

### 3.2. Osnovni zakoni mehanike fluida

Polazišna točka za proračun nestlačivog viskoznog strujanja su Navier – Stokesove jednačbe [3]. Kombinacijom jednačbe količine gibanja i konstitutivne jednačbe za newtonski fluid koja uspostavlja opći linearni odnos između tenzora naprežanja  $T_\sigma(\sigma_{ij})$  i tenzora brzine deformacije  $T_\epsilon(D_{ij})$  dobivaju se Navier – Stokesove jednačbe [18]. U nastavku slijedi prikaz osnovnih jednačbi mehanike fluida.

Zakon održanja količine gibanja (izražen naprežanjima) [18]:

$$\rho \frac{Dv_i}{Dt} = \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \rho f_i + \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} \quad (23)$$

Jednadžba kontinuiteta (zakon održanja mase) [18]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_j) = 0 \quad (24)$$

Pomoću jednadžbi (23) i (24) dobije se sustav koji nije zatvoren. Broj nepoznanica (devet) veći je od broja raspoloživih jednadžbi (četiri). Stoga treba uvesti konstitutivne, dopunske jednadžbe koje će uspostaviti vezu između kinematike ( $v_i$ ) i dinamike ( $\sigma_{ij}$ ), odnosno tenzora brzine deformacija i tenzora naprezanja [19]. Ova veza prikazana je sljedećom jednadžbom.

Zakoni posebnih ponašanja fluida (konstitutivne jednadžbe) su [18]:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \Sigma_{ij} \quad (25)$$

$$p = -\frac{1}{3}\sigma_{kk} \quad (26)$$

$$\Sigma_{ij} = 2\mu D_{ij} - \frac{2}{3}\mu D_{kk}\delta_{ij} \quad (27)$$

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (28)$$

Navier – Stokesove jednadžbe glase [18]:

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \rho f_i - \frac{\partial}{\partial x_i} \left( p + \frac{2}{3}\mu D_{kk} \right) + 2\frac{\partial}{\partial x_j} (\mu D_{ij}) \quad (29)$$

Jednadžba (29) već je pojednostavljena jednadžba, jer je izvedena za nestlačivi, newtonovski fluid. Predstavlja nelinearnu parcijalnu diferencijalnu jednadžbu drugog reda eliptičkog oblika. Kako za proračunavanje otpora broda promatramo viskozno, izotermičko, nestlačivo strujanje newtonovskog fluida (linearna veza tenzora viskoznog naprezanja i tenzora brzine promjene deformacije preko dinamičke viskoznosti), može se za područje tlakova koje se koristi u inženjerskoj primjeni prihvatiti  $\mu = \text{const}$ . Tada jednadžba (29) poprima oblik [18]:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = f_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \nabla^2 v_i \quad (30)$$

gdje  $\rho$  predstavlja gustoću fluida,  $D/Dt$  predstavlja operator individualne vremenske derivacije,  $v_i$  vektor brzine,  $f_i$  predstavlja gustoću masene sile,  $\sigma_{ij}$  tenzor naprezanja,  $\delta_{ij}$  Kroneckerov simbol (koji je za  $i=j$  jednak 1, a za ostale slučajeve 0),  $p$  mehanički/termodinamički tlak,  $\Sigma_{ij}$  devijatorski dio tenzora naprezanja,  $D_{ij}$  tenzor brzine deformacije,  $\mu$  dinamički koeficijent viskoznosti,  $\nu$  kinematički koeficijent viskoznosti.

Uvođenjem konstitutivnih jednadžbi dobili smo zatvoreni sustav. Članovi u jednadžbi (30) redom se nazivaju: nestacionarni član (koji opisuje akceleraciju kao vremensku promjenu brzine), konvekcijski član (koji opisuje utjecaj povezan s promjenom brzine u prostoru), član masene sile (najčešće gravitacijsko ubrzanje), član gradijenta tlaka te difuzijski član (koji je rezultat pretpostavke newtonskog fluida) [20]. Difuzijski prijenos posljedica je događanja u mikro svijetu. Ovaj prijenos se u kontinuumu modelira koeficijentom difuzije i gradijentom fizikalnog svojstva kojeg promatramo. Ovaj prijenos se odvija sve dok postoji gradijent te teži ujednačavanju fizikalnog svojstva unutar domene proračuna, pa će polje fizikalnog svojstva biti pod djelovanjem procesa difuzije opisano glatkim funkcijama. Difuzijski prijenos je simetričan, jer se odvija na sve strane. Konvekcijski prijenos je jednosmjernan i uvijek se odvija u smjeru vektora brzine [17].

Strujanje u prirodi poprima dva različita oblika: laminarno i turbulentno (i mješovito). Navier – Stokesove jednadžbe valjane su za oba tipa strujanja.

### 3.3. Rubni uvjeti Navier – Stokesovih jednadžbi

Za rješavanje svakog pojedinog problema opisanog jednadžbom (30) treba u sustav jednadžbi uvesti posebne početne i rubne uvjete koji zavise o karakterističnim geometrijskim granicama promatranog problema. Početne uvjete moguće je shvatiti kao granične uvjete u vremenu. Dirichletovim rubnim uvjetom propisuje se vrijednost varijable na granici domene. Von Neumanov rubni uvjet zadaje vrijednost nultog gradijenta na granici, a generalizirani von Neumanov uvjet propisuje proizvoljnu vrijednost gradijenta varijable u smjeru normale na granicu. Postoje razni oblici tipa granica, a četiri najčešća tipa su: ulazna granica, izlazna granica, zid i ravnina simetrije. Fizikalno ulazna granica označava ulaz fluida u domenu te je najčešće zadana Dirichletovim rubnim uvjetom brzine i von Neumanovim uvjetom za tlak. Na izlaznoj granici postavlja se von Neumanov rubni uvjet za brzinu i tlak, a predstavlja izlaz fluida iz domene. Zid predstavlja nepropusnu granicu, a za viskozno strujanje brzina je jednaka nuli na zidu. Simetrija se koristi za smanjivanje vremena proračuna, jer se domena simetričnog strujanja smanjuje dva puta [17].

### 3.4. Značajke turbulentnog strujanja

Turbulentno strujanje fluida najčešći je oblik strujanja u prirodi. Pojavljuje se uvijek u strujanjima pri visokim vrijednostima Reynoldsova broja.

Glavne značajke turbulentnog strujanja su sljedeće [20]:

- nestacionarnost, kaotičnost
- trodimenzionalno
- sadržavaju veliki udio vrtložnosti
- turbulencija povećava brzinu miješanja veličina
- miješanje je disipacijski proces, kinetička energija strujanja pretvara se u unutarnju energiju fluida
- vrlo su komplicirana za analizu
- variraju u širokom rasponu brzina i vremenskih skala, ovo svojstvo čini izravnu numeričku simulaciju vrlo kompliciranom.

### 3.4.1. Modeliranje turbulencije

Modeliranjem turbulencije pokušava se pronaći rješenja Navier – Stokesovih jednadžbi koja su od interesa u praktičnoj primjeni. Naime, direktnim numeričkim rješavanjem Navier – Stokesovih jednadžbi turbulentnog strujanja (one sadrže sve potrebne informacije za opisivanje turbulencije) trebalo bi koristiti tako finu geometrijsku mrežu da se obuhvate najmanje valne duljine i tako sitni vremenski korak integracije da se obuhvate najviše frekvencije, pri čemu bi točnost numeričkog rješavanja trebala biti vrlo visoka kako ne bi numeričkim rješavanjem "zamaglili" fizikalnost koeficijenta korelacije pulsirajućih komponenti brzine i tlaka. Kako je ovo još uvijek vrlo zahtjevno sa stajališta kapaciteta i brzine računanja računala za realne inženjerske probleme ovaj pristup ne dolazi u obzir. Ovom u prilog ide i činjenica da bi rezultat direktnog rješavanja Navier – Stokesovih jednadžbi bio skup numeričkih vrijednosti traženih polja fizikalnih veličina u velikom broju prostornih točaka za veliki broj vremenskih koraka. Inženjere uglavnom zanimaju integralne veličine poput protoka, sile tlaka, viskozne sile, itd. koje također pokazuju slučajne promjene u vremenu. Dakle, ne zanimaju ih pojedine trenutne vrijednosti već prosječne vrijednosti i eventualno amplitude odstupanja od prosječnih vrijednosti. Stoga se nameće ideja da se prije rješavanja Navier – Stokesovih jednadžbi sve veličine u tim jednadžbama osrednje i da se rješavaju jednadžbe za osrednjene veličine, koje inženjere i zanimaju. Ovako se značajno olakšava numeričko rješavanje tih jednadžbi, jer koraci prostorne i vremenske diskretizacije više ne moraju biti onako mali. Bitno je naglasiti kako se direktno rješavanje koristi prije svega u produbljivanju znanja o turbulenciji te za validaciju modela o turbulenciji. Nadalje će biti govora o Reynoldsovom (vremenskom) osrednjenju [17].

## 3.4.1.1. Reynoldsove osrednjene Navier – Stokesove jednadžbe

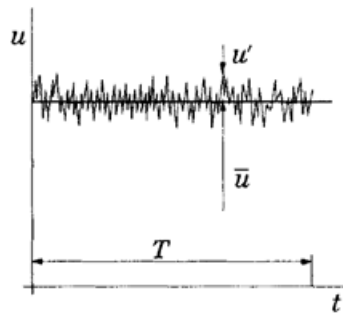
U statistički stacionarnom strujanju svaka varijabla može biti zapisana kao suma prosječne vrijednosti i pulsirajućeg dijela oko te vrijednosti [20]:

$$f(x_i, t) = \bar{f}(x_i) + f'(x_i, t) \quad (31)$$

pri čemu je:

$$\bar{f}(x_i) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T f(x_i, t) dt \quad (32)$$

gdje je  $t$  vrijeme, a  $T$  period osrednjenja. Period osrednjenja mora biti dovoljno velik u usporedbi s tipičnim vremenskim skalama fluktuacija. Ako je  $T$  dovoljno velik  $\bar{f}$  ne ovisi o trenutku u kojem je započeto osrednjavanje. Ovo osrednjavanje je moguće primijeniti kod statistički stacionarnih strujanja te se još zove i vremensko osrednjavanje. Slika 2 prikazuje vremensko osrednjavanje.



**Slika 2** Vremensko osrednjavanje za statistički stacionarno strujanje

Za dobro odabrano razdoblje osrednjenja vrijedi [20]:

$$\bar{f}' = 0 \quad (33)$$

odnosno vremenski osrednjena vrijednost pulsirajućeg dijela bilo koje fizikalne veličine jednaka je nuli.

Iz kvadratnih nelinearnih članova dobiju se dva člana, umnožak prosjeka i umnožak kovarijance [20]:

$$\overline{f \cdot g} = \overline{(\bar{f} + f') \cdot (\bar{g} + g')} = \bar{f} \cdot \bar{g} + \overline{f' \cdot g'} \quad (34)$$

Može se uočiti da prosječna vrijednost umnoška dvaju pulsirajućih dijelova fizikalnih veličina nije jednaka nuli. Temeljem ovog umnoška moguće je govoriti o korelaciji dviju veličina, koja se izražava koeficijentom korelacije [17]:



$$R = \frac{\overline{f' \cdot g'}}{\sqrt{\overline{f' \cdot f'}} \sqrt{\overline{g' \cdot g'}}} \quad (35)$$

Ukoliko je vrijednost koeficijenta korelacije jednaka 0, onda je i vrijednost ovog umnoška jednaka 0. Kako je ovo rijetko slučaj u turbulentnom strujanju, kao rezultat u jednadžbama očuvanja postoji član  $\overline{\rho v_i v_j}$  poznat po nazivu Reynoldsovo naprezanje [20]

Razmatra se nestlačivo turbulentno strujanje fluida konstantne gustoće u kojemu se zanemaruje utjecaj masenih sila. Ovakvo strujanje opisano je jednadžbama (24) i (30). Nepoznanice  $v_i$  i  $p$  prikazuju se zbrojem osrednjene vrijednosti i pulsirajućeg dijela [17]:

$$v_i = \bar{v}_i + v_i' \quad (36)$$

$$p = \bar{p} + p' \quad (37)$$

Uvrštavanjem jednadžbe (36) u jednadžbu kontinuiteta za nestlačivo strujanje dobije se:

$$\frac{\partial(\bar{v}_j + v_j')}{\partial x_j} = 0 \quad (38)$$

Iz osrednjene vrijednosti jednadžbe (38), dobije se jednadžba kontinuiteta za osrednjeno strujanje:

$$\frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_j} = 0 \quad (39)$$

Ako se od jednadžbe (38) oduzme jednadžba (39) dobije se jednadžba kontinuiteta za pulsirajuće strujanje koja glasi:

$$\frac{\partial v_j'}{\partial x_j} = 0 \quad (40)$$

Uvrštavanjem (36) i (37) u (30) te vremenskim osrednjavanjem dobije se Reynoldsova osrednjena Navier – Stokesova jednadžba [18]:

$$\rho \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + \rho \bar{v}_j \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \mu \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} - \overline{\rho v_i v_j'} \right) \quad (41)$$

Zadnji član jednadžbe (41) predstavlja Reynoldsov tenzor turbulentnog naprezanja, kao što je već napomenuto. Ovaj tenzor je simetričan i sadrži dodatnih šest nepoznanica te čini sustav jednadžbi nezatvorenim. Moguće je izvesti jednadžbu za Reynoldsova naprezanja, no pojavile bi se nove nepoznanice. Zbog nelinearnog konvekcijskog člana ukoliko se formuliraju članovi višeg reda, dolazi do velikog povećanja broja nepoznanica. Stoga se ovaj član linearizira. Reynoldsovim osrednjavanjem pokušavamo stohastičku prirodu turbulentnog strujanja prikazati vremenski osrednjenim poljima brzine i tlaka, a to je moguće jedino ako znamo

beskonačno mnogo korelacija brzina i tlaka. Prema iskustvu potrebno je poznavati konačan broj korelacija za proračunavanje karakteristike polja interesantne sa stajališta inženjerske prakse. Na ovoj činjenici temelje se modeli turbulencije, koji imaju zadatak uskladiti broj jednadžbi i broj nepoznatih polja, zaustavljajući se na određenoj korelaciji. Sve više korelacije modeliraju se pomoću nižih koje su obuhvaćene modelom turbulencije [17].

### 3.4.1.2. Model turbulencije

Opći zahtjevi koji se postavljaju pred model turbulencije su univerzalnost, točnost, mogućnost ekonomičnog rješavanja i jednostavnost. Modeli turbulencije dijele se s obzirom na red korelacije brzina za koju se rješava transportna jednadžba na modele: prvog, drugog i trećeg reda. Modeli prvog reda su najjednostavniji te se u njima modelira već dvojnica korelacija brzina, odnosno tenzor Reynoldsovih naprežanja (uglavnom prema hipotezi Boussinesqa) u obliku [17]:

$$-\rho \overline{v_i v_j} = \mu_t \left( \frac{\partial \overline{v_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{v_j}}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \rho \overline{k} \delta_{ij} \quad (42)$$

gdje je  $\mu_t$  dinamički koeficijent turbulentne viskoznosti (funkcija uvjeta strujanja), a  $\overline{k}$  kinetička energija turbulencije:

$$\overline{k} = \frac{\overline{v_i v_i}}{2} \quad (43)$$

Zadnji član jednadžbe (42) dodan je u svrhu zadovoljavanja ove jednadžbe u slučaju kontrakcije indeksa. Hipotezom Boussinesqa šest komponenti tenzora Reynoldsovih naprežanja modelirano je jednim nepoznatim poljem koeficijenata turbulentne viskoznosti. Uvrštavanjem hipoteze Boussinesqa u Reynoldsove jednadžbe dobije se [17]:

$$\frac{\partial \overline{v_j}}{\partial x_j} = 0 \quad (44)$$

$$\frac{\partial \rho \overline{v_i}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \overline{v_j v_i}) = - \frac{\partial \left( \overline{p} + \frac{2}{3} \rho \overline{k} \right)}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (\mu + \mu_t) \left( \frac{\partial \overline{v_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{v_j}}{\partial x_i} \right) \right] \quad (45)$$

U jednadžbi (45) pojavljuje se efektivni tlak i efektivna viskoznost. Prijelazom s Navier – Stokesovih na Reynoldsove jednadžbe izgubile su se informacije o pulsirajućem strujanju pa vremenski i prostorni koraci integracije ne moraju biti mali kao i pri direktnom rješavanju Navier – Stokesovih jednadžbi, no pojavio se problem modeliranja koeficijenta turbulentne viskoznosti. Kako bi se mogla procijeniti turbulentna viskoznost potrebno je poznavati duljinsku ili vremensku skalu. Modeliranje koeficijenata turbulentne viskoznosti opisano je

detaljno u [17]. Bitno je napomenuti kako postoje modeli prvog reda, algebarski modeli, diferencijalni modeli s jednom jednadžbom, diferencijalni modeli s dvije jednadžbe, modeli drugog reda i modeli višeg reda. U ovom radu korišten je  $k - \varepsilon$  model turbulencije koji pripada diferencijalnim modelima s dvije jednadžbe. Ovaj model korišten je zbog dobrog slaganja s eksperimentalnim rezultatima te se zato i koristi u analizama otpora broda, osim u slučajevima odvajanja strujanja [9]. U nastavku će bit objašnjen ovaj model.

### 3.4.1.3. $k - \varepsilon$ model turbulencije

Ukupna kinetička energija strujanja sastoji se od kinetičke energije glavnog strujanja i kinetičke energije pulsacijskog dijela strujanja koja se naziva kinetičkom energijom turbulencije. Mjerenja pokazuju da pulsacije velikih valnih duljina imaju velike amplitude pulsacija brzine, a pulsacije malih valnih duljina male amplitude. Prema tome glavnina kinetičke energije turbulencije sadržana je u pulsacijama velikih razmjera. Pretvorba kinetičke energije u unutrašnju energiju vrši se putem viskoznih sila pa se ovaj utjecaj može ocijeniti preko Reynoldsovog broja. Pulsacije velikih valnih duljina imaju velike amplitude pulsacija brzina što daje velike vrijednosti Reynoldsovih brojeva što znači mali utjecaj viskoznih sila. S druge strane pulsacije malih valnih duljina imaju i male amplitude brzina te shodno tome male vrijednosti Reynoldsovih brojeva, odnosno veliki utjecaj viskoznosti. Prema tome kinetička energija turbulentnog strujanja uglavnom je sadržana u pulsacijama velikih razmjera, a disipira se najvećim dijelom na nivou najmanjih pulsacija malih geometrijskih razmjera. Postoji neprekidni tok energije u kojem se kinetička energija oduzima od glavnog toka i predaje pulsacijama najvećih razmjera. Kinetička energija pulsacija velikih valnih duljina predaje se pulsacijama sve manjih valnih duljina da bi se u pulsacijama najmanjih valnih duljina disipirala u toplinu. Ravnotežno turbulentno strujanje je ono strujanje u kojem je brzina nastajanja kinetičke energije turbulencije jednaka brzini disipacije kinetičke energije u toplinu [17].

Kinetička energija turbulencije definirana je jednadžbom (43). Duljinu koja predstavlja makroskalu turbulencije može se definirati preko  $k$  i  $\varepsilon$  te konstantnog koeficijenta  $C_D$  [6]:

$$l = C_D k^{3/2} / \varepsilon \quad (46)$$

gdje je  $C_D$  koeficijent korišten za aproksimaciju turbulentnih transportnih jednadžbi, a  $\varepsilon$  brzina disipacije energije turbulencije.

Kvadrat fluktuacija vrtložnosti  $W$  definiran je [6]:

$$W = \frac{\varepsilon^2}{(C_D k)^2} \quad (47)$$

dok je  $\varepsilon$  definiran prema [6]:

$$\varepsilon = \overline{v \frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \frac{\partial v'_i}{\partial x_j}} \quad (48)$$

Diferenciranjem izraza (46) i (47) pa dijeljenjem s (46) i (47) dobije se:

$$\frac{dkl}{kl} = \frac{5}{2} \frac{dk}{k} - \frac{d\varepsilon}{\varepsilon} \quad (49)$$

$$\frac{dW}{W} = -2 \frac{dk}{k} + 2 \frac{d\varepsilon}{\varepsilon} \quad (50)$$

Uz pomoć ovih jednadžbi lako se mogu dobiti i parovi jednadžbi za  $k - W$  ili  $k - \varepsilon$ . Stoga se može zaključiti da se  $k - l$ ,  $k - W$  i  $k - \varepsilon$  razlikuju samo u matematičkom obliku, a ne i u sadržaju.

Unatoč ovome, postoje razumni razlozi za izbor  $k - \varepsilon$  modela.

Prvo u nedostatku znanja, sve korelacije trećeg reda koje se pojavljuju u transportnoj jednadžbi moraju biti prikazane preko gradijenta zavisne varijable o relevantnoj jednadžbi. Tako je primjerice:

$$-\frac{\partial}{\partial x_i} \left[ v'_i \left( \frac{v'_j v'_j}{2} + \frac{p}{\rho} \right) \right] \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ D_k \frac{\partial k}{\partial x_i} \right] \quad (51)$$

gdje je  $D_k$  efektivni difuzijski koeficijent za turbulentnu energiju  $k$ .

Sada je moguće transformirati prikazani izraz (51) u sličan izraz, samo s zavisnom varijablom  $\varepsilon$ , bez uvođenja gradijenta varijable  $k$  u jednadžbu. Dakle ako fizička stvarnost zahtjeva da jedini drugog reda diferencijalni koeficijent u jednadžbi  $kl$  sadržava sami  $kl$ , moraju postojati dva takva koeficijenta u jednadžbi za  $\varepsilon$  i obrnuto [6].

Drugo, trenutno se još ne zna je li transport  $kl$ ,  $W$  ili  $\varepsilon$  bolje opisan s jednim izrazom drugoga reda. Jedan razlog ovom neznanju leži u činjenici da u slobodnim turbulentnim strujanjima, duljinska skala je skoro uniformna oko strujanja ( $dl \sim 0$ ). Stoga je moguće pisati [6]:

$$\frac{dkl}{kl} \approx \frac{dk}{k} \quad (52)$$

$$\frac{dW}{W} \approx \frac{dk}{k} \quad (53)$$

$$\frac{d\varepsilon}{\varepsilon} \approx \frac{3dk}{2k} \quad (54)$$

pa transformacija iz jednog u drugi model bez pogrešaka je moguća.

Treće međutim, poznato je da se u blizini stijenke, gdje su smična naprezanja ujednačena, duljinska skala raste proporcionalno s udaljenošću od stijenke. Sad u takvom okruženju, diferencijalna jednadžba koja ima u sebi član  $k^m/l^m$  (usvojen u ovom trenutku kao generalizacija za  $k$ ,  $W (k/l^2)$  i  $\varepsilon (k^{3/2}/l)$ ) standardno se reducira na [6]:

$$0 = \frac{\partial}{\partial x_2} \left[ \frac{v_t}{\sigma_t} \frac{\partial (k^m / l^n)}{\partial x_2} \right] + C_1 \mu_t \frac{k^{m-1}}{l^n} \left( \frac{\partial U_1}{\partial x_2} \right) - C_2 \frac{\rho k^{m+1/2}}{l^{n+1}} \quad (55)$$

Konvekcijjskih članova više nema i  $\sigma_t$  je uveden kao Prandtlov broj turbulentnog transporta  $k^m/l^n$ . Nadalje, kako je energija ujednačena, a duljinska skala je proporcionalna udaljenošću od zida  $x_2$ , ova diferencijalna jednadžba svodi se na algebarsku vezu među konstantama [6]:

$$\frac{n^2}{\sigma_t} + \frac{C_1 C_\mu^{1/2}}{\kappa^2} - \frac{C_2 C_\mu^{1/2}}{\kappa^2} = 0 \quad (56)$$

gdje je  $\kappa$  von Karmanova konstanta, koja se koristi u izrazu [6]:

$$\frac{U_1}{(\tau / \rho)^{1/2}} = \frac{1}{\kappa} \ln \left[ \frac{E x_2 (\tau / \rho)^{1/2}}{\nu} \right] \quad (57)$$

gdje je  $U_1$  srednja vrijednost brzine u smjeru 1,  $E$  konstanta integracije, a  $\tau$  smično naprezanje.

Raspisivanjem jednadžbe (54) i (55), te uvrštavanjem jednadžbe (57) u (55) dobije se [6]:

$$\mu_t = C_\mu \rho k^{1/2} l \quad (58)$$

Sada je moguće objasniti zašto je  $k - \varepsilon$  model, za koji je  $n=1$  iz izraza (56), najprikladniji. Naime, uvrštavanjem odgovarajućih vrijednosti za  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_\mu$  i  $\kappa$  u (56), dobije se za  $k - \varepsilon$  model  $\sigma_t=1,3$ . Ovo je jedino u skladu s eksperimentalnim podacima za široki raspon različitih subjekata na većoj udaljenosti od stijenke. Zbog ovog u modelima  $k - l$  i  $k - W$  potrebno je predložiti dodatan odnos između  $\sigma_t$  i  $x_2/l$  koju je teško odrediti [6].

Skup jednadžbi  $k - \varepsilon$  modela turbulencije za visoke vrijednosti Reynoldsovog broja definiranog na temelju karakterističnih veličina turbulencije (65), za nestlačivo strujanje glasi [17]:

- jednadžba kontinuiteta:

$$\frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_j} = 0 \quad (59)$$

- jednadžba količine gibanja:

$$\frac{\partial \rho \bar{v}_i}{\partial t} + \frac{\partial (\rho \bar{v}_j \bar{v}_i)}{\partial x_j} = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (\mu + \mu_t) \left( \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right) \right] \quad (60)$$

gdje  $\bar{p}$  označava efektivni tlak, a koeficijent turbulentne viskoznosti definiran je sljedećim izrazom:

$$\mu_t = C_\mu \rho \frac{\bar{k}^2}{\bar{\varepsilon}} \quad (61)$$

- jednadžba za kinetičku energiju turbulencije:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \bar{k}) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho \bar{v}_j \bar{k}) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma^k} \right) \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_j} \right] + G - \rho \bar{\varepsilon} \quad (62)$$

gdje je  $G$  generacija kinetičke energije turbulencije definirana sljedećim izrazom [17]:

$$G = 2\mu_t D_{ij}^2 \quad (63)$$

gdje je  $D_{ij}$  tenzor brzine deformacije.

- jednačba za disipaciju kinetičke energije turbulencije:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \bar{\varepsilon}) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho \bar{v}_j \bar{\varepsilon}) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma^\varepsilon} \right) \frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial x_j} \right] + C_1 G \frac{\bar{\varepsilon}}{k} - C_2 \rho \frac{\bar{\varepsilon}^2}{k} \quad (64)$$

- Reynoldsov broj definiran na temelju karakterističnih veličina turbulencije:

$$Rn_t = \frac{\rho v_t l_t}{\mu} = \frac{\mu_t}{\mu} \quad (65)$$

Za slučaj visokih vrijednosti  $Rn_t$  koeficijenti u jednačbama (61) - (64) su konstantni, a standardne vrijednosti tih koeficijenata prikazane su tablicom 1.

**Tablica 1 Standardne vrijednosti koeficijenata [17]**

$C_\mu$	$\sigma^k$	$\sigma^\varepsilon$	$C_1$	$C_2$
0,09	1,00	1,30	1,44	1,92

U blizini čvrste stijenke potrebno je premostiti područje u kojem ne vrijedi  $k - \varepsilon$  model turbulencije za visoke vrijednosti  $Rn_t$  definiranjem rubnih uvjeta na rubu do kojeg još uvijek vrijedi model (definiranje unutarnjih rubnih uvjeta), jer se tu nalaze male pulsacije, odnosno male su vrijednosti  $Rn_t$ . Potrebno je odrediti raspodjelu varijabli u neposrednoj blizini zida na temelju kojih bi se definirali unutarnji rubni uvjeti. Danas se najčešće koriste tzv. zidne funkcije (eng. *wall functions*).

Naime, kao što je već napomenuto ukupno tangencijalno naprezanje je konstantno gledajući u smjeru okomito na stjenku i jednako naprezanju na stijenci, a profil brzine je linearan [17]:

$$\tau = \tau_w = \text{const.} \quad (66)$$

$$\bar{u} = \frac{\tau}{\mu} y$$

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \quad (67)$$

$$y^+ = \frac{\rho u_\tau y}{\mu} \quad (68)$$

gdje je  $\bar{u}$  komponenta brzine glavnog strujanja paralelna sa stijenkom,  $y$  koordinata okomita na stjenku, a  $u_\tau$  brzina trenja.

Zanemarivanjem molekularne viskoznosti i modeliranjem turbulentne viskoznosti uz pomoć Prandtllove hipoteze puta miješanja dobije se jednačba (57). Konstante korištene u tom izrazu najčešće se uzimaju kao  $\kappa=0,4187$  i  $E=9,739$ . Potrebno je naglasiti da je jednačba (57) izvedena uz pretpostavku zanemarivog uzdužnog gradijenta tlaka pa bi pri optjecanju jako zakrivljenih površina trebalo jednačbu (57) modificirati [17].

Područja inercijalnog podsloja u kojemu se mjerenja dobro poklapaju s logaritmičkim profilom brzine protežu se za sve vrijednosti  $Re$  od  $y^+$  približno 30 do tisuću i više ovisno o Reynoldsovom broju. Stoga se u numeričkom proračunu turbulentnog strujanja u kojem se za zadavanje rubnih uvjeta koriste zidne funkcije zahtijeva da prvi čvor do stijenke bude u tom području  $y^+$  [17].

Smično naprezanje na stijenci računa se prema [17]:

$$\tau_w = \frac{\rho \kappa C_\mu^{1/4} \sqrt{\bar{k}}}{\ln(Ey^+)} \bar{u} \quad (69)$$

u kojem se veličine  $\bar{u}$ ,  $\bar{k}$  i  $y^+$  odnose na prvi čvor do stijenke. Brzina trenja računa se prema [17]):

$$u_\tau = C_\mu^{1/4} \sqrt{\bar{k}} \quad (70)$$

Jednačba (68) sada poprima oblik [17]:

$$y^+ = \frac{\rho C_\mu^{1/4} y \sqrt{\bar{k}}}{\mu} \quad (71)$$

Vrijednost  $\bar{\varepsilon}$  u čvoru geometrijske mreže prvom do granice (unutarnji rubni uvjet) se računa prema [17]:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{u_\tau^3}{\kappa y} = \frac{C_\mu^{3/4} \bar{k}^{3/2}}{\kappa y} \quad (72)$$

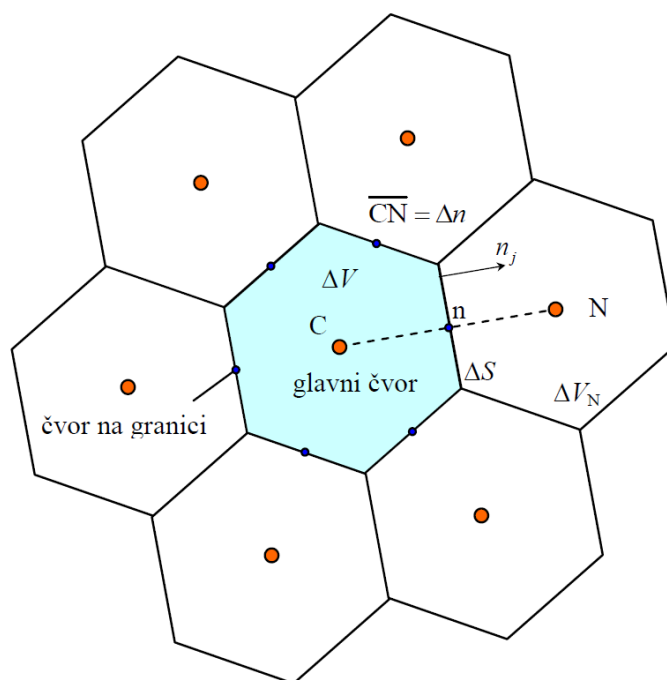
Jednačba (69) - (72) čine skup jednačbi kojima su opisane standardne zidne funkcije koje se primjenjuju i za zadavanje rubnih uvjeta pri opstrujavanju umjereno zakrivljenih površina.

### 3.5. Metoda konačnih volumena

Kao što je prije navedeno, Navier – Stokesove jednačbe rješive su za jako malen broj slučajeva analitički. Za potrebe brodograđevne industrije, primjerice strujanja oko trupa broda, one su uglavnom nerješive analitički. Stoga ih se rješava numerički. U ovom poglavlju bit će opisana najkorištenija numerička metoda računalne dinamike fluida, a to je metoda konačnih volumena. Metoda konačnih volumena integralna je metoda poput metode konačnih elemenata koja se temelji na integriranju konzervativnog oblika transportnih jednačbi po konačnim volumenima na koje je podijeljeno područje proračuna. Integral transportne jednačbe po konačnom volumenu prema slici 3 je [17]:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Delta V} \rho \varphi dV = - \int_{\Sigma \Delta S} \left( \rho v_j \varphi - \Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right) n_j dS + \int_{\Delta V} S_\varphi dV \quad (73)$$

gdje prvi član predstavlja brzinu promjene sadržaja  $\varphi$  razmatranog fizikalnog svojstva u volumenu  $\Delta V$ , drugi član predstavlja konveksijski i difuzijski protok  $\varphi$  kroz granice, a zadnji član izvor  $\varphi$ .



Slika 3 Dio diskretiziranog područja proračuna [17]

Protok fizikalnog svojstva definiran je kao pozitivan kad se odvija od konačnog volumena prema okolini, negativan predznak ispred integrala govori da će se uslijed takvog protoka sadržaj fizikalnog svojstva unutar konačnog volumena smanjivati.



### 3.5.1. Aproximacija volumenskih i površinskih integrala

U jednadžbi (73) pojavljuju se volumenski i površinski integrali koji se mogu aproksimirati sukladno integralnom teoremu o srednjoj vrijednosti. Tako za strujanje fluida s konstantnom gustoćom može se pisati [17]:

$$\int_{\Delta V} \varphi dV = \bar{\varphi}_{\Delta V} \Delta V \quad (74)$$

gdje desna strana jednadžbe predstavlja umnožak srednje vrijednosti fizikalne veličine  $\varphi$  unutar konačnog volumena i konačnog volumena. Uz pretpostavku dovoljno malog konačnog volumena, promjena veličine  $\varphi$  unutar konačnog volumena može se aproksimirati linearnom raspodjelom tj. prvom potencijom razvoja u Taylorov red oko vrijednosti u čvoru C [17]:

$$\varphi(x_j) = \varphi_C + \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \Big|_C (x_j - x_j^C) \quad (75)$$

gdje je  $x_j$  vektor položaja bilo koje točke unutar konačnog volumena. Uvrštavanjem jednadžbe (75) u (74) slijedi [17]:

$$\bar{\varphi}_{\Delta V} \Delta V = \left[ \varphi_C + \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \Big|_C (x_j^T - x_j^C) \right] \Delta V \quad (76)$$

Ako je točka C težište volumena  $\Delta V$  drugi član desne strane izraza (76) otpada pa se može zaključiti da će za slučaj linearne raspodjele  $\varphi$  unutar  $\Delta V$  biti  $\bar{\varphi}_{\Delta V} = \varphi_C$ . Stoga se član lokalne promjene iz jednadžbe (73) može aproksimirati [17]:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Delta V} \rho \varphi dV = \rho \frac{d\varphi_C}{dt} \Delta V \quad (77)$$

Slično se može zaključiti i za integral izvorskoga člana [17]:

$$\int_{\Delta V} S_\varphi dV = S_C \Delta V \quad (78)$$

gdje je  $S_C$  vrijednost izvorskoga člana u čvoru C kao aproksimacija srednje vrijednosti izvorskoga člana unutar volumena  $\Delta V$ .

Ukoliko točka C nije težište volumena, lijeva strana jednadžbe (76) definira se preko gradijenta polja  $\varphi$  u čvoru C koji se računa primjenom Gaussove formule [17]:

$$\left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right)_{\Delta V} \Delta V = \int_{\Delta V} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dV = \int_{\Sigma \Delta S} \varphi n_j dS = \sum_{nb=1}^{N_{nb}} \left[ \bar{\varphi}_{\Delta S} n_j \Delta S \right]^{nb} \Delta V \quad (79)$$

gdje suma po  $nb$  označava zbrajanje po svih  $N_{nb}$  stranica konačnog volumena.

Površinski integrali u jednadžbi (73) predstavljaju protok fizikalnog svojstva uslijed konvekcije i difuzije kroz površinu konačnog volumena. Vektor konvekcijskoga toka definiran je pomoću

$\rho v_j \varphi$ , a vektor difuzijskoga toka pomoću  $-\Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}$ . Ova dva vektora u općem slučaju nisu

kolinearna, njihov zbroj čini ukupni vektor toka  $J_j$ . Kako protoku fizikalnog svojstva doprinosi samo normalna komponenta vektora toka, može se pisati [17]:

$$\Delta J_n = \int_{\Delta S} \left( \rho v_j \varphi - \Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right) n_j dS = \int_{\Delta S} \left( \rho v_n \varphi - \Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) dS = \left[ \rho \left( \overline{v_n \varphi} \right)_{\Delta S} - \Gamma \left( \overline{\frac{\partial \varphi}{\partial n}} \right)_{\Delta S} \right] \Delta S \quad (80)$$

gdje je prvi član desne strane aproksimiran s  $v_{n,n} \varphi_n$  (aproksimacija srednje vrijednosti umnoškom srednjih vrijednosti normalne komponente brzine i vrijednosti fizikalnog svojstva na površini  $\Delta S$ ). Nadalje,  $v_{n,n} \varphi_n$  se aproksimira vrijednostima u točki  $n$  koja predstavlja težište površine  $\Delta S$ . Tako se i srednja vrijednost normalne derivacije polja  $\varphi$  na površini  $\Delta S$  aproksimira vrijednošću normalne derivacije polja  $\varphi$  u točki  $n$ . Ovdje se uvodi bezdimenzijska koordinata [17]:

$$\tilde{n} = \frac{n}{\Delta n} \quad (81)$$

gdje je  $\Delta n$  udaljenost čvorova C i N prema slici 3. Nadalje, može se pisati [17]:

$$\Delta J_n = \rho v_{n,n} \Delta S \varphi_n - \frac{\Gamma \Delta S}{\Delta n} \frac{\partial \varphi}{\partial \tilde{n}} \Big|_n = F_n \varphi_n - D_n \frac{\partial \varphi}{\partial \tilde{n}} \Big|_n \quad (82)$$

gdje je  $F_n$  jačina konvekcije tj. maseni protok fluida kroz površinu  $\Delta S$ , a  $D_n$  jačina difuzije tj. difuzijska vodljivost. Omjer jačine konvekcije i jačine difuzije naziva se lokalnim Pecletovim brojem. Ovaj omjer je sve manji što su volumeni manji (manji  $\Delta n$ ) pa utjecaj lokalnog difuzijskog prijenosa postaje sve veći [17]. U graničnom prijelazu, teoretski gledano, kad  $\Delta n$  teži nuli konvekcija postaje zanemariva, dakle ostaju samo utjecajni članovi s drugom (najvišom) derivacijom, što se naziva principijelni dio parcijalne diferencijalne jednačbe, pri ispitivanju karaktera diferencijalne jednačbe samo se taj dio analizira.

Jedine nepoznanice u jednačbi (82) su srednja vrijednost  $\varphi_n$  i normalna derivacija  $\frac{\partial \varphi}{\partial \tilde{n}} \Big|_n$  na površini  $\Delta S$ . Kako se u numeričkom postupku pamte i računaju samo čvorne vrijednosti polja  $\varphi$  i to u glavnim čvorovima C i N, potrebno je aproksimirati tražene vrijednosti na stranicama konačnog volumena pomoću vrijednosti u glavnim čvorovima. To se naziva shemom diferencije ili numeričkom shemom. Aproksimacija je najtočnija ako je točka N težište površine  $\Delta S$  [17].

Uvrštavanjem jednačbi (77), (78) i (82) u jednačbu (73) dobije se:

$$\rho \Delta V \frac{d\varphi_C}{dt} = - \sum_{nb=1}^{N_{nb}} \left( F_n \varphi_n - D_n \frac{\partial \varphi}{\partial \tilde{n}} \Big|_n \right)^{nb} + S_C \Delta V \quad (83)$$

gdje suma po  $nb$  označava zbrajanje po svim  $N_{nb}$  stranicama konačnog volumena.

Primjenom neke od shema diferencija izraz (82) može se prikazati u obliku [17]:

$$\Delta J_n = F_n \varphi_C + a_N (\varphi_C - \varphi_N) \quad (84)$$

gdje koeficijent  $a_N$  ovisi o primijenjenoj shemi diferencije. Uvrštavanjem jednadžbe (84) u (83) dobije se [17]:

$$\rho \Delta V \frac{d\varphi_C}{dt} = -\varphi_C \sum_{nb=1}^{N_{nb}} a_N^{nb} + \sum_{nb=1}^{N_{nb}} [a_N^{nb} \varphi_N^{nb}] + S_C \Delta V \quad (85)$$

Član s jačinom konvekcije jednak je nuli prema jednadžbi kontinuiteta (59) pa se ne uzima u obzir. Izvorski član u općem slučaju može biti nelinearna funkcija od  $\varphi$ . Ukoliko se jednadžba (85) integrira eksplicitnom metodom, izvorski član ostaje originalno zadan kakav je, a ako se primjenjuje implicitna metoda, izvorski član se linearizira kako bi se dobila linearna algebarska jednadžba. Ukoliko se primjenjuje implicitna metoda te se postupak upravo opisan ponovi za sve konačne volumene unutar područja proračuna dobit će se sustav linearnih algebarskih jednadžbi u kojem su nepoznanice čvorne vrijednosti polja  $\varphi$  [17]:

$$[A_{ji}][\varphi_i] = [b_j] \quad (86)$$

gdje je  $[A_{ji}]$  matrica sustava u kojoj retke čine koeficijenti  $a_C$  (glavna dijagonala) i  $a_N^{nb}$ ,  $[\varphi_i]$  označava vektor nepoznanica (čvorne vrijednosti polja), a  $[b_j]$  vektor u kojeg ulaze sve poznate veličine. Polje  $\varphi$  mora zadovoljavati rubne uvjete, koji će se ugraditi u diskretizirane jednadžbe prije njihovog rješavanja. Ukoliko je izvorski član bio nelinearna funkcija od  $\varphi$  numerički postupak imat će iterativni karakter pa će se sustav linearnih jednadžbi trebati riješiti više puta unutar jednog vremenskog koraka. Bitno je naglasiti kako nije nužno koristiti linearizaciju izvorskog člana nego se mogu koristiti i neke druge metode [17].

Četiri osnovna svojstva koeficijenata diskretizirane jednadžbe su [17]:

- konzervativnost
- predznaci koeficijenata
- linearizacija izvorskog člana
- suma koeficijenata.

### 3.5.2. Numeričke sheme

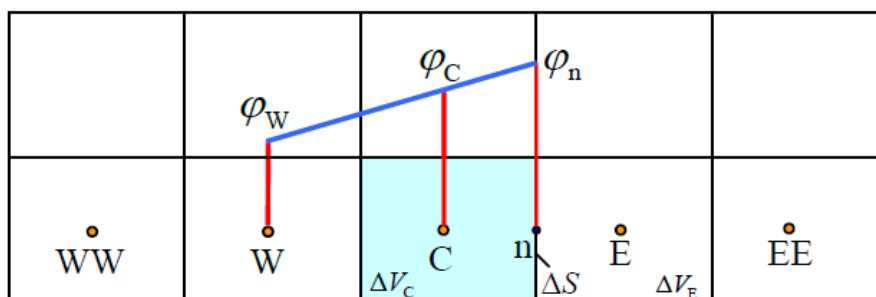
U ovom potpoglavlju dan je pregled dvije osnovne numeričke sheme ukratko. Numeričke sheme detaljno su opisane u [20] i [17]. Unutar računalnog programa STAR-CCM+ moguće je korištenje uzvodne sheme prvog reda točnosti i uzvodne sheme drugog reda točnosti [21].

## 3.5.2.1. Uzvodna shema

Premda analitičko rješenje ukazuje na činjenicu da bi pri modeliranju protoka  $\varphi$  kroz granicu trebalo voditi računa o međudjelovanju difuzijskog i konvekcijskog prijenosa, difuzijski transport se modelira kao da nema konvekcijskog i obrnuto [17]. U ovoj numeričkoj shemi veličine na površinama volumena se izračunavaju temeljem pretpostavke da vrijednost neke varijable u centru volumena predstavlja prosjek vrijednosti u volumenu i ta se vrijednost koristi po cijelom volumenu [21]. Osnovni nedostatak ove metode je to što je prvog reda točnosti i unosi lažnu difuziju u numeričko rješenje, jer je difuzija modelirana kao da nema konvekcije. Dobra strana metode je da su koeficijenti uvijek pozitivni, odnosno neće nikada davati nefizikalna oscilatorna rješenja i neće praviti probleme uz konvergenciju numeričkog postupka (robustna metoda). Upravo zbog ovoga, ova shema je omiljena i ugrađena u gotovo sve komercijalne CFD pakete [17].

## 3.5.2.2. Linearno uzvodna shema

U ovoj metodi vrijednosti na površinama volumena se računaju korištenjem pristupa višedimenzionalne linearne rekonstrukcije, odnosno vrijednost  $\varphi_n$  može se odrediti linearnom ekstrapolacijom iz uzvodnih čvorova, kako je prikazano slikom 4.



Slika 4 Linearna ekstrapolacija iz uzvodnih čvorova [17]

Difuzijski prijenos definiran je kao i u uzvodnoj shemi kao  $-D(\varphi_n - \varphi_C)$ , gdje je  $D = a_n$ . Izraz za  $\varphi_n$  koji se koristi u konvekcijskom prijenosu glasi [17]:

$$\varphi_n = \begin{cases} \varphi_C + \frac{1}{2}(\varphi_C - \varphi_W) & F > 0 \\ \varphi_E + \frac{1}{2}(\varphi_E - \varphi_{EE}) & F < 0 \end{cases} \quad (87)$$

Ova shema generira negativne koeficijente pa će davati oscilatorno rješenje u blizini diskontinuiteta. Za sve sheme koje daju nefizikalno oscilatorno rješenje problema tj. koje generiraju nove maksimume i minimume pri nultom izvorskom članu kaže se da su neomeđene. Ovo svojstvo (omeđenost) vrlo je važno, a od dobre numeričke sheme se to svojstvo bezuvjetno

zahtjeva. Bitno je naglasiti kako ova shema neće unižeti lažnu difuziju u numeričko rješenje [17].

### 3.5.3. Rubni uvjeti

Rubnim uvjetima se definira protok kroz stranicu  $\Delta S_b$  kojoj je vanjska normala  $n_j$  pri čemu je  $b$  čvor na stranici koja čini rub područja proračuna. Potrebno je definirati srednju vrijednost  $\varphi_b$  i srednju vrijednost normalne derivacije  $\left. \frac{d\varphi}{dn} \right|_b$  na stranici  $\Delta S_b$ . Za njihovo određivanje potreban je podatak o rubnom uvjetu [17].

Kako su rubni uvjeti već objašnjeni u poglavlju 3.3., ovdje će se dati samo objašnjenje rubnih uvjeta s fizikalnog stajališta.

Za ulaznu granicu vrijedi  $F_b < 0$  pa je koeficijent  $a_N$  bezuvjetno pozitivan i povećava centralni koeficijent  $a_C$ . Za izlaznu granicu vrijedi  $F_b > 0$  pa koeficijent  $a_N$  postaje negativan, odnosno smanjuje  $a_C$  čime se gubi dijagonalna dominantnost sustava. Na ovoj granici ne znamo ni vrijednost  $\varphi$  ni vrijednost normalne derivacije. Ovu granicu treba birati tako da na njoj vrijede lokalni uvjeti parabolčnosti tj. vrijednost na granici neće imati utjecaja na polje u unutrašnjosti područja proračuna. Za nepropusnu stjenku nema protoka  $F=0$ , a rubni uvjeti za ovaj slučaj već su objašnjeni u poglavlju o turbulenciji. Za ravninu simetrije nema protoka fluida  $F=0$ , a zbog simetrije i normalna derivacija je jednaka nuli pa je ukupni protok jednak nuli. Periodička granica nije do sad spomenuta, a koristi se za smanjivanje područja proračuna u slučajevima kad se može uočiti ponavljanje slike proračuna [17].

### 3.5.4. Kriterij završetka iterativnog postupka

Kao što je već napomenuto, kod implicitnog rješavanja jednadžbe (85) najčešće se izvorski član linearizira pa se sustav (86) može zapisati u obliku [17]:

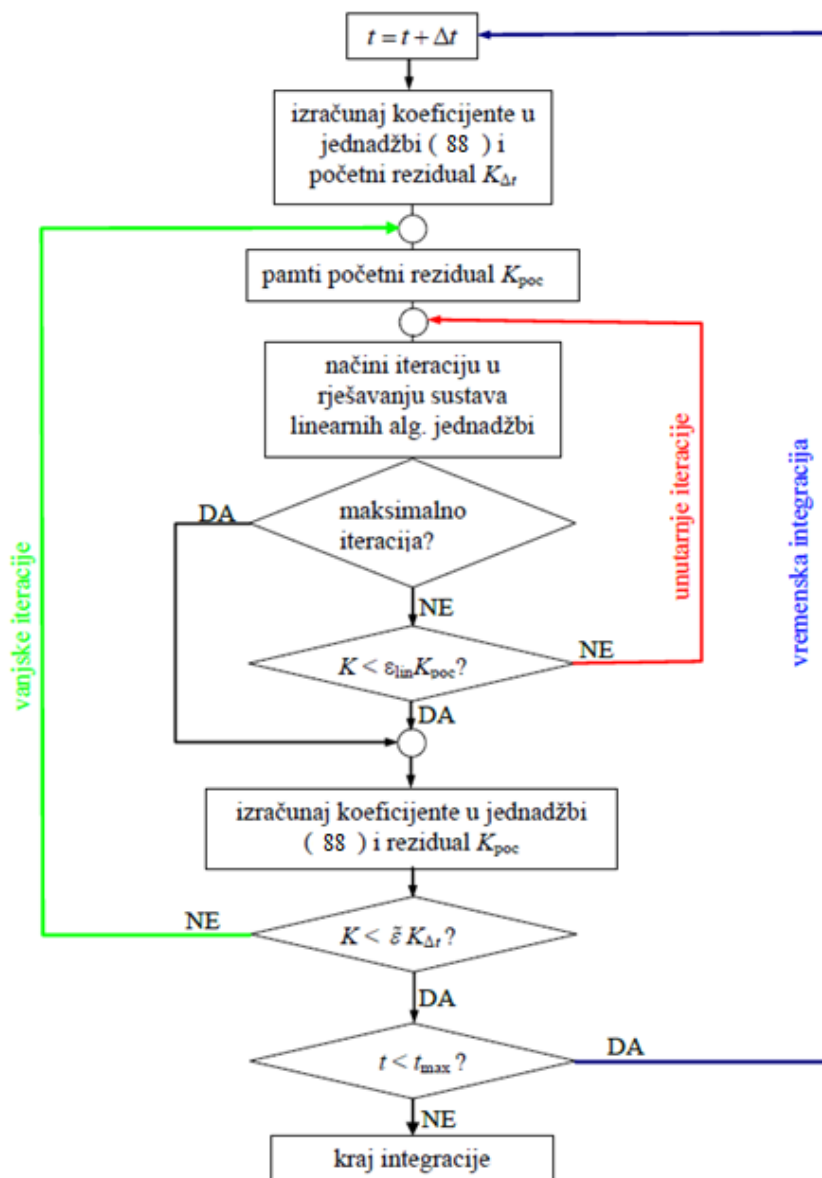
$$r_j^{k+1} \equiv [A_{ji}(\varphi^k)] [\varphi_i^{k+1}] - [b_j(\varphi^k)] = 0 \quad (88)$$

Iterativni postupak započinje pretpostavkom rješenja  $\varphi_i^k$  ( $k=0$ ), temeljem kojeg se računaju koeficijenti matrice i slobodni član te se dobije novo rješenje  $\varphi_i^{k+1}$ . Korištenjem novog rješenja računaju se novi koeficijenti sustava pa se opet dobije novo rješenje. Ovaj postupak se ponavlja sve dok se ne zadovolji kriterij točnosti rješavanja sustava. Jedan kriterij prikazan je sljedećom jednadžbom [17]:

$$K_{sum} = \sum_j |r_j^k| \leq \varepsilon_{sum} \quad (89)$$

gdje se suma odnosi po svim konačnim volumenima. Također se može zahtijevati da promjena rješenja u dvije sukcesivne iteracije bude mala.

Postoje dvije vrste iteracija, vanjske zbog nelinearnosti jednadžbi i unutarnje iteracije rješavača sustava linearnih algebarskih jednadžbi. Kriterij (89) obuhvaća obje vrste iteracija. Dijagramom toka na slici 5 prikazana je vremenska integracija implicitnom metodom [17]. STAR-CCM+ koristi implicitne metode prilikom vremenske integracije i to tri različita implicitna algoritma: SIMPLE algoritam, PISO metodu i SIMPISO metodu. Ove metode detaljno su opisane u [22].



Slika 5 Dijagram toka vremenske integracije implicitnom metodom [17]

### 3.5.5. Podrelaksacija

Kako bi se smanjila mogućnost divergiranja iterativnog postupka primjenjuje se postupak podrelaksacije. Podrelaksacijom se želi uzeti samo dio promjene rješenja u jednom koraku pa se tako smanjuje promjena  $\varphi$  izračunata tokom svake iteracije. Tako primjerice za čvor C vrijedi [17]:

$$\varphi_C^{podr} = \varphi_C^k + \alpha(\varphi_C^{k+1} - \varphi_C^k) \quad (90)$$

gdje je  $\alpha$  faktor podrelaksacije koji je manji od 1.

### 3.5.6. Rješavanje sustava linearnih algebarskih jednadžbi

Metode rješavanja sustava linearnih algebarskih jednadžbi detaljno su opisane u [17], a ovdje će biti ukratko prikazane samo metoda konjugiranih gradijenata i višemrežna metoda, jer se upravo one koriste unutar računalnog programa STAR-CCM+ [22].

#### 3.5.6.1. Metoda konjugiranih gradijenata (eng. Conjugate Gradient (CG) method)

Ova metoda predstavlja napredniju iterativnu metodu u kojoj se rješenje sustava traži u obliku  $x_i^{k+1} = x_i^k + \alpha s_i$ , gdje je  $s_i$  vektor smjera u kojem se traži poboljšanje rješenja, a  $\alpha$  parametar čijim se izborom postiže minimizacija nekih od normi koje pokazuje koliko smo blizu točnom rješenju [17].

#### 3.5.6.2. Višemrežna metoda (eng. multigrid method)

Osnovni problem iterativnih metoda je u tome što one slabo reduciraju pogreške niskih frekvencija, odnosno sporo prenose informacije o rubnim uvjetima prema unutrašnjosti područja proračuna. Ova metoda temelji se na pretpostavci da greška u svakom frekvencijskom rasponu mora biti izgladena na mreži koja je najprihvatljivija za ovu uporabu. Posljedično, višemrežna metoda koristi više mreža sve dok komponente greške svih frekvencija nisu izgladene. STAR-CCM+ koristi metodu mreže i to algebarsku višemrežnu metodu AMG (eng. Algebraic MultiGrid method) [22].

### 3.6. Model slobodne površine – udio fluida u volumenu (eng. volume of fluid)

U programskom paketu STAR-CCM+ za opisivanje problema slobodne površine koristi se model udio fluida u volumenu (nadalje VOF). VOF formulacija temelji se na činjenici da dva ili više fluida (ili faza) međusobno ne prodiru jedni u druge. Za svaku dodatnu fazu u modelu uvodi se nova varijabla: volumni udio faze u kontrolnom volumenu  $\alpha_i$ . Potonji je definiran kao

omjer teškog volumena fluida (voda) i ukupnog volumena fluida. Za nestlačivo strujanje smatra se da se gustoće fluida ne mijenjaju. U svakom volumenu, volumni udjeli zajedno zbrojeni moraju davati jedan. Polja svih varijabli i svojstava se dijele po fazama, i predstavljaju volumenski uprosječene vrijednosti, sve dok su poznati volumni udjeli svih faza na svakom mjestu. Ako volumni udio  $i$ -tog fluida u konačnom volumenu označimo s  $\alpha_i$ , tada postoje sljedeća tri stanja:

- $\alpha_i=0$  kontrolni volumen je prazan, nema  $i$  – tog fluida
- $\alpha_i=1$  kontrolni volumen je pun  $i$  – tog fluida
- $0 < \alpha_i < 1$  kontrolni volumen nalazi se na granici  $i$  – tog fluida i još nekog fluida.

Temeljem lokalne vrijednosti  $\alpha_i$  odgovarajuća svojstva i varijable bit će dodijeljena svakom kontrolnom volumenu u domeni [22].

Volumni udio faze određuje se prema jednadžbi kontinuiteta te za nestlačivo strujanje glasi [22]:

$$\frac{\partial}{\partial t} \alpha_i + \nabla \cdot (\alpha_i v_i) = 0 \quad (91)$$

Fizikalna svojstva (gustoća, specifična toplina, dinamički koeficijent viskoznosti, itd.) računaju se prema [22]. Ovdje prikazano samo za gustoću, ostala svojstva računaju se analogno:

$$\rho = \rho_g (1 - \alpha_i) + \rho_l \alpha_i \quad (92)$$

gdje  $\rho_g$  predstavlja gustoću zraka,  $\rho_l$  gustoću vode, a  $\alpha_i$  volumni udio vode.

Jednadžba količine gibanja rješava se po cijeloj domeni, a rezultirajuće polje zajedničko je za obje faze. Ona je ovisna o volumnim udjelima svih faza preko svojstava  $\rho$  i  $\mu$ . Ograničenje zajedničkih polja je u slučaju značajnih razlika brzina između faza, jer postoji mogućnost lošeg utjecaja na točnost izračunatih brzina na granici [21].

Energetska jednadžba također je zajednička za sve faze. VOF model tretira energiju kao i temperaturu kao varijable uprosječene po masi [21]:

$$E = \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i \rho_i E_i}{\sum_{i=1}^n \alpha_i E_i} \quad (93)$$

gdje se  $E_i$  temelji za svaku fazu na specifičnoj toplini te faze i zajedničkoj temperaturi. Svojstva gustoće i efektivne toplinske provodljivosti zajednička su za sve faze.

U slučaju turbulentnih veličina rješava se jedan sustav transportnih jednadžbi, a turbulentne varijable (primjerice  $k$ ,  $\varepsilon$  ili Reynoldsova napreznja) zajednička su za sve faze u domeni.



Za praćenje granice između faza STAR-CCM+ koristi shemu geometrijske rekonstrukcije koja se temelji na standardnim interpolacijskim shemama za izračunavanje površinskih tokova u potpunosti ispunjenih jednim fluidom. Ovom shemom granica između dva fluida predstavljena je koristeći linearan pristup za pojedine kontrolne volumene, a primjenjiva je za opće nestrukturirane mreže. Shema pretpostavlja linearni profil granice između dva fluida u svakom kontrolnom volumenu, i koristi linearni oblik za izračun prijenosa transportnog svojstva fluida kroz površine kontrolnih volumena [21].

Volumni udjeli mogu se promijeniti u svakom vremenskom koraku, ili u svakoj vremenskoj iteraciji svih vremenskih koraka.

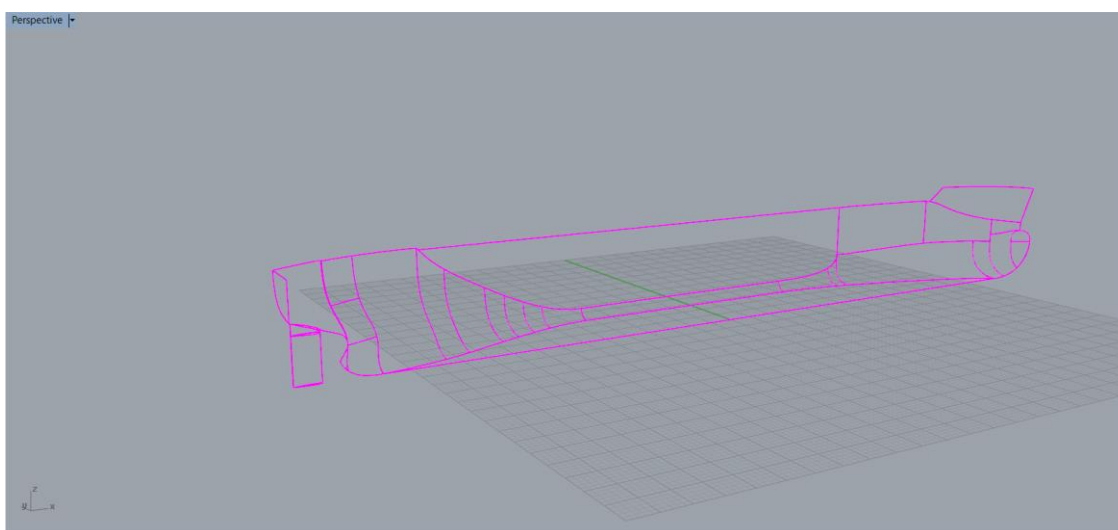
## 4. RAČUNALNI MODEL GIBANJA BRODA PO SLOBODNOJ POVRŠINI VODE

Numeričke simulacije viskozno-gibanja oko trupa broda provedene su u ovom radu korištenjem programskog paketa STAR-CCM+. U ovom poglavlju opisan je postupak generiranja računalnoga modela gibanja broda po slobodnoj površini vode uz objašnjenje koraka temeljen na [23].

### 4.1. Ulaz u STAR-CCM+

#### 4.1.1. Temeljna geometrija modela

Numeričke simulacije viskozno-gibanja oko trupa broda provedene su na modelu tankera, za koji su nam na raspolaganju eksperimentalni rezultati [24]. Na slici 6 prikazan je 3D model tankera u naravnoj veličini.



Slika 6 3D model tankera u naravnoj veličini

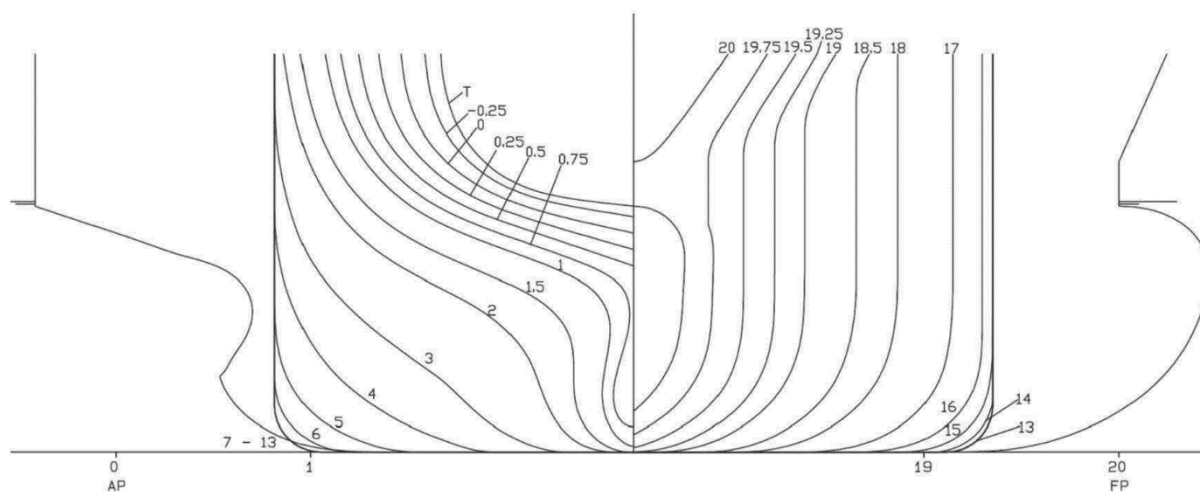
Kao što je moguće vidjeti na prethodnoj slici, dobiveni 3D model predstavlja polovinu broda u naravnoj veličini. Ovaj 3D model nije zatvoren, odnosno nema palubu, kao niti plohu koja bi zatvorila polovicu broda. Kako za daljnje korištenje dobivene geometrije ona mora biti zatvorena, dobivena geometrija je zatvorena unutar računalnog programa Rhinoceros. Dobiven je 3D model broda u naravnoj veličini kojeg je potrebno skalirati na veličinu modela broda. U tablici 2 prikazane su glavne značajke broda u naravnoj veličini i modela broda. Također, kako su modelska ispitivanja otpora broda provedena bez privjesaka i kormila i u numeričkoj simulaciji korišten je model broda bez kormila.

U računalnoj dinamici fluida, ukoliko je tijelo simetrično, moguće je modelirati samo polovicu tijela te tako dobiti valjane rezultate, a ostvariti znatnu uštedu na vremenu. Tako je u ovom radu korištena polovina modela broda.

**Tablica 2 Glavne značajke broda i modela broda [24]**

Značajka	Brod	Model
Mjerilo ( $\lambda$ )	1	28,814
$L_{pp}$	174,8 m	6,0667 m
$L_{WL}$	178,4 m	6,1917 m
$B$	32,2 m	1,1176 m
$T$	12,9 m	0,4477 m
$\Delta$	60829 t	2,4788 t
oplakana površina ( $S$ )	8749,3 m <sup>2</sup>	10,5389 m <sup>2</sup>
$x_{CG}$ (od središnjeg rebra)	2,54 m	0,0882 m
$y_{CG}$	0 m	0 m
$z_{CG}$	6,74 m	0,2341 m

Slikom 7 prikazan je nacrt rebara tankera, kao i njegova pramčana i krmena kontura.



**Slika 7 Nacrt rebara, pramčana i krmena kontura [24]**

#### 4.1.2. Kreiranje domene

Za potrebe numeričke simulacije viskozno strujanja oko trupa broda potrebno je definirati domenu fluida. Ovakvo strujanje uglavnom ima tri fiksne granice: površinu broda, slobodnu površinu i simetralnu ravninu. Domena je zatvorena granicama. Općenito, rubni uvjeti (granični) sadržavaju ulaz, izlaz te vanjske granice gdje je potrebno definirati odgovarajuće rubne uvjete. Ove granice moraju biti smještene dovoljno daleko od broda kako bi se minimizirao utjecaj granica na rješenje. Često je potrebno prigušiti nastale valove pa će se formirati zona prigušenja [14].

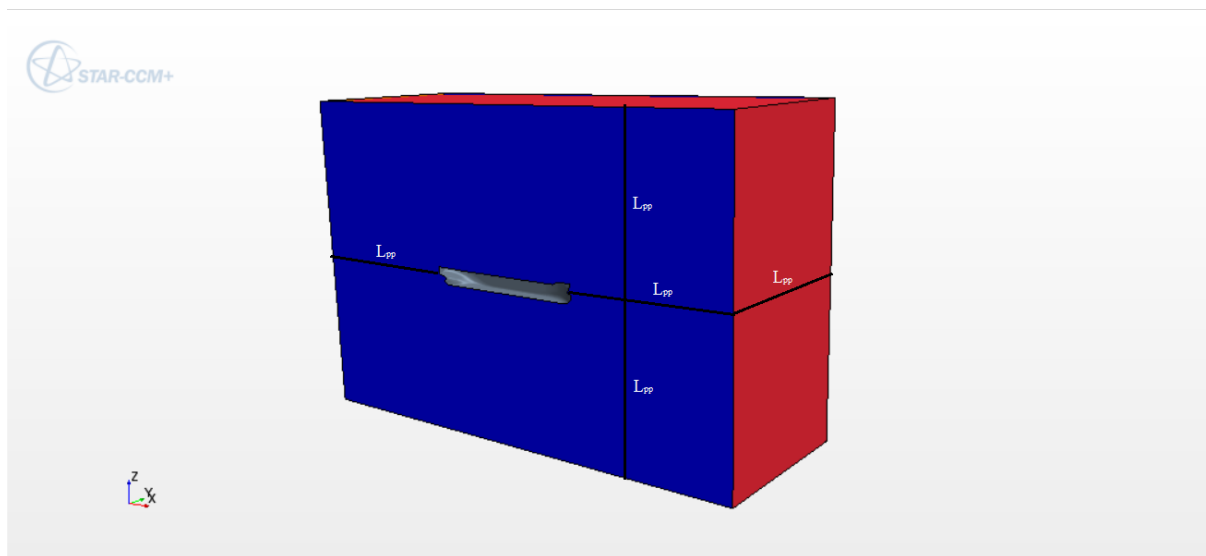
Proučavanjem raznih radova može se uočiti da granice domene variraju. U tablici 3 prikazane su udaljenosti pojedinih granica od trupa broda u nekim prethodnim istraživanjima. Bitno je napomenuti kako se udaljenosti dna i vrha domene odnose na udaljenosti slobodne površine od navedenih granica.

**Tablica 3 Udaljenosti granica domene**

Granica	Ulaz domene	Izlaz domene	Bok domene	Dno domene	Vrh domene
Autor					
[9]	$2 L_{pp}$	$3 L_{pp}$	$2 L_{pp}$	$L_{pp}$	$L_{pp}$
[7]	$L_{pp}$	$2 L_{pp}$	$L_{pp}$	$L_{pp}$	$0,5 L_{pp}$
[4]	$1,5 L_{pp}$	$2,5 L_{pp}$	$2,3 L_{pp}$	$2,5 L_{pp}$	$1,2 L_{pp}$
[25]	$1 L_{pp}$	$1,3 L_{pp}$	$1,1 L_{pp}$	$1,4 L_{pp}$	$1,4 L_{pp}$
[26]	$4 L_{pp}$	$5 L_{pp}$	$4 L_{pp}$	$2 L_{pp}$	$1,643 L_{pp}$
[27]	$2,1 L_{pp}$	$8 L_{pp}$	$3 L_{pp}$	$2,63 L_{pp}$	$1,58 L_{pp}$
[28]	$1,22 L_{pp}$	$2,23 L_{pp}$	/	/	/
[29]	$L_{pp}$	$L_{pp}$	$L_{pp}$	$L_{pp}$	$L_{pp}$
[14]	$(1 \div 2) L_{pp}$	$(3 \div 5) L_{pp}$	$(1 \div 2) L_{pp}$	$(1 \div 2) L_{pp}$	$(1 \div 2) L_{pp}$

U ovom radu odabrane su granice domene prema preporukama [29]. Ulaz domene postavljen je na udaljenosti  $L_{pp}$  od trupa, izlaz na  $L_{pp}$  od trupa, bok domene na  $L_{pp}$  od trupa, dno domene na  $L_{pp}$  od vodne linije, a vrh domene na  $L_{pp}$  od vodne linije. Domene manje od ove mogu utjecati na sile, a veće čine rukovanje gibanja kompliciranijim te uzrokuju probleme s prigušivanjem ukoliko je mreža daleko od trupa pregruba (što je slučaj kod većih domena) [29].

Nakon što je napravljena domena te zatvoren 3D model broda, Boolean operacija oduzimanja je izvršena u računalnom programu Rhinoceros (potrebno je iz domene oduzeti trup broda). Ovo onemogućuje volumenskoj mreži ulazak unutar trupa broda [25]. Kada je ova operacija izvršena, dobivena je potrebna ulazna datoteka za programski paket STAR-CCM+. Važno je napomenuti kako je ova operacija mogla biti i izvršena unutar STAR-CCM+. Slika 8 prikazuje računalnu domenu te udaljenosti granica od trupa broda.



Slika 8 Domena računalne simulacije

#### 4.1.3. Unos podataka u STAR-CCM+

Nakon izvršene Boolean operacije oduzimanja te spremanja izvršen je unos podataka u STAR-CCM+. Unos podataka vrši se naredbom *Import Surface mesh* te odabirom željene geometrije za unos. Tada program ponudi opcije unosa geometrije koje uključuju tolerancije, način unošenja podataka (u radu odabran dio (eng. *part*), kao način unošenja podataka), naredbe za kreiranje spoja dijelova u slučaju koincidentnih čvorova itd. Opcije nisu mijenjane te su ostavljene zadane postavke, kao što je napravljeno u [23] te [27]. Prema ITTC preporuci [14], tolerancija za model broda uzima se kao  $10^{-5}$  m, a ovo je upravo i zadana postavka, tako da je ova vrijednost korištena u radu.

#### 4.1.4. Kontrola unesene geometrije [22]

Prvi korak nakon unosa geometrije je kontrola unesene geometrije. Ovo je nužan korak prije početka simulacije i diskretizacije domene mrežom konačnih volumena. Za otkrivanje problema unesene mreže koristi se alat unutar programskog paketa STAR-CCM+.

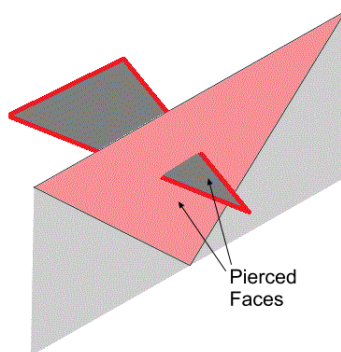
Sljedeći problemi mogu se detektirati:

- probijene stranice (*eng. pierced faces*)
- kvaliteta stranice (*eng. face quality*)
- bliske stranice (*eng. face proximity*)
- slobodni rubovi (*eng. free edges*)
- ne manifoldni rubovi (*eng. non manifold edges*)
- ne manifoldni vrhovi (*eng. non manifold vertices*).

U nastavku su navedeni problemi ukratko objašnjeni.

#### 4.1.4.1. Probijene stranice (*eng. pierced faces*)

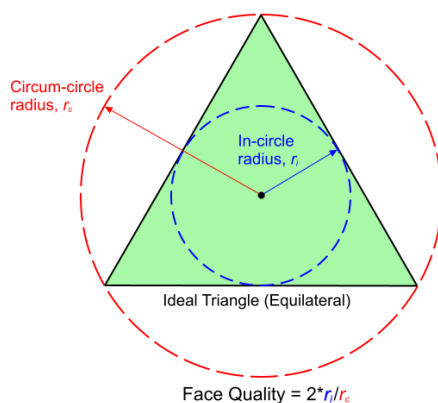
Probijena stranica je stranica koja je presječena s jednim ili više rubova druge stranice. Slika 9 prikazuje probijenu stranicu.



**Slika 9** Probijena stranica [22]

#### 4.1.4.2. Kvaliteta stranice (*eng. face quality*)

Kvaliteta stranice je mjera sličnosti između pojedine stranice i idealnog oblika stranice, a to je jednakostraničan trokut. Dijagnostika kvalitete površinske mreže računa kvalitetu stranice kao omjer polumjera upisane i polumjera opisane kružnice pomnožen s dva. Slika 10 prikazuje idealnu stranicu.



**Slika 10** Kvaliteta stranice [22]

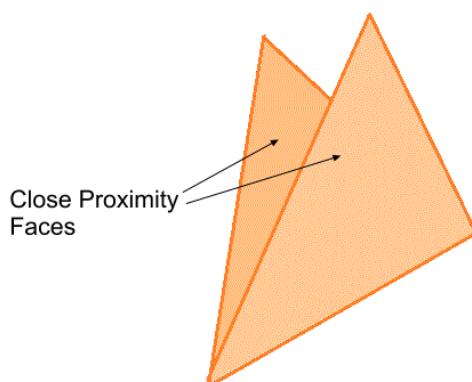
Kvaliteta svake stranice nalazi se u rasponu od 0 do 1, gdje 0 predstavlja crtu (nije moguće stranici upisati kružnicu), a 1 predstavlja jednakostraničan trokut (polumjer opisane kružnice jednak je polovici polumjera upisane kružnice). Prilikom dijagnostike površinske mreže, program će javiti postojanje nekvalitetne stranice, ukoliko je ovaj iznos manji od 0,01. Važno je napomenuti da ukoliko se površina koristi zajedno s alatom za omotavanje površine (eng. *surface wrapper*) ili alatom za rediskretizaciju površina (eng. *surface remesher*), nekvalitetne stranice neće stvarati probleme.

#### 4.1.4.3. Bliske stranice (eng. *face proximity*)

Bliske stranice opisane su omjerom udaljenosti između stranice i najbližeg susjeda toj stranici s veličinom stranice. Leži u rasponu od 0 do 1, a male vrijednosti ukazuju na sljedeće probleme:

- nabori na površini
- površine su u neposrednoj blizini.

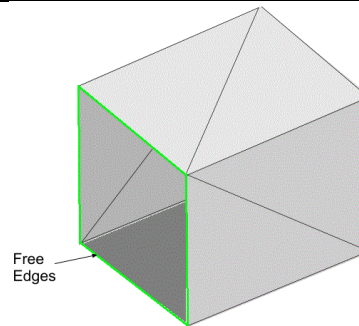
Program će dijagnosticirati sve one stranice koje imaju ovaj omjer manji od 0,05. Važno je napomenuti da ovo nije potrebno popravljati ukoliko se može očekivati bliska stranica zbog složenosti geometrije. Svakako, potrebno je imati na umu ove stranice, ukoliko dođe do problema prilikom diskretizacije domene mrežom konačnih volumena. Na slici 11 prikazana su dvije stranice koja uzrokuju nabor na površini.



**Slika 11** Nabor na površini uzrokovan bliskim stranicama [22]

#### 4.1.4.4. Slobodni rubovi (eng. *free edges*)

Slobodni rub je rub pridružen samo jednoj stranici. Dvije spojene stranice dijele dva vrha zajedničkog ruba. Primjerice rubovi oko rupe predstavljaju slobodne rubove. Na slici 12 prikazani su slobodni rubovi.

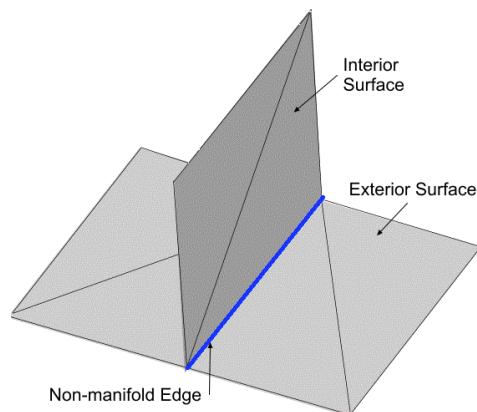


**Slika 12 Slobodni rubovi [22]**

Važno je napomenuti da je dobivena geometrija imala slobodne rubove koji su uklonjeni zatvaranjem, kao što je već napomenuto.

#### 4.1.4.5. Ne manifoldni rubovi (eng. non manifold edges)

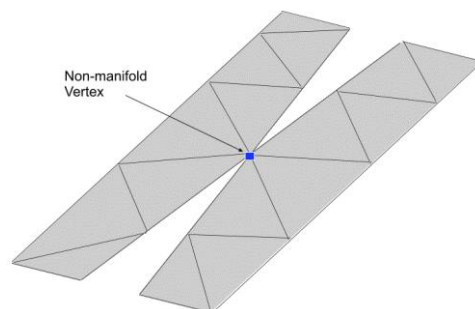
Ne manifoldni rub je onaj rub koji dijele dvije ili više stranica. Slika 13 prikazuje ne manifoldni rub.



**Slika 13 Ne manifoldni rub [22]**

#### 4.1.4.6. Ne manifoldni vrhovi (eng. non manifold vertices)

Vrh je ne manifoldan ukoliko nijedna od njegovih povezanih stranica nema drugu vezu s povezanim stranicama osim tog vrha. Primjer ovoga može se vidjeti na slici 14, gdje jedna površina dodiruje drugu isključivo u jednom vrhu.



**Slika 14 Ne manifoldni vrh [22]**



## 4.1.4.7. Detektiranje problema površinske mreže i njihovo uklanjanje

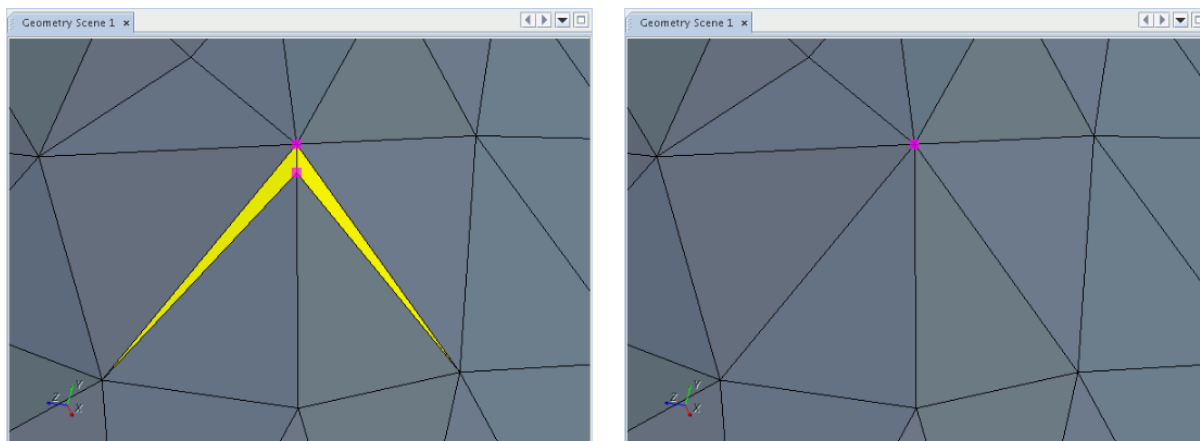
Detektiranje problema površinske mreže moguće je napraviti pokretanjem alata popravak površinske mreže (eng. *repair surface mesh*). Problemi koji su se javili unosom površinske mreže u STAR-CCM+ prikazani su na slici 15.

#	Display	Threshold	Count
1	<input checked="" type="checkbox"/>	Pierced faces (Default)	37
2	<input checked="" type="checkbox"/>	Face quality (Default)	2019
3	<input checked="" type="checkbox"/>	Face proximity (Default)	104
4	<input checked="" type="checkbox"/>	Free edges (Default)	0
5	<input checked="" type="checkbox"/>	Non-manifold edges (Default)	0
6	<input checked="" type="checkbox"/>	Non-manifold vertices (Default)	0

**Slika 15 Problemi površinske mreže**

Moguće je uočiti iz slike 15 kako površinska mreža nema slobodnih rubova koji su nestali zatvaranjem površina.

Prvenstveno je potrebno ukloniti probijene stranice. Ovo je moguće postići korištenjem više naredbi. Slika 16 prikazuje naredbu urušavanja vrhova (eng. *collapsing vertices*) koja urušava jedan vrh u drugi.



**Slika 16 Naredba urušavanje vrhova [22]**

Ova naredba ispravlja nekvalitetne stranice bez stvaranja slobodnih rubova, no moguće je njom i ukloniti probijene stranice. Ukoliko se dvije stranice preklapaju odabere se jedna od tih dvaju stranica te izvrši ova naredba. Probijene stranice moguće je ukloniti i pomoću naredbe izgladivanja vrhova. Ova naredba lokalno izgladuje vrh ili više vrhova u svrhu poboljšanja razdiobe vrhova po površini ili po zajedničkoj krivulji. Također moguće je koristiti i alat automatski popravljivač površine. Ovaj alat automatski popravljiva probijene stranice. Dakle, korištenjem ovih naredbi uklonjena su probijena stranice, što je to moguće vidjeti na slici 17.

#	Display	Threshold	Count
1	<input checked="" type="checkbox"/>	Pierced faces (Default)	0
2	<input checked="" type="checkbox"/>	Face quality (Default)	1974
3	<input checked="" type="checkbox"/>	Face proximity (Default)	90
4	<input checked="" type="checkbox"/>	Free edges (Default)	0
5	<input checked="" type="checkbox"/>	Non-manifold edges (Default)	0
6	<input checked="" type="checkbox"/>	Non-manifold vertices (Default)	0

**Slika 17 Uklonjeni problemi probijenih stranica**

Kako preostala dva problema nije nužno popravljati, jer će oni biti popravljani prilikom diskretizacije domene metodom konačnih volumena i to korištenjem alata za rediskretizaciju površina, što će biti objašnjeno u nastavku, može se ići na sljedeći korak.

#### 4.1.5. Dodjeljivanje dijelova regiji

Sada je potrebno razdvojiti površine unesene geometrije. Ovaj korak je nužan prije dodavanja dijelova regiji. Naime, kako postoje različite granice, bitno ih je razdvojiti, tako da svaka ploha domene mora biti zasebna površina. Također razdvojene su plohe palube i plohe trupa te dodijeljene pojedinačnim površinama trupa i palube. Ovo je napravljeno za potrebe naknadnoga definiranja mreže kako je objašnjeno u nastavku.

Sljedi dodjeljivanje dijela regiji, što je napravljeno sa sljedećim postavkama:

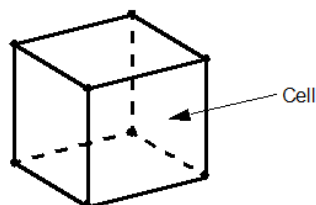
- stvaranja jedne regije za svaki dio (kako postoji jedan dio, stvorit će se jedna regija)
- stvaranja granice za svaku površinu (površine su upravo podijeljene)
- stvaranja jedne zajedničke krivulje za sve krivulje dijela
- deaktiviranje stvaranja sučelja iz dodira.

## 4.2. Diskretizacija (računalna mreža)

Računalna mreža je diskretan geometrijski prikaz računalne domene u kojoj se rješavaju problemi viskoznog strujanja. Većina metoda diskretizacije mrežom konačnih volumena počinju proces diskretizacije izradom površinske mreže na granicama koje su netom napravljene stvaranjem regije. Površinska mreža sastoji se od dvodimenzijskih planarnih ili krivolinijskih elemenata koja se zovu stranice. Stranice se sastoje od vrhova i rubova. Volumenska mreža nastaje iz površinske, a sastoji se od trodimenzijskih volumena. Volumeni sadržavaju vrhove, rubove i stranice [26].

Unutar računalnoga programa STAR-CCM+ volumeni se mogu sastojati od bilo kojeg broja stranica sve dok je broj stranica dovoljan za zatvaranje volumena. Stranice volumena se ne mogu presijecati međusobno, osim na dijelovima gdje se međusobno dodiruju, a to su

zajednički rubovi. Proizvoljni poliedarski oblici su dozvoljeni, a najčešći tip volumena su heksaedarski volumeni prikazani na slici 18 [22].



**Slika 18 Heksaedarski volumen [22]**

Odabir ispravnih elemenata kojima bi se diskretizirala domena ovisi o mnogo parametara. Neki od tih parametara su: rješavač (je li unutar rješavača moguće koristiti nestrukturiranu mrežu?), cilj simulacije (je li potrebno riješiti fine detalje strujanja?) i resursi računala. Za jednostavne, fiksirane, gole trupove (bez privjesaka) najbolje je odabrati visokokvalitetnu heksaedarsku mrežu [14].

U nastavku dane su osnovne upute prema [14] za pravilnu diskretizaciju:

- u ovisnosti o resursima kompjutera odabrati prikladan broj volumena
- napraviti mrežu na način da što bolje opisuje strujanje, izbjegavati nepotrebno male volumene
- koristiti barem 20 mrežnih točaka za opis najkraćih valnih duljina valova nastalih strujanjem oko trupa broda/modela, što ovisi i o redu točnosti numeričke sheme
- za manje Froudeove brojeve nije potrebno provesti gornju stavku, jer bi se dobili premali volumeni, a otpor valova ionako je znatno manji
- koristiti barem 20 mrežnih točaka u vertikalnom smjeru u području očekivane slobodne površine
- gdje god je moguće, potrebno je koristiti ortogonalnu mrežu u području slobodne površine
- u slučaju korištenja zidnih funkcija  $y^+$  parametar na zidu (ovdje trup broda) treba iznositi od 30 do 300
- koristiti hiperbolične mrežne generatore gdje god je to moguće u blizini zida kako bi se dobila ortogonalna mreža
- ortogonalna mreža preporučuje se i u blizini granica domene
- potrebno je ugladiti (profiniti) mrežu u područjima gdje se očekuju interesantne karakteristike strujanja, ovaj proces je iterativan dok se ne pokaže da dodatno ugađivanje ne daje znatno različite rezultate

- osigurati kvalitetnu razlučivost oko zakrivljenih rubova
- u blizini zida za slučaj korištenja zidnih funkcija, u području graničnog sloja ekspanzijski odnos može biti 1,5 za grublje mreže.

Važno je napomenuti kako ove upute variraju ovisno o autoru. Tako primjerice prema preporukama CD ADAPCO-a u području slobodne površine trebalo bi biti barem 80 do 100 volumena po valnoj duljini, a 20 volumena po valnoj amplitudi [30].

U ovom radu diskretizacija domene napravljena je prema postupku pokazanom u [23]. U nastavku će biti objašnjen način diskretizacije te je dan opis korištenih modela diskretizacije.

#### 4.2.1. Modeliranje u blizini zida

Vrlo važan dio računalne mreže je mreža u blizini zida. Ovom mrežom rješava se problem graničnog sloja. Postoje dva učestala načina rješavanja problema graničnog sloja. Prvi je korištenje vrlo fine mreže u blizini zida, a drugi je korištenje funkcija zida, gdje je moguće koristiti znatno veće volumene u blizini zida, a razlučivost u blizini zida je znatno grublja. Kao što je već napomenuto za drugu opciju potrebno je držati parametar  $y^+$  iznad vrijednosti 30 [30].

Postoje razne formule za procjenu parametra  $y^+$  koje razmatraju veličinu prvog volumena uz zid. Ovdje će se spomenuti dvije [30] i to prva:

$$y = \frac{y^+}{Rn \sqrt{\frac{C_f}{2}}} L_{pp} \quad (94)$$

gdje se koeficijent otpora trenja računa prema [1]:

$$C_f = \frac{0,075}{(\log Rn - 2)^2} \quad (95)$$

a druga glasi [13]:

$$y^+ = 0,172 \left( \frac{y}{L} \right) Rn^{0,9} \quad (96)$$

gdje je  $y$  visina prvog volumena od zida.

Koristeći ove formule može se dobiti dobar uvid u utjecaj brzine na potrebnu visinu prvog volumena.

Programski paket STAR-CCM+ ima mogućnost korištenja alata za diskretizaciju prizmama u graničnom sloju koji upravo služi za diskretizaciju u blizini zida, a o njemu će biti govora u nastavku.

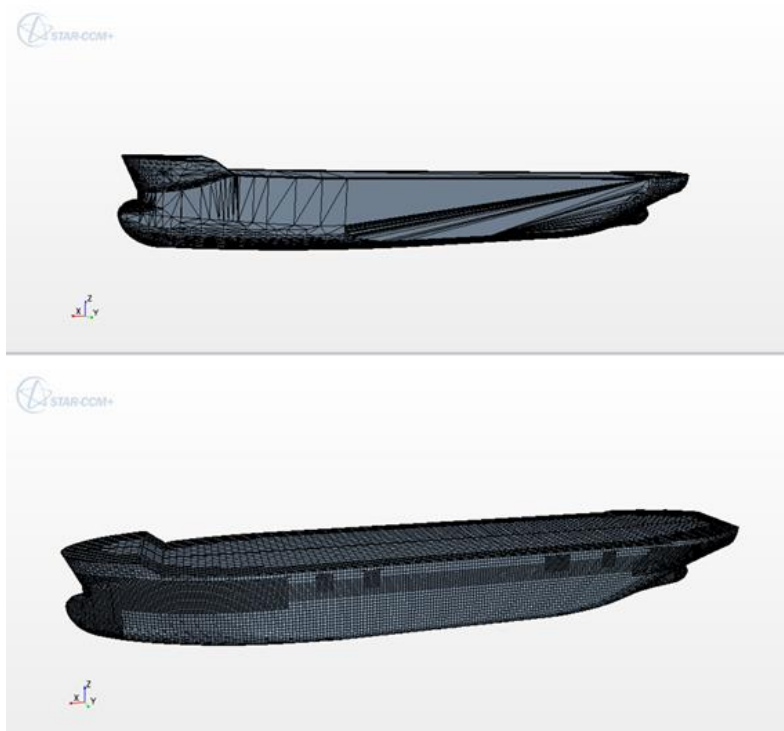
#### 4.2.2. Postupak diskretizacije [22]

Diskretizacija računalne domene počinje odabirom alata diskretizacije. U ovom radu korišteni su prema uputama [23] sljedeći alati diskretizacije:

- alat za rediskretizaciju površine
- alat za odsijecanje suvišnih površina
- alat za diskretizaciju prizmama u graničnom sloju

##### 4.2.2.1. Alat za rediskretizaciju površina (eng. Surface Remesher)

Alat za rediskretizaciju površine koristi se za poboljšavanje kvalitete postojeće površine te za optimiranje iste za volumensku diskretizaciju. Ponovna diskretizacija se temelji na zadanoj duljini ruba, a može uključivati i ugađivanje temeljeno na neposrednoj blizini krivulje ili površine. Slika 19 prikazuje ugađivanje površine postignuto korištenjem alata za rediskretizaciju površina.



**Slika 19** Alat za rediskretizaciju površina

##### 4.2.2.2. Alat za odsijecanje suvišnih površina (eng. Trimmer)

Alat za odsijecanje suvišnih površina omogućuje robusnu i efikasnu metodu dobivanja visoko kvalitetne mreže za jednostavne, ali i kompleksne geometrije.

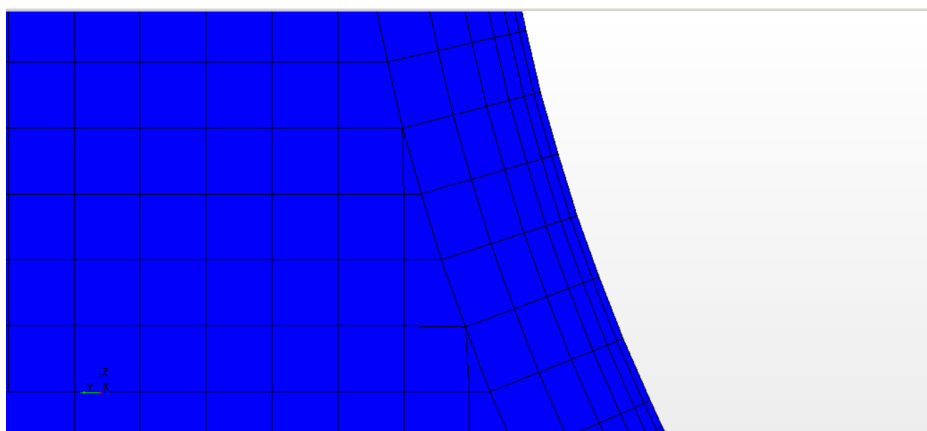
Ima vrlo dobre attribute:

- dominantna heksaedarska mreža s minimalnom asimetrijom
- uglađivanje temeljeno na veličini površinske mreže i dodatnih uputa koje korisnik definira
- neovisan o kvaliteti površinske mreže
- poravnanje s koordinatnim sustavom po izboru korisnika.

#### 4.2.2.3. Alat za diskretizaciju prizmama u graničnom sloju (eng. Prism Layer Mesher)

Ovaj alat koristi se zajedno s osnovnim alatom volumenske diskretizacije u svrhu generiranja ortogonalnih prizmatičnih volumena u blizini zida ili granice. Ovaj sloj je nužan za poboljšavanje točnosti rješenja strujanja. Alat za diskretizaciju prizmama u graničnom sloju definiran je pomoću sljedećih parametara:

- ukupna debljina
- broj slojeva
- faktor rastezanja
- funkcija rastezanja.



**Slika 20** Alat za diskretizaciju prizmama u graničnom sloju

Na slici 20 prikazan je alat za diskretizaciju prizmama u graničnom sloju te je moguće uočiti kako sloj prizama ima šest slojeva. Ukupna debljina predstavlja zbroj debljina svih slojeva, a faktor rastezanja je broj koji govori koliko je idući sloj deblji od sloja prije (bliže površini, zidu). Funkciju rastezanja moguće je odabrati, a u ovom radu je korištena geometrijska funkcija rastezanja. Geometrijskom funkcijom rastezanja ustvari se dobije geometrijski red prikazan sljedećom formulom za faktor istežanja 1,5 te 6 slojeva:

$$y + 1,5y + 2,25y + 3,375y + 5,0625y + 7,59375y = t \quad (97)$$

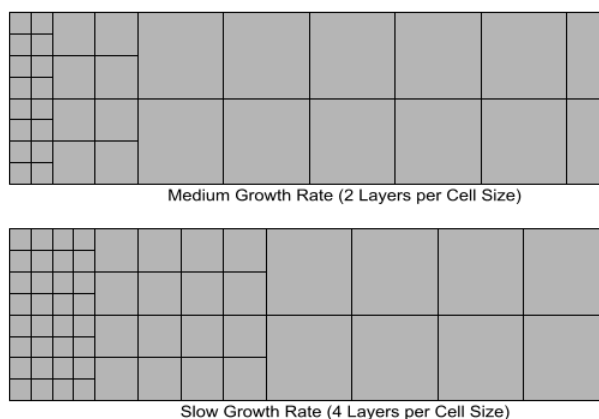
$$20,78125y = t$$

gdje  $y$  predstavlja debljinu prvog sloja (volumena), a  $t$  ukupnu debljinu sloja prizama.

Prema jednadžbama (94) i (96) moguće je uočiti kako visina prvog volumena ovisi o Reynoldsovom broju te će stoga biti nužno mijenjati ukupnu debljinu sloja prizama ovisno o brzini, kako bi se vrijednost parametra  $y+$  držala u prihvatljivim granicama.

#### 4.2.2.4. Postavke modela diskretizacije

Nakon izbora modela diskretizacije potrebno je podesiti postavke potrebne za njihovo definiranje. Ovdje će biti objašnjene samo neke, a ostale postavke detaljno su objašnjene u [22]. Prvenstveno je potrebno postaviti osnovnu veličinu volumena. Osnovna veličina karakteristična je veličina modela koja se postavlja na početku te se većina ostalih postavki vezano za diskretizaciju prikazuje u relativnom odnosu s ovom veličinom. Sljedeća važna postavka je automatsko popravljavanje površinske mreže, odnosno zadavanje minimalne neposredne blizine i minimalne kvalitete stranice. Ovim alatom moguće je popraviti pogreške površinske mreže objašnjene u potpoglavlju 4.1.4. Upravo ovim alatom su uklonjene greške koje su se otkrile kontrolom unesene geometrije. Slijedi zadavanje postavki alata za diskretizaciju prizama u graničnom sloju. Ukupna debljina zadavala se kao apsolutna veličina, koja se mijenjala ovisno o brzini, kako bi  $y+$  parametar bio u zadovoljavajućim granicama. Ovo je jedina vrijednost koja ne ovisi o osnovnoj veličini volumena. Sljedeća važna postavka je osnovna zakrivljenost. Ovom vrijednošću zadaje se broj točaka oko kruga na površinskoj mreži, a povećavanjem ovog broja povećava se izgladenost mreže oko zakrivljene plohe. Stopom rasta kontrolira se brzina povećavanja veličine volumena. Zadajući drugačije stope rasta mijenja se broj potrebnih volumena za prelazak na sljedeću veličinu. Tako primjerice odabirom naredbe *Slow* osigurava se minimalno 4 volumena prije prelaska na sljedeću veličinu volumena, što je moguće vidjeti na slici 21.



**Slika 21** Stopa rasta

Korisnik zadaje brzinu rasta u osnovnom modelu diskretizacije te brzinu rasta u blizini površina granice (granice domene i zid).

Zadaju se i veličine površina. U ovom radu odabrana je metoda zadavanja ciljane vrijednosti te minimalne vrijednosti veličine površine stranica koje se zadaju u odnosu na osnovnu veličinu volumena. Ciljanoj vrijednosti alat za diskretizaciju (eng. *mesher*) teži, neovisno o lokalnoj veličini stranice unesene geometrije, a u područjima gdje je mreža finija, alat za diskretizaciju će smanjiti veličinu površine stranice, ali ne ispod minimalne vrijednosti. Ove vrijednosti moguće je zadavati za svaku prije definiranu površinu. Kako su prije definirane dvije površine na modelu broda (trup i paluba), moguće je sada postaviti različite postavke za ove vrijednosti pa tako primjerice na palubi postaviti veće stranice, a na trupu manje. Ove veličine postavljaju se i na površinama granica.

U tablici 4 prikazane su odabrane postavke za jednu mrežu korištenu u ovom radu pri  $Fn=0,1926$ .

**Tablica 4 Postavke grube mreže**

Osnovna veličina	Vrijednost	0,1 m
Automatsko popravljajanje površine	Minimalna neposredna blizina	0,001
Maksimalna veličina volumena	Postotak osnovne veličine	1600
Broj sloja prizama	Broj	6
Ukupna debljina sloja prizama	Apsolutna vrijednost	0,03m
Zakrivljenost površine	#točaka/krugu	36
Minimalna veličina površine	Postotak osnovne veličine	6,25
Ciljana veličina površine	Postotak osnovne veličine	50
Stopa rasta	Zadana stopa rasta	Slow
Stopa rasta	Stopa rasta granice	Slow

#### 4.2.2.5. Volumetrijske kontrole

Kako bi se problem strujanja oko trupa broda adekvatno riješio, potrebno je što bolje uskladiti mrežu. Tako je primjerice potrebno prilagoditi mrežu kako bi mogla adekvatno uzeti u obzir odvajanje strujanja, Kelvinov val i tako dalje. Stoga je potrebno napraviti nove dijelove unutar kojih će se zadati novi uvjeti diskretizacije. Ovdje se može primijeniti svojstvo neizotropnosti



alata za odsijecanje suvišnih površina pa tako volumeni ne moraju biti jednake veličine u svim smjerovima (u smjeru  $z$ -osi mogu biti manje). U nastavku će biti prikazani likovi koji su napravljeni u svrhu usklađivanja mreže.

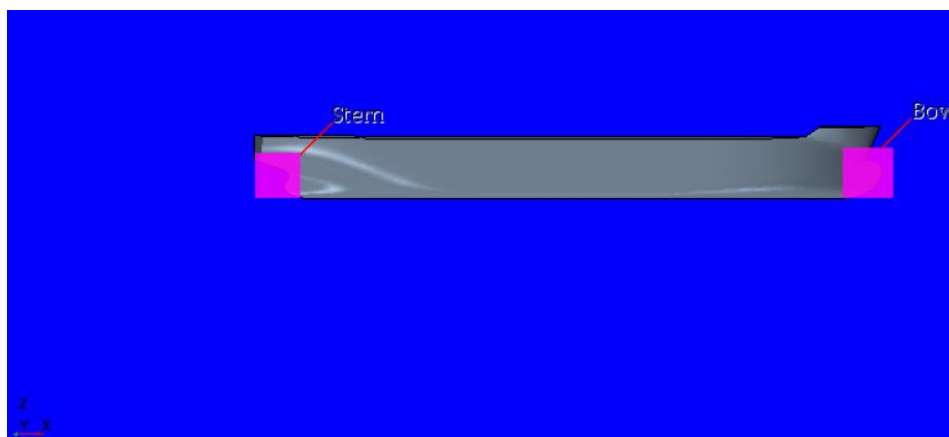
Kako bi se opisala slobodna površina napravljena su tri kvadra koja pokrivaju cijelu domenu u smjeru  $x$  i  $y$  osi, a u smjeru  $z$  osi pokrivaju dio oko očekivane slobodne površine. Tako primjerice kvadar nazvan *free surface very thin* najmanji je kvadar koji se proteže u smjeru  $z$  osi od 0,39 m do 0,52 m (ishodište je smješteno na kobilici, a slobodna površina prema tome se nalazi na 0,4477 m). U tablici 5 prikazane su  $z$  koordinate na kojima se protežu ovi kvadri.

**Tablica 5** Kvadri za opis slobodne površine

Ime	$z_1$ [m]	$z_2$ [m]
Free surface very thin	0,39	0,52
Free surface thin	0,29	0,59
Free surface thick	0,1	0,7

Sada je moguće koristiti ove kvadre za volumetrijske kontrole te tako napraviti drukčiju mrežu unutar njih. Koristi se mogućnost kreiranja neizotropnih volumena, kako je važnija visina volumena. Tako se u smjeru  $x$  i  $y$  postavila vrijednost veličine kao 800% osnovne veličine volumena, u smjeru  $z$  osi je za *free surface very thin* odabrano 12,5% osnovne veličine volumena, za *free surface thin* 25% te za *free surface thick* 50% osnovne veličine volumena. Ovo je napravljeno u svrhu postupnog prijelaza na grublju mrežu.

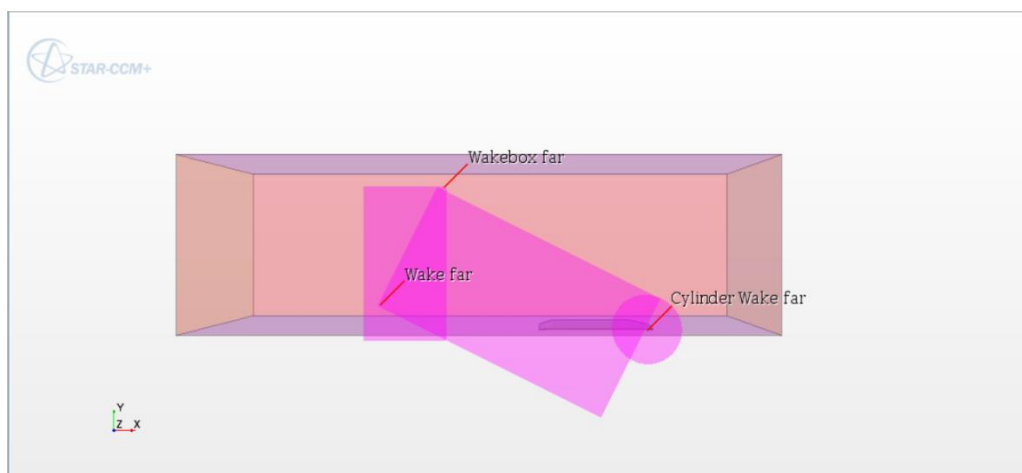
Vrlo je važno imati mrežu veće razlučivosti u područjima pramca i krme, kako je tu zakrivljenost geometrije velika. Stoga su napravljena dva kvadra prikazana slikom 22, a unutar njih je izvršena diskretizacija izotropnim volumenima veličine 12,5% osnovne veličine volumena.



**Slika 22** Pramca i krma – volumetrijske kontrole

Kako bi se što bolje opisalo područje uz sami trup broda, napravljene su četiri različite volumetrijske kontrole pomoću kvadara i cilindara redom od manjih prema većim: *Hull close*, *Hull nearer*, *Hull near* i *Hull far*. Najbliži trupu diskretiziran je izotropnim volumenima veličine 50% osnovne veličine volumena, sljedeći neizotropnim volumenima kojima su bridovi u  $x$  i  $y$  smjeru iste veličine kao i osnovna veličina volumena, a u smjeru  $z$  50% osnovne veličine. *Hull near* diskretiziran je također s neizotropnim volumenima veličine 200% veličine osnovnog volumena u smjeru  $x$  i  $y$ , a u smjeru  $z$  veličine 100% veličine osnovnog volumena. *Hull far* diskretiziran je neizotropnim volumenima veličine 400% osnovnog volumena u smjeru  $x$  i  $y$ , te 200% veličine osnovnog volumena u smjeru  $z$  osi. Ovako je postignut postepen prijelaz na grublju mrežu.

Još je potrebno prilagoditi mrežu Kelvinom valu koji nastaje. Kako bi se to ostvarilo napravljene su tri volumetrijske kontrole pomoću kvadara i cilindara redom od manjih prema većim: *Wake near*, *Wake far* i *Wake very far*. Na slici 23 prikazana je volumetrijska kontrola *Wake far*. Moguće je uočiti na slici kako kvadar *Wake far* leži pod kutom u odnosu na  $x$  os. To je postignuto kreiranjem dodatnog koordinatnog sustava pod kutom od  $30^\circ$  u odnosu na  $x$  os. Kvadri *Wake near*, *Wake far* i *Wake very far* su diskretizirani neizotropnim volumenima u koje su u  $x$  i  $y$  smjeru redom veličine 100%, 200% i 400% osnovne veličine volumena, a u  $z$  smjeru veličine 100%, 100% te 200% veličine osnovnog volumena. Ovako je postignut postupan prijelaz na grublju mrežu.



Slika 23 Wake far – volumetrijske kontrole

#### 4.2.2.6. Vizualizacija računalne mreže

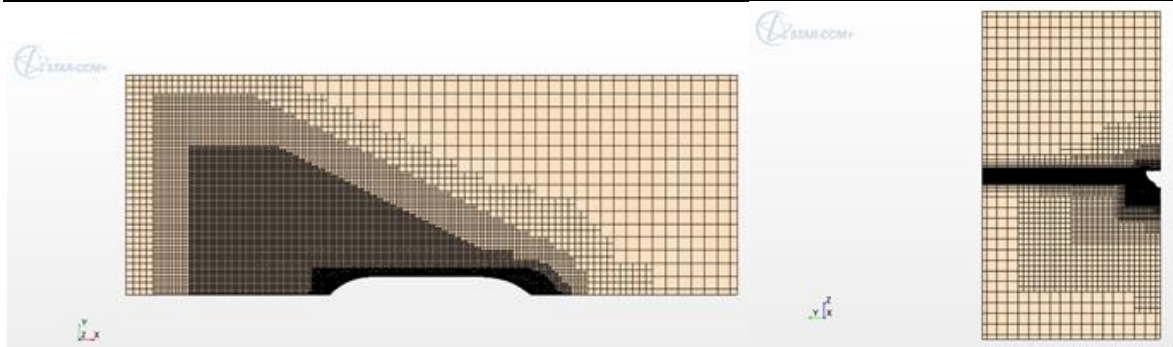
Prije pokretanja generiranja volumenske mreže, potrebno je postaviti rubne uvjete na granicama. U tablici 6 prikazani su odabrani rubni uvjeti.

**Tablica 6 Odabrani rubni uvjeti na granicama**

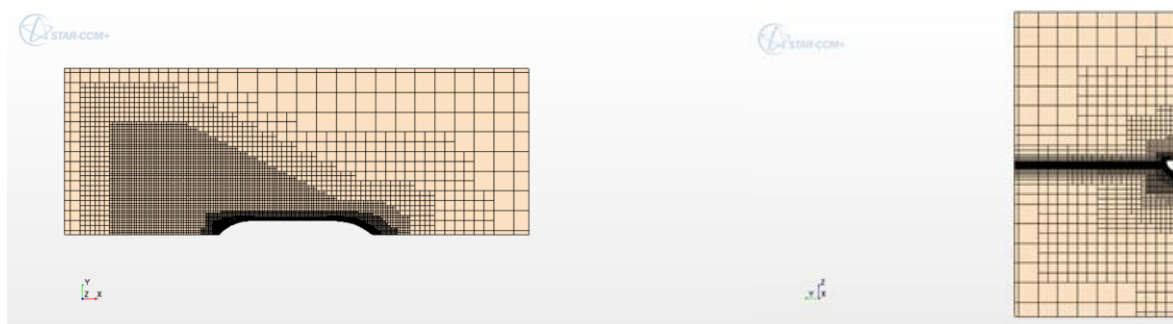
Ime granice	Tip granice (STAR-CCM+)
Inlet	Velocity Inlet
Outlet	Pressure Outlet
Side	Symmetry Plane
Symmetry	Symmetry Plane
Top	Velocity Inlet
Wall	Wall

Za vizualizaciju računalne mreže kreirane su dvije ravnine. Jedna je ravnina  $xy$  s  $z$  koordinatom u blizini slobodne površine, a druga  $yz$  s  $x$  koordinatom u blizini krme broda. Na slici 24 prikazana je provedena diskretizacija računalne domene i to za dva slučaja – gruba i najfinija mreža (514501/2263688 volumena, ukupna debljina sloja prizama 0,03 m). Slika 24 a) prikazuje domenu diskretiziranu najfinijom mrežom (lijeva prikazuje tlocrt na položaju  $z=0,35$  m, a desna nacrt na položaju u blizini krme broda). Slika 24 b) prikazuje također tlocrt i nacrt, ali grube mreže. Za dobivanje ovih prikaza napravljene su dvije ravnine koje omogućuju vizualizaciju mreže. Slike 24 c) i d) prikaz su diskretizirane domene i to prvo najfinijom mrežom, a zatim grubom mrežom. Može se uočiti na slici 24 kako se mrežom pokušava "uhvatiti" Kelvinov val koji je pod kutom u odnosu na  $xz$  ravninu, a taj kut za plovidbu u dubokoj vodi iznosi oko  $20^\circ$ .

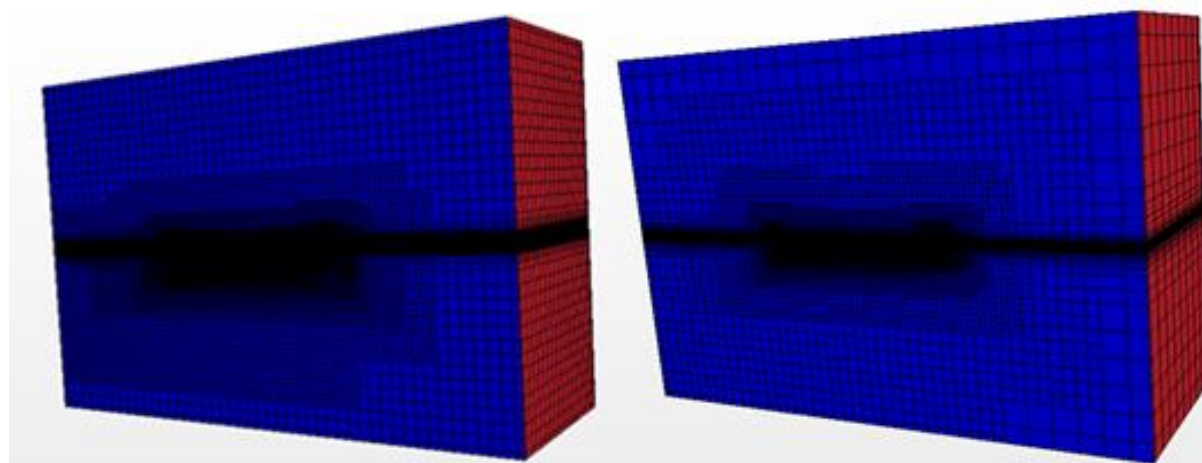
Kako su sve postavke diskretizacije zadane u relativnom odnosu prema osnovnom volumenu (izuzev alata za diskretizaciju prizmama u graničnom sloju) finija mreža postiže se isključivo zadavanjem manje osnovne veličine volumena. Tako za srednju mrežu korištena je dimenzija osnovnog volumena 0,07 m, a za najfiniju 0,05 m. Ovim načinom je dobivena gruba mreža koja ima nešto više od pola milijuna volumena, srednja mreža oko 1,1 milijun volumena, a najfinija mreža oko 2,2 milijuna volumena.



a) domena diskretizirana finom mrežom: tlocrt (lijevo) i nacrt (desno)



b) domena diskretizirana grubom mrežom: tlocrt (lijevo) i nacrt desno



c) domena diskretizirana finom mrežom      d) domena diskretizirana grubom mrežom

**Slika 24** Diskretizirana računalna domena

#### 4.2.2.7. Evaluacija mreže

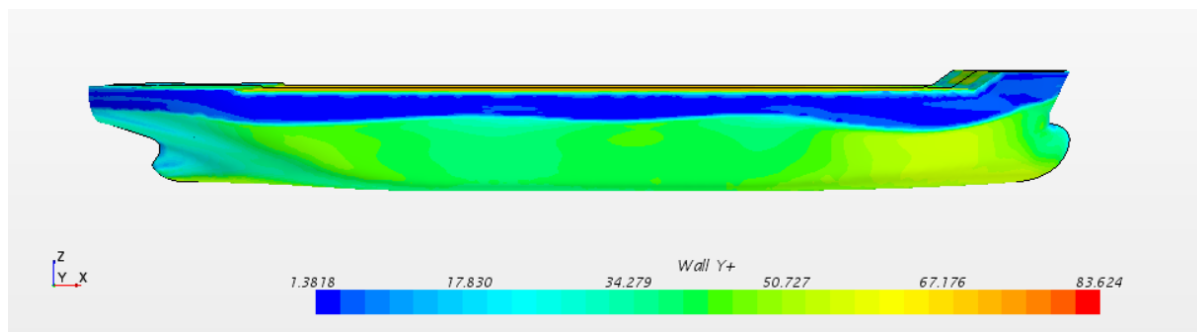
Mreža se evaluirala koristeći dva parametra: *Wall y+* te Courantov broj (eng. *convective Courant number*). Oba ova parametra su skalarna i bezdimenzijska. Prvi parametar već je objašnjen, a drugi se računa prema formuli [25]:

$$CCN = V \frac{dt}{dx} \tag{98}$$

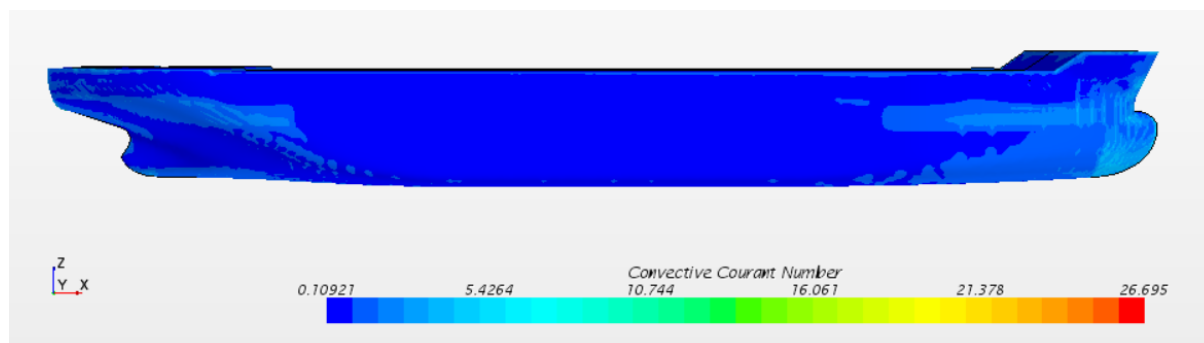
gdje  $V$  predstavlja brzinu,  $dt$  vremenski korak, a  $dx$  duljinu intervala (u ovom slučaju duljinu volumena).

Ovaj parametar ustvari prikazuje omjer vremenskog koraka i vremena potrebnog da fluid prođe određeni volumen svojom lokalnom brzinom. Općenito iznos ovog omjera trebao bi biti manji od 1 kako bi se dobila simulacija za koju treba manje proračunskog vremena i ima veću stabilnost [9].

Slikama 25 i 26 prikazana su ova dva parametra na prvim volumenima do trupa.



**Slika 25** Parametar  $y^+$  na prvim volumenima do trupa kod  $Fn=0,2117$

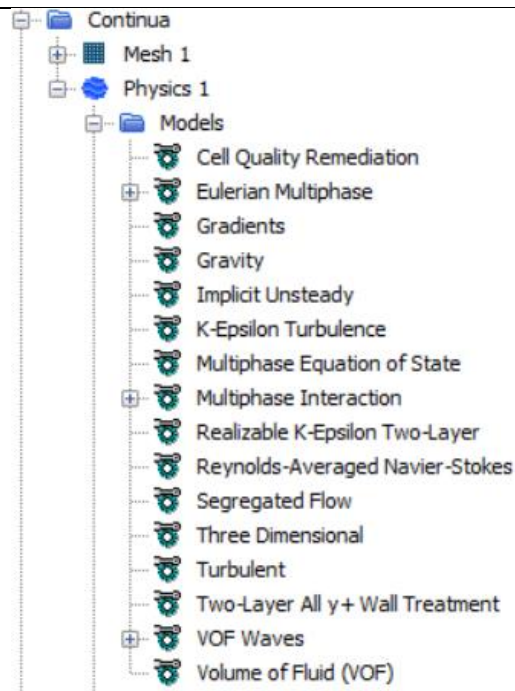


**Slika 26** Parametar  $CCN$  na prvim volumenima do trupa kod  $Fn=0,1669$

Važno je napomenuti da neki volumeni nužno imaju male vrijednosti parametra  $y^+$ , što je prihvatljivo. Također vrijednosti  $CCN$  parametra s kojim implicitni rješavač može raditi su do maksimalnih vrijednosti od 10 do 100 [25]. Temeljem ovoga, može se zaključiti kako su obje vrijednosti parametara u prihvatljivim granicama.

### 4.3. Fizikalni modeli

Nakon provedene diskretizacije računalne domene potrebno je odabrati odgovarajuće fizikalne modele unutar STAR-CCM+, kako bi se opisalo viskozno strujanje oko trupa broda. Slika 27 prikazuje odabrane fizikalne modele u ovom radu.



Slika 27 Odabrani fizikalni modeli

U nastavku dan je opis nekih modela, a detaljan opis prikazan je u [22].

#### 4.3.1. Dvoslojno razrješavanje zidne turbulencije (eng. *Two-Layer All y+ Wall Treatment*)

Kako bi se riješio problem viskoznog graničnog sloja,  $k - \varepsilon$  model turbulencije pomoću ovog modela dijeli područje proračuna na dva dijela. U sloju u blizini zida dinamički koeficijent turbulentne viskoznosti  $\mu_t$  i brzina disipacije turbulentne kinetičke energije  $\varepsilon$  su definirani kao funkcija udaljenosti od zida. Vrijednosti  $\varepsilon$  u slojevima blizu zida izglađene su s vrijednostima  $\varepsilon$  dalje od zida koristeći transportne jednadžbe. Jednadžba turbulentne kinetičke energije rješava se za čitavu domenu strujanja [25].

#### 4.3.2. Odijeljeno rješavanje jednadžbi strujanja (eng. *Segregated Flow*)

Ovaj model je dobio ovakvo ime, jer rješava jednadžbe strujanja za svaku komponentu tlaka i brzine odvojeno prema SIMPLE algoritmu. Jednadžbe kontinuiteta te jednadžbe momenta su povezane pristupom prediktor – korektor. Ovaj model je najprikladniji za nestlačivo strujanje. U ovom radu korištena je uzvodna shema konvekcije drugoga reda [22].

#### **4.3.3. Nestacionarni implicitni rješavač (eng. *Implicit Unsteady*)**

Ovaj model koristi implicitno nestacionarni rješavač te je unutar STAR-CCM+ jedino moguće kombinirati ovaj model s modelom odijeljenog rješavanja jednadžbi. Glavna zadaća ovog modela je kontrola vremenskog koraka te kontrola promjene svojstva nakon jednog vremenskog koraka. Kako se radi o simulaciji slobodne površine ovaj model je nužno koristiti, a u simulacijama bez slobodne površine, strujanje se može modelirati kao stacionarno [25].

#### **4.3.4. Udio fluida u volumenu (VOF)**

Kao što je već napomenuto, pristup udjela fluida u volumenu se koristi zajedno s RANS jednadžbama kako bi se odredila lokacija slobodne površine. Ovom metodom lokacija je određena implicitno određivanjem granice između vode i zraka unutar računalne domene. Dodatno uvedena varijabla govori o popunjenosti volumena određenim fluidom (zrakom ili vodom).

#### **4.3.5. Eulerov višefazni model (eng. *Eulerian Multiphase*)**

Ovaj model koristi se za stvaranje i upravljanje dvije faze koje se koriste u simulaciji sa slobodnom površinom pri čemu faza predstavlja pojedini fluid. Faze unutar ovih simulacija bile su zrak i voda konstantne gustoće i dinamičkog koeficijenta viskoznosti prilagođene za temperaturu u kojoj se eksperiment provodio.

#### **4.3.6. Gravitacija (eng. *Gravity*)**

Ovim modelom ubrzanje uslijed gravitacije se uzima u obzir u simulacijama te utječe na oba fluida. Referentna visina, koju definira korisnik, uzima se u obzir kod proračuna tlaka te proračuna sila na tijelo uslijed gravitacije što je uključeno u momentnim jednadžbama.

#### **4.3.7. Metoda određivanja gradijenata: Hibridna Gausova-najmanjih kvadrata (eng. *Gradient Method: Hybrid Gauss-LSQ*)**

Rješavanje transportnih jednadžbi zahtjeva korištenje gradijenata. Jedan način korištenja gradijenata je u proračunu vrijednosti rekonstruiranih varijabli polja na stranicama volumena. Izabrana metoda u ovom radu je hibridna Gaussova metoda najmanjih kvadrata, koja se smatra preciznijom od Green-Gaussove metode [25].

#### 4.3.8. Model razvoja slobodne površine (eng. VOF Waves)

Ovaj model koristi se za simuliranje površinskih gravitacijskih valova. Tipično se koristi kod simulacija s modelima sa šest stupnjeva slobode gibanja, u brodskoj hidrodinamici. Ovaj model (nadalje VOF valovi) omogućuje korištenje funkcija polja kao i odgovarajuće profile na granicama. U ovom radu korišten je *Flat VOF Wave* koji predstavlja mirnu razinu vode zajedno s nastrujavanjem vode. Za definiranje ovog modela potrebno je definirati položaj slobodne površine, normalu u vertikalnom smjeru, brzinu morske struje i brzinu struje zraka te gustoću lakog i teškog fluida.

#### 4.4. Postavljanje početnih i rubnih uvjeta

Kao što je napomenuto u potpoglavlju 4.3.8., odabirom modela VOF valova omogućeno je korištenje funkcija polja. Upravo se ove funkcije koriste pri definiranju polja tlaka (skalarna funkcija hidrostatskog tlaka flat VOF valova), polja brzine (vektorska funkcija brzina flat VOF valova) te pri definiranju  $\alpha$  (volumnog udjela faze). Volumni udio faze je skalarna funkcija volumnog udjela teškog i lakog fluida flat VOF valova.

Postavljanje rubnih uvjeta temelji se na postavljanju određenih funkcija polja na granicama domene. Tako se na dnu domene postavlja vektorska funkcija brzine flat VOF valova, volumni udio teškog i lakog fluida flat VOF valova. Ove funkcije postavljaju se i na ulaznoj granici kao i na vrhu domene. Na izlaznoj granici postavlja se skalarna funkcija hidrostatskog tlaka flat VOF valova te volumni udio teškog i lakog fluida flat VOF valova. Na ulaznoj, izlaznoj i bočnoj granici postavlja se dodatan uvjet prigušivanja VOF valova. Ovaj uvjet objašnjen je u nastavku.

#### 4.5. Prigušivanje VOF valova

Ukoliko se VOF valovi ne priguše doći će do refleksije valova o granice domene ili do refleksije zbog nepravilnog prijelaza s finije na grublju mrežu. Ovo potonje već je riješeno i to odabirom brzine rasta kao *Slow*. Kako se refleksija ne smije događati, jer će uzrokovati interferenciju sa stvarnim poljem valova te će voditi do neispravnih rezultata, VOF valovi se prigušuju [22].

Najkorišteniji pristup prigušivanja VOF valova je onaj predložen od strane Choi – a i Yoon – a te je ovaj pristup implementiran u STAR-CCM+. Ovaj pristup kombinira linearno i parabolično prigušenje te dozvoljava korisniku da sam izabere hoće li primijeniti neko prigušenje ili kombinaciju oba prigušenja. Prigušenjem se uvodi vertikalni otpor vertikalnom gibanju. Sljedećom jednadžbom prikazan je ovaj pristup [31]:



$$q_z^d = \rho (f_1 + f_2 |w|) \frac{e^\kappa - 1}{e^1 - 1} w \quad (99)$$

$$\kappa = \left( \frac{x - x_{sd}}{x_{ed} - x_{sd}} \right)^n \quad (100)$$

gdje  $q_z^d$  predstavlja proizvoljni moment izvora,  $f_1$  linearnu konstantu prigušenja,  $f_2$  paraboličnu konstantu prigušenja,  $w$  vertikalnu komponentu brzine,  $z$  vertikalni smjer (okomit na slobodnu površinu),  $n$  eksponent prigušenja,  $x$  predstavlja smjer propagacije valova,  $x_{sd}$  početnu, a  $x_{ed}$  završnu koordinatu sloja prigušenja. Tako apsolutna vrijednost nazivnika u jednadžbi (100) predstavlja debljinu sloja prigušenja. Razlomak u jednadžbi (99) iznosi 1 za položaj na granici na kojoj je primijenjeno prigušenje, a 0 na položaju gdje počinje prigušenje. Koeficijent  $\kappa$  pomoću  $n$  opisuje karakter funkcija stapanja [31].

Zadane postavke unutar STAR-CCM+ su  $f_1=f_2=10$ ,  $n=2$ . Ove postavke uglavnom se koriste u većini radova, a tako je prikazano i u [23]. Stoga korisnik zadaje isključivo parametar duljina prigušenja VOF vala (eng. *Vof Wave Damping Lenght*). Ova udaljenost predstavlja udaljenost od granice na kojoj djeluje prigušenje  $x_{sd}$ .

U dosadašnjim istraživanjima i radovima nije definiran točan način izbora ovoga parametra. Naime ovisno o autoru ovaj parametar varira, a prikazuje se u ovisnosti o duljini broda/modela. Pokazano je da ovaj parametar znatno utječe na otpor tlaka [26]. U tablici 7 prikazan je proveden odabir ovoga parametra u nekim prethodnim radovima.

**Tablica 7 Ovisnost duljine prigušivanja o duljini broda**

Rad	Duljina prigušenja
[26]	1,86 $L_{pp}$
[27]	2,11 $L_{pp}$
[32]	1,24 $L_{pp}$
[23]	1,24 $L_{pp}$
[28]	1,12 $L_{pp}$
[29]	<i>dvar</i>

Moguće je uočiti da vrijednosti duljine prigušivanja iznose otprilike jednu do dvije duljine broda za veće domene.

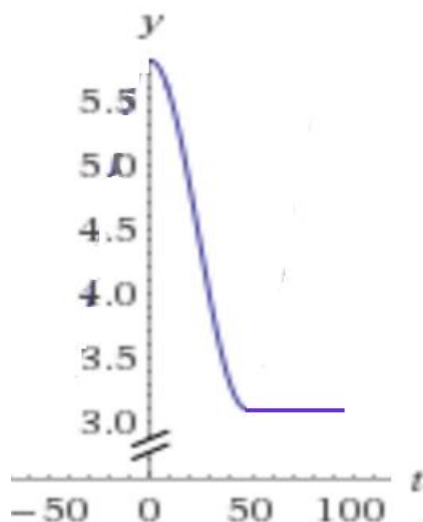
U ovom radu korišten je pristup objašnjen u [29]. Korištena je funkcija koju je potrebno samostalno definirati, a nazvana je prema [29] *dvar* (eng. *damping variable*) kao vrijednost parametra duljine prigušenja VOF vala. Ova funkcija prikazana je sljedećom formulom:

$$dvar \approx \frac{L}{2} + \frac{L}{2} \cos^2 \left( \frac{\pi}{2} \frac{t}{10T} \right) \quad (101)$$

gdje je  $T$  predstavlja vrijeme potrebno fluidu da prijeđe tijelo, a definirano je prema (102). Jednadžba (101) postavljena je sa znakom približne jednakosti iz razloga što vrijednosti koeficijenata se mogu uzeti u vrijednostima od  $(0,5 \div 0,6)L$ , ovisno o Froudeovom broju. Ovom funkcijom postiže se prigušivanje VOF valova u gotovo cijelom prostoru oko tijela te smanjivanje tog prostora za otprilike 50% nakon  $10T$ . Korištenje veće zone prigušenja u početku proračuna ubrzava konvergenciju proračuna [29]. Sljedećom slikom prikazan je oblik ove funkcije, koja se zadaje u obliku koda upisivanjem naredbe (primjerice za  $Fn=0,1669$ ):

$$(\$Time < 47.621)? 3.1 + 2.7 * pow(\cos(\$Time * 1.5708 / 47.621), 2) : 3.1$$

Za ovu brzinu vrijednost  $10T$  iznosi 47,621 s, a  $L/2$  približno iznosi 3,1 m. Vrijednost 2,7 m uzeta je kao takva iz razloga što veće vrijednosti prigušuju previše i onemogućuju ikakvo strujanje oko trupa. Prema gornjoj jednadžbi moguće je zaključiti da će nakon iznosa  $10T$ , vrijednost parametra duljine prigušenja VOF valova biti 3,1 m, što je otprilike  $0,5L$ . Moguće je uočiti da vrijednost funkcije  $dvar$  za 0 s iznosi 5,8 m te je tako prigušeno gotovo cijelo područje oko tijela, kako su granice domene udaljene oko 6 m od tijela. Važno je napomenuti kako je ova funkcija za sve brzine bila jednaka izuzev toga što je nužno promijeniti vrijednost  $10T$  za svaku brzinu, jer  $T$  ovisi o brzini prema (102). Na slici 28 prikazana je funkcija  $dvar$  u ovisnosti o vremenu.



Slika 28 Funkcija  $dvar$  u ovisnosti o vremenu za  $Fn=0,1669$

#### 4.6. Definiranje DFBI – a

Ovaj model simulira gibanje broda uslijed sila koje djeluju na tijelo uzrokovanih strujanjem. Najčešće se dopušta tijelu translacijsko gibanje u smjeru  $z$  osi te rotacijsko gibanje oko  $y$  osi,

odnosno poniranje i posrtanje. Kako su modelska ispitivanja provedena s fiksim modelom broda, u ovom radu je također model fiksiran te nije omogućeno gibanje modela.

#### 4.7. Postavljanje parametara rješavača i kriteriji zaustavljanja

Za provođenje simulacije viskoznog strujanja oko trupa broda potrebno je definirati vremenski korak, broj unutarnjih iteracija po vremenskom koraku te fizičko vrijeme. Također moguće je postaviti i neke dodatne numeričke parametre, primjerice podrelaksacijske faktore kako bi se poboljšala konvergencija po vremenskom koraku.

U ovom radu podrelaksacijski faktor za tlak postavljen je kao 0,4, za brzinu kao 0,7, a za *Segregated VOF* kao 0,8. Maksimalan broj unutarnjih iteracija postavljen je na 5.

Ukupno fizičko vrijeme, vremenski korak, vrijeme puštanja DFBI – a te ramp vrijeme podešeno je prema vremenu koje je potrebno fluidu da prođe tijelo. To vrijeme računa se prema jednostavnom izrazu [29]:

$$T = \frac{L}{V} \quad (102)$$

gdje je  $L$  duljina modela, a  $V$  brzina nastrujavanja fluida.

U Tablica 8 Postavke parametara rješavača i kriterija zaustavljanja prikazane su upute za odabir parametara rješavača i kriterija zaustavljanja simulacije prema uputama iz [29].

**Tablica 8 Postavke parametara rješavača i kriterija zaustavljanja**

Fizičko vrijeme	$(10 \div 20) T$
Vremenski korak	$T/200$
Vrijeme puštanja DFBI – a	$T/2$
Ramp vrijeme	$2T$
Broj unutarnjih iteracija	5

Prema ovome, za svaku brzinu postavljat će se različiti kriteriji zaustavljanja te parametri rješavača.

## 5. REZULTATI

U ovom radu proračunata je ovisnost sile otpora o brzini broda, odnosno dobivena je krivulja otpora. Za pet različitih brzina koristeći računalni program STAR-CCM+ proračunata je sila otpora te su dobiveni rezultati uspoređeni s dobivenim eksperimentalnim rezultatima [24]. Utjecaj kvalitete mreže ispitan je mijenjanjem veličine osnovnog volumena pa su tako provedeni proračuni s tri različite mreže: gruba, srednja i fina mreža. U tablici 9 prikazan je broj volumena za pojedine mreže.

**Tablica 9** Vrste mreža za  $Fn=0,1926$

Mreža	Broj volumena
Gruba	514501
Srednja	1110791
Fina	2263688

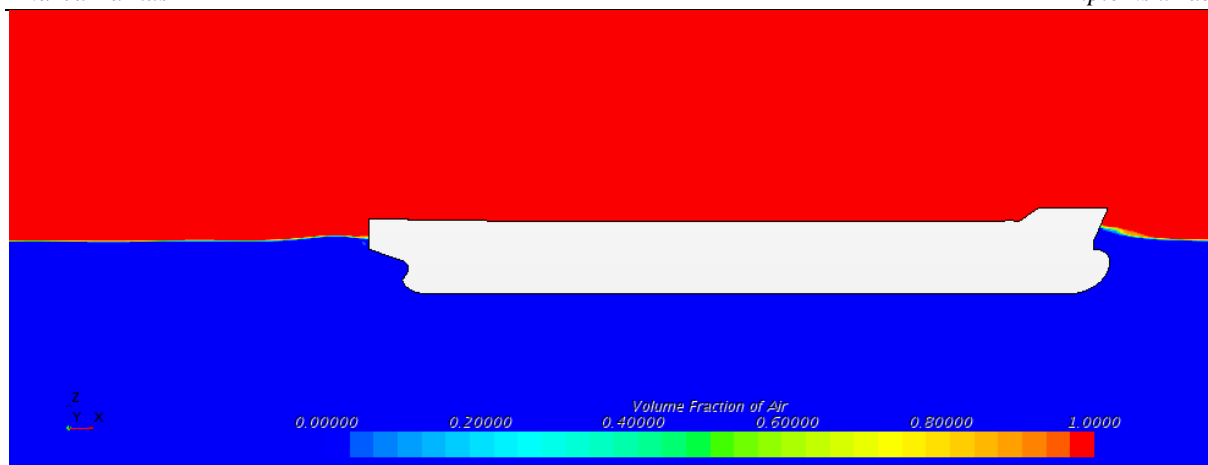
### 5.1. Vizualizacija rezultata

Unutar računalnog programa STAR-CCM+ potrebno je prije pokretanja proračuna definirati što se želi dobiti proračunom. Potrebno je definirati prizore (eng. *scenes*) koji će prikazivati određene fizikalne vrijednosti ili primjerice sliku valova. Također potrebno je unaprijed zadati koji se izvještaji i grafovi žele dobiti, koji će prikazivati vrijednosti veličina definiranih izvještajem u ovisnosti o fizikalnom vremenu. Na tim grafovima moguće je vidjeti konvergenciju neke fizikalne veličine.

#### 5.1.1. Prizori

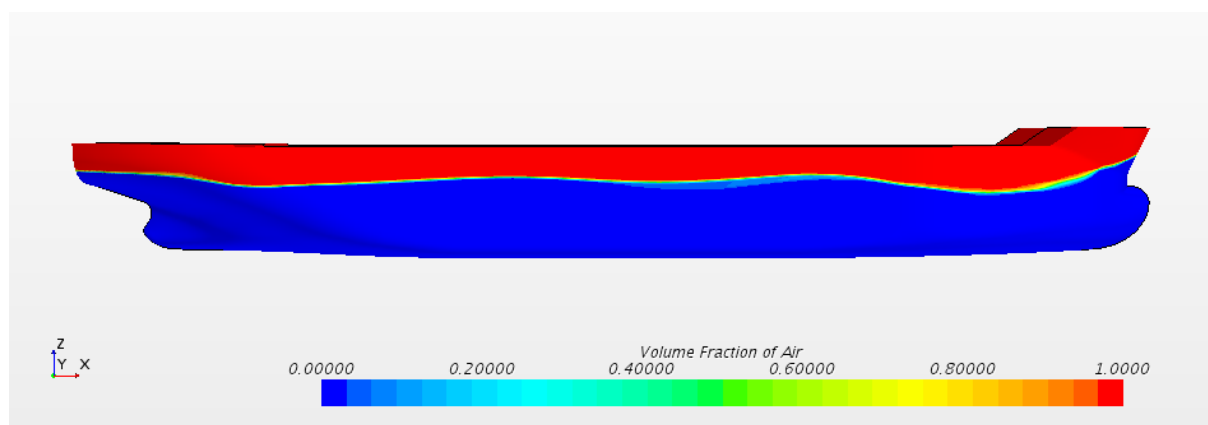
Kako bi se moglo ocijeniti kvaliteta mreže napravljeni su kao što je već napomenuto prizori parametara *Convective Courant number* i *Wall  $y^+$* .

Napravljen je i prikaz slobodne površine, a kao parametar koji će se prikazivati izabran je volumni udio zraka (eng. *Volume fraction of air*), odnosno ovaj parametar prikazuje koliki je udio zraka u pojedinom volumenu. Kada vrijednost ovog parametra iznosi 1, volumen je ispunjen zrakom, a ukoliko iznosi 0, volumen je ispunjen vodom. Slika 29 prikazuje izgled slobodne površine kod  $Fn=0,2117$ , dobivenu proračunom koristeći finu mrežu.



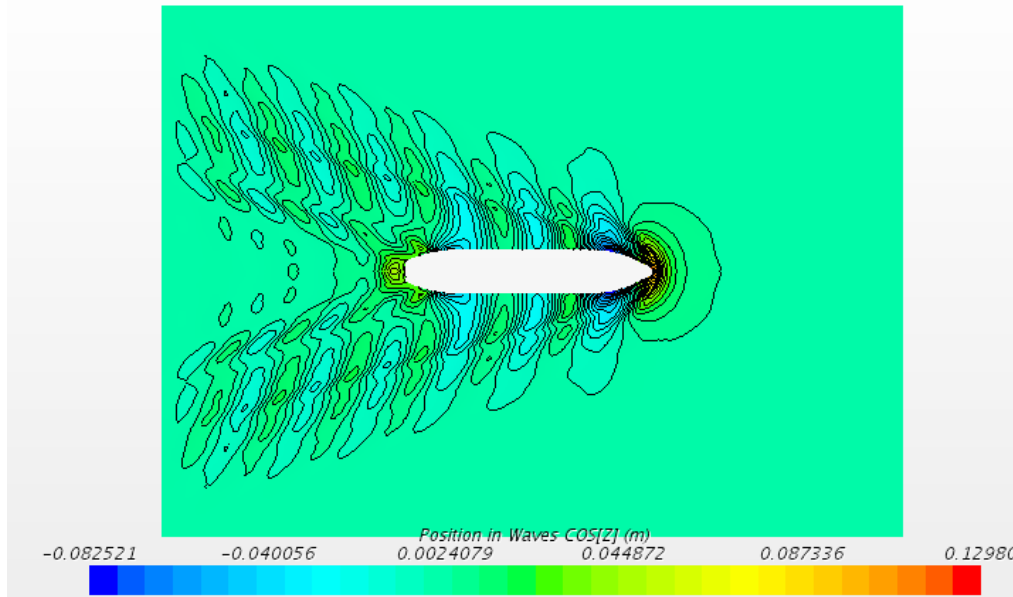
**Slika 29** Izgled slobodne površine kod  $Fn=0,2117$

Koristeći ovaj parametar moguće je prikazati položaj slobodne površine na trupu broda, a to prikazuje slika 30, koja je dobivena koristeći finu mrežu za  $Fn=0,2117$ . Na ovoj slici moguće je uočiti kako pramčani i krmeni sustav valova započinju brijegom, dok sustav valova pramčanog i krmenog ramena započinju dolom, kao što je navedeno u potpoglavlju 2.1.3.



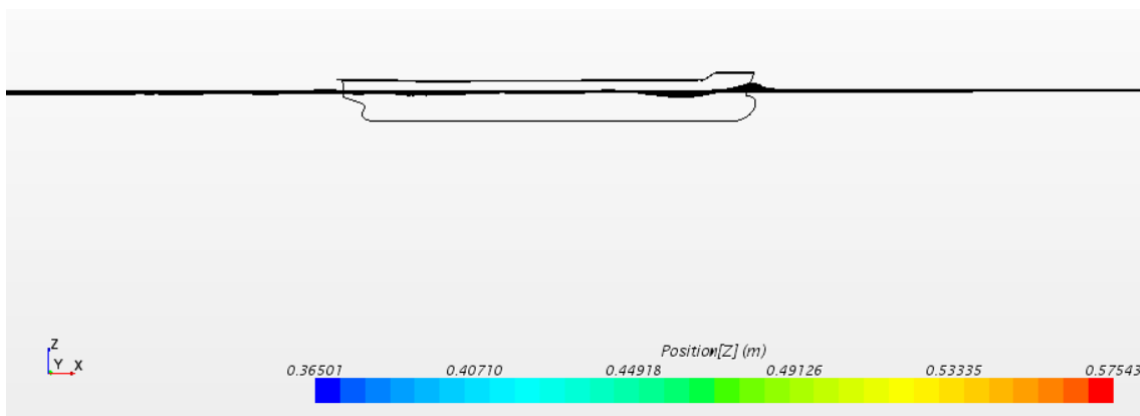
**Slika 30** Položaj slobodne površine na trupu broda

Također dana je i slika valova. Ovo se postiglo kreiranjem izopovršine. Izopovršina je površina koja predstavlja konstantan iznos nekog parametra [22]. Ovdje je kao parametar korišten volumenski udio vode te je postavljena izovrijednost 0,5. Tako će se na izopovršini vidjeti samo oni volumeni koje imaju volumenski udio vode 0,5, odnosno vidjet će se tlocrt slobodne površine. Također izolinijama su povezane one vrijednosti koje se nalaze na istim visinama u odnosu na referentni koordinatni sustav. Slika 31 prikazuje sliku valova pri  $Fn=0,2117$  dobivenu proračunom koristeći finu mrežu.



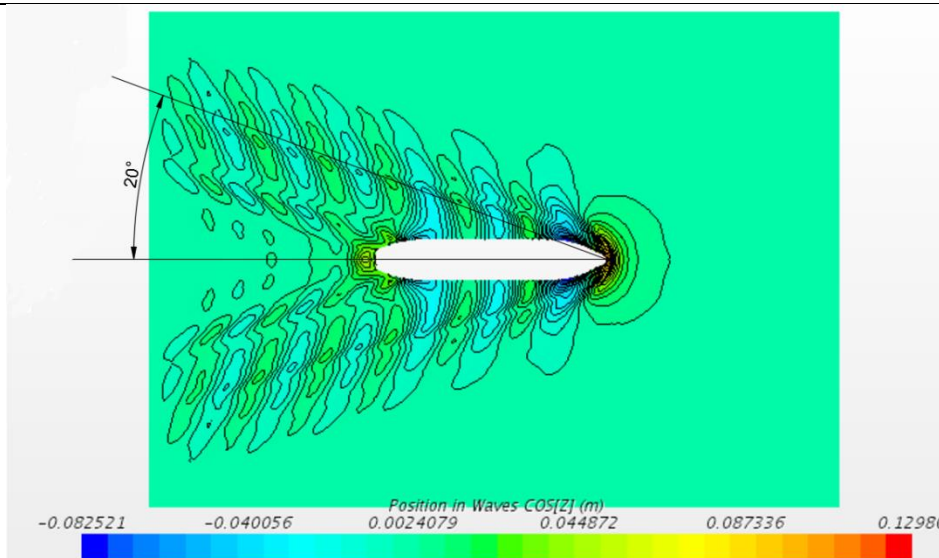
**Slika 31 Slika valova pri  $Fn=0,2117$  (fina mreža)**

Može se uočiti na slici 31 kako je za referentni koordinatni sustav odabran koordinatni sustav s ishodištem na vodnoj liniji. Slika 32 prikazuje izopovršinu s boka dobivenu za grubu mrežu pri  $Fn=0,2117$ . Ovdje se može uočiti kako je za referentni koordinatni sustav odabran koordinatni sustav s ishodištem na kobilici.



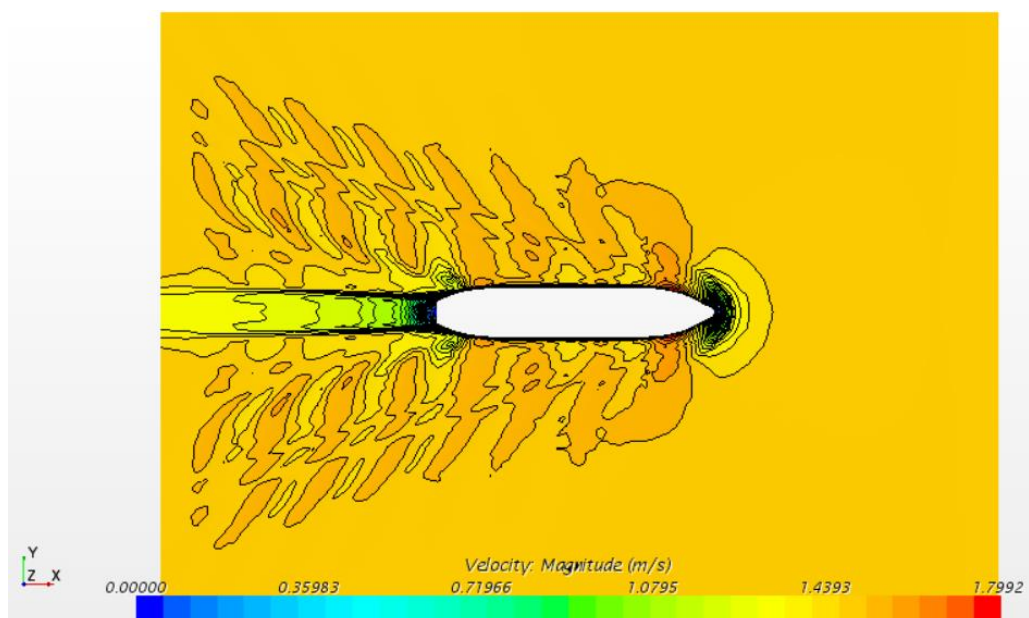
**Slika 32 Prikaz valova pri  $Fn=0,2117$  s boka (gruba mreža)**

Kao što je već napomenuto u potpoglavlju 2.1.3, brodski valni sustav sastoji se od razilaznih i poprečnih valova, što je moguće uočiti na slici 31. Kelvinov kut opisan u potpoglavlju 2.1.3. prikazan je na slici 33 koja prikazuje sliku valova pri  $Fn=0,2117$ .

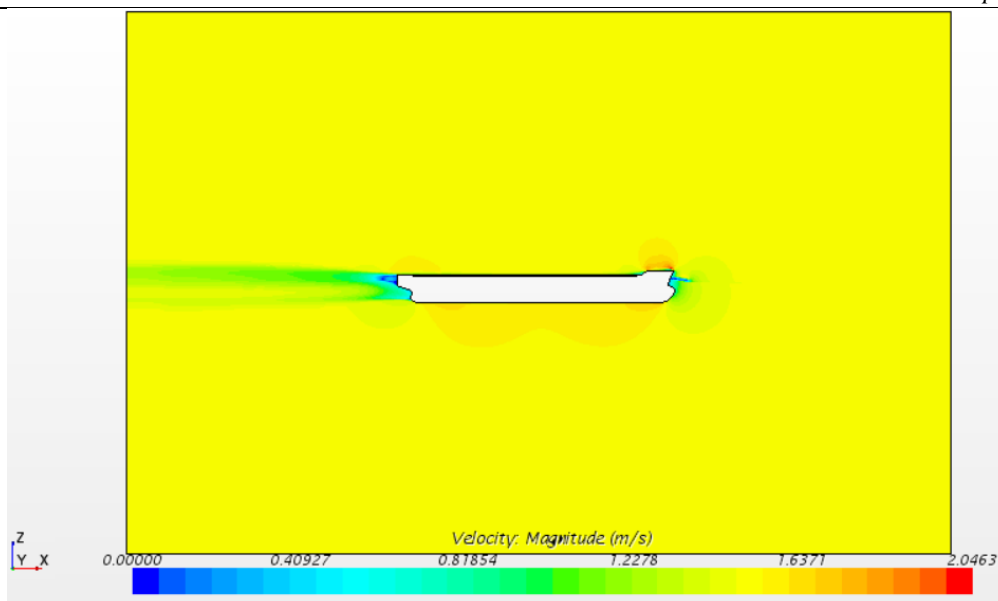


**Slika 33 Kelvinov kut dobiven finom mrežom**

Prikaz polja brzine napravljen je za izopovršinu te ravninu simetrije, a prikazan je na slikama 34 i 35. Slike su dobivene koristeći finu mrežu za  $Fn=0,1926$ . Na slici 34 moguće je uočiti hidrodinamički trag iza broda, odnosno područje strujanja s vrlo značajnim učincima viskoznosti. Unutar ovog područja, promjene brzina strujanja slične su promjenama u graničnom sloju. Hidrodinamički trag sadržava uz turbulenciju nastalu u graničnom sloju i krupne vrtloge (ukoliko krmni dio broda nije dobro oblikovan) [1].

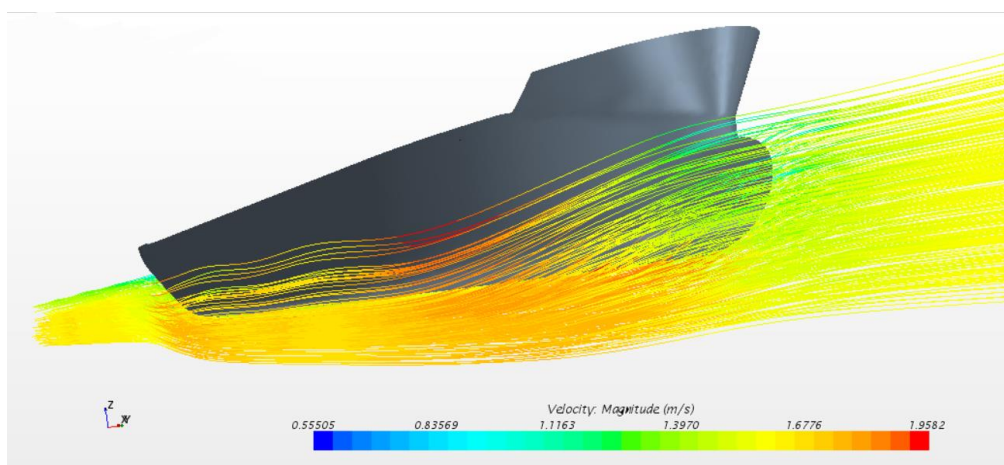


**Slika 34 Polje brzine na izopovršini**



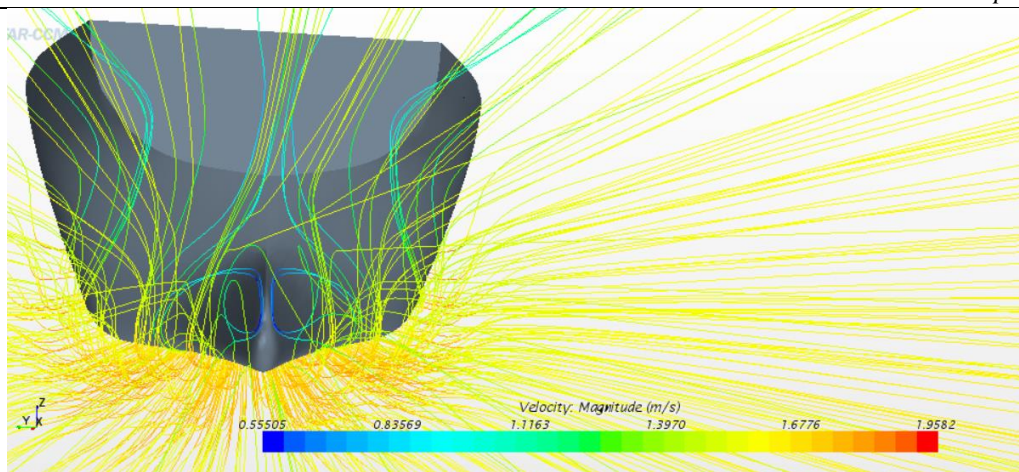
**Slika 35 Polje brzine na ravni simetrije**

Napravljen je i prikaz strujnica duž trupa broda. Strujnice su zamišljene krivulje kojima se u svakoj točki smjer tangente poklapa sa smjerom vektora brzine [19]. Ovo se postiglo kreiranjem izvedenih dijelova (eng. *derived parts*) – strujnica te kreiranjem novog prizora koji sadržava 200 strujnica (prikazane samo strujnice oko trupa broda). Na slikama 36, 37 i 38 prikazane su strujnice iz raznih pogleda za  $Fn=0,2117$ . Moguće je uočiti pad brzine strujanja iza krme broda, kao i ispred pramca.

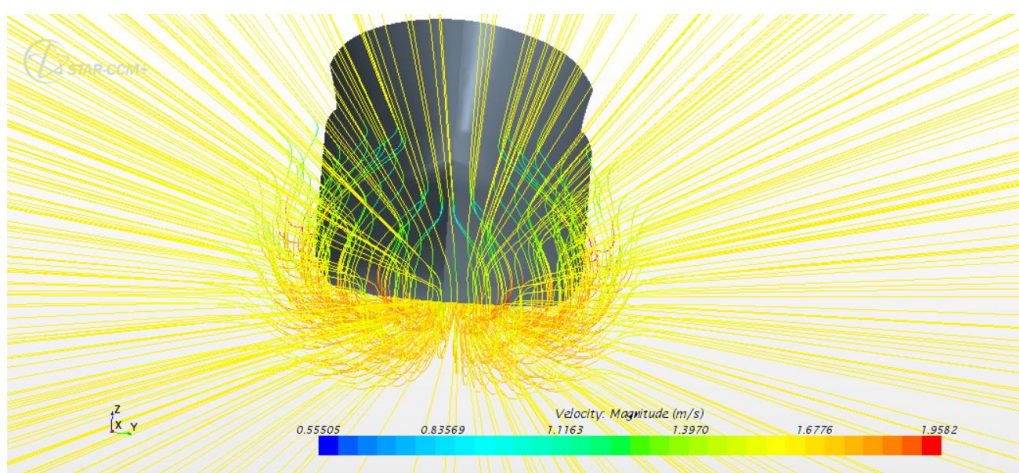


**Slika 36 Slika strujnica (pogled s boka)**





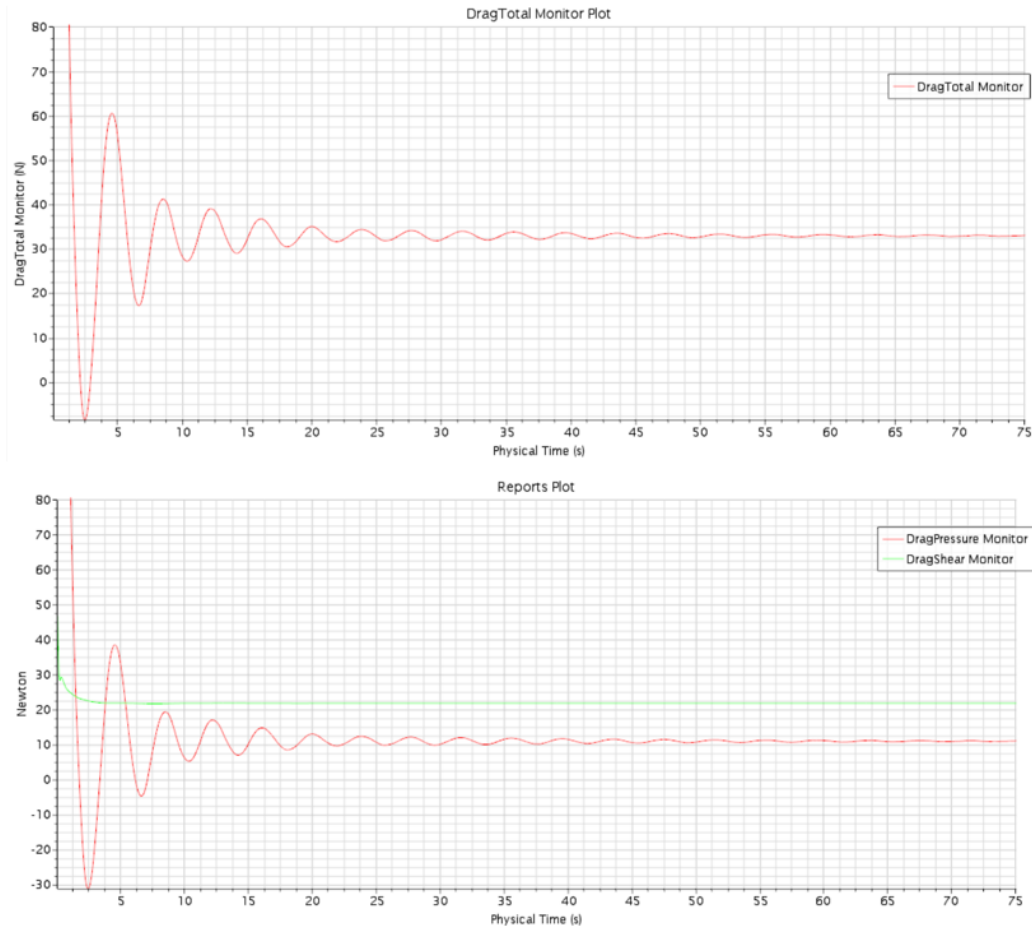
Slika 37 Slika strujnica (pogled na krmu)



Slika 38 Slika strujnica (pogled na pramac)

### 5.1.2. Grafovi

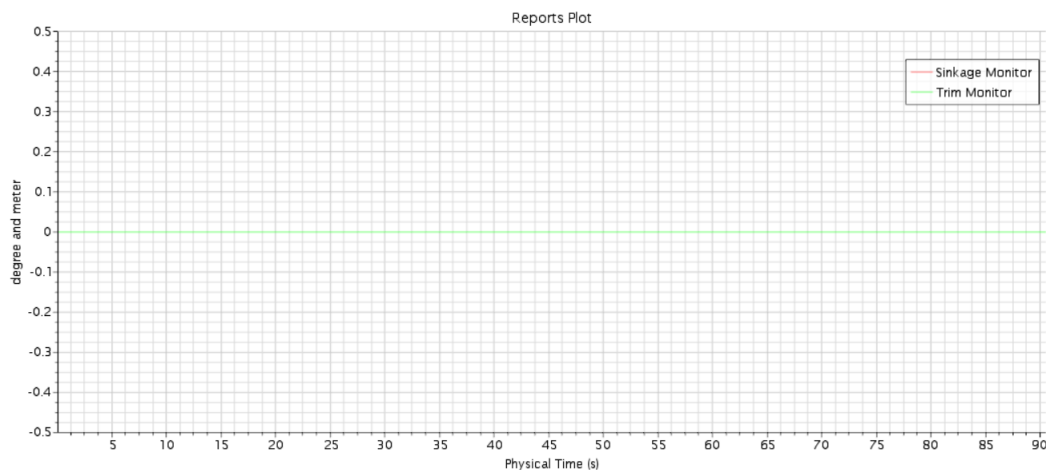
Kako bi se dobila vrijednost sile otpora modela broda za neku brzinu potrebno je napraviti izvještaj. Napravljeni su izvještaji za silu otpora tlaka, silu otpora trenja te ukupnu silu otpora. Dakle, ukupna sila otpora podijeljena je na silu prouzrokovanu normalnom komponentom tlaka te tangencijalnom komponentom tlaka. Za te izvještaje potom su napravljeni grafički prikazi. Slika 39 prikazuje graf ukupne sile otpora, te graf sile otpora tlaka i sile otpora trenja za  $Fn=0,2117$  dobiven primjenom grube mreže.



**Slika 39** Grafovi sile otpora dobiveni grubom mrežom za  $Fn=0,2117$

Na slici 39 moguće je uočiti konvergenciju sile otpora kako se fizičko vrijeme povećava. Važno je naglasiti kako je na slici 39 dan prikaz sile otpora koja djeluje na polovicu trupa te je stoga potrebno pomnožiti vrijednost s dva kako bi se dobila vrijednost sile otpora modela broda.

Moguće je promatrati i dinamički trim, odnosno uron/izron. Kako je tijelu spriječeno ikakvo gibanje, trim i uron/izorn bit će jednaki nuli.



**Slika 40** Trim i uron/izron dobiven grubom mrežom za  $Fn=0,2117$

## 5.2. Rezultati i usporedba rezultata

Kriterij zaustavljanja proračuna bio je kada fizičko vrijeme dosegne  $20T$ , iako su se reziduali svakim korakom iteracije smanjivali, a prema uputama [29].

U nastavku bit će dani dobiveni rezultati te prikazane slike valova, i drugi prikazi za pojedine brzine. Sila otpora za pojedinu brzinu dobivena je izvozom (eng. *export*) podataka o sili otpora. Izračunata je srednja vrijednost sile otpora, ali uzimajući u obzir samo vrijednosti posljednjih 20% fizičkog vremena prema [22]. Tablica 10 prikazuje dobivene rezultate koristeći tri različite mreže.

**Tablica 10 Rezultati sile otpora**

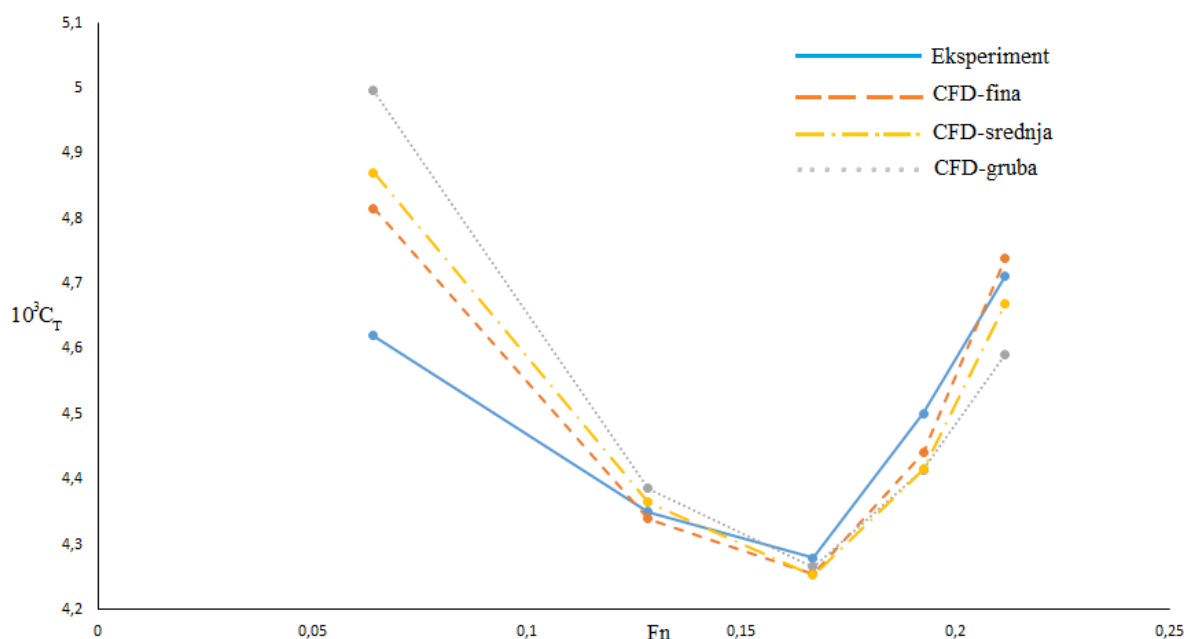
$F_n$	$v$ [m/s]	$R_T$ [N]		
		Gruba mreža	Srednja mreža	Fina mreža
0,0642	0,5001	6,5888	6,4234	6,3506
0,1283	0,9999	23,1215	23,0104	22,8795
0,1669	1,3002	38,0282	37,9125	37,9339
0,1926	1,5008	52,4346	52,4478	52,7412
0,2117	1,6499	65,9088	67,0363	68,0409

U tablici 11 prikazana je usporedba rezultata dobivenih numeričkim proračunom s eksperimentalnim rezultatima [24]. Ukoliko je postotak pozitivan, numeričkom simulacijom dobiveno je premašivanje izmjerene vrijednosti, a ukoliko je postotak negativan, numeričkom simulacijom dobiveno je podcjenjivanje izmjerene vrijednosti.

**Tablica 11 Usporedba dobivenih rezultata s provedenim mjerenjima**

$F_n$	$v$ [m/s]	$R_T$ [N]	Relativno odstupanje		
		Eksperiment [24]	Gruba mreža	Srednja mreža	Fina mreža
0,0642	0,5001	6,093	+8,137 %	+5,422%	+4,227%
0,1283	0,9999	22,937	+0,804 %	+0,320 %	-0,251 %
0,1669	1,3002	38,147	-0,311 %	-0,615 %	-0,558 %
0,1926	1,5008	53,461	-1,920 %	-1,895 %	-1,346 %
0,2117	1,6499	67,639	-2,558 %	-0,891 %	+0,594 %

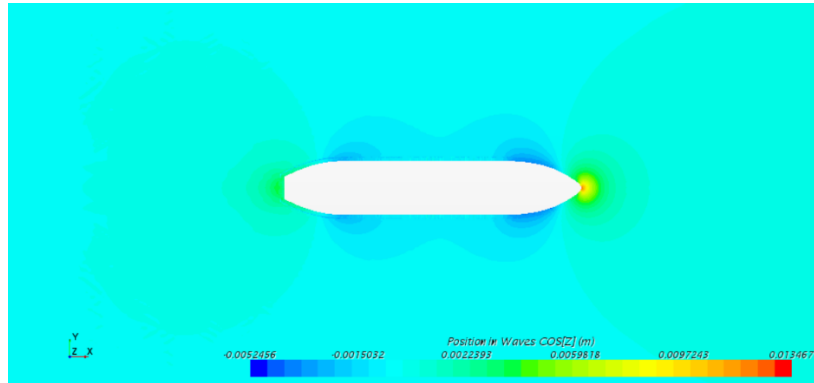
Na slici 41 prikazana je ovisnost koeficijenta ukupnog otpora o Froudeovom broju dobivena modelskim ispitivanjima u bazenu te računalnom simulacijom.



**Slika 41** Ovisnost koeficijenta ukupnog otpora o Froudeovom broju

Na slici 41 moguće je uočiti vrlo dobro poklapanje rezultata numeričke simulacije s modelskim ispitivanjima. Najveća dobivena razlika dobivena je za najnižu vrijednost Froudeovog broja. Ova razlika znatnije odstupa od rezultata mjerenja, čak i za finu mrežu, od ostalih rezultata. Kod grube mreže ovo odstupanje iznosi +8,137%, kod srednje iznosi 5,422%, dok kod fine iznosi +4,227%. Promatrajući rezultate otpora tlaka i otpora trenja pri ovoj vrijednosti Froudeovog broja moguće je uočiti kako profinjavanjem mreže, otpor tlaka pada s vrijednosti 1,5162 N kod grube mreže na 1,3416 N kod fine mreže, što gledajući omjer otpora tlaka grube mreže i otpora tlaka fine mreže iznosi +13%. Otpor trenja dobiven grubom mrežom kod ovog Froudeovog broja iznosi 5,0726 N, dok kod fine mreže iznosi 5,009 N, što gledajući omjer otpora trenja grube mreže i otpora trenja fine mreže iznosi +1,34%. Stoga je moguće zaključiti kako bi se daljnjim profinjavanjem mreže ukupni otpor smanjivao. Također je važno napomenuti kako niti fina mreža nije bila dovoljna za dobiti ispravnu sliku valova kod ovako male vrijednosti Froudeovog broja, što je moguće uočiti i na slici 42. Daljnjim profinjavanjem mreže ova slika valova bila bi nalik onima prikazanim na slici 43, samo sa znatno nižim vrijednostima valne elevacije. Kod ove vrijednosti Froudeovog broja udio otpora tlaka u ukupnom otporu iznosi samo 21,1% u ukupnom otporu (fina mreža). Profinjavanjem mreže,

kao što je već napomenuto postigla bi se točnija vrijednost otpora tlaka, a tako i ukupnog otpora, ali bi se i vrijeme potrebno za proračun također znatno povećalo (primjerice proračun s finom mrežom traje otprilike pet puta duže od proračuna grubom mrežom). Kako je finom mrežom, dobivena razlika oko 4%, ovaj rezultat se može smatrati prihvatljivim.

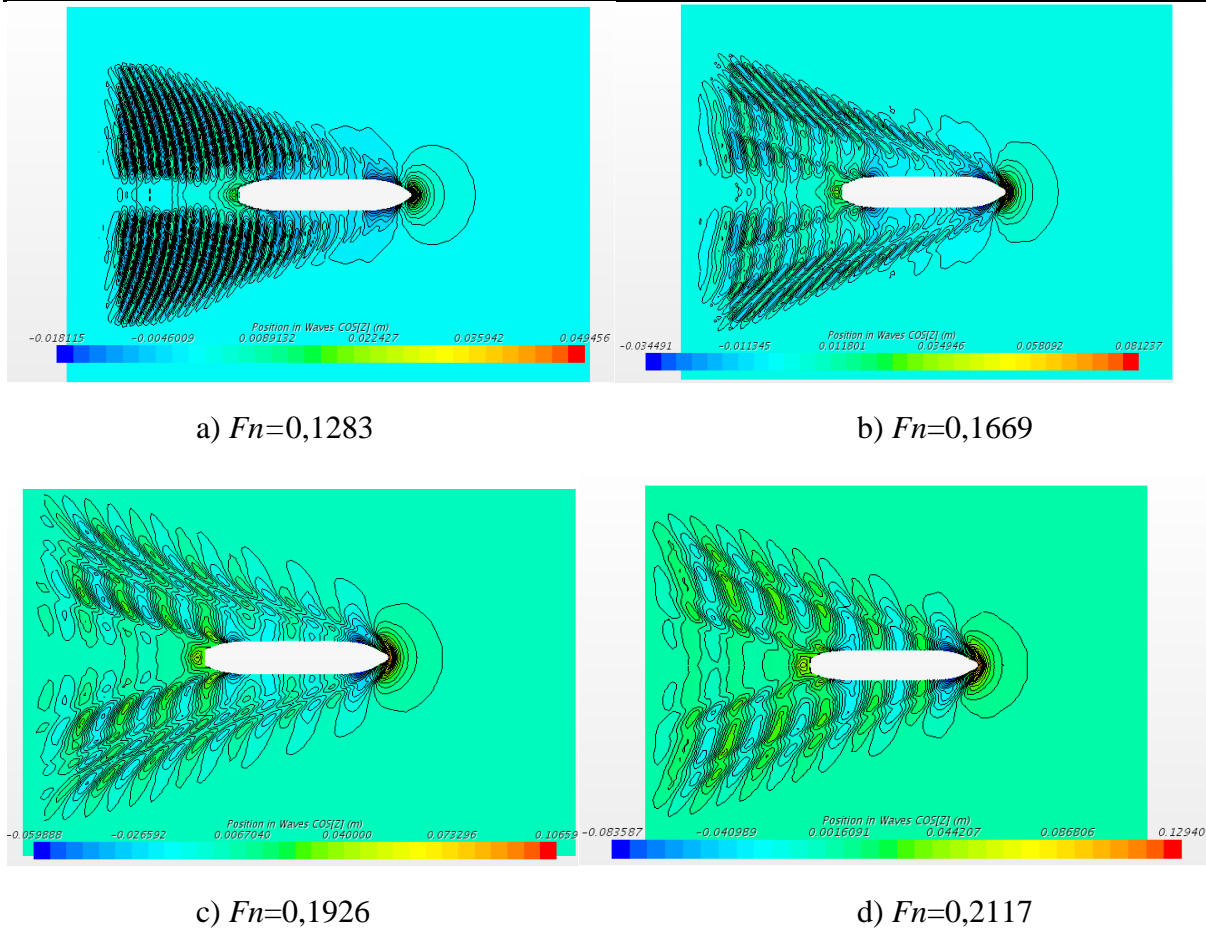


**Slika 42 Slika valova dobivena finom mrežom pri  $Fn=0,0642$**

Ostale vrijednosti dobivene finom mrežom vrlo se dobro poklapaju s modelskim ispitivanjima. Naime, najveća razlika za ostale vrijednosti Froudeovog broja je 1,346%, što je vrlo zadovoljavajuće te se može zaključiti kako je mreža s otprilike 2,2 milijuna volumena za polovicu broda dovoljna za točnu provedbu numeričke simulacije viskoznog strujanja oko trupa broda u ovom slučaju. Profinjavanjem mreže dobiveni su točniji rezultati, što se i moglo očekivati.

Doprinos otpora tlaka povećava se s 21,1% kod Froudeovog broja 0,0642 na 32,5% kod Froudeovog broja 0,2117.

Slika 43 prikazuje slike valova dobivene numeričkim simulacijama za vrijednosti četiri različite vrijednosti Froudeovih brojeva i to 0,1283, 0,1669, 0,1926, 0,2117 koristeći srednju mrežu.

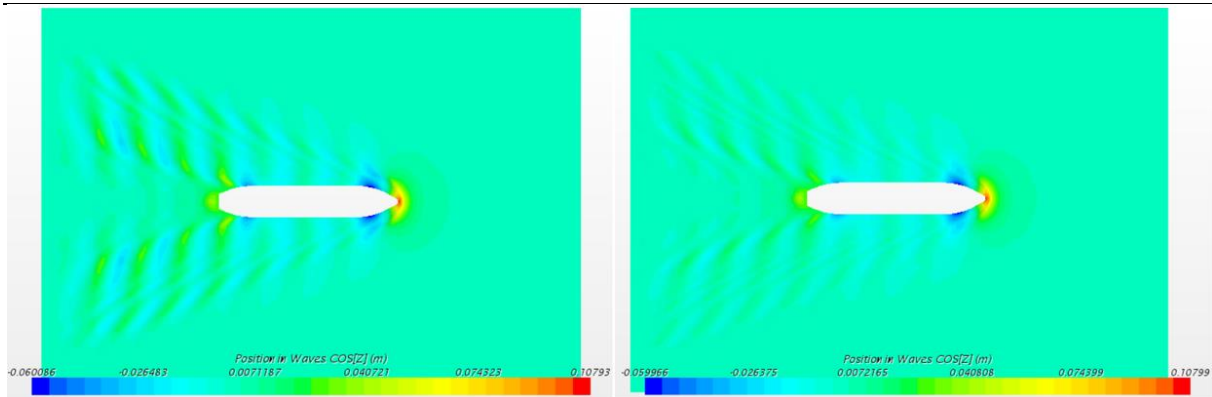


**Slika 43** Slika valova dobivena srednjom mrežom za različite vrijednosti  $Fn$

Najviša proračunata valna elevacija nalazi se na pramcu (pramčani val) kod svih vrijednosti Froudeovih brojeva, a za srednju mrežu iznosi od 49,45 mm za  $Fn=0,1283$  do 129,4 mm za  $Fn=0,2117$ . Za grubu mrežu ove vrijednosti iznose 50,62 mm za  $Fn=0,1283$  te 127,77 mm za  $Fn=0,2117$ , dok za finu mrežu iznose 49,77 mm za  $Fn=0,1283$  te 129,8 mm za  $Fn=0,2117$ . Gledajući vrijednosti valnih elevacija kod ostalih vrijednosti Froudeovih brojeva, može se zaključiti da gruba mreža blago precjenjuje vrijednosti valnih elevacija u odnosu na srednju i finu mrežu (osim u slučaju najvišeg Froudeovog broja). Vrijednosti valne elevacije dobivene srednjom i finom mrežom vrlo su slične. Precjenjivanje vrijednosti valne elevacije dobivene grubom mrežom dobiveno je i u radu *Simulation of flow around KCS-hull* [4].

Minimalna vrijednost proračunate valne elevacije nalazi se u području pramčanog ramena kod svih vrijednosti Froudeovih brojeva, a za srednju mrežu iznosi od -18,12 mm za  $Fn=0,1283$  do -83,59 mm za  $Fn=0,2117$ . Za grubu mrežu ove vrijednosti iznose od -17,61 mm do -82,69 mm, dok za finu mrežu iznose od -18,10 mm do -82,52 mm.

Na slici 44 prikazana je usporedba dobivene slike valova koristeći grubu i finu mrežu pri vrijednosti Froudeovog broja 0,1926.



**Slika 44** Usporedba slike valova dobivene grubom (lijevo) i fine (desno) mrežom za  $Fn=0,1926$

Na slici 44 moguće je uočiti kako su proračunate valne elevacije vrlo slične za ovu vrijednost Froudeovog broja kod grube i srednje mreže. Proračunati otpori tlaka također su shodno tome vrlo slični te za finu mrežu otpor tlaka iznosi 15,5656 N, dok kod grube mreže iznosi 15,6599 N što je razlika od +0,6% gledajući odnos otpora tlaka dobivenog grubom i finom mrežom. Veću razliku moguće je uočiti kod otpora trenja, gdje je koristeći finu mrežu dobiven otpor trenja 37,1756 N, a grubom mrežom je dobiven otpor trenja 36,7747 N, što čini razliku od -1,1% gledajući odnos otpora trenja dobivenog grubom i finom mrežom.

## 6. ZAKLJUČAK

U radu je provedena numerička simulacija viskoznog strujanja oko trupa broda koristeći programski paket STAR-CCM+ za računalnu dinamiku fluida te su dobiveni rezultati uspoređeni s eksperimentalnim rezultatima. Dan je pregled literature vezan uz numeričke simulacije viskoznog strujanja oko trupa broda, matematička osnova numeričkih metoda za simulaciju viskoznog strujanja sa slobodnom površinom te je opisan računalni model gibanja broda na slobodnoj površini vode. Numeričke simulacije provedene su za pet različitih brzina koje odgovaraju Froudeovim brojevima u rasponu  $Fn=0,0642-0,2117$ . Korišten je  $k-\varepsilon$  model turbulencije sa zidnim funkcijama koji se u dosadašnjim istraživanjima pokazao najprikladnijim prilikom numeričkih simulacija sa slobodnom površinom. Volumeni u blizini zida prilagođeni su vrijednostima parametra  $y^+$ , a sve u svrhu postizanja vrijednosti ovog parametra oko 50, jer je u dosadašnjim istraživanjima pokazano da upravo ova vrijednost daje najbolje rezultate. Utjecaj gustoće proračunske mreže je ispitan koristeći tri različite gustoće mreže. Ispitivanje utjecaja gustoće proračunske mreže vrlo je važno, jer se primjenom finijih mreža postižu točniji rezultati, no vrijeme proračuna se znatno povećava. Stoga je potrebno pronaći optimalan broj volumena potreban za opis određenog problema. Rezultati dobiveni numeričkim simulacijama pokazuju zadovoljavajuće slaganje s eksperimentalnim rezultatima s najvećim relativnim odstupanjem za finu mrežu u iznosu od 1,35%, za srednju mrežu 1,9% te za grubu mrežu 2,55%, osim pri najmanjoj vrijednosti Froudeovog broja, za koji je dobiveno relativno odstupanje primjenom fine mreže 4,23%, srednje mreže 5,42% te grube mreže 8,14%. Ovo relativno odstupanje daljnjim profinjavanjem mreže bilo bi smanjeno, ali bi se vrijeme proračuna znatno povećalo. Također, pri malim vrijednostima Froudeovog broja moguće je zanemariti otpor valova te provesti simulaciju duboko uronjenog dvostrukog tijela.

Rezultati pokazuju kako je moguće dobiti zadovoljavajuće slaganje rezultata i primjenom manjeg broja volumena. U daljnjim istraživanjima vezanim uz numeričku simulaciju viskoznog strujanja oko trupa broda trebalo bi ispitati utjecaj izbora modela turbulencije, utjecaj različitog modeliranja u blizini zida te utjecaj mjerila brod-model na rezultate proračuna. Također, trebalo bi ispitati i utjecaj odabira duljine prigušenja valova slobodne površine, s obzirom da je u dosadašnjim radovima pokazano da ova vrijednost utječe na vrijednost otpora tlaka. U konačnici, bilo bi poželjno dati preporuke za izbor svih parametara, uključujući izbor veličine domene, izbor modela turbulencije, izbor pravilnog modeliranja u blizini zida, izbor potrebnog broja volumena, i tako dalje.



**LITERATURA**

- [1] Gamulin, A.: Otpor i propulzija broda, interna skripta FSB-a, Zagreb, 1997.
- [2] Gugić, D. i Slapničar, V.: Osnivanje broda, predavanja, Zagreb, 2001.
- [3] Azcueta Repetto, R.: Computation of Turbulent Free-Surface Flows Around Ships and Floating Bodies, Doktorski rad, Technischen Universitat Hamburg, Hamburg, 2001.
- [4] Enger, S., Perić, M., Perić, R.: Simulation of flow around KCS-hull, Proceedings from Gothenburg 2010-A Workshop on Numerical Ship Hydrodynamics, 2010.
- [5] Launder, B.E., Spalding, D.B.: The numerical computation of turbulent flows. Computer methods in applied mechanics and engineering, 1974., 3(2), 269-289.
- [6] Banks, J., Phillips, A. B. i Turnock, S.: Free surface CFD prediction of components of ship resistance for KCS, 13th Numerical Towing Tank Symposium, Duisburg, 2010.
- [7] Bućan, B., Pedišić Buča, M. i Ružić, S.: Numerical Modelling of the Flow Around the Tanker Hull at Model Scale. Brodogradnja, 2010, 59(2), 117-122.
- [8] Ahmed, Y. i Soares, C. G.: Simulation of free surface flow around a VLCC hull using viscous and potential flow methods. Ocean Engineering, 2009., 36(9), 691-696.
- [9] Hakan Ozdemir, Y., Barlas, B., Yilmaz, T. i Bayraktar, S.: Numerical and experimental study of turbulent free surface flow for a fast ship model. Brodogradnja, 2014., 65(1), 39-54.
- [10] Hochkirch, K. i Mallol, B.: On the importance of full-scale CFD simulations for ships, 11th International conference on computer and IT applications in the maritime industries, COMPIT, 2013.
- [11] Wackers, J., Koren, B., Raven, H.C., van der Ploeg, A., Starke, A.R., Deng, G.B., Queutey, P., Visonneau, M., Hino, T., Ohashi, K.: Free-Surface Viscous Flow Solution Methods for Ship Hydrodynamics, Archives of Computational Methods in Engineering, 2011., 18(1), 1-41.
- [12] Leroyer, A., Wackers, J., Queutey, P. i Guilmineau, E.: Numerical strategies to speed up CFD computations with free surface-Application to the dynamic equilibrium of hulls, Ocean Engineering, 2011., 38(17), 2070-2076.
- [13] Deng, R., Huang, D. B., Zhou, G. L. i Sun, H. W.: Investigation on Some Factors Effecting Ship Resistance Calculation with CFD Code FLUENT [J], Journal of Ship Mechanics, 2013., 17(6), 616-624
- [14] Date, E.: ITTC–Recommended Procedures and Guidelines, 2011.
- [15] Radan, D.: Uvod u hidromehaniku broda, Sveučilište u Dubrovniku, Dubrovnik, 2004.

- [16] Degiuli, N.: Otpor i propulzija broda, podloge za nastavu, <http://www.fsb.hr/zbrodo/>
- [17] Virag, Z., Džijan, I.: Računalna dinamika fluida, skripta-predavanja, FSB, 2014.
- [18] Werner, A.: Odabrana poglavlja iz mehanike fluida, FSB, Zagreb, 2004.
- [19] Degiuli, N., Werner, A.: Mehanika fluida IIB-podloge za nastavu, <http://www.fsb.hr/zbrodo/>
- [20] Ferziger, J.H., Perić, M.: Computational Methods for Fluid Dynamics, Springer Science & Business Media, Berlin, 2012.
- [21] Barbača, L.: Utjecaj promjene oblika daske za jedrenje na sile otpora i uzgona, Diplomski rad, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb, 2012.
- [22] STAR-CCM+, User Guide
- [23] STAR-CCM+, Tutorials/Tutorial Guide/Motion/ Marine Resistance Prediction: KCS Hull with a Rudder
- [24] Brodarski Institut, Pokus tegljenja oštećenog broda i mjerenje ukupnog otpora, Izvještaj broj 6454-M, Zagreb, 2015.
- [25] Voxakis, P.: Ship Hull Resistance Calculations Using CFD Methods, Diplomski rad, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, 2012.
- [26] Ding, Y.: Scale effect on the wake field of a Single Screw Ship, Diplomski rad, Hogskolen Aalesund University Colleague, Alesund, 2015.
- [27] Iacono, M.: Hydrodynamics of Planing Hull by CFD, Diplomski rad, University of Naples Federico II, 2015.
- [28] Tezdogan, T., Incecik, A. i Turan, O.: A numerical investigation of the squat and resistance of ships advancing through a canal using CFD, Journal of Marine Science and Technology, 2016., 21(1), 86-101.
- [29] Perić, M.: Set-Up Recommendations for Simulation of Flow Around Ships, interna komunikacija, 2016.
- [30] Spence, S.: Numerical Investigation of Free Surface Flows, Diplomski rad, Norwegian University of Science and Technology, 2014.
- [31] Perić, R. i Abdel-Maksoud, M.: Reliable Damping of Free-Surface Waves in Numerical Simulations, Ship Technology Research, 2016., 63(1), 1-13.
- [32] Tezdogan, T., Demirel, Y. K., Kellett, P., Khorasanchi, M., Incecik, A. i Turan, O.: Full-scale unsteady RANS CFD simulations of ship behaviour and performance in head seas due to slow steaming. Ocean Engineering, 2015., 97, 186-206.

---

**PRILOZI**

I. CD-R disc