

# Numeričko modeliranje dinamičkih procesa deformiranja tankih bakrenih limova

---

**Pevec, Denis**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2016**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:235:055584>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-04-01**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# **DIPLOMSKI RAD**

**Denis Pevec**

Zagreb, 2016. godina.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# **DIPLOMSKI RAD**

Mentor:

Prof. dr. sc. Zdenko Tonković, dipl. ing.

Student:

Denis Pevec

Zagreb, 2016. godina.

Izjavljujem da sam ovaj rad izradio samostalno koristeći stečena znanja tijekom studija i navedenu literaturu.

Rad je izrađen u suradnji s tvrtkom Yazaki Europe Limited.

Zahvaljujem se mentoru prof. dr. sc. Zdenku Tonkoviću na stručnom vođenju, savjetima i potpori tijekom izrade ovog rada.

Zahvaljujem se Anti Bubalu, mag. ing. mech. na uloženom trudu i nesebično pruženoj pomoći tijekom izrade ovog rada, te ustupljenim materijalima iz svojih znanstvenih istraživanja na kojima se ovaj diplomski rad i temelji.

Zahvaljujem se dr. sc. Martinu Surjaku na pomoći pri provedbi eksperimenata.

Denis Pevec



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE



Središnje povjerenstvo za završne i diplomske ispite  
Povjerenstvo za diplomske ispite studija strojarstva za smjerove:  
procesno-energetski, konstrukcijski, brodostrojarski i inženjersko modeliranje i računalne simulacije

Sveučilište u Zagrebu Fakultet strojarstva i brodogradnje
Datum 07-07-2016.ilog
Klasa: 602-04/16-6/3
Ur.broj: 15-1703-16-275

## DIPLOMSKI ZADATAK

Student: Denis Pevec

Mat. br.: 0035189717

Naslov rada na hrvatskom jeziku: **Numeričko modeliranje dinamičkih procesa deformiranja tankih bakrenih limova**

Naslov rada na engleskom jeziku: **Numerical modeling of dynamic deformation processes of thin copper sheets**

Opis zadatka:

U radu je potrebno provesti numeričko modeliranje dinamičkog procesa deformiranja uzoraka izrađenih iz bakrenih limova debljine 0,8mm usljed tlačenja na servohidrauličkoj kidalici. Pritom su duljina i širina uzoraka jednake 35mm i 15mm. Ispitivanja se provode na način da se šest uzoraka postave jedan na drugi i preko čeličnog prizmatičnog bloka tlače između čeljusti kidalice. Za vrijeme ispitivanja raspodjele pomaka i temperatura na uzorcima mjere se optičkim mjernim sustavom *ARAMIS 4M* koji se temelji na korelaciji digitalne slike, te infracrvenom termografskom kamerom.

Na temelju rezultata vlačnih testova pri različitim brzinama ispitivanja potrebno je odrediti parametre materijala u neizotermnom elastoplastičnom konstitutivnom modelu. Za numeričke analize primijeniti program *Abaqus* koji se temelji na metodi konačnih elemenata. Geometriju uzoraka diskretizirati s dvodimenzijskim konačnim elementima za analizu ravninskog stanja naprezanja. Potrebno je provesti parametarske analize te pokazati utjecaj različitih formulacija za rješavanje problema kontakta i faktora trenja na proces deformiranja. Numerički model validirati usporedbom rezultata numeričkih proračuna s eksperimentalnim mjerenjima.

Potrebni podaci i literatura se mogu dobiti kod mentora.

U radu treba navesti korištenu literaturu i eventualno dobivenu pomoć.

Zadatak zadan:

5. svibnja 2016.

Rok predaje rada:

7. srpnja 2016.

Predviđeni datumi obrane:

13., 14. i 15. srpnja 2016.

Zadatak zadao:

Prof. dr. sc. Zdenko Tonković

Predsjednica Povjerenstva:

Prof. dr. sc. Tanja Jurčević Lulić

## SADRŽAJ

SADRŽAJ .....	I
POPIS SLIKA .....	III
POPIS TABLICA.....	V
POPIS OZNAKA .....	VI
SAŽETAK.....	IX
SUMMARY .....	XI
1. UVOD.....	1
1.1. Cilj rada.....	2
2. TEORIJSKE OSNOVE DINAMIČKOG PROCESA DEFORMIRANJA.....	3
2.1. Termodinamika dinamičkog procesa deformiranja .....	3
2.1.1. Osnovne jednačbe termodinamike [5], [6].....	4
2.1.2. Početni i rubni uvjeti [6] .....	5
2.1.3. Toplinski tok [4] .....	6
2.2. Mehanika elastoplastičnih tijela [7],[8] .....	6
2.2.1. Linearno elastično ponašanje konstrukcije .....	8
2.2.2. Elastoplastično ponašanje konstrukcije [7],[8],[9] .....	9
2.2.3. Toplinske deformacije [6].....	13
2.2.4. Opći zakoni mehanike [7].....	14
3. NUMERIČKO MODELIRANJE DINAMIČKOG PROCESA DEFORMIRANJA .....	16
3.1. Numeričko modeliranje toplinske analize [4],[6] .....	16
3.2. Numeričko modeliranje dinamike deformabilnih tijela [10],[11].....	18
3.2.1. Totalna Lagrangianova formulacija .....	20
3.2.2. Ažurirana Lagrangianova formulacija .....	22
3.2.3. Izvod izoparametarskog kontinuum konačnog elementa.....	22
3.2.4. Implicitna integracija [12].....	24
3.2.5. Eksplicitna integracija [13] .....	26
3.3. Numeričko modeliranje toplinsko-mehaničke analize.....	28
3.3.1. Potpuno spregnuta toplinsko-mehanička analiza s eksplicitnim integratorom (Abaqus/Explicit) [4],[14].....	28
3.3.1.1. Konačni elementi za spregnutu toplinsko-mehaničku analizu (Abaqus/Explicit) [4] .....	30
3.3.1.2. Numeričko modeliranje kontakta kod spregnute toplinsko-mehaničke analize (Abaqus/Explicit) [4],[6],[15] .....	33
4. EKSPERIMENTALNO MODELIRANJE PROCESA DEFORMIRANJA BAKRENIH LIMOVA .....	36
4.1. Mjerenje ovisnosti sile i pomaka čeličnog prizmatičnog bloka.....	37
4.2. Mjerenje pomaka.....	38
5. NUMERIČKI MODEL PROCESA DEFORMIRANJA BAKRENIH LIMOVA.....	40
5.1. 3D numerički model.....	41
5.1.1. Parametarsko ispitivanje na 3D modelu .....	45

---

5.2. 2D numerički model.....	51
5.2.1. Usporedba rezultata s 3D numeričkim modelom.....	52
6. ZAKLJUČAK RADA .....	62
LITERATURA.....	64
PRILOZI.....	65

## POPIS SLIKA

Slika 1.1.	Spoj žica i konektora tehnologijom krimpanja žica [2] .....	1
Slika 2.1.	Vanjska površina čvrstog tijela .....	6
Slika 2.2.	Konvencionalni dijagram razvlačenja .....	7
Slika 2.3.	Von Misesova i Tresca ploha tečenja [9] .....	11
Slika 2.4.	Izotropno očvršćenje materijala [9] .....	12
Slika 2.5.	Kinematičko očvršćenje materijala [9] .....	12
Slika 3.1.	Gibanje tijela u Kartezijevom koordinatnom sustavu .....	19
Slika 3.2.	Tok eksplisitnog rješavača za toplinsko-mehaničku analizu .....	29
Slika 3.3.	2D konačni element prvog reda .....	30
Slika 3.4.	Prizmatični konačni element prvog reda .....	32
Slika 3.5.	Vektor naprezanja na površini $\Gamma$ rastavljen na normalnu i tangencijalnu komponentu [15] .....	33
Slika 3.6.	Domena kontakta kod osnovnog kontaktnog algoritma [4] .....	34
Slika 3.7.	Definiranje kontaktnih parova kod algoritma kontaktnog para [4] .....	35
Slika 4.1.	Dimenzije ekperimentalnog modela .....	36
Slika 4.2.	Bakreni limovi postavljeni između dva čelična prizmatična bloka .....	37
Slika 4.3.	Ovisnost sile o pomaku čeličnog prizmatičnog bloka .....	38
Slika 4.4.	Deformirani oblik bakrenih limova .....	39
Slika 5.1.	Konvencionalni dijagram razvlačenja bakra .....	40
Slika 5.2.	Stvarni dijagram razvlačenja bakra .....	41
Slika 5.3.	Rubni uvjeti na 3D modelu .....	42
Slika 5.4.	Numerički model diskretiziran sa 97920 konačni elemenata C3D8RT .....	43
Slika 5.5.	Raspodjela ekvivalentnih naprezanja prema von Misesu [Pa] .....	43
Slika 5.6.	Vertikalni pomak točaka A i B u ovisnosti o vertikalnom pomaku čeličnog prizmatičnog bloka .....	44
Slika 5.7.	Ovisnost sile o pomaku čeličnog prizmatičnog bloka .....	44
Slika 5.8.	Ovisnost vertikalnog pomaka točke A za različite brzine deformiranja o vertikalnom pomaku čeličnog prizmatičnog bloka .....	45
Slika 5.9.	Ovisnost vertikalnog pomaka točke B za različite brzine deformiranja o vertikalnom pomaku čeličnog prizmatičnog bloka .....	46
Slika 5.10.	Ovisnost vertikalnog pomaka točke A za različiti faktor trenja o vertikalnom pomaku čeličnog prizmatičnog bloka .....	47
Slika 5.11.	Ovisnost vertikalnog pomaka točke B za različiti faktor trenja o vertikalnom pomaku čeličnog prizmatičnog bloka .....	48
Slika 5.12.	Raspodjela ekvivalentne plastične deformacije za model 1 .....	48
Slika 5.13.	Raspodjela ekvivalentne plastične deformacije za model 2 .....	49
Slika 5.14.	Raspodjela ekvivalentne plastične deformacije za model 3 .....	49
Slika 5.15.	Raspodjela temperature za modela 1 .....	50
Slika 5.16.	Raspodjela temperature za modela 2 .....	50
Slika 5.17.	Raspodjela temperature za modela 3 .....	50
Slika 5.18.	Rubni uvjeti na 2D modelu .....	51
Slika 5.19.	Numerički model diskretiziran s 2016 konačni elemenata CPE4RT .....	52
Slika 5.20.	Ovisnost vertikalnog pomaka točke A o vertikalnom pomaku čeličnog prizmatičnog bloka za različite brzine deformiranja .....	52



---

Slika 5.21. Ovisnost vertikalnog pomaka točke B o vertikalnom pomaku čeličnog prizmatičnog bloka za različite brzine deformiranja .....	53
Slika 5.22. Raspodjela ekvivalentne plastične deformacije po presjeku A-A za 3D model 1 .	53
Slika 5.23. Raspodjela ekvivalentne plastične deformacije za 2D RN model 1 .....	54
Slika 5.24. Raspodjela ekvivalentne plastične deformacije za 2D RD model 1 .....	54
Slika 5.25. Ovisnost vertikalnog pomaka točke A o vertikalnom pomaku čeličnog prizmatičnog bloka za iznos faktora trenja modela 1 .....	55
Slika 5.26. Ovisnost vertikalnog pomaka točke B o vertikalnom pomaku čeličnog prizmatičnog bloka za iznos faktora trenja modela 1 .....	55
Slika 5.27. Raspodjela ekvivalentne plastične deformacije po presjeku A-A za 3D model 2 .	56
Slika 5.28. Raspodjela ekvivalentne plastične deformacije za 2D RN model 2 .....	56
Slika 5.29. Raspodjela ekvivalentne plastične deformacije za 2D RD model 2 .....	57
Slika 5.30. Ovisnost vertikalnog pomaka točke A o vertikalnom pomaku čeličnog prizmatičnog bloka za iznos faktora trenja modela 2 .....	57
Slika 5.31. Ovisnost vertikalnog pomaka točke B o vertikalnom pomaku čeličnog prizmatičnog bloka za iznos faktora trenja modela 2 .....	58
Slika 5.32. Raspodjela ekvivalentne plastične deformacije po presjeku A-A za 3D model 3 .	58
Slika 5.33. Raspodjela ekvivalentne plastične deformacije za 2D RN model 3 .....	59
Slika 5.34. Raspodjela ekvivalentne plastične deformacije za 2D RD model 3 .....	59
Slika 5.35. Ovisnost vertikalnog pomaka točke A o vertikalnom pomaku čeličnog prizmatičnog bloka za iznos faktora trenja modela 3 .....	60
Slika 5.36. Ovisnost vertikalnog pomaka točke B o vertikalnom pomaku čeličnog prizmatičnog bloka za iznos faktora trenja modela 3 .....	60

## **POPIS TABLICA**

Tablica 5.1. Modeli za parametarsko modeliranje ..... 46

## POPIS OZNAKA

Oznaka	Jedinica	Opis
$A$	$m^2$	površina
$\mathbf{B}_L$	-	linearna matrica veze između pomaka i deformacija
$\mathbf{B}_{NL}$	-	nelinearna matrica veze između pomaka i deformacija
$c$	$\frac{J}{kgK}$	specifični toplinski kapacitet
$C_{ijkl}$	-	konstitutivni tenzor
$D_{ijkl}$	-	tenzor elastičnosti
$D_{ijkl}^p$	-	plastični tenzor krutosti
$D_{ijkl}^{ep}$	-	elastoplastični tenzor krutosti
$e_{ij}$	-	linearni dio Green-Kirchhoffovog tenzora deformacije
$E$	W	energija
$\mathbf{f}$	-	vektor obujamnih sila
$g$	-	funkcija ograničenja
$I_{\sigma_1}, I_{\sigma_2}, I_{\sigma_3}$	-	invarijante tenzora naprezanja
$k$	-	materijalno svojstvo
$\mathbf{K}$	-	matrica krutosti
$\mathbf{K}_L$	-	linearna matrica krutosti
$\mathbf{K}_{NL}$	-	nelinearna matrica krutosti
$\mathbf{K}_T$	-	tangencijalna matrica krutosti
$\mathbf{K}_{TP}$	-	matrica temperature provodljivosti
$l$	m	duljina
$\mathbf{N}$	-	matrica funkcije oblika
$p$	$\frac{N}{m^2}$	hidrostatički tlak
$\mathbf{R}$	-	vektor vanjskih čvornih sila
$S_{ij}$	$\frac{N}{m^2}$	devijatorski tenzor naprezanja
$\mathbf{q}$	-	<i>Back stress</i> tenzor
$\mathbf{q}_f, q_j$	-	Vektor gustoće toplinskog toka
$q_s$	$\frac{J}{m^2}$	površinska gustoća toplinskog toka
$q_v$	$\frac{J}{m^3}$	volumenska gustoća toplinskog toka

$S_{ij}$	-	drugi Piola-Kirchhoffov tenzor naprezanja
$T$	K	temperatura
$t$	s	vrijeme
$\Delta t$	s	inkrement vremena
$\mathbf{t}$	-	vektor površinskih sila
$u$	$\frac{\text{J}}{\text{kg}}$	unutarnja energija
$\dot{u}$	-	promjena unutarnje energije u vremenu
$u_i$	-	vektor pomaka
$\mathbf{u}$	-	vektor pomaka
$\dot{\mathbf{u}}$	-	vektor brzine
$\ddot{\mathbf{u}}$	-	vektor ubrzanja
$\Delta \mathbf{u}$	-	vektor inkrementa pomaka
$\mathbf{v}$	-	vektor brzine
$\mathbf{V}, u_i^k$	-	Vektor čvornih pomaka
$x_i$	-	vektor koordinata
$Y$	-	izotropno očvršćenje
$x, y, z$	-	Kartezijske koordinate
$\lambda, G$	-	Lameove konstante
$\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$	$\frac{\text{W}}{\text{mK}}$	koeficijent toplinske vodljivosti
$\rho$	$\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$	gustoća
$\dot{\rho}$	-	promjena gustoće u vremenu
$\varepsilon$	-	deformacija
$\varepsilon_{kl}^{el}$	-	tenzor plastične deformacije
$\varepsilon_{kl}^{pl}$	-	tenzor plastične deformacije
$\varepsilon_{ij}^t$	-	toplinska deformacija
$d\varepsilon_{ij}$	-	inkrement ukupne deformacije
$d\varepsilon_{ij}^e$	-	inkrement elastične deformacije
$d\varepsilon_{ij}^p$	-	inkrement plastične deformacije
$\dot{\varepsilon}_{ij}$	-	tenzor brzine deformacije
$\gamma$	-	kutna deformacija
$\eta_{ij}$	-	nelinearni dio Green-Kirchhoffovog tenzora deformacije
$\kappa$	-	parametar očvršćenja
$\sigma_0$	$\frac{\text{N}}{\text{m}^2}$	konvencijonalno naprezanja
$\sigma_{ij}, \mathbf{S}$	$\frac{\text{N}}{\text{m}^2}$	tenzor naprezanja

---

$\sigma_{ij}^0$	$\frac{\text{N}}{\text{m}^2}$	hidrostatički tenzor naprežanja
$d\sigma_{ij}$	-	inkrement tenzora naprežanja
$\tau_{ij}$	$\frac{\text{N}}{\text{m}^2}$	Cauchyev tenzor naprežanja
$\tau_{\max}$	$\frac{\text{N}}{\text{m}^2}$	maksimalno tangencijalno naprežanje
$\omega$	-	vlastita frekvencija sustava
$\mathfrak{R}$	-	virtualni rad sila

## SAŽETAK

Ključne riječi: krimpanje, metoda konačnih elemenata, dinamičko deformiranje, bakreni limovi

Krimpanje je jedan od osnovnih postupaka spajanja žica i konektora koji se vrlo često koristi zbog svoje jednostavnosti, pouzdanosti i niskih troškova. Ostvaruje se deformiranjem konektora u kojem se pojavljuju plastične deformacije koje omogućuju čvrsti spoj između žica i konektora. Cilj je ostvariti kvalitetan kontakt između konektora i žica uz odgovarajuću vlačnu čvrstoću. Računanje potrebne plastične deformacije konektora kod koje se ostvaruje kvalitetan spoj najčešće se provodi metodom konačnih elemenata. Točnost numeričkog proračuna ovisi o ispravnom postavljanju numeričkog modela, a provjerava se validacijom, odnosno verifikacijom. Kako je eksperimentalno modeliranje procesa krimpanja žica i mjerenje fizikalnih veličina vrlo složeno, validacija numeričkog modela provedena je dinamičkim deformiranjem šest bakrenih limova postavljenih jedan na drugi. Tijekom deformiranja bakrenih limova provedeno je mjerenje raspodjele pomaka i temperature modela. Rezultati dobiveni numeričkom analizom u računalnom paketu Abaqus su uspoređeni s eksperimentalnim mjerenjima. Kako bi se smanjilo računalno vrijeme, geometrija uzoraka diskretizirala se s 2D konačnim elementima te su rezultati uspoređeni s 3D numeričkim modelom.

Rad se sastoji od šest poglavlja. U prvom poglavlju dan je kratki uvod i osvrt na proces krimpanja. U drugom poglavlju prikazane su teorijske osnove procesa dinamičkog deformiranja s osnovnim jednadžbama prijenosa topline i čvrstoće materijala koji čine matematički model dinamičkog procesa deformiranja, dok su u trećem poglavlju dani temelji numeričkog modela metodom konačnih elemenata. U četvrtom poglavlju opisan je eksperimentalni model dinamičkog procesa deformiranja bakrenih limova i prikazani su rezultati eksperimenta. U petom poglavlju opisan je numerički model dinamičkog procesa deformiranja bakrenih limova s 3D konačnim elementima te je dana usporedba rezultata s eksperimentalnim mjerenjima. Također, prikazan je pojednostavljeni numerički model diskretiziran s 2D elementima. U šestom poglavlju dan je zaključak rada. Zaključeno je da se zbog horizontalnog pomaka čeličnog prizmatičnog bloka rezultati dobiveni u Abaqusu malo razlikuju od eksperimentalnih rezultata. Također, zaključeno je da 2D numerički model dobro

---

opisuje dinamičko deformiranje bakrenih limova te se mogu koristiti za parametarska istraživanja.

## SUMMARY

Key words: crimping, finite element analysis, dynamic deformation, copper sheets

Crimping is one of the basic wire and connector connecting procedures that is commonly used because of its simplicity, reliability and low cost. It is achieved by deforming the connector in which the plastic deformation appears which enables rigid connection between the wires and connector. The aim is to achieve quality contact between the connector and the wires with appropriate tensile strength. Calculation of the required plastic deformation of connectors at which they achieve a good bond is usually carried out by finite element method. The accuracy of numerical calculation depends on the correct numerical modelling and it is checked by the validation or verification. As the experimental modelling of the crimping wire process and measurement of the physical quantities is very complex, validation of numerical model is carried out by the dynamic deformation of six copper plates on top of each other. During the deformation of the copper plates, the displacement and temperature distribution was measured. The results obtained by numerical analysis in the computer package Abaqus were compared with experimental measurements. In order to reduce the computing time, the geometry of samples was discretized with 2D finite elements and the results were compared with the 3D numerical model.

The thesis is divided in six chapters. The first chapter is a brief introduction and overview of the crimping process. In the second chapter, the theoretical foundations of the process of dynamic deformation with the basic equations of heat transfer and strength of materials that makes the mathematical model of the dynamic processes of deformation are shown. Third chapter shows the foundations of numerical modelling using finite element method. The fourth chapter describes the experimental model of dynamic deformation processes of copper sheets and shows the experimental results. The fifth chapter describes the numerical modelling of dynamic deformation processes of copper sheets with 3D finite elements, and gives the result comparison with experimental measurements. Also, a simplified numerical model discretized with 2D elements is shown. The sixth chapter is the conclusion of the thesis. Conclusion follows that due to the horizontal displacement of steel prismatic block results obtained in Abaqus are a bit different from the experimental results. Also, it is

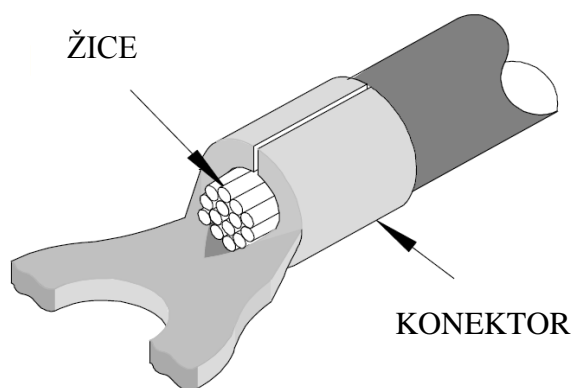


---

concluded that the 2D numerical model describes the dynamic deformation of the copper plates well and can be used for parametric studies.

## 1. UVOD

Oblikovanje deformiranjem je jedan od glavnih postupaka oblikovanja materijala bez odvajanja čestica. Ono postiže visoku dimenzijsku točnost i kvalitetu površine proizvedenih produkata, uz mogućnost proizvodnje specifičnih fizikalnih i mehaničkih svojstava [1]. Spajanje žice i konektora u automobilskoj industriji najčešće se provodi čvrstim spojem koji se postiže deformiranjem konektora. Takva metoda spajanja žica i konektora čvrstim spojem naziva se krimpanje žica. Spajanje žica s konektorom metodom krimpanja sve više zamjenjuje proces lemljenja kod kojeg je potreban unos topline i dodatnog materijala te je dosta složen i skup.



Slika 1.1. Spoj žica i konektora tehnologijom krimpanja žica [2]

Krimpani spoj se sastoji od konektora i žica.

- Konektori su elementi koji omogućuju rastavljivo spajanje električnih veza. Izrađuju se od različitih materijala, te se primjenjuju za različiti broj i debljine žica.
- Žice se povezuju s konektorom, a mogu biti različite debljine i materijala ovisno o primjeni. Obložene su izolatorom koji može biti napravljen od različitog materijala.

Plastično deformiranje konektora omogućuje se primjenom odgovarajućih alata koji mogu biti ručni ili potpuno automatizirani, a to ovisi o primjeni i veličini samih konektora i žica. Postavke definirane na alatu su ključne u osiguravanju kvalitetnog krimpanog spoja [2]. Kontaktno područje između žica i konektora ima ključnu ulogu u električnom provođenju i vlačnoj čvrstoći [3]. Slabi kontakt uzrokuje izvlačenje žica iz konektora, dok prečvrst kontakt

uzrokuje velike deformacije žice zbog koje se također smanjuje vlačna čvrstoća. Za određivanje postavki na alatu i predviđanje konačnog oblika krimpanog spoja koristi se računalna simulacija metodom konačnih elemenata. Prije korištenja određenih konačnih elemenata potrebno je validirati ili verificirati konačne elemente eksperimentom ili već postojećim analitičkim izrazima. Eksperimentalno modeliranje procesa krimpanja žica i mjerenje fizikalnih veličina vrlo je složeno, te je zbog toga validacija elemenata provedena eksperimentalnim modeliranjem procesa deformiranja bakrenih limova što je detaljno opisano u četvrtom poglavlju. Tijekom deformiranja dolazi do gnječenja bakrenih limova što je slično gnječenju bakrenih žica tijekom deformiranja konektora. Za opisivanje procesa deformiranja bakrenih limova korišteni su numerički modeli s 2D i 3D konačnim elementima.

### 1.1. Cilj rada

Cilj ovog rada je validirati 3D numerički model procesa deformiranja bakrenih limova s eksperimentalnim rezultatima, te provjeriti točnost numeričkog modela diskretiziranog 2D elementima. Računalno vrijeme 2D numeričkog modela je puno kraće u odnosu na 3D numerički model što je vrlo bitno kod parametarskih analiza. Također, cilj rada je provjeriti utjecaj faktora trenja i brzine deformiranja na proces deformiranja.

Rad je konceptualno podijeljen u dva dijela. U prvom dijelu rada prikazane su teorijske osnove dinamičkog procesa deformiranja s osnovnim jednadžbama prijenosa topline i elastoplastičnog ponašanja materijala. Nadalje, opisano je numeričko modeliranje dinamičkog procesa deformiranja gdje su dane osnovne jednadžbe metode konačnih elemenata. Dan je opis implicitnog i eksplicitnog integriranja toplinskih jednadžbi i jednadžbi gibanja. Na kraju teorijskih osnova opisani su konačni elementi koji su korišteni u radu.

U drugom dijelu prikazan je eksperiment koji je proveden u Laboratoriju za eksperimentalnu mehaniku Fakulteta strojarstva i brodogradnje Sveučilišta u Zagrebu. Eksperimentalni podaci poslužili su za validaciju numeričkog modela. Zbog horizontalnog pomaka gornjeg čeličnog prizmatičnog bloka, rezultati dobiveni u Abaqusu malo odstupaju od eksperimentalnih rezultata. Također, prikazana je usporedba rezultata 2D numeričkog modela s 3D numeričkim modelom. 2D elementi za ravninsko stanje naprezanja dobro opisuju dinamičko modeliranje bakrenih limova. Na kraju rada dan je zaključak rada.

## 2. TEORIJSKE OSNOVE DINAMIČKOG PROCESA DEFORMIRANJA

Dinamičkim procesom deformiranja omogućuje se oblikovanje sirovog materijala u gotov proizvod kroz mehaničko deformiranje bez dodavanja dodatnog materijala. [1]. Tijekom deformiranja materijal ulazi u plastično područje te se trajno deformira u željeni oblik. Velike brzine deformiranja uzrokuju oslobađanje toplinske energije uslijed pojave plastične deformacije u materijalu.

### 2.1. Termodinamika dinamičkog procesa deformiranja

Toplina je energija koja se prenosi kroz granice sustava kao posljedica temperaturne razlike između sustava i njegovog okoliša. Prijenos topline omogućuje se na tri osnovna načina [5]:

- provođenje ili kondukcija – točke materijala u dodiru na različitim temperaturama gdje toplina prelazi iz područja više u područje niže temperature,
- konvekcija – izmjena topline između stijenke čvrstog tijela i fluida u dodiru i
- zračenje ili radijacija – odvija se bez materijalnog posrednika putem elektromagnetskih valova.

Tijekom dinamičkog procesa deformiranja tankih bakrenih limova, unutar materijala generira se toplinski tok koji ostvaruje lokalni porast temperature. Uslijed razlike temperature unutar materijala dolazi do provođenja topline. Ukoliko je temperatura limova nakon deformiranja viša od temperature okolišnjeg medija, javlja se prijenos topline konvekcijom između okolišnjeg medija i limova. Također, tijekom deformiranja dolazi do trenja između bakrenih limova koji uzrokuje dodatni izvor topline.

Problem prijenosa topline se može razmatrati kao stacionarni ili nestacionarni, te linearni ili nelinearni problem, ovisno o tome da li se rubni uvjeti i/ili fizikalna svojstva materijala ne mijenjaju u vremenu. Kod stacionarnog provođenja topline, rubni uvjeti, toplinski tokovi i toplinski izvori (ponori) ne ovise o vremenu. Ukoliko nije zadovoljen barem jedan od navedenih uvjeta za stacionarno provođenje topline, radi se o nestacionarnom provođenju. Linearni i nelinearni problem se odnosi na ovisnost fizikalnih svojstava o temperaturi gdje kod linearnog problema fizikalna svojstva ne ovise o temperaturi, dok kod nelinearnog problema ovise.

### 2.1.1. Osnovne jednadžbe termodinamike [5], [6]

Jednadžba prvog zakona termodinamike je ključna jednadžba koja se koristi pri analizi termodinamičkih sustava, a može se prikazati u obliku:

$$E_{\text{unesena}} + E_{\text{izvor/ponor}} = E_{\text{prirast}} + E_{\text{iznesena}} , \quad (2.1)$$

gdje je  $E_{\text{unesena}}$  energija koja ulazi u sustav,  $E_{\text{izvor/ponor}}$  toplinski izvor (ponor),  $E_{\text{prirast}}$  prirast unutarnje energije i  $E_{\text{iznesena}}$  energija koja izlazi iz sustava. Jednadžba (2.1) pokazuje da je energija konzervativno svojstvo, odnosno da ne može nestati, ni iz čega nastati, nego prelazi iz jednog oblika u drugi.

Još jedna od ključnih jednadžbi termodinamike je Furierov zakon provođenja topline koji je izražen u obliku

$$q_s = -\lambda \frac{\partial T}{\partial n} , \quad (2.2)$$

gdje je  $\lambda$  koeficijent toplinske vodljivosti, a  $\frac{\partial T}{\partial n}$  temperaturni gradijent. Jednadžba (2.2)

pokazuje da gustoća toplinskog toka ovisi o materijalu i gradijentu temperature. Također, vidljivo je da se toplina u krutini provodi s područja više temperature na područje niže temperature. Postavljanjem prvog zakona termodinamike na diferencijalni element uz korištenje Furierovog zakona dobiva se diferencijalna jednadžba koja opisuje temperaturno polje tijekom provođenja topline s unutarnjim izvorom (ponorom):

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) + q_v = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} , \quad (2.3)$$

gdje je  $q_v$  toplinski izvor (ponor),  $\rho$  gustoća materijala,  $c$  specifični toplinski kapacitet,  $T$  temperatura,  $t$  vrijeme. Jednadžba (2.3) je nelinearna i nestacionarna, a njezino je lineariziranje moguće pretpostavkom homogenosti materijala i neovisnosti materijalnih svojstava o temperaturi. Linearizacijom jednadžbe (2.3) dobiva se

$$\frac{\lambda}{\rho c} \left[ \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right) + \left( \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \left( \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \right] + \frac{q_v}{\rho c} = \frac{\partial T}{\partial t} . \quad (2.4)$$

Rješavanje jednadžbi (2.3) i (2.4) najčešće se provodi numerički jer analitički izrazi postoje za vrlo jednostavne primjere uz uvedena pojednostavljenja.

### 2.1.2. Početni i rubni uvjeti [6]

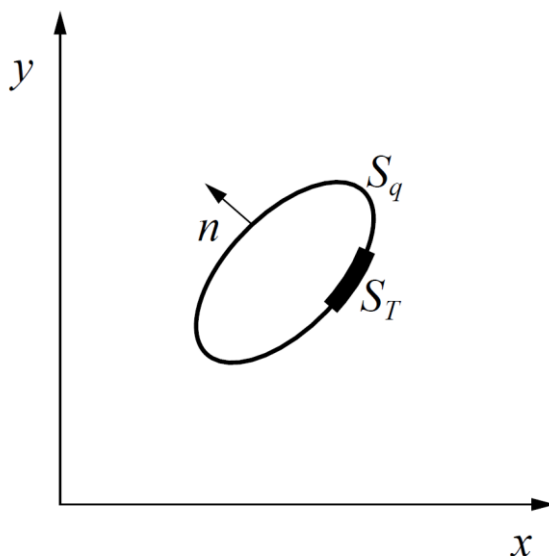
Diferencijalna jednačina ima beskonačno mnogo rješenja, a za rješavanje određenog problema je potrebno definirati početne i rubne uvjete. Početne uvjete je potrebno definirati za probleme koji ovise o vremenu. Za jednačinu (2.3) početni uvjet predstavlja temperaturnu raspodjelu u čvrstom tijelu u početnom trenutku ( $t=0$ ) kao funkciju prostornih koordinata, što se zapisuje kao:

$$T_p = T_p(x, y, z, t=0) . \quad (2.5)$$

Za slučaj stacionarnog provođenja topline ne definira se početni uvjet, već samo rubni uvjet.

Rubni uvjeti opisuju zbivanje između rubnih površina krutog tijela i okoliša. Općenito se dijele u tri vrste:

1. vrste ili Dirichletov rubni uvjet – na vanjskoj površini  $S_T$  (slika 2.1.) u svakom trenutku su definirane temperature:  $T_s = T_s(x, y, z, t)$ ,
2. vrste ili Neumanov rubni uvjet – na vanjskoj površini  $S_q$  (slika 2.1.) u svakom trenutku je zadana gustoća toplinskog toka:  $q_s = q_s(x, y, z, t)$ ,
3. vrste ili Newtonov mješoviti rubni uvjet – vanjska površina je u dodiru s fluidom kroz koju se izmjenjuje topline između krutine i fluida:  $q_s = \alpha(T_s - T_\infty)$ , gdje je  $\alpha$  ukupni koeficijent prijenosa topline koji uključuje konvekcijski dio i dio od zračenja,  $T_s$  je temperatura površine koja je u dodiru s fluidom,  $T_\infty$  temperatura fluida podalje od čvrstog tijela.



Slika 2.1. Vanjska površina čvrstog tijela

### 2.1.3. Toplinski tok [4]

Kao što je već rečeno, kod dinamičkog deformiranja bakrenih limova generira se toplinski tok uslijed trenja između površina i pojavom plastične deformacije. Trenje klizanja pretvara kinetičku energiju u toplinu. Modelira se kao Neumanov rubni uvjet na vanjskoj površini prema izrazu

$$q_s = \eta \tau \dot{\gamma}, \quad (2.6)$$

gdje je  $\tau$  posmično naprezanje koje se javlja uslijed trenja,  $\dot{\gamma}$  brzina klizanja,  $\eta$  koeficijent koji definira udio energije trenja koji prelazi u toplinsku energiju.

Uslijed plastične deformacije dolazi do generiranja toplinskog toka koji se modelira kao volumni toplinski izvor prema izrazu

$$q_v = \eta_v \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{pl}, \quad (2.7)$$

gdje je  $\eta_v$  koeficijent koji ovisi o materijalu,  $\boldsymbol{\sigma}$  tenzor naprezanja,  $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{pl}$  tenzor brzina plastične deformacije. Uzima se u obzir kada su brzine deformiranja velike uz velike deformacije.

## 2.2. Mehanika elastoplastičnih tijela [7],[8]

Većina podataka o mehaničkim, elastičnim i plastičnim svojstvima materijala određuje se eksperimentom rastezanja. Uređaji na kojima se provodi eksperiment rastezanja nazivaju se

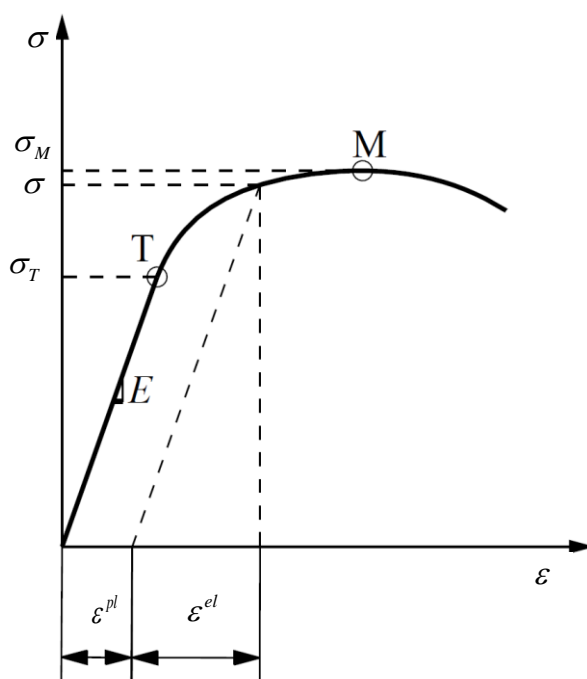
kidalice. Epruvete se od ispitivanog materijala optereće silama, te se bilježi ovisnost sile  $F$  o produljenju  $\Delta l$ . Također, može se pratiti ovisnost konvencionalnog naprezanja

$$\sigma_0 = \frac{F}{A_0} \quad (2.8)$$

i prosječne deformacije

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}, \quad (2.9)$$

gdje je  $A_0$  početna površina epruvete,  $l_0$  početna duljina mjernog dijela epruvete. Dobiveni dijagram se naziva konvencionalni dijagram razvlačenja i prikazan je na slici 2.2.



**Slika 2.2. Konvencionalni dijagram razvlačenja**

Na konvencionalnom dijagramu razvlačenja mogu se uočiti dvije karakteristične točke:

- točka T označava granicu tečenja, odnosno najviše naprezanje  $\sigma_T$  do kojeg se materijal ponaša elastično,
- točka M označava vlačnu čvrstoću, odnosno najviše naprezanje  $\sigma_M$  do kojeg se materijal ponaša stabilno.

Nakon točke M dolazi do lokalnog suženja epruvete, a daljnjim opterećenjem nastupa lom. Pri različitim temperaturama ispitivanja vlačne čvrstoće dobivaju se različiti dijagrami



deformiranja. Materijal se s porastom temperature ponaša duktilnije uz smanjenje granice tečenja, dok sa smanjenjem temperature postaje krući uz povišenje granice tečenja.

### 2.2.1. Linearno elastično ponašanje konstrukcije

Hookeov dijagram opisuje linearno ponašanje konstrukcije, odnosno daje linearnu vezu između teznora naprežanja  $\sigma$  i tenzora deformacije  $\epsilon$  koja se može prikazati sljedećom relacijom:

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl} \epsilon_{kl}^{el}, \quad (2.10)$$

gdje je  $D_{ijkl}$  tenzor elastičnosti četvrtog reda. Za izotropni materijal, tenzor elastičnosti je simetričan i tada vrijedi:

$$D_{ijkl} = D_{jikl} = D_{ijlk}. \quad (2.11)$$

Ovisnost tenzora elastičnosti o linearnim konstantama materijala može se prikazati jednadžbom:

$$D_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + G (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}), \quad (2.12)$$

gdje su  $\lambda$  i  $G$  Laméove konstante, a  $\delta_{ij}$  Kroneckerov delta simbol koji iznosi jedan kada je  $i = j$ , inače je nula. Laméove konstante mogu se zapisati u ovisnosti o modulu elastičnosti i Poissonovom faktoru:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad (2.13)$$

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}.$$

Tenzor naprežanja se sastoji od normalnih i tangencijalnih naprežanja koji se može podijeliti na sferni i devijatorski tenzor naprežanja. Kod izotropnih materijala, sferno naprežanje utječe samo na promjenu veličine promatranog elementa, a ne utječe na promjenu oblika. Naziva se još i hidrostatički pritisak, definiran je izrazom

$$\sigma_{ij}^0 = p = \frac{1}{3} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \frac{1}{3} \sigma_{kk}. \quad (2.14)$$

Devijatorsko naprežanje utječe na promjenu oblika, definiran je izrazom

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - p \delta_{ij}. \quad (2.15)$$

Kod plastičnih deformacija ne dolazi do promjene volumena, već samo do promjene oblika, te se zbog toga kod plastičnih deformacija razmatra samo devijatorski dio naprezanja.

### 2.2.2. Elastoplastično ponašanje konstrukcije [7],[8],[9]

Materijal ulazi u plastično područje kada na njega djeluju sile koje uzrokuju naprezanja veća od granice tečenja. Na slici 2.2. može se vidjeti kako se ukupna deformacija može rastaviti na elastičnu i plastičnu deformaciju, to jest vrijedi izraz

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{el} + \varepsilon_{ij}^{pl}. \quad (2.16)$$

Uvrštavanjem jednadžbe (2.16) u jednadžbu (2.10) dobiva se

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl}(\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^{pl}), \quad (2.17)$$

gdje je  $\sigma_{ij}$  Cauchyjev tenzor naprezanja,  $\varepsilon_{ij}$  Lagrangeov tenzor deformacije. Lagrangeov tenzor deformacije se može zapisati u obliku:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right), \quad (2.18)$$

gdje je  $u_i$  vektor pomak.

Pri jednoosnom stanju materijal ulazi u plastično područje kada se u njemu pojave naprezanja veća od granice tečenja. Pri višeosnom stanju naprezanja, pojavu plastičnih deformacija opisuje funkcija tečenja

$$f = f(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^{pl}, \kappa), \quad (2.19)$$

gdje je  $\kappa$  parametar očvršćenja koji ovisi o promjeni plastične deformacije. U šestodimenzionalnom faznom prostoru, u kojem su koordinate osi šest komponenata naprezanja, jednadžba

$$f(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^{pl}, \kappa) = 0 \quad (2.20)$$

jest implicitna jednadžba zatvorene hiperplohe koja se naziva ploha tečenja. Svako stanje naprezanja u nekoj čestici tijela određeno je jednom točkom u prostoru naprezanja. Ako se ta točka nalazi unutar prostora kojeg omeđuje ploha tečenja, materijal se nalazi u elastičnom području, to jest ako je  $f < 0$ . Materijal se nalazi u plastičnom području ukoliko se točka nalazi na plohi tečenja, to jest ako je  $f = 0$ . Točka se ne može nalaziti izvan plohe tečenja  $f > 0$ . Kod izotropnih elastično – idealnoplastičnih materijala, to jest kod materijala

kod kojih tijekom plastičnog deformiranja ne nastaje očvršćenje materijala, funkcija tečenja ovisi samo o naprezanju

$$f(\sigma_{ij}) = 0. \quad (2.21)$$

Kod izotropnih materijala funkcija tečenja ne ovisi o pravcima glavnih naprezanja, nego samo o glavnim naprezanjima

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0 \quad (2.22)$$

odnosno

$$f(I_{\sigma_1}, I_{\sigma_2}, I_{\sigma_3}) = 0, \quad (2.23)$$

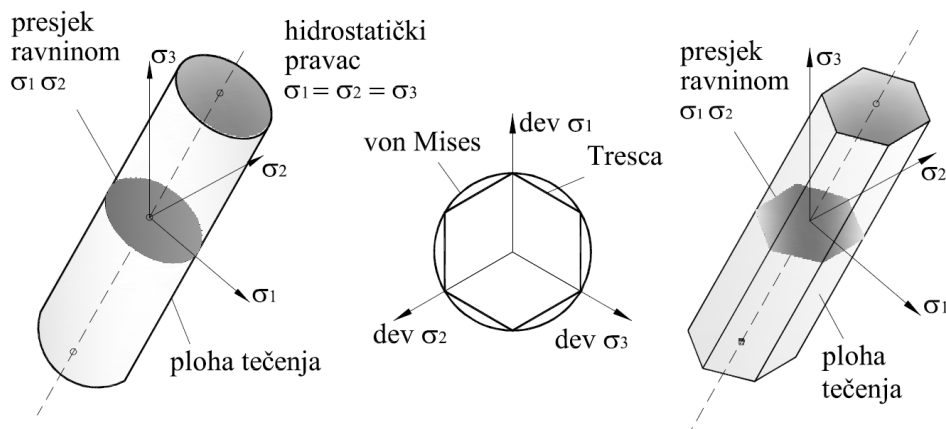
gdje su  $I_{\sigma_1}, I_{\sigma_2}, I_{\sigma_3}$  invarijante tenzora naprezanja. Funkcija tečenja izvodi se preko invarijanti tenzora naprezanja koje su jednake

$$\begin{aligned} I_1 &= \sigma_{ii}, \\ I_2 &= \frac{1}{2} \sigma_{ij} \sigma_{ij}, \\ I_3 &= \frac{1}{2} \sigma_{ij} \sigma_{ik} \sigma_{kl}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Mnogi eksperimenti pokazuju da tečenje materijala ne ovisi o hidrostatskom pritisku, to jest potpuno je neovisno o prvoj invarijanti tenzora naprezanja. Prema tome jednadžba (2.23) prelazi u

$$f(I_{\sigma_2}, I_{\sigma_3}) = 0 \quad (2.25)$$

Iz jednadžbe (2.25) slijedi da posmična naprezanja utječu na pojavu tečenja materijala. Najčešće korišteni kriteriji tečenja materijala su von Misesov i Trescin kriterij tečenja koji se temelje na posmičnom naprezanju. Slika 2.3. prikazuje Von Misesovu i Trescinu plohu tečenja.



Slika 2.3. Von Misesova i Trescina ploha tečenja [9]

Iz slike 2.3. se može vidjeti da von Misesova ploha tečenja ima oblik kružnog cilindra. Kod von Misesovog kriterija tečenja pretpostavlja se da tečenje materijala ovisi samo o drugoj invarijanti tenzora naprežanja, odnosno doći će do tečenja materijala ako druga invarijanta dosegne kritičnu vrijednost. Prema tome jednačba (2.25) kod von Misesovog kriterija prelazi u oblik

$$f(I_{\sigma_2}) = I_{\sigma_2} - k^2 = 0, \quad (2.26)$$

gdje je  $k$  materijalno svojstvo.

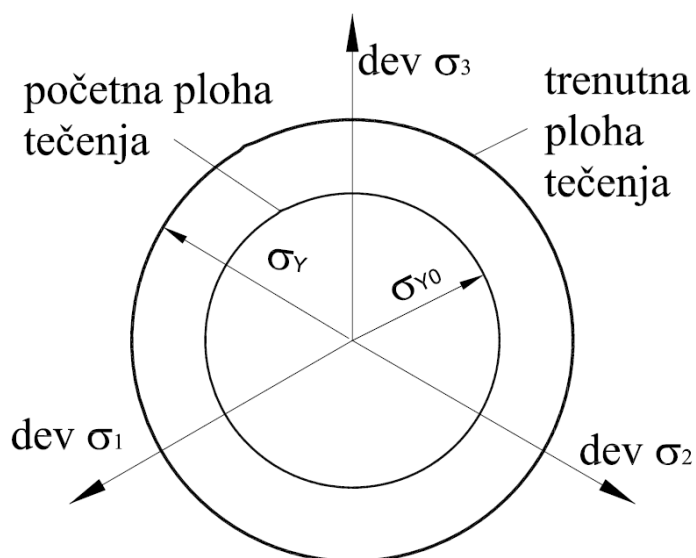
Trescina ploha tečenja ima oblik šesterostrane prizme. Do tečenja materijala dolazi kada naprežanja dosegnu kritičnu vrijednost. Trescin kriterij se može prikazati u obliku

$$f(\tau_{\max}) = \tau_{\max} - k^2 = 0. \quad (2.27)$$

Kriteriji tečenja koje prikazuju jednačbe (2.26) i (2.27) odnose se na izotropne materijale.

Kao što je rečeno, stanje naprežanja se ne može nalaziti izvan plohe tečenja materijala  $f > 0$ , nego kod pojave očvršćenja dolazi do promjene oblika plohe tečenja. Ona se giba i mijenja oblik ovisno o načinu očvršćenja materijala. Za opisivanje mijenjanja položaja plohe tečenja tijekom deformiranja najčešće se koriste dva modela: izotropno očvršćenje i kinematičko očvršćenje.

Kod izotropnog očvršćenja, prilikom plastičnog deformiranja ne dolazi do translacije plohe tečenja, već dolazi do njezinog jednolikog širenja kako prikazuje slika 2.4.

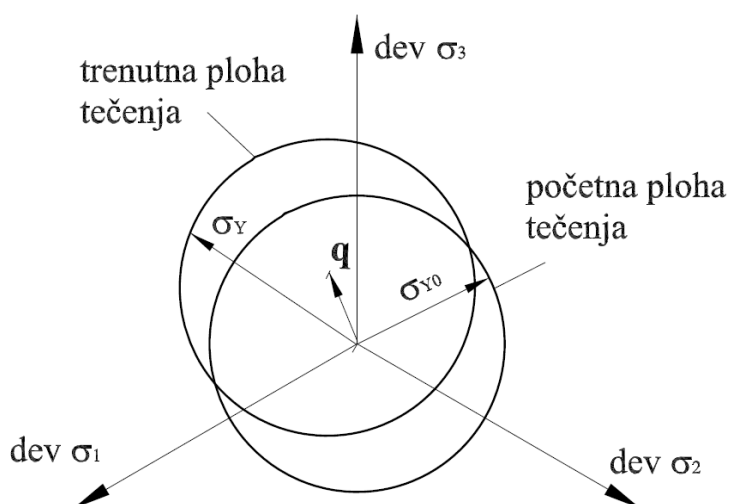


Slika 2.4. Izotropno očvršćenje materijala [9]

Za slučaj von Misesovog uvjeta tečenja, izotropno očvršćenje materijala se može se opisati izrazom

$$f(I_{\sigma_2}) = I_{\sigma_2} - (k + Y)^2 = 0, \quad (2.28)$$

gdje  $Y$  predstavlja izotropno očvršćenje. Bauschingerov efekt se ne može opisati izotropnim očvršćenjem, nego je potrebno koristiti kinematičko očvršćenje. Ploha tečenja kod kinematičkog očvršćenja giba se kao kruto tijelo bez rotacija i promjene veličine, kao što prikazuje slika 2.5.



Slika 2.5. Kinematičko očvršćenje materijala [9]

Iz slike 2.5. se može vidjeti da veličina, oblik i orijentacija početne plohe se ne mijenja. Kinematičko očvršćenje, za slučaj Von Misesovog uvjeta tečenja, se može opisati izrazom

$$f(\mathbf{S} - \mathbf{q}) - k^2 = 0, \quad (2.29)$$

gdje je  $\mathbf{S}$  tenzor naprezanja,  $\mathbf{q}$  predstavlja tenzor drugog reda nazvan tenzor povratnog naprezanja (*back stress*) i on daje koordinate centra trenutne plohe tečenja. Inkrement ukupne deformacije može se zapisati kao zbroj inkrementa elastične i plastične deformacije prema jednadžbi

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^p. \quad (2.30)$$

Inkrement plastične deformacije može se prikazati pomoću stacionarnog zakona tečenja jednadžbom

$$d\varepsilon_{ij}^{pl} = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (2.31)$$

gdje je  $d\lambda$  skalarni faktor proporcionalnosti, odnosno plastični multiplikator,  $f$  funkcija tečenja,  $\sigma_{ij}$  tenzor naprezanja. Za slučaj opterećenja u plastičnom području može se napisati konstitutivna jednadžba u obliku

$$d\sigma_{ij} = D_{ijkl}^{ep} d\varepsilon_{kl}^p, \quad (2.32)$$

gdje je  $D_{ijkl}^{ep}$  elastoplastična konstitutivna matrica materijala koja je jednaka zbroju elastične konstitutivne matrice  $D_{ijkl}$  i plastične konstitutivne matrice  $D_{ijkl}^p$ .

### 2.2.3. Toplinske deformacije [6]

Ukoliko je tijelo podvrgnuto promjeni temperature javljaju se toplinske deformacije. Kod slobodno oslonjenih tijela ne javljaju se naprezanja uslijed toplinskih deformacija, odnosno tijelo se može slobodno deformirati. U slučaju linearne termoplastičnosti toplinska deformacija se može opisati izrazom

$$\varepsilon_{ij}^t = \alpha_T \Delta T \delta_{ij}, \quad (2.33)$$

gdje je  $\alpha_T$  koeficijent toplinskog rastezanja,  $\Delta T$  promjena temperature. Uključivanjem toplinskih deformacija u konstitutivnu jednadžbu (2.17) dobiva se

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl} (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^{pl} - \varepsilon_{kl}^t). \quad (2.34)$$

### 2.2.4. Opći zakoni mehanike [7]

Klasična mehanika se temelji na zakonima održavanja mase, energije, količine gibanja i momenta količine gibanja. Zakon očuvanja mase opisan je jednačbom

$$\int_S \rho v_i n_i dS = -\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV, \quad (2.35)$$

gdje je  $\rho$  gustoća,  $v_i$  vektor brzine. Razlika mase koja uđe i izađe iz sustava je jednaka akumulaciji mase unutar sustava. Nakon sređivanja izraza (2.35) dobiva se

$$\dot{\rho} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2.36)$$

Zakon očuvanja količine gibanja za skup čestica glasi da promjena količine gibanja po vremenu jednaka je rezultanti svih sila koje djeluju na skup čestica. Opisan je jednačbom

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{v}) dV + \int_S (\rho \mathbf{v}) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \mathbf{f} dV + \int_S \mathbf{t} dS, \quad (2.37)$$

gdje je  $\mathbf{f}$  vektor volumnih sila,  $\mathbf{t}$  vektor vanjskih sila. Nakon sređivanja jednačbe (2.37) dobiva se jednačba gibanja:

$$\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + f_i = \rho \ddot{u}_i, \quad (2.38)$$

gdje je  $\ddot{u}_i$  vektor ubrzanja.

Iz zakona momenta količine gibanja

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{x} \times \rho \mathbf{v}) dV + \int_S (\mathbf{x} \times \rho \mathbf{v}) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = \int_V (\mathbf{x} \times \mathbf{f}) dV + \int_S (\mathbf{x} \times \mathbf{t}) dS \quad (2.39)$$

proizlazi da je tenzor naprezanja simetričan:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}. \quad (2.40)$$

Zakon očuvanja energije govori da energija ne može nestati, ni iz ničeg nastati, nego se ona pretvara iz jednog oblika energije u drugi, a može se zapisati jednačbom:

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + \rho u \right) dV + \int_S \left( \frac{1}{2} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + \rho u \right) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = \int_V (\mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + r) dV + \int_S \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} dS - \int_S \mathbf{q}_f \cdot \mathbf{n} dS, \quad (2.41)$$

gdje je  $\frac{1}{2}\rho\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}$  gustoća kinetičke energije,  $\rho u$  gustoća unutarnje energije,  $r$  gustoća izvora topline,  $\mathbf{f}\cdot\mathbf{v}$  snaga obujamnih sila,  $\mathbf{t}\cdot\mathbf{v}$  snaga površinskih sila,  $\mathbf{q}_f$  vektor gustoće toplinskog toka.

Sređivanjem izraza (2.41) dobiva se

$$\rho\dot{u} = \sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} + r - \frac{\partial q_j}{\partial x_j}, \quad (2.42)$$

gdje je  $\rho$  gustoća,  $\dot{u}$  promjena unutarnje energije,  $\sigma_{ij}$  tenzor naprezanja,  $\dot{\varepsilon}_{ij}$  tenzor brzine deformacije,  $r$  gustoća izvora topline,  $q_j$  gustoća toplinskog toka.



### 3. NUMERIČKO MODELIRANJE DINAMIČKOG PROCESA DEFORMIRANJA

Rješavanje većine fizikalnih problema svodi se na rješavanje diferencijalnih jednačbi čije točno analitičko rješenje moguće dobiti samo za jednostavnije proračunske modele. Stoga se koriste približne numeričke metode koje se temelje na diskretizaciji kontinuiranog sustava gdje se diferencijalne jednačbe zamjenjuju sustavom algebarskih jednačbi. Jedna od najčešće korištenih numeričkih metoda je metoda konačnih elemenata koja se temelji na fizičkoj diskretizaciji kontinuuma. Realna konstrukcija, koja ima beskonačno puno stupnjeva slobode, zamjenjuje se s diskretiziranim modelom koji se sastoji od konačnih elemenata i ima konačni broj stupnjeva slobode. Za pravilno postavljanje numeričkog modela nužno je dobro poznavanje teorije konačnih elemenata i fizike sustava. U ovom radu numeričko modeliranje dinamičkog procesa deformiranja je provedeno u računalnom paketu Abaqus/CAE 6.13 koji se temelji na metodi konačnih elemenata [10].

#### 3.1. Numeričko modeliranje toplinske analize [4],[6]

Toplinskom analizom izračunava se polje temperature, toplinski tok, toplinski gradijent, toplinski gubici ili ušteda i tako dalje. Za rješavanje problema nestacionarnog provođenja topline primjenjuje se Galerkinova metoda težinskog reziduuma koja se koristi za određivanje približnog rješenja diferencijalnih jednačbi. Uvrštavanjem pretpostavljene funkcije u diferencijalnu jednačbu javlja se reziduum. Osnovna ideja je da reziduum nestane u čvornoj točki mreže što se postiže na način da se integral umnoška reziduuma  $R$  i težinske funkcije  $w$  izjednači s nulom:

$$\int_V \mathbf{W}R dV = 0. \quad (3.1)$$

Matrica težinskih funkcija  $\mathbf{W}$  iz jednačbe (3.1) u Galerkinovoj metodi konačnih elemenata jednaka je matrici funkcije oblika  $\mathbf{N}$ . Prema tome, izraz (3.1) se može prikazati u obliku

$$\int_V \mathbf{N}R dV = 0 \quad (3.2)$$

Trodimenzijsko nestacionarno provođenje topline opisano je diferencijalnom jednačžbom drugog reda prema jednačžbi (2.3). Pretpostavlja se raspodjela temperature

$$\bar{T}(x, t) = \mathbf{N}(x, y, z)\mathbf{T}_e(t), \quad (3.3)$$

gdje je  $\mathbf{N}$  matrica funkcije oblika. Jednačžba (2.3) se može zapisati u obliku

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) + q_v - \rho c \frac{\partial T}{\partial t} = 0. \quad (3.4)$$

Uvrštavanjem jednačžbe (3.3) u jednačžbu (3.4) dobiva se

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda_x \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda_y \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda_z \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} \right) + q_v - \rho c \frac{\partial \bar{T}}{\partial t} = R, \quad (3.5)$$

gdje je  $R$  rezidual. Uvrštavanje pretpostavljene raspodjele temperature u jednačžbu (3.4) desna strana više ne iznosi 0, već se unosi greška koja uzrokuje rezidual. Uvrštavanjem jednačžbe (3.5) i matrice funkcije oblika  $\mathbf{N}$  u jednačžbu (3.2), te nakon sređivanja izraza dobiva se jednačžba konačnog elementa za nestacionarno provođenje topline:

$$\mathbf{c}\dot{\mathbf{T}} + \mathbf{k}_T \mathbf{T} = \mathbf{f}_q + \mathbf{f}_g, \quad (3.6)$$

gdje je  $\mathbf{c}$  matrica toplinskog kapaciteta,  $\mathbf{k}_T$  matrica provođenja,  $\mathbf{f}_q$  vektor toplinskih opterećenja,  $\mathbf{f}_g$  vektor Neumannovih rubnih uvjeta. Sljedeće jednačžbe prikazuju izraze za dobivanje pojedinih matrica u jednačžbi (3.6):

$$\begin{aligned} \mathbf{c} &= \int_V \rho c \mathbf{N}^T \mathbf{N} dV, \\ \mathbf{k}_T &= \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{K}_{TP} \mathbf{B} dV, \\ \mathbf{f}_q &= \int_V q_v \mathbf{N} dV, \\ \mathbf{f}_g &= \int_A \mathbf{q}_s \mathbf{N} dS. \end{aligned} \quad (3.7)$$

U jednačžbama (3.7)  $\mathbf{B}$  je matrica umnoška matrice diferencijalnog operatora i matrice funkcije oblika,  $\mathbf{K}_{TP}$  matrica temperaturene provodljivosti. Vremenska derivacija iz jednačžbe (3.6) aproksimira se primjenom neke od metoda konačnih razlika. Tri osnovne metode vremenske integracije su:

- eksplicitna metoda kod koje se za aproksimaciju prve derivacije temperature po vremenu koristi razlika unaprijed

$$\frac{\partial T}{\partial t}(t) \approx \frac{T(t + \Delta t) - T(t)}{\Delta t}, \quad (3.8)$$

- implicitna metoda kod koje se za aproksimaciju prve derivacije temperature po vremenu koristi razlika unazad

$$\frac{\partial T}{\partial t}(t + \Delta t) \approx \frac{T(t + \Delta t) - T(t)}{\Delta t}, \quad (3.9)$$

- implicitna Crank-Nicolsonova metoda kod koje se za aproksimaciju prve derivacije temperature po vremenu koristi središnja razlika

$$\frac{\partial T}{\partial t}\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right) \approx \frac{T(t + \Delta t) - T(t)}{\Delta t}. \quad (3.10)$$

Eksplicitna metoda je stabilna za vremenske inkremente koji su manji od kritičnih, dok su implicitne metode bezuvjetno stabilne s obzirom na izbor veličine vremenskog inkrementa. Za nestacionarnu toplinsku analizu, programski paket Abaqus koristi implicitnu metodu vremenske integracije.

### 3.2. Numeričko modeliranje dinamike deformabilnih tijela [10],[11]

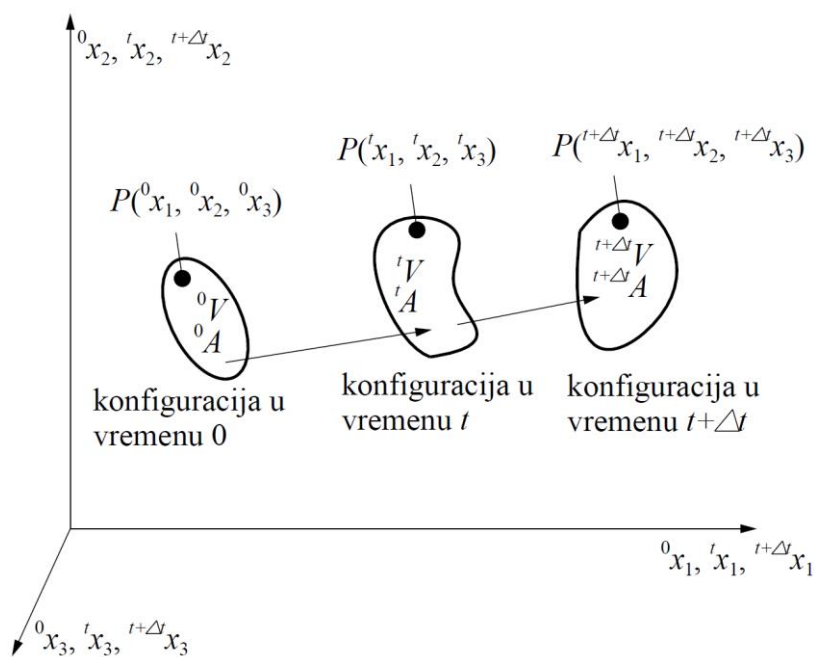
Za rješavanje problema čvrstoće može se koristiti linearna i nelinearna analiza. Linearna analiza čvrstoće se koristi kada se javljaju mali pomaci, a ravnoteža se razmatra na nedeformiranom obliku. Također, opterećenje ne mijenja smjer, ponašanje materijala je linearno elastično, eventualne nehomogenosti i anizotropija u materijalu nisu funkcija opterećenja, linearna je veza između deformacije i pomaka. Jednadžba sustava diskretiziranog linearnim konačnim elementima može se prikazati u obliku

$$\mathbf{KV} = \mathbf{R}, \quad (3.11)$$

gdje je  $\mathbf{K}$  matrica krutosti diskretiziranog sustava,  $\mathbf{V}$  vektor pomaka,  $\mathbf{R}$  vektor čvornih sila. Jednadžbu (3.11) se može jednostavno riješiti pronalaskom inverza matrice krutosti  $\mathbf{K}^{-1}$ . Kao rešenje dobiva se vektor pomaka  $\mathbf{V}$  iz kojeg se računaju naprezanja i deformacije.

Ako koji uvjet linearne analize čvrstoće nije ispunjen, tada se radi o nelinearnom ponašanju. Razlikuje se geometrijska i materijalna nelinearnost. Kod geometrijske nelinearnosti ravnoteža sustava se postavlja na deformiranom obliku. Materijalna nelinearnost je uvjetovana neelastičnim ponašanjem materijala.

Dinamički proces deformiranja je nelinearan problem metode konačnih elemenata koji uključuje velike pomake, velike deformacije i materijalnu nelinearnost. Za rješavanje se koristi inkrementalna formulacija jednačbi gibanja. Nelinearna formulacija se za statičku i dinamičku analizu izvodi na principima mehanike kontinuuma. Postoje dva različita pristupa u rješavanju inkrementalne nelinearne analize metode konačnih elemenata. Prvi pristup je Eulerov pristup kod kojeg su sve kinematičke veličine opisane u trenutnoj konfiguraciji. Ovakav pristup je pogodan za mehaniku fluida gdje se ne prati čestica fluida, već se razmatra lokalni utjecaj strujanja fluida na konstrukciju. Kod nelinearne dinamičke analize je mnogo pogodniji Lagrangianov pristup kod kojeg su sve kinematičke veličine opisane u odnosu na početnu konfiguraciju. Ovakvim se pristupom kontinuum prati od početne nedeformirane konfiguracije, pa sve do krajnje deformirane konfiguracije mjereći pomake i naprezanja u svakom inkreментu vremena. Sljedeća slika prikazuje tri različite konfiguracije.



**Slika 3.1. Gibanje tijela u Kartezijevom koordinatnom sustavu**

Koordinate čestica tijela u konfiguracijama  $t$  i  $t + \Delta t$  mogu se napisati u odnosu na početnu konfiguraciju u vremenu 0 izrazima:

$$\begin{aligned} {}^t x_i &= {}^0 x_i + {}^t u_i, \\ {}^{t+\Delta t} x_i &= {}^0 x_i + {}^{t+\Delta t} u_i, \end{aligned} \quad (3.12)$$

gdje je  $u_i$  pomak koji se nalazi u konfiguracijama  $t$  i  $t + \Delta t$ .

Inkrement pomaka između konfiguracija u vremenu  $t$  i  $t + \Delta t$  može se dobiti iz izraza

$$u_i = {}^{t+\Delta t}u_i - {}^t u_i. \quad (3.13)$$

Izvod jednadžbe konačnih elemenata za rješavanje problema mehanike deformabilnih tijela se najčešće provodi principom virtualnih pomaka. Jednadžba ravnoteže tijela u konfiguraciji  $t + \Delta t$  se može prikazati principom virtualnih pomaka jednadžbom

$$\int_{{}^{t+\Delta t}V} {}^{t+\Delta t}\tau_{ij} \delta {}_{t+\Delta t}e_{ij} {}^{t+\Delta t}dV = {}^{t+\Delta t}\mathfrak{R}, \quad (3.14)$$

gdje je  ${}^{t+\Delta t}\tau_{ij}$  Cauchyev tenzor naprezanja u konfiguraciji  $t + \Delta t$ ,  ${}_{t+\Delta t}e_{ij}$  teznor malih deformacija u konfiguraciji  $t + \Delta t$ ,  $\delta$  oznaka za varijaciju,  ${}^{t+\Delta t}\mathfrak{R}$  virtualni rad sila u konfiguraciji  $t + \Delta t$ . Virtualni rad sila sastoji se od rada volumnih sila i rada površinskih sila, može se prikazati u obliku

$${}^{t+\Delta t}\mathfrak{R} = \int_{{}^{t+\Delta t}A} {}_{t+\Delta t}t_k \delta u_k {}^{t+\Delta t}dA + \int_{{}^{t+\Delta t}V} {}^{t+\Delta t}\rho {}_{t+\Delta t}f_k \delta u_k {}^{t+\Delta t}dV, \quad (3.15)$$

gdje je  ${}_{t+\Delta t}t_k$  vektor površinskih sila,  ${}_{t+\Delta t}f$  vektor vanjskih sila.

Jednadžbu (3.14) nije moguće riješiti direktno jer je konfiguracija u vremenu  $t + \Delta t$  nepoznata. Rješenje u trenutnoj konfiguraciji se može dobiti u odnosu na ravnotežno stanje neke prijašnje konfiguracije. Takav način rješavanja provodi se s dvije metode:

- totalna Lagrangianova formulacija (eng. *Total Lagrangian formulation* - T.L) i
- ažurirana Lagrangianova formulacija (eng. *Updated Lagrangian formulation* - U.L)

### 3.2.1. Totalna Lagrangianova formulacija

Totalna Lagrangianova formulacija se temelji na Lagrangianovoj formulaciji koja se najčešće koristi u statičkoj analizi. Sve varijable su opisane u odnosu na početnu konfiguraciju. Ako se jednadžba (3.14) napiše u odnosu na početnu konfiguraciju, dobiva se izraz

$$\int_{{}^0V} {}^{t+\Delta t}S_{ij} \delta {}^0\varepsilon_{ij} {}^0dV = {}^{t+\Delta t}\mathfrak{R}, \quad (3.16)$$

gdje je  ${}^{t+\Delta t}S_{ij}$  drugi Piola-Kirchhoffov tenzor naprezanja,  ${}^0\varepsilon_{ij}$  Green-Lagrangeov tenzor deformacije prikazan jednadžbom (2.18). Drugi Piola-Kirchhoffov tenzor naprezanja i Green-Lagrangeov tenzor deformacije se nalaze u trenutnoj konfiguraciji, ali su mjereni u odnosu na

početnu konfiguraciju u vremenu 0. Drugi Piola-Kirchhoffov tenzor naprezanja se može napisati u ovisnosti o Cauchyevom tenzoru naprezanja izrazom

$${}^{t+\Delta t}{}_0\mathcal{S}_{ij} = \frac{{}_0\rho}{{}^{t+\Delta t}\rho} \frac{\partial^0 x_i}{\partial {}^{t+\Delta t}x_s} {}^{t+\Delta t}\tau_{sr} \frac{\partial^0 x_j}{\partial {}^{t+\Delta t}x_r}. \quad (3.17)$$

Ako se virtualni rad vanjskih sila u jednadžbi (3.16) napiše u odnosu na početnu konfiguraciju, dobiva se

$${}^{t+\Delta t}\mathfrak{R} = \int_{{}_0A} {}^{t+\Delta t}{}_0t_k \delta u_k^0 dA + \int_{{}_0V} {}^0\rho {}^{t+\Delta t}{}_0f_k \delta u_k^0 dV. \quad (3.18)$$

Nepoznanice u jednadžbi (3.16) su tenzor naprezanja  ${}^{t+\Delta t}{}_0\mathcal{S}_{ij}$  i tenzor deformacije  ${}^{t+\Delta t}{}_0\mathcal{E}_{ij}$  koji se dobivaju inkrementalnim oblikom prema izrazima:

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t}{}_0\mathcal{S}_{ij} &= {}^t\mathcal{S}_{ij} + {}_0\mathcal{S}_{ij}, \\ {}^{t+\Delta t}{}_0\mathcal{E}_{ij} &= {}^t\mathcal{E}_{ij} + {}_0\mathcal{E}_{ij}, \end{aligned} \quad (3.19)$$

gdje je  ${}^t\mathcal{S}_{ij}$  drugi Piola-Kirchhoffov tenzor naprezanja poznat u konfiguraciji vremena  $t$ ,  ${}^t\mathcal{E}_{ij}$  Green-Lagrangeov tenzor deformacije poznat u konfiguraciji vremena  $t$ ,  ${}_0\mathcal{S}_{ij}$  inkrement drugog Piola-Kirchhoffovog tenzora naprezanja,  ${}_0\mathcal{E}_{ij}$  inkrement Green-Lagrangeovog tenzora deformacije. Ako se provede varijacija jednadžbi (3.19), dobiva se

$$\begin{aligned} \delta {}^{t+\Delta t}{}_0\mathcal{S}_{ij} &= \delta {}_0\mathcal{S}_{ij}, \\ \delta {}^{t+\Delta t}{}_0\mathcal{E}_{ij} &= \delta {}_0\mathcal{E}_{ij}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Green-Lagrangeov tenzor deformacije se može napisati u obliku

$${}_0\mathcal{E}_{ij} = {}_0e_{ij} + {}_0\eta_{ij}, \quad (3.21)$$

gdje je  ${}_0e_{ij}$  linearni dio, a  ${}_0\eta_{ij}$  nelinearni dio.

Inkrement drugog Piola-Kirchhoffovog tenzora naprezanja je povezan s inkrementom Green-Lagrangeovog tenzora deformacije preko konstitutivnog  $C_{ijrs}$  tenzora relacijom

$${}_0\mathcal{S}_{ij} = {}_0C_{ijrs} \mathcal{E}_{rs}. \quad (3.22)$$

Uvrštavanjem jednadžbi (3.18) - (3.22) u jednadžbu (3.16) dobiva se

$$\int_{{}_0V} {}_0C_{ijrs} {}_0\mathcal{E}_{rs} \delta {}_0\mathcal{E}_{ij}^0 dV + \int_{{}_0V} {}^t\mathcal{S}_{ij} \delta {}_0\eta_{ij}^0 dV = {}^{t+\Delta t}\mathfrak{R} - \int_{{}_0V} {}^t\mathcal{S}_{ij} \delta {}_0\mathcal{E}_{ij}^0 dV. \quad (3.23)$$

Jednadžba (3.23) predstavlja nelinearnu jednadžbu za inkrementalni pomak  $\Delta u_t$ .

### 3.2.2. Ažurirana Lagrangianova formulacija

Kod ažurirane Lagrangianove formulacije sve varijable su napisane u odnosu na prethodno ravnotežno stanje. Ako se jednačba (3.14) napiše u odnosu na posljednju ravnotežnu konfiguraciju, dobiva se izraz

$$\int_{{}^tV} {}^{t+\Delta t}S_{ij} \delta {}^{t+\Delta t}\epsilon_{ij} {}^t dV = {}^{t+\Delta t}\mathfrak{R}, \quad (3.24)$$

gdje se drugi Piola-Kirchhoffov tenzor naprezanja  ${}^{t+\Delta t}S_{ij}$  i Green-Lagrangeov tenzor deformacije  ${}^{t+\Delta t}\epsilon_{ij}$  nalazi u trenutnoj konfiguraciji  $t + \Delta t$ , a opisani su u odnosu na prethodnu konfiguraciju  $t$ . Drugi Piola-Kirchhoffov tenzor naprezanja se može zapisati u inkrementalnom obliku

$${}^{t+\Delta t}S_{ij} = {}^t\tau_{ij} + {}_tS_{ij}, \quad (3.25)$$

gdje je  ${}^t\tau_{ij}$  Cauchyev tenzor naprezanja,  ${}_tS_{ij}$  inkrement drugog Piola-Kirchhoffovog tenzora naprezanja. Također, Green-Lagrangeov tenzor naprezanja se može zapisati u inkrementalnom obliku

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t}\epsilon_{ij} &= {}_t\epsilon_{ij}, \\ {}_t\epsilon_{ij} &= {}_te_{ij} + {}_t\eta_{ij}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Konstitutivna relacija između inkrementa naprezanja i deformacija se može prikazati izrazom

$${}_0S_{ij} = {}_tC_{ijrs} {}_t\epsilon_{rs}. \quad (3.27)$$

Uvrštavanjem jednačbi (3.25)-(3.27) u jednačbu (3.24) i njezinim sređivanjem dobiva se

$$\int_{{}^tV} {}_tC_{ijrs} {}_t\epsilon_{rs} \delta {}_t\epsilon_{ij} {}^t dV + \int_{{}^tV} {}^t\tau_{ij} \delta \eta_{ij} {}^t dV = {}^{t+\Delta t}\mathfrak{R} - \int_{{}^tV} {}^t\tau_{ij} \delta {}_te_{ij} {}^t dV. \quad (3.28)$$

Jednačba (3.28) je nelinearna jednačba za inkrementalni pomak  $\Delta u_i$ .

### 3.2.3. Izvod izoparametarskog kontinuum konačnog elementa

Izoparametarski elementi koriste iste interpolacijske funkcije za opisivanje geometrije elementa i polja pomaka. Geometrija elementa se opisuje izrazima:

$$\begin{aligned}
{}^0x_i &= \sum_{k=1}^n N_k {}^0x_i^k, \\
{}^t x_i &= \sum_{k=1}^n N_k {}^t x_i^k, \\
{}^{t+\Delta t} x_i &= \sum_{k=1}^n N_k {}^{t+\Delta t} x_i^k,
\end{aligned} \tag{3.29}$$

gdje su  ${}^0x_i, x_i^k$  i  ${}^{t+\Delta t}x_i$  koordinate čvora  $k$  u odgovarajućem smjeru  $i$  u vremenu  $0, t$  i  $t + \Delta t$ , a  $N_k$  funkcija oblika. Raspodjela pomaka unutar elementa se može opisati izrazima

$$\begin{aligned}
{}^t u_i &= \sum_{k=1}^n N_k {}^t u_i^k, \\
u_i &= \sum_{k=1}^n N_k u_i^k,
\end{aligned} \tag{3.30}$$

gdje su  $u_i^k$  čvorni pomaci čvora  $k$  u odgovarajućem smjeru  $i$ . Koristeći jednadžbe (3.23), (3.29), (3.30) i sređivanjem izraza dobiva se jednadžba gibanja jednog elementa prema totalnoj Lagrangianovoj formulaciji:

$$\left( {}^t \mathbf{K}_L + {}^t \mathbf{K}_{NL} \right) \Delta \mathbf{u} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{R} - {}^t \mathbf{F} - \mathbf{M} {}^{t+\Delta t} \ddot{\mathbf{u}} \tag{3.31}$$

gdje je  $\mathbf{K}_L$  linearna matrica krutosti,  $\mathbf{K}_{NL}$  nelinearna matrica krutosti,  ${}^{t+\Delta t} \mathbf{R}$  vektor vanjskih sila,  ${}^t \mathbf{F}$  vektor unutarnjih sila,  $\mathbf{M} {}^{t+\Delta t}$  matrica mase,  $\ddot{\mathbf{u}}$  vektor ubrzanja,  $\Delta \mathbf{u}$  inkrement pomaka. Matrice iz jednadžbe (3.31) iznose

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_L &= \int_{{}^0V} {}^t \mathbf{B}_{L0}^T \mathbf{C} {}^t \mathbf{B}_L {}^0 dV, \\
\mathbf{K}_{NL} &= \int_{{}^0V} {}^t \mathbf{B}_{NL0}^T {}^t \mathbf{S} {}^t \mathbf{B}_{NL} {}^0 dV, \\
{}^t \mathbf{F} &= \int_{{}^0V} {}^t \mathbf{B}_{L0}^T {}^t \hat{\mathbf{S}} {}^0 dV, \\
\mathbf{M} &= \int_{{}^0V} \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} dV,
\end{aligned} \tag{3.32}$$

gdje je  $\mathbf{B}_L$  linearna matrica veze između deformacije i pomaka,  $\mathbf{B}_{NL}$  nelinearna matrica veze između deformacije i pomaka,  $\mathbf{C}$  inkrementalna matrica materijalnih svojstava,  $\mathbf{S}$  drugi Piola-Kirchhoffov tenzor naprežanja,  $\hat{\mathbf{S}}$  drugi Piola-Kirchhoffov vektor naprežanja. Ako se pri izvodu jednadžbe gibanja jednog konačnog elementa koristi U.L. formulacija, dobiva se

$$\left( {}^t \mathbf{K}_L + {}^t \mathbf{K}_{NL} \right) \Delta \mathbf{u} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{R} - {}^t \mathbf{F} - \mathbf{M} {}^{t+\Delta t} \ddot{\mathbf{u}}, \tag{3.33}$$



gdje su:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K}_L &= \int_{^tV} {}^t\mathbf{B}_L^T \mathbf{C} {}^t\mathbf{B}_L {}^t dV, \\
 \mathbf{K}_{NL} &= \int_{^tV} {}^t\mathbf{B}_{NL}^T {}^t\boldsymbol{\tau} {}^t\mathbf{B}_{NL} {}^t dV, \\
 {}^t\mathbf{F} &= \int_{^tV} {}^t\mathbf{B}_L^T \hat{\boldsymbol{\tau}} {}^t dV, \\
 \mathbf{M} &= \int_V \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} dV,
 \end{aligned} \tag{3.34}$$

U jednadžbi (3.34)  $\boldsymbol{\tau}$  je Cauchyev tenzor naprezanja, a  $\hat{\boldsymbol{\tau}}$  Cauchyev vektor naprezanja. Rješavanje jednadžbi gibanja se provodi numeričkom integracijom. Za razliku od analitičkog rješenja, numerička integracija daje rješenja u diskretiziranim trenucima. Postupak rješavanja jednadžbe u trenutku  $t + \Delta t$  se dobiva na osnovu poznatog rješenja u trenutku  $t$ . Kao i kod rješavanja jednadžbe nestacionarnog provođenja topline, vremenska derivacija pomaka obično se aproksimira primjenom neke od metoda konačnih razlika. S obzirom na metodu konačnih razlika, vremenska integracija se dijeli na implicitnu i eksplicitnu metodu.

### 3.2.4. Implicitna integracija [12]

Implicitna metoda za određivanje nepoznatih veličina u vremenu  $t + \Delta t$  koristi poznate veličine iz vremena  $t$  i nepoznatih veličina u vremenu  $t + \Delta t$ . Zasniva se na zadovoljenju diferencijalnih jednadžbi s unaprijed zadanom točnošću. Rješava se iterativno, a jedna od najčešće korištenih implicitnih metoda je Newmark-ova metoda. Pretpostavke za promjenu pomaka i brzine unutar intervala  $\Delta t$ :

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{u} = {}^t\mathbf{u} + \Delta t {}^t\dot{\mathbf{u}} + \frac{\Delta t^2}{2} \left[ (1 - 2\beta) {}^t\ddot{\mathbf{u}} + 2\beta {}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{u}} \right], \tag{3.35}$$

$${}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{u}} = {}^t\dot{\mathbf{u}} + \Delta t \left[ (1 - \gamma) {}^t\ddot{\mathbf{u}} + \gamma {}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{u}} \right], \tag{3.36}$$

gdje su  $\beta$  i  $\gamma$  odabrane konstante. Kod trapeznog pravila konstante iznose  $\beta = \frac{1}{4}$  i  $\gamma = \frac{1}{2}$ .

Uvrštavanjem jednadžbi (3.35) u dinamičku jednadžbu (3.33) dobiva se nelinearna jednadžba

$${}^t\mathbf{K}_T \Delta \mathbf{u} + {}^{t+\Delta t}\mathbf{R} - {}^t\mathbf{F}_i + \mathbf{M} \left( \frac{4}{\Delta t^2} \Delta \mathbf{u} - \frac{4}{\Delta t} {}^t\dot{\mathbf{u}} - {}^t\ddot{\mathbf{u}} \right) = 0 \tag{3.37}$$

gdje je  ${}^t\mathbf{K}_T = ({}^t\mathbf{K}_L + {}^t\mathbf{K}_{NL})$  tangencijalna matrica krutosti. Za rješavanje jednadžbe (3.37)

koristi se prediktor korektor metoda koja se sastoji od prediktor koraka i korektor koraka. U prediktor koraku traži se inkrement pomaka  $\Delta\mathbf{u}$  rješavanjem jednadžbe

$$\Delta\bar{\mathbf{q}}_e = {}^t\bar{\mathbf{K}}_T\Delta\mathbf{d}. \quad (3.38)$$

gdje su:

$$\begin{aligned} {}^t\bar{\mathbf{K}}_T &= {}^t\mathbf{K}_T + \frac{4}{\Delta t^2}\mathbf{M}, \\ \Delta\bar{\mathbf{q}}_e &= {}^{t+\Delta t}\mathbf{R} - {}^t\mathbf{F}_i + \mathbf{M}\left(\frac{4}{\Delta t}{}^t\dot{\mathbf{u}} - {}^t\ddot{\mathbf{u}}\right). \end{aligned} \quad (3.39)$$

U jednadžbi (3.38)  ${}^t\bar{\mathbf{K}}_T$  je dinamička tangencijalna matrica krutosti koja uključuje doprinos matrice mase. Rješavanje se vrši iterativnom Newton-Raphsonovom metodom. Dobivanjem matrice inkrementa pomaka završava prediktor korak, te počinje korektor korak. Pomak u vremenu  $t + \Delta t$  dobiva se prema jednadžbi

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{u} = {}^t\mathbf{u} + \Delta\mathbf{u}. \quad (3.40)$$

Uvrštavanjem jednadžbe (3.40) u jednadžbu (3.35) dobiva se  ${}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{u}}$  i  ${}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{u}}$ . Iz trenutnog  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{u}$  pomaka može se izračunati naprezanja u vremenu  $t + \Delta t$ , iz kojeg se računaju unutarnje sile  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}$  u vremenu  $t + \Delta t$ . Jednadžba gibanja u trenutku  $t + \Delta t$  iznosi

$${}^{t+\Delta t}\bar{\mathbf{F}} = ({}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_i - {}^{t+\Delta t}\mathbf{R}) + \mathbf{M}{}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{u}} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{F} + \mathbf{M}{}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{u}} \approx 0, \quad (3.41)$$

gdje je  ${}^{t+\Delta t}\bar{\mathbf{F}}$  greška koja u numeričkoj matematici nikad ne iznosi nula, već je dovoljno mali broj. Vektor razlike unutarnjih i vanjskih sila  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}$  može se raspisati u Taylorov red:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{F} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{old} + \frac{\partial\mathbf{F}}{\partial\mathbf{u}}\delta{}^{t+\Delta t}\mathbf{u} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{old} + {}^{t+\Delta t}\mathbf{K}_T\delta{}^{t+\Delta t}\mathbf{u}. \quad (3.42)$$

Iz jednadžbe (3.36) dobiva se

$$\delta{}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{u}} = \frac{2}{\Delta t}\delta{}^{t+\Delta t}\mathbf{u}. \quad (3.43)$$

Koristeći jednadžbu (3.43) i jednadžbu (3.35) dobiva se

$$\delta{}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{u}} = \frac{4}{\Delta t^2}\delta{}^{t+\Delta t}\mathbf{u} \quad (3.44)$$

Uz razvoj jednadžbe (3.41) u Taylorov red, koristeći jednadžbe (3.41)-(3.44) dobiva se

$${}^{t+\Delta t}\bar{\mathbf{F}}_{new} = {}^{t+\Delta t}\bar{\mathbf{F}}_{old} + {}^{t+\Delta t}\bar{\mathbf{K}}_T\delta{}^{t+\Delta t}\mathbf{u}, \quad (3.45)$$

gdje je

$${}^{t+\Delta t}\bar{\mathbf{K}}_T = {}^{t+\Delta t}\mathbf{K}_T + \frac{4}{\Delta t^2}\mathbf{M}. \quad (3.46)$$

Ako je rezidual  ${}^{t+\Delta t}\bar{\mathbf{F}}_{\text{old}} \neq 0$ , pretpostavlja se  ${}^{t+\Delta t}\bar{\mathbf{F}}_{\text{new}} = 0$  iz kojeg se dobiva poboljšani  $\delta^{t+\Delta t}\mathbf{u}$  u odnosu na  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{u}$  jednadžbom

$$\delta^{t+\Delta t}\mathbf{u} = -\left({}^{t+\Delta t}\bar{\mathbf{K}}_T\right)^{-1} {}^{t+\Delta t}\bar{\mathbf{F}} \quad (3.47)$$

koja se rješava Newton-Raphsonovom metodom. Implicitna metoda je bezuvjetno stabilna te može koristiti veći vremenski inkrement u odnosu na eksplicitnu metodu. Odabir vremenskog koraka vezan je za željenu točnost rješenja. Rješava se iterativno, a može imati kvadratičnu konvergenciju za analize kod kojih se ne uzima u obzir kontakt i trenje klizanja. Ukoliko se javlja kontakt i trenje, konvergencija može biti jako loša odnosno ne mora se ni postići. Kod takvih analiza najčešće se koristi eksplicitna metoda. Računalni paket Abaqus/Standard kod implicitne metode koristi automatski postupak vremenske integracije koji se temelji na Newtonovoj iterativnoj metodi [4].

### 3.2.5. Eksplicitna integracija [13]

Eksplicitna metoda za određivanje nepoznatih veličina u trenutku  $t + \Delta t$  koristi veličine i njihove derivacije u trenutku  $t$ . Aproksimacija vremenske derivacije pomaka koristi metodu središnjih razlika, gdje se čvrne brzine izračunavaju na pola koraka ( ${}^{t+\frac{1}{2}\Delta t}\dot{\mathbf{u}}$ ), a naprezanja, pomaci i ubrzanja na kraju koraka  $t + \Delta t$  ( ${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma}$ ,  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{u}$ ,  ${}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{u}}$ ). Aproksimacija prve i druge derivacije pomaka po vremenu se metodom središnjih razlika mogu pisati u obliku:

$$\ddot{\mathbf{u}} = \frac{1}{\Delta t} \left( {}^{t+\frac{1}{2}\Delta t}\dot{\mathbf{u}} - {}^{t-\frac{1}{2}\Delta t}\dot{\mathbf{u}} \right), \quad (3.48)$$

$${}^{t+\frac{1}{2}\Delta t}\dot{\mathbf{u}} = \frac{1}{\Delta t} \left( {}^{t+\Delta t}\mathbf{u} - {}^t\mathbf{u} \right). \quad (3.49)$$

Jednadžba gibanja u vremenu  $t$  se može pisati u obliku

$$\mathbf{M}^t\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}({}^t\mathbf{u}) \cdot {}^t\mathbf{u} = {}^t\mathbf{R}, \quad (3.50)$$

gdje je

$\mathbf{K}({}^t\mathbf{u})$  je nelinearna matrica krutosti koja ovisi o deformaciji. Množenjem nelinearne matrice krutosti  $\mathbf{K}({}^t\mathbf{u})$  s vektorom pomaka  ${}^t\mathbf{u}$  dobiva se izraz

$$\mathbf{K}({}^t\mathbf{u}) \cdot {}^t\mathbf{u} = {}^t\mathbf{F}_i = \int_V {}^t\mathbf{B}^T {}^t\hat{\mathbf{S}} dV. \quad (3.51)$$

Uvrštavanjem jedndžbe (3.51) u jednadžbu (3.50) dobiva se

$$\mathbf{M}{}^t\ddot{\mathbf{u}} = {}^t\mathbf{R} - {}^t\mathbf{F}_i. \quad (3.52)$$

Za razliku od implicitne metode, kod eksplicitne metode nije potrebno provoditi iterativni postupak ni računati globalnu tangencijalnu matricu krutosti. Za rješavanje jednadžbe (3.52) je potrebno zadati početne uvjete ( $\mathbf{u}$  i  $\dot{\mathbf{u}}$ ) iz koje se dobiva početno ubrzanje jednadžbom

$${}^0\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{M}^{-1}({}^0\mathbf{R} - {}^0\mathbf{F}_i). \quad (3.53)$$

Dobiveno ubrzanje  ${}^0\ddot{\mathbf{u}}$  uvrštava se jednadžbe (3.48) i (3.49) iz koji se dobiva pomak  ${}^t\mathbf{u}$ . Iz dobivenog pomaka se računaju sve potrebne veličine za dobivanje vektora unutarnjih sila  $\mathbf{F}_i$ .

Za novo stanje u vremenu  $t$  jednadžba (3.53) glasi

$${}^t\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{M}^{-1}({}^t\mathbf{R} - {}^t\mathbf{F}_i). \quad (3.54)$$

Nakon dobivanja ubrzanja  ${}^t\ddot{\mathbf{u}}$ , ponavlja se opisani postupak. Veličina koraka integracije mora biti dovoljno mala kako bi analiza bila stabilna. Stabilni vremenski korak definiran je u ovisnosti o najvišoj vlastitoj frekvenciji sustava jednadžbom

$$\Delta t_{\text{stabilno}} = \frac{2}{\omega_{\text{max}}}, \quad (3.55)$$

što znači da je potrebno provesti analizu vlastitih vrijednosti prije rješavanja dinamičkih problema eksplicitnom metodom. Gustoća mreže konačnih elemenata je vrlo važna jer manji konačni elementi uzrokuju manji stabilni vremenski korak. Eksplicitne metode su namijenjene za rješavanje dinamičkih problema kod kojih inercijske sile imaju značajnu ulogu, uz pojavu kontakta i trenja klizanja. Ukoliko je trajanje simulacije dugo, odnosno ako je problem kvazistatičan, primjena eksplicitne metode je neisplativa zbog malog vremenskog koraka i velikog broja iteracija.

Abaqus/Explicit primjenjuje automatsko određivanje vremenskog inkrementa u tijeku analize tako da su svi inkrementi stabilni  $\Delta t < \Delta t_{\text{stabilno}}$ .

### 3.3. Numeričko modeliranje toplinsko-mehaničke analize

Uslijed promjene temperature nekog kontinuuma dolazi do toplinskih deformacija. Ukoliko su te deformacije spriječene, dolazi do naprezanja unutar kontinuuma. Rješavanje toplinsko-mehaničkih problema izvodi se na dva načina:

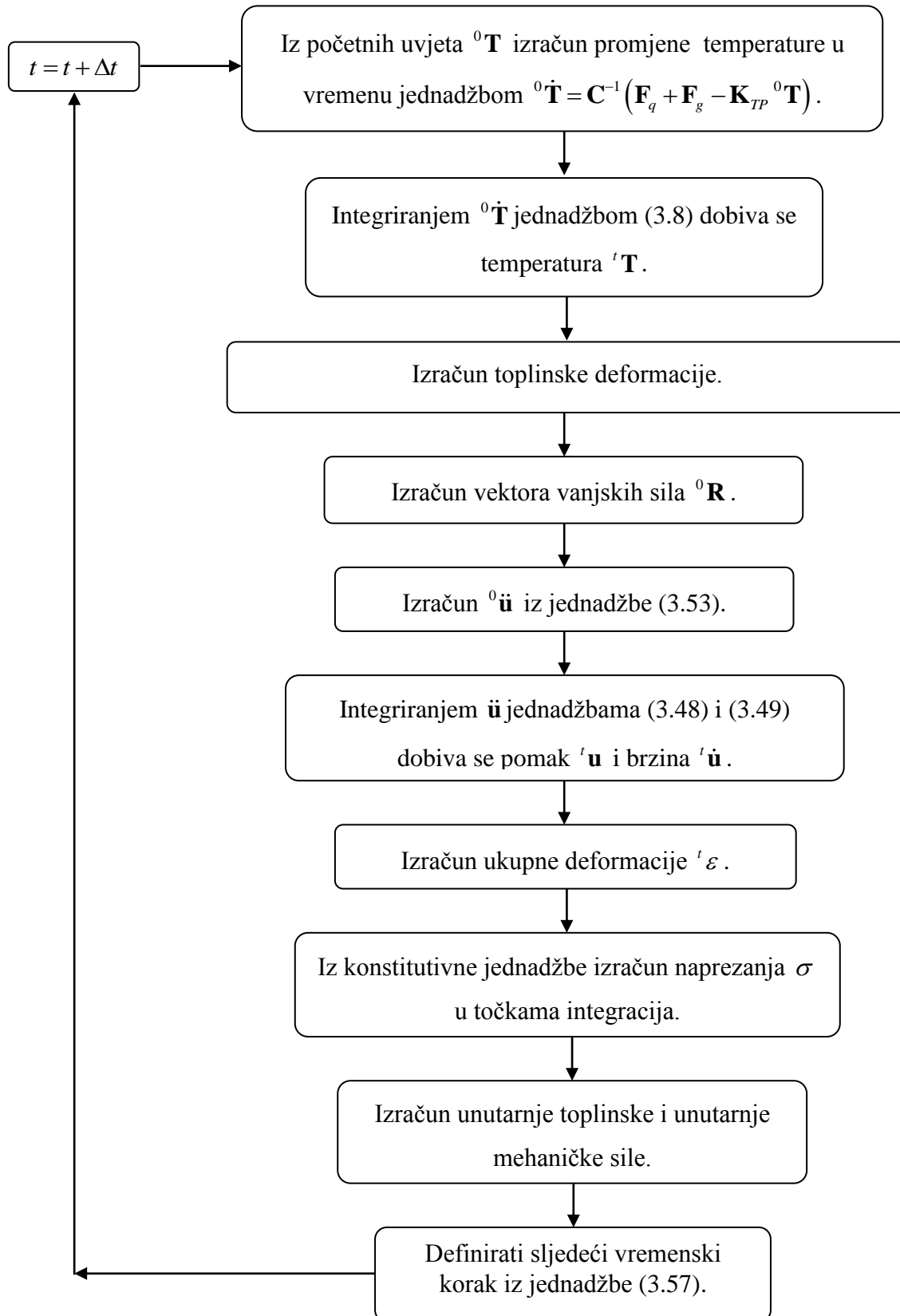
- sekvencijalno spregnutom toplinsko-mehaničkom analizom i
- potpuno spregnutom toplinsko-mehaničkom analizom.

Sekvencijalno spregnuta toplinsko-mehanička analiza podijeljena je u dvije analize koje se rješavaju odvojeno. Raspodjela temperaturnog polja dobivenog u toplinskoj analizi se koristi kao opterećenje u mehaničkoj analizi. Razdvajanje analiza je moguće kada rješenja toplinske analize ne utječu na rješenja mehaničke analize i obrnuto.

Potpuno spregnuta toplinsko-mehanička analiza istovremeno rješava toplinski i mehanički problem. Koristi se kod analiza gdje rješenja toplinske i mehaničke analize utječu jedna na drugu kao što je slučaj kod dinamičkog deformiranja.

#### 3.3.1. *Potpuno spregnuta toplinsko-mehanička analiza s eksplicitnim integratorom (Abaqus/Explicit) [4],[14]*

Abaqus/Explicit za integraciju jednadžbi nestacionarnog provođenja topline i jednadžbi gibanja koristi eksplicitnu metodu, te jednadžbe rješava simultano. U prethodnim poglavljima dane su osnovne jednadžbe metode konačnih elemenata za toplinsku i mehaničku analizu, a slika 3.2. prikazuje algoritam rješavanja spregnute toplinsko-mehaničke analize s eksplicitnim integratorom.



Slika 3.2. Tok eksplicitnog rješavača za toplinsko-mehaničku analizu

Kao što je već rečeno, a može se vidjeti iz toka eksplicitnog rješavača na slici 3.2., kod eksplicitnog rješavača nema iteracija. Stabilnost koraka eksplicitne integracije kod toplinske analize dobiva se iz najveće vlastite vrijednosti sustava jednačbi  $\lambda_{\max}$ , a računa se izrazom

$$\Delta t_{\text{stabilno}} = \frac{2}{\lambda_{\max}}, \quad (3.56)$$

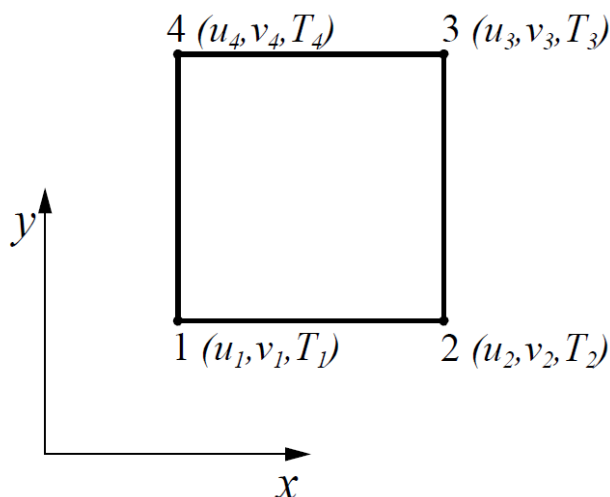
Jednačbom (3.55) računa se stabilni korak eksplicitne integracije dinamičke analize. Kod toplinsko-mehaničke analize korak eksplicitne integracije mora biti manji od stabilnog koraka dinamičke i toplinske analize, računa se prema izrazu:

$$\Delta t \leq \min\left(\frac{2}{\omega_{\max}}, \frac{2}{\lambda_{\max}}\right). \quad (3.57)$$

### 3.3.1.1. Konačni elementi za spregnutu toplinsko-mehaničku analizu (Abaqus/Explicit) [4]

Prethodno opisane jednačbe konačnih elemenata za toplinsku i mehaničku analizu vrijede za sve vrste elemenata. U okviru ovog rada korišteni su 2D i 3D konačni elementi za spregnutu toplinsko-mehaničku.

2D konačni elementi se koriste za diskretizaciju membrana opterećenih u srednjoj ravnini. Geometrija se opisuje referentnom površinom. Na slici 3.3. prikazan je 2D konačni element prvog reda.



Slika 3.3. 2D konačni element prvog reda

2D konačni elementi, s obzirom na stanje naprezanja i deformacija, dijele se na elemente za ravninsko stanje naprezanja i ravninsko stanje deformacije. Elementi za ravninsko stanje deformacije i ravninsko stanje naprezanja imaju isti broj čvorova, iste čvorne veličine i pomaci su im opisani istim interpolacijskim funkcijama. Prema slici 3.3. može se vidjeti da 2D konačni element ima četiri čvora u vrhovima, a u svakom čvoru tri stupnja slobode. Stupnjevi slobode su pomaci i temperatura u čvorovima. Ima četiri točke integracije, a reduciranom integracijom se smanjuje na jednu točku integracije.

Kod ravninskog stanja naprezanja sve veličine naprezanja javljaju se u jednoj ravnini, a mogu se zapisati izrazom

$$\boldsymbol{\sigma}_{RN} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}, \quad (3.58)$$

dok ostale veličine normalnih i tangencijalnih naprezanja iznose nula. Vektor deformacije iznosi

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{RN} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}, \quad (3.59)$$

dok su ostale veličine tangencijalnih deformacija jednake nuli.

Kod ravninskog stanja deformacije se sve veličine deformacija javljaju u jednoj ravnini. Vektor deformacije tada glasi

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{RD} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}. \quad (3.60)$$

Zbog spriječene deformacije u okomitom smjeru na ravninu u kojoj se javlja ravninsko stanje deformacije ( $\varepsilon_z = 0$ ) pojavljuje se naprezanje  $\sigma_z$ . Vektor naprezanja glasi

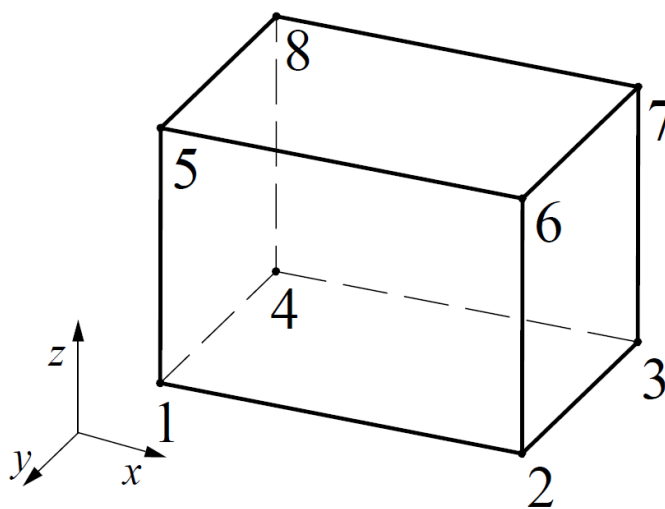
$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}, \quad (3.61)$$

dok su ostale veličine naprezanja jednake nuli. Temperature i naprezanja se računaju u integracijskim točkama nakon čega se ekstrapoliraju u čvorove. U okviru ovog rada su



korišteni 2D elementi za ravninsko stanje naprezanja i ravninsko stanje deformacije koji se mogu naći u Abaqusu pod nazivom CPS4RT i CPE4RT. Opisuju linearnu raspodjelu naprezanja, deformacija i temperatura.

3D konačni elementi su izvedeni za opisivanje 3D stanja naprezanja te su računalno najskuplji. S obzirom na geometriju elementa dijele se na tetraedarske i prizmatične konačne elemente. Kod spregnute toplinsko-mehaničke analize, prizmatični konačni elementi prvog reda imaju linearnu raspodjelu temperature, naprezanja i deformacija.



Slika 3.4. Prizmatični konačni element prvog reda

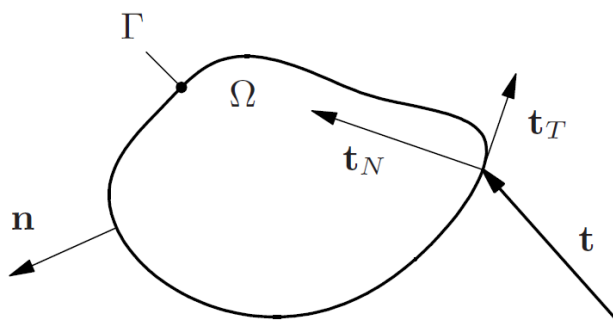
Prema slici 3.4. može se vidjeti da prizmatični konačni element prvog reda ima osam čvorova u vrhovima, a u svakom čvoru četiri stupnja slobode: tri komponente pomaka i temperatura. Kao i kod 2D elemenata, za izbjegavanje pojave *locking* efekta poput *shear locking* i *volumetric locking* koristi se reducirana integracija. Kod reduciranje integracije se smanjuje broj točaka integracije s osam točaka na jednu točku integracije. Koristi se samo za računanje matrice krutosti, dok se za računanje matrice mase, provođenja i toplinskog kapaciteta koristi potpuna integracija. Uključivanjem reducirane integracije može se pojaviti problem *hourglassing* jer se javljaju dodatne nulte vlastite vrijednosti matrice krutosti. Prepoznaje se po treperenju mreže konačnih elemenata, a rješava se *hourglassing control*. Kod pojave velikih plastičnih deformacija preporuča se korištenje konačnog elementa prvog reda s reduciranom integracijom uz *hourglassing control*. U ovom radu je korišten 3D konačni element koji se može naći u Abaqusu pod nazivom C3D8TR koji koristi reduciranu integraciju.

### 3.3.1.2. Numeričko modeliranje kontakta kod spregnute toplinsko-mehaničke analize (Abaqus/Explicit) [4],[6],[15]

Dva dijela u numeričkom modelu mogu doći u kontakt i klizati jedan po drugom. Kontakt je izrazito nelinearno ponašanje sustava te uzrokuje nelinearne vremenski ovisne rubne uvjete. Uslijed kontakta između površina javlja se naprezanje koje se može rastaviti prema izrazu

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{t}_N + \mathbf{t}_T, \quad (3.62)$$

gdje je  $\mathbf{t}_N$  normalna komponenta Cauchyevog vektora naprezanja,  $\mathbf{t}_T$  tangencijalna komponenta Cauchyevog vektora naprezanja (slika 3.5.).



**Slika 3.5. Vektor naprezanja na površini  $\Gamma$  rastavljen na normalnu i tangencijalnu komponentu [15]**

Kako jedan dio numeričkog modela ne bi penetrirao u drugi dio modela potrebno je zadovoljiti jednadžbu ograničenja

$$g \geq 0. \quad (3.63)$$

Za numerički model u kontaktu vrijedi  $g = 0$ , dok ukoliko nisu u kontaktu vrijedi  $g > 0$ . Kinematska ograničenja se nameću jednadžbi ravnoteže konačnih elemenata preko metode Lagrangeovih multiplikatora i *Penalty* metode.

Metoda Lagrangeovih multiplikatora uvodi multiplikatore kao dodatne varijable gdje su kontaktna ograničenja zadovoljena egzaktno. Nedostaci metode su dodatni utrošak vremena za rješavanje jednadžbi i potencijalni problemi povezani s konvergencijom.

*Penalty* metoda uvodi virtualnu oprugu krutosti za zadovoljavanje kinematskog ograničenja kontakta. Krutost opruge definira se *Penalty* brojem koji mora biti dovoljno velik da bi se ispunilo kinematsko ograničenje, ali ne smije biti prevelik da ne uzrokuje numeričke probleme. Za razliku od metode Lagrangeovih multiplikatora ima dobru brzinu konvergencije

i bolje performanse rješavača jednadžbi. Nedostaci su joj mali iznos prodiranja i prilagođavanje *penalty* krutosti.

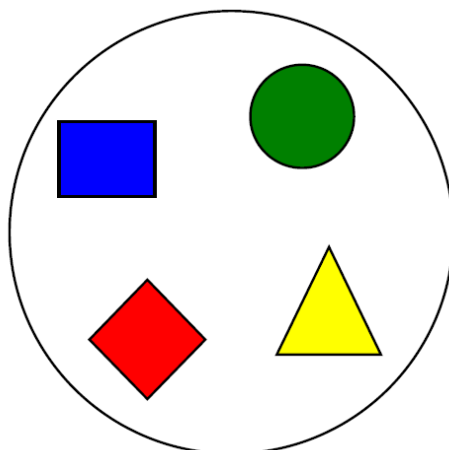
Usljed kontakta dolazi do klizanja između površina. Prema Coulombov zakonu trenja tangencijalni vektor naprezanja je limitiran s koeficijentom trenja i normalnim vektorom naprezanja prema jednadžbi

$$|\mathbf{t}_T| \leq \mu |\mathbf{t}_N| \quad (3.64)$$

na površini  $\Gamma$  koja je prikazana slikom 3.5., gdje je  $\mu$  faktor trenja. Jednadžba (3.64) prikazuje uvjet kada ne dolazi do klizanja između površina. Za definiranje kontakta bez trenja vrijedi  $\mu = 0$ .

Abaqus/Explicit koristi dva algoritma za modeliranje kontaktnih problema: osnovni kontaktni algoritam (eng. *general contact algorithm*) i algoritam kontaktnog para (eng. *contact pair algorithm*).

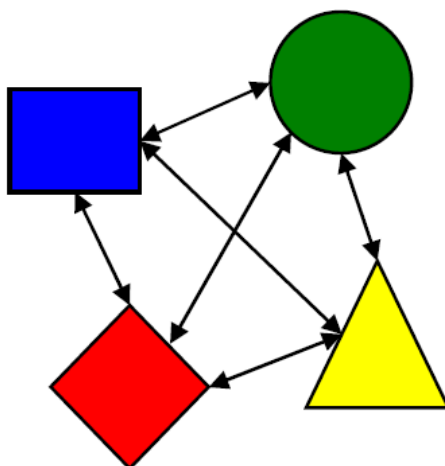
Osnovni kontaktni algoritam automatski definira kontakt na cijeli model s jednakim svojstvima, a domena kontakta se može prikazati slikom 3.6.



**Slika 3.6. Domena kontakta kod osnovnog kontaktnog algoritma [4]**

Definira kontakt između svih modela što je velika prednost kod velikog broja kontaktnih površina. Za nametanje ograničenja koristi *Penalty* metodu. Nakon definiranja kontakta osnovnim kontaktnih algoritmom na cijelom modelu, moguće je naknadno modificirati pojedine kontakte.

Algoritam kontaktnog para definira kontakt između dvije površine. Zahtjeva puno više korisničkog vremena i puno više pažnje oko odabira kontaktnih parova koji mogu doći u kontakt. Algoritam kontaktnog para se može prikazati slikom 3.7.

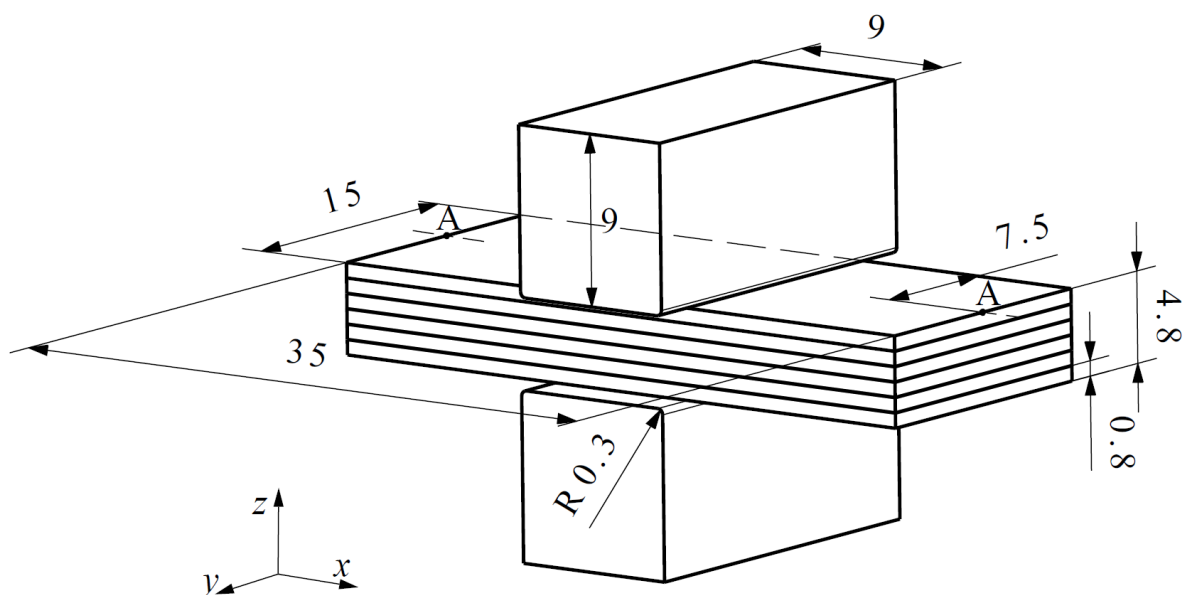


**Slika 3.7. Definiranje kontaktnih parova kod algoritma kontaktnog para [4]**

Za nametanje ograničenja koristi se metoda Lagrangeovih multiplikatora i *penalty* metoda. Prednost je u tome što je moguće detaljno definirati svaki pojedini kontakt između pojedinih površina.

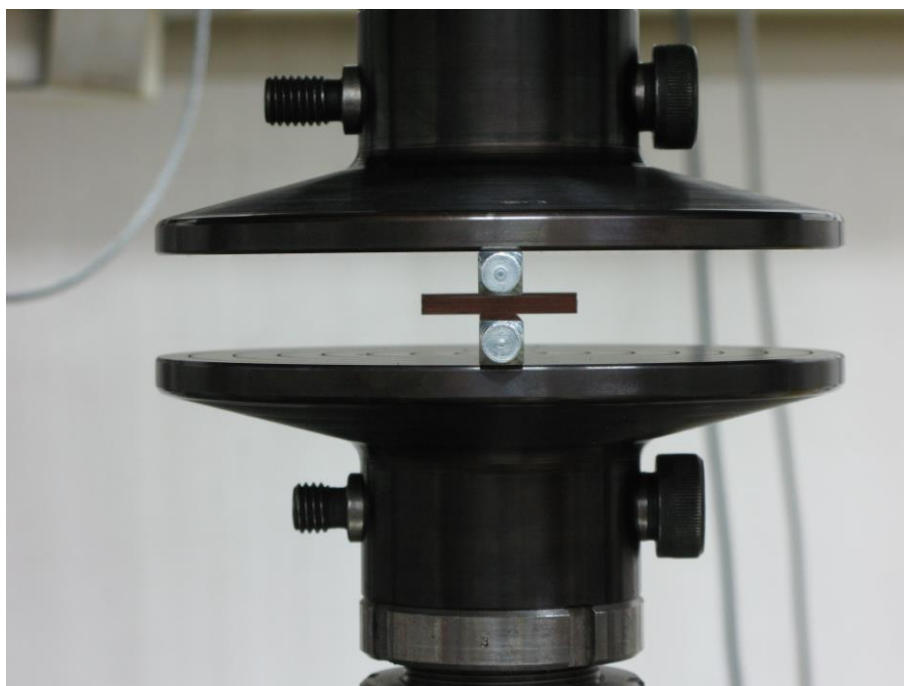
#### 4. EKSPERIMENTALNO MODELIRANJE PROCESA DEFORMIRANJA BAKRENIH LIMOVA

Metoda konačnih elemenata, kao i ostale numeričke metode, daju približna rješenja koja se mogu usporediti s eksperimentalnim mjerenjima (validacija) ili s analitičkim rješenjima (verifikacija). Numeričko modeliranje procesa deformiranja bakrenih limova validirano je eksperimentom kod kojeg je mjerena ovisnost sile o pomaku prizmatičnog bloka i mjereni su pomaci bakrenih limova krajnjeg deformiranog oblika. Model se sastoji od šest bakrenih limova postavljenih jedan na drugi između dva čelična prizmatična bloka, a prikazan je na slici 4.1.



**Slika 4.1. Dimenzije eksperimentalnog modela**

Čelični limovi se tlače preko čeličnih prizmatičnih blokova između čeljusti kidalice. Gornji čelični blok je pomičan, dok je donji nepomičan. Eksperiment je proveden u Laboratoriju za eksperimentalnu mehaniku Fakulteta strojarstva i brodogradnje Sveučilišta u Zagrebu. Slika 4.2. prikazuje postavljenje bakrene limove između gornjeg i donjeg čeličnog prizmatičnog bloka.

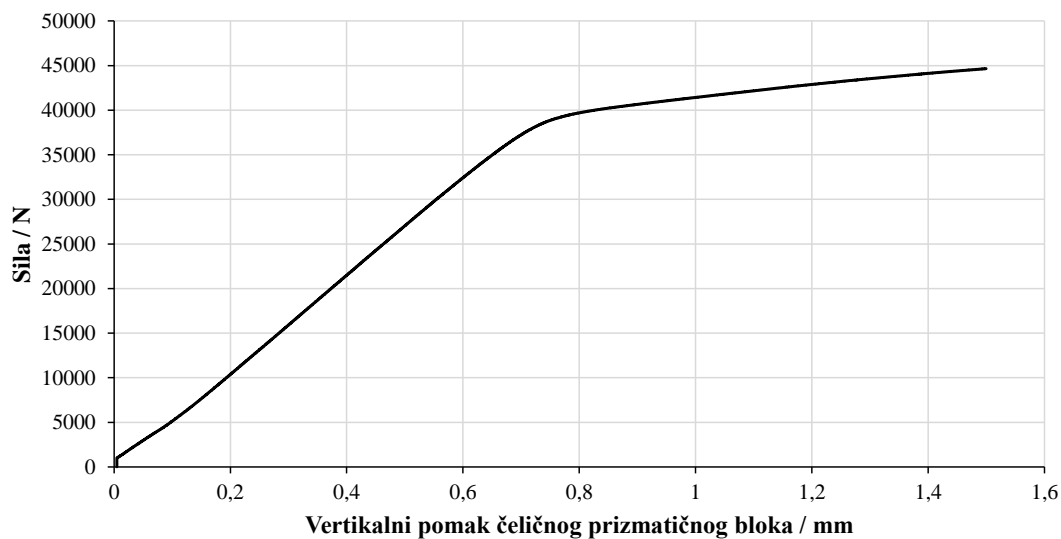


**Slika 4.2. Bakreni limovi postavljeni između dva čelična prizmatična bloka**

#### **4.1. Mjerenje ovisnosti sile i pomaka čeličnog prizmatičnog bloka**

Deformiranje bakrenih limova trebalo je biti provedeno na dinamičkoj kidalici pri velikim brzinama deformiranja, ali zbog kvara uređaja mjerenje je provedeno na statičnoj kidalici pri brzini od 2mm/s. Sve numeričke simulacije su dobivene za brzine veće od 30mm/s. Vertikalni pomak čeličnog prizmatičnog bloka iznosi 1,5mm.

Mjerenje ovisnosti sile i pomaka čeličnog prizmatičnog bloka provedeno je na kidalici, a dobiveni rezultati su prikazani na slici 4.3.

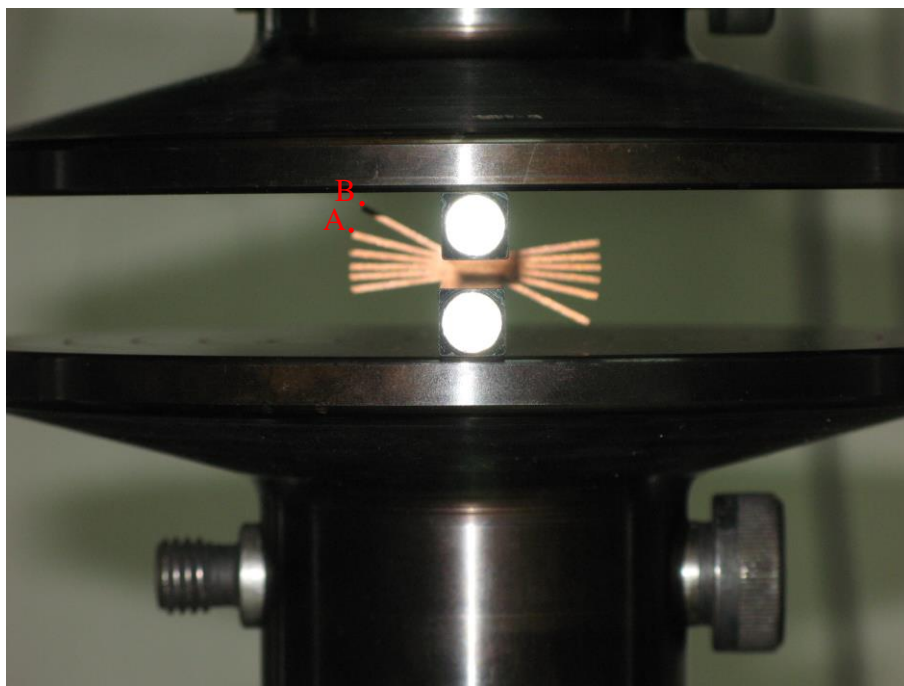


**Slika 4.3. Ovisnost sile o pomaku čeličnog prizmatičnog bloka**

Iz slike 4.3. je vidljivo da sila utiskivanja doseže 45000N. Kako je pomak čeličnog prizmatičnog bloka mali, a sile deformiranja velike, dobiveni pomaci su nešto veći od stvarnih pomaka zbog deformiranja alata te je uvedena dodatna korekcija pomaka.

## **4.2. Mjerenje pomaka**

Mjerenje pomaka je provedeno snimanjem deformiranja bakrenih limova s kamerom te korištenjem programa ImageJ. Na temelju snimljenog početnog deformiranog oblika (slika 4.2.) i krajnjeg deformiranog oblika (slika 4.4.) dobiveni su pomaci točaka A i B.



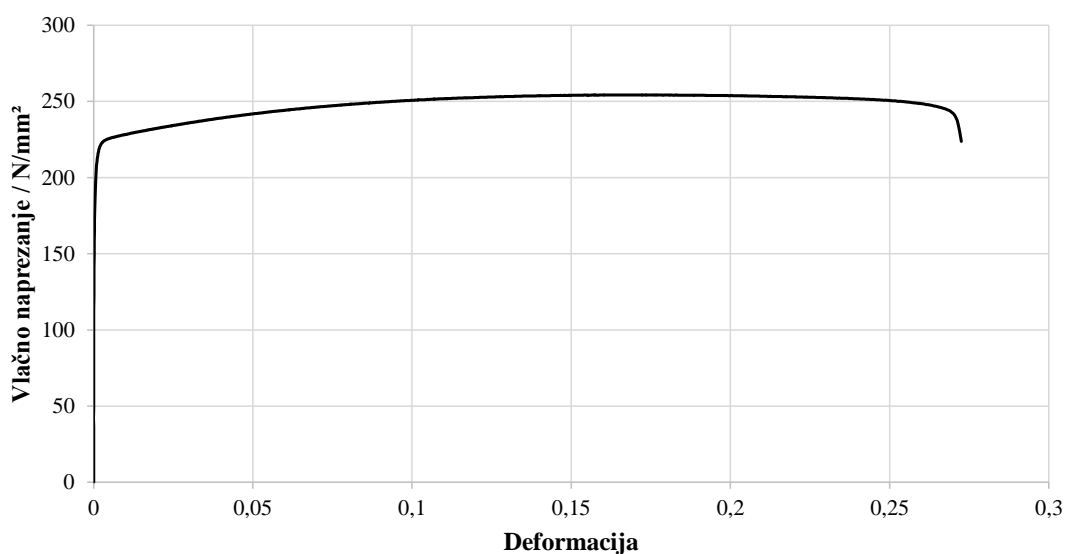
**Slika 4.4. Deformirani oblik bakrenih limova**

Iz slika 4.3. i 4.4. je vidljivo da tijekom deformiranja dolazi do horizontalnog pomaka gornjeg čeličnog prizmatičnog bloka u desnu stranu te se zbog toga dobiva nesimetrični deformirani oblik. Vertikalni pomak točke A iznosi 2,4mm, dok vertikalni pomak točke B iznosi 7,2mm. Za ispravno modeliranje eksperimenta potrebno je spriječiti horizontalni pomak gornjeg čeličnog prizmatičnog bloka.



## 5. NUMERIČKI MODEL PROCESA DEFORMIRANJA BAKRENIH LIMOVA

Rezultati dobiveni u prethodnom poglavlju uspoređeni su s rezultatima dobivenim u računalnom paketu Abaqus. Kao što je već rečeno u prethodnom poglavlju, provedeno je deformiranje šest bakrenih limova postavljenih jedan na drugi, a dimenzije se mogu vidjeti na slici 4.1. Materijal limova je čisti bakar tvorničkom oznakom CuF25[16], a njegov konvencionalni dijagram razvlačenja je prikazan na slici 5.1.



**Slika 5.1. Konvencionalni dijagram razvlačenja bakra**

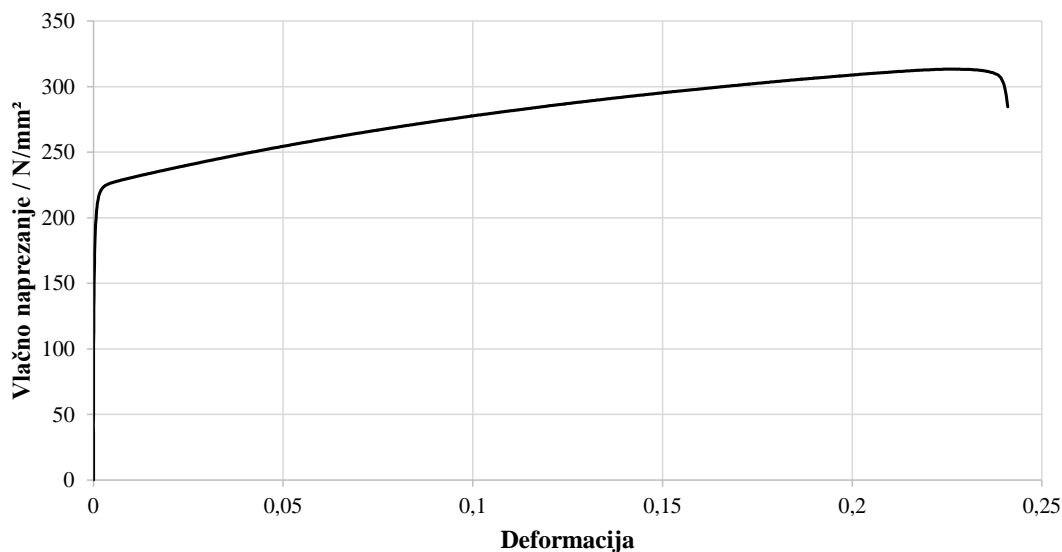
Konvencionalni dijagram razvlačenja se može koristiti za male deformacije, ali kod pojave velikih deformacija ne opisuje dobro mehanička svojstva zbog smanjivanja poprečnog presjeka epruvete. Stvarno napreznje koje se javlja u epruveti opisuje stvarni dijagram razvlačenja koji se računa iz konvencionalnog dijagrama razvlačenja jednadžbama[17]:

$$\sigma_T = \sigma(1 + \varepsilon) \quad (5.1)$$

i

$$\varepsilon_T = \ln(1 + \varepsilon). \quad (5.2)$$

Uvrštavanjem eksperimentalnih podataka iz dijagrama prikazanog slikom 5.1. u jednadžbe (5.1) i (5.2) dobiva se stvarni dijagram razvlačenja prikazan slikom 5.2.



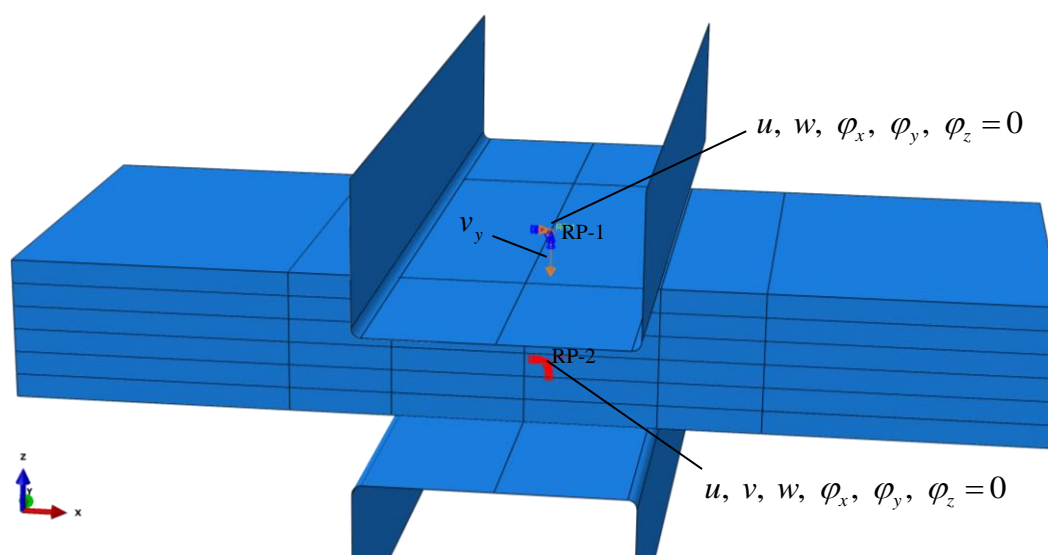
**Slika 5.2. Stvarni dijagram razvlačenja bakra**

Iz dijagrama razvlačenja su očitani: modul elastičnosti  $E = 120371 \text{ MPa}$  i granica tečenja  $R_e = 220 \text{ N/mm}^2$ . Koeficijent toplinskog rastezanja iznosi  $\alpha = 17,7 \cdot 10^{-6} \frac{1}{\text{K}}$ . Toplinska svojstva su uzeta na sobnoj temperaturi, a iznose[16]: specifični toplinski kapacitet  $c = 386 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$ , toplinska provodljivost  $\lambda = 394 \frac{\text{W}}{\text{m} \cdot \text{K}}$ . Gustoća bakra pri sobnoj temperaturi iznosi  $\rho = 8900 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ . Početna temperatura ploča iznosi  $T_0 = 23^\circ\text{C}$ . U okviru ovog rada su sva toplinska i mehanička svojstva uzeta na sobnoj temperaturi. Također, mehanička svojstva ne ovise o brzini deformacije.

### 5.1. 3D numerički model

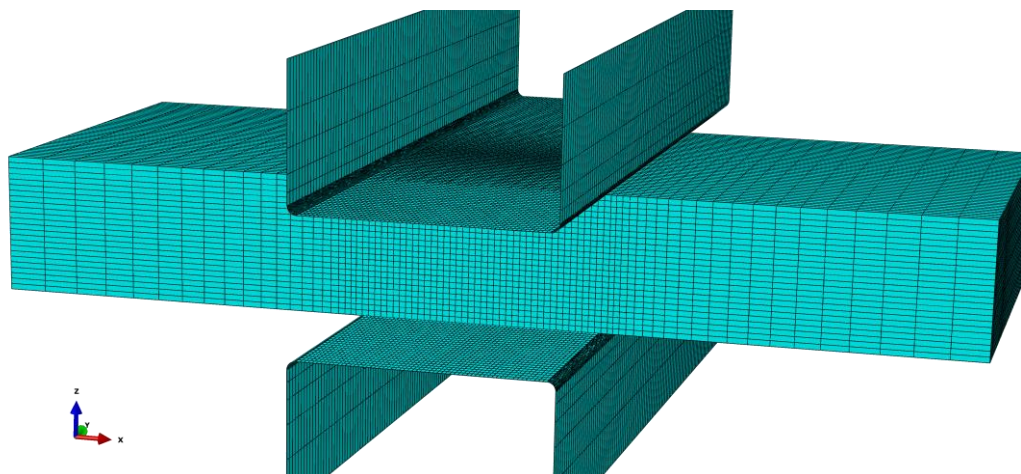
Čelični prizmatični blok kojim kidalica deformira bakrene limove mnogo je krući od bakrenih limova te se zbog pojednostavljenja modela i kraćeg računalnog vremena diskretizira krutim konačnim elementima. Diskretizacija krutim konačnim elementima služi za opisivanje geometrije alata, dok za jednostavnije geometrije moguće je koristiti analitičko kruto tijelo. U okviru ovog rada čelični prizmatični blokovi su diskretizirani krutim R3D4 elementima. Bakreni limovi su diskretizirani trodimenzijskim konačnim elementima C3D8RT koji je opisan u 3. poglavlju. Za simulaciju deformiranja bakrenih limova korištena je potpuno spregnuta dinamičko-toplinska analiza u Abaqus/Explicit. Izvor topline uslijed plastične

deformacije definiran je preko *inelastic heat fraction-a* koji definira koliko energije plastičnog deformiranja prelazi u toplinsku energiju, a prema [18] ovisi o temperaturi, plastičnoj deformaciji i brzini plastične deformacije. U okviru ovog rada uzeta je konstantna vrijednost koja za metale iznosi  $\eta_v = 0,9$ . Drugi izvor topline tijekom deformiranja pojavljuje se uslijed trenja između bakrenih limova. Faktor trenja između alata i bakrenih limova definiran je 0,15, dok između bakrenih limova iznosi 0,12. Sva energija trenja prelazi u toplinsku energiju. Zbog kratkog vremena deformiranja nije definirano hlađenje između okoliša i bakrenih limova, već je definirana kondukcija između bakrenih limova koji su u međusobnom kontaktu. Kontakt je definiran osnovnim kontaktnim algoritmom koji za namatanje ograničenja koristi *Penalty* metodu. Brzina deformiranja iznosi 30mm/s, a pomak gornjeg pomičnog čeličnog prizmatičnog bloka iznosi 1,5mm. Rubni uvjeti su prikazani na slici 5.3.



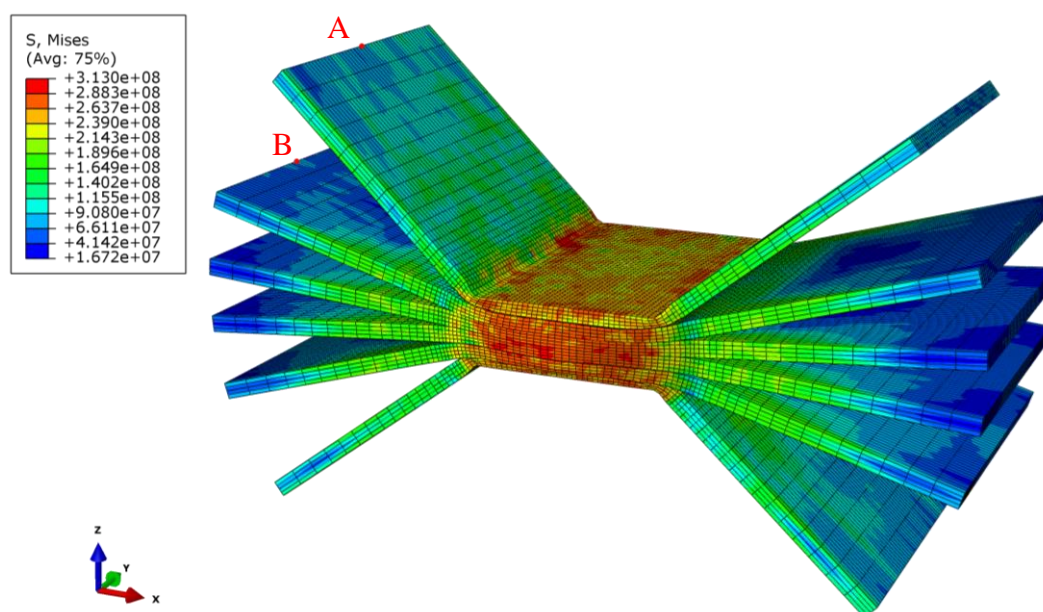
**Slika 5.3. Rubni uvjeti na 3D modelu**

Gornji i donji čelični prizmatični blok je povezan s referentnim točkama (RP-1 i RP-2), a u referentnim točkama su definirani rubni uvjeti. S više različitih mreža ispitana je konvergencija rezultata, a slika 5.4. prikazuje konvergiranu mrežu konačnih elemenata.



**Slika 5.4.** Numerički model diskretiziran sa 97920 konačni elemenata C3D8RT

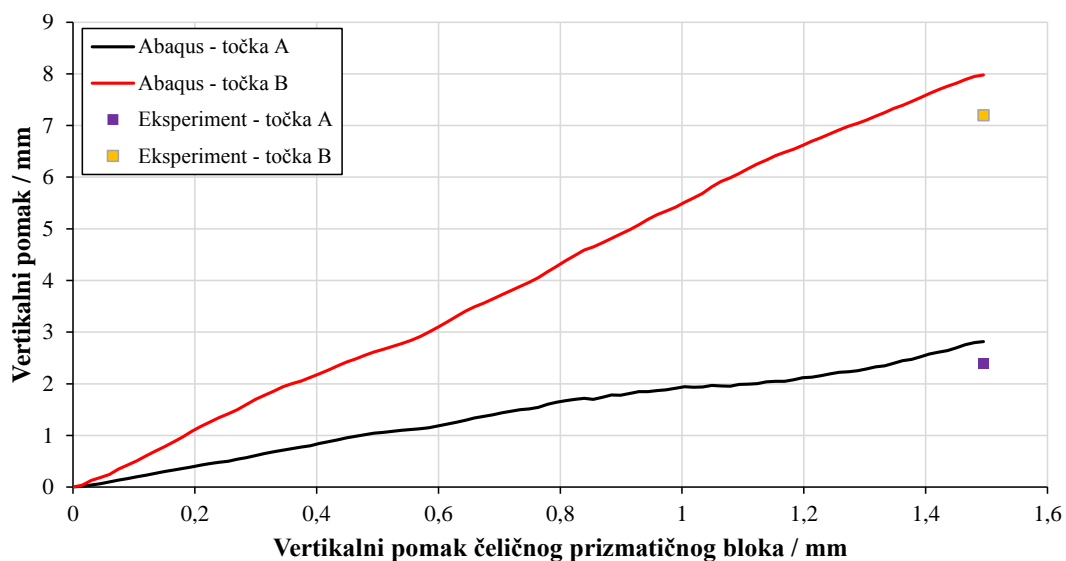
Raspodjela ekvivalentnih napreznja prema von Misesu [Pa] prikazana je na slici 5.5.



**Slika 5.5.** Raspodjela ekvivalentnih napreznja prema von Misesu [Pa]

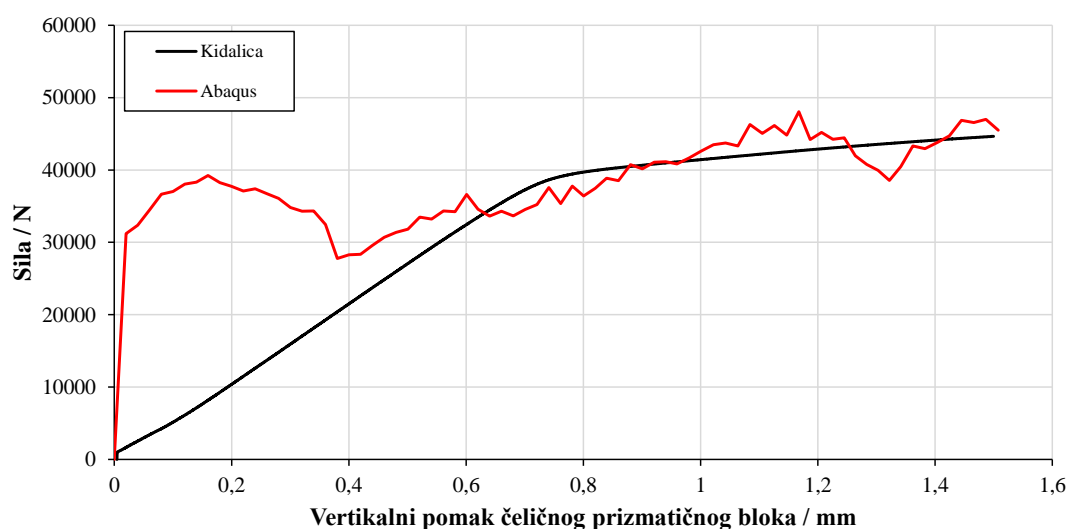
Na slici 5.5. je vidljivo da su najveća ekvivalentna napreznja u području između gornjeg i donjeg čeličnog prizmatičnog bloka. Deformirani oblik 3D numeričkog modela se ne poklapa s deformiranim oblikom dobivenim eksperimentom (slika 4.4.) zbog horizontalnog pomaka čeličnog prizmatičnog bloka. Rješenja 3D numeričkog modela i eksperimentalnog modela bi se više poklapala ukoliko bi bio ograničen horizontalni pomak gornjeg čeličnog prizmatičnog bloka. Na slici 5.5. su definirane točke A i B koje se nalaze na presjeku A-A prema slici 4.1.

Slika 5.6. prikazuje ovisnost vertikalnog pomaka točaka A i B o vertikalnom pomaku čeličnog prizmatičnog bloka.



**Slika 5.6. Vertikalni pomak točaka A i B u ovisnosti o vertikalnom pomaku čeličnog prizmatičnog bloka**

Iz slike 5.6. je vidljivo da rješenja dobivena 3D numeričkim modelom malo odstupaju od eksperimentalnih rezultata zbog horizontalnog pomaka čeličnog prizmatičnog bloka. Slika 5.7. prikazuje ovisnost sile i vertikalnog pomaka čeličnog prizmatičnog bloka dobivenu u Abaqusu i na kidalici.

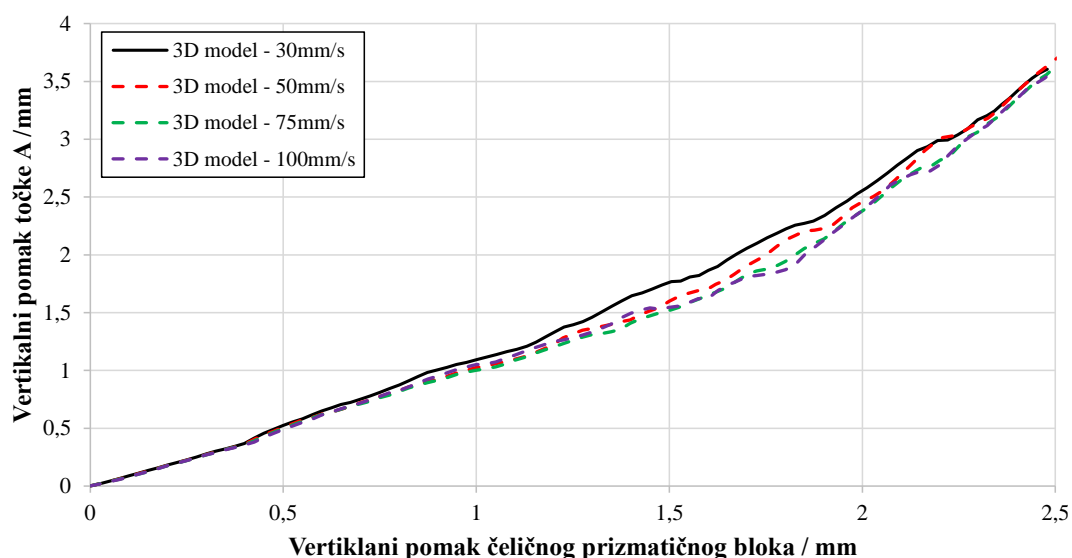


**Slika 5.7. Ovisnost sile o pomaku čeličnog prizmatičnog bloka**

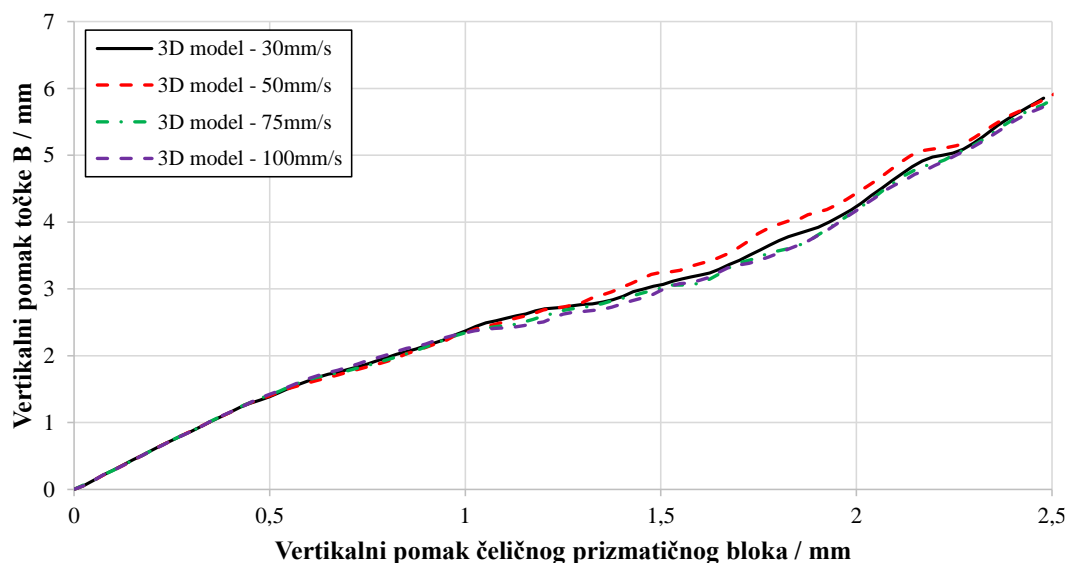
Iz slike 5.7. je vidljivo kako rezultati pri manjem iznosu pomaka vertikalnog prizmatičnog bloka odstupaju od eksperimentalnih rezultata, dok se za veći pomak poklapaju.

### 5.1.1. Parametarsko ispitivanje na 3D modelu

U okviru parametarskog ispitivanja razmatran je utjecaj različite brzine deformiranja i različitog faktora trenja na numeričke rezultate. Odabrane su dvije brzine deformiranja koje iznose 30mm/s i 100mm/s, dok su faktori trenja i ostali parametri jednaki kao u prethodnom poglavlju. Vertikalni pomak pomičnog čeličnog prizmatičnog bloka iznosi 1,5mm. Za sve analize pratio se vertikalni pomak točaka A i B prikazanih na slici 5.5. u ovisnosti o vertikalnom pomaku čeličnog prizmatičnog bloka, a dijagrami na slikama 5.8. i 5.9. prikazuju dobivena rješenja.



Slika 5.8. Ovisnost vertikalnog pomaka točke A za različite brzine deformiranja o vertikalnom pomaku čeličnog prizmatičnog bloka



**Slika 5.9. Ovisnost vertikalnog pomaka točke B za različite brzine deformiranja o vertikalnom pomaku čeličnog prizmatičnog bloka**

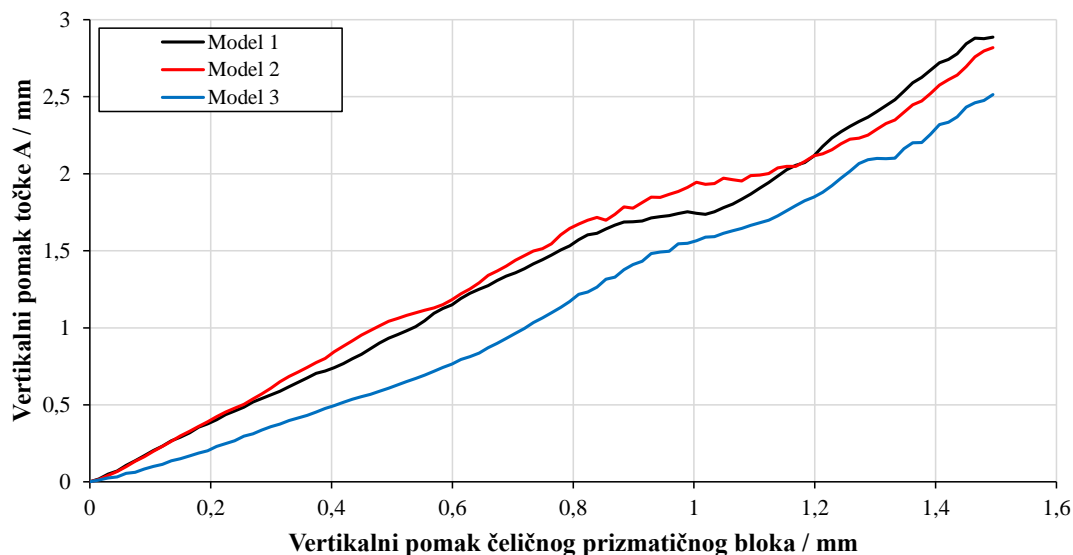
Iz slika 5.8. i 5.9. može se zaključiti da promjena brzina deformiranja vrlo malo utječe na rezultate jer materijalna svojstva nisu definirana u ovisnosti o brzini deformiranja. Također, ostale fizikalne veličine se vrlo malo mijenjaju u odnosu na promjenu brzine deformiranja. Kod eksplicitnog integratora stabilni vremenski korak je vrlo mali te vrijeme trajanja analize značajno utječe na potrebno računalno vrijeme. Kako se promjenom brzine deformiranja vrlo malo utječe na dobivene rezultate, zbog značajno kraćeg računalnog vremena brzina čeličnog prizmatičnog bloka kod svih parametarskih istraživanja iznosi 100mm/s.

Drugo parametarsko istraživanje je provedeno s tri različita faktora trenja pri brzini od 100mm/s, a iznos faktora trenja za pojedine numeričke modele prikazan je u Tablici 5.1.

**Tablica 5.1. Modeli za parametarsko modeliranje**

Model	Faktor trenja između bakra i bakra	Faktor trenja između čelika i bakra
Model 1	0,05	0,05
Model 2	1,2	1,5
Model 3	2,5	2,5

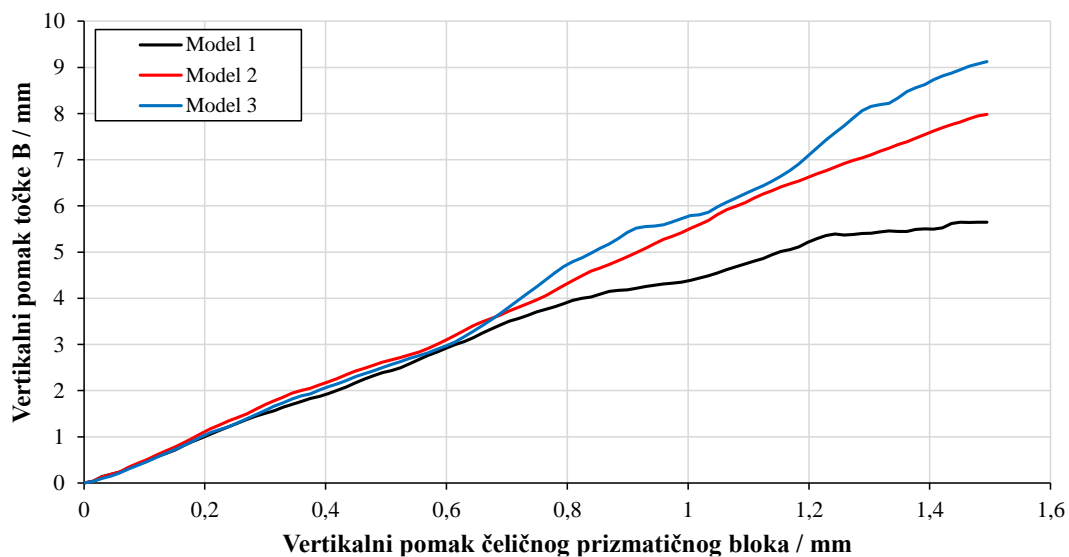
Vertikalni pomak čeličnog prizmatičnog bloka iznosi 1,5mm. Slike 5.10. i 5.11. prikazuju vertikalni pomak točaka A i B u ovisnosti o vertikalnom pomaku čeličnog prizmatičnog bloka.



**Slika 5.10. Ovisnost vertikalnog pomaka točke A za različiti faktor trenja o vertikalnom pomaku čeličnog prizmatičnog bloka**

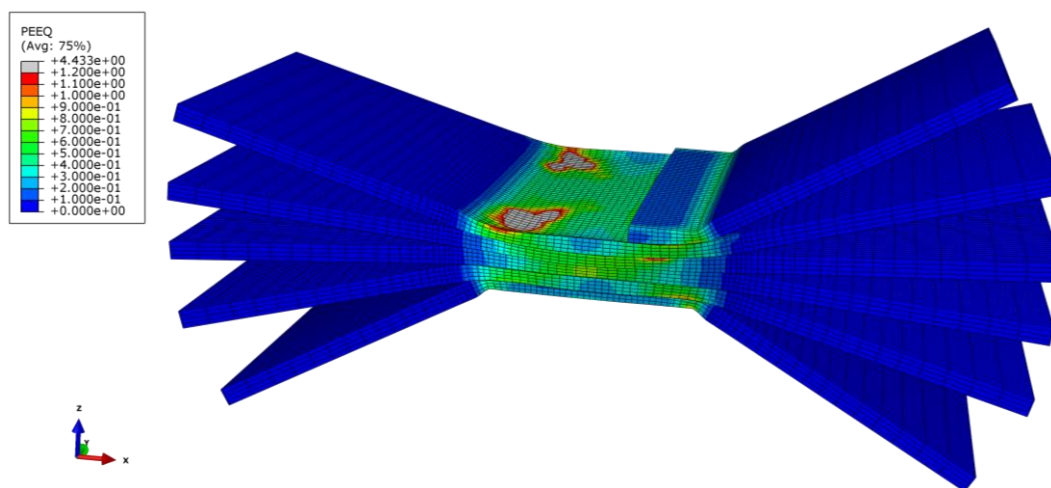
Vertikalni pomak točke A kod modela 1 i 2 je sličan jer dolazi do utiskivanja gornjeg i donjeg lima u ostale limove. Kod modela 2 zbog većeg trenja ne dolazi do utiskivanja te je vertikalni pomak točke A manji od modela 1 i 2.





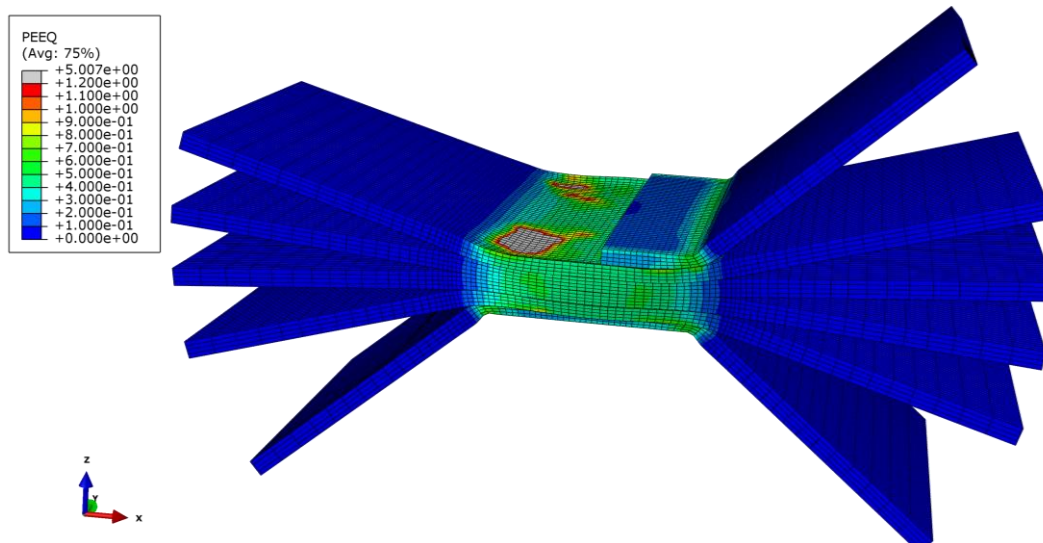
**Slika 5.11. Ovisnost vertikalnog pomaka točke B za različiti faktor trenja o vertikalnom pomaku čeličnog prizmatičnog bloka**

Povećanjem faktora trenja dolazi od manjeg utiskivanja gornjeg i donjeg lima u ostale bakrene limove te zbog toga vertikalni pomak raste. Slike 5.12., 5.13, 5.14. prikazuju raspodjelu ekvivalentne plastične deformacije na kraju deformiranja za sva tri modela.



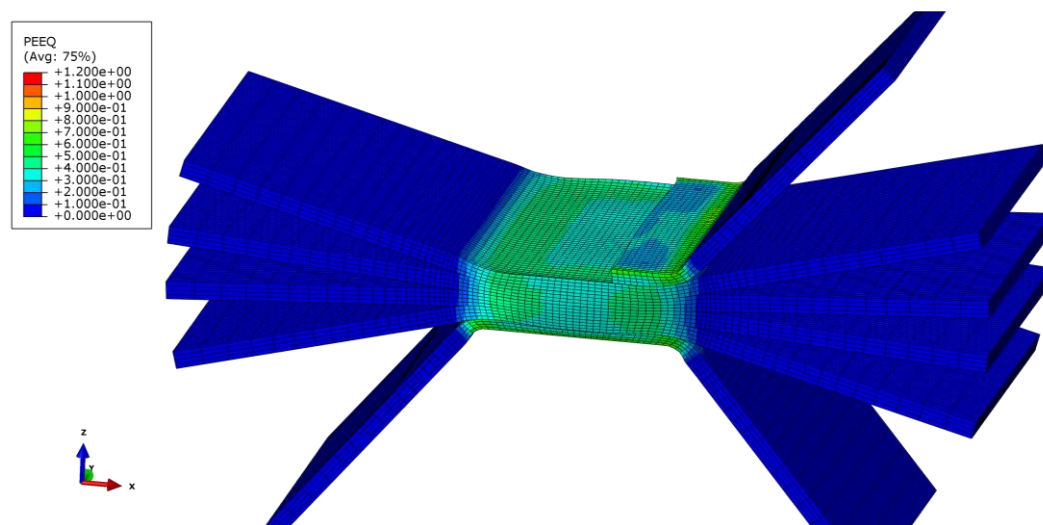
**Slika 5.12. Raspodjela ekvivalentne plastične deformacije za model 1**

Dio gornjeg lima je uklonjen iz pogleda zbog prikaza područja maksimalne ekvivalentne deformacije. Također, iz pogleda su uklonjeni čelični prizmatični bokovi. Zbog niskog faktora trenja dolazi do utiskivanja gornjeg i donjeg lima u ostale limove.



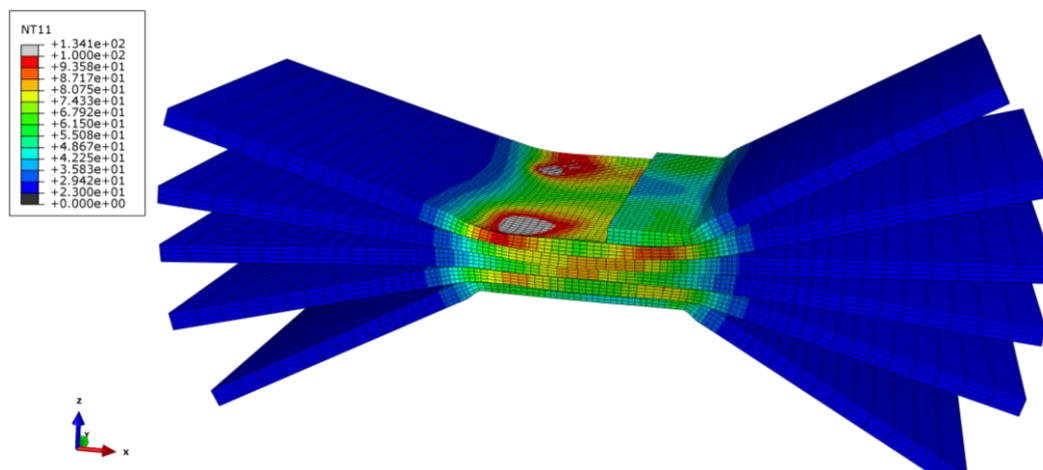
Slika 5.13. Raspodjela ekvivalentne plastične deformacije za model 2

Za razliku od modela 1, kod modela 2 iznos faktora trenja je veći te je utiskivanje gornjeg i donjeg lima manje. Područje maksimalne ekvivalentne deformacije je manje kod modela 2 u odnosu na model 1.

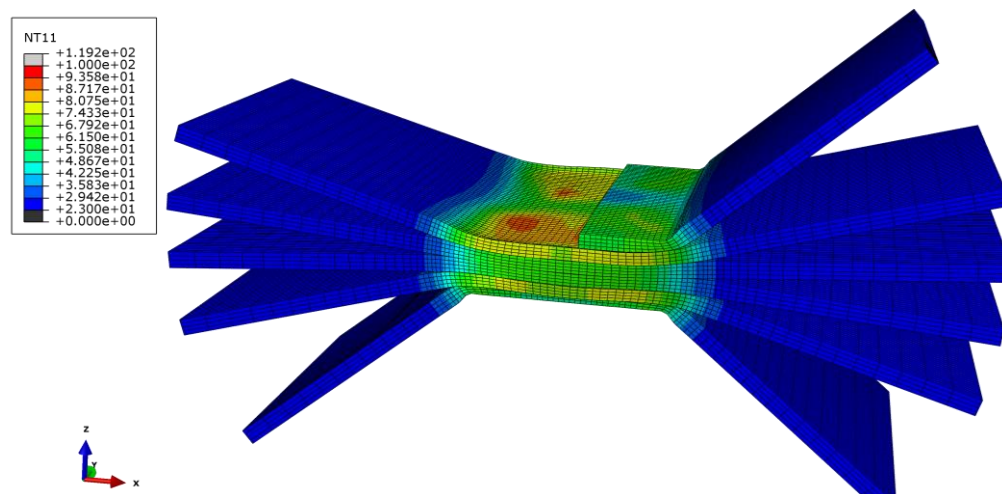


Slika 5.14. Raspodjela ekvivalentne plastične deformacije za model 3

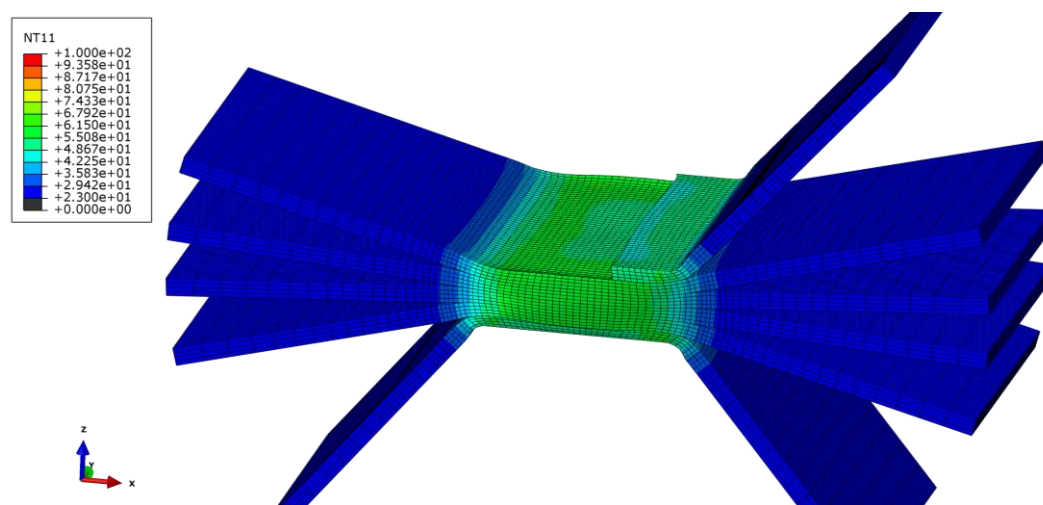
Na slici 5.14. vidljivo je da nema pojave utiskivanja zbog većeg faktora trenja. Kako nema pojave utiskivanja, raspodjela ekvivalentne plastične deformacije modela 3 značajno se razlikuje od modela 1 i 2. Slike 5.15., 5.16. i 5.17. prikazuju raspodjelu temperature na kraju deformiranja za sva tri modela.



Slika 5.15. Raspodjela temperature za modela 1



Slika 5.16. Raspodjela temperature za modela 2

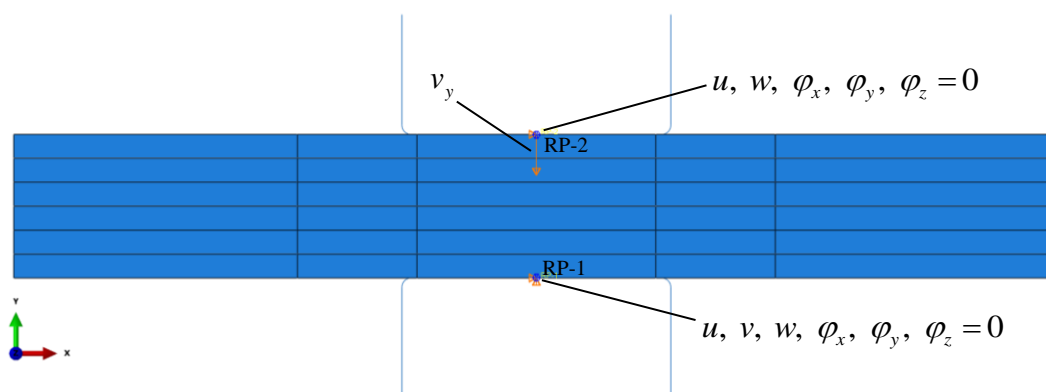


Slika 5.17. Raspodjela temperature za modela 3

Povećanjem trenja dolazi do smanjenja temperature na kraju deformiranja zbog manje ekvivalentne plastične deformacije i manjeg klizanja između limova.

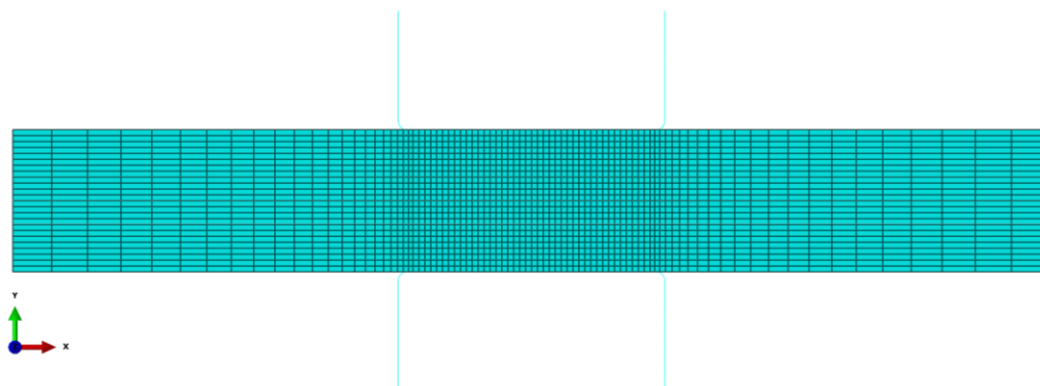
## 5.2. 2D numerički model

2D numerički model dinamičkog procesa deformiranja bakrenih limova diskretiziran je 2D konačnim elementima kod kojeg je računalno vrijeme puno kraće u odnosu na 3D numerički model. Pojava trenja uzrokuje tangencijalna naprezanja koja narušavaju uvjet ravninskog stanja naprezanja. Debljina numeričkog modela je jedinična. Čelični prizmatični blokovi su diskretizirani krutim grednim konačnim elementima R2D2, dok su limovi diskretizirani 2D elementima za ravninsko stanje deformacije CPE4RT i za ravninsko stanje naprezanja CPS4RT. Svi navedeni konačni elementi se mogu pronaći u računalnom paketu Abaqus. Čelični prizmatični blokovi su povezani s referentnim točkama u kojima su definirani rubni uvjeti. Slika 5.18. prikazuje definirane rubne uvjete na 2D numeričkom modelu.



Slika 5.18. Rubni uvjeti na 2D modelu

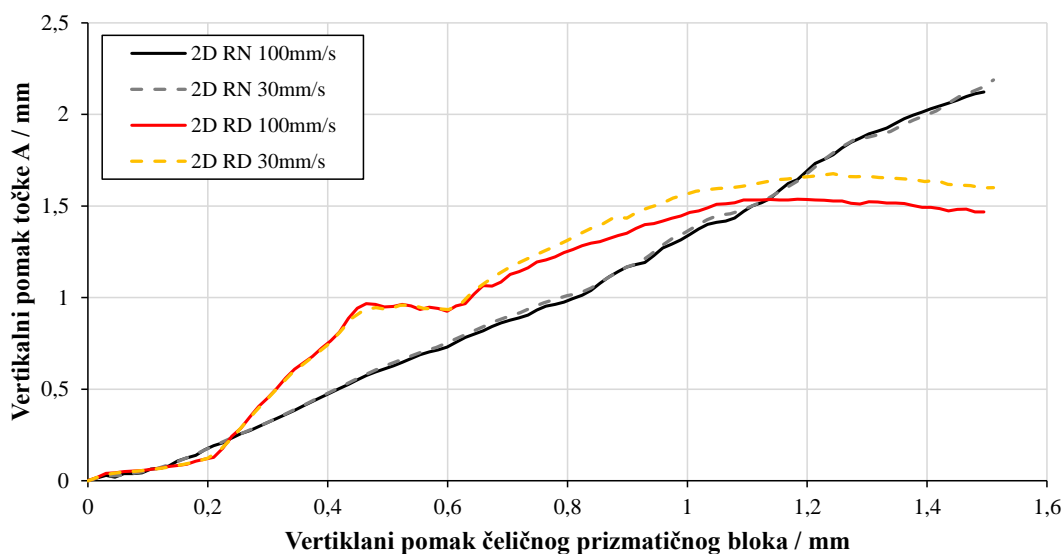
S više različitih mreža ispitana je konvergencija rezultata, a slika 5.19. prikazuje konvergiranu mrežu konačnih elemenata 2D numeričkog modela.



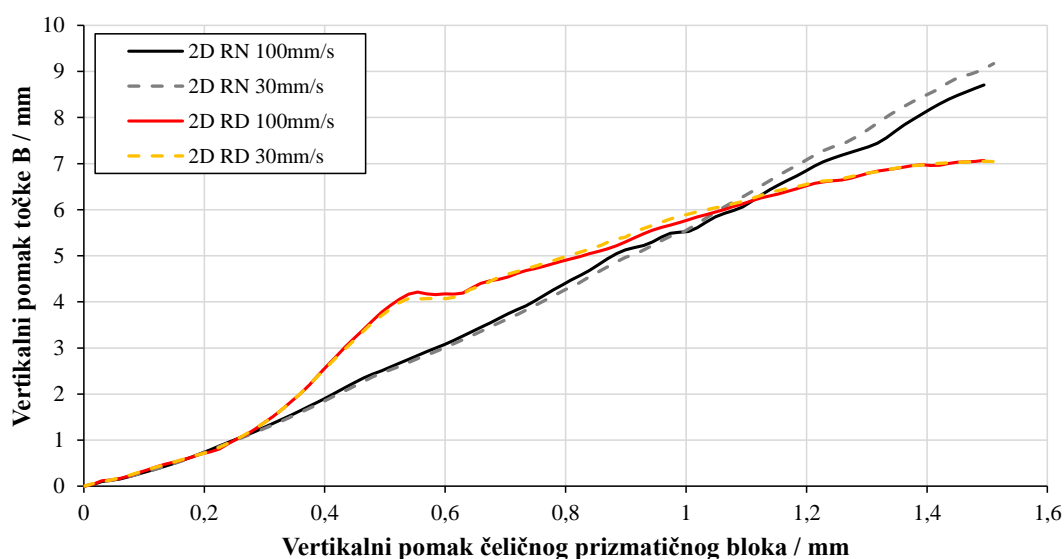
Slika 5.19. Numerički model diskretiziran s 2016 konačni elemenata CPE4RT

### 5.2.1. Usporedba rezultata s 3D numeričkim modelom

Provedena je usporedba rezultata 2D i 3D numeričkog modela za različite iznose faktora trenja. Numerički modeli s različitim faktorima trenja su prikazani u tablici 1., a ovisno o diskretizaciji, uz naziv modela i broj modela, uvedeni su nazivi 2D RN, 2D RD i 3D model. 2D RN označuje numerički model diskretiziran 2D elementima za ravninsko stanje naprezanja, dok 2D RD označuje numerički model koji je diskretiziran 2D konačnim elementima za ravninsko stanje deformacije. Slike 5.20. i 5.21. prikazuju utjecaj brzine deformiranja na vertikalni pomak točaka A i B koji su prikazani u ovisnosti o pomaku čeličnog prizmatičnog bloka.



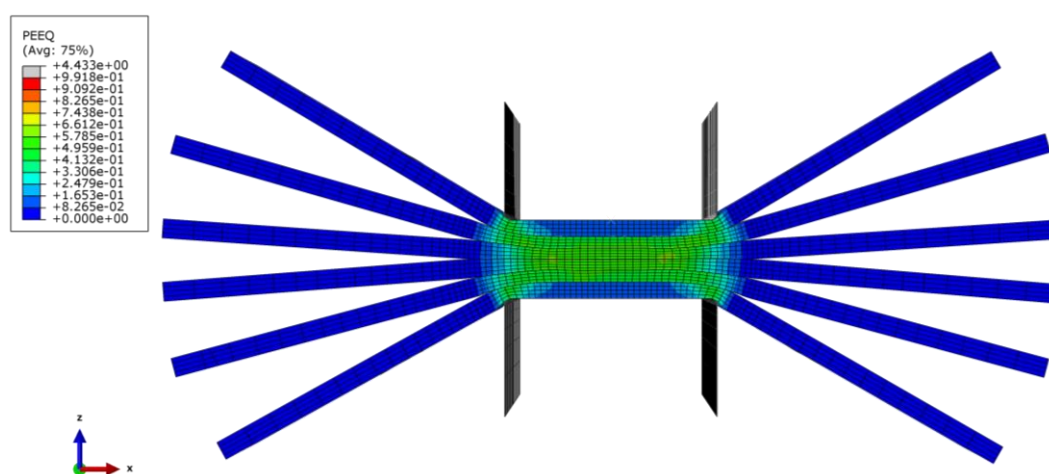
Slika 5.20. Ovisnost vertikalnog pomaka točke A o vertikalnom pomaku čeličnog prizmatičnog bloka za različite brzine deformiranja



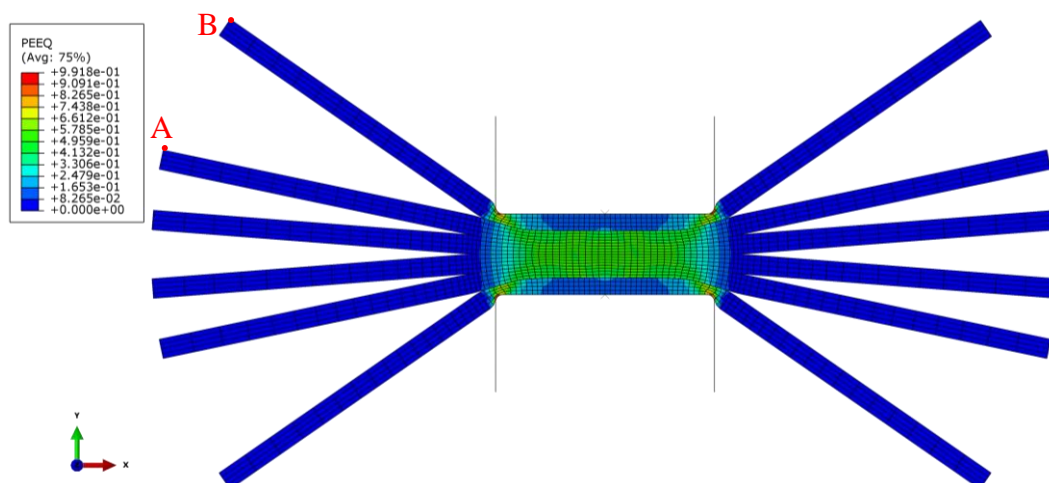
Slika 5.21. Ovisnost vertikalnog pomaka točke B o vertikalnom pomaku čeličnog prizmatičnog bloka za različite brzine deformiranja

Iz slika 5.20. i 5.21. je vidljivo da promjena brzine deformiranja vrlo malo utječe na rezultate jer materijalna svojstva ne ovise o brzini deformiranja. Kako se promjenom brzine deformiranja vrlo malo utječe na dobivene rezultate, za parametarska istraživanja brzina čeličnog prizmatičnog bloka iznosi 100mm/s. Pomak čeličnog prizmatičnog bloka iznosi 1,5mm.

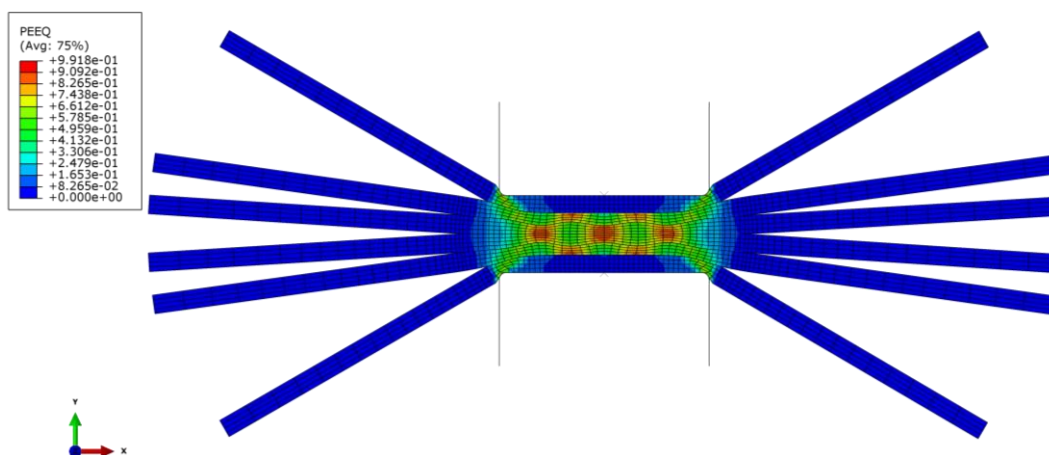
Slike 5.22., 5.23. i 5.24. prikazuju raspodjelu ekvivalentne plastične deformacije 2D i 3D numeričkog modela za iznos faktora trenja modela 1.



Slika 5.22. Raspodjela ekvivalentne plastične deformacije po presjeku A-A za 3D model 1

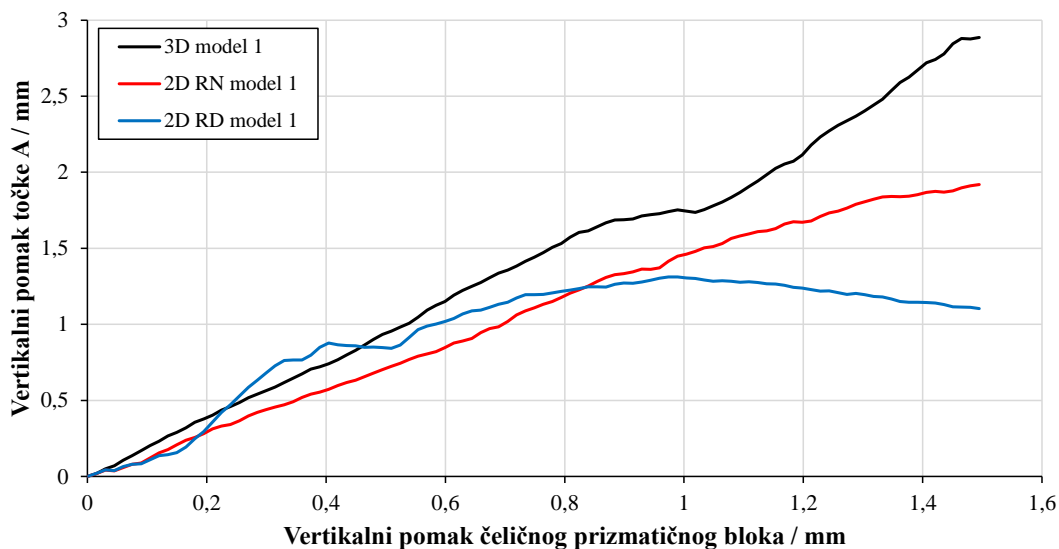


Slika 5.23. Raspodjela ekvivalentne plastične deformacije za 2D RN model 1

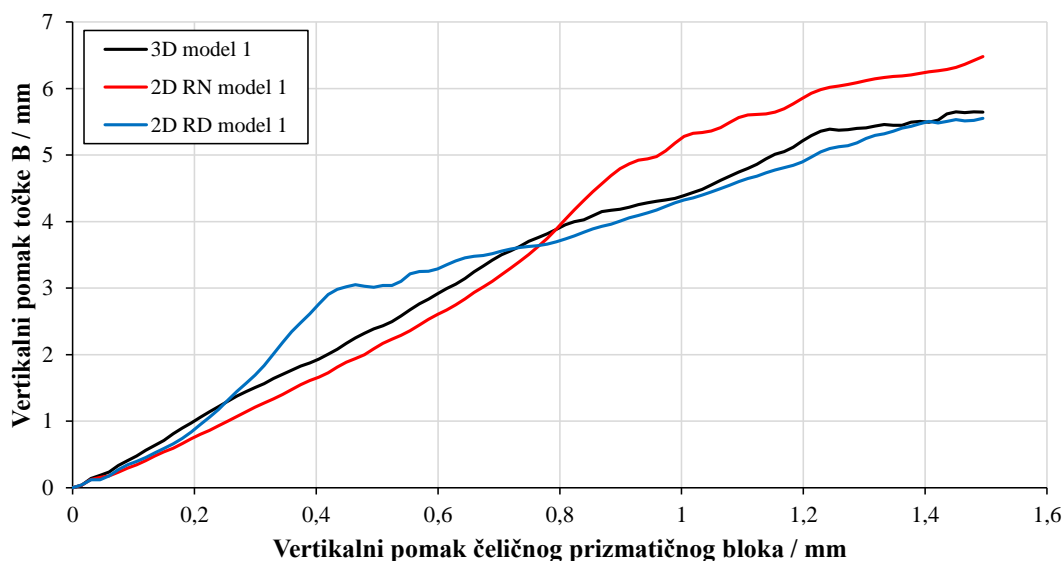


Slika 5.24. Raspodjela ekvivalentne plastične deformacije za 2D RD model 1

Elementi za ravnisko stanje naprezanja dobro opisuju raspodjelu ekvivalentne plastične deformacije srednjeg presjeka A-A 3D modela, dok elementi za ravninsko stanje deformacije dosta odstupaju. Slike 5.25. i 5.26. prikazuju vertikalni pomak točaka A i B u ovisnosti o vertikalnom pomaku čeličnog prizmatičnog bloka za različite numeričke modele pri iznosu faktora trenja modela 1. Točke A i B za 2D model su prikazane na slici 5.23.



**Slika 5.25. Ovisnost vertikalnog pomaka točke A o vertikalnom pomaku čeličnog prizmatičnog bloka za iznos faktora trenja modela 1**

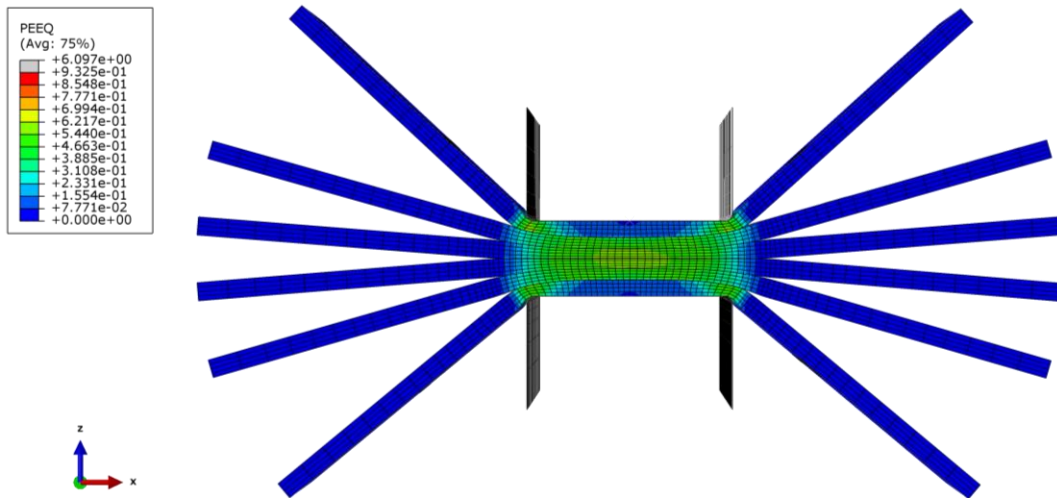


**Slika 5.26. Ovisnost vertikalnog pomaka točke B o vertikalnom pomaku čeličnog prizmatičnog bloka za iznos faktora trenja modela 1**

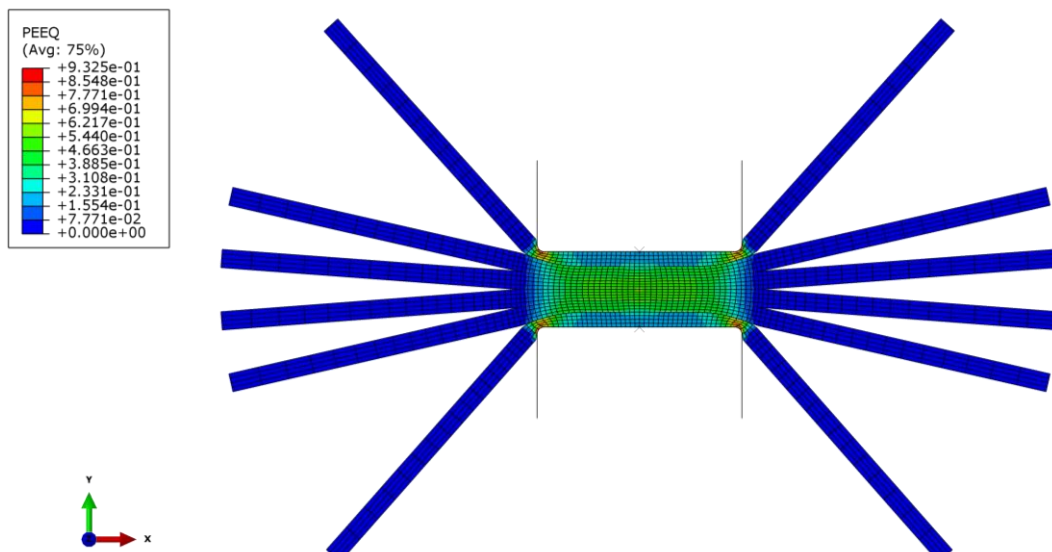
Iz slika 5.25. i 5.26. je vidljivo da elementi za ravninsko stanje naprezanja dobro opisuju ovisnost vertikalnog pomaka točaka A i B o vertikalnom pomaku čeličnog prizmatičnog bloka. Dinamičko deformiranje bakrenih limova može se dobro opisati elementima za ravninsko stanje naprezanja za iznos faktora trenja modela 1. Kod nižeg faktora trenja niža su tangencijalna naprezanja koja narušavaju ravninsko stanje naprezanja. Također, na odstupanje rezultata utječe i utiskivanje gornjeg i donjeg lima u ostale limove.



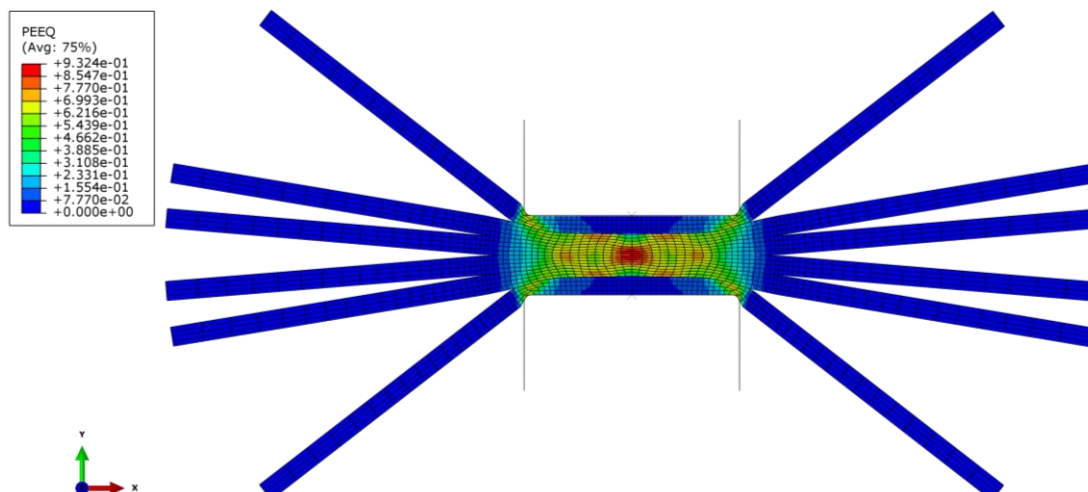
Slike 5.27., 5.28. i 5.29. prikazuju ekvivalentnu plastičnu deformaciju 2D i 3D numeričkog modela za iznos faktora trenja modela 2.



Slika 5.27. Raspodjela ekvivalentne plastične deformacije po presjeku A-A za 3D model 2

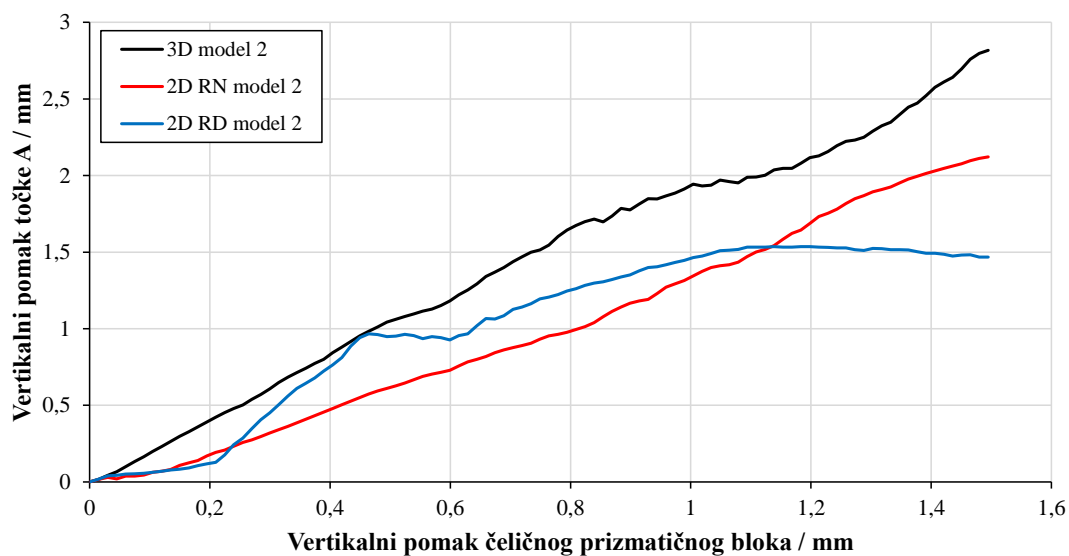


Slika 5.28. Raspodjela ekvivalentne plastične deformacije za 2D RN model 2

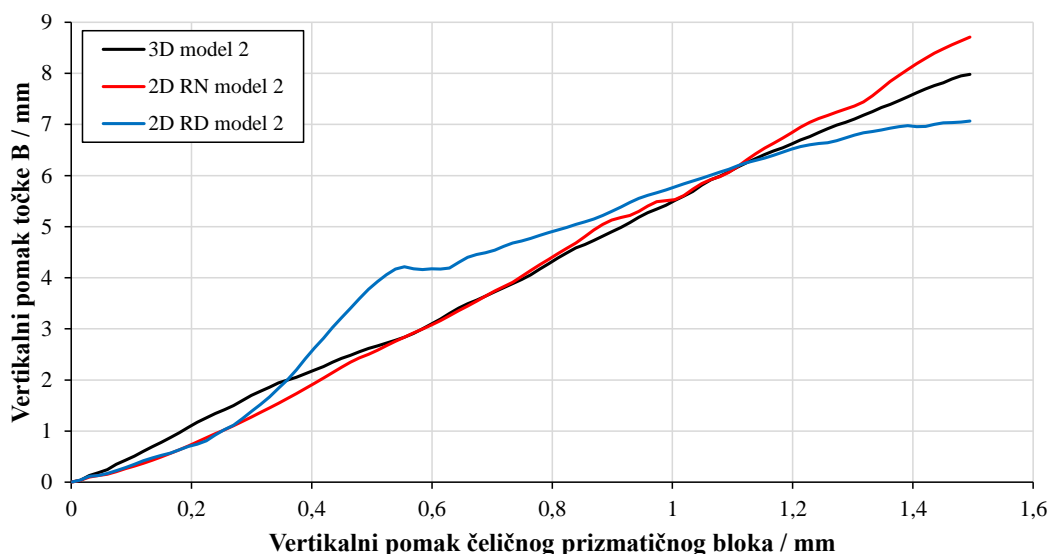


Slika 5.29. Raspodjela ekvivalentne plastične deformacije za 2D RD model 2

Povećanje trenja dovodi do većeg odstupanja od ravninskog stanja naprezanja te zbog toga dolazi do nešto većeg odstupanja u rezultatima. Slike 5.30. i 5.31. prikazuju vertikalni pomak točaka A i B u ovisnosti o vertikalnom pomaku čeličnog prizmatičnog bloka za različite numeričke modele pri iznosu faktora trenja modela 2.

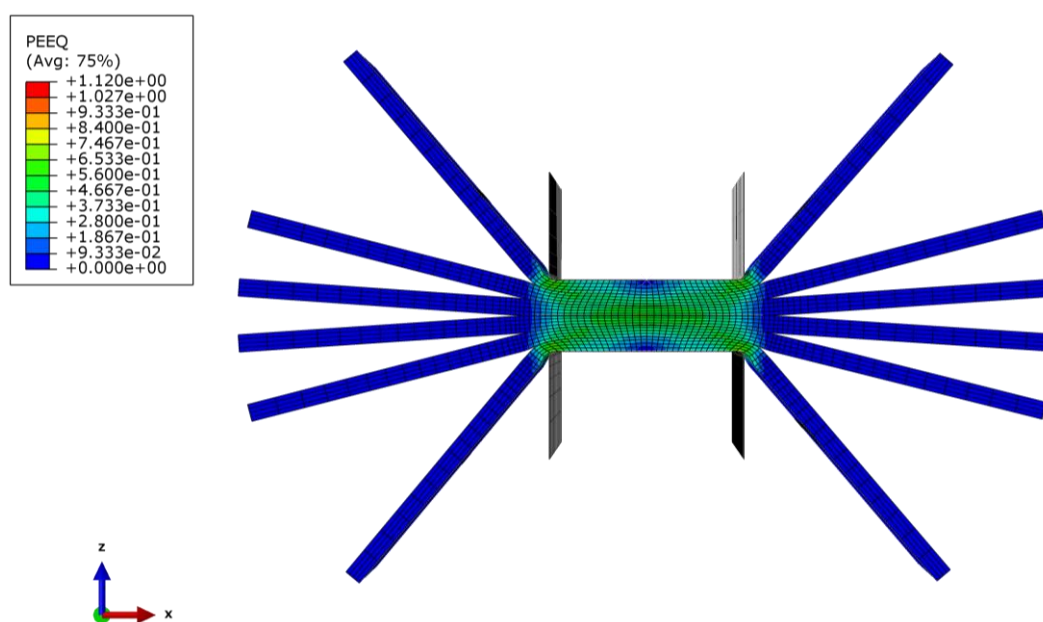


Slika 5.30. Ovisnost vertikalnog pomaka točke A o vertikalnom pomaku čeličnog prizmatičnog bloka za iznos faktora trenja modela 2

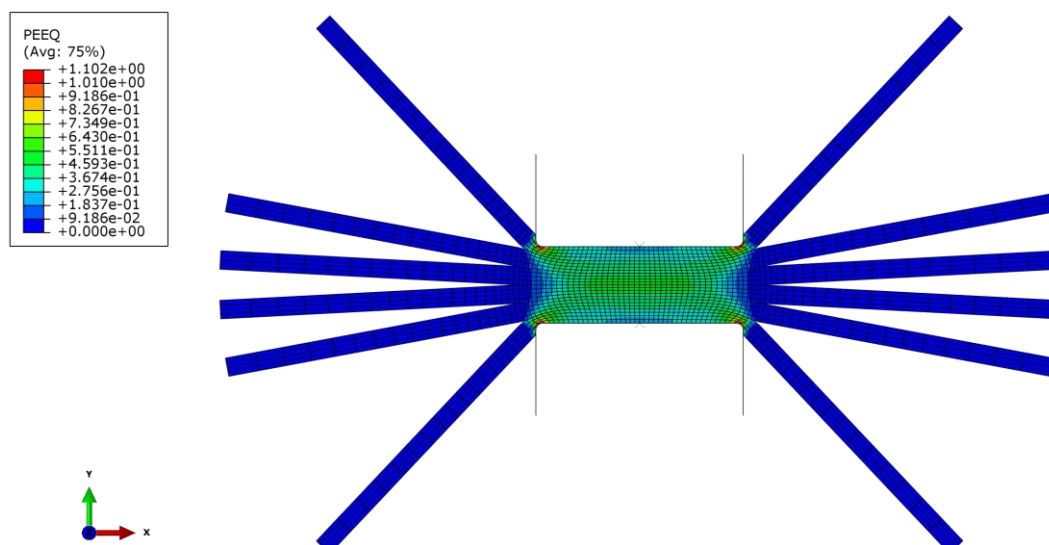


**Slika 5.31. Ovisnost vertikalnog pomaka točke B o vertikalnom pomaku čeličnog prizmatičnog bloka za iznos faktora trenja modela 2**

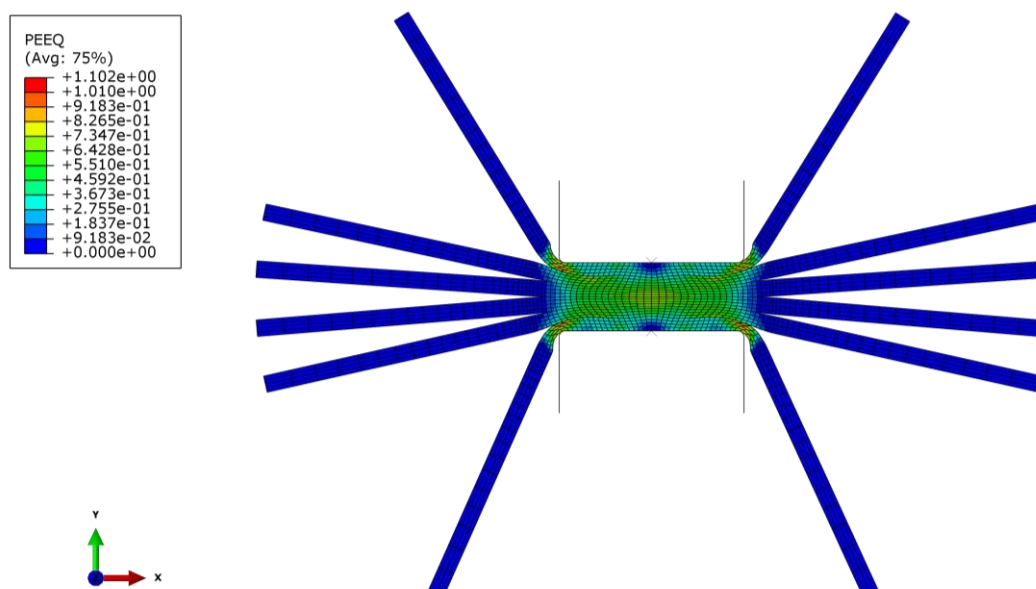
Iz slika 5.30. i 5.31. je vidljivo da elementi za ravninsko stanje naprezanja dobro opisuju ovisnost vertikalnog pomaka točke B o vertikalnom pomaku čeličnog prizmatičnog bloka, dok za točku A rješenja odstupaju. 2D elementi za ravninsko stanje deformacije loše opisuju deformiranje bakrenih limova. Slike 5.32., 5.33. i 5.34. prikazuju ekvivalentnu plastičnu deformaciju 2D i 3D numeričkog modela za iznos faktora trenja modela 3.



**Slika 5.32. Raspodjela ekvivalentne plastične deformacije po presjeku A-A za 3D model 3**

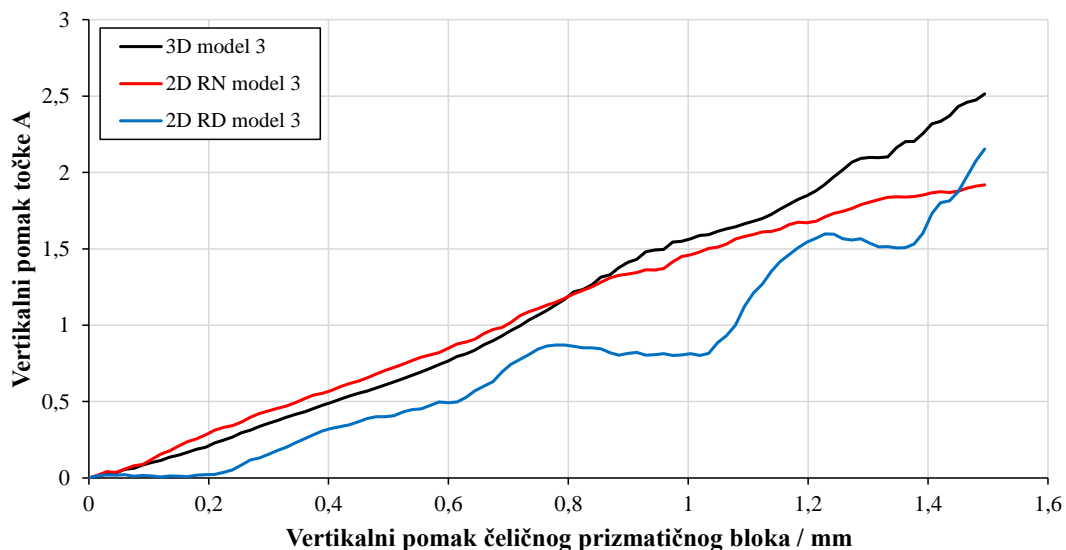


Slika 5.33. Raspodjela ekvivalentne plastične deformacije za 2D RN model 3

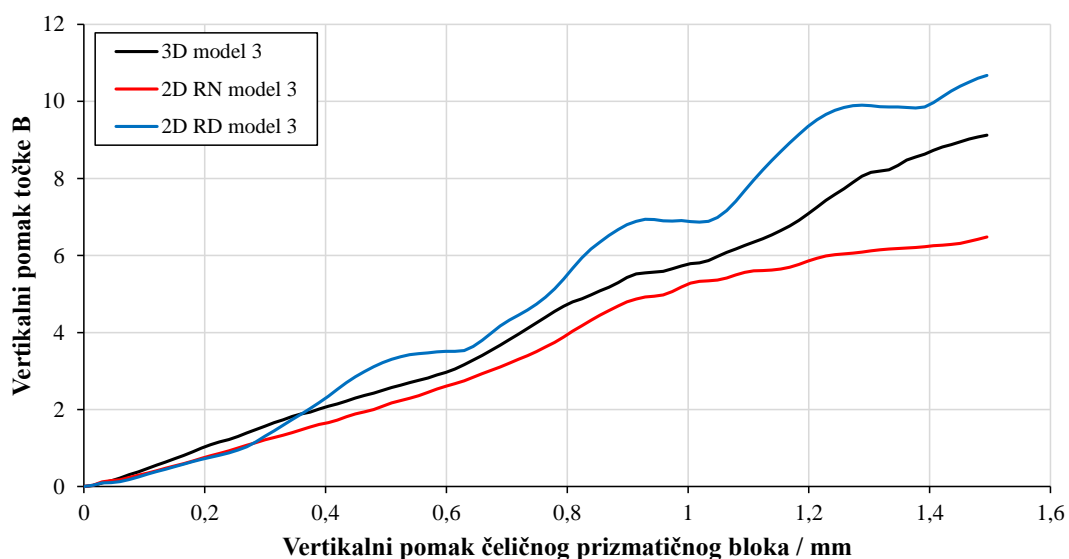


Slika 5.34. Raspodjela ekvivalentne plastične deformacije za 2D RD model 3

Kod velikog iznosa trenja nema pojave utiskivanja, ali veća tangencijalna naprezanja narušavaju ravninsko stanje naprezanja i deformacija. Kao i za iznose manjih trenja, elementi za ravninsko stanje naprezanja bolje opisuju raspodjelu ekvivalentne plastične deformacije od elemenata za ravninsko stanje deformacije. Raspodjela ekvivalentne plastične deformacije dobivena 2D elementima za ravninsko stanje naprezanja i 3D modelom dobro se poklapa. Slike 5.35. i 5.36. prikazuju vertikalni pomak točaka A i B u ovisnosti o vertikalnom pomaku čeličnog prizmatičnog bloka za različite numeričke modele pri iznosu faktora trenja modela 3.



**Slika 5.35. Ovisnost vertikalnog pomaka točke A o vertikalnom pomaku čeličnog prizmatičnog bloka za iznos faktora trenja modela 3**



**Slika 5.36. Ovisnost vertikalnog pomaka točke B o vertikalnom pomaku čeličnog prizmatičnog bloka za iznos faktora trenja modela 3**

Rezultati dobiveni 2D elementima za ravninsko stanje naprezanja i 3D elementima se dobro poklapaju. Kod iznosa faktora trenja modela 3 nema pojave utiskivanja. Može se zaključiti da na narušavanje ravninsko stanja naprezanja više utječe pojava utiskivanja, nego veća tangencijalna naprezanja uslijed većeg faktora trenja. 2D numerički model za ravninsko stanje naprezanja se može koristiti za parametarska istraživanja zbog vrlo kratkog računalnog vremena, dok za konačnu provjeru rješenja potrebno je koristiti 3D numerički model. 2D

---

numerički model za ravninsko stanje deformacije daje dosta lošije rezultate te ga nije moguće koristiti za simulaciju dinamičnog deformiranja bakrenih limova.

## 6. ZAKLJUČAK RADA

U radu je prikazano numeričko modeliranje procesa deformiranja bakrenih limova u računalnom paketu Abaqus koji se temelji na metodi konačnih elemenata. Točnost numeričkog modela je validirana na način da su rezultati uspoređeni s eksperimentom. Na 3D numeričkom modelu su provedene parametarske analize u kojima je pokazan utjecaj različitih brzina deformiranja i faktora trenja na proces deformiranja. Nadalje, 2D numerički model je uspoređen s 3D numeričkim modelom za različite iznose faktora trenja.

U prva tri poglavlja dan je uvod u proces dinamičkog deformiranja te njegovo matematičko i numeričko modeliranje.

U četvrtom poglavlju je opisan eksperiment dinamičkog deformiranja bakrenih limova i prikazani su rezultati. Može se zaključiti sljedeće:

- Tijekom deformiranja bakrenih limova dolazi od horizontalnog pomaka čeličnog prizmatičnog bloka. Kako bi eksperimentalni model odgovarao numeričkom modelu, potrebno je spriječiti horizontalni pomak čeličnog prizmatičnog bloka.

U petom poglavlju je provedeno numeričko modeliranje procesa deformiranja bakrenih limova s 2D i 3D numeričkim modelom. Za 3D numerički model može se zaključiti:

- Rezultati dobiveni u računalnom paketu Abaqus malo odstupaju od eksperimentalnih rezultata zbog horizontalnog pomaka čeličnog prizmatičnog bloka i različite brzine deformiranja .
- Promjena brzine dinamičkog deformiranja bakrenih limova nema velikog utjecaja na rezultate jer materijalna svojstva nisu definirana u ovisnosti o brzini deformiranja.
- Povećanjem faktora trenja dolazi do većih pomaka bakrenih limova tijekom deformiranja i manje maksimalne plastične deformacije. Također, kod faktora trenja modela 3 ne dolazi do utiskivanja gornjeg i donjeg lima kao što je slučaj kod modela 1 i 2.

Za 2D numerički model može se zaključiti:

- 2D elementi za ravninsko stanje naprezanja dobro opisuju proces deformiranja bakrenih limova. Utiskivanje gornjeg i donjeg lima u ostale limove više utječe na narušavanje ravninskog stanja naprezanja od povećanja faktora trenja.

- 2D elementi za ravninsko stanje deformacije loše opisuje proces deformiranja bakrenih limova.

Plan daljnjih istraživanja je provjeriti točnost složenijeg materijalnog modela kod kojeg bi materijalna svojstva ovisila o temperaturi i brzini deformacije. Kod eksperimentalnog modeliranja spriječiti horizontalni pomak čeličnog prizmatičnog bloka te ispitati utjecaj veće brzine deformiranja. Zaključke o odabiru numeričkog modela primijeniti na mnogo složenijem procesu krimpavanja žica. Također, provjeriti točnost upotrebe 2D numeričkog modela za modeliranje procesa krimpavanja žica.



## LITERATURA

- [1] Math, M., Uvod u tehnologiju oblikovanja deformiranjem, Zagreb, 1999.
- [2] Industrial crimp quality handbook, Molex“
- [3] Bubalo, A., Zorica, D., Tonković, Z., Numerical and Experimental Investigations of Wire Crimping Process, 2015.
- [4] ABAQUS, Abaqus Documentation: Version 6.14. 2014, Dassault Systemes: 3DS Paris Campus, 10 rue Marcel Dassault, 78140 Vélizy-Villacoublay, FRANCE.
- [5] Galović, A., Termodinamika 2, FSB, Zagreb 2010.
- [6] Tonković, Z. Numerička analiza konstrukcija, Zagreb, 2011.
- [7] Alfirević, I. Uvod u tenzore i mehaniku kontinuuma, Zagreb, 2003.
- [8] Aziz, A., Tao, J. Simulation of thermal stresses in a disc brake, 2012.
- [9] Karšaj, I. Numeričko modeliranje procesa deformiranja uz pretpostavku velikih deformacija, Doktorski rad, Zagreb, 2006.
- [10] Sorić, J. Metoda konačnih elemenata, Zagreb, 2004.
- [11] Bathe, K., Ramm, E., Wilson, E., Finite element formulations for large deformation dynamic analysis.
- [12] CrisField, M. A., Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures, London
- [13] Miller, K., Joldes, G., Lance, D. Wittek, D., Total Lagrangian explicit dynamic finite element algorithm for computing soft tissue deformation, 2006.
- [14] Koric, S., Lance, C., Hibbeler C., Brain G. T., Explicit Coupled Thermo-Mechanical Finite Element Model of Steel Solidification
- [15] Schutte, J.H., Dannenberg, J.F., Wijnant, Y.H., de Boer, A., An implicit and explicit solver for contact problems, 2010.
- [16] <http://www.kme.com/>
- [17] Faridmehr, I., Osman, M., Adnan, A., Nejad, A., Hodjati, R., Azimi, M., Correlation between Engineering Stress-Strain and True Stress-Strain Curve
- [18] Longere, P, Dragon, Andre, Inelastic heat fraction evaluation for engineering problems involving dynamic plastic localization phenomena, 2009.

## **PRILOZI**

I. CD-R disc