

# Ciklus naprežanja u korijenu zuba cilindričnog zupčanika s tankim vijencem

---

Čular, Ivan

Undergraduate thesis / Završni rad

2016

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:235:806552>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-02-25**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# ZAVRŠNI RAD

**Ivan Čular**

Zagreb, 2016.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

**ZAVRŠNI RAD**  
**CIKLUS NAPREZANJA U KORIJENU ZUBA**  
**CILINDRIČNOG ZUPČANIKA S TANKIM**  
**VIJENCEM**

Mentor:

Doc.dr.sc. Krešimir Vučković

Student:

Ivan Čular

Zagreb, 2016.

Izjavljujem da sam ovaj rad izradio samostalno koristeći stečena znanja tijekom studija i navedenu literaturu.

Zahvaljujem se mentoru doc.dr.sc.-u Krešimiru Vučkoviću za svu pruženu pomoć i savjete tokom izrade ovog rada.

Ivan Čular



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE



Središnje povjerenstvo za završne i diplomske ispite  
Povjerenstvo za završne ispite studija strojarstva za smjerove:  
procesno-energetski, konstrukcijski, brodostrojarški i inženjersko modeliranje i računalne simulacije

Sveučilište u Zagrebu Fakultet strojarstva i brodogradnje	
Datum	Prilog
Klasa:	
Ur.broj:	

## ZAVRŠNI ZADATAK

Student: **Ivan Čular** Mat. br.: 0035191561

Naslov rada na hrvatskom jeziku: **Ciklus naprezanja u korijenu zuba cilindričnog zupčanika s tankim vijencem**

Naslov rada na engleskom jeziku: **Stress cycle in thin rimmed spur gear tooth root**

Opis zadatka:

Nosivost zupčanih parova mora biti takva da unutar predviđenog životnog vijeka ne dođe do nastanka oštećenja. Budući da se opterećenje s pogonskog na gonjeni zupčanik prenosi mijenjajući svoj pravac djelovanja, položaj i intenzitet, mijenja se i naprezanje u korijenu zuba zupčanika te uslijed zamora materijala može nastupiti lom zuba. U cilju pravilnog oblikovanja zupčanika nužno je stoga sa što većom točnošću odrediti ciklus naprezanja u korijenu zuba zupčanika.

U radu je primjenom metode konačnih elemenata (MKE) potrebno odrediti ciklus naprezanja u korijenu zuba cilindričnog zupčanika s tankim vijencem u zahvatu s punim cilindričnim zupčanikom ako su poznati slijedeći parametri:

- ozubljenje: vanjsko evolventno s ravnim zubima,
- kut nagiba boka osnovnog profila ozubljenja:  $20^\circ$ ,
- modul: 3,175 mm,
- faktor pomaka profila: -0,05,
- tjemena visina osnovnog profila ozubljenja: 3,334 mm,
- podnožna visina osnovnog profila ozubljenja: 4,286 mm,
- polumjer zaobljenja podnožja osnovnog profila ozubljenja: 0,
- promjer tjemene kružnice: 95,25 mm,
- broj zubi pogonskog punog zupčanika: 28,
- broj zubi gonjenog zupčanika s tankim vijencem: 28,
- širina zubi obaju zupčanika: 6,35 mm,
- omjer debljine vijenca i visine zuba: 0,3
- brzina vrtnje gonjenog zupčanika:  $10\ 000\ \text{min}^{-1}$ ,
- okretni moment na pogonskom zupčaniku: 88,81 Nm,
- materijal obaju zupčanika: čelik 14NiCrMo13-4,
- unutarnji / vanjski promjer glavine: 29,7 mm / 50,8 mm.

Dobivene vrijednosti najvećih naprezanja u karakterističnim točkama zahvata usporediti s vrijednostima određenim pomoću A i B metode opisane u normi HRN ISO 6336-3.

Vrijednosti potrebne za proračun i odabir pojedinih komponenti usvojiti iz postojećih rješenja sličnih uređaja, iskustvenih vrijednosti te u dogovoru s mentorom. U radu navesti korištenu literaturu, norme i eventualnu pomoć.

Zadatak zadan:

25. studenog 2015.

Rok predaje rada:

1. rok: 25. veljače 2016  
2. rok (izvanredni): 20. lipnja 2016.  
3. rok: 17. rujna 2016.

Predviđeni datumi obrane:

1. rok: 29.2., 02. i 03.03. 2016.  
2. rok (izvanredni): 30. 06. 2016.  
3. rok: 19., 20. i 21. 09. 2016.

Zadatak zadao:

Predsjednik Povjerenstva:

Doc. dr. sc. Krešimir Vučković

Prof. dr. sc. Igor Balen

## SADRŽAJ

POPIS SLIKA .....	II
POPIS TABLICA.....	III
POPIS OZNAKA .....	IV
SAŽETAK.....	VI
SUMMARY .....	VII
1. UVOD .....	1
1.1. Zupčanik s tankim vijencem.....	4
2. CIKLUS NAPREZANJA ZUPČANIKA S TANKIM VIJENCEM.....	5
2.1 Ispitivanje konvergencije rezultata.....	7
2.2 Ciklus naprezanja u korijenu zuba zupčanika za $m_B = 3,3$ .....	9
2.3 Ciklus naprezanja u korijenu zuba zupčanika za $m_B = 1,0$ .....	10
2.4 Ciklus naprezanja u korijenu zuba zupčanika za $m_B = 0,5$ .....	11
2.5 Ciklus naprezanja u korijenu zuba zupčanika za $m_B = 0,3$ .....	12
2.6 Ciklus naprezanja u korijenu zuba zupčanika s varijacijom sektorskog otvora za $m_B = 0,5$ .....	13
3. PRORAČUN PO NORMI HRN ISO 6336-3 .....	14
3.1 Faktor oblika $Y_F$ .....	16
3.2 Faktor korekcije naprezanja $Y_S$ .....	19
3.3 Faktor debljine vijenca $Y_B$ .....	19
3.4 Maksimalno naprezanje u korijenu zuba .....	20
4. ANALIZA I USPOREDBA REZULTATA .....	21
4.1 Analiza ciklusa naprezanja korijena zuba punog zupčanika .....	21
4.2 Usporedba rezultata analize konačnim elementima i normiranom metodom .....	22
4.3 Usporedba ciklusa maksimalnog naprezanja u ovisnosti o debljini tankog vijenca ....	24
4.4 Utjecaj centrifugalne sile na ciklus maksimalnog naprezanja korijena zuba .....	25
4.5 Utjecaj veličine sektorskog otvora na iznos maksimalnog naprezanja u korijenu zuba za $m_B = 0,5$ i uračunatu centrifugalnu silu.....	26
4.6 Usporedba maksimalnog iznosa naprezanja u korijenu zuba i mase zupčanika .....	27
5. ZAKLJUČAK .....	29
6. LITERATURA.....	30

## POPIS SLIKA

Slika 1. Zupčanik s ravnim zubima .....	1
Slika 2. Pužni prijenosnik.....	1
Slika 3. Stožni prijenosnik .....	1
Slika 4. Zupčani par s kosim zubima .....	1
Slika 5. Osnovne dimenzije zupčanika s ravnim zubima.....	2
Slika 6. Opterećenje zuba zupčanika.....	2
Slika 7. Propagacija pukotine u korijenu zuba .....	3
Slika 8. Lom zuba uslijed zamora materijala .....	3
Slika 9. Zupčanik reducirane mase .....	4
Slika 10. Diskretizirani model zupčanika .....	5
Slika 11. Diskretizirani modeli zupčanika u zahvatu s rubnim uvjetima.....	6
Slika 12. Pozicija čvora u korijenu zuba zupčanika.....	7
Slika 13. Područje varijacije broja konačnih elemenata .....	7
Slika 14. Konvergencija naprezanja u korijenu zuba.....	8
Slika 15. Osnovne vrste konačnih elemenata.....	8
Slika 16. Ciklus naprezanja u korijenu zuba za $m_B = 3,3$ .....	9
Slika 17. Ciklus naprezanja u korijenu zuba za $m_B = 1,0$ .....	10
Slika 18. Ciklus naprezanja u korijenu zuba za $m_B = 0,5$ .....	11
Slika 19. Ciklus naprezanja u korijenu zuba za $m_B = 0,3$ .....	12
Slika 20. Varijacije sektorskog otvora .....	13
Slika 21. Ciklusi naprezanja u ovisnosti o veličini sektorskog otvora.....	13
Slika 22. Kritičan presjek zuba zupčanika .....	16
Slika 23. Ciklus naprezanja korijena zuba punog zupčanika s karakterističnim točkama.....	21
Slika 24. Pozicija promatranog korijena zuba u točki E .....	22
Slika 25. Grafički prikaz usporedbe maksimalnih naprezanja različitih metoda.....	23
Slika 26. Pozicija maksimalnog iznosa naprezanja u korijenu zuba.....	23
Slika 27. Ciklusi naprezanja korijena zuba u ovisnosti o debljini vijenca.....	24
Slika 28. Utjecaj centrifugalne sile u ovisnosti o debljini vijenca .....	25
Slika 29. Utjecaj veličine sektorskog otvora na maksimalne iznose naprezanja .....	26
Slika 30. Ovisnost mase zupčanika i vrijednosti maksimalnih naprezanja.....	28

**POPIS TABLICA**

Tablica 1. Svojstva čelika 14NiCrMo13-4.....	6
Tablica 2. Granične vrijednosti naprezanja u ciklusu za $m_B = 3,3$ .....	9
Tablica 3. Granične vrijednosti naprezanja u ciklusu za $m_B = 1,0$ .....	10
Tablica 4. Granične vrijednosti naprezanja u ciklusu za $m_B = 0,5$ .....	11
Tablica 5. Granične vrijednosti naprezanja u ciklusu za $m_B = 0,3$ .....	12
Tablica 6. Usporedba maksimalnih naprezanja različitih metoda.....	22
Tablica 7. Maksimalna naprezanja u ovisnosti o veličini sektorskog otvora.....	26



## POPIS OZNAKA

Oznaka	Jedinica	Opis
$\alpha$	rad	Kut nagiba profila ozubnice
$\alpha_{Fe}$	rad	Kut djelovanja normalne sile u vanjskoj točki jednostrukog zahvata
$b$	mm	Debljina zupčanika
$\gamma_e$	rad	Polukut širine zuba
$d$	mm	Diobeni promjer zupčanika
$d_a$	mm	Tjemeni promjer zupčanika
$d_b$	mm	Temeljni promjer zupčanika
$d_f$	mm	Podnožni promjer zupčanika
$d_{gu}$	mm	Unutarnji promjer glavine zupčanika
$d_{gv}$	mm	Vanjski promjer glavine zupčanika
$d_e$	mm	Promjer kružnice određen vanjskom točkom jednostrukog zahvata
$d_v$	mm	Vanjski promjer sektorskog otvora
$\delta$	°	Obuhvatni kut sektorskog otvora
$E$	-	Pomoćni faktor u ISO 6336 proračunu
$\varepsilon_\alpha$	-	Stupanj prekrivanja profila
$\varepsilon_{k1}, \varepsilon_{k2}$	-	Pomoćne veličine u izračunu stupnja prekrivanja
$\varepsilon_{k1}', \varepsilon_{k2}'$	-	Pomoćne veličine u izračunu stupnja prekrivanja
$F_n$	N	Normalna sila na zub zupčanika
$F_r$	N	Radikalna komponenta normalne sile na zub zupčanika
$F_t$	N	Tangencijalna komponenta normalne sile na zub zupčanika
$\varphi$	°	Kut tangente na prijelaznu krivulju
$G$	-	Pomoćni faktor u ISO 6336 proračunu
$\sigma_\varphi$	N/mm <sup>2</sup>	Naprezanje u smjeru tangente na prijelaznu krivulju
$\sigma_{F0}$	N/mm <sup>2</sup>	Nominalno normalno naprezanje u korijenu zuba
$h$	mm	Visina zuba zupčanika
$h_a$	mm	Tjemena visina zuba zupčanika
$h_f$	mm	Podnožna visina zuba zupčanika
$h_{Fe}$	mm	udaljenost presjecišta simetrale zuba i pravca djelovanja sile u vanjskoj točki jednostrukog zahvata od kritičnog presjeka
$H$	-	Pomoćni faktor u ISO 6336 proračunu
$K_A$	-	Faktor primjene
$K_V$	-	Faktor unutarnjih dinamičkih opterećenja

$K_{F\alpha}$	-	Korijenski faktor raspodjele opterećenja na zube u zahvatu
$K_{F\beta}$	-	Korijenski faktor raspodjele opterećenja po širini zuba
$m$	mm	Modul zupčanika
$m_B$	-	Omjer debljine vijenca i visine zuba
$m_z$	g	Masa zupčanika
$n$	-	Broj konačnih elemenata
$p$	mm	Korak zupčanika
$\rho$	$\text{g/mm}^3$	Gustoća
$\rho_F$	mm	Radijus zaobljenja prijelazne krivulje na kritičnom presjeku
$\rho_{FP}$	mm	Radijus zaobljenja podnožja profila ozubnice
$s$	mm	Debljina zuba
$s_F$	mm	Debljina zuba na kritičnom presjeku
$s_r$	mm	Debljina tankog vijenca
$T$	Nmm	Torzijski moment
$\vartheta$	°	Kut zakreta gonjenog zupčanika
$\Theta$	-	Pomoćni faktor u ISO 6336 proračunu
$x$	-	Faktor pomaka profila
$z$	-	Broj zubi zupčanika

## **SAŽETAK**

U ovom radu analizirati će se ciklus naprezanja korijena zuba opterećenog zadanim momentom. Odrediti će se mjesto maksimalnog naprezanja u korijenu zuba, te usporediti sa mjestom očekivanog maksimalnog naprezanja po ISO 6336 [8]. Budući da se zupčanici rotiraju brzinom vrtnje od  $10\ 000\ \text{min}^{-1}$ , uzeti će se u obzir i utjecaj centrifugalne sile na promatrani korijen zuba te usporediti sa ciklusom naprezanja bez uračunate centrifugalne sile. Debljina tankog vijenca mijenjati će se tijekom analiza kako bi se promotrio utjecaj koji ima na ciklus naprezanja tokom prolaska zuba kroz zahvat. Također će se promatrati utjecaj veličine sektorskog otvora zupčanika od početnog sektorskog otvora koji obuhvaća sedam zubi do krajnje vrijednosti od jednog zuba. Nakon provedene analize i usporedbe svih spomenutih ciklusa, dobivene vrijednosti usporediti će se s proračunom preko norme ISO 6336 [8].

## **SUMMARY**

In this paper, gear stress analysis will be carried out to determine a place of maximum root bending stress of a cylindrical gear tooth. Location of the maximum bending stress will then be compared with the place of expected maximum bending stress according to ISO 6336 [8] standard. Since both gears are rotating with a speed of 10 000 rpm, centrifugal force will also be taken into account and compared to results where no centrifugal force was involved. Thickness of a thin rim will also vary to determine the effect it has on a stress cycle, as will the size of a sector opening, starting with the initial value of seven-tooth span to one-tooth span. After analyzing and comparing all of cycles mentioned above, results will be compared with those obtained through ISO 6336 [8] standard.

## 1. UVOD

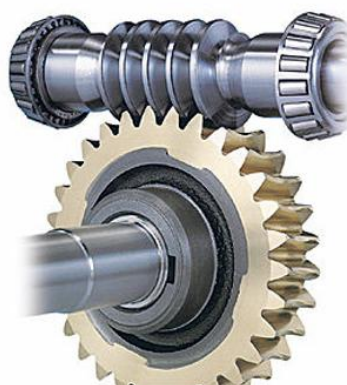
Zupčanici su rotacijski strojni dijelovi namijenjeni prijenosu snage s jednog vratila na drugo. Prijenos snage vrši se preko ozubljenja koje se nalazi na oba zupčanika u zupčanom paru.

Zupčanike možemo podijeliti prema:

- Materijalu (metal, sinterirani materijal ili polimer)
- Vrsti ozubljenja (vanjsko ili unutarnje)
- Vrsti zubi (ravni, kosi ili strelasti )
- Obliku (normalni, stožni ili pužni prijenosnici)



Slika 1. Zupčanik s ravnim zubima [1]



Slika 2. Pužni prijenosnik [2]

Ovisno o dimenzijama zupčanika zupčani par može prenositi snagu kao:

- Reduktor (slika 3 - manji zupčanik služi kao pogonski)
- Multiplikator (slika 4 - manji zupčanik služi kao gonjeni)

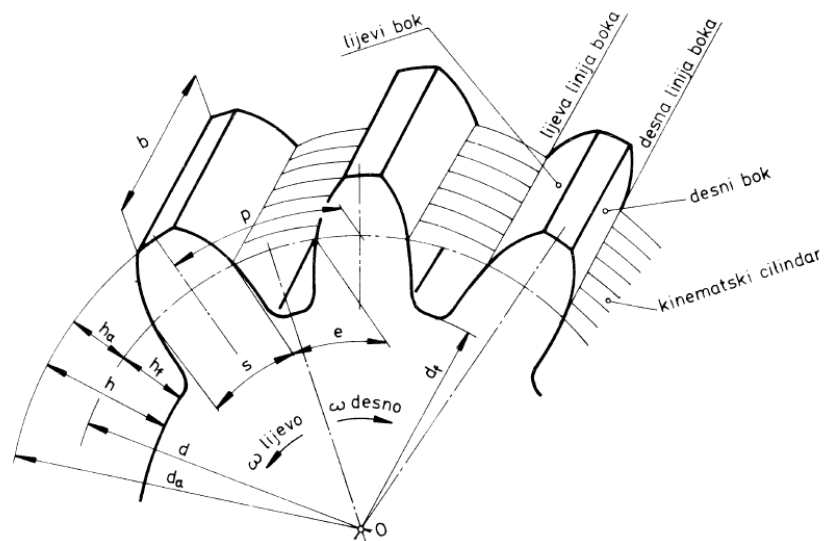


Slika 3. Stožni prijenosnik [3]



Slika 4. Zupčani par s kosim zubima [4]

Slika 5 prikazuje osnovne dimenzije zupčanika s ravnim zubima.

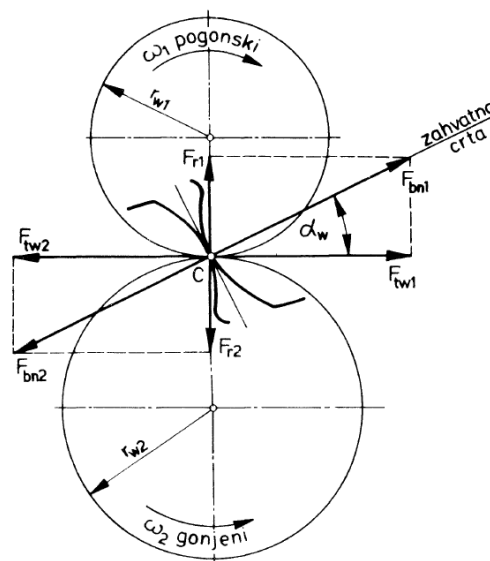


Slika 5. Osnovne dimenzije zupčanika s ravnim zubima [5]

gdje je:

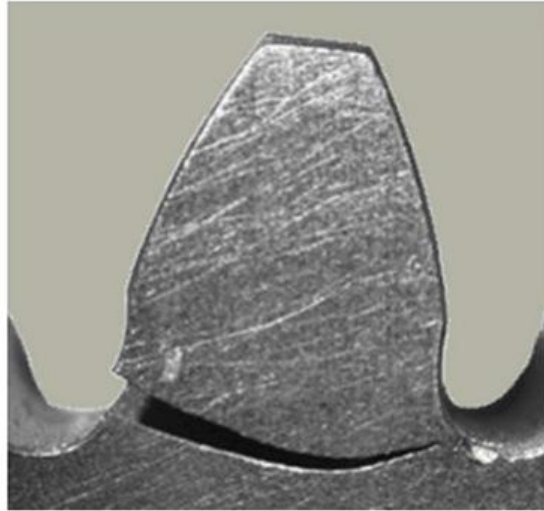
$b$ - debljina zupčanika	$h$ - visina zuba
$d$ - promjer diobene kružnice	$h_a$ - tjemena visina zuba
$d_a$ - promjer tjemene kružnice	$h_f$ - podnožna visina zuba
$d_b$ - promjer temeljne kružnice	$p$ - korak
$d_f$ - promjer podnožne kružnice	$s$ - debljina zuba

Budući da zupčanici prenose određeni moment potrebno je voditi računa o opterećenju zuba. Kod zupčanika s ravnim zubima sile koje djeluju na zub prikazane su na slici 6:



Slika 6. Opterećenje zuba zupčanika [5]

Kritično područje svakog zupčanika je upravo korijen zuba u kojem nastaje savojno opterećenje uslijed obodne komponente normalne sile,  $F_t$  (na slici 6 označena kao  $F_{tw}$ ). Budući da opterećenje mijenja svoj pravac djelovanja, položaj i intezitet, mijenja se i naprezanje u korijenu zuba koje može rezultirati nastankom pukotine.



**Slika 7. Propagacija pukotine u korijenu zuba [6]**

U slučaju loše konstrukcijske izvedbe zupčanika, može doći do loma zuba uslijed zamora materijala. Ovisno u kojem se uređaju zupčanik nalazi, moguće su katastrofalne posljedice.



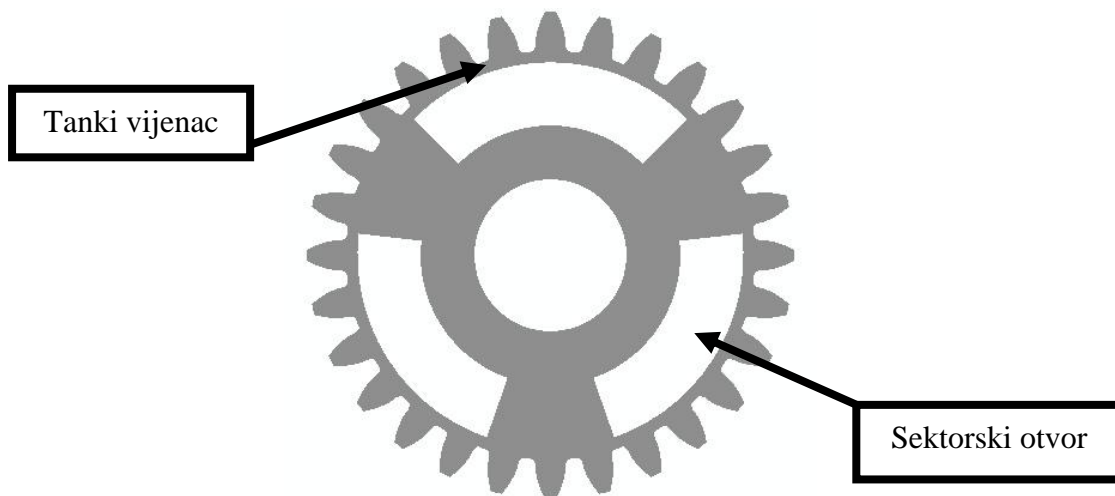
**Slika 8. Lom zuba uslijed zamora materijala [7]**

Upravo zbog takvih i sličnih posljedica potrebno je adekvatno provesti analizu ciklusa naprezanja u korijenu zuba kako bi se zupčanik što pravilnije oblikovao i samim time znatno smanjila vjerojatnost nastanka zamora materijala te pukotina u korijenu zuba zupčanika.

### 1.1. Zupčanik s tankim vijencem

Ukoliko je to moguće poželjno je smanjiti ukupnu masu zupčanika, pogotovo ako se oni nalaze u uređajima gdje je ukupna težina dotičnog uređaja od velike važnosti, npr. helikopteri. Međutim, negativna posljedica smanjenja mase zupčanika je pojava veće koncentracije naprezanja na određenim mjestima zupčanika.

Jedan od načina smanjenja mase zupčanika je pomoću tzv. sektorskih otvora, koji se izvode u raznim oblicima. Na slici 9 nalazi se geometrijski model zupčanika s po tri sektorska otvora i tankim vijencem.



Slika 9. Zupčanik reducirane mase

Debljina tankog vijenca određuje se u ovisnosti o visini zuba zupčanika [8]:

$$m_B = \frac{s_r}{h} \quad (1.1)$$

gdje je:

$s_r$  - debljina vijenca mjerena od podnožne kružnice do vanjskog promjera sektorskog otvora

$h$  - visina zuba zupčanika

$m_B$  - omjer debljine vijenca i visine zuba zupčanika [9]:

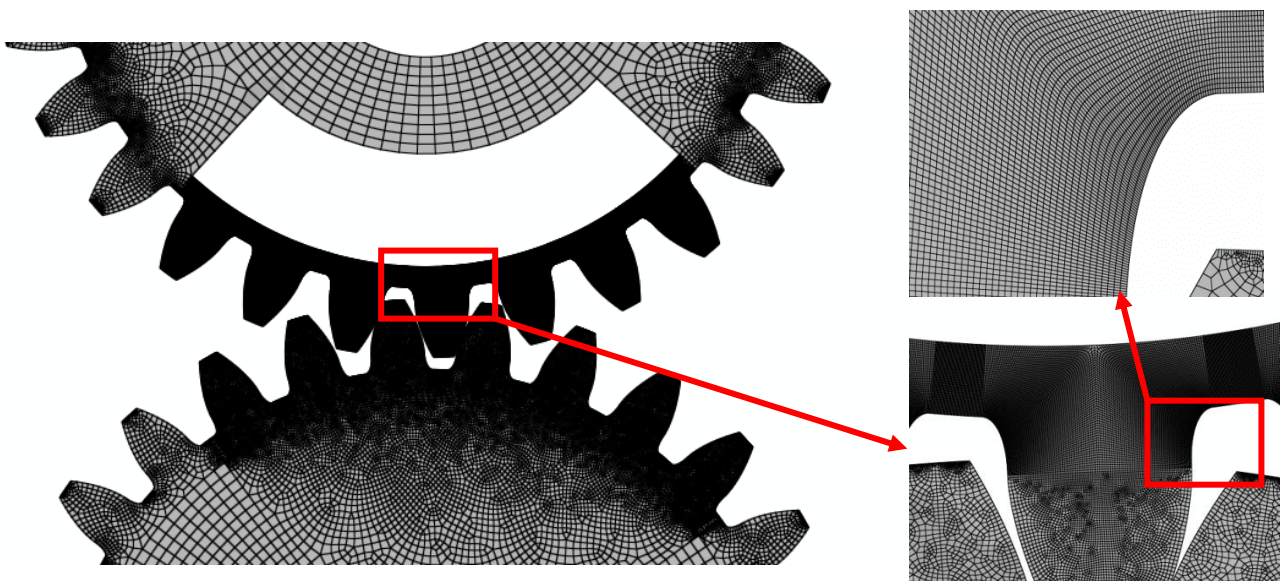
Minimalni omjer debljine vijenca i visine zuba zupčanika određen je normom [8] te iznosi  $m_B = 0,5$ . Međutim, budući da je tako zadano u zadatku, u ovom radu će se analizirati i naprezanja kod zupčanika s tankim vijencem omjera  $m_B = 0,3$ .



## 2. CIKLUS NAPREZANJA ZUPČANIK A S TANKIM VIJENCEM

Ciklus naprezanja korijena zuba na gonjenom zupčaniku određen je nelinearnom analizom (opcija NLGEOM [10]) pomoću metode konačnih elemenata uz pretpostavku velikih pomaka. Modeli zupčanika kreirani su prema zadanim podacima te diskretizirani pomoću nekompatibilnih četverokutnih (u pojedinim mjestima trokutnih) elemenata, označeni u *Abaqus-u* kao *CPS4I* [10].

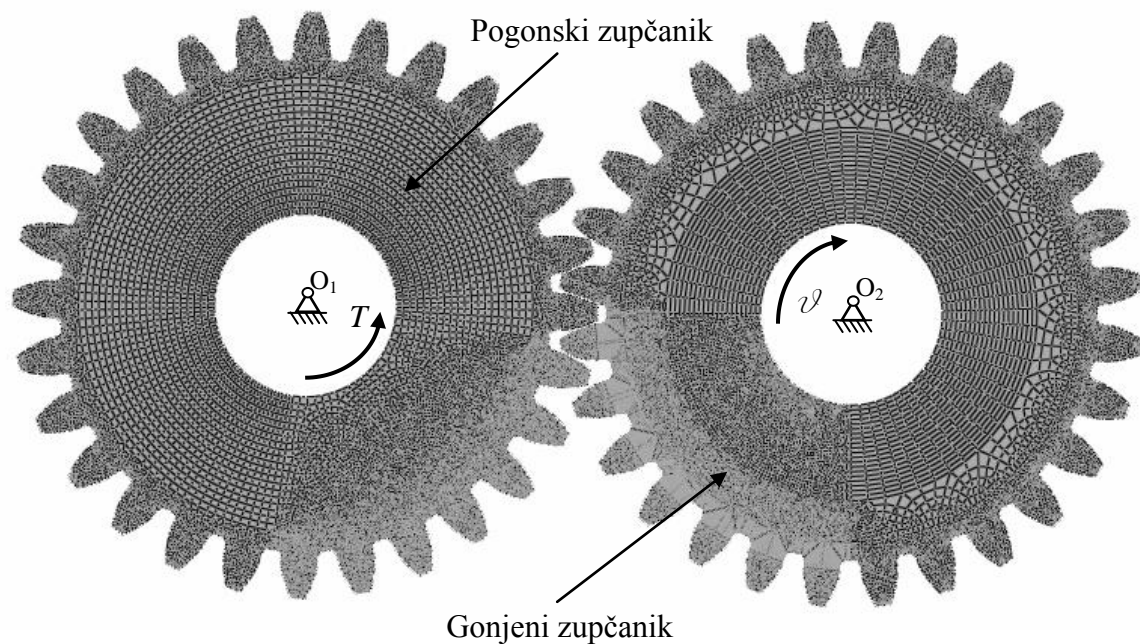
Područje u korijenu zuba diskretizirano je pravilno oblikovanim te gušće raspoređenim elementima, a njihov konačan broj te gustoća raspoređenosti određeni su ispitivanjem konvergencije rezultata (točka 2.1).



Slika 10. Diskretizirani model zupčanika

Pogonski zupčanik opterećen je momentom u iznosu od  $T = 88,81$  Nm koji se prenosi na ispitivani (gonjeni) zupčanik. Simulacija kontakta ostvarena je opcijom *normal behaviour* → *hard contact*. Zakret gonjenog zupčanika simuliran je od početnih  $\vartheta = 0^\circ$  do krajnjih  $\vartheta = 75^\circ$  koristeći fiksni broj inkremenata u iznosu od 0,05 u periodu od 10 sekundi (ukupno 200 frame-ova) te se pretpostavlja da su oba zupčanika homogena, izotropna te linearno elastična. Promatrani korijen zuba u svim analizama označen je na slici 10 crvenim pravokutnikom (srednji od 7 zubi iznad sektorskog otvora).

Dimenzije sektorskog otvora određene su zadanim vrijednostima vanjskog promjera glavine zupčanika  $d_{gv}$ , unutarnjim promjerom tankog vijenca  $d_v$  te obuhvatnim kutom  $\delta$  u iznosu od  $90^\circ$  (raspon od 7 zubi s početkom u sredini korijena zuba između dva zuba).



**Slika 11. Diskretizirani modeli zupčanika u zahvatu s rubnim uvjetima**

Pogonski zupčanik opterećen je momentom posredno preko referentne točke  $O_1$  dok je kut zakreta gonjenog zupčanika  $\psi$  zadan preko referentne točke  $O_2$ . Referentne točke  $O_1$  i  $O_2$  povezane su kinematskom vezom s čvorovima na unutarnjim promjerima glavnice zupčanika gonjenog odnosno pogonskog zupčanika te su im onemogućeni translacijski pomaci.

Podaci o materijalu obaju zupčanika dani su u tablici 1.

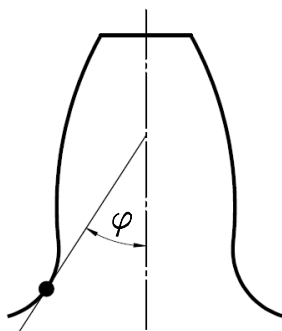
<b>Čelik 14NiCrMo13-4</b>	
Modul elastičnosti $E$ , MPa	206000
Poissonov faktor $\nu$	0,3
Gustoća $\rho$ , g/mm <sup>3</sup>	0,0079

**Tablica 1. Svojstva čelika 14NiCrMo13-4**

Navedene karakteristike proračunskog modela zupčanog para ostati će konstantne kroz sve analize provedene u ovom radu. Jedina područja promjene, kao što je vidljivo u daljnjim točkama, odnose se na:

- debljinu vijenca  $s_r$
- veličinu sektorskog otvora (početna zadana vrijednost sektorskog otvora obuhvaća raspon od 7 zubi, vidi sliku 10.)
- utjecaj centrifugalne sile na ciklus naprezanja korijena zupčanika

Budući da se naprezanje mijenja duž prijelazne krivulje korijena zuba, potrebno je adekvatno prikazati pozicije svake točke u korijenu. Iz tog razloga uvodi se kut  $\varphi$ , koji predstavlja kut tangente na prijelaznu krivulju korijena zuba. [8]



Slika 12. Pozicija čvora u korijenu zuba zupčanika

Naprezanje u korijenu zuba zupčanika provjeravati će se u svrhu pronalaska čvorova sa:

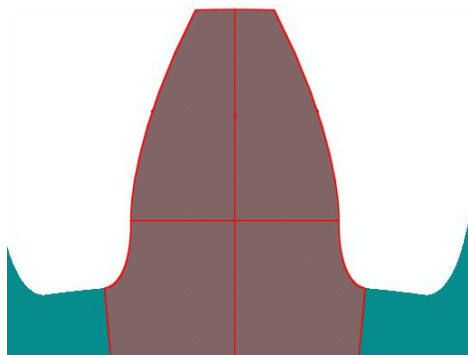
- Stvarnim maksimalnim naprezanjem
- Kutom  $\varphi = 30^\circ$  (čvor na kritičnom presjeku prema normi ISO 6336 [8])

Zbog prijenosa snage putem rotacijskog gibanja javlja se i centrifugalna sila u svakom zupčaniku. Iako je njen utjecaj zanemariv pri niskim brzinama vrtnje (npr. gonjeni zupčanici u reduktorskim zupčanim parovima), pri većim brzinama vrtnje može imati znatan utjecaj, stoga će se i ona uzeti u obzir u daljnjoj analizi.

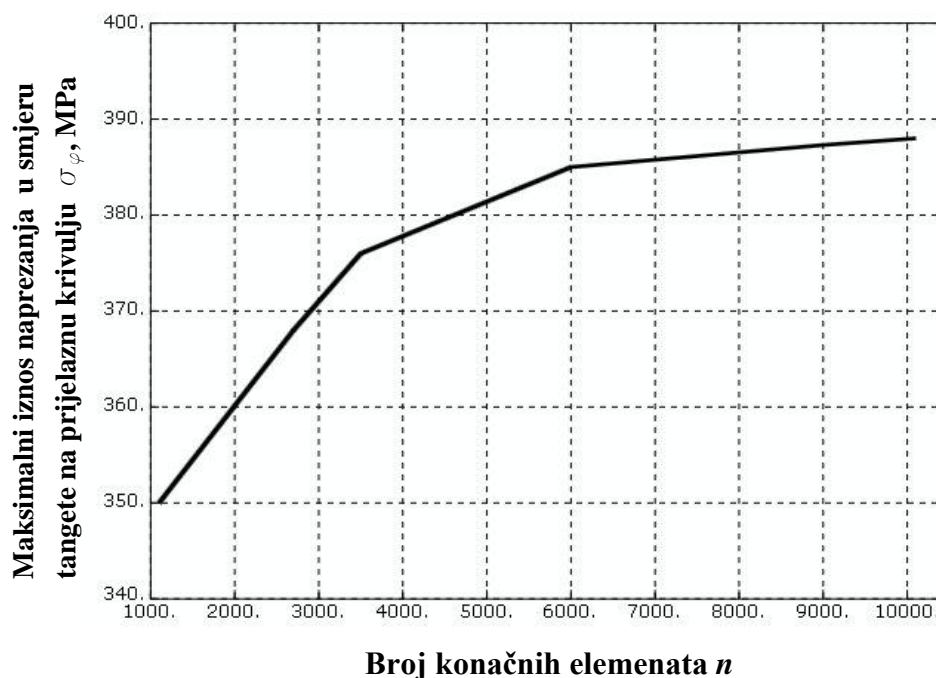
## 2.1 Ispitivanje konvergencije rezultata

Računalni program *Abaqus* aproksimira rezultate pomoću interpolacijskih polinoma. Veći broj točaka kroz koje je moguće provući interpolacijsku krivulju ujedino znači i veću točnost rezultata. U svrhu toga potrebno je odrediti broj konačnih elemenata pri kojima rezultat konvergira prema jednoj konačnoj vrijednosti.

Za ispitivanje konvergencije nije potrebno provesti analizu cijelog ciklusa rotacije zupčanika, već samo simulirati naprezanja uslijed kontakta između dva zuba zupčanika u zupčanom paru u jednoj proizvoljnoj točki. Proizvoljno je odabran puni gonjeni zupčanik ( $m_B = 3,3$ ), a za točku dodira odabrana je točka B u području jednostrukog zahvata (vidi točku 4.1).



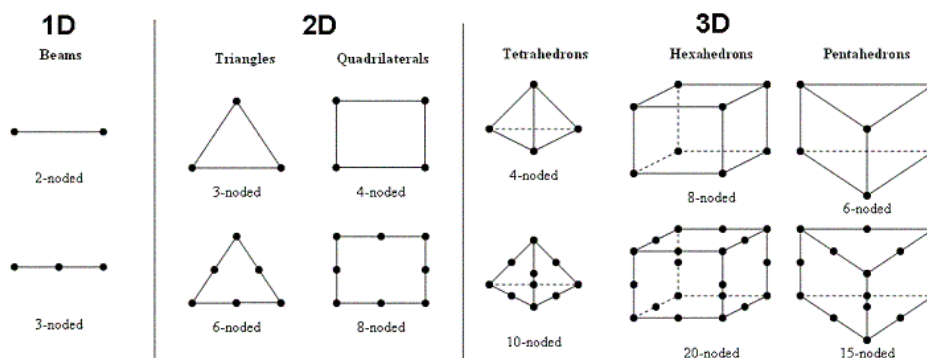
Slika 13. Područje varijacije broja konačnih elemenata



Slika 14. Konvergencija naprezanja u korijenu zuba

Na slici 14. može se vidjeti konvergencija naprezanja u ovisnosti o broju konačnih elemenata na prikazanom području. Jasno je kako povećanjem broja elemenata iznad 6000 rezultat konvergira prema konačnoj vrijednosti od okvirnih  $\sigma_\varphi = 388$  MPa. Stoga broj elemenata koji će se koristiti u daljnjim analizama iznosi  $n \approx 6000$ , a blago će varirati u ovisnosti o debljini tankog vijenca. Također je važno napomenuti da su elementi ravnomjerno te struktuirano raspoređeni u cijelom području varijacije njihova broja (jasno vidljivo na slici 10), tj. njihova veličina je gotovo identična.

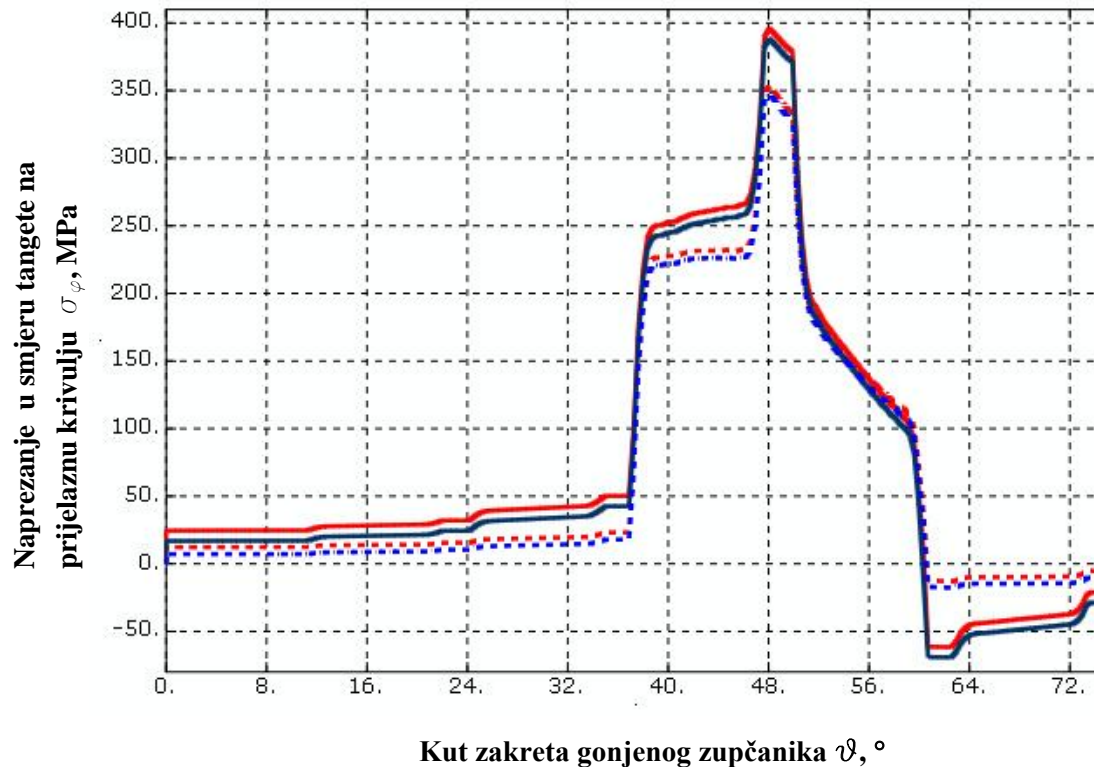
Kao što je već spomenuto, pravokutni elementi korišteni u svim analizama u području korijena zuba imaju oznaku *CPS4I* [10], tj. inkompatibilni elementi za analizu ravninskog stanja naprezanja. Razlog upravo tog odabira elemenata je zbog veće preciznosti rezultata. Naime, funkcijama oblika koje opisuju pravokutni element s četiri čvora dodane su još četiri parabolične funkcije kojima se znatno bolje opisuju naprezanja te pomaci elementa, pogotovo kada je riječ o rotacijskom gibanju što je slučaj u analizi ciklusa naprezanja kod zupčanog para [11].



Slika 15. Osnovne vrste konačnih elemenata [12]

## 2.2 Ciklus naprezanja u korijenu zuba zupčanika za $m_B = 3,3$

Na slici 16 prikazan je ciklus naprezanja korijena zuba punog zupčanika, sa i bez uračunatog utjecaja centrifugalne sile.



Slika 16. Ciklus naprezanja u korijenu zuba za  $m_B = 3,3$

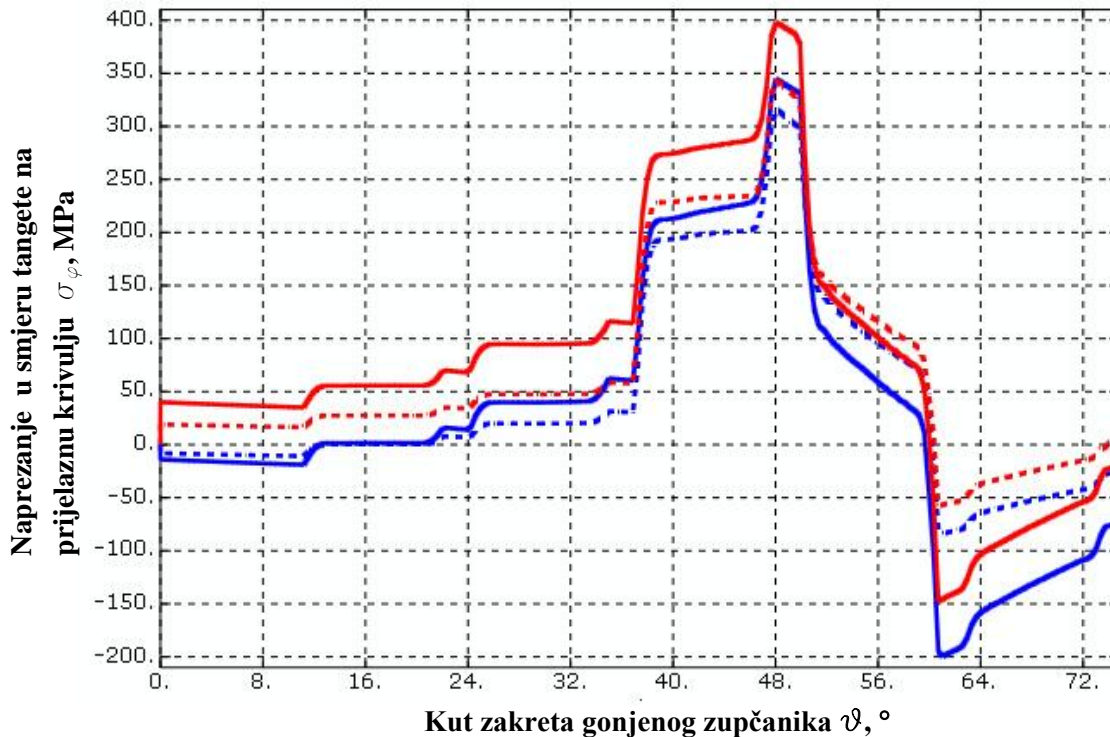
LEGENDA:	
<span style="color: blue;">—</span>	$\varphi=48^\circ$ , čvor najvećeg iznosa naprezanja s zanemarenim utjecajem centrifugalne sile
<span style="color: blue;">⋯</span>	$\varphi=30^\circ$ , čvor kritičnog presjeka prema normi ISO 6336 s zanemarenim utjecajem centrifugalne sile
<span style="color: red;">—</span>	$\varphi=48^\circ$ , čvor najvećeg iznosa naprezanja s uračunatim utjecajem centrifugalne sile
<span style="color: red;">⋯</span>	$\varphi=30^\circ$ , čvor kritičnog presjeka prema normi ISO 6336 s uračunatim utjecajem centrifugalne sile

	Bez centrifugalne sile		Sa centrifugalnom silom	
	$\varphi=48^\circ$	$\varphi=30^\circ$	$\varphi=48^\circ$	$\varphi=30^\circ$
$\sigma_\varphi \max$	388,7 MPa	345,7 MPa	396,2 MPa	350,8 MPa
$\sigma_\varphi \min$	-66,9 MPa	-16,6 MPa	-59,4 MPa	-12,1 MPa

Tablica 2. Granične vrijednosti naprezanja u ciklusu za  $m_B = 3,3$

### 2.3 Ciklus naprezanja u korijenu zuba zupčanika za $m_B = 1,0$

Na slici 17 prikazan je ciklus naprezanja korijena zuba zupčanika s tankim vijencem omjera  $m_B = 1,0$ , sa i bez uračunate centrifugalne sile.



Slika 17. Ciklus naprezanja u korijenu zuba za  $m_B = 1,0$

#### LEGENDA:

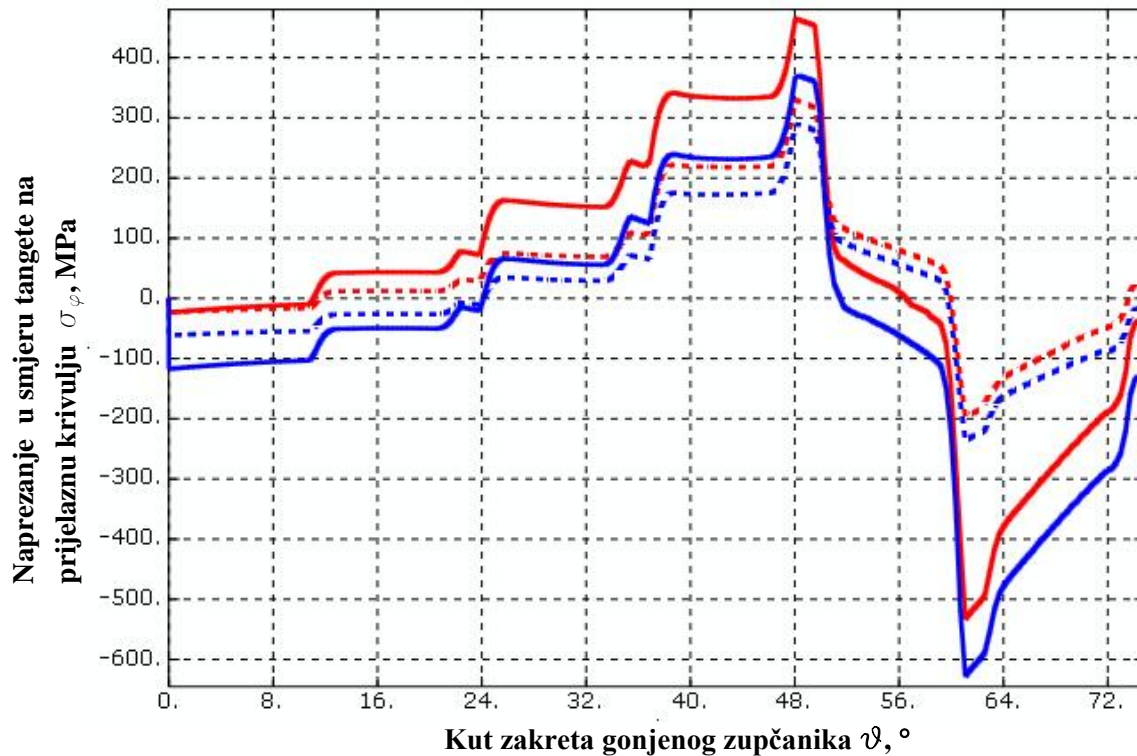
- $\varphi=48^\circ$ , čvor najvećeg iznosa naprezanja s zanemarenim utjecajem centrifugalne sile
- .....  $\varphi=30^\circ$ , čvor kritičnog presjeka prema normi ISO 6336 s zanemarenim utjecajem centrifugalne sile
- $\varphi=48^\circ$ , čvor najvećeg iznosa naprezanja s uračunatim utjecajem centrifugalne sile
- .....  $\varphi=30^\circ$ , čvor kritičnog presjeka prema normi ISO 6336 s uračunatim utjecajem centrifugalne sile

	Bez centrifugalne sile		Sa centrifugalnom silom	
	$\varphi=48^\circ$	$\varphi=30^\circ$	$\varphi=48^\circ$	$\varphi=30^\circ$
$\sigma_\varphi \max$	344,4 MPa	314,4 MPa	396,7 MPa	340,3 MPa
$\sigma_\varphi \min$	-193,9 MPa	-80,7 MPa	-143,5 MPa	-55,4 MPa

Tablica 3. Granične vrijednosti naprezanja u ciklusu za  $m_B = 1,0$

## 2.4 Ciklus naprezanja u korijenu zuba zupčanika za $m_B = 0,5$

Na slici 18 prikazan je ciklus naprezanja korijena zuba zupčanika s tankim vijencem omjera  $m_B = 0,5$ , sa i bez uračunate centrifugalne sile.



Slika 18. Ciklus naprezanja u korijenu zuba za  $m_B = 0,5$

### LEGENDA:

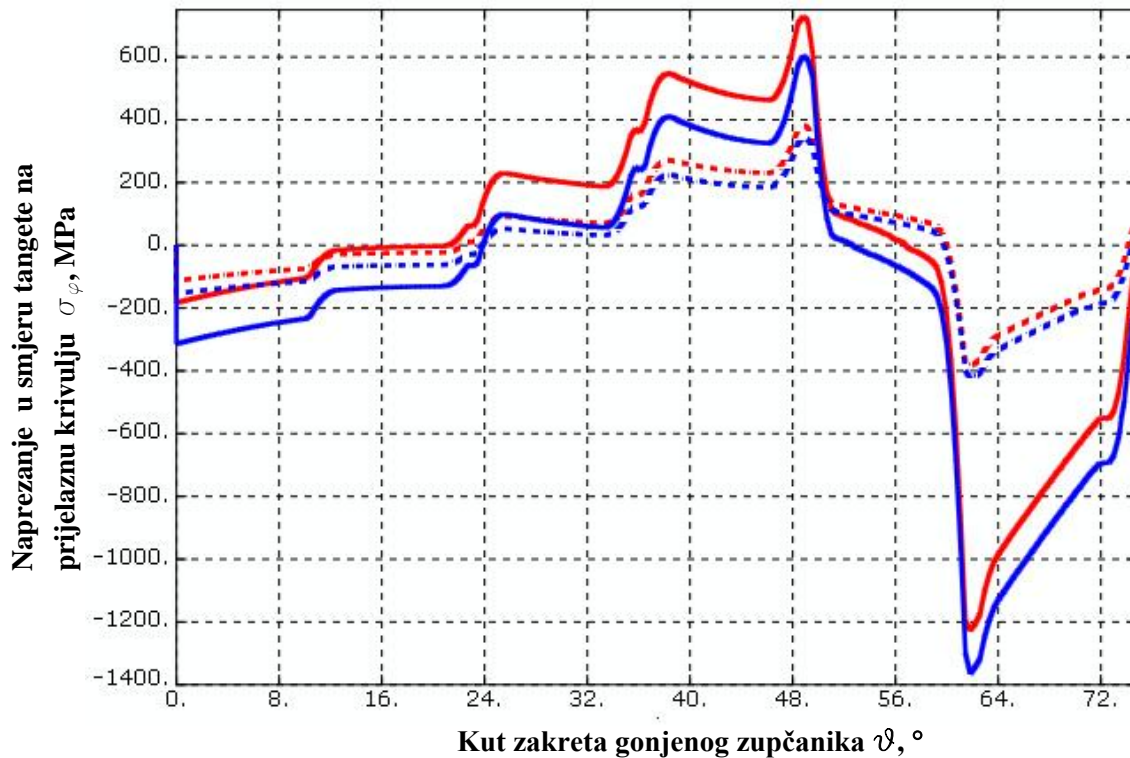
- $\varphi = 59^\circ$ , čvor najvećeg iznosa naprezanja s zanemarenim utjecajem centrifugalne sile
- ⋯  $\varphi = 30^\circ$ , čvor kritičnog presjeka prema normi ISO 6336 s zanemarenim utjecajem centrifugalne sile
- $\varphi = 59^\circ$ , čvor najvećeg iznosa naprezanja s uračunatim utjecajem centrifugalne sile
- ⋯  $\varphi = 30^\circ$ , čvor kritičnog presjeka prema normi ISO 6336 s uračunatim utjecajem centrifugalne sile

	Bez centrifugalne sile		Sa centrifugalnom silom	
	$\varphi = 59^\circ$	$\varphi = 30^\circ$	$\varphi = 59^\circ$	$\varphi = 30^\circ$
$\sigma_\varphi \max$	369,3 MPa	288,8 MPa	464,5 MPa	329,1 MPa
$\sigma_\varphi \min$	-628,1 MPa	-236,1 MPa	-533,2 MPa	-197,1 MPa

Tablica 4. Granične vrijednosti naprezanja u ciklusu za  $m_B = 0,5$

## 2.5 Ciklus naprezanja u korijenu zuba zupčanika za $m_B = 0,3$

Na slici 19 prikazan je ciklus naprezanja korijena zuba zupčanika s tankim vijencem omjera  $m_B = 0,3$ , sa i bez uračunate centrifugalne sile.



Slika 19. Ciklus naprezanja u korijenu zuba za  $m_B = 0,3$

### LEGENDA:

- $\varphi=70^\circ$ , čvor najvećeg iznosa naprezanja s zanemarenim utjecajem centrifugalne sile
- ⋯  $\varphi=30^\circ$ , čvor kritičnog presjeka prema normi ISO 6336 s zanemarenim utjecajem centrifugalne sile
- $\varphi=70^\circ$ , čvor najvećeg iznosa naprezanja s uračunatim utjecajem centrifugalne sile
- ⋯  $\varphi=30^\circ$ , čvor kritičnog presjeka prema normi ISO 6336 s uračunatim utjecajem centrifugalne sile

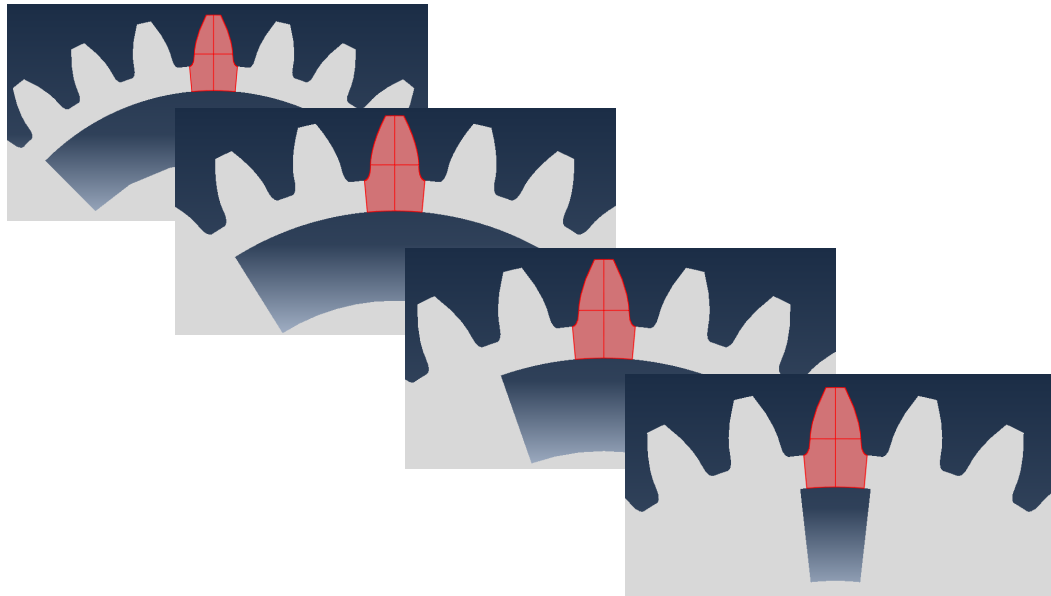
	Bez centrifugalne sile		Sa centrifugalnom silom	
	$\varphi=70^\circ$	$\varphi=30^\circ$	$\varphi=70^\circ$	$\varphi=30^\circ$
$\sigma_\varphi \max$	602,8 MPa	342,8 MPa	728,1 MPa	382,1 MPa
$\sigma_\varphi \min$	-1364,9 MPa	-425,1 MPa	-1226,5 MPa	-383,1 MPa

Tablica 5. Granične vrijednosti naprezanja u ciklusu za  $m_B = 0,3$



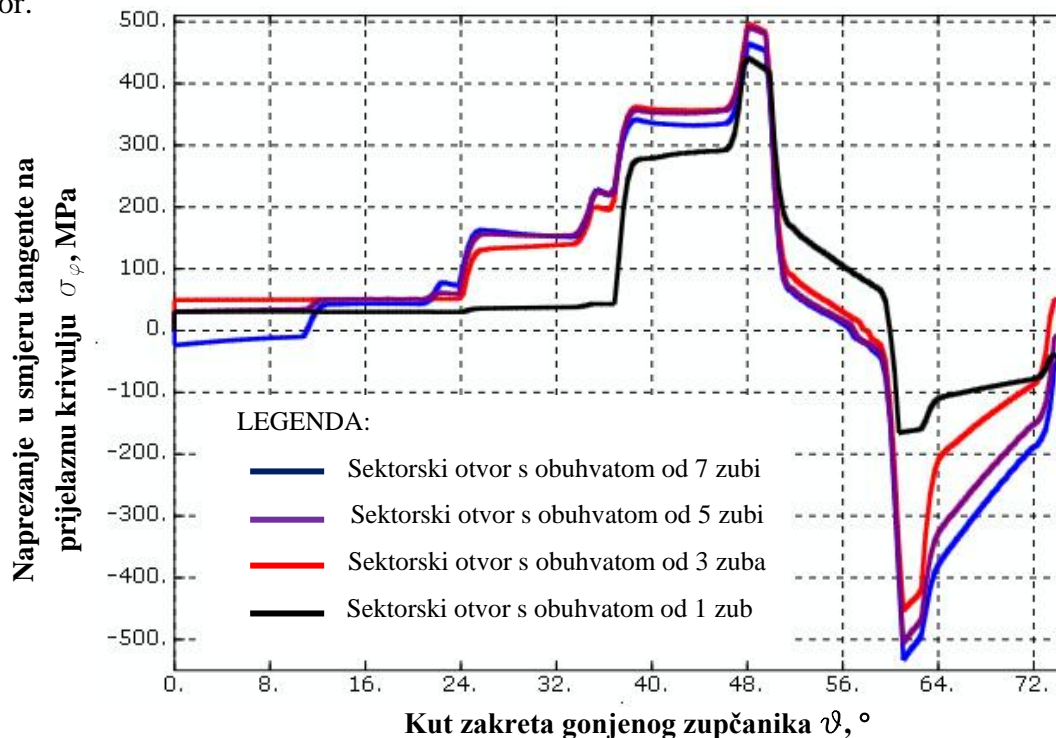
## 2.6 Ciklus naprezanja u korijenu zuba zupčanika s varijacijom sektorskog otvora za $m_B = 0,5$

Za ciklus naprezanja u korijenu zuba s varijacijom sektorskog otvora proizvoljno je odabran zupčanik s uračunatim utjecajem centrifugalne sile te sa  $m_B = 0,5$ . Promjena veličine sektorskog otvora od početnog obuhvata od sedam zubi do krajnjeg od jednog zuba prikazana je na slici 20 (crveno je označen promatran zub u svakom od ciklusa).



Slika 20. Varijacije sektorskog otvora

Na slici 21 prikazani su ciklusi naprezanja u korijenu zuba za  $\varphi = 48^\circ$  te za pojedini sektorski otvor.



Slika 21. Ciklusi naprezanja u ovisnosti o veličini sektorskog otvora

### 3. PRORAČUN PO NORMI HRN ISO 6336-3 [13]

Budući da proračun po normi ne razlikuje utjecaj centrifugalne sile kao ni utjecaj veličine sektorskog otvora na vrijednosti naprezanja u smjeru tangente na prijelaznu krivulju, jedine vrijednosti naprezanja koje će se proračunavati su upravo maksimalne vrijednosti naprezanja u korijenu zuba s zanemarivim utjecajem centrifugalne sile zupčanika te različitim debljinama tankog vijenca.

Izrazi navedeni u normi mogu se koristiti samo ako je stupanj prekrivanja profila  $\varepsilon_\alpha$  unutar graničnih vrijednosti  $1 < \varepsilon_\alpha < 2,5$  te ako postoji određena bočna zračnost između bokova zubi zupčanog para.

Iznos maksimalnog naprezanja u korijenu zuba računa se prema izrazu

$$\sigma_F = \sigma_{F0} K_A K_V K_{F\beta} K_{F\alpha} \quad (3.1)$$

gdje je:

$\sigma_{F0}$  - nominalno normalno naprezanje

$K_A$  - faktor primjene

$K_V$  - faktor unutarnjih dinamičkih opterećenja

$K_{F\beta}$  - korijenski faktor raspodjele opterećenja po širini zuba

$K_{F\alpha}$  - korijenski faktor raspodjele opterećenja na zube u zahvatu

Za vrijednosti navedenih faktora pretpostavit će se da vrijedi

$$K_A = K_V = K_{F\beta} = K_{F\alpha} = 1 \quad (3.2)$$

Nominalno normalno naprezanje predstavlja najveće lokalno naprezanje u korijenu zuba te se računa prema izrazu

$$\sigma_{F0} = \frac{F_t}{b \cdot m} Y_F Y_S Y_B \quad (3.3)$$

gdje je

$F_t$  - tangencijalna sila na diobenom promjeru       $Y_B$  - faktor debljine vijenca

$b = 6,3$  mm - širina boka zuba

$m = 3,175$  mm - modul zupčanika

$Y_F$  - faktor oblika

$Y_S$  - faktor korekcije naprezanja

Faktor oblika  $Y_F$  računa se prema izrazu

$$Y_F = \frac{6h_{Fe} \cos \alpha_{Fe}}{m \left(\frac{s_F}{m}\right)^2 \cos \alpha} \quad (3.4)$$

gdje je

$h_{Fe}$  - udaljenost presjecišta simetrale zuba i pravca djelovanja sile u vanjskoj točki jednostrukog zahvata od kritičnog presjeka

$\alpha_{Fe}$  - kut pod kojim djeluje sila u vanjskoj točki jednostrukog zahvata

$s_F$  - debljina zuba na kritičnom presjeku

$\alpha$  - kut nagiba zuba ozubnice

Faktor korekcije naprezanja  $Y_S$  računa se prema sljedećem izrazu

$$Y_S = \left(1,2 + 0,13 \frac{s_F}{h_{Fe}}\right) \cdot \left(\frac{s_F}{2\rho_F}\right)^{\frac{1}{1,21+2,3\frac{h_{Fe}}{s_F}}} \quad (3.5)$$

gdje je  $\rho_F$  radijus zaobljenja prijelazne krivulje na kritičnom presjeku, a računa se prema izrazu

$$\rho_F = \rho_{fP} + m \frac{2G^2}{\cos \theta (z \cos^2 \theta - 2G)} \quad (3.6)$$

gdje je

$\rho_{fP}$  - polumjer zaobljenja podnožja profila ozubnice

Izrazi za pomoćne vrijednosti faktora  $G$  i  $\theta$  biti će dane u daljnjem proračunu.

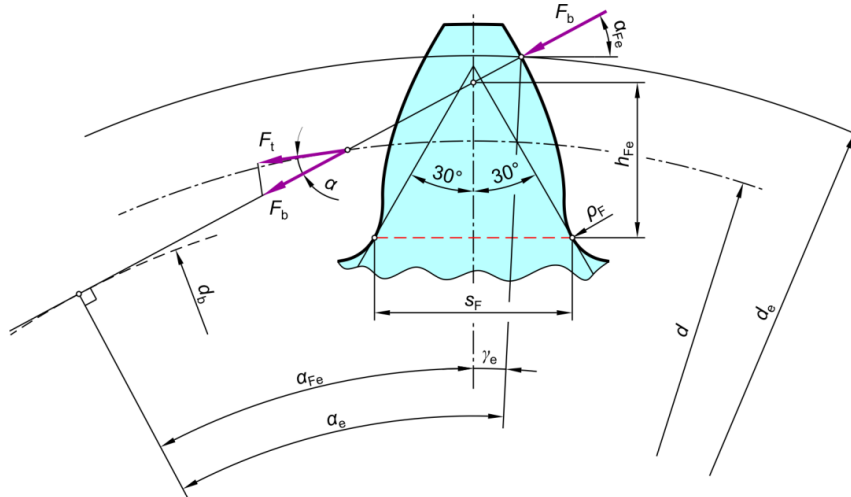
Faktor debljine vijenca  $Y_B$  za zupčanike s  $m_B \geq 1,2$  iznosi  $Y_B = 1$ , a za zupčanike za koje vrijedi  $0,5 \leq m_B \leq 1,2$  on se računa prema izrazu

$$Y_B = 1,6 \ln \left(2,242 \frac{1}{m_B}\right) \quad (3.7)$$

Kao što je već spomenuto i jasno vidljivo u daljnjoj analizi rezultata, za omjer visine zuba i debljine vijenca norma ne preporuča vrijednosti manje od  $m_B \leq 0,5$  te za njih ne vrijedi izraz (3.7). Stoga se u ovom proračunu neće proračunavati maksimalno naprezanje za zupčanik s tankim vijencem omjera  $m_B = 0,3$ .

Budući da se faktor korekcije naprezanja  $Y_S$  i faktor oblika  $Y_F$  odnose na sam zub zupčanika, njihove vrijednosti će biti identične za zupčanike svih debljina vijenaca. Međutim, faktor oblika  $Y_B$  poprimati će različite vrijednosti ovisno o debljini tankog vijenca promatranog zupčanika.

Na slici 22 prikazane su spomenute veličine potrebne za proračun maksimalnog naprezanja u korijenu zuba.



Slika 22. Kritičan presjek zuba zupčanika [13]

### 3.1 Faktor oblika $Y_F$

Faktor oblika  $Y_F$  računa se prema izrazu (3.4). Iznosi vrijednosti  $h_{Fe}$ ,  $\alpha_{Fe}$  i  $s_F$  računaju se prema sljedećim izrazima:

$$h_{Fe} = \frac{m}{2} \left[ (\cos \gamma_e - \sin \gamma_e \tan \alpha_{Fe}) \frac{d_e}{m} - z \cos \left( \frac{\pi}{3} - \theta \right) - \frac{G}{\cos \theta} + \frac{\rho_{fP}}{m} \right] \quad (3.8)$$

$$s_F = m \left[ z \sin \left( \frac{\pi}{3} - \theta \right) + \sqrt{3} \left( \frac{G}{\cos \theta} - \frac{\rho_{fP}}{m} \right) \right] \quad (3.9)$$

$$\alpha_{Fe} = \alpha_e - \gamma_e = \arccos \left( \frac{d_b}{d_e} \right) - \gamma_e \quad (3.10)$$

Polukut širine zuba  $\gamma_e$  računa se prema izrazu

$$\gamma_e = \frac{1}{z} \left( \frac{\pi}{2} + 2x \tan \alpha \right) + \operatorname{inv} \alpha - \operatorname{inv} \alpha_e \quad (3.11)$$

a nalazi se na promjeru kružnice određene vanjskom točkom jednostrukog zahvata  $d_e$  kao što je prikazano na slici 22. Vrijednosti evolventi kuteva  $\alpha$  i  $\alpha_e$  mogu se očitati prema [14] str. 68 tablica 30.

Promjer  $d_e$  računa se prema izrazu

$$d_e = 2 \sqrt{\left[ \sqrt{\left(\frac{d_a}{2}\right)^2 - \left(\frac{d_b}{2}\right)^2} - \frac{\pi d \cos \alpha}{z} (\varepsilon_\alpha - 1) \right]^2 + \left(\frac{d_b}{2}\right)^2} \quad (3.12)$$

Stupanj prekrivanja profila  $\varepsilon_\alpha$  računa se prema [14] izrazima

$$\varepsilon_\alpha = \varepsilon_{k1} + \varepsilon_{k2} \quad (3.13)$$

$$\varepsilon_{k1} = \varepsilon_{k1}' \frac{z_1}{z_{k1}} \quad (3.14)$$

$$z_{k1} = \frac{2d_1}{d_{a1} - d_1} \quad (3.15)$$

Uvrštavanjem poznatih vrijednosti u izraz (3.15) dobije se

$$z_{k1} = \frac{2d_1}{d_{a1} - d_1} = \frac{2 \cdot 88,582}{95,25 - 88,582} = 26,57 \quad (3.16)$$

Faktor  $\varepsilon_{k1}'$  očitava se prema [14] iz dijagrama 4. str. 71 za  $\alpha = 20^\circ$  i  $z_{k1} = 26,57$  te iznosi

$$\varepsilon_{k1}' = 0,76 \quad (3.17)$$

Uvrštavanjem poznatih vrijednosti u izraz (3.14) dobije se:

$$\varepsilon_{k1} = \varepsilon_{k1}' \frac{z_1}{z_{k1}} = 0,76 \frac{28}{26,57} = 0,82 \quad (3.18)$$

Budući da su zupčanici identičnih dimenzija, faktor  $\varepsilon_{k2}$  je iste vrijednosti kao i faktor  $\varepsilon_{k1}$ .

Ukupan stupanj prekrivanja profila tada iznosi

$$\varepsilon_\alpha = \varepsilon_{k1} + \varepsilon_{k2} = 0,82 + 0,82 = 1,64 \quad (3.19)$$

Uvrštavanjem poznatih vrijednosti u izraz (3.12) za promjer temeljne kružnice  $d_b = d \cos 20^\circ = 83,24$  mm i promjer tjemene kružnice  $d_a = 95,25$  mm dobije se:

$$d_e = 2 \sqrt{\left[ \sqrt{\left(\frac{95,25}{2}\right)^2 - \left(\frac{83,24}{2}\right)^2} - \frac{\pi 88,582 \cos 20^\circ}{z} (1,64 - 1) \right]^2 + \left(\frac{83,24}{2}\right)^2} = 90,02 \text{ mm} \quad (3.20)$$

Prema izrazu (3.11) te sa očitanim vrijednostima evolventi kuteva  $\alpha$  i  $\alpha_e$  u iznosu od 0,015 i 0,021 respektivno, te uvrštenim zadanim faktorom pomaka profila  $x = -0,05$ , polukut širine zuba iznosi

$$\gamma_e = \frac{1}{28} \left( \frac{\pi}{2} + 2(-0,05) \tan 20^\circ \right) + \text{inv}20^\circ - \text{inv}22,4^\circ = 0,0485 \text{ rad} \quad (3.21)$$

Kut djelovanja sile u vanjskoj točki jednostrukog zahvata tada iznosi

$$\alpha_{Fe} = \arccos\left(\frac{d_b}{d_e}\right) - \gamma_e = \arccos\left(\frac{83,24}{90,02}\right) - 0,0485 = 0,342 \text{ rad} = 19,6^\circ \quad (3.22)$$

Za vrijednost debljine zuba na kritičnom presjeku  $s_F$  potrebno je odrediti iznose vrijednosti faktora  $G$  i  $\theta$ . Faktor  $\theta$  računa se po iteracijskom postupku prema izrazu

$$\theta = \frac{2G}{z} \tan \theta - H \quad (3.23)$$

gdje se za početnu vrijednost faktora  $\theta$  uzima  $\theta = \frac{\pi}{6}$ .

Faktor  $H$  računa se prema izrazu

$$H = \frac{2}{z} \left( \frac{\pi}{2} - \frac{E}{m} \right) - \frac{\pi}{3} \quad (3.24)$$

gdje se vrijednost faktora  $E$  računa prema izrazu

$$E = \frac{\pi m}{4} - h_{fP} \tan \alpha - (1 - \sin \alpha) \frac{\rho_{fP}}{\cos \alpha} \quad (3.25)$$

Faktor  $G$  računa se prema izrazu

$$G = \frac{\rho_{fP}}{m} - \frac{h_{fP}}{m} + x \quad (3.26)$$

Podnožna visina zadana je u zadatku u iznosu od  $h_{fP} = 4,286$  mm a polumjer zaobljenja podnožja profila ozubnice u iznosu od  $\rho_{fP} = 0$  mm. Uvrštavanjem poznatih vrijednosti u izraze (3.26), (3.25), (3.24) i (3.23) te provedenom iteracijom dobiju se konačni iznosi faktora  $G$ ,  $E$ ,  $H$  i  $\theta$ :

$$G = \frac{\rho_{fP}}{m} - \frac{h_{fP}}{m} + x = \frac{0}{3,175} - \frac{4,286}{3,175} - 0,05 = -1,4 \quad (3.27)$$

$$E = \frac{\pi 3,175}{4} - 4,286 \tan 20^\circ - (1 - \sin 20^\circ) \frac{0}{\cos 20^\circ} = 0,933 \quad (3.28)$$

$$H = \frac{2}{28} \left( \frac{\pi}{2} - \frac{0,933}{3,175} \right) - \frac{\pi}{3} = -0,955 \quad (3.29)$$

$$\theta = 0,844 \text{ rad} \quad (3.30)$$

Debljina zuba na kritičnom presjeku tada iznosi

$$s_F = 3,175 \left[ 28 \sin \left( \frac{\pi}{3} - 0,844 \right) + \sqrt{3} \left( \frac{-1,4}{\cos 0,844} - \frac{0}{3,175} \right) \right] = 6,35 \text{ mm} \quad (3.31)$$

Udaljenost presjecišta simetrale zuba i pravca djelovanja sile u vanjskoj točki jednostrukog zahvata od kritičnog presjeka  $h_{Fe}$  prema izrazu (3.8) iznosi

$$h_{Fe} = \frac{3,175}{2} \left[ (\cos 0,048 - \sin 0,048 \tan 0,342) \frac{90,02}{3,175} - 28 \cos \left( \frac{\pi}{3} - 0,844 \right) - \frac{-1,4}{\cos 0,844} + \frac{0}{3,175} \right] = 3,99 \text{ mm}$$

Uvrštavanjem izraza (3.8), (3.9) i (3.10) u izraz (3.4) dobije se konačan iznosi faktora oblika  $Y_F$ :

$$Y_F = \frac{6 \cdot 3,99}{\left( \frac{6,35}{3,175} \right)^2 \cos 20^\circ} \cos 19,6^\circ = 1,887 \quad (3.32)$$

### 3.2 Faktor korekcije naprezanja $Y_S$

Faktor korekcije naprezanja računa se prema izrazu (3.5). Međutim, za njegovo određivanje potrebno je izračunati vrijednost radijusa zaobljenja prijelazne krivulje na kritičnom presjeku  $\rho_F$ . Uvrštavanjem poznatih vrijednosti u izraz (3.6) dobije se

$$\rho_F = 0 + 3,175 \frac{2(-1,4)^2}{\cos 0,844 (28 \cos^2 0,844 - 2(-1,4))} = 1,235 \text{ mm} \quad (3.33)$$

Uvrštavanjem izraza (3.33) i poznatih veličina u izraz (3.5) dobije se iznos faktora korekcije naprezanja

$$Y_S = \left( 1,2 + 0,13 \frac{6,35}{3,99} \right) \cdot \left( \frac{6,35}{2 \cdot 1,235} \right)^{\frac{1}{1,21 + 2,3 \frac{3,99}{6,35}}} = 2,009 \quad (3.34)$$

### 3.3 Faktor debljine vijenca $Y_B$

Kao što je već spomenuto, faktor debljine vijenca  $Y_B$  za zupčanike s  $m_B \geq 1,2$  iznosi  $Y_B = 1$ , a za zupčanike za koje vrijedi  $0,5 \leq m_B \leq 1,2$  on se računa prema izrazu (3.7).

Za zupčanik s  $m_B = 3,3$  faktor debljine vijenca iznosi

$$Y_B = 1 \quad (3.35)$$

Za zupčanik s  $m_B = 1,0$  faktor debljine vijenca iznosi

$$Y_B = 1,6 \ln \left( 2,242 \frac{1}{1} \right) = 1,29 \quad (3.36)$$

Za zupčanik s  $m_B = 0,5$  faktor debljine vijenca iznosi

$$Y_B = 1,6 \ln \left( 2,242 \frac{1}{0,5} \right) = 2,40 \quad (3.37)$$

### 3.4 Maksimalno naprežanje u korijenu zuba

Nominalno naprežanje u korijenu zuba računa se prema izrazu (3.3) gdje tangencijalna sila na diobenom promjeru iznosi

$$F_t = \frac{2T}{d} = \frac{2 \cdot 88,81 \cdot 10^3}{88,582} = 1989,1 \text{ N} \quad (3.38)$$

Uvrštavanjem poznatih veličina u izraz (3.3) i (3.1) dobiju se iznosi maksimalnih naprežanja u korijenu zuba pojedinog zupčanika:

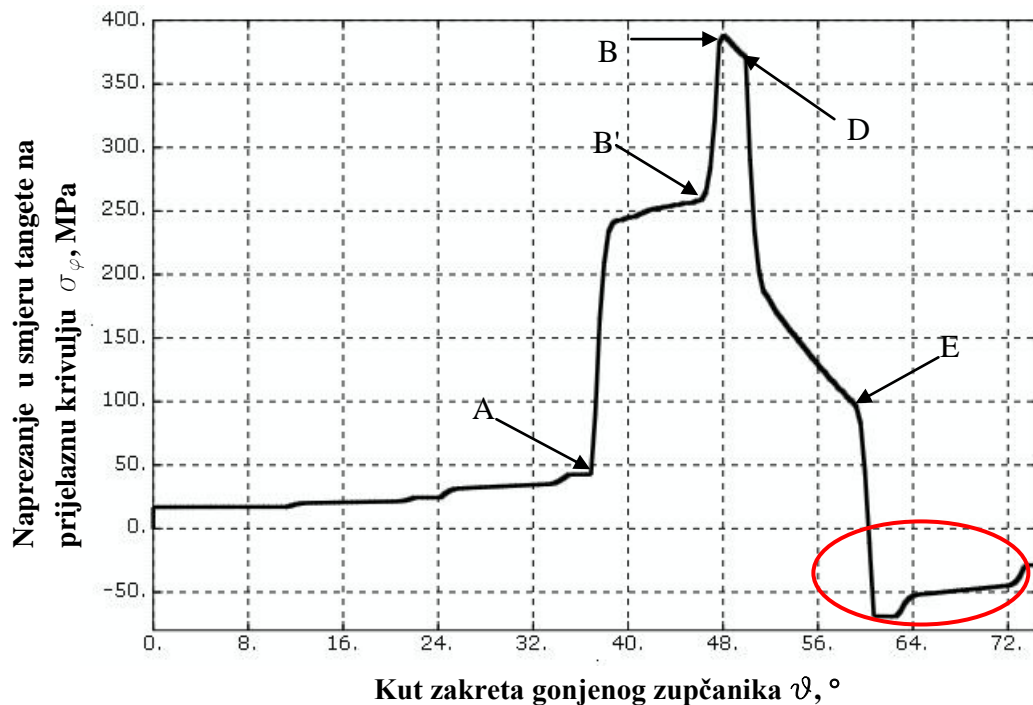
- za  $m_B = 3,3$  ,  $\sigma_{\varphi\max} = 373,9 \text{ Mpa}$
- za  $m_B = 1,0$  ,  $\sigma_{\varphi\max} = 482,4 \text{ Mpa}$
- za  $m_B = 0,5$  ,  $\sigma_{\varphi\max} = 897,5 \text{ Mpa}$



## 4. ANALIZA I USPOREDBA REZULTATA

### 4.1 Analiza ciklusa naprezanja korijena zuba punog zupčanika

Za referentnu analizu naprezanja u korijenu zuba odabran je puni zupčanik ( $m_B = 3,3$ ) te  $\varphi = 48^\circ$  (čvor s maksimalnim iznosom vlačnog naprezanja).

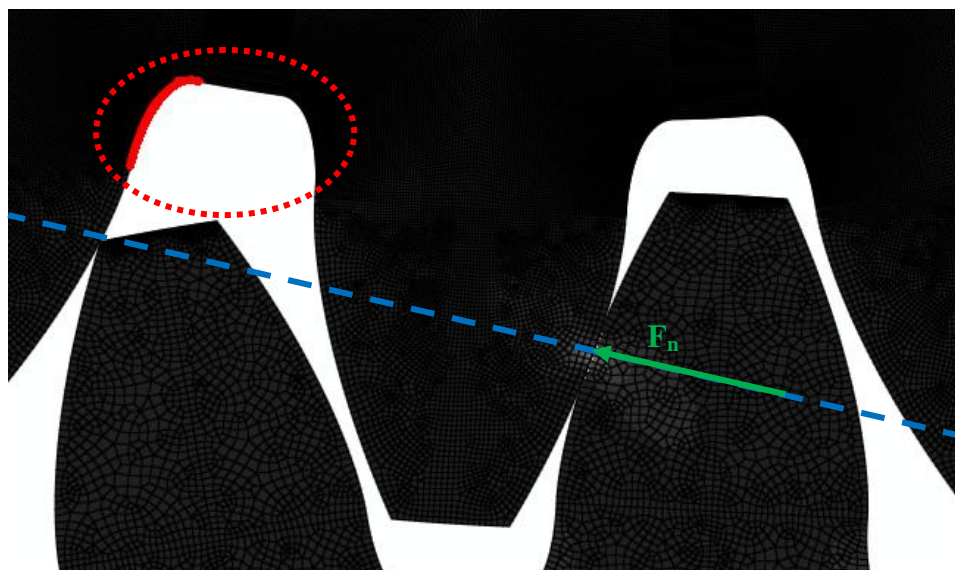


Slika 23. Ciklus naprezanja korijena zuba punog zupčanika s karakterističnim točkama

Karakteristične točke zahvata označene su slovima A do E, gdje točka A predstavlja početak zahvata promatranog para zubi dok točka E predstavlja izlaz iz zahvata, prema [14] str. 39.

- Točka A  
Promatrani par zubi ulazi u područje dvostrukog zahvata te "dijeli" opterećenje s prethodnim parom zubi koji još nije izašao iz zahvata.
- Točka B'  
Par zubi koji prethodi promatranom izlazi iz zahvata te se promatrani par zubi sada nalazi u području jednostrukog zahvata, tj. oni su jedini par zubi koji prenose moment, stoga se i opterećenje u korijenu zuba povećava na maksimalni iznos (B).
- Točka D  
Novi par zubi ulazi u zahvat te je promatrani par zubi ponovo u području dvostrukog zahvata. Opterećenje korijena zuba opada.
- Točka E  
Promatrani par zubi izlazi iz zahvata.

Kao što je jasno vidljivo na slici 23, većina ciklusa naprezanja korijena zuba nalazi se u vlačnom području ( $\sigma_\varphi > 0$ ). Međutim, na kraju ciklusa kada promatrani par zubi izađe iz zahvata, naprezanje prelazi u tlačno područje ( $\sigma_\varphi < 0$ ) označeno crvenom bojom na slici 23.



Slika 24. Pozicija promatranog korijena zuba u točki E

Na slici 24. prikazan je korijen zuba promatranog (gonjenog) zupčanika označen crvenom punom linijom tijekom njegovog izlaza iz zahvata (točka E). Plava isprekidana linija označava liniju zahvata na kojoj je nalazi točka kontakta između dva zuba zupčanog para. Zelenom bojom označena je normalna sila na zub  $F_n$ . Rotacija gonjenog zupčanika odvija se u smjeru djelovanja sile prikazane na slici.

Kao što je vidljivo iz slike 24, normalna sila  $F_n$  uzrokuje pojavu tlačnog područja (crvena isprekidana linija), u koje spada i promatrani korijen. Upravo to je razlog zbog čega na kraju zahvata naprezanje u smjeru tangente na prijelaznu krivulju prelazi u tlačno područje, kao što je vidljivo na slici 23.

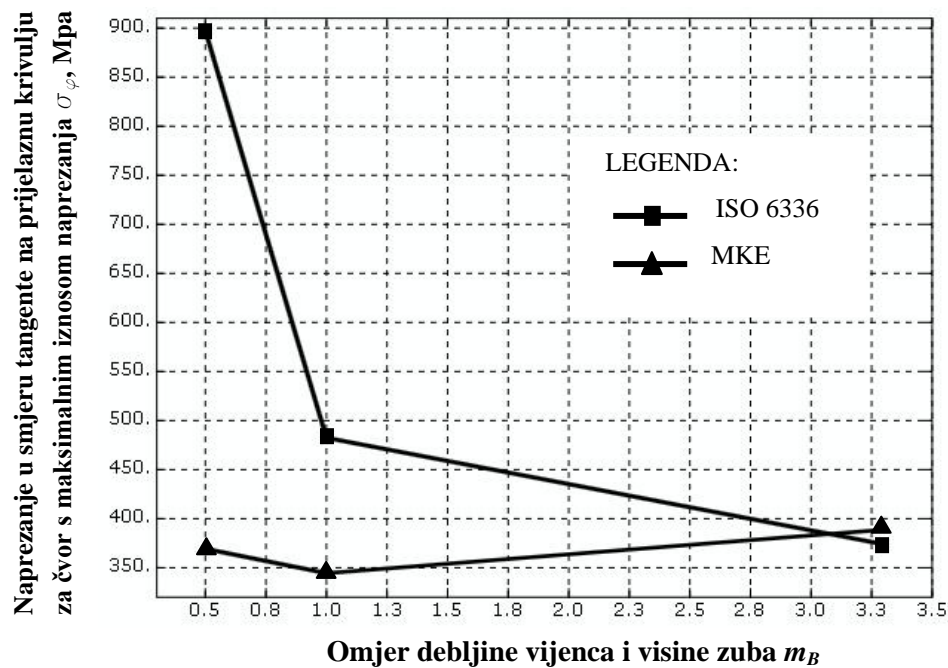
#### 4.2 Usporedba rezultata analize konačnim elementima i normiranom metodom

U tablici 6 prikazani su rezultati maksimalnog naprezanja s zanemarenim utjecajem centrifugalne sile u korijenu zuba za različite debljine vijenca dobiveni metodom konačnih elemenata te normiranim proračunom.

$m_B$	MKE	ISO 6336
3,3	$\sigma_{\varphi \max} = 388,7 \text{ MPa}$	$\sigma_{\varphi \max} = 373,9 \text{ MPa}$
1,0	$\sigma_{\varphi \max} = 344,4 \text{ MPa}$	$\sigma_{\varphi \max} = 482,4 \text{ MPa}$
0,5	$\sigma_{\varphi \max} = 369,3 \text{ MPa}$	$\sigma_{\varphi \max} = 897,5 \text{ MPa}$

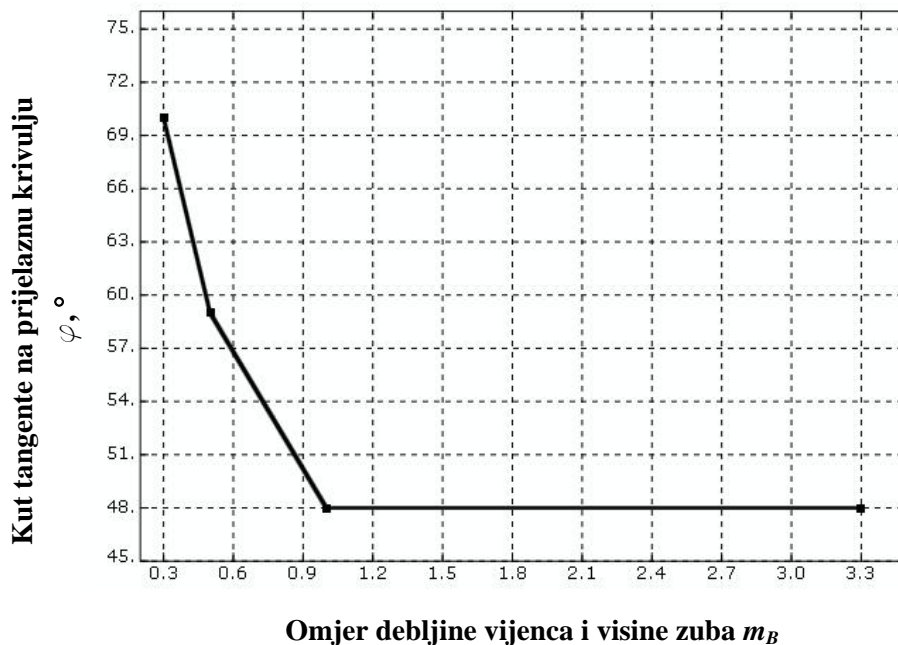
Tablica 6. Usporedba maksimalnih naprezanja različitih metoda

Grafički prikaz usporedbe vidljiv je na slici 25.



Slika 25. Grafički prikaz usporedbe maksimalnih naprezanja različitih metoda

Također je važno napomenuti da se pozicija maksimalnog naprezanja dobivenog pomoću metode konačnih elemenata ne podudara s normiranom metodom, kao što je prikazano na slici 26.

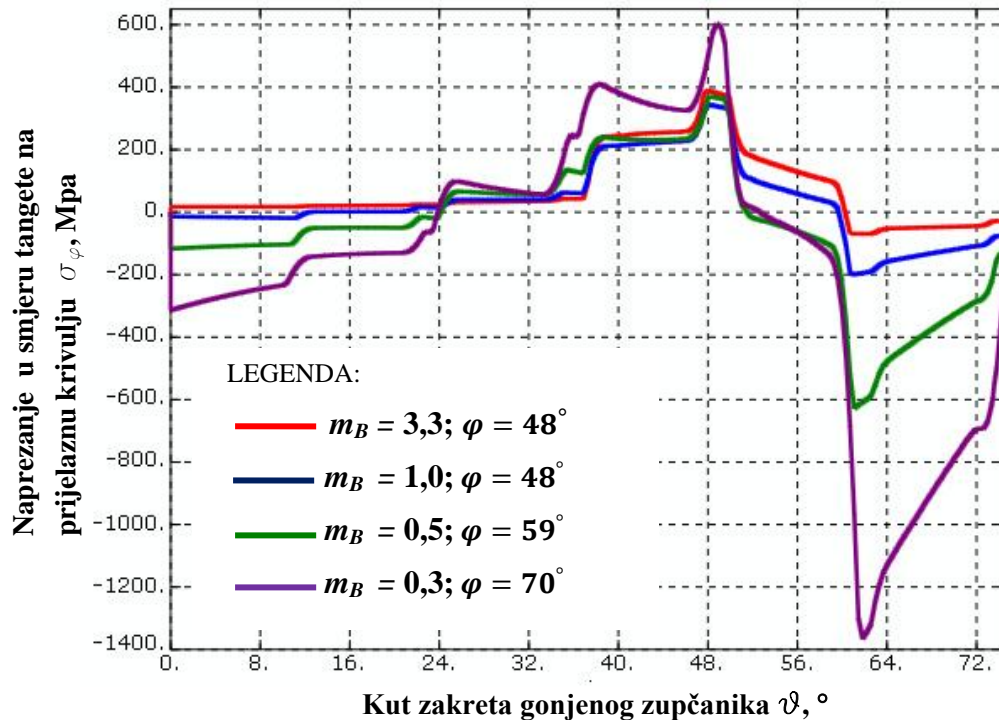


Slika 26. Pozicija maksimalnog iznosa naprezanja u korijenu zuba

Drugim riječima, sa smanjenjem debljine vijenca pozicija maksimalnog naprezanja ne ostaje konstantna, već se približava području korijena zuba.

### 4.3 Usporedba ciklusa maksimalnog napreznja u ovisnosti o debljini tankog vijenca

Ciklusi maksimalnog napreznja u korijenu zuba za različite debljine vijenaca prikazani su na slici 27. Za promatrane cikluse nije uračunat utjecaj centrifugalne sile budući da će se njen utjecaj posebno razmatrati u daljnjim točkama.



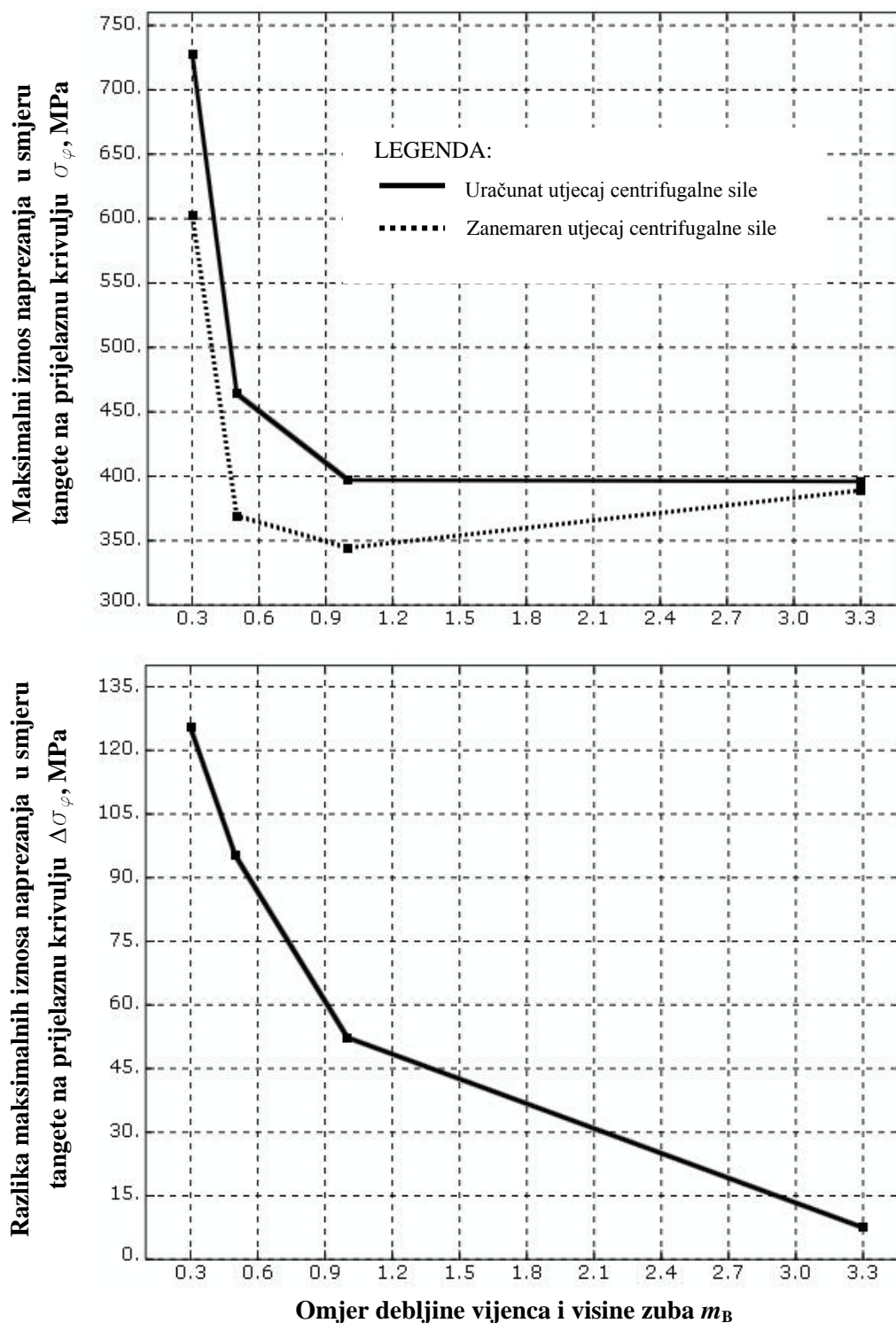
Slika 27. Ciklusi napreznja korijena zuba u ovisnosti o debljini vijenca

Prema slici 27 može se primjetiti sljedeće:

1. Za područje kuta zakreta  $0 \leq \vartheta \leq 24^\circ$ , tlačno napreznje raste s smanjenjem debljine vijenca.
2. Za područje kuta zakreta  $24 \leq \vartheta \leq 38^\circ$ , tj. prije ulaska u zahvat promatranog zuba, maksimalno napreznje raste s smanjenjem debljine vijenca. Drugim riječima, iako promatrani zub nije u zahvatu, utjecaj prethodnog para zuba na iznos maksimalnog napreznja u korijenu promatranog zuba se povećava sa smanjenjem debljine vijenca zupčanika.
3. Iznos maksimalnog napreznja ostaje približno isti za sve debljine vijenaca osim za  $m_B = 0,3$ .
4. Nakon izlaza iz zahvata, tj. iza točke E, minimalni tlačno napreznje drastično raste s smanjenjem debljine vijenca.

#### 4.4 Utjecaj centrifugalne sile na ciklus maksimalnog naprezanja korijena zuba

Prema slikama 16, 17, 18 i 19 jasno se vidi kako utjecaj koji centrifugalna sila ima, za bilo koju poziciju čvora, je upravo taj da "podigne" kompletnu krivulju naprezanja u pozitivnom smjeru osi y tj. poveća iznose maksimalnog naprezanja korijena zuba u svakoj točki zahvata. Iznos za koji poraste maksimalno naprezanje ovisi o debljini vijenca gonjenog zupčanika, kao što je prikazano na slici 28.



Slika 28. Utjecaj centrifugalne sile u ovisnosti o debljini vijenca

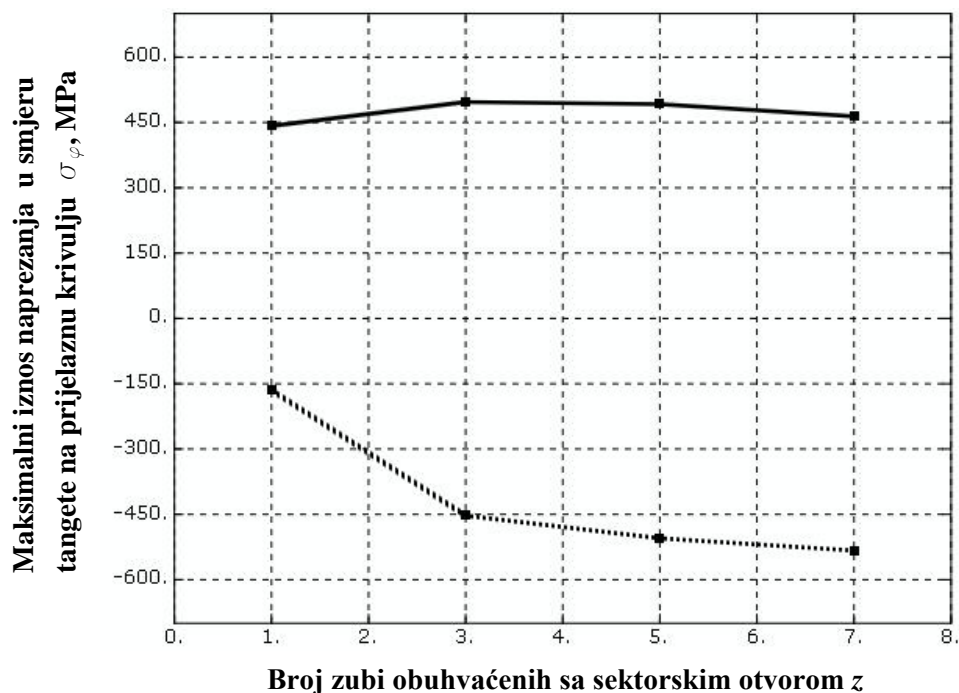
#### 4.5 Utjecaj veličine sektorskog otvora na iznos maksimalnog naprezanja u korijenu zuba za $m_B = 0,5$ i uračunatu centrifugalnu silu

Različiti ciklusi naprezanja za različite sektorske otvore mogu se vidjeti na slici 21. Tablica 7 prikazuje iznose maksimalnih naprezanja korijena zuba u ovisnosti o veličini sektorskih otvora definiranih po broju zubi  $z$  koje obuhvaćaju.

	7 zubi	5 zubi	3 zuba	1 zub
$\sigma_{\varphi \max}$	464,6 MPa	491,9 MPa	496,7 MPa	441,5 MPa
$\sigma_{\varphi \min}$	-533,2 MPa	-505,4 MPa	-453,1 MPa	-165,5 MPa

Tablica 7. Maksimalna naprezanja u ovisnosti o veličini sektorskog otvora

Prema tablici 7 i slici 21 jasno je vidljivo kako sektorski otvor koji obuhvaća samo jedan zub znatno odstupa s krivuljom naprezanja kao i sa iznosima maksimalnih vrijednosti naprezanja. Također se može primjetiti kako se krivulja ciklusa naprezanja ponaša vrlo slično kao i krivulja punog zupčanika vidljiva na slici 16. Grafički prikaz tablice 7 vidljiv je na slici 29.



Slika 29. Utjecaj veličine sektorskog otvora na maksimalne iznose naprezanja

Prema slici 21 donose se sljedeći zaključci:

- U sektorskim otvorima koji obuhvaćaju  $z = 3$  i  $z = 5$  zubi dolazi do blagog povećanja maksimalnog vlačnog naprezanja.
- Maksimalni iznos tlačnog naprezanja raste s povećanjem sektorskog otvora.

#### 4.6 Usporedba maksimalnog iznosa naprezanja u korijenu zuba i mase zupčanika

Kao što je već spomenuto, sektorski otvori služe kao jedan od mnogih načina smanjenja ukupne mase zupčanika. Stoga bi bilo zanimljivo analizirati te usporediti maksimalna naprezanja u korijenu zuba zupčanika u ovisnosti o samoj masi zupčanika. U ovoj usporedbi nije uzet u obzir utjecaj centrifugalne sile.

Okvirni volumen punog zupčanika računa se prema izrazu [14]

$$m_{pz} = \frac{d^2 \pi}{4} \cdot b \quad (4.1)$$

Od izračunatog volumena potrebno je oduzeti volumen glavine zupčanika te volumen sektorskih otvora. Nakon množenja s gustoćom čelika konačan izraz za masu zupčanika glasi

$$m_z = \rho b \left\{ \frac{\pi}{4} \left[ (d^2 - d_{gu}^2) - \frac{\delta}{120} (d_v^2 - d_{gv}^2) \right] \right\} \quad (4.2)$$

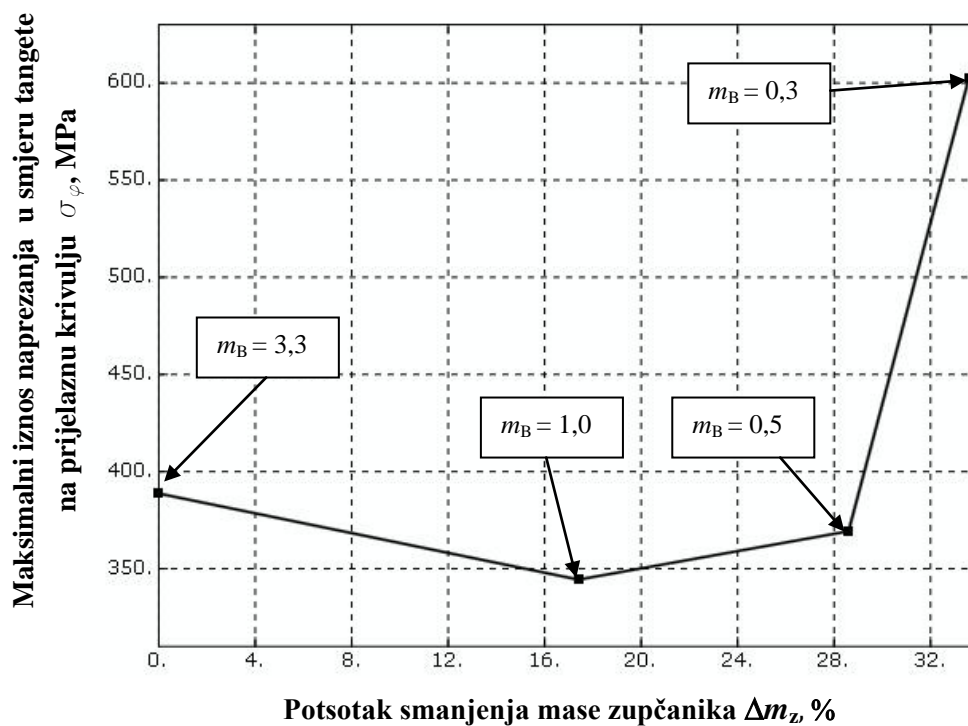
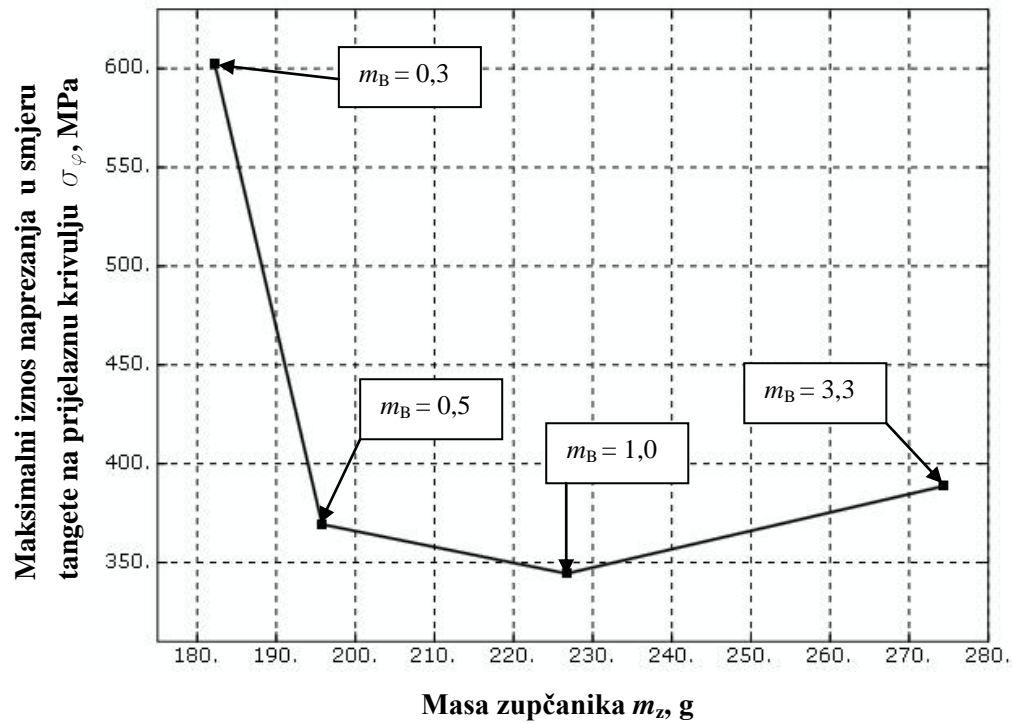
gdje je:

- $\rho = 0,0079 \text{ g/mm}^3$  - gustoća čelika
- $d_{gu} = 29,7 \text{ mm}$  - unutarnji promjer glavine zupčanika
- $d_{gv} = 50,8 \text{ mm}$  - vanjski promjer glavine zupčanika
- $\delta = 90^\circ$  - obuhvatni kut sektorskog otvora
- $d_v$  - vanjski promjer sektorskog otvora

Uvrštavanjem poznatih veličina u izraz (4.2) dobiju se okvirni iznosi ukupne mase pojedinog zupčanika:

- $m_B = 3,3$  ,  $\delta = 0^\circ$  ,  $m_z = 274,4 \text{ g}$
- $m_B = 1,0$  ,  $\delta = 90^\circ$  ,  $d_v = 64,7 \text{ mm}$  ,  $m_z = 226,7 \text{ g}$
- $m_B = 0,5$  ,  $\delta = 90^\circ$  ,  $d_v = 72,4 \text{ mm}$  ,  $m_z = 195,8 \text{ g}$
- $m_B = 0,3$  ,  $\delta = 90^\circ$  ,  $d_v = 75,5 \text{ mm}$  ,  $m_z = 182,2 \text{ g}$

Na slici 30 prikazana je grafička usporedba mase pojedinog zupčanika s njegovim maksimalnim naprežanjem u korijenu zuba. Također je prikazana promjena maksimalnog naprežanja u korijenu zuba zupčanika u ovisnosti o postotnom smanjenju mase zupčanika  $\Delta m_z$ . Za referentnu masu ( $\Delta m_z = 0 \%$ ) uzeta je masa punog zupčanika  $m_z = 274,4 \text{ g}$ .



Slika 30. Ovisnost mase zupčanika i vrijednosti maksimalnih naprezanja



## 5. ZAKLJUČAK

U ovom radu analizirani su ciklusi naprezanja u korijenu zuba zupčanika s ravnim zubima te utjecaj različitih varijacija geometrije zupčanika kao i centrifugalne sile na samo naprezanje. Prema provedenim analizama i proračunima, mogu se donesti sljedeći zaključci:

1. Proračun naprezanja po ISO 6336 [8] poklapa se s stanjem maksimalnog naprezanja  $\sigma_\varphi$  dobivenog putem MKE-a samo kada se radi o punom zupčanicu, tj. o zupčanicu bez tankog vijenca, kao što je vidljivo na slici 25. Pozicija maksimalnog naprezanja u korijenu zuba zupčanika dobivena putem MKE-a ne poklapa se s pozicijom dobivenom po normi kao što je vidljivo na slici 26 (po ISO 6336 [8] standardu kritičan presjek nalazi se na  $\varphi = 30^\circ$ , slika 22).
2. Iako debljina vijenca ima znatan utjecaj na cjelokupni ciklus naprezanja, nema relativno znatan utjecaj na iznos maksimalnog naprezanja  $\sigma_{\varphi \max}$  u korijenu zuba. Iznimku čine zupčanici sa omjerom  $m_B < 0,5$ .
3. Utjecaj centrifugalne sile može i nemora imati znatan utjecaj na iznos maksimalnog naprezanja u korijenu zuba zupčanika, ovisno o debljini vijenca. Kao što je vidljivo u točki 4.4, centrifugalna sila pri brzini vrtnje zupčanika od relativno velikih  $10\,000 \text{ min}^{-1}$  te omjerom  $m_B = 0,3$  povećava iznos maksimalnog naprezanja za  $\Delta\sigma_\varphi = 125 \text{ MPa}$ , dok kod punog zupčanika iznosi svega  $\Delta\sigma_\varphi = 7,5 \text{ MPa}$ .
4. Veličina sektorskog otvora kod zupčanika reducirane mase nema velik utjecaj na iznos maksimalnog naprezanja u korijenu zuba, dok sa smanjenjem sektorskog otvora raste i iznos maksimalnog tlačnog naprezanja (vidi sliku 29) te je ciklus naprezanja u korijenu zuba zupčanika sa sektorskim otvorom koji obuhvaća jedan zub gotovo identičan kao i onaj kod punog zupčanika.
5. Sa smanjenjem mase zupčanika smanjuje se i iznos maksimalnog naprezanja u korijenu zuba do omjera  $m_B = 1,0$ . Sa nastavkom smanjenja mase do omjera  $m_B = 0,5$  dolazi do blagog porasta naprezanja. Međutim, kod omjera debljine vijenca i visine zuba  $m_B < 0,5$  dolazi do naglog porasta naprezanja, što još jednom pokazuje kako je područje omjera debljine vijenca i visine zuba  $m_B < 0,5$  opasno te se po normi ISO 6336 [8] ono ne preporuča.

## 6. LITERATURA

- [1] [www.navjivangeearsindia.com](http://www.navjivangeearsindia.com)
- [2] [www.graessner.at/en](http://www.graessner.at/en)
- [3] [www.directindustry.com](http://www.directindustry.com)
- [4] [www.arrowgear.com](http://www.arrowgear.com)
- [5] Oberšmit, E., Ozubljenja i zupčanici, SNL Zagreb 1982.
- [6] [www.geartechnology.com](http://www.geartechnology.com)
- [7] [www.mechnol.com](http://www.mechnol.com)
- [8] ISO 6336, "Calculation of Load Capacity of Spur and Helical Gears", ISO, 2006
- [9] Lewicki, D., Ballarini, R., Effect of Rim Thickness on Gear Crack Propagation Path, Cleveland, Ohio, 1996.
- [10] ABAQUS 6.13, Dassault Systems, Simulia, 2012
- [11] [www.edwilson.org](http://www.edwilson.org)
- [12] <http://illustrations.marin.ntnu.no>
- [13] Vučković, K., Nastanak zamorne pukotine u korijenu zuba zupčanika s tankim vijencem, Zagreb 2009.
- [14] Opalić, M., Rakamarić, P., Reduktor, Zagreb 2001.
- [15] Sorić, J., Metoda konačnih elemenata, Golden marketing-Tehnička knjiga, Zagreb 2004.