

# Upravljanje inverznim rotacijskim njihalom

---

**Kolovrat, Petar**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2016**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:235:435219>

*Rights / Prava:* [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-12-26**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# **DIPLOMSKI RAD**

**Petar Kolovrat**

Zagreb, 2016.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# DIPLOMSKI RAD

Mentor:

Prof. dr. sc. Josip Kasać

Student:

Petar Kolovrat

Zagreb, 2016.

Izjavljujem da sam ovaj rad izradio samostalno koristeći stečena znanja tijekom studija i navedenu literaturu.

Zahvaljujem se voditelju rada i mentoru, prof. dr. sc. Josipu Kasaću na pruženoj pomoći te stručnoj podršci, prijedlozima i sugestijama koje su pomogle pri izradi diplomskog rada.

Zahvaljujem se svim profesorima i djelatnicima Fakulteta strojarstva i brodogradnje na prenesenom znanju i inženjerskom načinu razmišljanja tijekom svih godina studija. Posebno želim izdvojiti profesore sa Katedre za strojarsku automatiku koji su meni i drugim studentima na jasan način približili područje strojarske automatike, mehatronike i robotike, a znanje koje sam stekao odražava se i u ovom radu. Pri tome bih posebno istaknuto mentora, prof. dr. sc. Josipa Kasaća, s kojim sam zajednički ušao u srž ovog rada i uspješno riješio sve probleme i izazove.

Također se zahvaljujem svojoj obitelji na povjerenju, strpljenju te moralnoj i financijskoj podršci koju su mi pružili tijekom studiranja.

Petar Kolovrat



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
**FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE**



Središnje povjerenstvo za završne i diplomske ispite  
Povjerenstvo za diplomske ispite studija strojarstva za smjerove:  
proizvodno inženjerstvo, računalno inženjerstvo, industrijsko inženjerstvo i menadžment, inženjerstvo  
materijala i mehatronika i robotika

Sveučilište u Zagrebu Fakultet strojarstva i brodogradnje	
Datum	Prilog
Klasa:	
Ur.broj:	

## DIPLOMSKI ZADATAK

Student: **Petar Kolovrat**

Mat. br.: 0035177917

Naslov rada na hrvatskom jeziku: **UPRAVLJANJE INVERZNYM ROTACIJSKIM NJIHALOM**

Naslov rada na engleskom jeziku: **CONTROL OF ROTARY INVERTED PENDULUM**

Opis zadatka:

Mehanički sustavi s više rotacijskih stupnjeva slobode gibanja mogu biti opisani izuzetno složenim nelinearnim dinamičkim modelima. Unatoč toj složenosti, potpuno upravljane mehaničke sustave moguće je asimptotski stabilizirati u proizvoljnoj poziciji primjenom standardnih PID regulatora. U slučaju podupravljanih mehaničkih sustava, asimptotska stabilizacija je moguća samo u ograničenom broju položaja i sinteza regulatora postaje bitno složenija.

U zadatku je potrebno:

- Izvesti dinamički model inverznog rotacijskog njihala s dva stupnja slobode gibanja te implementirati simulacijski model.
- Uz pretpostavku potpune upravljivosti, potrebno je implementirati linearni PD i PID regulator na problemu pozicioniranja inverznog rotacijskog njihala.
- Uz pretpostavku da brzine nisu mjerljive, potrebno je implementirati filter za estimaciju brzine. Primijeniti predfilter referentnog signala s ciljem poboljšanja prijelaznih performansi.
- U slučaju podupravljanog inverznog rotacijskog njihala, provesti linearizaciju dinamičkog modela te sintezu linearnog kvadratičnog regulatora.
- Provesti sintezu neizrastog regulatora koji će rotacijsko njihalo stabilizirati u inverznom položaju.
- Implementirati regulator s kliznim režimom (engl. sliding-mode control) za stabilizaciju rotacijskog njihala u inverznom položaju.
- Usporediti performanse regulacije implementiranih upravljačkih algoritama.

Zadatak zadan:  
12. studenog 2015.


Rok predaje rada:  
14. siječnja 2016.

Predviđeni datum obrane:  
20., 21. i 22. siječnja 2016.

Zadatak zadao:

Predsjednik Povjerenstva:

  
Prof. dr. sc. Josip Kasac

  
Prof. dr. sc. Franjo Cajner

# SADRŽAJ

SADRŽAJ .....	I
POPIS SLIKA .....	III
POPIS TABLICA.....	V
POPIS OZNAKA.....	VI
SAŽETAK .....	VIII
SUMMARY .....	IX
1. UVOD .....	1
2. MATEMATIČKI MODEL SUSTAVA.....	3
2.1. Uvodno razmatranje.....	3
2.2. Opis inverznog rotacijskog njihala.....	3
2.3. Modeliranje sustava .....	5
2.4. Prikaz sustava u prostoru stanja .....	10
2.5. Parametri sustava .....	12
2.6. Simulacija nelinearnog modela .....	12
3. REGULACIJA POTPUNO UPRAVLJIVOG SUSTAVA.....	14
3.1. Uvodno razmatranje.....	14
3.2. Regulacija pozicije pomoću PD regulatora .....	14
3.2.1. Rezultati simulacije PD regulatora.....	16
3.2.2. Interpretacija rezultata .....	18
3.3. Regulacija pozicije pomoću PID regulatora .....	19
3.3.1. Rezultati simulacije PD regulatora.....	20
3.3.2. Interpretacija rezultata .....	22
3.4. Prefilter referentne pozicije .....	23
3.4.1. Rezultati simulacije PID regulatora s predfiltrom .....	25
3.4.2. Interpretacija rezultata .....	26
3.5. Filter za estimaciju brzine .....	26
3.5.1. Rezultati simulacije PID regulatora s filtrom brzine.....	28
3.5.2. Interpretacija rezultata .....	31
4. REGULACIJA PODUPRAVLJANOG SUSTAVA.....	32
4.1. Uvodno razmatranje.....	32

---

4.2. Linearizacija modela .....	32
4.3. Linearizirani model u prostoru stanja .....	34
4.4. Linearni kvadratični regulator (LQR) .....	35
4.4.1. Kontrolabilnost sustava .....	36
4.4.2. Observabilnost sustava .....	37
4.4.3. Sinteza LQR regulatora .....	38
4.4.4. Rezultati simulacije LQR regulatora .....	40
4.4.5. Interpretacija rezultata .....	41
4.4.6. Usporedba nelinearnog i lineariziranog modela.....	41
4.5. Observer stanja.....	44
4.6. <i>Swing-up</i> algoritam .....	45
4.6.1. Rezultati simulacije swing-up algoritma i LQR regulatora.....	47
4.6.2. Interpretacija rezultata .....	49
4.7. Neizraziti regulator .....	50
4.7.1. Rezultati simulacije neizrazitog regulatora.....	59
4.7.2. Interpretacija rezultata .....	60
5. ZAKLJUČAK.....	61
LITERATURA .....	63
PRILOZI.....	65

## POPIS SLIKA

Slika 2.1	Inverzno rotacijsko njihalo .....	4
Slika 2.2	Skica modela u koordinatnom sustavu .....	5
Slika 2.3	Odziv nelinearnog sustava u otvorenoj petlji .....	13
Slika 3.1	Shema PD regulatora .....	15
Slika 3.2	Odziv sustava reguliranog PD regulatorom .....	17
Slika 3.3	Trajna regulacijska pogreška PD regulatora .....	18
Slika 3.4	Shema PID regulatora .....	20
Slika 3.5	Odziv sustava reguliranog PID regulatorom .....	21
Slika 3.6	Eliminacija trajne regulacijske pogreške PID regulatorom .....	22
Slika 3.7	Blok shema filtra referentne pozicije .....	23
Slika 3.8	Blok shema sustava s predfiltrom referentne pozicije .....	24
Slika 3.9	Odziv sustava s PID regulatorom i predfiltrom referentne pozicije .....	25
Slika 3.10	Blok shema filtra za estimaciju brzine .....	27
Slika 3.11	Blok shema PID regulatora s predfiltrom i filtrom brzine .....	28
Slika 3.12	Odziv PID regulatora uz šum mjerenja, bez filtra brzine .....	29
Slika 3.13	Odziv PID regulatora uz šum mjerenja, uz filter brzine .....	30
Slika 3.14	Odziv PID regulatora bez šuma mjerenja, uz filter brzine .....	31
Slika 4.1	Polovi sustava s LQR regulatorom .....	39
Slika 4.2	Odziv sustava s LQR regulatorom .....	40
Slika 4.3	Usporedba LQR između nelinearnog i lineariziranog modela za $\alpha(0) = 0.1$ .....	42
Slika 4.4	Usporedba LQR između nelinearnog i lineariziranog modela za $\alpha(0) = 1$ .....	43
Slika 4.5	Luenbergov observer stanja .....	44
Slika 4.6	Odziv sustava sa <i>swing-up</i> algoritmom, bez LQR regulatora .....	47
Slika 4.7	Odziv sustava sa <i>swing-up</i> algoritmom i LQR regulatorom .....	48
Slika 4.8	Model sustava s neizrazitim regulatorom .....	51
Slika 4.9	Fuzzy logic designer .....	52
Slika 4.10	Funkcije pripadnosti za <i>alpha</i> .....	53
Slika 4.11	Funkcije pripadnosti za <i>alpha_v</i> .....	54



---

Slika 4.12 Funkcije pripadnosti za $\theta_v$ .....	55
Slika 4.13 Funkcije pripadnosti za izlazni moment .....	56
Slika 4.14 Set fuzzy pravila za regulator .....	58
Slika 4.15 Odziv sustava s uključenim neizrazitim regulatorom .....	59

## **POPIS TABLICA**

Tablica 1 Parametri sustava.....	12
----------------------------------	----

## POPIS OZNAKA

Oznaka	Jedinica	Opis
$x$		Opća varijabla
$y$		Opća varijabla
$t$	s	Vrijeme
$q_i$		Generalizirana koordinata
$Q_i$		Generalizirane sile ili momenti
$\mathbf{q}$		Vektor pozicija kutova
$\dot{\mathbf{q}}$		Vektor brzina kutova
$\theta$	rad	Pozicija kuta poluge
$\alpha$	rad	Pozicija kuta njihala
$\dot{\theta}$	rad/s	Brzina kuta poluge
$\dot{\alpha}$	rad/s	Brzina kuta njihala
$\mathbf{M}(\mathbf{q})$		Matrica inercija sustava
$M_{ij}$		Komponente matrice inercija sustava
$\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$		Christoffelov tenzor
$\mathbf{g}(\mathbf{q})$		Vektor gravitacijskog djelovanja
$\tau_1$	Nm	Upravljački moment poluge
$\tau_2$	Nm	Upravljački moment njihala
$\boldsymbol{\tau}$		Vektor upravljačkih momenata
$m_p$	kg	Masa njihala
$L_p$	m	Duljina njihala
$J_p$	Nms <sup>2</sup>	Moment inercije njihala
$m_r$	kg	Masa poluge
$L_r$	m	Duljina poluge
$J_r$	Nms <sup>2</sup>	Moment inercije poluge
$g$	m/s <sup>2</sup>	Ubrzanje sile gravitacije
$B_r$	Nms/rad	Prigušenje poluge
$B_p$	Nms/rad	Prigušenje njihala
$e$		Regulacijska pogreška
$K_p$		Proporcionalno pojačanje
$K_d$		Derivacijsko pojačanje
$K_i$		Integracijsko pojačanje
$K_{fr}$		Pojačanje predfiltera referentne pozicije
$A$		Pojačanje filtera brzine
$v_{est}$	rad/s	Estimirana brzina
$\bar{\mathbf{q}}_d$		Predfiltrirana referentna pozicija kutova

<b>x</b>	Vektor stanja sustava
<b><math>\dot{x}</math></b>	Vektor derivacija stanja sustava
<b>u</b>	Vektor ulaza sustava
<b>y</b>	Vektor izlaza sustava
<b>A</b>	Matrica stanja sustava u prostoru stanja
<b>B</b>	Matrica ulaza sustava u prostoru stanja
<b>C</b>	Matrica izlaza sustava u prostoru stanja
<b>D</b>	Matrica preslikavanja sustava u prostoru stanja
<b>K</b>	Vektor pojačanja linearnog kvadratičnog regulatora
<b>Q</b>	Matrica težina stanja linearnog kvadratičnog regulatora
<b>R</b>	Matrica težina ulaza linearnog kvadratičnog regulatora

---

## SAŽETAK

Inverzno rotacijsko njihalo predstavlja primjer standardnog edukacijskog mehaničkog sustava s dva rotacijska stupnja slobode gibanja, opisanog složenom nelinearnom dinamikom. Ovaj rad prikazuje metode regulacije takvog sustava koristeći različite vrste regulatora. Za slučaj potpuno upravljivog sustava, dizajnirani su standardni PD i PID regulatori koji asimptotski stabiliziraju sustav u proizvoljnom položaju. Uveden je predfilter referentne pozicije radi poboljšanja performansi regulacije te filter brzine pod pretpostavkom da brzine nisu mjerljive. Za slučaj podupravljanog inverznog njihala, provedena je linearizacija dinamičkog modela te sinteza linearnog kvadratičnog regulatora. S obzirom da linearni regulator nije u mogućnosti, za dovođenje njihala iz ravnotežnog položaja u područje oko inverznog položaja gdje regulaciju preuzima linearni regulator, dizajniran je *swing-up* algoritam. Dodatno, za stabilizaciju njihala u inverznom položaju dizajniran je i neizraziti regulator.

Ključne riječi: inverzno rotacijsko njihalo, nelinearna dinamika, PD regulator, PID regulator, linearizacija, linearni kvadratični regulator, swing-up algoritam, neizraziti regulator

## SUMMARY

Inverted rotational pendulum is an example of a standard educational mechanical system with two rotational degrees of freedom, described by complex nonlinear dynamics. This work presents the control methods of such a system using various types of controllers. In case of a fully actuated system, standard PD and PID controllers for asymptotic stabilization at a desired position are designed. To improve the controller performance, a desired position pre-filter and, assuming the speeds are not measurable, a speed filter are introduced. In case of an underactuated rotational inverted pendulum, the model has been linearized and a linear quadratic controller has been designed. Since it is not possible using the linear controller, a swing-up algorithm has been designed to drive the pendulum from the downward, hanging position towards the inverted position where the linear controller takes over. Additionally, a fuzzy regulator has also been designed to stabilize the pendulum in its upright position.

Keywords: rotational inverted pendulum, nonlinear dynamics, PD controller, PID controller, linearization, linear quadratic controller, swing-up algorithm, fuzzy controller.

# 1. UVOD

Inverzna njihala već dugo na području strojarske automatike predstavljaju ogledni primjer za različite pristupe automatskoj regulaciji sustava. Rotacijska komponenta u inverznom rotacijskom njihalu u sustav unosi i dodatne dinamičke nelinearnosti i nestabilnosti što predstavlja izazov za regulaciju. Međutim, pristupi i metode regulacije ovakvog i sličnih sustava mogu poslužiti i kao odlična podloga za određene mnogo veće i korisnije sustave koji se pojavljuju u strojarskim rješenjima. Primjerice, prva rješenja regulacije inverznim njihalima poslužila su kao podloga u svemirskoj industriji, za bolje razumijevanje dinamike lansiranja rakete. Naime, prilikom lansiranja, ponašanje rakete je izrazito nestabilno i potrebna je konstantna korekcija i nadzor potisnika kako bi raketa ostala u uspravnom položaju – kao i kod inverznog njihala.

Inverzno rotacijsko njihalo kojim se ovaj rad bavi, naziva se i *Furuta* njihalo, prema znanstveniku sa Instituta tehnologije u Tokiju koji ga je izumio zajedno sa svojim kolegama 1992. godine. U međuvremenu je prikazani sustav s dva stupnja slobode gibanja postao ogledni primjer kompleksnog nelinearnog oscilatora, pogodnog za iskušavanje i edukaciju o različitim teorijama upravljanja sustavima. S razvojem modernih teorija upravljanja, ali i računalnih resursa, uspješno je riješena i stabilizacija njihala u inverznom položaju u podaktuiranoj konfiguraciji, odnosno u slučaju kad je moguće upravljati samo prvim stupnjem slobode gibanja, odnosno rotirajućom polugom, a samo njihalo je slobodno.

Cilj ovog rada je dizajnirati nekoliko uobičajenih regulatora koji će njihalo stabilizirati u inverznom položaju, bilo na temelju potpunog, nelinearnog matematičkog modela ili temeljem lineariziranog modela sustava. Ti regulatori uključuju: *PD* regulator, *PID* regulator, *linearni kvadratični regulator* i *neizraziti (fuzzy) regulator*. U sklopu toga potrebno je dizajnirati i filtere za mjerenje brzine kako bi se regulatori mogli aplicirati i na realnom modelu, ne samo u simulaciji, u kojem prilikom mjerenja postoje izvjesni šumovi i ostali poremećaji koji mogu znatno utjecati na performanse regulacije.

U drugom poglavlju izvodi se precizan nelinearni matematički model sustava na kojem će se temeljiti regulatori iz sljedećih poglavlja. Model sustava je prikazan u više različitih formi radi lakšeg razumijevanja i implementacije u simulacijskom softveru - MATLAB-u.

Kao podloga za dobivanje matematičkog modela sustava i generalno za korištenje objektivnih parametara sustava, iskorišten je proizvod *Quanser Cube - Servo Inverted Pendulum*. Iz tog sustava iskorišteni su mnogobrojni fizikalni parametri te je na temelju konfiguracije dobiven matematički model. U slučaju instalacije tog proizvoda u laboratoriju, sve regulatore koji su dizajnirani u ovom radu moguće je direktno primijeniti na instaliranom modelu.

U trećem poglavlju pristupa se sintezi regulatora pod pretpostavkom da je sustav potpuno upravljiv, odnosno da je moguće upravljati i baznom polugom inverznog rotacijskog njihala, i samim njihalom. Dizajniraju se standardni PD i PID regulatori te prikazuju tipični problemi. Također, u regulaciju se uvodi predfilter referentne pozicije te filter za estimaciju brzine koji estimira brzinu na temelju mjerenja pozicije pomoću enkodera, pri tome eliminirajući šum.

U četvrtom poglavlju uvodi se pretpostavka da sustav više nije potpuno upravljiv nego je moguće samo upravljati kutom bazne poluge dok se njihalo slobodno vrti. Radi dizajniranja linearnog regulatora u povratnoj petlji, pristupa se linearizaciji modela. Na temelju lineariziranog modela, dizajnira se linearni kvadratični regulator (LQR) koji je u mogućnosti stabilizirati njihalo u inverznom položaju. Osim toga, dizajniran je i tzv. *swing-up* algoritam kojim je moguće njihalo iz donjeg ravnotežnog položaja dovesti u inverzni položaj.

Konačno, temeljni cilj ovog rada je generirati simulacije sustava sa svakim od dizajniranih regulatorima i dobiti rezultate odziva. Na temelju toga potrebno je usporediti različite regulatore imajući u vidu uspješnost i performanse regulacije te kompliciranost i vrijeme dizajniranja regulatora te opravdanost korištenja pojedinog regulatora. Na kraju je potrebno donijeti zaključak o tome koliko je opravdano i korisno koristiti pojedinu metodu regulacije na ovakvom sustavu, što u konačnici vrijedi i za brojne druge sustave slične dinamike.



## 2. MATEMATIČKI MODEL SUSTAVA

### 2.1. Uvodno razmatranje

Za pravilnu analizu i regulaciju svakog sustava, potrebno je izvesti dovoljno precizan matematički model sustav, odnosno doći do diferencijalnih jednadžbi koje opisuju ponašanje sustava.

Dobar uvid u karakteristike sustava i njegovo ponašanje omogućuje izvođenje preciznijeg matematičkog modela, na temelju kojeg dizajn regulatora može biti bolji, efikasniji i brži u performansama. U ovom radu modeliranje sustava temelji se na proizvodu tvrtke *Quanser*, njihovom inverznom rotacijskom njihalu naziva *Cube - Servo Inverted Pendulum*.

Matematičko modeliranje izvodi se imajući u vidu **sljedeće pretpostavke**:

- Svi fiksni spojevi su potpuno fiksirani
- Zanemaruju se zazori i labavosti u ležajevima i ostalim spojevima
- Krutost poluge i samog njihala je beskonačna
- Uzima se u obzir isključivo viskozno trenje, sva ostala su zanemarena (poput statičkog)

Bez navedenih pretpostavki, nelinearni model bi bio izrazito kompliciran te bi ga bilo vrlo teško izvesti. S druge strane, i uz zanemarivanje gore navedenih fizikalnih pojava, model sustava je dovoljno dobar za analizu i regulaciju.

### 2.2. Opis inverznog rotacijskog njihala

Inverzno rotacijsko njihalo prikazano je na slici 2.1. Ima dva stupnja slobode gibanja i sastoji se od baze koja u sebi sadržava električni motor. Električni motor je fiksno spojen s polugom koja leži u horizontalnoj ravnini, a na koju je preko šarke zakačeno samo njihalo koje se može slobodno rotirati oko poluge. Na poluzi se također nalazi inkrementalni enkoder visoke rezolucije koji služi za mjerenje kuta njihala.

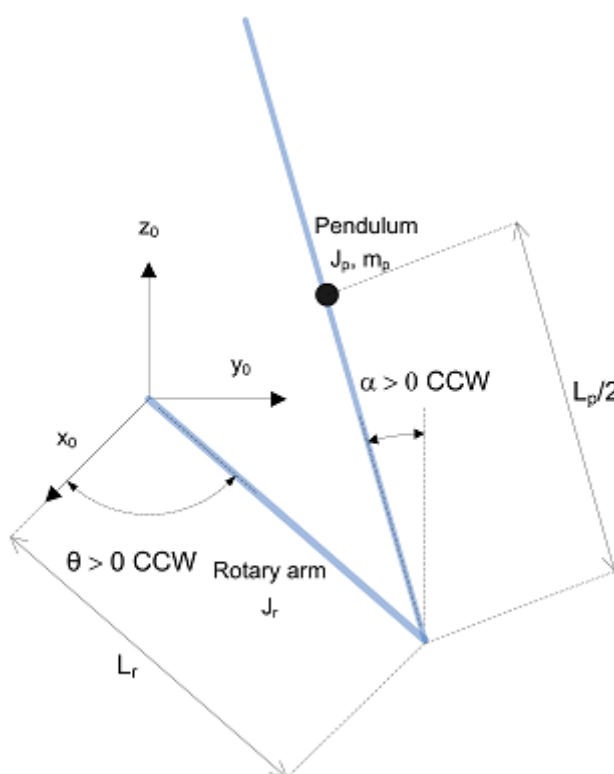


**Slika 2.1 Inverzno rotacijsko njihalo**

Premda je osnovna konfiguracija takva da je samo poluga aktuirana, moguće je dodati električni motor za actuaciju samog njihala - što je opisano u poglavlju koje se bavi *PD* i *PID* regulacijom potpuno aktuiranog sustava.

### 2.3. Modeliranje sustava

Skica mehaničkog dijela sustava u koordinatnom sustavu prikazana je na slici 2.2. Model je smješten u standardni desnokretni kartezijski koordinatni sustav. Poluga ima duljinu  $L_r$ , masu  $m_r$  i moment inercije  $J_r$ . Kut poluge  $\theta$  povećava se ukoliko se poluga giba u smjeru suprotnom od kazaljke na satu (CCW). Njihalo je spojeno na kraj poluge te ima ukupnu duljinu  $L_p$  i masu  $m_p$ , a centar mase nalazi se na udaljenosti  $L_p/2$ . Moment inercije njihala oko centra mase iznosi  $J_p$ . Kut njihala  $\alpha$  iznosi  $0^\circ$  kada je njihalo u potpuno uspravnom, inverznom položaju. Kut se povećava ukoliko se njihalo giba u smjeru suprotnom od kazaljke na satu (CCW).



Slika 2.2 Skica modela u koordinatnom sustavu

Za pronalazak jednadžbi gibanja inverznog rotacijskog njihala iskorištena je *Lagrange-ova* metoda umjesto klasičnih metoda u mehanici. Ova metoda često se koristi kod kompleksnijih sustava poput robota s više stupnjeva slobode gibanja.

Jednadžbe koje opisuju gibanje sustava, odnosno poluge i njihala u odnosu na upravljačko djelovanje u motorima, dobit će se pomoću *Euler-Lagrangeove* jednadžbe (prema [1] i [5]):

$$\frac{\partial^2 L}{\partial t \partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i \quad (2.1)$$

Varijabla  $q_i$  sadržava generalizirane koordinate. Za ovaj sustav  $q_i$  je definiran kako slijedi:

$$\mathbf{q}(t) = \begin{bmatrix} \theta(t) \\ \alpha(t) \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

gdje je  $\theta(t)$  kut poluge, a  $\alpha(t)$  kut inverznog njihala. Odgovarajuće brzine tih kuteva su

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \theta(t)}{\partial t} \\ \frac{\partial \alpha(t)}{\partial t} \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

S definiranim generaliziranim koordinatama, mogu se utvrditi konačne *Euler-Lagrangeove* jednadžbe za sustav inverznog rotacijskog njihala:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 L}{\partial t \partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} &= Q_1 \\ \frac{\partial^2 L}{\partial t \partial \dot{\alpha}} - \frac{\partial L}{\partial \alpha} &= Q_2 \end{aligned} \quad (2.4)$$

Potrebno je definirati operator, tzv. *Lagrangian*

$$L = T - V \quad (2.5)$$

gdje je  $T$  ukupna kinetička energija sustava, a  $V$  ukupna potencijalna energija sustava. Stoga, *Lagrangian* predstavlja razliku između kinetičke i potencijalne energije sustava.

Generalizirane sile  $Q_i$  sadrže vanjsko djelovanje na sustav, uključujući i viskozno trenje i upravljačke momente motora. U ovom slučaju, takva djelovanja na sustav su

$$\begin{aligned} Q_1 &= \tau_1 - B_r \dot{\theta} \\ Q_2 &= \tau_2 - B_p \dot{\alpha} \end{aligned} \quad (2.6)$$

gdje su

- $\tau_1$  upravljački moment poluge
- $\tau_2$  upravljački moment njihala (nepostojeći u podaktuiranom sustavu)
- $B_r$  viskozno trenje, odnosno prigušenje poluge
- $B_p$  viskozno trenje, odnosno prigušenje njihala

Ukupna kinetička energija mehaničkog sustava inverznog rotacijskog njihala iznosi

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} J_r \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_p (\dot{x}_p^2 + \dot{z}_p^2) + \frac{1}{2} J_p \dot{\alpha}^2 \\ &= \frac{1}{2} J_r \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_p \left[ (L_r \dot{\theta} - L_p \cos(\alpha) \dot{\alpha})^2 + (-L_p \sin(\alpha) \dot{\alpha})^2 \right] + \frac{1}{2} J_p \dot{\alpha}^2 \\ &= \frac{1}{2} (J_r + m_p L_r^2) \dot{\theta}^2 + \frac{2}{3} m_p L_p^2 \dot{\alpha}^2 - m_p L_p L_r \cos(\alpha) \dot{\theta} \dot{\alpha} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Jedina potencijalna energija u sustavu jest gravitacija samog njihala s obzirom da je ravnina u kojoj leži poluga osnovna, stoga ukupna potencijalna energija sustava iznosi

$$V = m_p g L_p \cos(\alpha) \quad (2.8)$$

Nakon što se (2.7) i (2.8) supstituira u (2.5), (2.5) je potrebno uvrstiti u (2.4). Nakon izvršavanja cijelog niza parcijalnih derivacija (nije prikazano u radu<sup>1</sup>), dolazi se do konačnih diferencijalnih jednadžbi gibanja sustava inverznog rotacijskog njihala:

$$\begin{aligned} & \left( m_p L_r^2 + \frac{1}{4} m_p L_p^2 - \frac{1}{4} m_p L_p^2 \cos(\alpha)^2 + J_r \right) \ddot{\theta} - \left( \frac{1}{2} m_p L_p L_r \cos(\alpha) \right) \ddot{\alpha} \\ & + \left( \frac{1}{2} m_p L_p^2 \sin(\alpha) \cos(\alpha) \right) \dot{\theta} \dot{\alpha} + \left( \frac{1}{2} m_p L_p L_r \sin(\alpha) \right) \dot{\alpha}^2 \\ & = \tau_1 - B_r \dot{\theta} \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} m_p L_p L_r \cos(\alpha) \ddot{\theta} + \left( J_p + \frac{1}{4} m_p L_p^2 \right) \ddot{\alpha} - \frac{1}{4} m_p L_p^2 \cos(\alpha) \sin(\alpha) \dot{\theta}^2 \\ & - \frac{1}{2} m_p L_p g \sin(\alpha) = \tau_2 - B_p \dot{\alpha} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Objе jednadžbe odgovaraju tipičnom izrazu za jednadžbe gibanja, prikazanom u matričnom formatu:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau} \quad (2.11)$$

<sup>1</sup> Izvršeno pomoću softverskog paketa MATLAB - Symbolic Math Toolbox

Pri tome je  $\mathbf{M}(\mathbf{q}) \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  matrica inercija sustava,  $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}$  je vektor Coriolisovih sila, zvan i Christoffelov tenzor,  $\mathbf{g}(\mathbf{q}) \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  je vektor gravitacijskih sila i momenata, a  $\boldsymbol{\tau} \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  je vektor vanjskih sila i momenata, u ovom sustavu konkretno upravljački momenti koji djeluju na polugu i njihalo.  $\mathbf{q}$  je vektor generaliziranih koordinata definiran u (2.2). Neka su definirani sljedeći fiksni parametri radi konciznijeg zapisa i jednostavnijeg preslikavanja modela u MATLAB softverski paket:

$$\begin{aligned}
 p_1 &= m_p L_r^2 \\
 p_2 &= m_p L_p^2 \\
 p_3 &= m_p L_p L_r \\
 p_4 &= m_p L_p g
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

Temeljem jednadžbi gibanja sustava (2.9) i (2.10) te definiranih fiksnih parametara (2.12), slijede matrice  $\mathbf{M}(\mathbf{q})$  te vektori  $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}$ ,  $\mathbf{g}(\mathbf{q})$  i  $\boldsymbol{\tau}$ :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M}(\mathbf{q}) &= \begin{bmatrix} p_1 + \frac{1}{4}p_2 - \frac{1}{4}p_2 \cos(\alpha)^2 + J_r & -\frac{1}{2}p_3 \cos(\alpha) \\ -\frac{1}{2}p_3 \cos(\alpha) & J_p + \frac{1}{4}p_2 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}p_2 \sin(\alpha) \cos(\alpha) \dot{\theta} \dot{\alpha} + \frac{1}{2}p_3 \sin(\alpha) \dot{\alpha}^2 + B_r \dot{\theta} \\ -\frac{1}{4}p_2 \cos(\alpha) \sin(\alpha) \dot{\theta}^2 + B_p \dot{\alpha} \end{bmatrix} \\
 \mathbf{g}(\mathbf{q}) &= \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2}p_4 \sin(\alpha) \end{bmatrix} \\
 \boldsymbol{\tau} &= \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

Uvrštavajući (2.2) i (2.13) u (2.11), dobija se sljedeći zapis sustava:

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} p_1 + \frac{1}{4}p_2 - \frac{1}{4}p_2 \cos(\alpha)^2 + J_r & -\frac{1}{2}p_3 \cos(\alpha) \\ -\frac{1}{2}p_3 \cos(\alpha) & J_p + \frac{1}{4}p_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\alpha} \end{bmatrix} \\
& + \begin{bmatrix} \frac{1}{2}p_2 \sin(\alpha) \cos(\alpha) \dot{\theta} \dot{\alpha} + \frac{1}{2}p_3 \sin(\alpha) \dot{\alpha}^2 + B_r \dot{\theta} \\ -\frac{1}{4}p_2 \cos(\alpha) \sin(\alpha) \dot{\theta}^2 + B_p \dot{\alpha} \end{bmatrix} \\
& + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2}p_4 \sin(\alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{2.14}$$

što u potpunosti odgovara jednadžbama gibanja (2.9) i (2.10).

#### 2.4. Prikaz sustava u prostoru stanja

Dobiveni matematički model potrebno je implementirati u softverski paket MATLAB radi programske analize, dizajna regulatora i vršenja simulacija. Model je moguće implementirati kao standardnu MATLAB funkciju ili kao Simulink model pa, shodno izboru, dizajnirati regulatore i vršiti simulacije u MATLAB kodu ili u Simulinku koji se više bazira na vizualni, blokovski pristup.

Zbog kompleksnosti predmetnog nelinearnog modela inverznog rotacijskog njihala, međutim, u ovom radu nije dizajniran Simulink model nego je rad temeljen na standardnoj MATLAB funkciji.

Zbog načina na koji MATLAB simulira funkcije (*solveri*), potrebno je model sustava drugačije zapisati da bi se na izlazu funkcije dobili željena stanja - kutove poluge i njihala te njihove brzine. Takav zapis je djelomičan zapis u prostoru stanja.

Uvodi se vektor stanja sustava:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \mathbf{M}(\mathbf{q})^{-1} [\boldsymbol{\tau} - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{g}(\mathbf{q})] \end{bmatrix} \tag{2.15}$$

gdje je



$$\mathbf{M}(\mathbf{q})^{-1} = \frac{1}{M_{11}M_{22} - M_{12}M_{21}} \begin{bmatrix} M_{22} & -M_{12} \\ -M_{21} & M_{11} \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

Kada se uvrste kutovi umjesto vektora generaliziranih koordinata  $\mathbf{q}$ , zapis se pretvara u 4 jednadžbe koje je moguće implementirati u MATLAB funkciju. Odgovarajući MATLAB kod nalazi se u *Prilogu B*.

## 2.5. Parametri sustava

Prije vršenja bilo kakvih simulacija, potrebno je definirati sve konstante parametre u modelu sustava. U ovom slučaju iskorišteni su parametri dani od proizvođača za realni model *Cube - Inverted Rotational Pendulum*, [12].

**Tablica 1 Parametri sustava**

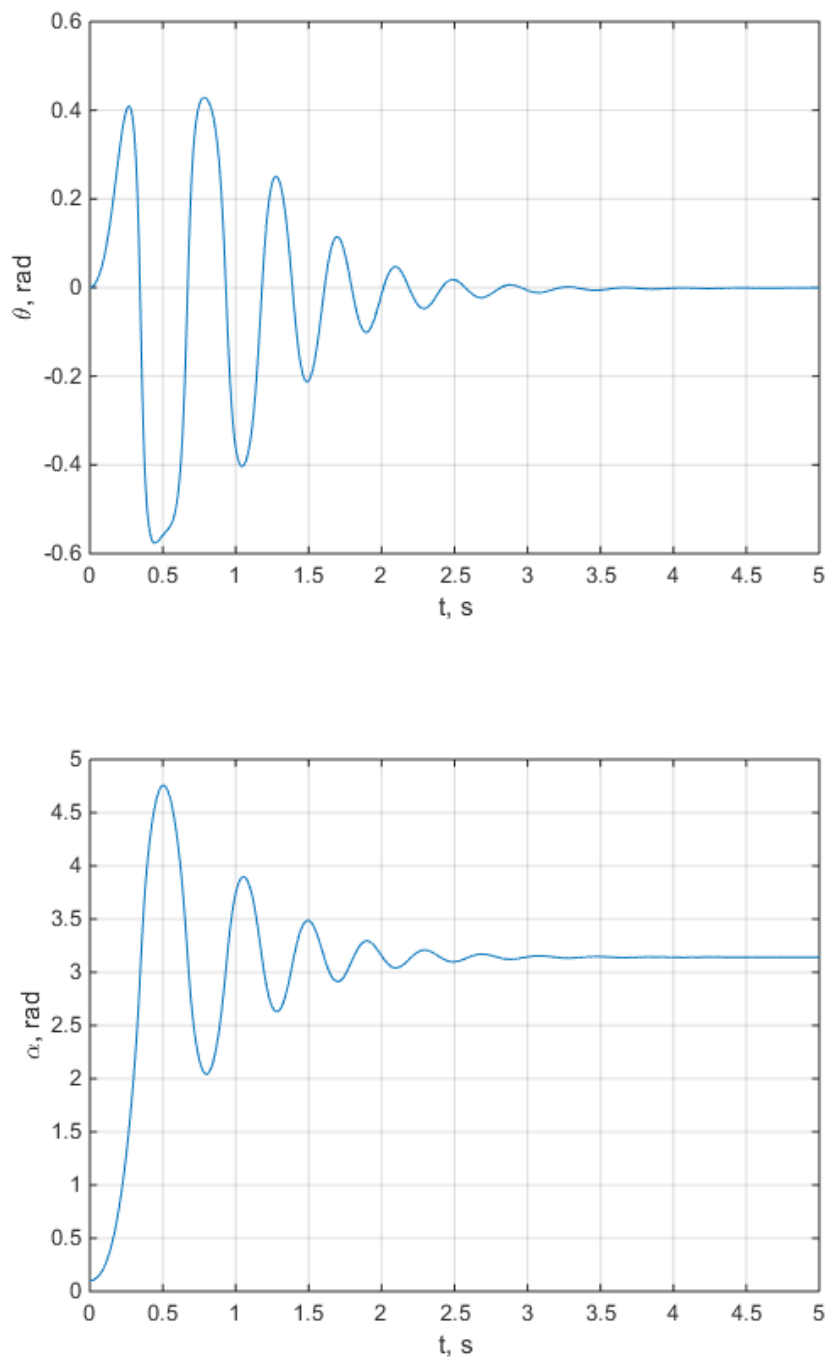
Parametar	Iznos	Jedinica
$m_p$	0,024	kg
$L_p$	0,129	m
$J_p$	$3,33 \times 10^{-5}$	Nms <sup>2</sup>
$L_r$	0,085	m
$J_r$	$5,72 \times 10^{-5}$	Nms <sup>2</sup>
$g$	9,81	m/s <sup>2</sup>
$B_r$	$2,34 \times 10^{-5}$	Nms/rad
$B_p$	$1,7 \times 10^{-5}$	Nms/rad

## 2.6. Simulacija nelinearnog modela

Nakon dobivenog nelinearnog modela sustava inverznog rotacijskog njihala, poželjno je izvršiti simulaciju sustava u *open-loop* konfiguraciji, odnosno bez upravljačkih djelovanja, da bi se stekao dojam o ponašanju sustava. Početni uvjeti su sljedeći

$$\alpha(0) = 0.1 \quad \theta(0) = \dot{\theta}(0) = \dot{\alpha}(0) = 0$$

Odziv sustava prikazan je na slici 2.3. Primjećuje se očekivana oscilacija njihala, tj. njegovog kuta i smirivanje u donjem položaju.



**Slika 2.3** Odziv nelinearnog sustava u otvorenoj petlji

## 3. REGULACIJA POTPUNO UPRAVLJIVOG SUSTAVA

### 3.1. Uvodno razmatranje

Sustav inverznog rotacijskog njihala je potpuno upravljiv ukoliko je moguće aplicirati upravljački moment  $\tau$  i na polugu i na njihalo, odnosno kada je  $\tau = [\tau_1 \quad \tau_2]^T$ , kako je i prikazano u prethodnim jednadžbama sustava. Premda se cijela ideja inverznog rotacijskog njihala gubi dodavanjem upravljačkog mehanizma na samom njihalu - njihalo, naime, po definiciji ne bi trebalo imati upravljački mehanizam - svrha ovakve strukture sustava je druga. Naime, velika većina robota i robotskih manipulatora ima gotovo identičnu strukturu i matematičke modele te se njihova regulacija tipično izvodi pomoću *PD* i *PID* regulatora. Dakle, jedan robot s dva *linka* (dva stupnja slobode gibanja) i motorom u svakom zglobu predstavlja potpuno analogan sustav potpuno upravljivom sustavu inverznog rotacijskog njihala.

Svrha ovog poglavlja je dizajnirati jednostavne *PD* i *PID* regulatore za regulaciju pozicije, implementirati predfilter referentne pozicije i filter brzine, zatim izvršiti simulaciju i generirati odgovarajuće odzive sustava.

### 3.2. Regulacija pozicije pomoću *PD* regulatora

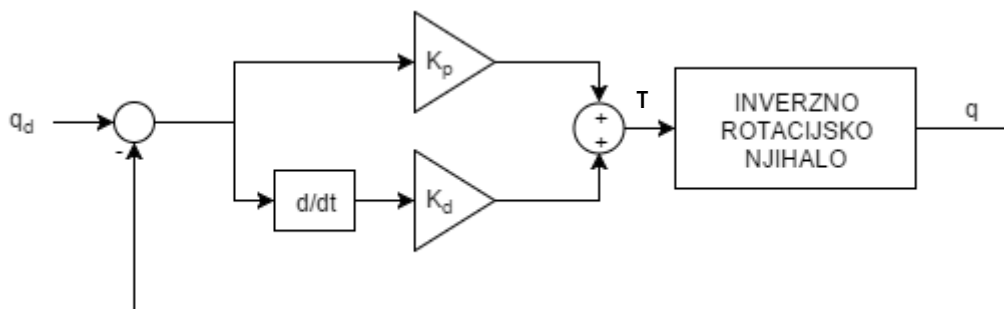
Osnovna metoda regulacije, odnosno jedna od metoda metoda koju se najčešće primarno razmatra prilikom sinteze regulatora, jest regulacija pomoću *PD* regulatora. *PD* regulator kontinuirano izračunava pogrešku regulacije, odnosno razliku između željenog, referentnog iznosa regulirane veličine i stvarnog iznosa regulirane veličine. Stvarni iznos regulirane veličine dobiva se mjerenjem ili indirektnim izračunavanjem te se u povratnoj petlji vraća nazad u regulator za usporedbu s referentnom veličinom što tvori zatvorenu petlju, odnosno *closed loop* regulator. Na temelju regulacijske

pogreške, regulator nastoji djelovati na upravljačke veličine u objektu regulacije, minimizirajući pogrešku regulacije preko sljedeće jednadžbe

$$u(t) = K_p e(t) + K_d \frac{de(t)}{dt} \quad (3.1)$$

gdje je  $e(t)$  pogreška regulacije,  $K_p$  pojačanje proporcionalne komponente regulatora, a  $K_d$  pojačanje derivacijske komponente regulatora. Proporcionalno pojačanje utječe na trenutne vrijednosti pogreške, a derivacijsko pojačanje utječe na moguće buduće vrijednosti pogreške.

Za sustav inverznog rotacijskog njihala, primijenjena je ista struktura regulatora. Iskorištene su generalizirane koordinate sustava pa je regulator primjenjiv za obje upravljačke varijable, odnosno za oba kuta sustava. Slika 3.1 prikazuje *PD* regulator u blokovskoj shemi.



Slika 3.1 Shema PD regulatora

Iz sheme PD regulatora slijedi da je

$$\tau(t) = K_p (q_d(t) - q(t)) + K_d \frac{d(q_d(t) - q(t))}{dt} \quad (3.2)$$

Takva struktura implementirana je u postojeću MATLAB funkciju modela sustava. Pojačanja  $K_p$  i  $K_d$  određena su ručnom metodom, na način da se proporcionalno pojačanje podiže dok sustav ne uđe u nestabilnost, zatim se proporcionalno pojačanje stavlja na  $\frac{1}{2}$  definirane vrijednosti te unosi derivacijsko pojačanje. Dodatno podešavanje da bi se dobili još bolji odzivi rezultiralo je sljedećim parametrima pojačanja:

$$K_p = 5$$

$$K_d = 0.1$$

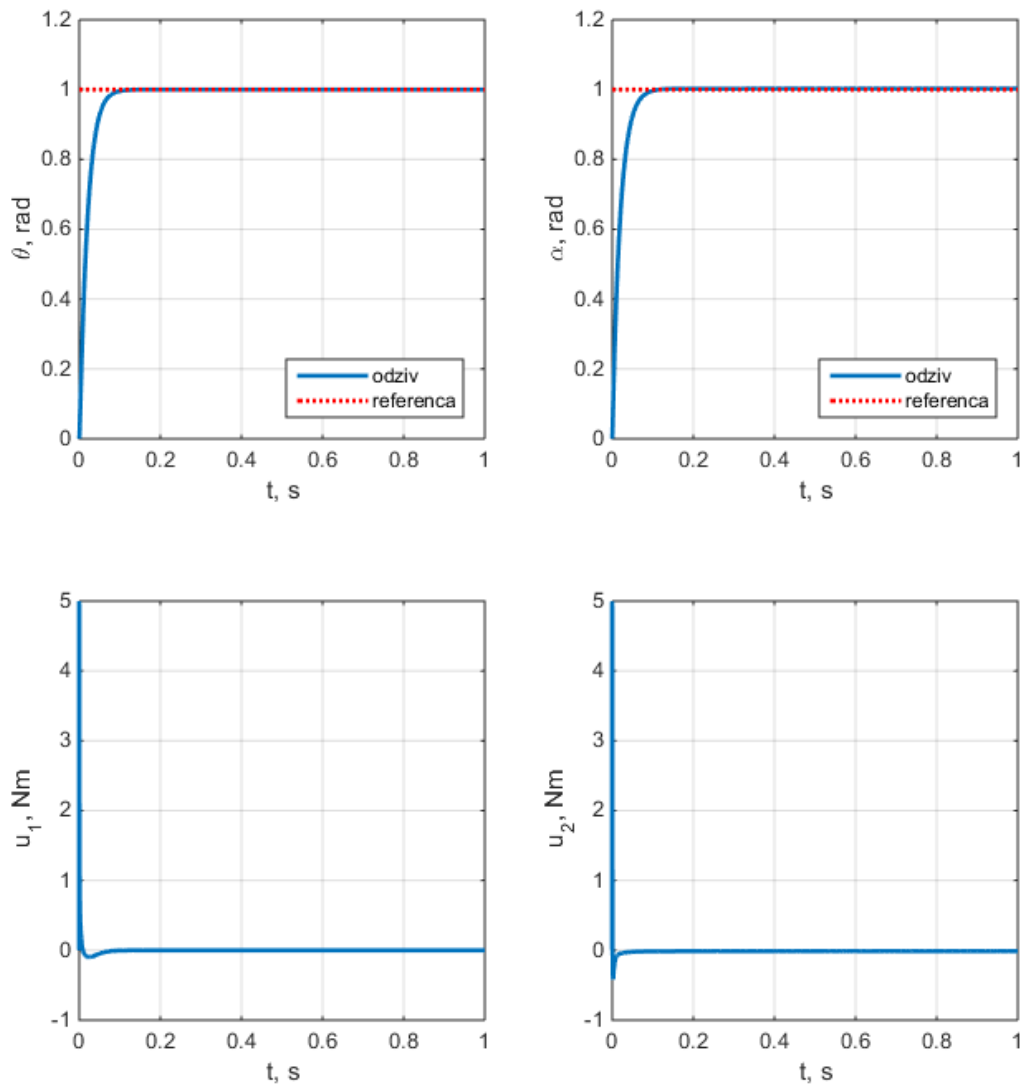
### 3.2.1. Rezultati simulacije PD regulatora

Izvršena je simulacija sustava s *PD* regulatorom, uz korištenje sljedećih početnih uvjeta i željene pozicije kutova:

$$\mathbf{q}_d = \begin{bmatrix} \theta_d \\ \alpha_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{q}_0 = \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \alpha_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \dot{\mathbf{q}}_0 = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_0 \\ \dot{\alpha}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

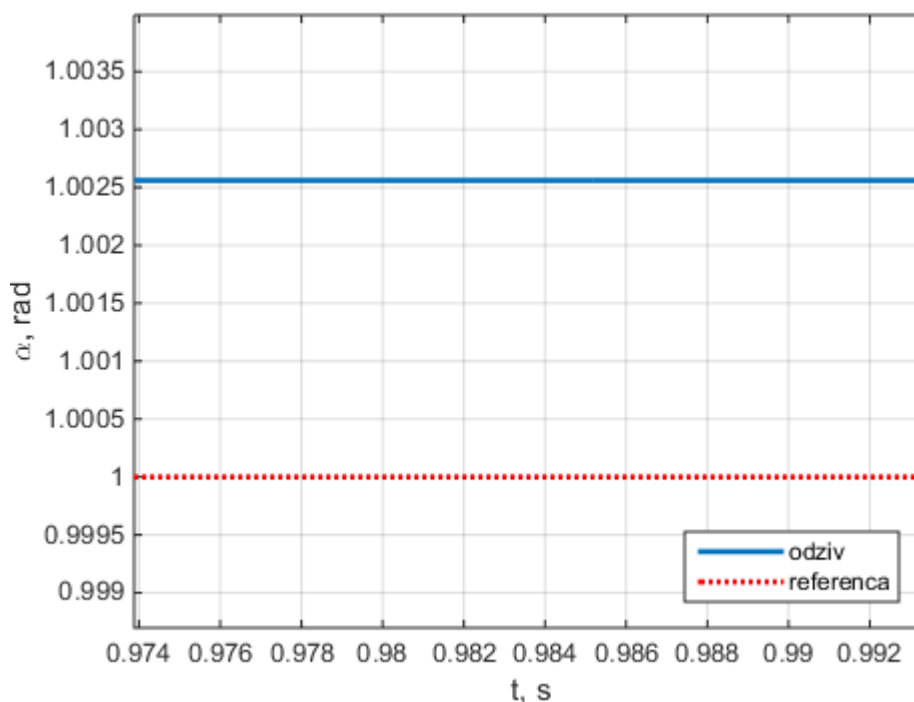
Odziv sustava za zadane parametre prikazan je na slici 3.2.



Slika 3.2 Odziv sustava reguliranog PD regulatorom

### 3.2.2. Interpretacija rezultata

*PD* regulator vrši prihvatljivu regulaciju pozicije sustava uz minimalan prebačaj i brzi odziv. Međutim, kako se vidi na slici 3.3, postoji trajno regulacijsko odstupanje u poziciji kuta od otprilike 0.0025rad. Takvo odstupanje je praktički zanemarivo u realnim primjenama, ali ipak postoji. Naime, jedan od nedostataka *PD* regulatora je upravo u tome što nisu u mogućnosti kod sustava određene dinamike otkloniti trajnu regulacijsku pogrešku. U ovom sustavu problem stvara djelovanje sile gravitacije koja konstantno djeluje na njihalo. Premda postoje određeni algoritmi i tehnike koji takva djelovanja kompenziraju i u sklopu *PD* regulatora, ovaj rad ih ne objašnjava, nego se pristupa dizajniranju *PID* regulatora, što je uobičajen izbor nakon suočavanja s trajnom regulacijskom pogreškom.



Slika 3.3 Trajna regulacijska pogreška *PD* regulatora



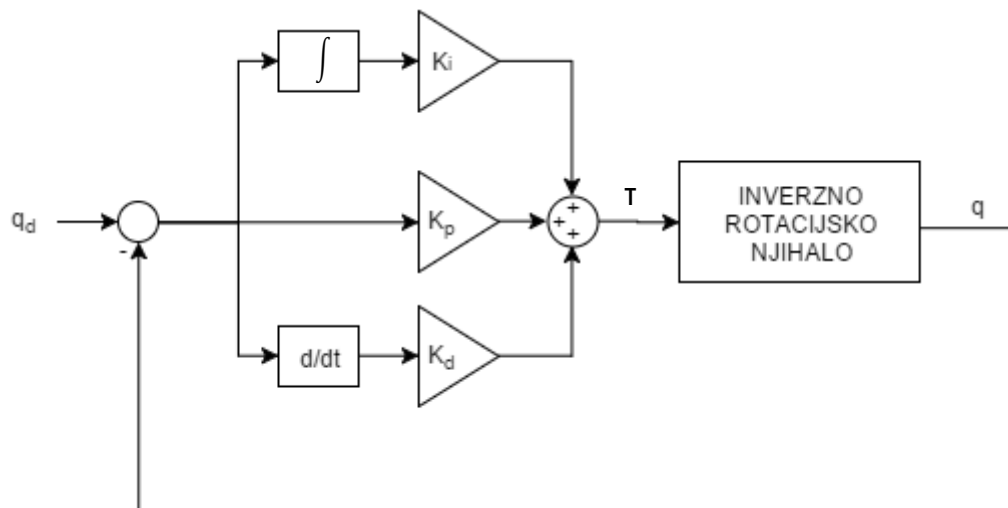
### 3.3. Regulacija pozicije pomoću PID regulatora

Jedan od najčešćih regulatora u praksi jest upravo *PID* regulator zbog svoje jednostavnosti, dobrih performansi regulacija i cijelog niza primjena. Princip rada *PID* regulatora je isti kao i kod *PD* regulatora (objašnjeno u poglavlju [3.2]), samo što je u ovom slučaju dodano i integralno djelovanje s pripadajućim pojačanjem. Jednadžba upravljačke varijable u *PID* regulatoru je sljedeća:

$$u(t) = K_p e(t) + K_d \frac{de(t)}{dt} + K_i \int_0^t e(t) dt \quad (3.3)$$

gdje je  $e(t)$  pogreška regulacije,  $K_p$  pojačanje proporcionalne komponente regulatora,  $K_d$  pojačanje derivacijske komponente regulatora, a  $K_i$  pojačanje integralne komponente regulatora. Proporcionalno pojačanje utječe na trenutne vrijednosti pogreške, derivacijsko pojačanje utječe na moguće buduće vrijednosti pogreške dok integralno djelovanje utječe na prošle vrijednosti pogreške - odnosno, ako upravljačka veličina nije dovoljna za otklanjanje pogreške, integralno djelovanje će uzrokovati akumulaciju upravljačke veličine tijekom vremena, pa će se ona s vremenom pojačavati.

Slika 3.4 prikazuje blokovsku shemu *PID* regulatora za sustav inverznog rotacijskog njihala, koristeći generalizirane koordinate.



Slika 3.4 Shema PID regulatora

Iz sheme PD regulatora slijedi da je

$$\tau(t) = K_p(q_d(t) - q(t)) + K_d \frac{d(q_d(t) - q(t))}{dt} + K_i \int_0^t (q_d(t) - q(t)) dt \quad (3.4)$$

Takva struktura implementirana je u postojeću MATLAB funkciju modela sustava. Pojačanja proporcionalnog i derivacijskog djelovanja uzeta su iz poglavlja [3.2] za *PD* regulator, zatim je ručno dodano pojačanje za integralno djelovanje. Daljnjim podešavanjem svih parametara radi boljih performansi, rezultiralo je sljedećim parametrima *PID* regulatora:

$$K_p = 10$$

$$K_d = 0.1$$

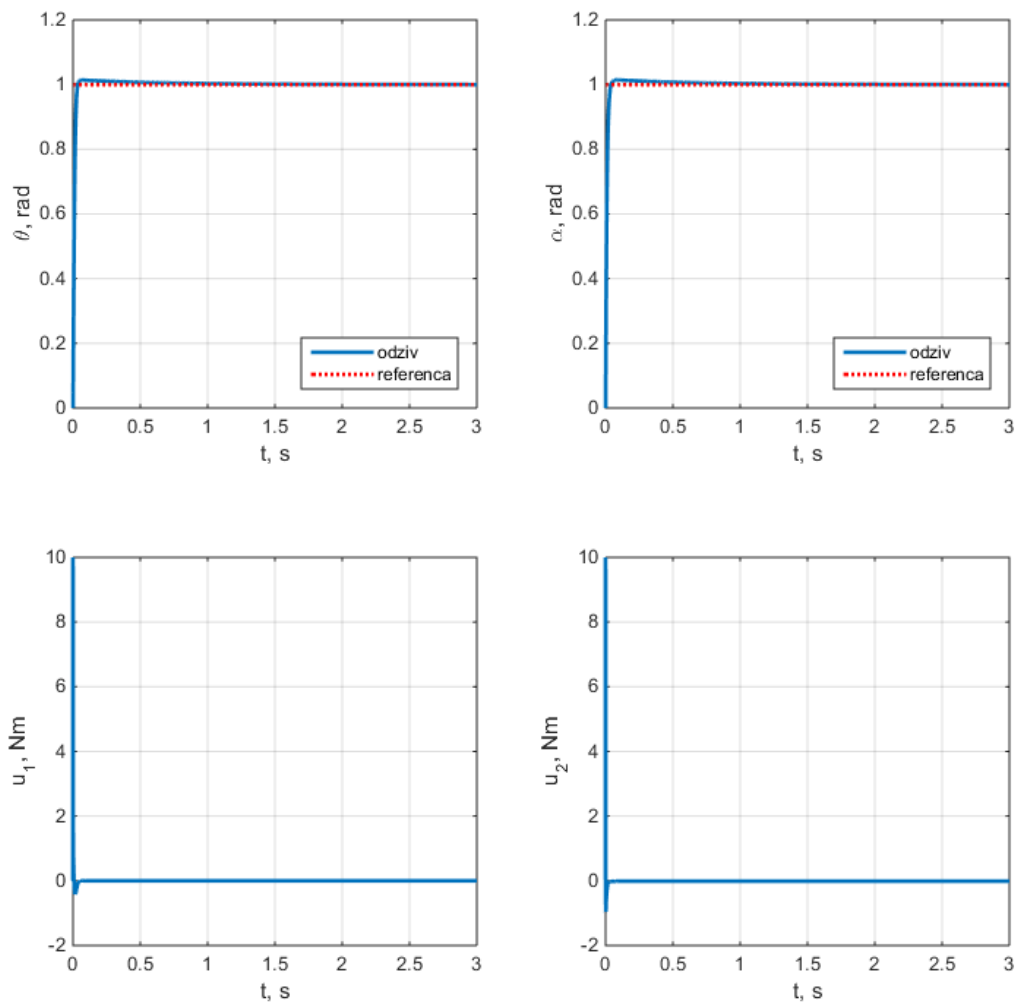
$$K_i = 15$$

### 3.3.1. Rezultati simulacije PD regulatora

Izvršena je simulacija sustava s *PID* regulatorom, uz korištenje sljedećih početnih uvjeta i željene pozicije kutova:

$$\mathbf{q}_d = \begin{bmatrix} \theta_d \\ \alpha_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{q}_0 = \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \alpha_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \dot{\mathbf{q}}_0 = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_0 \\ \dot{\alpha}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

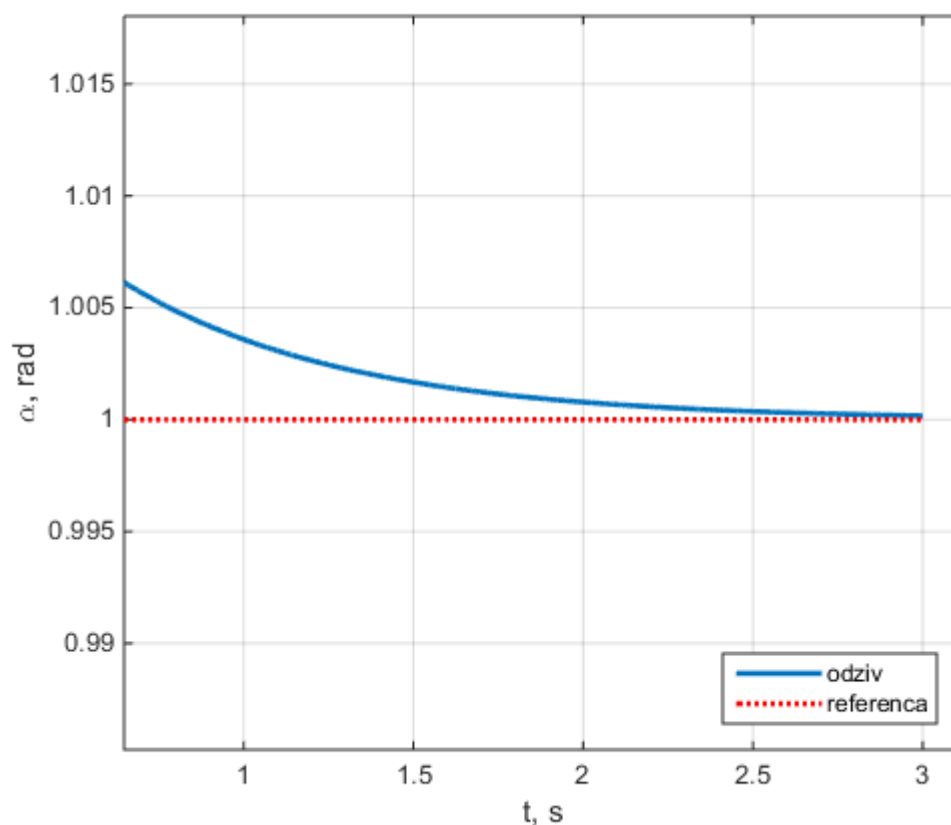
Odziv sustava za zadane parametre prikazan je na slici 3.5.



Slika 3.5 Odziv sustava reguliranog PID regulatorom

### 3.3.2. Interpretacija rezultata

*PID* regulator vrši prihvatljivu regulaciju pozicije sustava. U odnosu na *PD* regulator, početni prebačaj je nešto veći zbog dodanog *I* djelovanja. S druge strane, trajna regulacijska pogreška je eliminirana. Slika 3.6 prikazuje regulacijsku pogrešku nakon 3s simulacije, međutim u nastavku simulacije ona bi bila potpuno eliminirana. Da je *I* pojačanje izraženije, bila bi eliminirana i prije, ali uz veći početni prebačaj pa je izabrana ovakva konfiguracija parametara pojačanja.



Slika 3.6 Eliminacija trajne regulacijske pogreške PID regulatorom

### 3.4. Prefilter referentne pozicije

U prethodnim poglavljima prikazana je uspješna regulacija pozicije pomoću *PD* i *PID* filtera. Međutim, također je iz simulacija odziva sustava vidljivo kako prilikom skoka referentne vrijednosti, upravljačke veličine imaju nagli impulsni skok. Takav nagli impuls uzrokuje trzajno opterećenje na zglobove sustava što može izazvati preveliko naprezanje i razne vrste oštećenja kroz određeni period. Da bi se otklonila takva pretjerana naprezanja, uvodi se prefilter referentne pozicije, odnosno *smoothing* filter.

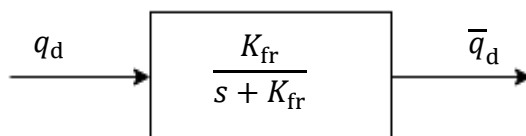
Takav prefilter je u osnovi P1 član koji generira odziv na *step* (skokovitu) referencu i na taj način ublažava nagle promjene referentnih vrijednosti pozicije. Taj odziv postaje nova referenca pozicije sustava. Rezultat je bitno smanjeno trzajno opterećenje na zglobovima, ali i nešto sporiji odziv, međutim još uvijek precizan i dobrih performansi.

Filter je definiran sljedećom prijenosnom funkcijom:

$$G(s) = \frac{K_{fr}}{s + K_{fr}} \quad (3.5)$$

gdje je  $K_{fr}$  pojačanje prefiltera.

Blok shema filtera je prikazana na slici 3.7.



Slika 3.7 Blok shema filtra referentne pozicije

$q_d$  je zadana referentna vrijednost, a  $\bar{q}_d$  filtrirana vrijednost koja u programu postaje nova referentna vrijednost. Potrebno je matematički definirati vrijednost  $\bar{q}_d$  preko gornje prijenosne funkcije kako bi se mogla uvrstiti kao nova referenca u MATLAB kod.

$$G(s) = \frac{\bar{q}_d(s)}{q_d(s)}$$

$$\bar{q}_d(s) = G(s)q_d(s) = \frac{K_{fr}}{s + K_{fr}} q_d(s) \quad (3.6)$$

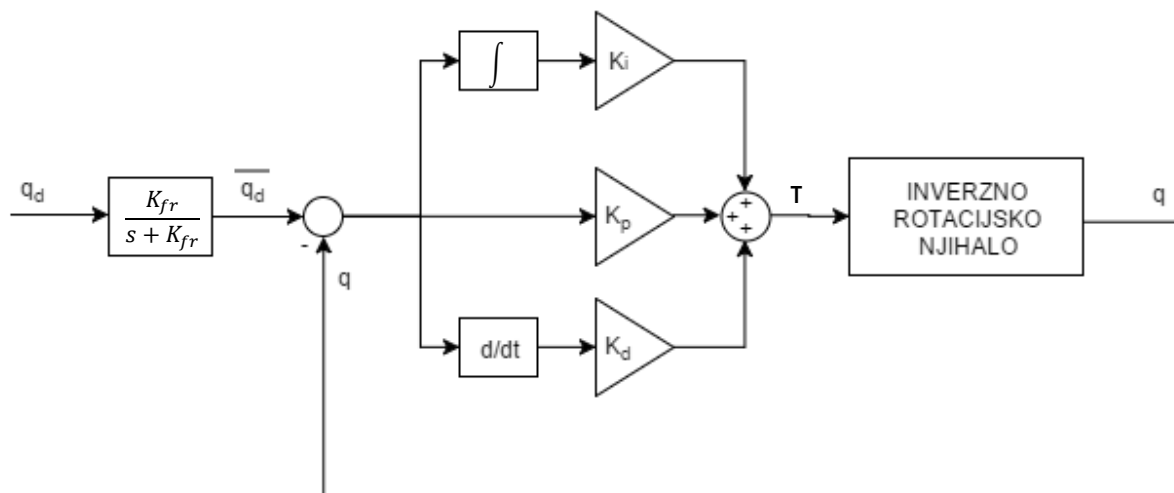
$$(s + K_{fr})\bar{q}_d(s) = K_{fr}q_d(s) / \mathcal{L}^{-1}$$

$$\dot{\bar{q}}_d = -K_{fr}(\bar{q}_d - q_d)$$

Gore navedeno matematičko rješenje predfiltera implementirano je u MATLAB, a kao pojačanje predfiltera definirano je

$$K_{fr} = 6$$

Blokovska shema *PID* regulatora sa uvrštenim predfiltrom referentne pozicije izgleda kako je prikazano na slici 3.8.



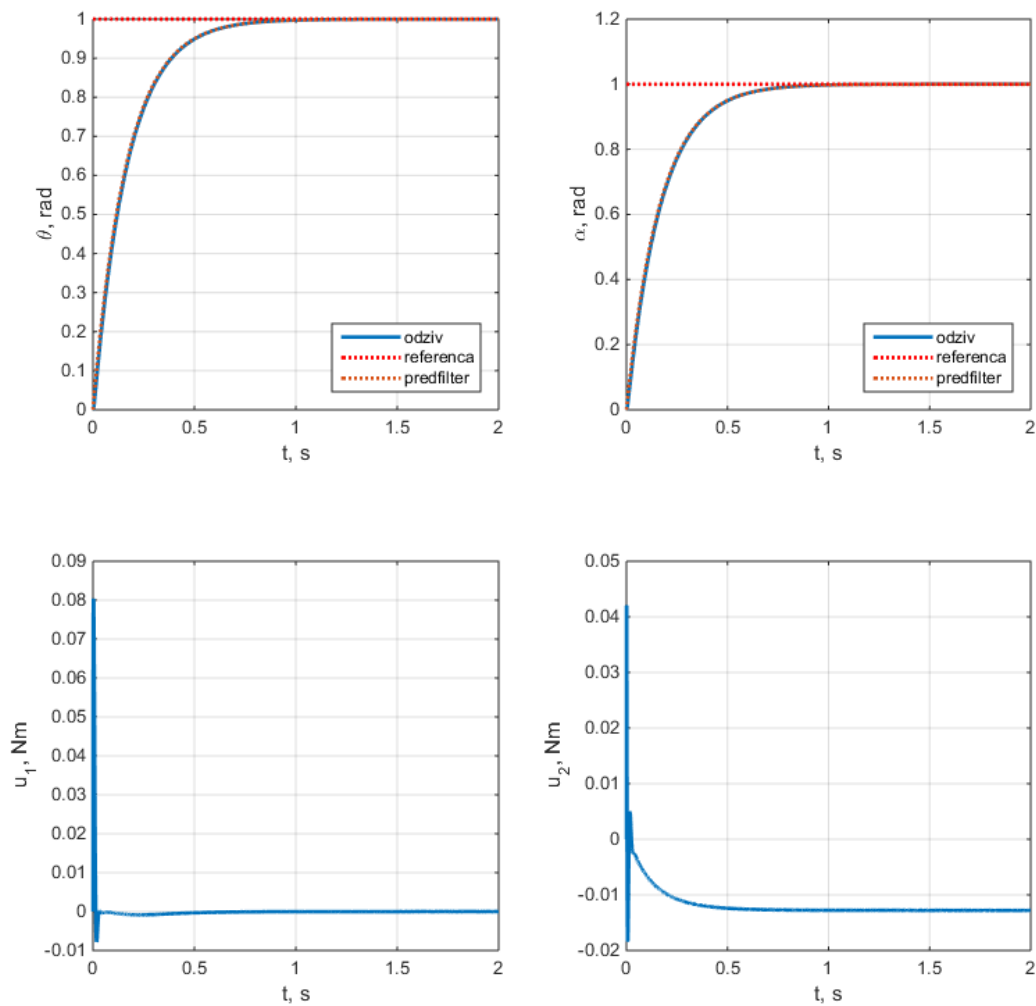
**Slika 3.8** Blok shema sustava s predfiltrom referentne pozicije

Iz gornje sheme slijedi revidirani zakon upravljanja (3.4):

$$\tau(t) = K_p (\bar{q}_d(t) - \mathbf{q}(t)) + K_d \frac{d(\bar{q}_d(t) - \mathbf{q}(t))}{dt} + K_i \int_0^t (\bar{q}_d(t) - \mathbf{q}(t)) dt \quad (3.7)$$

### 3.4.1. Rezultati simulacije PID regulatora s predfiltrom

Izvršena je simulacija odziva sustava s *PID* regulatorom i predfiltrom referentne pozicije. Parametri su isti kao u prethodnoj *PID* simulaciji, u poglavlju [3.3.1].



Slika 3.9 Odziv sustava s *PID* regulatorom i predfiltrom referentne pozicije

### **3.4.2. Interpretacija rezultata**

Iz odziva sustava s uključenim predfiltrom referentne pozicije, jasno je vidljiv njegov utjecaj na opterećenje prilikom skokovite promjene referentne pozicije. Naime, u ovom slučaju, početni moment na motorima i zglobovima skoro je 10 puta manji nego u slučaju kad ne postoji predfilter. S druge strane, vrijeme odziva je duže nego u konfiguraciji bez filtra. Promjenom pojačanja predfiltra, moguće je dodatno utjecati na dinamiku, odnosno ubrzati je uz veće početno opterećenje ili dodatno smanjiti uz još manje početno opterećenje. Prilikom dizajna ovakvog regulatora, dakle, potrebno je poznavati ograničenja mehaničkog sustava u smislu dozvoljenih naprezanja te, temeljem tog podatka i zahtjeva performansi regulacije, odrediti pojačanje predfiltra.

### **3.5. Filter za estimaciju brzine**

Regulatori često moraju imati povratni signal brzine iz sustava kako bi funkcionirali pravilno. Međutim, često se u sustavima brzina ne mjeri direktno pomoću senzora brzine, nego se indirektno izračunava kao derivacija pozicije. Senzori brzine su skupi i rijetko se koriste ukoliko je moguće postići zadovoljavajuće rezultate regulacije bez njih. Na ovom inverznom rotacijskom njihalu također ne postoje senzori brzine i brzinu nije moguće direktno mjeriti. Međutim, pomoću inkrementalnog enkodera visoke rezolucije mjeri se pozicija kutova poluge i njihala, a brzina se dobiva direktno derivacijom signala pozicije. Međutim, inkrementalni enkoder u radu generira dosta šumova. Kad se derivacija takvog signala primijeni bez prethodnog filtriranja, šumovi postaju još izraženiji i takav signal je neupotrebljiv u regulaciji.

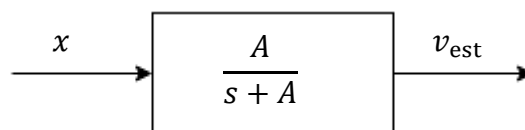
Iz tog razloga, u sustav se uvodi filter za estimaciju brzine. Time se eliminira potreba za dodatni sensorima za mjerenje brzine te potiskuje visokofrekvencijski šum mjerenja. Filter brzine izveden je u obliku standardnog P1 dinamičkog člana.



Filter za estimaciju brzine je tipično definiran sljedećom prijenosnom funkcijom:

$$G(s) = \frac{A}{s + A} \quad (3.8)$$

Blok shema je prikazana na slici 3.10.



**Slika 3.10** Blok shema filtra za estimaciju brzine

gdje je  $x$  pogreška pozicije, a  $v_{est}$  estimirana brzina.

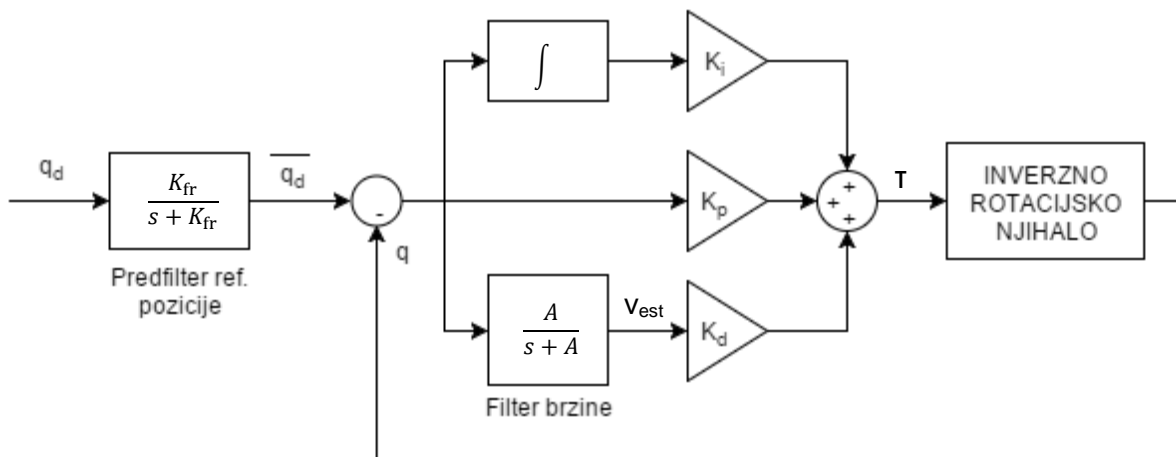
Radi implementacije filtra u MATLAB kod, potrebno je definirati diferencijalnu jednadžbu filtra. Postupak je analogan postupku (3.6) te je rezultat

$$\dot{v}_{est} = -A(v_{est} - x) \quad (3.9)$$

Navedena diferencijalna jednadžba implementirana je u MATLAB kod. Radi pravilnog filtriranja šumova, za pojačanje  $A$  najčešće se uzima vrijednost  $A = 100$ , pa je tako i u ovom slučaju

$$A = 100$$

Blok shema  $PID$  regulatora sa uključenim filtrom brzine je prikazana na slici 3.11.



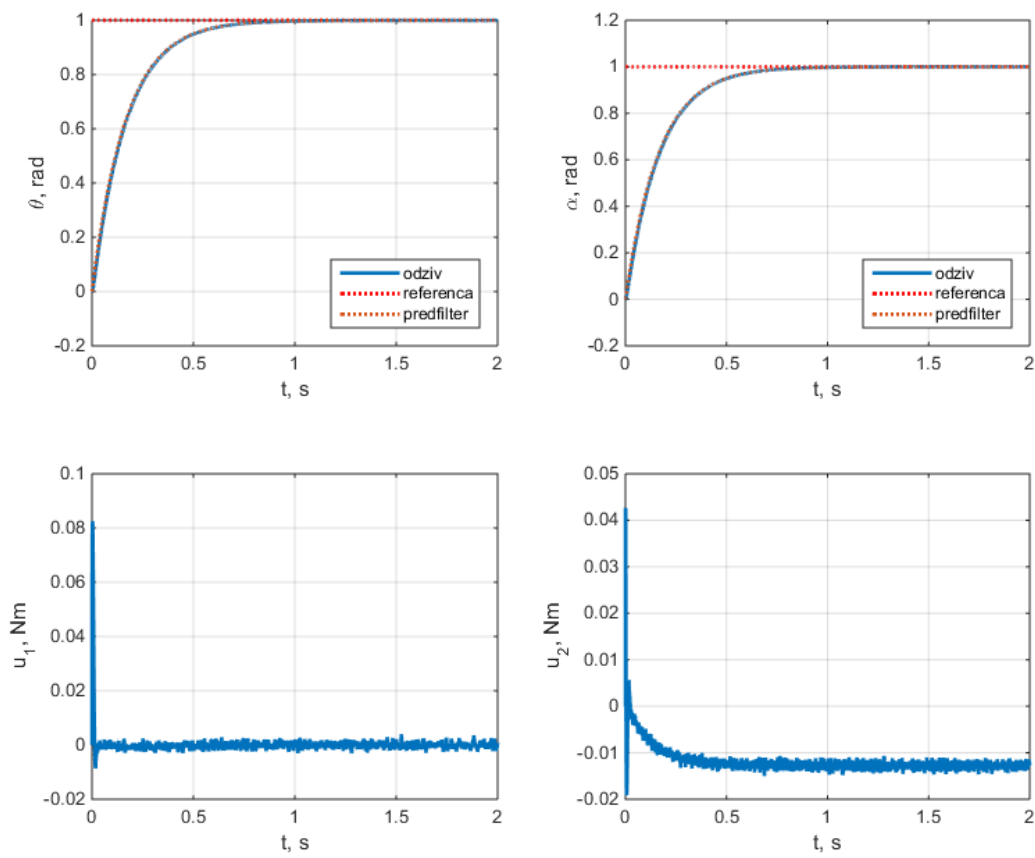
**Slika 3.11** Blok shema PID regulatora s predfiltrom i filtrom brzine

Iz gornje sheme slijedi zakon upravljanja na temelju (3.7):

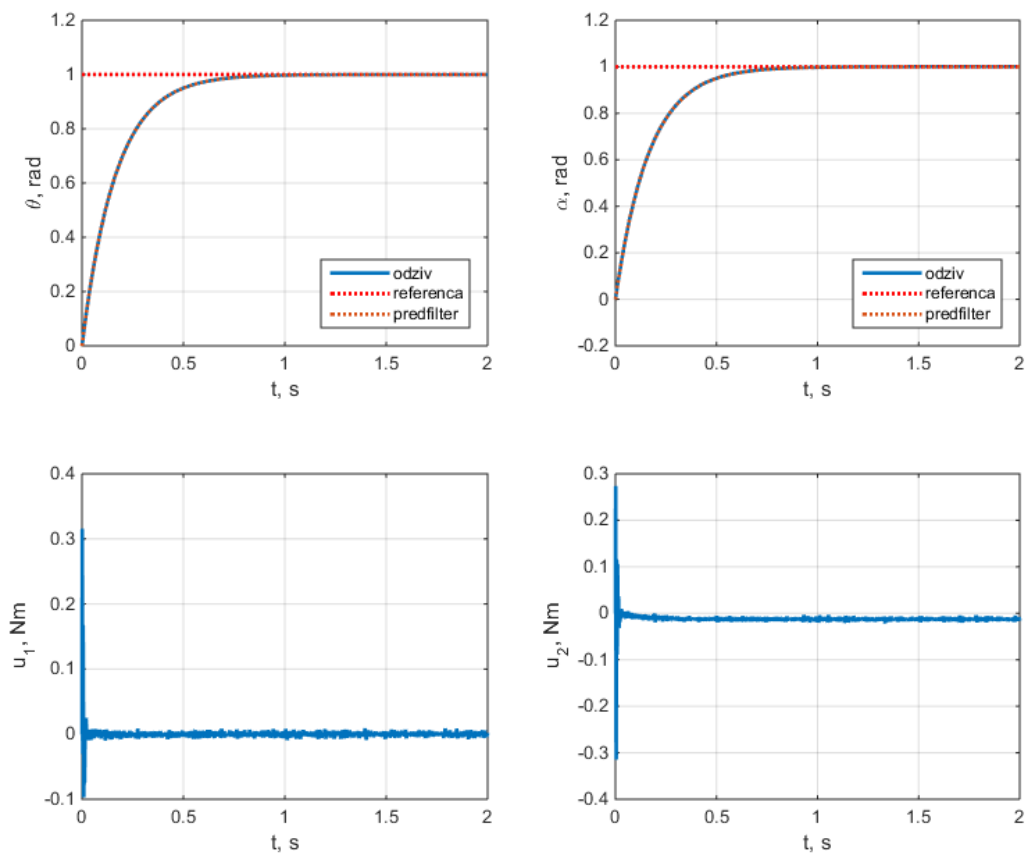
$$\begin{aligned} \tau(t) = & K_p \left( \bar{q}_d(t) - q(t) \right) + K_d \frac{d \left( \bar{q}_d(t) - q(t) \right)}{dt} \\ & + K_i \int_0^t \left( \bar{q}_d(t) - q(t) \right) dt \end{aligned} \quad (3.10)$$

### 3.5.1. Rezultati simulacije PID regulatora s filtrom brzine

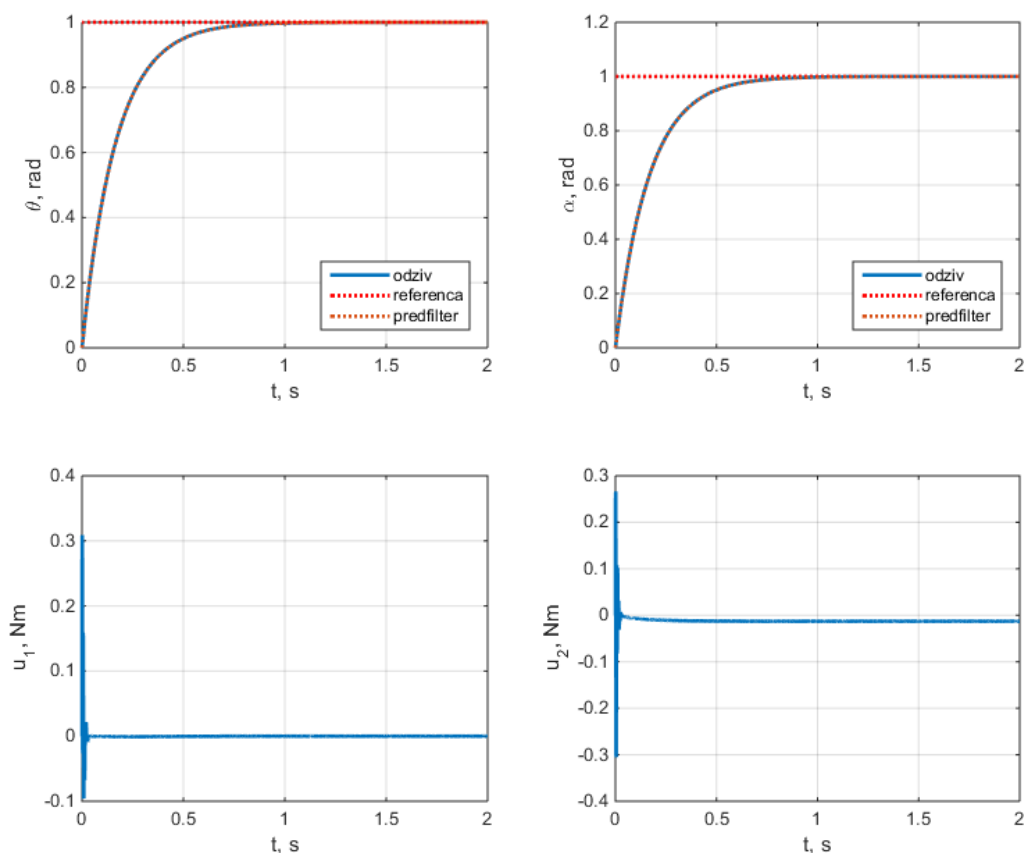
Izvršena je simulacija odziva sustava s *PID* regulatorom, predfiltrom referentne pozicije i filtrom brzine. Parametri su isti kao u prethodnoj *PID* simulaciji, u poglavlju [3.3.1]. U ovoj simulaciji dodan je šum na signalu brzine te je simulacija izvršena sa i bez uključenog filtra, radi usporedbe ponašanja.



**Slika 3.12** Odziv PID regulatora uz šum mjerenja, bez filtra brzine



**Slika 3.13** Odziv PID regulatora uz šum mjerenja, uz filter brzine



**Slika 3.14** Odziv PID regulatora bez šuma mjerenja, uz filter brzine

### 3.5.2. Interpretacija rezultata

Iz simulacija *PID* regulatora u kojima se pojavljuje šum mjerenja, vidljiva je jasna razlika između slučaja kada se brzina računa direktno kao derivacija pozicije i slučaja kad se koristi filter brzine. Uz korištenje filtra brzine, upravljačka veličina je bitno stabilnija, s puno manjim oscilacijama. Dodatno podešavanje pojačanja filtera i sustava eventualno može rezultirati još boljim performansama. Cilj implementacije filtra u ovom radu prvenstveno je pokazati princip rada i utjecaj pa se nije pristupilo dodatnom podešavanju parametara.

## 4. REGULACIJA PODUPRAVLJANOG SUSTAVA

### 4.1. Uvodno razmatranje

Regulatori su do sada u ovom radu dizajnirani pod pretpostavkom da je sustav potpuno upravljiv (aktuiran), odnosno da postoji upravljačko djelovanje i na poluzi inverznog rotacijskog njihala, i na samom njihalu. U ovom poglavlju, s druge strane, pretpostavlja se da je sustav podupravljan (podaktuiran) - upravljati se može samo polugom inverznog rotacijskog njihala preko motora u bazi. To znači da upravljački vektor iz definicije (2.13) postaje

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

te se analogno mijenjaju i diferencijalne jednadžbe gibanja sustava (2.8) i (2.9). Jedina upravljačka varijabla postaje  $\tau_1$ , odnosno moment na motoru poluge, uz kut  $\theta$ .

Cilj ovog poglavlja je dizajnirati regulatore koji će njihalo stabilizirati u inverznom, uspravnom položaju  $\alpha = 0\text{rad}$  samo kroz djelovanje na polugu te, ukoliko je moguće, istovremeno stabilizirati i poziciju kuta  $\theta = 0\text{rad}$ .

Da bi se postigao navedeni učinak, dizajnirat će se sljedeći regulatori: linearni kvadratični regulator (*LQR*) te neizraziti (*fuzzy*).

Za linearni kvadratični regulator sustav je prvo potrebno linearizirati i prevesti u prostor stanja.

### 4.2. Linearizacija modela

Sustav je potrebno linearizirati radi upotrebe u linearnom kvadratičnom regulatoru. Linearizacija se vrši oko radne točke gdje linearizirani model predstavlja dobru aproksimaciju stvarnog modela. S odmakom od radne točke, linearizirani model sve više odstupa od stvarnog modela i postaje pogrešan.

U modelu inverznog rotacijskog njihala (jednadžbe (2.9) i (2.10)), nelinearni članovi su  $\sin(\alpha)$  i  $\cos(\alpha)$  pa je njih potrebno linearizirati u radnoj točki. Općenito, nelinearna funkcija  $y = f(x)$  može se linearizirati u okolišu radne točke  $(x_0, y_0)$  na sljedeći način:

$$y \approx f(x_0) + \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0} (x - x_0)$$

Slijedi linearizacija nelinearnih članova modela u radnoj točki  $\alpha = 0$ . Odabrana je ta radna točka jer je to kut u kojem potrebno stabilizirati kutnu poziciju njihala.

$$\begin{aligned} \alpha &\approx 0 \\ \sin(\alpha) &\approx \alpha \approx 0 \\ \cos(\alpha) &\approx 1 \end{aligned} \tag{4.2}$$

Slijedom toga, model je transformiran kako slijedi (zapis temeljem (2.13)):

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \begin{bmatrix} p_1 + \frac{1}{4}p_2 - \frac{1}{4}p_2 + J_r & -\frac{1}{2}p_3 \\ -\frac{1}{2}p_3 & J_p + \frac{1}{4}p_2 \end{bmatrix} \\ \mathbf{C} &= \begin{bmatrix} B_r & 0 \\ 0 & B_p \end{bmatrix} \\ \mathbf{g} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{1}{2}p_4 \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{\tau} &= \begin{bmatrix} \tau_1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{4.3}$$

Jednadžbe gibanja lineariziranog modela su:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} p_1 + \frac{1}{4}p_2 - \frac{1}{4}p_2 + J_r & -\frac{1}{2}p_3 \\ -\frac{1}{2}p_3 & J_p + \frac{1}{4}p_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_r & 0 \\ 0 & B_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}p_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \alpha \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{4.4}$$

### 4.3. Linearizirani model u prostoru stanja

Prostor stanja u općem slučaju ima sljedeću strukturu:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{Cx} + \mathbf{Du}$$

Potrebno je linearizirani model inverznog rotacijskog njihala preslikati u prostor stanja. Nastavno na (4.3), neka je

$$\begin{aligned} a &= p_1 + \frac{1}{4}p_2 - \frac{1}{4}p_2 + J_r, & b &= -\frac{1}{2}p_3, & c &= J_p + \frac{1}{4}p_2, & d &= -\frac{1}{2}p_4 \\ e &= B_r, & f &= B_p \end{aligned} \quad (4.5)$$

Neka je vektor stanja sustava

$$\mathbf{x} = [\theta \quad \alpha \quad \dot{\theta} \quad \dot{\alpha}]^T \quad (4.6)$$

odnosno, u generaliziranim koordinatama

$$\mathbf{q} = [q \quad \dot{q}]^T \quad (4.7)$$

Iz (4.4) moguće je dobiti rješenje  $\ddot{\mathbf{q}}$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}\mathbf{q} &= \boldsymbol{\tau} \\ \ddot{\mathbf{q}} &= -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{M}^{-1}\mathbf{G}\mathbf{q} + \mathbf{M}^{-1}\boldsymbol{\tau} \end{aligned} \quad (4.8)$$

Iz dobivenih jednačbi moguće je izvesti zapis modela u prostoru stanja koristeći generalizirane koordinate

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \ddot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{M}^{-1} \end{bmatrix} \boldsymbol{\tau} \\ \mathbf{y} &= [1 \quad 0] \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} + [0] \boldsymbol{\tau} \end{aligned} \quad (4.9)$$

Iz zapisa u prostoru stanja (4.9), istaknute su matrice koeficijenata:



$$\begin{aligned}
 \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{g} \end{bmatrix} \\
 \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{M}^{-1} \end{bmatrix} \\
 \mathbf{C} &= [1 \quad 0] \\
 \mathbf{D} &= [0]
 \end{aligned}
 \tag{4.10}$$

#### 4.4. Linearni kvadratični regulator (LQR)

U teoriji optimalne regulacije nastoji se određenim dinamičkim sustavom upravljati uz optimalne performanse. U slučaju kad je dinamički sustav opisan *linearnim* diferencijalnim jednadžbama, a indeks performanse kvadratnom funkcijom, govori se o tzv. *LQ (linear quadratic)* problemu. Regulator koji rješava takav problem naziva se *LQR (linear quadratic regulator)*, odnosno Kalmanov filter. Indeks performanse je funkcija koja je najčešće definirana kao suma odstupanje ključnih mjerenja od njihovih referentnih vrijednosti, uz dodatne težinske faktore koje mora definirati projektant regulatora - inženjer. Rezultat je taj da LQR regulator eliminira sav zamorni posao oko optimiziranja parametara regulatora i producira izvrsne rezultate u regulaciji. [4]

Za indeks performanse definiran funkcijom

$$J = \int (\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u}) dt$$

i vremenski kontinuirani sustav opisan jednadžbom

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{u}$$

upravljački zakon LQR regulatora u povratnoj petlji koji minimizira indeks performanse glasi

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x} \quad (4.11)$$

gdje je  $\mathbf{K}$  matrica pojačanja.  $\mathbf{Q}$  je matrica težina stanja, a  $\mathbf{R}$  matrica težina ulaza i bira ih se proizvoljno. Matrica pojačanja  $\mathbf{K}$  definirana je kao

$$\mathbf{K} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}$$

gdje je  $\mathbf{P}$  matrica dobiva rješavanjem vremenski kontinuirane algebarske Riccatijeve jednadžbe

$$\mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P} + \mathbf{Q} = 0$$

LQR će nastojati stabilizirati sva stanja koja su definirana matricom izlaza  $\mathbf{C}$  te težinskim matricama  $\mathbf{Q}$  i  $\mathbf{R}$ .

Međutim, da bi se nad sustavom mogao primijeniti LQR regulator, sustav mora biti *kontrolabilan*.

#### 4.4.1. Kontrolabilnost sustava

Zadani sustav

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$

potpuno je kontrolabilan po stanjima, u zatvorenom vremenskom intervalu  $[t_0, t_1]$ , ako je moguće za zadani  $t_0$  i  $t_1$ , svako početno stanje  $\mathbf{x}(t_0)$  prevesti u svako željeno konačno stanje  $\mathbf{x}(t_1)$  preko vektora upravljanja  $\mathbf{u}(t)$  u konačnom vremenskom intervalu  $t_0 \leq t \leq t_1 \leq \infty$ . Pri tome se pretpostavlja da na vektor upravljanja nisu nametnuta nikakva dodatna ograničenja. Termin 'potpuna' znači da su sva stanja (svaka komponenta vektora stanja) upravljiva.

Sustav je potpuno kontrolabilan po izlazima, u zatvorenom vremenskom intervalu  $[t_0, t_1]$ , ako je moguće za zadani  $t_0$  i  $t_1$ , svaki početni izlaz sustava  $y(t_0)$  prevesti u svaki željeni konačni izlaz  $y(t_1)$  preko (neograničenog) vektora upravljanja  $u(t)$  u konačnom vremenskom intervalu  $t_0 \leq t \leq t_1 \leq \infty$ . Termin 'potpuna' znači da je svaka komponenta vektora izlaza upravljiva.

Provjeru kontrolabilnosti moguće je provesti analitičke pomoću jednadžbe

$$\text{rank} [A^{n-1}B \quad A^{n-2}B \quad \dots \quad A^2B \quad AB \quad B] = n$$

gdje je  $n$  red sustava. Jednakost je točna, a time i sustav kontrolabilan, ako je rang navedene matrice jednak redu sustava.

Za linearizirani model inverznog rotacijskog njihala provedena je provjera u MATLAB-u koristeći matrice  $A$  i  $B$  (4.10) te je sustav **potpuno kontrolabilan**.

#### 4.4.2. **Observabilnost sustava**

Sustav je potpuno observabilan po stanjima (uz  $u = 0$ ), u zatvorenom vremenskom intervalu  $[t_0, t_1]$ , ako je moguće za zadani  $t_0$  i  $t_1$ , svako početno stanje  $x(t_0)$  egzaktno odrediti na osnovu poznavanja (mjerenja) vektora izlaza  $y(t)$  u intervalu  $[t_0, t_1]$ . Termin 'potpuna' znači da su sva stanja (svaka komponenta vektora stanja) observabilna (mjerljiva). Sustav je potpuno observabilan ako se svaka promjena stanja sustava odražava na izlaznim varijablama.

Provjeru observabilnosti moguće je provesti analitički pomoću jednadžbe

$$\text{rank} [C^T \quad A^T C^T \quad (A^T)^2 C^T \quad \dots \quad (A^T)^{n-1} C^T] = n$$

gdje je  $n$  red sustava. Jednakost je točna, a time i sustav observabilan, ako je rang navedene matrice jednak redu sustava.

Za linearizirani model inverznog rotacijskog njihala provedena je provjera u MATLAB-u koristeći matrice A i C (4.10) te je sustav **potpuno observabilan**.

#### 4.4.3. Sinteza LQR regulatora

Na temelju lineariziranog modela, odnosno matrica A i B (4.10), te uz odabrane matrice težina stanja i težina ulaza

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{R} = [1] \quad (4.12)$$

dobivena je sljedeća matrica pojačanja

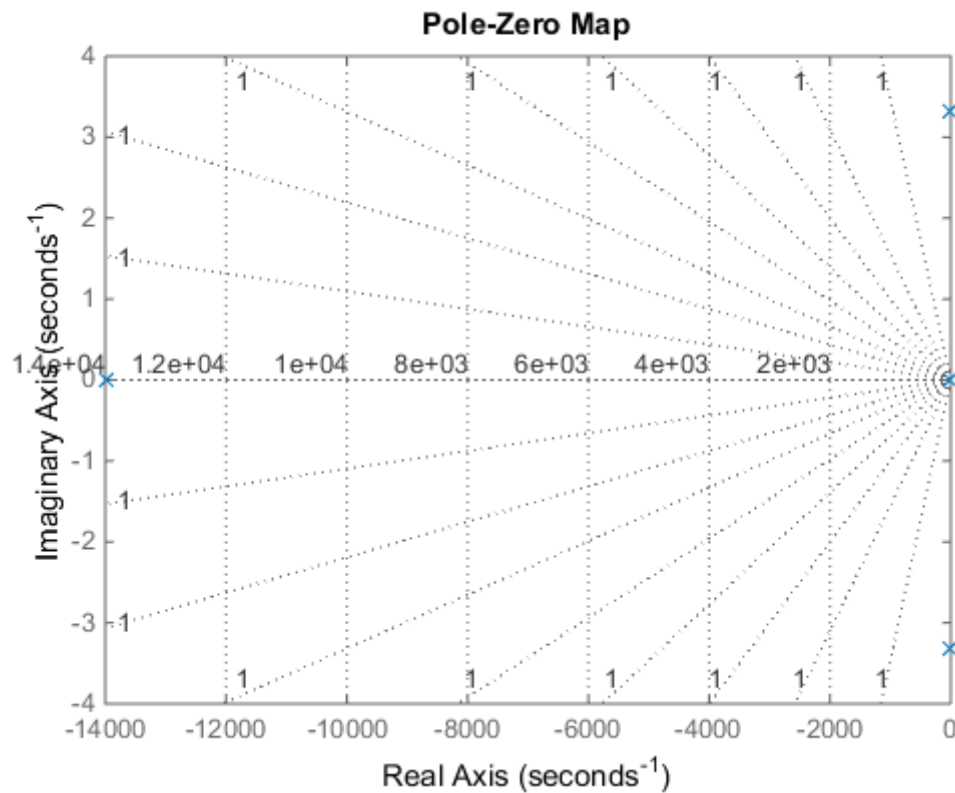
$$\mathbf{K} = [-1.0000 \quad 27.8682 \quad -1.2178 \quad 2.6562] \quad (4.13)$$

uz upravljački zakon

$$\tau_1 = -\mathbf{K} \begin{bmatrix} \theta \\ \alpha \\ \dot{\theta} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

Prethodno je generalizirana koordinata  $\mathbf{q}$  iz prethodnih zapisa raspisana u MATLAB kodu te je pomoću MATLAB operacija nad matricama dobiven zapis prostora stanja s koordinatama kutova umjesto generaliziranih koordinata (Prilog C).

Slika 4.1 u kompleksnoj ravnini prikazuje polove sustava s tako dobivenim LQR regulatorom u povratnoj petlji.



Slika 4.1 Polovi sustava s LQR regulatorom

Polovi sustava s linearnim regulatorom u povratnoj vezi su:

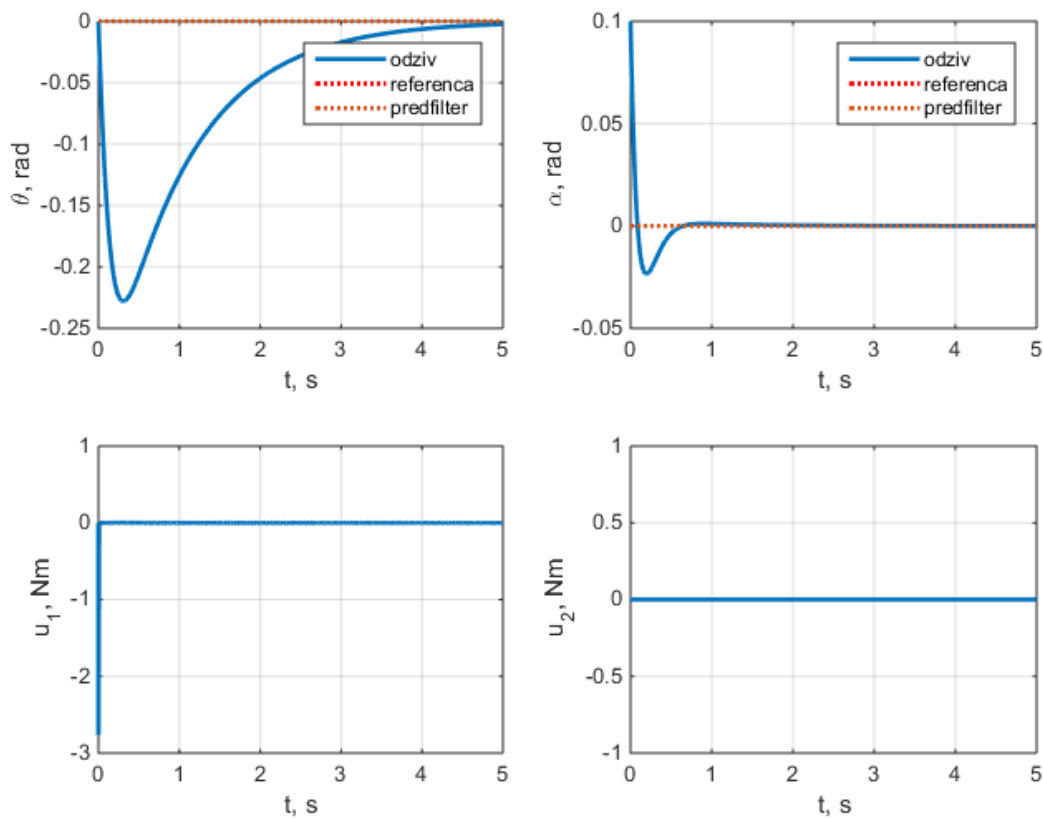
$$\begin{aligned}
 p_1 &= -1,398 \times 10^4 \\
 p_2 &= -8,373 + 3,3173i \\
 p_3 &= -8,373 - 3,3173i \\
 p_4 &= -1,0002
 \end{aligned}
 \tag{4.15}$$

#### 4.4.4. Rezultati simulacije LQR regulatora

Izvršena je simulacija odziva sustava s uključenim LQR regulatorom i uz sljedeće početne uvjete

$$\mathbf{q}_0 = \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \alpha_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \end{bmatrix} \quad \dot{\mathbf{q}}_0 = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_0 \\ \dot{\alpha}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

LQR regulator je po definiciji projektiran tako da kutove stabilizira u položaju 0, stoga nije potrebno posebno isticati referentnu poziciju.



Slika 4.2 Odziv sustava s LQR regulatorom

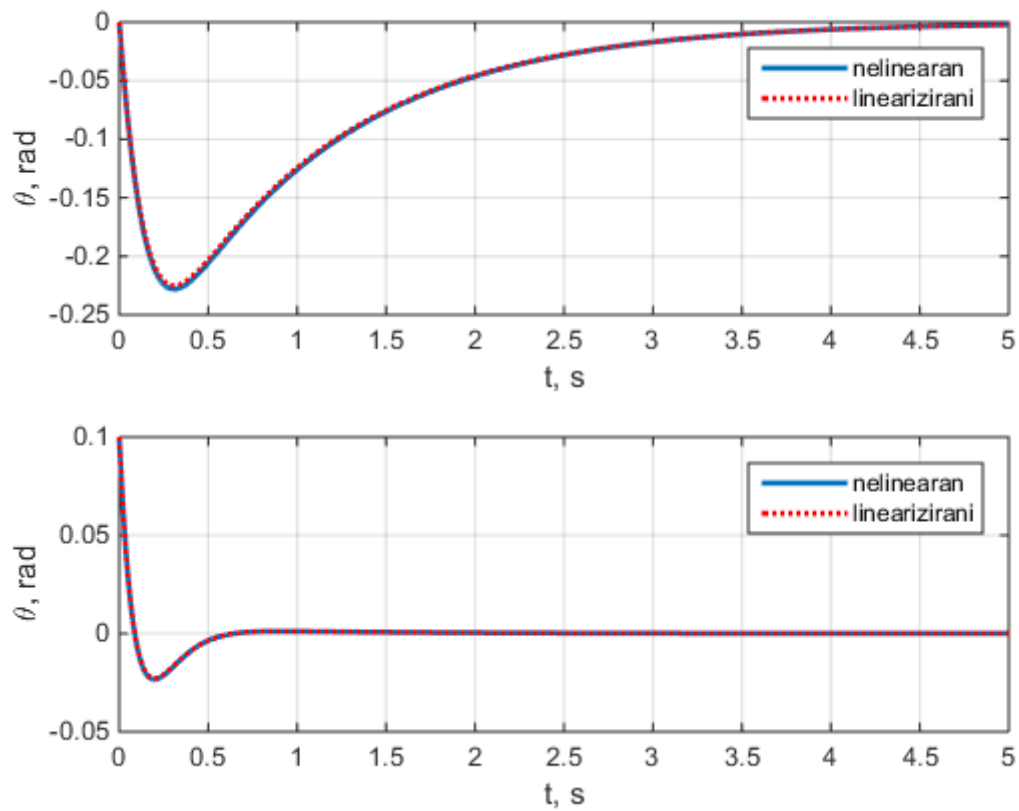
#### **4.4.5. Interpretacija rezultata**

Iz simuliranih odziva vidljivo je da LQR regulator dovodi i stabilizira oba kuta sustava u nultoj poziciji. Njihalo se vrlo brzo dovodi u potpuno uspravan, inverzni položaj, a kut poluge se zatim postepeno također dovodi u početnu poziciju.

S druge strane, zbog filtra brzine, pojavljuju se oscilacije u upravljačkom signalu koje mogu prouzročiti pretjerano naprezanje na zglobovima i u motoru pa bi određenim tehnikama te oscilacije trebalo eliminirati.

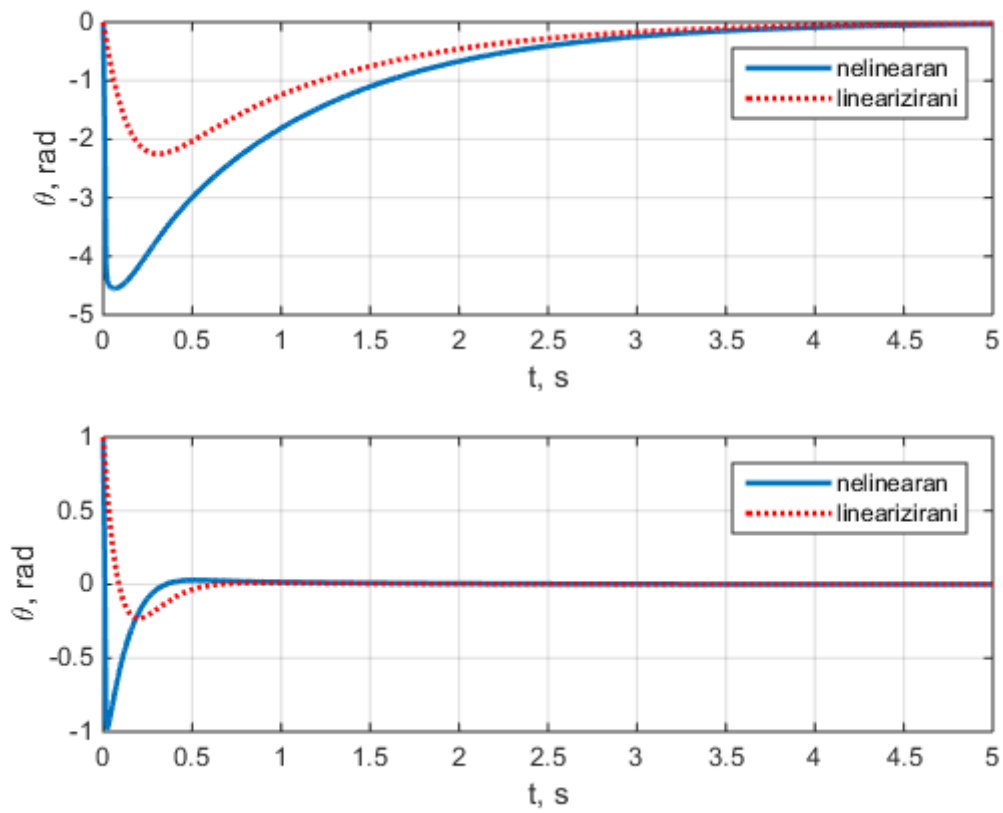
#### **4.4.6. Usporedba nelinearnog i lineariziranog modela**

Iz gornjih odziva vidljivo je da, za početne uvjete blizu radne točke  $\alpha = 0$ , LQR regulator dobiven na temelju lineariziranog modela uspješno stabilizira stanja potpunog, nelinearnog modela. Ta činjenica također sugerira da je linearizacija ispravno provedena. Međutim, za početne uvjete koji se udaljavaju od radne točke  $\alpha = 0$ , LQR regulator će postizati lošiju regulaciju, sve dok za određeni početni uvjet više ne bude u mogućnosti stabilizirati njihalo u inverznom položaju. Sljedeće simulacije prikazuju usporedbu odziva LQR regulatora na nelinearnom i lineariziranom modelu za različite početne uvjete.



Slika 4.3 Usporedba LQR između nelinearnog i lineariziranog modela za  $\alpha(0) = 0.1$



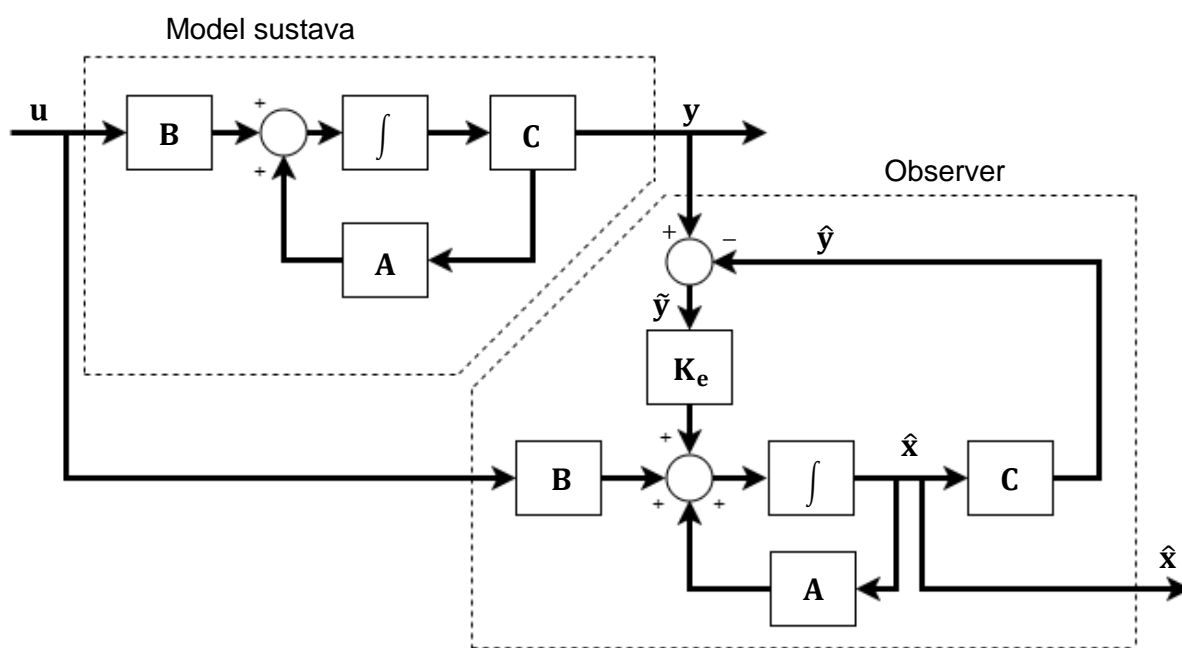


Slika 4.4 Usporedba LQR između nelinearnog i lineariziranog modela za  $\alpha(0) = 1$

### 4.5. Observer stanja

U prethodnom poglavlju, prilikom dizajna i simulacije linearnog kvadratičnog regulatora, zanemarena je činjenica da pojedina stanja sustava nisu direktno dostupna, odnosno nisu mjerena. Radi se o brzinama  $\dot{\theta}$  i  $\dot{\alpha}$  za koje ne postoji senzor pa je potrebno iskoristiti dostupne mjerene vrijednosti te dobiveni model sustava u prostoru stanja kako bi se estimirala ostala stanja.

U tu svrhu koristi se *observer stanja*, koji se naziva još i *Luenbergov observer*. Takav observer ima konfiguraciju prikazanu na sljedećem blokovskom dijagramu: [6]



Slika 4.5 Luenbergov observer stanja

Estimirana stanja sustava  $\mathbf{x}$  definirana su sljedećom jednačbom

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{K}_e\mathbf{C}\tilde{\mathbf{x}} \quad (4.16)$$

gdje su

- $\hat{\mathbf{x}}$  estimirana stanja sustava
- $\tilde{\mathbf{x}}$  pogreška estimacije (razlika između pravih i estimiranih stanja sustava)
- $\mathbf{K}_e$  pojačanje estimatora

Observer se može interpretirati kao preslikani model sustava koji djeluje na temelju upravljačkog signala  $\mathbf{u}$  pravog sustava, ali i na temelju pogreške estimacije koja osigurava da će estimirana stanja sustava biti *dobra* kada  $\tilde{\mathbf{x}}(t) \rightarrow \mathbf{0}$ , a  $t \rightarrow \infty$ .

Na taj način moguće je dizajnirati bilo koju vrstu *full feedback* regulatora, poput LQR regulatora u ovom radu, premda nisu mjerljiva sva stanja sustava. Pojačanje estimatora može se mijenjati kako bi se dobilo odgovarajuće ponašanje estimatora uz šumove mjerenja, odnosno kako bi estimator poslužio i kao odgovarajući filter šumova. Upravljački zakon regulatora koji koristi estimirana stanja sustava definiran je kao

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}} \quad (4.17)$$

#### 4.6. *Swing-up* algoritam

U dosadašnjem dijelu rada, u simulacijama regulatora pretpostavljeno je da je početna pozicija kuta njihala u okolini  $\alpha = 0$ , odnosno u području u kojem linearizirani model predstavlja dobru aproksimaciju stvarnog modela. Dosadašnje simulacije su pokrenute s početnom pozicijom  $\alpha(0) = 0.1$  te je linearni kvadratični regulator iz te pozicije uspješno stabilizirao njihalo u inverznom položaju  $\alpha = 0$ . Međutim, potrebno je razmotriti regulator koji će njihalo dovesti u stabilizirati u inverzni položaj iz stabilnog stanja u kojem je njihalo u donjem položaju  $\alpha = \pi$ .

U tu svrhu, potrebno je u regulaciju uvesti algoritam koji će njihalo iz stabilnog donjeg položaja destabilizirati i dovesti u blizu inverznog položaja, u kojem trenutku će

regulaciju preuzeti LQR regulator i njihalo potpuno stabilizirati u inverznom položaju. Algoritam je dizajniran temeljem [3].

Postoji nekoliko tehnika kojom se može destabilizirati određeno stanje, od kojih su istaknute metode unosa energije u ukupnu energiju sustava i metoda pozitivne povratne veze. U ovom radu destabilizirajući regulator izvest će se pomoću jednostavne heurističke strategije unosa dodatne energije u sustav. Cilj ovakve strategije je da se amplituda kretanja njihala povećava prilikom svakog zamaha djelovanjem poluge. Da bi se takva strategija aplicirala, potrebno je razmotriti kako bi se ručno dovelo njihalo iz „visećeg“ položaja ( $\alpha = \pi$ ) u inverzni položaj ( $\alpha = 0$ ). Ako se poluga njiše lijevo-desno odgovarajućom frekvencijom i rastućom amplitudom, njihalo će prilikom svakog zamaha povećavati amplitudu svog kretanja da bi naposljetku dostiglo inverzni položaj.

Strategija primijenjena na ovom sustavu sastoji se od dva elementa: *PD* regulatora baze (poluge) koji služi za praćenje određene trajektorije te algoritma koji prate poziciju kuta  $\alpha$  te uključuje LQR regulator ukoliko  $\alpha$  dospije u područje  $-0.3 < \alpha < 0.3$ . Nakon nekoliko eksperimentalnih simulacija i podešavanja, definirana je sljedeća referentna trajektorija poluge koja njihalo uspijeva destabilizirati do inverznog položaja:

$$\alpha_{\text{ref}}(t) = t \sin(60t) \quad (4.18)$$

*PD* regulator koji je upotrijebljen za praćenje navedene referentne trajektorije ima sljedeći upravljački zakon:

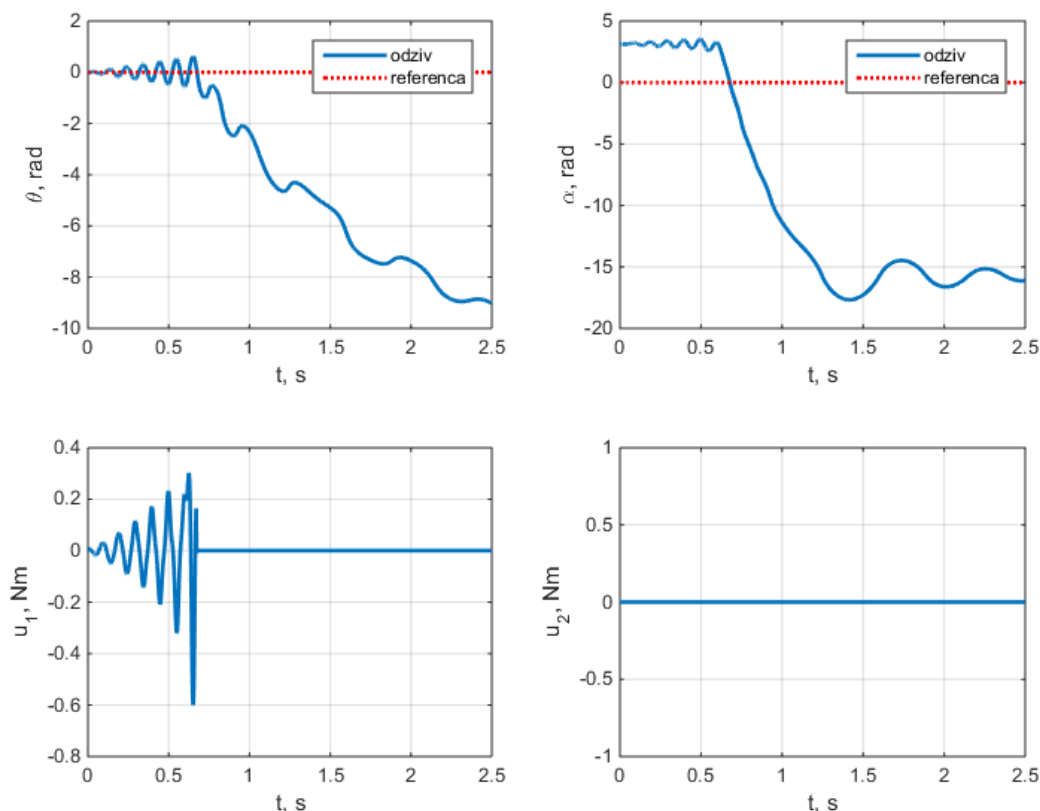
$$\tau_1(t) = -15\theta_e - 0.1\dot{\theta}_e \quad (4.19)$$

pri čemu je

$$\theta_e = \theta - \theta_{\text{ref}} \quad (4.20)$$

pogreška pozicije kuta  $\theta$ .

Odziv sustava s djelovanjem *swing-up* regulatora prikazan je na slici 4.6.



**Slika 4.6** Odziv sustava sa *swing-up* algoritmom, bez LQR regulatora

U ovoj simulaciji nije uključeno prespajanje na LQR regulator nego je prikazano isključivo destabilizirajuće djelovanje, pri čemu se upravljačko djelovanje isključuje čim kut  $\alpha$  dostigne vrijednost  $\alpha < 0.3$ . Iz odziva je vidljivo kako kut  $\alpha$  otprilike u trenutku  $t = 0.7\text{s}$  dopijeva u inverzni položaj (i, u ovom slučaju, prebacuje inverzni položaj zbog isključivanja upravljačkog djelovanja u tom trenutku).

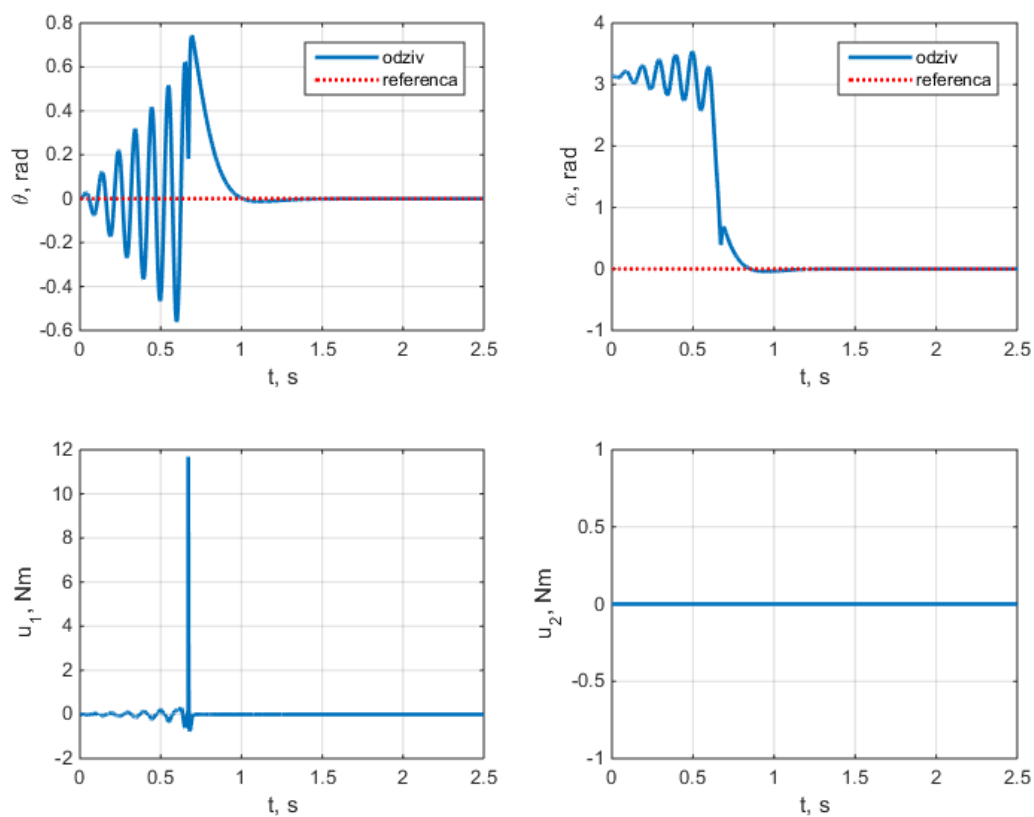
#### 4.6.1. Rezultati simulacije *swing-up* algoritma i LQR regulatora

U sljedećoj simulaciji u regulator je uvršteno i prespajanje sustava na LQR regulator kada kut njihala dostigne područje u kojem linearizirani model predstavlja dobru aproksimaciju modela, odnosno kada je  $-0.3 < \alpha < 0.3$ . Težinske matrice LQR regulatora su također podešene tako da upravljački signal bude dovoljno nizak kako

kut poluge  $\theta$  ne bi otišao izvan područja  $-\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{4}$  zbog mogućih fizičkih ograničenja u realnom sustavu.

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{R} = [100] \quad (4.21)$$

Regulator je implementiran u MATLAB kodu prikazanom u Prilogu B i C.



Slika 4.7 Odziv sustava sa *swing-up* algoritmom i LQR regulatorom

#### **4.6.2. Interpretacija rezultata**

Iz simuliranog odziva vidljivo je da konfiguracija sa destabilizirajućim *swing-up* algoritmom i LQR regulatorom, dovodi njihalo iz donjeg, „visećeg“ položaja i uspješno ga stabilizira u nestabilnom, potpuno inverznom položaju. Dizajnirani regulator predstavlja potpuno rješenje problema regulacije inverznog rotacijskog njihala te je prikazana njegova uspješna demonstracija.

S druge strane, bilo je potrebno dodatno konfigurirati LQR regulator kako bi kut poluge imao što manju amplitudu oscilacija zbog mogućih fizičkih ograničenja na instaliranom laboratorijskom postavu, koja općenito nisu uključena u ovaj rad.

#### 4.7. Neizraziti regulator

Neizraziti regulator (*eng.* fuzzy control system) je regulator tehničkih sustava koji se temelji na neizrazitoj logici (*eng.* fuzzy logic) – matematičkom sustavu koji analizira analogne ulazne vrijednosti na temelju logičkih varijabli koje mogu poprimiti bilo koju vrijednost između 0 i 1, u suprotnosti sa klasičnom i digitalnom logikom koja se temelji na dvjema diskretnim vrijednostima: 0 i 1 (odnosno, laž i istina).

Potrebno je napomenuti kako je teorija neizrazite logike puno šire područje od onoga što je objašnjeno u ovom radu te pokriva i teoriju operacija nad neizrazitim skupovima i matematički preciznije definira pravila i relacije među skupovima. U ovom radu naglasak je stavljen na konkretnu primjenu u projektiranju regulatora za zadani tehnički sustav.

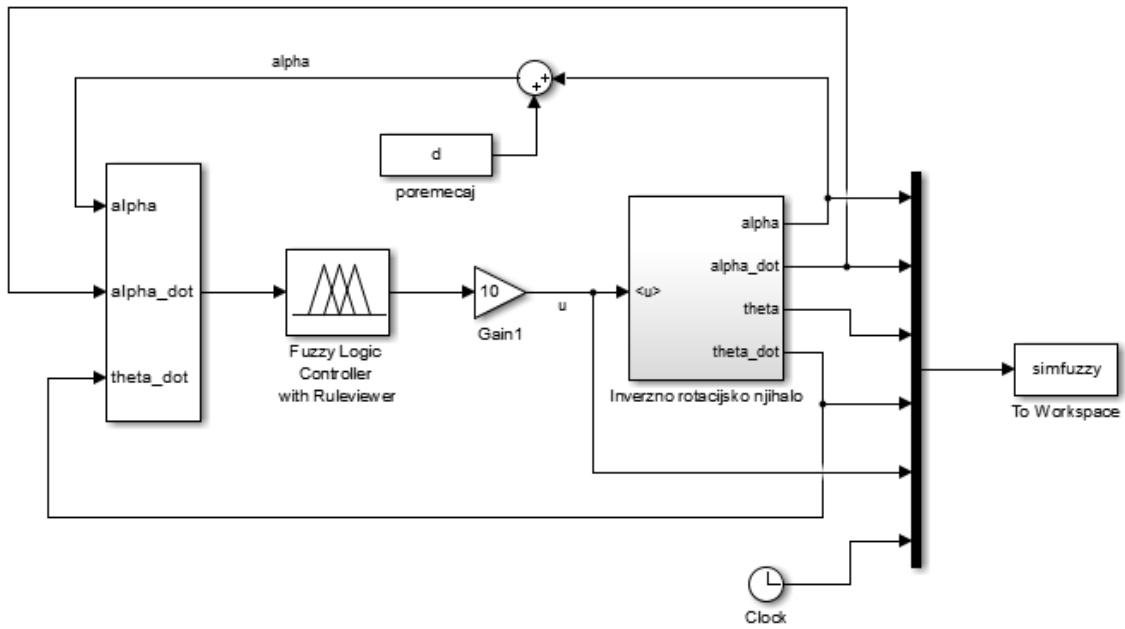
Za projektiranje neizrazitog regulatora koristi se softverski paket MATLAB koji u sebi ima ugrađen softverski dodatak naziva *fuzzy*, u kojem je moguće definirati sve aspekte neizrazitog regulatora. To uključuje dodavanje neizrazitog regulatora u Simulink model, definiranje ulaznih i izlaznih lingvističkih varijabli, dodavanje funkcija pripadnosti te definiranje neizrazitih pravila.

U ovom radu projektiranju neizrazitog regulatora pristupilo se direktno, zanemarujući prethodna saznanja o dinamici sustava (temeljem LQR regulatora) i pokušavajući neizraziti regulator projektirati na temelju intuicije i nekih osnovnih pravila - najviše kako bi se testirala značajka neizrazitih regulatora da se mogu jednostavno i intuitivno projektirati. Zbog komplicirane i nelinearne dinamike, i prije početka projektiranja nije bilo previše vjere da će se neizraziti regulator po performansama približiti LQR-u.

Tijekom projektiranja i testiranja, bilo je jasno da na ovaj način neizraziti regulator ne može postići stabilizaciju oba kuta u nultu poziciju, pa je fokus stavljen samo na stabilizaciju njihala u inverznom položaju, odnosno kut  $\alpha$ .

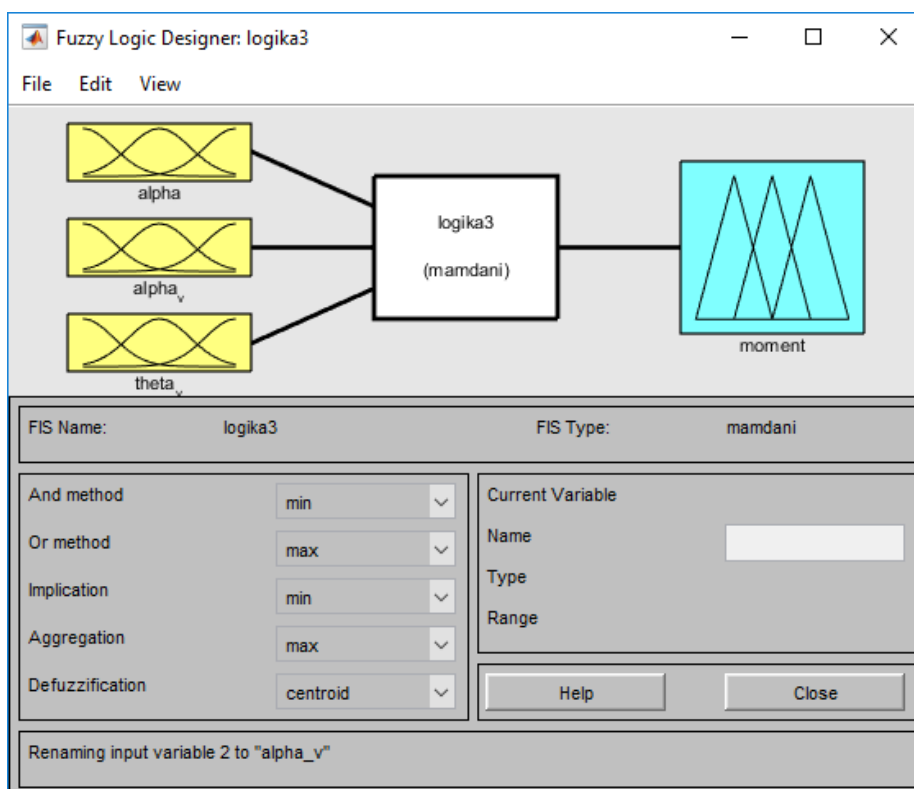


Simulink model koji uključuje neizraziti regulator prikazan je na sljedećoj slici:



Slika 4.8 Model sustava s neizrazitim regulatorom

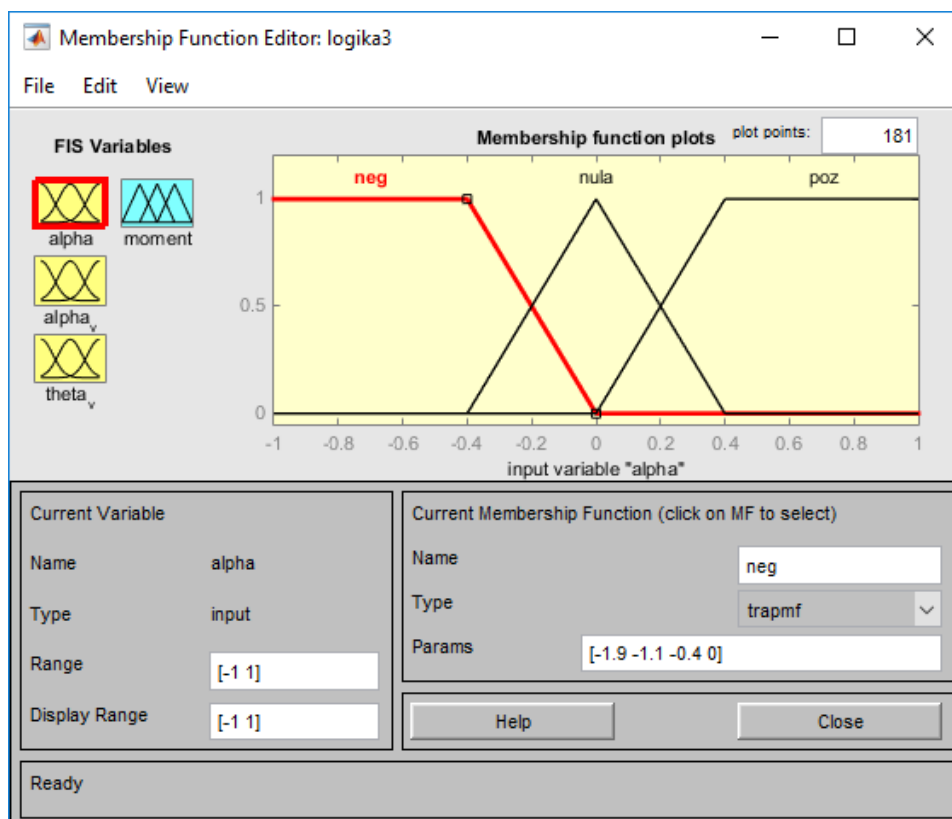
U MATLAB alatu *fuzzy logic designer* definirane su **osnovne postavke neizrazitog regulatora**, a to su ulazne varijable  $\alpha$ ,  $\alpha_v$  i  $\theta_v$ , te izlazna varijabla *moment*.



**Slika 4.9 Fuzzy logic designer**

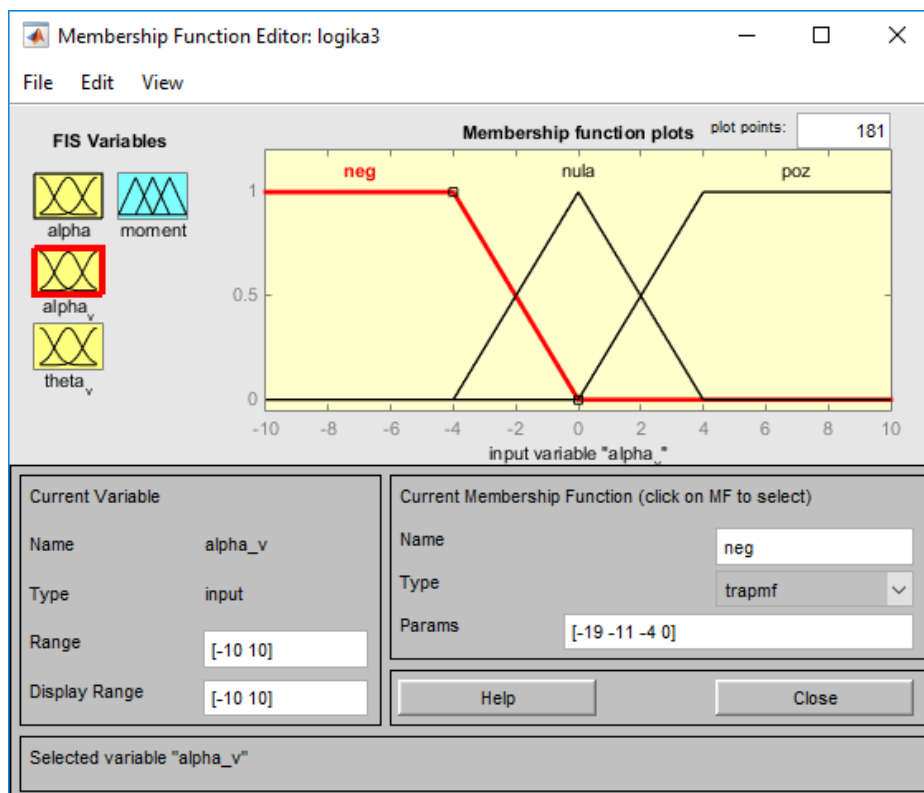
U ovom prozoru namještene su i ostale postavke, metode implikacije, agregacije i defuzifikacije.

Nakon toga potrebno je definirati **funkcije pripadnosti** za svaku pojedinu varijablu. One izgledaju kako slijedi:



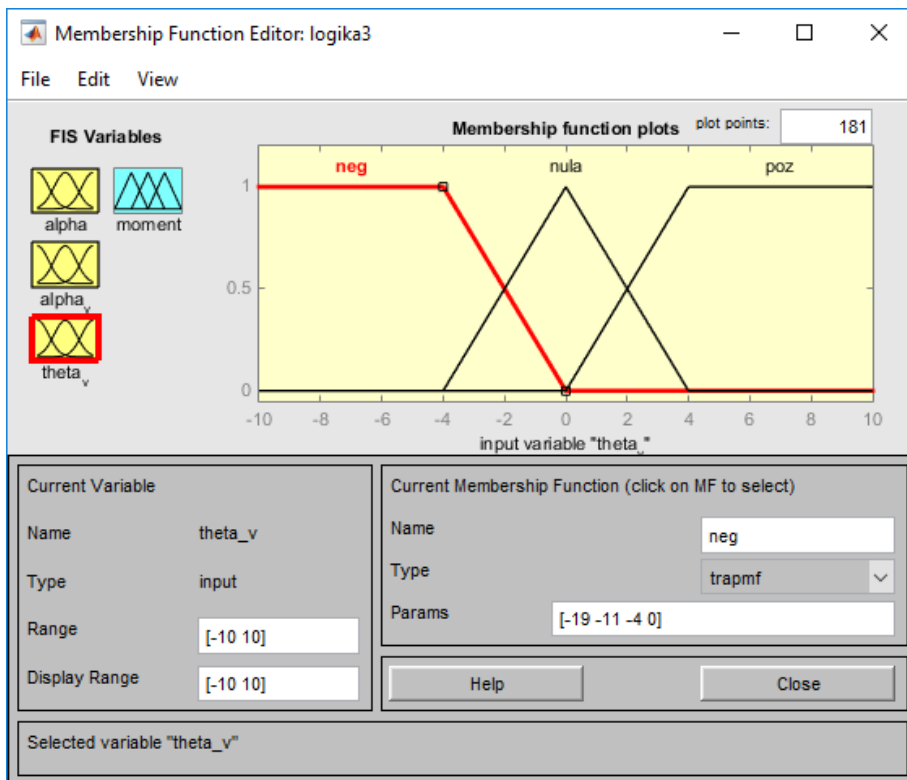
Slika 4.10 Funkcije pripadnosti za *alpha*

Funkcije pripadnosti za varijablu *alpha* trapezoidnog su oblika te ih ima tri: neg (negativno), nula (nula) i poz (pozitivno). Reflektiraju trenutnu poziciju reguliranog kuta, a željena pozicija regulacije je nula. Ulazni raspon iznosi -1rad...1rad.



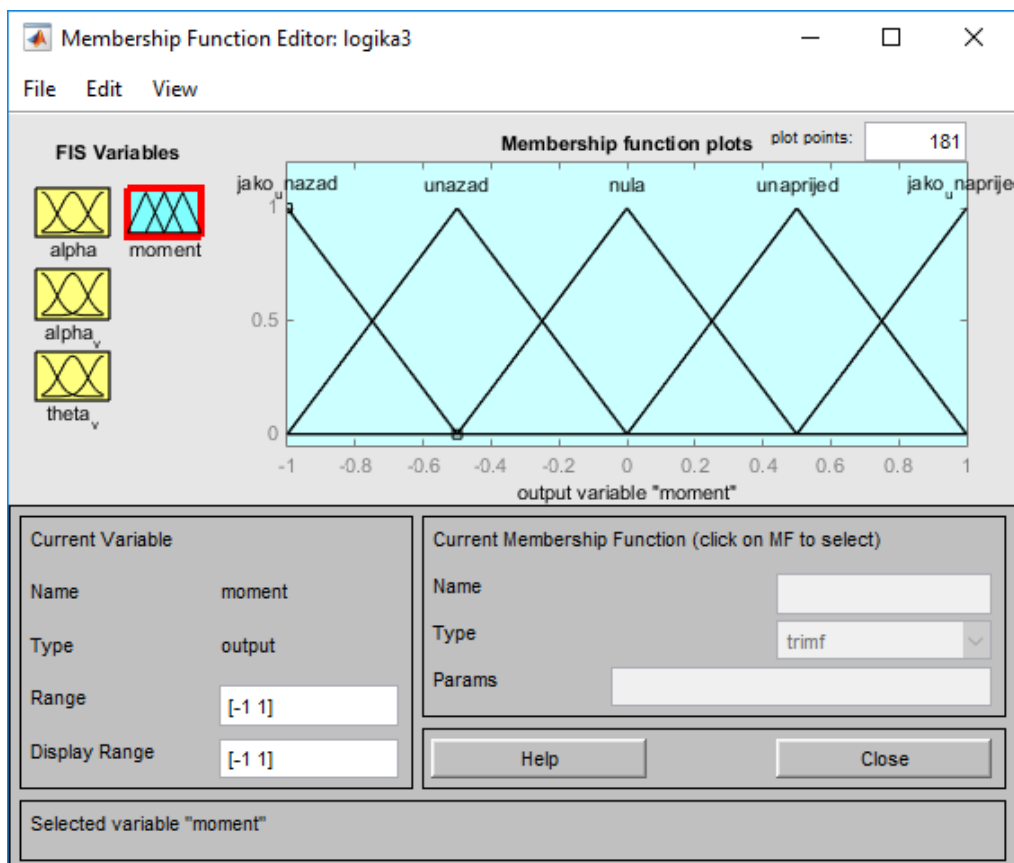
Slika 4.11 Funkcije pripadnosti za  $\alpha_v$

Funkcije pripadnosti za varijablu  $\alpha_v$  također su trapezoidnog oblika te ih ima tri: neg (negativno), nula (nula) i poz (pozitivno). Reflektiraju brzinu promjene reguliranog kuta. Ulazni raspon iznosi  $-10\text{rad/s} \dots 10\text{rad/s}$ .



Slika 4.12 Funkcije pripadnosti za  $\theta_v$

Funkcije pripadnosti za varijablu  $\theta_v$  također su trapezoidnog oblika. Reflektiraju brzinu promjene kuta  $\theta$ . Ulazni raspon iznosi  $-10\text{rad/s} \dots 10\text{rad/s}$ .



Slika 4.13 Funkcije pripadnosti za izlazni moment

Funkcije pripadnosti za izlazni moment  $u$  su pak trokutnog oblika, te ih ima pet: jako unazad, unazad, nula, unaprijed i jako unaprijed. Razlog veće segmentacije izlaznog napona leži u tome što ne bi bilo moguće zadovoljavajuće regulirati proces samo s tri razine napona (naprijed, nula i nazad). Naime, u graničnim situacijama kad stanja prelaze iz negativnog u pozitivnog, potrebno je značajno popustiti upravljački signal napona kako proces ne bi otišao u nestabilno stanje. Izlazna varijabla napona  $u$  može poprimiti vrijednosti 0V...1V, međutim iza regulatora postavljeno je P djelovanje (gain, odnosno pojačivač signala) kako bi na motor djelovao napon adekvatan njegovoj veličini.

Sljedeće je potrebno definirati **neizrazita pravila**. U prikazanom tehničkom sustavu, konkretno inverznom rotacijskom njihalu, taj dio je najkompliciraniji. Naime, zbog kompleksne dinamike sustava, ponajviše zbog pojave nelinearnosti, nije lako na

trivijalan i logički način odrediti kako električni motor mora djelovati da bi njihalo „tjerao“ prema poziciji uspravnog položaja. Zbog toga je potrebno pratiti i brzinu kuta  $\theta$  jer i ona utječe na dinamiku samog položaja njihala (kut  $\alpha$ ), kao i brzina promjene položaja njihala (brzina reguliranog kuta). Bez sažimanja seta pravila pomoću dodatne logike, mora ih postojati 27 da bi pokrili sva stanja sustava – u suprotnom za određena stanja regulator neće dati izlaznu veličinu. Naime, postoje 3 ulazne varijable te svaka od njih ima 3 funkcije pripadnosti:  $3^3$  daje 27 različitih kombinacija.

Osnovni cilj neizrazitih pravila jest ovaj: kut  $\alpha$  u svakom trenutku mora konvergirati prema poziciji 0rad. Dakle, kad je kut  $>0$ rad, potrebno je narinuti moment motoru koji će njihalo pokrenuti u negativnom smjeru ( $\dot{\alpha} < 0$ ), a kad je kut  $<0$ rad, potrebno je njihalo pokrenuti u pozitivnom smjeru ( $\dot{\alpha} > 0$ ). Ako je  $\alpha = 0$ , a ostala stanja sustava stabilna, motor ne bi trebao djelovati ( $u = 0$ ). Da bi se to postiglo, potrebno je uzeti u obzir sljedeće činjenice koje proizlaze iz modela sustava (poglavlje 2.3):

- Rotacija baze u negativnom smjeru ( $\ddot{\theta} < 0$ ) pokreće njihalo u pozitivnom smjeru ( $\ddot{\alpha} > 0$ )
- Rotacija baze u pozitivnom smjeru ( $\ddot{\theta} > 0$ ) pokreće njihalo u negativnom smjeru ( $\ddot{\alpha} < 0$ )

Dakle, ukoliko je kut njihala negativan, njihalo se mora pokrenuti u pozitivnom smjeru. To znači da se baza mora rotirati u negativnom smjeru te narinuti moment na motoru mora biti negativan. Analogno vrijedi i obratna situacija.

Iz prethodnih zaključaka možemo sastaviti osnovna fuzzy pravila:

- if (alpha is neg) then (moment is unazad)
- if (alpha is nula) then (moment is nula)
- if (alpha is poz) then (moment is unaprijed)

Međutim, ta pravila su nedovoljna jer ne pokrivaju ostala stanja sustava, odnosno brzinu reguliranog kuta i brzinu kuta poluge. Ukoliko su oni u graničnim područjima, potrebno je popustiti upravljački moment kako regulirani kut ne bi otišao pretjerano u prebačaj i nestabilnost. Također, ako su stanja izrazito nepovoljna za konvergenciju

reguliranog kuta prema 0rad, potrebno je naglo djelovati upravljačkom varijablom, npr. kad je kut negativan, a i brzina mu je negativna (udaljava se od 0rad). Zato je potrebno pravila unaprijediti te postaviti dodatna pravila za određene situacije. Primjer je sljedeći: kut  $\alpha$  je negativan, brzina kuta  $\alpha$  je pozitivna što znači da iznos kuta već konvergira prema uspravnoj poziciji, a brzina kuta  $\theta$  pozitivna. Kako je  $\dot{\theta}$  pozitivno, to znači da odmaže konvergenciji reguliranog kuta prema 0rad (vidjeti činjenice gore). U tom slučaju, potrebno je upravljački signal narinuti u suprotnom smjeru ili ga isključiti (nula).

Konačni set pravila proizašao iz prethodnog logičkog procesa prikazan je na sljedećoj slici:



```
1. If (alpha is neg) and (alpha_v is neg) and (theta_v is neg) then (moment is jako_unazad) (1)
2. If (alpha is neg) and (alpha_v is neg) and (theta_v is nula) then (moment is jako_unazad) (1)
3. If (alpha is neg) and (alpha_v is neg) and (theta_v is poz) then (moment is unazad) (1)
4. If (alpha is neg) and (alpha_v is nula) and (theta_v is neg) then (moment is jako_unazad) (1)
5. If (alpha is neg) and (alpha_v is nula) and (theta_v is nula) then (moment is unazad) (1)
6. If (alpha is neg) and (alpha_v is nula) and (theta_v is poz) then (moment is nula) (1)
7. If (alpha is neg) and (alpha_v is poz) and (theta_v is neg) then (moment is jako_unazad) (1)
8. If (alpha is neg) and (alpha_v is poz) and (theta_v is nula) then (moment is unazad) (1)
9. If (alpha is neg) and (alpha_v is poz) and (theta_v is poz) then (moment is unaprijed) (1)
10. If (alpha is nula) and (alpha_v is neg) and (theta_v is neg) then (moment is jako_unazad) (1)
11. If (alpha is nula) and (alpha_v is neg) and (theta_v is nula) then (moment is unazad) (1)
12. If (alpha is nula) and (alpha_v is neg) and (theta_v is poz) then (moment is unaprijed) (1)
13. If (alpha is nula) and (alpha_v is nula) and (theta_v is neg) then (moment is unazad) (1)
14. If (alpha is nula) and (alpha_v is nula) and (theta_v is nula) then (moment is nula) (1)
15. If (alpha is nula) and (alpha_v is nula) and (theta_v is poz) then (moment is unaprijed) (1)
16. If (alpha is nula) and (alpha_v is poz) and (theta_v is neg) then (moment is nula) (1)
17. If (alpha is nula) and (alpha_v is poz) and (theta_v is nula) then (moment is unaprijed) (1)
18. If (alpha is nula) and (alpha_v is poz) and (theta_v is poz) then (moment is jako_unaprijed) (1)
19. If (alpha is poz) and (alpha_v is neg) and (theta_v is neg) then (moment is nula) (1)
20. If (alpha is poz) and (alpha_v is neg) and (theta_v is nula) then (moment is unaprijed) (1)
21. If (alpha is poz) and (alpha_v is neg) and (theta_v is poz) then (moment is jako_unaprijed) (1)
22. If (alpha is poz) and (alpha_v is nula) and (theta_v is neg) then (moment is unaprijed) (1)
23. If (alpha is poz) and (alpha_v is nula) and (theta_v is nula) then (moment is jako_unaprijed) (1)
24. If (alpha is poz) and (alpha_v is nula) and (theta_v is poz) then (moment is jako_unaprijed) (1)
25. If (alpha is poz) and (alpha_v is poz) and (theta_v is neg) then (moment is jako_unaprijed) (1)
26. If (alpha is poz) and (alpha_v is poz) and (theta_v is nula) then (moment is jako_unaprijed) (1)
27. If (alpha is poz) and (alpha_v is poz) and (theta_v is poz) then (moment is jako_unaprijed) (1)
```

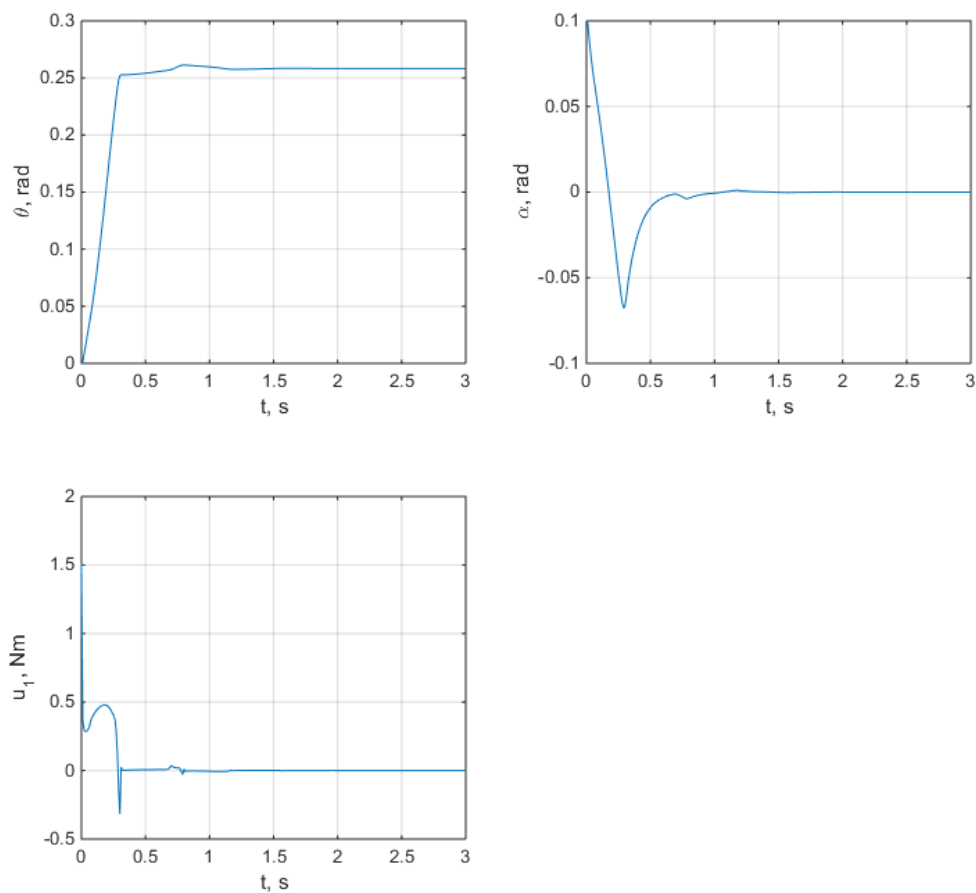
Slika 4.14 Set fuzzy pravila za regulator



#### 4.7.1. Rezultati simulacije neizrazitog regulatora

Izvršena je simulacija odziva sustava s uključenim neizrazitim regulatorom i uz sljedeće početne uvjete

$$\mathbf{q}_0 = \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \alpha_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \end{bmatrix} \quad \dot{\mathbf{q}}_0 = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_0 \\ \dot{\alpha}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



Slika 4.15 Odziv sustava s uključenim neizrazitim regulatorom

#### **4.7.2. Interpretacija rezultata**

Projektirani neizraziti regulator uspješno stabilizira njihalo u uspravnom inverznom položaju. Međutim, postoji izražen prebačaj, dinamika je naglog karaktera te, za razliku od LQR regulatora, nije postojala mogućnost istovremene stabilizacije kuta poluge u nultom položaju.

Neizrazita logika se pokazala kao nedostatna za ovakvu vrstu problema - za sustav koji ima izraženo kompleksnu i nelinearnu dinamiku. Za bolje performanse regulacije pomoću neizrazitog regulatora, potrebno je koristiti naprednije dodatne tehnike projektiranja neizrazitih regulatora.

## 5. ZAKLJUČAK

U konačnici, moguće je zaključiti kako svi projektirani regulatori uspješno obavljaju zadatak asimptotske stabilizacije njihala u inverznom položaju. Dobiveni matematički modeli sustava precizno opisuju kompliciranu, nelinearnu dinamiku sustava što je uvelike doprinijelo uspješnoj regulaciji.

U slučaju potpuno upravljivog inverznog rotacijskog njihala, pokazuje se kako standardni *PID* regulator bez poteškoća obavlja regulaciju pozicije prema proizvoljno zadanoj referenci. Pokazano je da *PD* regulator ostavlja trajno regulacijsko odstupanje koje je u ovom slučaju zanemarivo zbog utjecaja parametara sustava (male mase i inercije). Sinteza *PID* regulatora pokazala se jednostavnom i jasnom. Pod pretpostavkom da brzine nisu direktno mjerljivo, potrebno je uvesti filter brzine u obliku jednostavnog dinamičkog *P1* člana. Uvodeći i prefilter referentne pozicije, performanse regulacije su dodatno poboljšane na način da je smanjeno trajno opterećenje zglobova u slučaju skokovite promjene referentne pozicije. Obje modifikacije su se u sustav uvele vrlo jednostavno. S obzirom na tu činjenicu i dobre performanse regulacije ukupnog sustava, *PID* regulator pokazuje se kao odličan izbor za regulaciju sustava s više rotacijskih stupnjeva slobode gibanja. To je potvrđeno i u industrijskoj praksi gdje većina takvih sustava koristi upravo *PID* regulatore.

U slučaju podupravljanog inverznog rotacijskog njihala, za asimptotsku stabilizaciju pozicija odabran je linearni regulator u povratnoj vezi, konkretno, linearni kvadratični regulator. Međutim, zbog nelinearne dinamike modela, potrebno je linearizirati model oko odabrane radne točke što je u ovom slučaju bio potpuno inverzni položaj njihala. Simulacije sustava u zatvorenoj petlji, s prethodno izračunatim pojačanjima, pokazuju kako linearni kvadratični regulator uspješno asimptotski stabilizira sva stanja sustava (dakle, i kut njihala i kut bazne poluge) pod pretpostavkom da početni odklon njihala nije prevelik. U slučaju da jest, linearizirani model nije u stanju pravilno aproksimirati stvarni model sustava te regulator ne funkcionira na zadovoljavajući način. Zbog toga je implementiran dodatni heuristički algoritam koji će izvjesnim djelovanjem bazne poluge dovesti njihalo blizu potpuno inverznog položaja, naziva *swing-up*. Na temelju intuitivne, iskustvene procjene dizajnirana je referentna trajektorija kuta poluge koja

uspješno zatirava njihalo i dovodi ga u inverzni položaj. Dodatno, uvedeno je prespajanje na linearni regulator u trenutku kada se njihalo nađe blizu inverznog položaja. Takva konfiguracija vrlo uspješno dovodi njihalo iz ravnotežnog, visećeg položaja i stabilizira ga u inverznom položaju, kao i kut poluge u nultom položaju. Unatoč dodatnim naporima linearizacije i projektiranja *swing-up* algoritma, linearni kvadratični regulator pokazao se kao idealan izbor za jednostavnu sintezu regulatora koji na optimalan način stabilizira sva stanja sustava. To dokazuje i industrijska praksa u kojoj se na podupravljanim sustavima s kompleksnom dinamikom obilato koriste linearni regulatori. Međutim, postoji temeljni uvjet - model se mora moći linearizirati što nije uvijek slučaj.

Dodatno, dizajniran je i neizraziti regulator u podupravljanom sustavu. Tom problemu namjerno se pristupilo zanemarujući prethodna saznanja o dinamici upravljanja ovakvim sustavom, kako bi se testirala naglašavana prednost neizrazite regulacije - intuitivnost i jednostavnost dizajniranja. Međutim, nakon dužeg testiranja, nije bilo moguće postići stabilizaciju oba kuta u nultom položaju kako to čini linearni regulator. Ipak, nakon definiranja kompliciranog i dugačkog skupa pravila, postignuta barem stabilizacija njihala u inverznom položaju. No, time se izgubila intuitivnost i jednostavnost neizrazite regulacije pa se može zaključiti kako neizraziti regulator nije dobar izbor za sustave s kompleksnom nelinearnom dinamikom, pogotovo ako su podupravljeni.

---

## LITERATURA

- [1] R. Kelly, V. Santibáñez Davila, A. Loría, *Control of Robot Manipulators in Joint Space*, London: Springer, 2005.
- [2] J. Kasać, *Analiza stabilnosti nelinearnih sustava vođenih analitičkim neizrazitim regulatorom*, doktorski rad, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb, 2005.
- [3] M. Widjaja, S. Yurkovich, "Intelligent Control for Swing Up and Balancing of an Inverted Pendulum System," *4th IEEE Conference on Control Applications*, Albany, NY, rujan 1995., pp. 534 - 542
- [4] W. J. Rugh, *Linear System Theory, 2nd Edition*, New Jersey: Prentice Hall, 1995.
- [5] J.-N. Juang, M. Q. Pan, *Identification and Control of Mechanical Systems*, Cambridge University Press, 2004.
- [6] E. Ostertag, *Mono- and Multivariable Control and Estimation*, London: Springer, 2011.
- [7] K. Ogata, "Linearization of Nonlinear Mathematical Models," *Modern Control Engineering*, Prentice Hall, pp. 143-149, 1995.
- [8] K. Furuta, M. Yamakita, "Swing-up Control of Inverted Pendulum Using Pseudo-State Feedback," *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*, vol. 206, no. 4, pp. 263-269, 1992.
- [9] T. Žilić, J. Kasać, M. Essert, Ž. Šitum, "Performance Comparison of Different Control Algorithms for Robot Manipulators," *Strojarstvo*, vol. 54, no. 5, pp. 399-407, listopad 2012.

- [10] G. Stein, M. Athans, "The LQG/LTR procedure for multivariable feedback control design," *IEEE Transaction on Automatic Control*, vol. 32, pp. 105 - 114, veljača 1987.
- [11] V. Utkin, J. Guldner, S. Jingxin, *Sliding mode control in electromechanical systems, 2nd Edition*, Boca Raton: CRC Press, 2009.
- [12] Quanser, *Cube Servo User Manual*

## **PRILOZI**

**A) MATLAB kod: *main.m* - skripta za pokretanje**

```
% main.m
% Inverzno rotacijsko njihalo
clc
clear;
T=0.5; %vrijeme simulacije
DT=0.0001; %korak integracije

global mp Lp mr Lr g Jr Jp Br Bp KP1 KD1 KI1 KP2 KD2 KI2 yd1 yd3 Kfr K REG

%-----%

theta0 = 0; dtheta0 = 0; %initial conditions
alpha0 = 0.1; dalpha0 = 0; %initial conditions

yd1 = 0; % referentna pozicija theta
yd3 = 0; % referentna pozicija alpha

%-----Parametri PID regulatora-----%

KP1 = 10; KP2 = KP1; %proportional gain
KD1 = 0.1; KD2 = KD1; %derivative gain
KI1 = 15; KI2 = KI1; %integral gain

%-----Pojacanje prefiltera ref pozicije-----%

Kfr = 6;

%-----Parametri-----%
mp = 0.024;
Lp = 0.129;
Lr = 0.085;
mr = 0.095;

g = 9.81;

Jr = 5.72e-5;
Jp = 3.33e-5;

Br = 2.34e-4;
Bp = 1.7e-4;

REG = 0;

%-----ukljuèi LQR parametre-----%
lqr_reg;
```



```

%-----%
tspan = 0:DT:T;
options = odeset('RelTol',1e-4,'AbsTol',1e-4);
[t,y] = rk4('InvRotNjihalo',[0 T],[theta0 dtheta0 alpha0 dalpha0 0 0 0 0 0
0 0],DT);
%[t,y] = ode45('InvRotNjihalo',[0 T],[theta0 dtheta0 alpha0 dalpha0 0 0 0 0
0 0 0],options);

%-----Control variable-----%
Leng = length(y(:,8));
U1(1)=0;
U2(1)=0;
for i=1:(Leng-1),
    U1(i+1)=(y(i+1,5)-y(i,5))/(t(i+1)-t(i));
    U2(i+1)=(y(i+1,6)-y(i,6))/(t(i+1)-t(i));
end

for i=1:Leng, qd1(i)=yd1; end
for i=1:Leng, qd3(i)=yd3; end

%-----%
figure(1)
subplot(2,2,1); plot(t,y(:,1),t,qd1,'r','linewidth',2); grid on;
xlabel('t, s'), ylabel('\theta, rad');
legend('odziv','referenca','location','northeast')
subplot(2,2,2); plot(t,y(:,3),t,qd3,'r','linewidth',2); grid on;
xlabel('t, s'), ylabel('\alpha, rad');
legend('odziv','referenca','location','northeast')
subplot(2,2,3); plot(t,U1,'linewidth',2);
xlabel('t, s'), ylabel('u_1, Nm'); grid on;
subplot(2,2,4); plot(t,U2,'linewidth',2);
xlabel('t, s'), ylabel('u_2, Nm'); grid on;

%----usporedba linearizirani/nelinearni model-----%
%figure(1);
%subplot(2,1,1); plot(t,y(:,1),t,ylin(:,1),'r','linewidth',2); grid on;
%xlabel('t, s'), ylabel('\theta, rad');
%legend('nelinearan','linearizirani','location','northeast')
%subplot(2,1,2); plot(t,y(:,3),t,ylin(:,2),'r','linewidth',2); grid on;
%xlabel('t, s'), ylabel('\theta, rad');
%legend('nelinearan','linearizirani','location','northeast')
%-----%

```

**B) MATLAB kod: *InvRotNjihalo.m* - model inverznog rotacijskog njihala**

```

%InvRotNjihalo2.m

function dy = InvRotNjihalo2(t,y)
dy = zeros(11,1);      % a column vector

% y(1) = theta
% y(2) = dtheta
% y(3) = alpha
% y(4) = dalpha

global mp Lp Lr g Jr Jp Br Bp KP1 KD1 KI1 KP2 KD2 KI2 yd1 yd3 Kfr K REG

%-----Konstante-----%

p1 = mp*Lr^2;
p2 = mp*Lp^2;
p3 = mp*Lp*Lr;
p4 = mp*Lp*g;

%-----Pogreska pozicije-----%

% pogreška bez filtra referentne pozicije
dy1=y(1)-yd1;
dy3=y(3)-yd3;

% pogreška s filtrom referentne pozicije
dy1=y(1)-y(7);
dy3=y(3)-y(8);

% šum
dy1 = dy1-0.05+0.10*rand(1,1);
dy3 = dy3-0.05+0.10*rand(1,1);

%-----Estimirane brzine-----%
A = 150;

ESTdy1 = A*(dy1-y(9));
ESTdy3 = A*(dy3-y(10));

%-----Linearni PID regulator-----%

% BEZ ESTIMATORA BRZINE
u1 = -KP1*dy1 - KD1*y(2) - KI1*dy1;
u2 = -KP2*dy3 - KD2*y(4) - KI2*dy3;
% bez predfiltra
u1 = -KP1*dy1 - KD1*y(2) - KI1*y(7);
u2 = -KP2*dy3 - KD2*y(4) - KI2*y(8);

% S ESTIMATOROM BRZINE
u1 = -KP1*dy1 - KD1*ESTdy1 - KI1*dy1;
u2 = -KP2*dy3 - KD2*ESTdy3 - KI2*dy3;

```

```

% bez predfiltra
u1 = -KP1*dy1 - KD1*ESTdy1 - KI1*y(7);
u2 = -KP2*dy3 - KD2*ESTdy3 - KI2*y(8);

%-----LQR-----%
% parametri dobiveni iz lqr_reg.m preko main.m

% koristi prava stanja brzine
u1 = -K*[y(1); y(3); y(2); y(4)];

%-----Swing up algoritam-----%

ref = t*sin(61*t);

delta_ref = y(1)-ref;

if (abs(y(3)) > 0.3) && (REG == 0)
    u1 = -15*delta_ref-0.1*y(2);
else
    REG = 1;
end

%-----Upravljacki vektor-----%
%u1=0;
u2=0; % ako je sustav podaktuiran i samo kut theta upravljiv
U=[u1; u2];

%--Viskozno trenje:
R = [Br*y(2); Bp*y(4)];

%--Matrica inercija:
M = [p1+1/4*p2-1/4*p2*cos(y(3))^2+Jr -1/2*p3*cos(y(3)); -1/2*p3*cos(y(3))
Jp+1/4*p2];

%--Coriolisov vektor:
C = [1/2*p2*sin(y(3))*cos(y(3))*y(2)*y(4)+1/2*p3*sin(y(3))*y(4)^2; -
1/4*p2*cos(y(3))*sin(y(3))*y(2)^2];

%--Vektor gravitacije:
gv = [0; -1/2*p4*sin(y(3))];

%--(Inverzna matrica inercije)*(Coriolisov vektor):
iMC = M\C;

%--(Inverzna matrica inercije)*(Vektor gravitacije):
iMgv = M\gv;

%--(Inverzna matrica inercije)*(Viskozno trenje):
iMR = M\R;

%--(Inverzna matrica inercije)*(Upravljacki vektor):

```

```
iMU = M\U;

%----Dinamika inverznog njihala-----%
dy(1) = y(2);
dy(2) = -iMC(1)-iMgv(1)-iMR(1)+iMU(1);
dy(3) = y(4);
dy(4) = -iMC(2)-iMgv(2)-iMR(2)+iMU(2);
dy(5) = u1;
dy(6) = u2;
%dy(7) = dy1;
%dy(8) = dy3;
% predfilter referentne pozicije
dy(7) = -Kfr*(y(7)-yd1);
dy(8) = -Kfr*(y(8)-yd3);
% estimirane vrijednosti brzine
dy(9) = ESTdy1;
dy(10) = ESTdy3;
dy(11) = delta_ref;

%-----%
```

### C) MATLAB kod: *lqr\_reg.m* - linearizacija i sinteza LQR regulatora

```

% lqr_reg.m

global mp Lp Lr g Jr Jp Br Bp K

%-----Konstante-----%

p1 = mp*Lr^2;
p2 = mp*Lp^2;
p3 = mp*Lp*Lr;
p4 = mp*Lp*g;

%--- LINEARIZIRANE matrice -----%
% generalna forma mds sustava:
%  $Mx'' + Cx' + Gx = U - Bx' \rightarrow Mx'' + (C+B)x' + Gx = U$ 

M = [p1+1/4*p2-1/4*p2+Jr -1/2*p3; -1/2*p3 Jp+1/4*p2]; % matrica inercije
R = [Br 0; 0 Bp]; %viskozno trenje
C = [0 0; 0 0]; % alpha = 0 -> sin(alpha) = 0 -> C = 0
gv = [0 0; 0 -1/2*p4]; %

%invMR = M\R;
%invMC = M\C;
% x1 = [theta; alpha], x2 = [theta_dot; alpha_dot]
% [theta; alpha; theta_dot; alpha_dot]

A = [zeros(2) eye(2); -(M\gv) -(M\ (R+C))];
B = [zeros(2); inv(M)];
B = B(:,1); % samo jedan ulaz koji se odnosi na kut theta
%C = [1 0 0 0; 0 1 0 0];
C = [1 0 0 0; 0 1 0 0];
D = [0; 0];

InvRotNjihalo = ss(A, B, C, D);

%Q = C'*C;
Q = diag([1 5 1 1]);
R = 1;

K = lqr(A, B, Q, R);
%K = place(A, B, [-1 -2 -3 -4]*0.1);

Ac = [(A-B*K)];
Bc = [B];
Cc = [C];
Dc = [D];

states = {'theta' 'alpha' 'theta_dot' 'alpha_dot'};
inputs = {'u'};
outputs = {'theta', 'alpha'};

```

```
sys_cl =  
ss(Ac,Bc,Cc,Dc,'statename',states,'inputname',inputs,'outputname',outputs);  
%pzplot(sys_cl);  
%grid on;  
[ylin,t,x]=initial(sys_cl, [0; 0.1; 0; 0], [0:DT:T]);  
plot(t,ylin(:,1),'b',t,ylin(:,2),'r');grid on;legend('\theta','\alpha');
```