

Nova metoda za računalno modeliranje atmosferskog graničnog sloja

Cindori, Mihael

Master's thesis / Diplomski rad

2016

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:235:010754>

Rights / Prava: [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2024-11-20**

Repository / Repozitorij:

[Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb](#)



**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE**

DIPLOMSKI RAD

Mihael Cindori

Zagreb, 2016.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

Nova metoda za računalno modeliranje atmosferskog graničnog sloja

Mentor:
doc. dr. sc. Franjo Juretić

Student:
Mihael Cindori

Zagreb, 2016.

Izjavljujem da sam ovaj rad izradio samostalno koristeći stečena znanja tijekom studija i navedenu literaturu.

Mihael Cindori



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE



Središnje povjerenstvo za završne i diplomske ispite
Povjerenstvo za diplomske ispite studija strojarstva za smjerove:
procesno-energetski, konstrukcijski, brodstrojarski i inženjersko modeliranje i računalne simulacije

Sveučilište u Zagrebu Fakultet strojarstva i brodogradnje	
Datum	Prilog
Klasa:	
Ur.broj:	

DIPLOMSKI ZADATAK

Student: **Mihael Cindori**

Mat. br.: 0035181425

Naslov rada na hrvatskom jeziku: **Nova metoda za računalno modeliranje atmosferskog graničnog sloja**

Naslov rada na engleskom jeziku: **A novel method for computational modelling of the atmospheric boundary layer**

Opis zadatka:

Točno predviđanje strujanja zraka i turbulencije u atmosferskom graničnom sloju je vrlo važno u građevini, prometu, energetici i meteorologiji. U današnje vrijeme se problem sve češće rješava upotrebom računalne dinamike fluida (CFD), uslijed dostupnosti računala i računalnih programa koji postaju sve jednostavniji za korištenje. Također, često se koriste osrednjene Navier-Stokesove jednadžbe uz modele turbulencije s dvije jednadžbe, npr. $k-\varepsilon$ model, koji nisu računalno zahtjevni. No, tako provedene simulacije uglavnom nisu u stanju u potpunosti točno reproducirati homogenost profila u smjeru glavnog strujanja uz zanemarivi pad tlaka, a niti uniformnost u ostalim smjerovima. U industrijskim simulacijama se najčešće zadaju profili brzine i turbulencije na ulazu u domenu, te se strujanje unutar domene računa bez ikakve kontrole, što rezultira promjenom profila strujanja koji ne odgovara atmosferskom graničnom sloju. Pregledom literature može se uočiti da su mnogi autori pokazali da takvi rubni uvjeti ne zadovoljavaju tražene fizikalne uvjete, i rezultiraju strujanjem i turbulencijom zraka koji nisu uniformni ni homogeni.

Cilj ovog rada je razvoj nove metode simulacije graničnog sloja, pomoću $k-\varepsilon$ modela turbulencije, kojom će biti moguće reproducirati fizikalne uvjete u atmosferskom graničnom sloju točnije nego što je slučaj s trenutno dostupnim metodama. To se planira postići uključivanjem dodatnog člana u jednadžbu količine gibanja, čija će vrijednost biti određena iz eksperimentalnih podataka. Rezultati dobiveni računalnim simulacijama će se usporediti s eksperimentalnim rezultatima izmjerenim u zračnom tunelu za ruralni, suburban i urbani tip terena.

Diplomski rad treba sadržavati sljedeće:

1. Uvod,
2. Opis računalne metodologije,
3. Rezultati i diskusija,
4. Zaključak.

U radu je potrebno navesti popis korištene literature i zahvalu na pomoći tijekom izrade rada.

Zadatak zadan:

Rok predaje rada:

Predviđeni datumi obrane:

12. studenog 2015.

14. siječnja 2016.

20., 21. i 22. siječnja 2016.

Zadatak zadao:

Predsjednik Povjerenstva:

Doc. dr. sc. Franjo Juretić

Prof. dr. sc. Tanja Jurčević Lulić

Zahvale

Najiskrenije se zahvaljujem svojem mentoru doc. dr. sc. Franji Juretiću, koji mi je bio od najveće pomoći prilikom izrade ovog rada i bez čijeg znanja i savjeta ovaj rad ne bi bio moguć. Hvala mu i na srdačnoj kolegijalnosti i otvorenosti, te na svom onom slobodnom vremenu koje je utrošio na moja silna pitanja i brojne diskusije.

Također bih se želio zahvaliti i prof. dr. sc. Hrvoju Kozmaru na svim sugestijama i pomoći koju mi je pružio oko izrade diplomskog rada, a posebice na pomoći vezanoj uz teoretski dio rada.

Veliko hvala svim profesorima koje sam susreo tijekom svog studiranja na FSB-u. Srdačno im se zahvaljujem na stečenom znanju, i svim korisnim savjetima.

Hvala i svim kolegama koji su uvijek bili voljni izdvojiti vremena za kratak razgovor, te pritom svojim kritikama i sugestijama ovaj rad učiniti boljim.

Mihael Cindori

Sadržaj

Zahvale	I
Sadržaj	II
Popis slika	V
Popis tablica	VII
Popis oznaka	VIII
Skraćenice	XIII
Sažetak	XIV
Summary	XV
1. Uvod	1
1.1. Pregled literature	2
1.2. Cilj rada	3
2. Teorija atmosferskog graničnog sloja	4
2.1. Atmosfersko strujanje	5
2.1.1. Geostrofičko strujanje ili geostrofički vjetar (<i>geostrophic wind</i>)	5
2.1.2. Strujanje uslijed djelovanja centrifugalne sile (<i>gradient wind</i>)	7
2.1.3. Utjecaj strujanja u višim dijelovima atmosfere na formiranje atmosferskog graničnog sloja	8
2.2. Atmosferski granični sloj	10
2.2.1. Struktura atmosferskog graničnog sloja	10
2.2.1.1. Aerodinamička duljina hrapavosti z_0	12
2.2.1.2. Debljina istisnuća atmosferskog graničnog sloja d	13
2.2.2. Struktura strujanja u atmosferskom graničnom sloju	14
2.2.3. Empirijske relacije za modeliranje atmosferskog graničnog sloja	15
2.2.3.1. Logaritamski zakon (<i>Logarithmic law</i>)	15
2.2.3.2. Zakon potencije (<i>Power-law</i>)	16
3. Matematički model	17
3.1. Osnovne jednadžbe mehanike kontinuuma	17

3.1.1.	Reynolds Averaged Navier-Stokes (RANS) jednadžbe	18
3.1.2.	Modeliranje turbulencije	20
3.1.3.	Modeliranje turbulencije u blizini zida	21
3.1.3.1.	Standardna zidna funkcija	22
3.2.	Diskretizacija članova jednadžbi matematičkog modela	26
3.2.1.	Diskretizacija prostornih članova	28
3.2.1.1.	Diskretizacija konvekcijskog člana	29
3.2.1.2.	Diskretizacija difuzijskog člana	30
3.2.1.3.	Diskretizacija izvorskog i ponorskog člana	31
3.2.2.	Diskretizacija vremenskog (nestacionarnog) člana	31
3.3.	Algoritam za rješavanje sustava Navier-Stokesovih jednadžbi	32
3.3.1.	Diskretizirani sustav Navier-Stokesovih jednadžbi	32
3.3.2.	SIMPLE algoritam	33
3.4.	Novi matematički model za simulaciju atmosferskog graničnog sloja	35
3.4.1.	WS izvorski član	36
3.4.1.1.	Korekcija iznosa izvorskog člana	37
3.4.2.	Rubni uvjeti na vrhu računalne domene	38
3.4.3.	ABL zidna funkcija	39
4.	Numeričke postavke	41
4.1.	Računalna domena	41
4.2.	Prostorna diskretizacija računalne domene mrežom konačnih volumena	43
4.3.	Zadani rubni uvjeti	43
4.4.	Zadani parametri zidne funkcije	49
4.5.	Scheme diskretizacije korištene za simulaciju atmosferskog graničnog sloja	49
5.	Rezultati	50
5.1.	Ruralni tip terena	51
5.1.1.	Rezultati brzine $\bar{u}(y)$ za ruralni tip terena	51
5.1.2.	Rezultati naprezanja $R_{xy}(y)$ za ruralni tip terena	52
5.1.3.	Rezultati turbulentne kinetičke energije $k(y)$ za ruralni tip terena	53
5.2.	Suburbani tip terena	54
5.2.1.	Rezultati brzine $\bar{u}(y)$ za suburbani tip terena	54
5.2.2.	Rezultati naprezanja $R_{xy}(y)$ za suburbani tip terena	55
5.2.3.	Rezultati turbulentne kinetičke energije $k(y)$ za suburbani tip terena	56
5.3.	Urbani tip terena	57
5.3.1.	Rezultati brzine $\bar{u}(y)$ za urbani tip terena	57
5.3.2.	Rezultati naprezanja $R_{xy}(y)$ za urbani tip terena	58
5.3.3.	Rezultati turbulentne kinetičke energije $k(y)$ za urbani tip terena	59

6. Zaključak	60
6.1. Preporuke za daljnji rad	62
Dodatak A	64
Dodatak B	69
Literatura	72

Popis slika

Slika 1. Redovi veličina u prostoru i vremenu za različite uzorke strujanja u atmosferi [6]	4
Slika 2. Gibanje čestice fluida u geostrofičkom strujanju zraka [6]	6
Slika 3. Gibanje čestice fluida u strujanju zraka uslijed postojanja centrifugalne sile [6]	7
Slika 4. Strujanje zraka u atmosferskom graničnom sloju [6]	9
Slika 5. Ravnoteža sila koje djeluju na česticu fluida u atmosferskom graničnom sloju [6]	9
Slika 6. Shematski prikaz podjele atmosferskog graničnog sloja na slojeve i podslojeve od kojih se sastoji [25]	11
Slika 7. Interpretacija aerodinamičke duljine hrapavosti z_0 [6]	13
Slika 8. Formiranje atmosferskog graničnog sloja uslijed strujanja zraka nad površinom s gusto raspoređenim elementima površinske hrapavosti [6]	14
Slika 9. Primjer mjerenih i osrednjenih brzina na tri različite visine z [6]	15
Slika 10. Profili homogenog stacionarnog atmosferskog graničnog sloja iznad tri različita tipa terena dobiveni korištenjem zakona potencije [34]	16
Slika 11. Shematski prikaz bezdimenzijske brzine u ovisnosti o bezdimenzijskoj udaljenosti od zidne stijenke [45]	22
Slika 12. Proizvoljni konačni volumen [14]	26
Slika 13. Princip određivanja vrijednosti varijable Φ na stranicama kontrolnog volumena korištenjem linearne interpolacije	28
Slika 14. Shematski prikaz zračnog tunela u kojem su vršena mjerenja	41
Slika 15. Shematski prikaz računalne domene korištene za numeričke simulacije atmosferskog graničnog sloja	42
Slika 16. Shema računalne domene s prikazom definiranih <i>patch</i> -eva	42
Slika 17. Zadani rubni uvjeti za brzinu \bar{u}	44
Slika 18. Zadani rubni uvjeti za tlak p	45
Slika 19. Zadani rubni uvjeti za turbulentnu kinetičku energiju k	46
Slika 20. Zadani rubni uvjeti za disipaciju turbulentne kinetičke energije ε	47
Slika 21. Zadani rubni uvjeti za turbulentnu viskoznost ν_T	48
Slika 22. Mjesta u računalnoj domeni na kojima su vršena mjerenja izračunatih veličina	50
Slika 23. Normirani rezultati brzine $\bar{u}(y)$ za ruralni tip terena	51
Slika 24. Normirani rezultati naprezanja R_{xy} za ruralni tip terena	52
Slika 25. Rezultati turbulentne kinetičke energije k za ruralni tip terena	53
Slika 26. Normirani rezultati brzine $\bar{u}(y)$ za suburbani tip terena	54

Slika 27. Normirani rezultati naprezanja R_{xy} za suburbani tip terena	55
Slika 28. Rezultati turbulentne kinetičke energije k za suburbani tip terena	56
Slika 29. Normirani rezultati brzine $\bar{u}(y)$ za urbani tip terena	57
Slika 30. Normirani rezultati naprezanja R_{xy} za urbani tip terena	58
Slika 31. Rezultati turbulentne kinetičke energije k za urbani tip terena	59

Popis tablica

Tablica 1. Vrijednosti aerodinamičke duljine hrapavosti z_0 za različite tipove terena [6]	12
Tablica 2. Koeficijenti $k - \varepsilon$ modela turbulencije	21
Tablica 3. Koeficijenti $k - \varepsilon$ modela turbulencije korišteni u novom modelu	36
Tablica 4. Parametri eksponencijalnog zakona korištenog za definiranje početnih uvjeta za brzinu $\bar{u}(y)$	44
Tablica 5. Parametri zidne funkcije korišteni za simulaciju atmosferskog graničnog sloja (Juretić i Kozmar [21])	49
Tablica 6. Korištene sheme diskretizacija članova jednadžbi modela	49

Popis oznaka

Latinska slova

Oznaka	Jedinica	Opis
a	–	Općeniti vektor
a_N	–	Vrijednost koeficijenta u centru N susjednog konačnog volumena
a_P	–	Vrijednost koeficijenta u centru P konačnog volumena
A	–	Općeniti tenzor
b	–	Općeniti vektor
B	–	Empirijska konstanta zidne funkcije
B	–	Općeniti tenzor
c	–	Općeniti vektor
C_1	–	Konstanta modela turbulencije
C_2	–	Konstanta modela turbulencije
C_d	–	Korekcijski faktor
C_μ	–	Konstanta modela turbulencije
d	m	Debljina istisnuća atmosferskog graničnog sloja
\mathbf{d}_f	m	Vektor koji spaja centar P i centar N susjednog volumena
\mathbf{d}_N	m	Vektor udaljenosti od centra P do centra susjednog volumena N
E	–	Parametar hrapavosti podloge
f_c	s^{-1}	Coriolisov parametar
F	$\frac{m^3}{s}$	Protok (fluks) kroz stranicu konačnog volumena
G	–	Simetrični tenzor drugog reda
I	–	Jedinični tenzor
k	$\frac{m^2}{s^2}$	Turbulentna kinetička energija
n	–	Vektor normale

Oznaka	Jedinica	Opis
p	Pa	Tlak (Skalarno polje tlaka)
\bar{p}	Pa	Polje osrednjene komponente tlaka
p'	Pa	Polje fluktuacijske komponente tlaka
p_{eff}	Pa	Efektivni tlak
p^{new}	Pa	Tlak u novom vremenskom koraku
p^{old}	Pa	Tlak u prošlom vremenskom koraku
P	$\frac{\text{m}^2}{\text{s}^3}$	Izvorski član u modelu turbulencije
P_{P}	$\frac{\text{m}^2}{\text{s}^3}$	Vrijednost turb. izvorskog člana u centru prvog volumena uz zid
R_{xy}	$\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$	Numerička vrijednost naprezanja
$R_{\text{xy}}^{\text{exp}}$	$\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$	Eksperimentalne vrijednosti naprezanja
r	m	Radijus zakrivljenosti izobara
\mathbf{r}_{P}	m	Vektor položaja težišta konačnog volumena
S_{Φ}	–	Općeniti izvorski/ponorski član
\mathbf{s}_{f}	m^2	Površinski vektor definiran u centru stranice konačnog volumena
S_{P}	–	Vrijednost izvorskog/ponorskog člana u centru konačnog volumena
t	s; –	Vrijeme; Faktor linearne korekcije
u	m/s	Brzina strujanja u horizontalnom smjeru
\bar{u}	m/s	Srednja brzina strujanja u horizontalnom smjeru
u'	m/s	Fluktuacijski dio brzine u horizontalnom smjeru
$\overline{u'v'}$	$\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$	Komponenta Reynoldsovog tenzora naprezanja
u^+	–	Bezdimenzijska brzina
\bar{u}_{P}	m/s	Srednja brzina strujanja u centru prvog volumena uz zid
\bar{u}_{ref}	m/s	Srednja brzina strujanja na referentnoj visini
\bar{u}_{t}	m/s	Osrednjena brzina paralelna sa zidom
u_{τ}	m/s	Brzina trenja
\mathbf{U}	m/s	Vektor polja brzine
$\bar{\mathbf{U}}$	m/s	Vektor polja osrednjene komponente brzine
$\bar{\mathbf{U}}_{\text{P}}^{\circ}$	m/s	Polje brzine iz prethodne iteracije

Oznaka	Jedinica	Opis
U'	m/s	Vektor polja fluktuacijske komponente brzine
U_f	m/s	Vektor brzine na stranici konačnog volumena
U_{geo}	m/s	Geostrofička brzina strujanja
U_{gr}	m/s	Brzina kod strujanja uslijed postojanja centrifugalne sile
$\overline{U'U'}$	$\frac{m^2}{s^2}$	Reynoldsov tenzor naprezanja
v	m/s	Brzina strujanja u lateralnom smjeru
\bar{v}	m/s	Srednja brzina strujanja u lateralnom smjeru
v'	m/s	Fluktuacijski dio brzine u lateralnom smjeru
V_P	m^3	Volumen konačnog volumena
w	m/s	Brzina strujanja u vertikalnom smjeru
\bar{w}	m/s	Srednja brzina strujanja u vertikalnom smjeru
w'	m/s	Fluktuacijski dio brzine u vertikalnom smjeru
w_N	1/m	Težinski faktor
$W_{s,x}$	$\frac{m}{s^2}$	Komponenta vektora izvorskog člana
WS	$\frac{m}{s^2}$	Vektor izvorskog člana
$W_{s,x}^{corrected}$	$\frac{m}{s^2}$	Korekcija izvorskog člana
$W_{s,x}^{new}$	$\frac{m}{s^2}$	Nova vrijednost izvorskog člana
$W_{s,x}^{old}$	$\frac{m}{s^2}$	Stara vrijednost izvorskog člana
\mathbf{x}	m	Vektor položaja
y	m	Koordinata visine u matematičkom modelu
y^+	–	Bezdimenzijska udaljenost od zida
y_P	m	Udaljenost centra prvog volumena od zida
y_P^+	–	Bezdimenzijska udaljenost prvog centra volumena od zida
z	m	Koordinata visine iznad podloge u teorijskom dijelu rada
z_0	m	Aerodinamička duljina hrapavosti
z_{ref}	m	Referentna visina

Grčka slova

Oznaka	Jedinica	Opis
α	–; –	Eksponent zakona potencije; Općeniti skalar
α_p	–	Podrelaksacijski faktor za tlak
α_u	–	Podrelaksacijski faktor za brzinu
β	–	Općeniti skalar
Γ_{Φ}	$\frac{\text{m}^2}{\text{s}}$	Koeficijent difuzije
κ	–	Von Kármánova konstanta
δ	m	Debljina atmosferskog graničnog sloja
ε	$\frac{\text{m}^2}{\text{s}^3}$	Disipacija turbulentne kinetičke energije
ε_P	$\frac{\text{m}^2}{\text{s}^3}$	Vrijednost ε u centru prvog volumena od zida
λ	°	Zemljopisna širina
μ	Pa · s	Dinamička viskoznost
ν	$\frac{\text{m}^2}{\text{s}}$	Kinematska viskoznost
ν_T	$\frac{\text{m}^2}{\text{s}}$	Turbulentna kinematska viskoznost
ν_{eff}	$\frac{\text{m}^2}{\text{s}}$	Efektivna kinematska viskoznost
ρ	kg/m ³	Gustoća fluida
σ	$\frac{\text{kg}}{\text{ms}^2}$	Tenzor naprezanja
Σ	$\frac{\text{kg}}{\text{ms}^2}$	Simetrični tenzor viskoznih naprezanja
σ_k	–	Konstanta modela turbulencije
σ_ε	–	Konstanta modela turbulencije
τ_0	$\frac{\text{kg}}{\text{ms}^2}$	Posmično naprezanje na površini
τ_w	$\frac{\text{kg}}{\text{ms}^2}$	Naprezanje na zidu
Φ	–	Općenito skalarno polje
Φ_f	–	Vrijednost polja Φ u centru stranice konačnog volumena
Φ_N	–	Vrijednost polja Φ u centru susjednog konačnog volumena
Φ_P	–	Vrijednost polja Φ u centru konačnog volumena
Φ^n	–	Vrijednost polja Φ u novom vremenskom koraku

Oznaka	Jedinica	Opis
Φ^o	–	Vrijednost polja Φ u prošlom vremenskom koraku
ω	rad/s	Kutna brzina rotacije Zemlje

Skraćenice

ABL – *Atmospheric boundary layer*

AGS – *Atmosferski granični sloj*

CFD – *Computational Fluid Dynamics*

DNS – *Direct Numerical Simulation*

LES – *Large Eddy Simulation*

RANS – *Reynolds Averaged Navier-Stokes Equations*

RDF – *Računalna dinamika fluida*

SIMPLE – *Semi-Implicit Method for Pressure Linked Equations*

Sažetak

Mihael Cindori

NOVA METODA ZA RAČUNALNO MODELIRANJE ATMOSFERSKOG GRANIČNOG SLOJA

U ovom radu predložena je nova metoda za računalno modeliranje stacionarnog homogenog atmosferskog graničnog sloja koristeći računalnu dinamiku fluida. Metoda se temelji na uvođenju novog izvorskog člana u jednadžbu količine gibanja čija je glavna svrha postizanje homogenog strujanja u graničnom sloju. Početna vrijednost izvorskog člana se računa korištenjem eksperimentalnih vrijednosti naprezanja dobivenih simulacijom atmosferskog graničnog sloja u zračnom tunelu. S ciljem postizanja strujanja što sličnijeg eksperimentu, tijekom proračuna je vršena korekcija vrijednosti izvorskog člana. U radu je modeliran atmosferski granični sloj mjeren u zračnom tunelu.

Za modeliranje turbulencije je korišten standardni $k - \varepsilon$ model turbulencije uz izmjenjene vrijednosti koeficijenata modela.

Točnost računalnog modela je provjerena na ruralnom, suburbanom i urbanom tipu terena, te su u radu dani rezultati za brzinu, naprezanje i turbulentnu kinetičku energiju dobiveni na tri različita mjesta u računalnoj domeni (na ulazu i izlazu, te u sredini domene). Na taj način je pokazano da novi model omogućuje modeliranje homogenog atmosferskog graničnog sloja, te su greške simulacije u većini domene manje od $\pm 10\%$.

Ključne riječi: *Stacionarni homogeni atmosferski granični sloj, računalna dinamika fluida, stacionarni $k - \varepsilon$ model turbulencije*

Summary

Mihael Cindori

A NOVEL METHOD FOR COMPUTATIONAL MODELLING OF THE ATMOSPHERIC BOUNDARY LAYER

A novel approach for computational modelling of the steady-state neutrally-stratified atmospheric boundary layer was introduced in this work. The approach is based on the introducing of a new source term in the momentum equation, implemented to establish the homogeneous characteristics of the flow. The initial value of the term is calculated from experimental stress values and the corrections were applied during the calculation in order to obtain exact results. The atmospheric boundary layer, modelled in this work, was previously established and measured in a wind tunnel.

Turbulence is modelled by using the standard $k - \varepsilon$ turbulence model with modified coefficients. A new model was validated on the rural, suburban and urban terrain and computational results for velocity, stress and turbulent kinetic energy were sampled at inlet, outlet and middle part of the computational domain. Thus, it is shown that new approach can be used for simulations of the steady-state neutrally-stratified atmospheric boundary layer with errors not larger than $\pm 10\%$ in most parts of the computational domain.

Key words: *Steady-state neutrally-stratified atmospheric boundary layer, computational modelling, steady RANS, $k - \varepsilon$ turbulence model*

1. Uvod

Pojave vezane uz atmosferu su kroz povijest bile dio istraživanja mnogih znanstvenika. U drugoj polovici 20. stoljeća se pojavila potreba za eksperimentalnim modeliranjem atmosferskog graničnog sloja (AGS-a) u zračnim tunelima. Razlog tome jest napredak u području građevinskog inženjeringa, te gradnja sve viših nebodera i zgrada. Također se eksperimentalnim putem teži objasniti uzrok nastanka raznih oblika lokaliziranih strujanja u atmosferi (poput tornada, *down burst*-a, bure, itd.), te utjecaj takvih strujanja na građevinske objekte (zgrade, nebodere, vijadukte).

Osim utjecaja atmosferskih pojava na građevinske objekte, područje mnogih istraživanja je i disperzija štetnih tvari u velikim industrijskim središtima. Naime, gomilanje štetnih plinova i čestica nastalih kao produkt industrijske djelatnosti može dovesti do velikih ekoloških problema, ali i predstavljati veliku opasnost za ljude koji žive blizu takvih industrijskih područja. U najnovije se vrijeme javlja i potreba za numeričkim modeliranjem atmosferskog graničnog sloja. Naime, računala i računalni programi su s vremenom postali sve dostupniji i financijski pristupačniji što omogućuje korištenje računalne dinamike fluida (RDF-a) u istraživanju atmosferskih pojava. Takav pristup istraživanju jest mnogo jeftiniji ako se koriste besplatni računalni programi (OpenFOAM®, *in-house* algoritmi i ostali).

1.1. Pregled literature

Eksperimentalne metode za simulacije atmosferskog graničnog sloja (Irwinova metoda [13] i Counihanova metoda [3][4][5]) u zračnom tunelu su se do sada pokazale pouzdanim i omogućuju dobra poklapanja s podacima mjerenima u prirodi. Kao što je već spomenuto, računalna dinamika fluida se sve više primjenjuje u modeliranju atmosferskog graničnog sloja. Iako se LES model turbulencije pokazao jako dobrim za modeliranje nestacionarnih strujanja u AGS-u [39], još se uvijek najviše koriste standardni RANS modeli turbulencije [30], od kojih je najviše prihvaćen standardni $k - \varepsilon$ model turbulencije. No do sada još uvijek u potpunosti nije riješen problem izbora pravih vrijednosti parametara turbulencije za model turbulencije, kao ni problem homogenosti strujanja u horizontalnom smjeru.

Problem nehomogenosti strujanja je bio dio mnogih istraživanja u prošlosti. Tako su npr. Blocken i ostali [2] pretpostavili da su greške uzrokovane zbog nepoklapanja zidnih funkcija s profilima brzina zadanim kao rubni uvjet na ulazu u domenu, dok su Riddle i ostali [38] zaključili kako greške u rješenjima mogu biti smanjene korištenjem *second order closure* modela turbulencije. Yang i ostali [43] su razvili nove i općenitije ulazne profile za rubne uvjete, dok su s ciljem smanjenja gradijenata u smjeru strujanja, Blocken i ostali [2] zaključili kako je važno provesti testove osjetljivosti u praznoj domeni, te pritom obratiti pozornost na slučajne profile fizikalnih veličina koji se eventualno pojavljuju u domeni (a ne samo ulazne profile), s obzirom da oni mogu biti indikator stvarnog strujanja kojem će građevinski objekti u stvarnosti biti izloženi. Blocken i ostali [1] su također zaključili kako su se standardne zidne funkcije koje u obzir uzimaju hrapavost, a koje se nalaze u većini računalnih programa za rješavanje atmosferskog graničnog sloja, pokazale nedovoljno dobrima za njegovo modeliranje.

Nekoliko različitih autora je naglasilo važnost zadavanja valjanih rubnih uvjeta na gornjem dijelu računalne domene (Richards and Hoxey [37], Blocken i ostali [2], Franke i ostali [9], Hargreaves i Wright [12], te Yang i ostali [43]). Nadalje Yang i ostali [43] su predložili horizontalno homogeni profil turbulentne kinetičke energije (promjenjiv s visinom), a koji se ne mijenja po duljini domene. Gorle i ostali [10] su postigli homogenost strujanja i smanjenje turbulentne

kinetičke energije s visinom tako da su konstantu σ_ϵ standardnog $k - \epsilon$ modela turbulencije zadali kao funkciju ovisnu o visini. Parente i ostali [31][32] su predložili novu formulaciju zidne funkcije koja u obzir uzima hrapavost, te dodali dodatni izvorski član u transportne jednadžbe turbulentne kinetičke energije i disipacije turbulentne kinetičke energije s ciljem izjednačavanja turbulentne produkcije i disipacije.

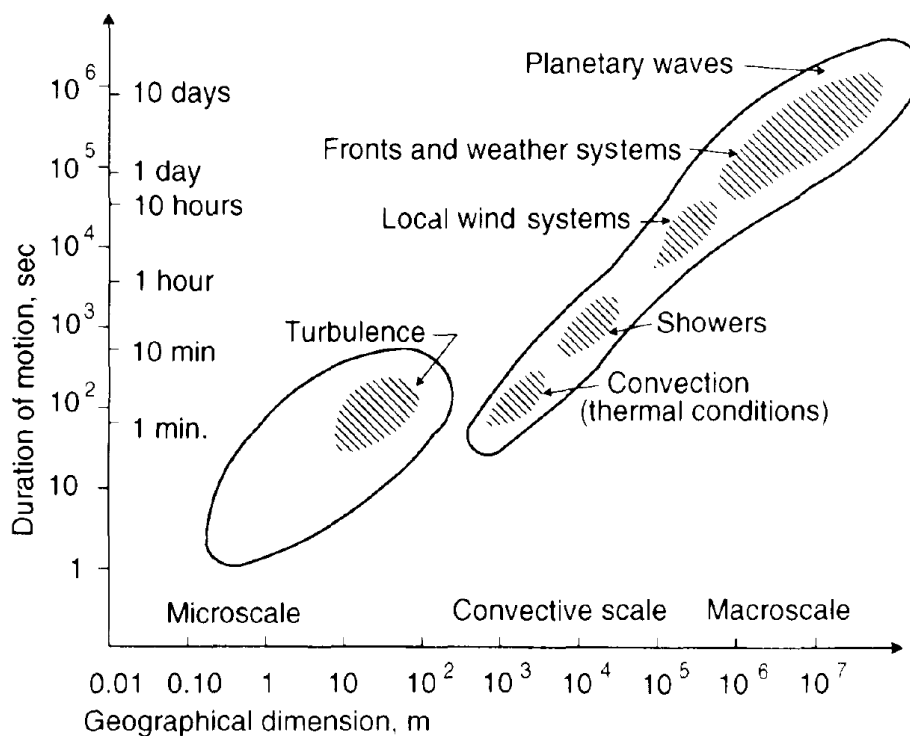
Juretić i Kozmar [21] su pokazali da se koristeći $k - \epsilon$ model turbulencije može modelirati parametre turbulencije u atmosferskom graničnom sloju s visinom domene uz zanemarivu grešku. Pritom su koristili novi pristup modeliranju koji se bazira na Reynoldsovom naprežanju u praznoj računalnoj domeni, gdje se numerički oponašaju uvjeti postignuti u zračnom tunelu za ruralni, suburbani i urbani tip terena, uz automatsku regulaciju tlaka uzduž računalne domene.

1.2. Cilj rada

S obzirom na navedena istraživanja i problematiku numeričkog modeliranja atmosferskog graničnog sloja, cilj rada je razvoj nove metode bazirane na standardnim algoritmima računalne dinamike fluida, kojom će biti moguće reproducirati fizikalne uvjete koji vladaju u atmosferskom graničnom sloju točnije nego što je to slučaj s trenutno dostupnim metodama. Ideja je uključiti dodatni izvorski (ponorski) član u jednadžbu količine gibanja, čija bi se vrijednost računala iz eksperimentalnih podataka dobivenih mjerenjima u zračnom tunelu. Na taj način bi se omogućila potpuna homogenost strujanja i turbulencije duž čitave duljine računalne domene za sva tri tipa terena (ruralni, suburbani i urbani).

2. Teorija atmosferskog graničnog sloja

Strujanje u atmosferi je skup različitih uzoraka turbulentnog strujanja koja su međusobno neovisna u vremenu i prostoru. Takva strujanja mogu varirati od kratkotrajne turbulencije (nastaju vrtlozi veličine nekoliko metara) trajanja do nekoliko minuta, pa do velikih olujnih sustava i planetarnih strujanja u višim slojevima atmosfere koja se mogu prostirati čitavim opsegom Zemlje (mogu trajati i do nekoliko dana). Takve atmosferske pojave se mogu promatrati na mikroskali, konvektivnoj skali, te makroskali [6]. Na Slika 1. je dan prikaz takvih strujanja s prostornom veličinom na apscisi i vremenom trajanja na ordinati.



Slika 1: Redovi veličina u prostoru i vremenu za različite uzorke strujanja u atmosferi [6]

2.1. Atmosfersko strujanje

Strujanje zraka u atmosferi se naziva vjetar. Uzrok nastajanju vjetra su razlike u tlaku u atmosferi, a vjetar svojim strujanjem ponovno može generirati značajne promjene u atmosferskom tlaku. Upravo se iz tog razloga na te dvije pojave ne može gledati odvojeno, s obzirom da jedna ovisi o drugoj i obratno.

Kako bi se dobro procijenilo strujanje u atmosferskom graničnom sloju, koriste se brzina i smjer vjetra na visinama od oko $z = 1$ km. Naime, pri takvim visinama se utjecaj površine Zemlje može zanemariti i strujanje je većinom jednodimenzionalno (osim ako se u blizini ne nalaze lokalna područja visokog ili niskog tlaka). Takvo strujanje zraka koje ovisi isključivo o horizontalnom gradijentu tlaka i utjecaju Coriolisove sile (zbog Zemljine rotacije) nazivamo geostrofičko strujanje ili geostrofički vjetar (engl., *geostrophic wind*).

2.1.1. Geostrofičko strujanje ili geostrofički vjetar (*geostrophic wind*)

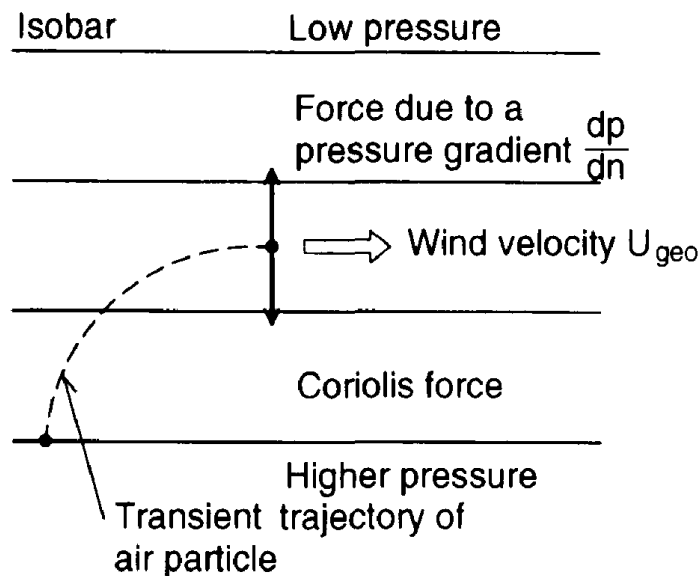
Na Slika 2. prikazana je čestica fluida koja ubrzava sve dok se ne postigne ravnoteža između sile uzrokovane zbog postojanja gradijenta tlaka i Coriolisove sile koja na česticu djeluje zbog Zemljine rotacije. Kao što Slika 2. prikazuje, čestica zraka se ubrzava od područja višeg prema području nižeg tlaka pod djelovanjem gradijenta tlaka. No uslijed djelovanja Coriolisove sile njezina putanja je izmjenjena. Nakon uspostavljenе ravnoteže, obje sile su jednakog iznosa, suprotnog smjera, te okomite na smjer gibanja čestice fluida. Jasno je da će se u trenutku uspostavljanja ravnoteže sila čestica fluida gibati konstantnom brzinom U_{geo} , koja se može izračunati pomoću sljedeće relacije:

$$U_{\text{geo}} = \frac{1}{\rho f_c} \frac{\partial p}{\partial n}, \quad (2.1)$$

gdje ρ gustoća fluida koji struji (zraka), $\frac{\partial p}{\partial n}$ gradijent tlaka, a f_c Coriolisov parametar koji se računa kao:

$$f_c = 2\omega \sin \lambda. \quad (2.2)$$

U jednadžbi (2.2) ω predstavlja kutnu brzinu rotacije Zemlje ($\omega = 7.27 \cdot 10^{-5}$ rad/s), dok λ predstavlja zemljopisnu širinu.



Slika 2: Gibanje čestice fluida u geostrofičkom strujanju zraka [6]

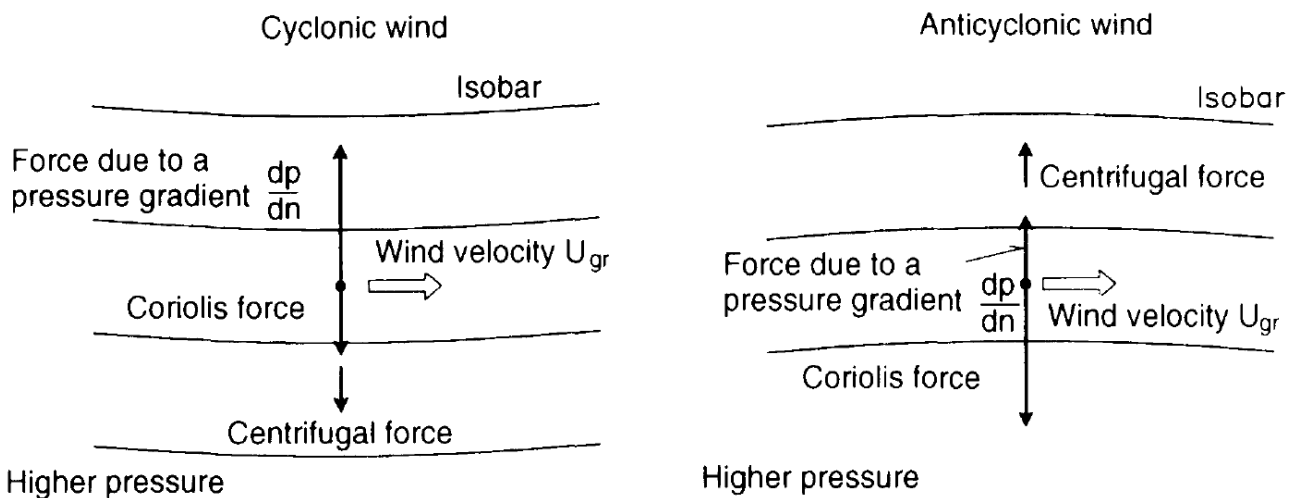
Geostrofičko strujanje zraka će se moći održati sve dok je sustav izobara isti. To znači da takvo strujanje ne utječe na razliku tlaka, te za njegovo održavanje nije potreban dodatan energetski izvor.

Geostrofičko strujanje se javlja u slučajevima kada je radijus zakrivljenosti izobara toliko velik da se centrifugalna sila može zanemariti. Ukoliko je radijus zakrivljenosti malen (manji od nekoliko tisuća kilometara), centrifugalna sila mora biti uzeta u obzir, te se u tome slučaju radi o strujanju uslijed djelovanja centrifugalne sile (engl., *gradient wind*).

2.1.2. Strujanje uslijed djelovanja centrifugalne sile (*gradient wind*)

Na Sliku 3. su prikazane sile koje djeluju na česticu fluida u slučaju strujanja uslijed djelovanja centrifugalne sile. Može se primjetiti da u slučaju postojanja ciklonalnog strujanja oko područja niskog tlaka, sila uslijed gradijenta tlaka koja djeluje na česticu zraka jednaka je zbroju centrifugalne i Coriolisove sile (koje su obrnutog smjera u odnosu na silu uslijed gradijenta tlaka).

Ukoliko postoji anticiklonalno strujanje oko područja visokog tlaka, Coriolisova sila jednaka je zbroju obrnuto usmjerenih sila uslijed postojanja gradijenta tlaka, te centrifugalne sile. Jasno je kako će u slučaju ovakvog strujanja brzina i smjer vjetra biti uvjetovani ne samo gradijentom tlaka i Coriolisovom silom, već i postojanjem dodatne centrifugalne sile, pa se iz toga razloga ovakvo strujanje naziva strujanjem uslijed djelovanja centrifugalne sile (engl., *gradient wind*).



Slika 3: Gibanje čestice fluida u strujanju zraka uslijed postojanja centrifugalne sile [6]

Jednadžba gibanja ovakvog strujanja u polarnim koordinatama glasi:

$$\pm \frac{U_{gr}^2}{r} + f_c U_{gr} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n}. \quad (2.3)$$

Pritom se predznak + odnosi na ciklonalno strujanje, dok se – odnosi na anticiklonalno strujanje, a varijabla r predstavlja radijus zakrivljenosti izobara. Brzina strujanja uslijed djelovanja

centrifugalne sile u ciklonalnom strujanju se može odrediti koristeći sljedeću relaciju:

$$U_{\text{gr}} = -\frac{f_c r}{2} + \sqrt{\left(\frac{f_c r}{2}\right)^2 + \frac{r}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n}}, \quad (2.4)$$

te za anticiklonalno strujanje:

$$U_{\text{gr}} = +\frac{f_c r}{2} - \sqrt{\left(\frac{f_c r}{2}\right)^2 - \frac{r}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n}}. \quad (2.5)$$

Za ciklonalno strujanje je moguće geostrofičku brzinu U_{geo} izraziti u ovisnosti o brzini uslijed djelovanja centrifugalne sile U_{gr} :

$$U_{\text{geo}} = U_{\text{gr}} \left(1 + \frac{U_{\text{gr}}}{f_c r}\right), \quad (2.6)$$

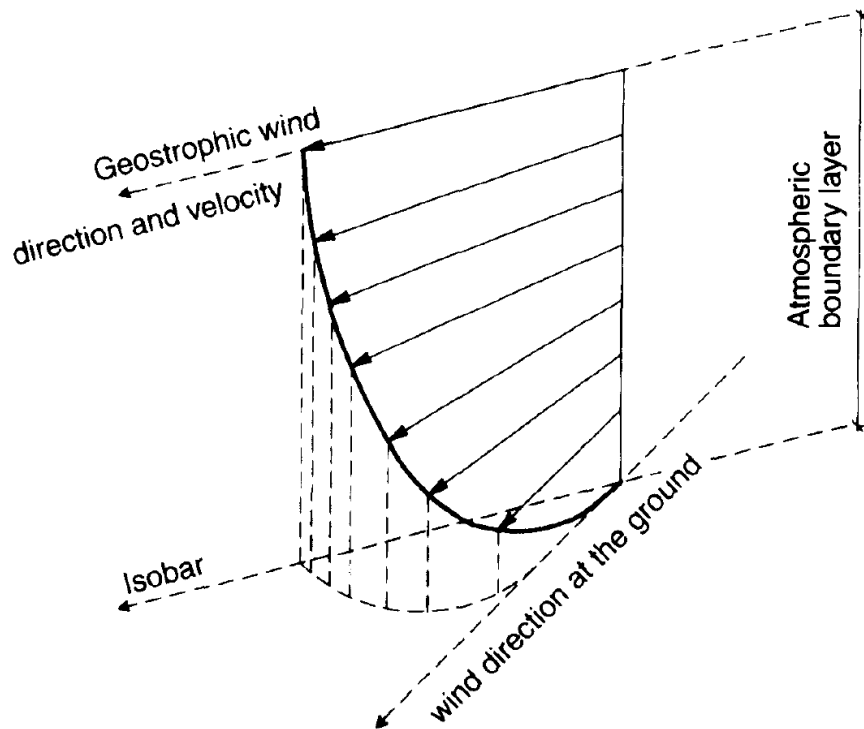
iz čega slijedi da je $U_{\text{gr}} < U_{\text{geo}}$.

2.1.3. Utjecaj strujanja u višim dijelovima atmosfere na formiranje atmosferskog graničnog sloja

Utjecaj vjetra opada s visinom čemu je uzrok djelovanje površine. Naime, brzina strujanja na površini Zemlje je jednaka nuli. Utjecaj površine se postupno gubi, te se potpuno može zanemariti na visinama koje odgovaraju debljini atmosferskog graničnog sloja. Upravo su te visine (obično oko $z = 1$ km) one na kojima se formiraju gore opisana strujanja (*geostrophic wind* i *gradient wind*), a koje su više od debljine atmosferskog graničnog sloja.

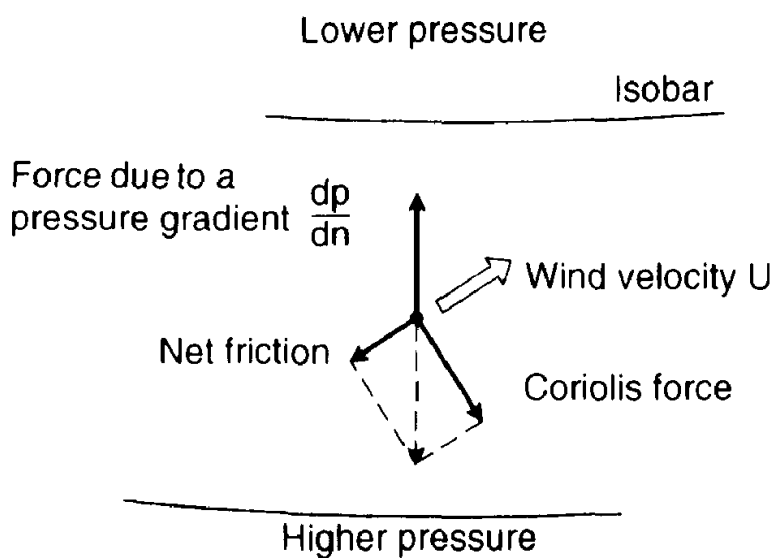
Kao što Slika 4. prikazuje, brzina strujanja se smanjuje s opadanjem visine, a atmosferski granični sloj je zakrivljen u odnosu na izobare. Uzrok zakrivljenosti jest ravnoteža sila koje djeluju na čestice fluida koje struje. Naime, smjer strujanja se postupno mijenja s opadanjem visine, a brzina strujanja postupno opada (na površini je jednaka nuli). Coriolisova sila raste s porastom visine, dok se sila trenja (zbog otpora površine strujanju) smanjuje, te se granični sloj zakrivljuje. Ako bi se promatrala čestica fluida na više proizvoljno odabranih visina z , u

svakom presjeku bi bila zadovoljena ravnoteža između Coriolisove sile, sile uslijed postojanja gradijenta tlaka, te sile trenja uzrokovane otporom tla prema strujanju.



Slika 4: Strujanje zraka u atmosferskom graničnom sloju [6]

Shematski prikaz ravnoteže sila koje djeluju na česticu fluida u atmosferskom graničnom sloju je dan na Slika 5.



Slika 5: Ravnoteža sila koje djeluju na česticu fluida u atmosferskom graničnom sloju [6]

2.2. Atmosferski granični sloj

Atmosferski granični sloj je najniži sloj Zemljine atmosfere koji se često naziva troposferom, a čija su svojstva u direktnoj interakciji s površinom Zemlje. Upravo iz toga razloga se atmosferski granični sloj često u literaturi definira kao sloj zraka u blizini Zemljine površine unutar kojeg efekti na površini (poput trenja, grijanja i hlađenja) uzrokuju izmjenu količine gibanja, energije i mase putem turbulentnog strujanja reda veličine debljine graničnog sloja ili manje, a vremenskog su trajanja kraćeg od jednog dana [25].

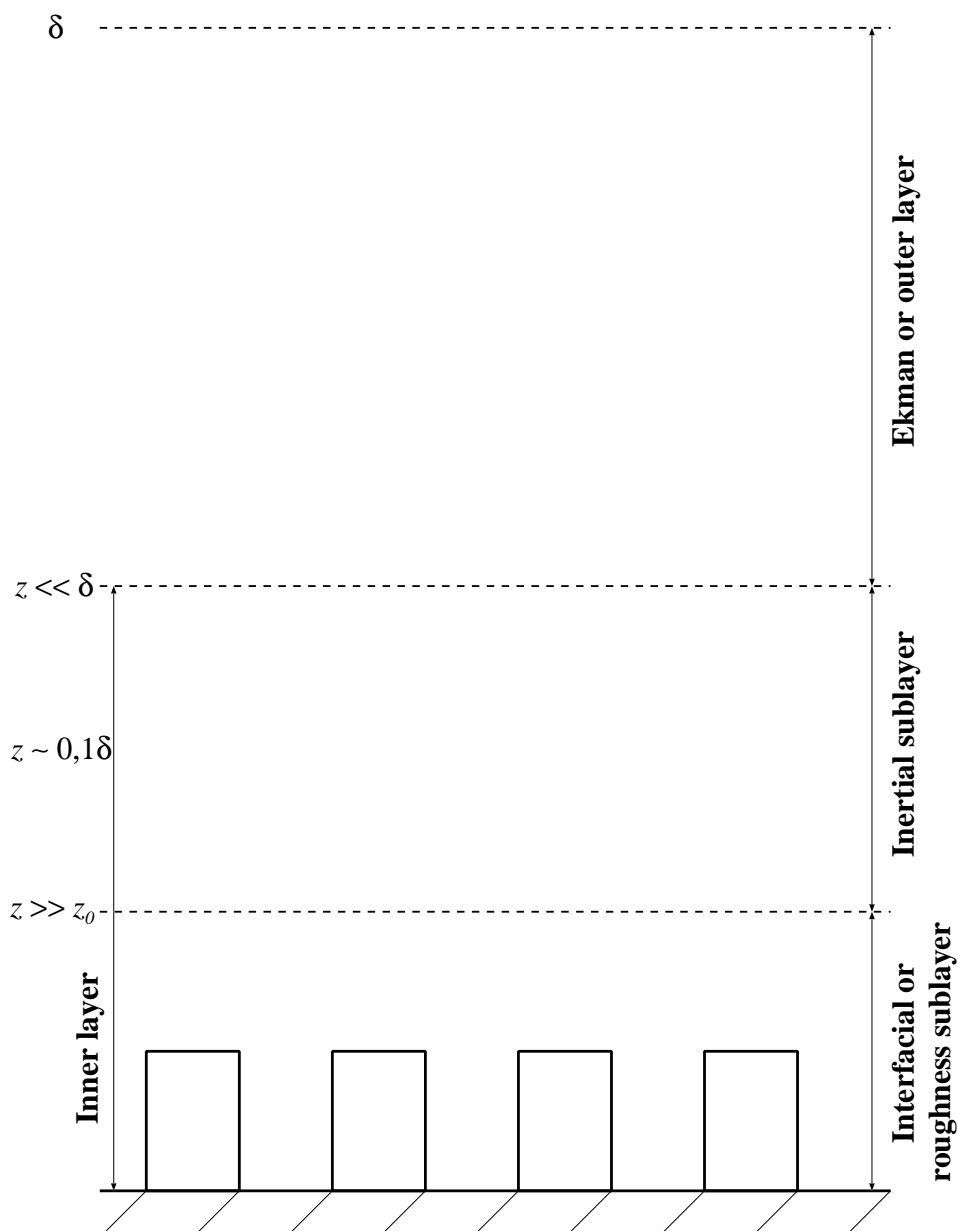
U ovom radu će temelj numeričkog istraživanja biti stacionarni homogeni atmosferski granični sloj, što znači da će brzina i ostale fizikalne i turbulentne veličine biti neovisne o vremenu i jednake (uniformne) u horizontalnom smjeru (smjeru strujanja). Homogeni atmosferski granični sloj je teoretski granični sloj koji bi se razvio strujanjem iznad beskonačno duge ravne površine. U tome slučaju se može pretpostaviti horizontalna homogenost fizikalnih veličina. No takav granični sloj se formira i u stvarnosti, a najsličniji je prilikom strujanja iznad morske površine (taj teren je najsličniji modelu beskonačne ravne površine). Također je moguće njegovo formiranje iznad ravne površine s jednolikom vegetacijom ili jednolikom strukturom objekata na tlu. Pretpostavkom horizontalne homogenosti moguće je zanemariti sve promjene u horizontalnom smjeru (smjeru strujanja), čime se jednadžbe matematičkog modela znatno pojednostavljaju. Uvjet horizontalne homogenosti pretpostavlja i uvjet stacionarnosti strujanja, što znači da su sve veličine strujanja neovisne o vremenu [23].

2.2.1. Struktura atmosferskog graničnog sloja

Atmosferski granični sloj se općenito može podijeliti na unutarnji (engl. *inner layer*) i vanjski ili Ekmanov sloj (engl. *outer or Ekman layer*). Nadalje, unutarnji sloj se dodatno može podijeliti na inercijalni podsloj (engl. *inertial sublayer*), te prijelazni podsloj (engl. *interfacial or roughness sublayer*). Svaki od navedenih slojeva ima turbulentne karakteristike strujanja koje ga definiraju i razlikuju od ostalih. Jedina posebna iznimka je vanjski ili Ekmanov sloj. Na-

ime, strujanje u tom sloju je prvenstveno pod utjecajem Zemljine rotacije, odnosno Coriolisove sile. Strujanje u ostalim slojevima je direktno pod utjecajem Zemljine površine, te se utjecaj Coriolisove sile u njima može zanemariti.

U ovom radu će se računalno modelirati upravo unutarnji dio atmosferskog graničnog sloja koji je pod direktnim utjecajem površine, te se utjecaj ostalih sila u njemu može zanemariti.



Slika 6: Shematski prikaz podjele atmosferskog graničnog sloja na slojeve i podslojeve od kojih se sastoji [25]

Strujanje u unutarnjem sloju je u potpunosti pod utjecajem Zemljine površine, a proteže se do približno $z = 100$ m (10–15% debljine atmosferskog graničnog sloja). Kao što je već spomenuto, unutarnji sloj se dijeli na prijelazni i inercijalni podsloj. Brzina promjene mase, količine gibanja i energije u inercijalnom podsloju je najviše uzrokovana turbulentnim naprezanjem, dok se promjena uslijed molekularne difuzije može zanemariti. U prijelaznom podsloju je brzina promjene mase, količine gibanja i energije prvenstveno uvjetovana molekularnom difuzijom, a upravo je hrapavost Zemljine površine glavni generator turbulentnog strujanja koji daje takve karakteristike strujanja u tome podsloju. Prijelazni podsloj se obično proteže do visine malo više od građevinskih objekata koji su smješteni u području strujanja (npr. zgrade, neboderi, mostovi, itd.).

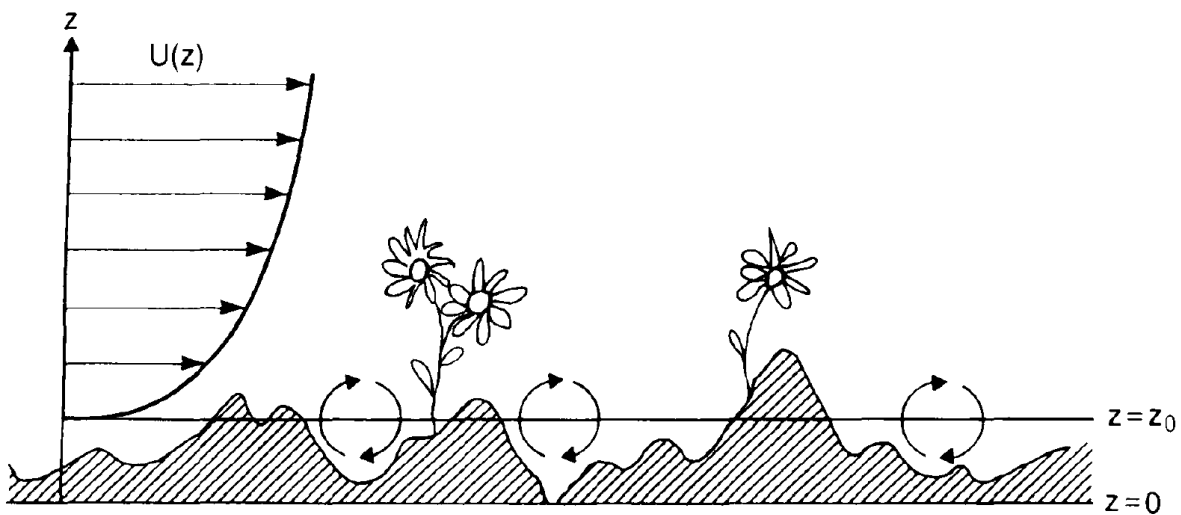
Pokazano je da je prosječna debljina atmosferskog graničnog sloja δ približno jednaka $\delta = 600$ m za svaki tip terena (ruralni, suburbani i urbani). Uz debljinu atmosferskog graničnog sloja δ , postoje još dvije važne veličine koje definiraju njegove karakteristike. Prva je visina iznad podloge z , a druga aerodinamička duljina hrapavosti z_0 . Podjela atmosferskog graničnog sloja u specifične slojeve i podslojeve je prikazana na Slika 6.

2.2.1.1. Aerodinamička duljina hrapavosti z_0

Tablica 1. Vrijednosti aerodinamičke duljine hrapavosti z_0 za različite tipove terena [6]

z_0 (m)	Tip terena
10^{-5}	Glatke ledene površine
10^{-4}	Otvoreno mirno more
10^{-3}	Priobalna područja
0.01	Otvorena polja s rijetkom vegetacijom i malo građevinskih objekata
0.05	Poljoprivredna područja s malo građevinskih objekata
0.3	Sela i poljoprivredna područja s više građevinskih objekata
1 – 10	Urbana područja

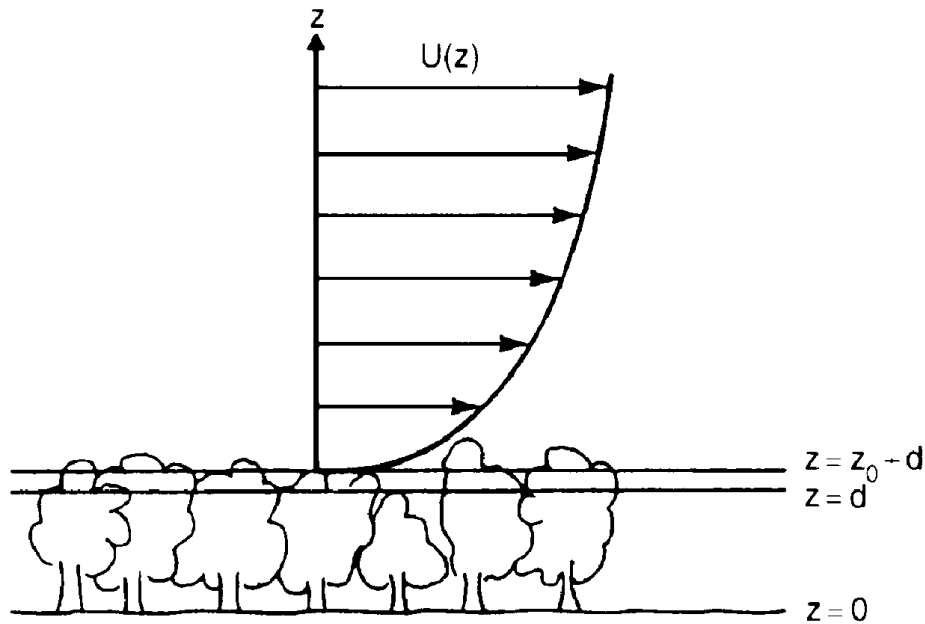
Aerodinamička duljina hrapavosti se može interpretirati kao visina iznad tla (pri $z = 0$) gdje je srednja brzina strujanja jednaka nuli ($u(z) = 0$). Pojednostavljeno se također može interpretirati i kao veličina vrtloga koji su formirani zbog interakcije između površine i sloja zraka [6]. Vrijednosti aerodinamičke duljine hrapavosti z_0 se razlikuju za različite tipove terena, te su u Tablica 1. dane vrijednosti dobivene mjerenjima. Na Slika 7. je dan prikaz pojednostavljenog strujanja s interpretacijom aerodinamičke duljine hrapavosti z_0 .



Slika 7: Interpretacija aerodinamičke duljine hrapavosti z_0 [6]

2.2.1.2. Debljina istisnuća atmosferskog graničnog sloja d

U slučaju strujanja zraka nad površinama s gusto naslaganim elementima površinske hrapavosti (gustom vegetacijom, stambenim četvrtima, itd.), cijeli atmosferski granični sloj je pomaknut (istisnut) u vertikalnom smjeru. U tom slučaju se ne može zanemariti veličina d koja predstavlja debljinu istisnuća atmosferskog graničnog sloja, a za koju se obično uzima da je jednaka visini elemenata površinske hrapavosti. Na Slika 8. je dan prikaz formiranja novog atmosferskog graničnog sloja uslijed nastrojavanja nad površinom s gustom vegetacijom (šumom). Novi granični sloj će se formirati na visini koja predstavlja razliku aerodinamičke duljine hrapavosti i debljine istisnuća ($z_0 - d$).



Slika 8: Formiranje atmosferskog graničnog sloja uslijed strujanja zraka nad površinom s gusto raspoređenim elementima površinske hrapavosti [6]

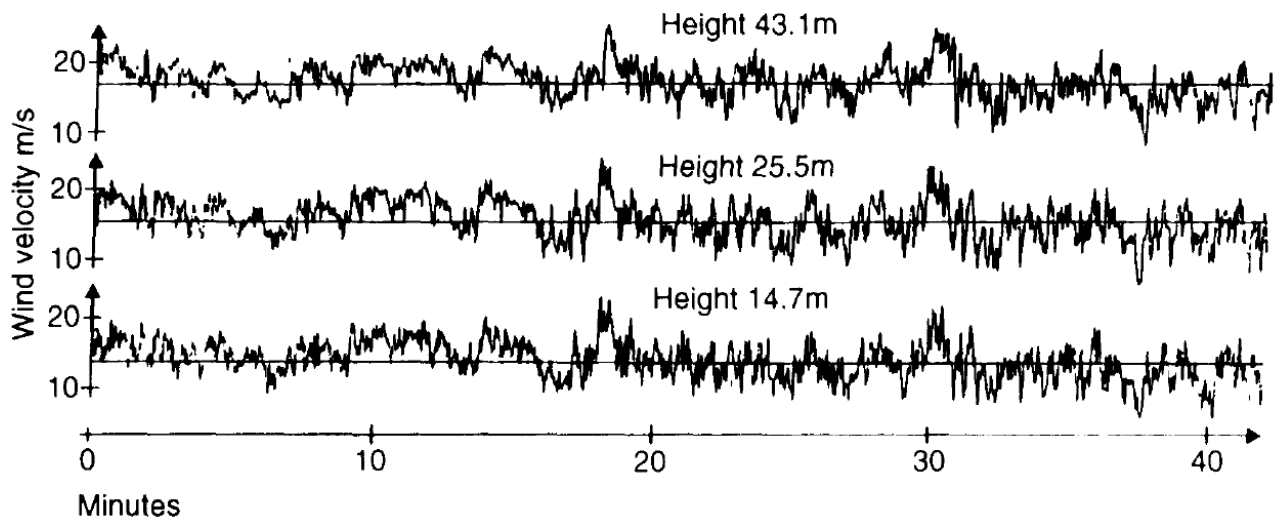
2.2.2. Struktura strujanja u atmosferskom graničnom sloju

S obzirom da je strujanje u atmosferskom graničnom sloju strogo turbulentno, brzine se mogu matematički zapisati kao:

$$\begin{aligned} u &= \bar{u} + u', \\ v &= \bar{v} + v', \\ w &= \bar{w} + w', \end{aligned} \tag{2.7}$$

gdje \bar{u} predstavlja srednju brzinu strujanja vjetra u horizontalnom smjeru, \bar{v} u lateralnom, a \bar{w} u okomitom smjeru. Veličine u' , v' i w' predstavljaju fluktuacijski, vremenski ovisan dio brzine. Turbulentno strujanje u atmosferskom graničnom sloju je najčešće trodimenzionalno, ali s obzirom da je brzina u horizontalnom smjeru \bar{u} mnogo veća od druge dvije komponente brzine ($\bar{u} \gg \bar{v}$ i $\bar{u} \gg \bar{w}$), brzine u lateralnom i vertikalnom smjeru se najčešće mogu zanemariti (često se zanemaruju i pri eksperimentalnim mjerenjima). To znači da su obično srednja brzina \bar{u} i njezin fluktuacijski dio u' najdominantni i da je njihov utjecaj na sile uzrokovane strujanjem

najveći [6]. Na Slika 9. su dani podaci mjerenih brzina i njihovih osrednjenih vrijednosti na tri različite visine z .



Slika 9: Primjer mjerenih i osrednjenih brzina na tri različite visine z [6]

2.2.3. Empirijske relacije za modeliranje atmosferskog graničnog sloja

U praksi se često koriste matematički izrazi kojima se opisuje stacionarni homogeni atmosferski granični sloj, a za koje se pokazalo da se dobro poklapaju s podacima mjerenima u prirodi.

2.2.3.1. Logaritamski zakon (*Logarithmic law*)

Logaritamski zakon (Thuillier and Lappe, 1964.g.) se često koristi za modeliranje prvih 10% debljine atmosferskog graničnog sloja, odnosno vrijedi u donjim slojevima AGS-a. Za definiranje logaritamskog zakona u obzir je uzeta jedino površinska hrapavost. Matematička formulacija logaritamskog zakona glasi:

$$\bar{u} = u_{\tau} \frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{z-d}{z_0} \right). \quad (2.8)$$

Pritom u_τ predstavlja brzinu trenja, d je debljina istisnuća atmosferskog graničnog sloja, a κ je von Kármán-ova konstanta koja iznosi $\kappa = 0,41$. Brzina trenja računa se kao:

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}, \quad (2.9)$$

gdje je τ_0 posmično naprezanje na površini, a ρ gustoća fluida na visini z iznad tla.

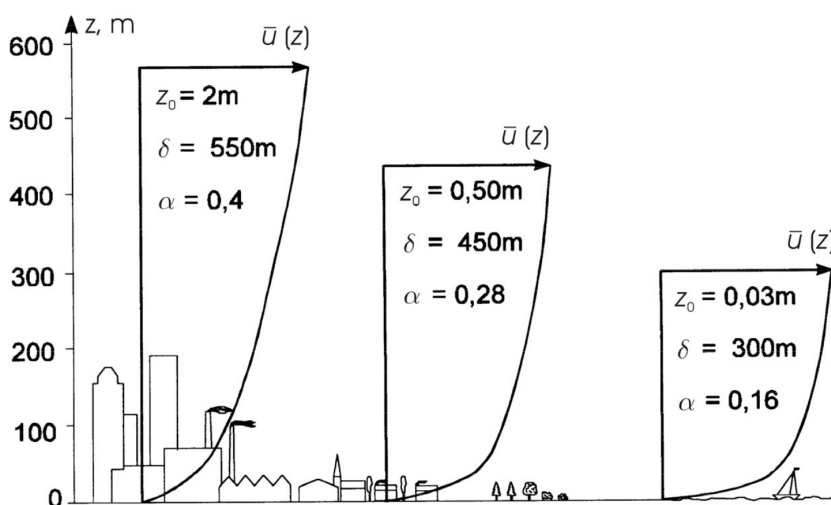
2.2.3.2. Zakon potencije (*Power-law*)

Zakon potencije (Hellman, 1916.g.) vrijedi kroz čitavu debljinu atmosferskog graničnog sloja.

Matematička formulacija zakona potencije glasi:

$$\bar{u} = \bar{u}_{\text{ref}} \left(\frac{z - d}{z_{\text{ref}} - d} \right)^\alpha. \quad (2.10)$$

Varijabla d predstavlja debljinu istisnuća atmosferskog graničnog sloja (obično se uzima da je debljina istisnuća jednaka visini građevinskih objekata iznad kojih se formira AGS), dok \bar{u}_{ref} predstavlja referentnu brzinu na referentnoj visini z_{ref} . EkspONENT zakona potencije je α , a funkcija je aerodinamičke duljine hrapavosti z_0 . Na Slika 10. su prikazani profili atmosferskog graničnog sloja dobiveni korištenjem zakona potencije za tri različita tipa terena.



Slika 10: Profili homogenog stacionarnog atmosferskog graničnog sloja iznad tri različita tipa terena dobiveni korištenjem zakona potencije [34]

3. Matematički model

U prvom dijelu poglavlja će biti dan pregled općenitih jednadžbi mehanike kontinuuma kojima se opisuje i modelira turbulentno strujanje fluida, dok će u drugom dijelu poglavlja biti dan matematički model korišten za računalno modeliranje atmosferskog graničnog sloja u ovom radu.

3.1. Osnovne jednadžbe mehanike kontinuuma

Općenite Navier-Stokesove jednadžbe za nestlačivo izotermno strujanje su skup parcijalnih diferencijalnih jednadžbi:

- Jednadžba kontinuiteta

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0 \quad (3.1)$$

- Jednadžba količine gibanja (momentna jednadžba)

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{U}\mathbf{U} = -\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (3.2)$$

Jednadžba (3.1) predstavlja jednadžbu kontinuiteta koja polje brzine \mathbf{U} definira kao solenoidalno polje, te se može smatrati nekom vrstom ograničenja s obzirom da definira nestlačivost fluida.

Jednadžba (3.2) predstavlja jednadžbu količine gibanja koja opisuje promjenu količine gibanja uslijed djelovanja masenih i površinskih sila na česticu fluida. Također, posljednji član $\boldsymbol{\sigma}$ u jednadžbi (3.2) je potrebno modelirati, za što se koristi Newtonov zakon viskoznosti. Tenzor naprezanja $\boldsymbol{\sigma}$ se može zapisati na sljedeći način:

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\Sigma}, \quad (3.3)$$

gdje Σ predstavlja simetrični tenzor viskoznih naprezanja, a član $p\mathbf{I}$ naprezanje uslijed utjecaja tlaka.

Osnovna ideja Newtonovog zakona viskoznosti jest linearna veza između simetričnog tenzora viskoznih naprezanja i tenzora brzine deformacije. Ukoliko se dodatno pretpostave izotropna svostva fluida, tenzor Σ se može modelirati na sljedeći način:

$$\Sigma = \mu(\nabla\mathbf{U} + \nabla\mathbf{U}^T) - \underbrace{\frac{2}{3}\mu(\nabla\cdot\mathbf{U})\mathbf{I}}_{= 0 \text{ za nestlačivo strujanje}} \quad (3.4)$$

Sada se tenzor naprezanja može definirati kao:

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \mu(\nabla\mathbf{U} + \nabla\mathbf{U}^T). \quad (3.5)$$

3.1.1. Reynolds Averaged Navier-Stokes (RANS) jednadžbe

Osrednjavanje Navier-Stokesovih jednadžbi se temelji na Reynoldsovoj dekompoziciji, odnosno rastavljanju fizikalnih veličina strujanja na njihov osrednjeni dio, te vremenski ovisan fluktuacijski dio. Ukoliko Reynoldsovu dekompoziciju izvršimo na vektorskom polju brzine \mathbf{U} i skalarnom polju tlaka p , dobivaju se sljedeći izrazi:

$$\mathbf{U}(\mathbf{x}, t) = \bar{\mathbf{U}}(\mathbf{x}) + \mathbf{U}'(\mathbf{x}, t) \quad (3.6)$$

$$p(\mathbf{x}, t) = \bar{p}(\mathbf{x}) + p'(\mathbf{x}, t) \quad (3.7)$$

Nakon što se jednadžba (3.6) i jednadžba (3.7) zamijene s odgovarajućim članovima u jednadžbi kontinuiteta i jednadžbi količine gibanja, dobiva se konačan oblik RANS jednažbi:

$$\nabla\cdot\bar{\mathbf{U}} = 0, \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial\bar{\mathbf{U}}}{\partial t} + \nabla\cdot\bar{\mathbf{U}}\bar{\mathbf{U}} = -\frac{1}{\rho}\nabla\bar{p} + \nabla\cdot\left(\nu(\nabla\bar{\mathbf{U}} + \nabla\bar{\mathbf{U}}^T)\right) - \nabla\cdot\bar{\mathbf{U}}'\bar{\mathbf{U}}'. \quad (3.9)$$

Posljednji član u jednažbi (3.9) predstavlja divergens Reynoldsovog tenzora naprežanja, a modelira se korištenjem Boussinesqove aproksimacije (postoje i drugi modeli kojima se ovaj član može opisati, no njih se neće spominjati s obzirom da je u matematičkom modelu korištena Boussinesqova aproksimacija) na sljedeći način:

$$-\overline{\mathbf{U}'\mathbf{U}'} = \nu_T(\nabla\overline{\mathbf{U}} + \nabla\overline{\mathbf{U}}^T) - \frac{2}{3}k\mathbf{I}, \quad (3.10)$$

gdje je ν_T turbulentna viskoznost, te se mora modelirati pomoću nekog od modela turbulencije, dok k predstavlja turbulentnu kinetičku energiju koja se računa na sljedeći način:

$$k = \frac{1}{2}\overline{\mathbf{U}' \cdot \mathbf{U}'}. \quad (3.11)$$

Lako se može zaključiti kako će turbulentna viskoznost ν_T biti jednaka nuli za laminarna, ne-turbulentna strujanja. No u većini realnih inženjerskih slučajeva, strujanje je većinom izuzetno turbulentno, te je turbulentna viskoznost ν_T nekoliko reda veličine veća od fizikalne kinematske viskoznosti fluida ν . Važno je naglasiti i kako je ν fizikalna veličina, dok turbulentna viskoznost ν_T to nije, već služi za opisivanje turbulencije u strujanju, te će u većini slučajeva biti modelirana kao funkcija uvjeta strujanja.

Nakon primjene Boussinesqove aproksimacije, dobiva se konačan oblik RANS jednažbi:

$$\nabla \cdot \overline{\mathbf{U}} = 0, \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial \overline{\mathbf{U}}}{\partial t} + \nabla \cdot \overline{\mathbf{U}\mathbf{U}} = -\frac{1}{\rho}\nabla p_{\text{eff}} + \nabla \cdot \left(\nu_{\text{eff}}(\nabla\overline{\mathbf{U}} + \nabla\overline{\mathbf{U}}^T) \right), \quad (3.13)$$

gdje je p_{eff} efektivni tlak, a ν_{eff} efektivna viskoznost:

$$p_{\text{eff}} = \bar{p} + \frac{2}{3}k, \quad (3.14)$$

$$\nu_{\text{eff}} = \nu + \nu_T. \quad (3.15)$$

3.1.2. Modeliranje turbulencije

Osnovna ideja modeliranja turbulencije pomoću Reynoldsovog osrednjavanja jest definiranje funkcije za računanje turbulentne viskoznosti ν_T . Do sada je razvijeno mnogo takvih modela, a još uvijek najpopularniji i najviše korišteni u industriji su $k - \varepsilon$ i $k - \omega$ modeli turbulencije. Također je razvijeno i mnogo varijacija tih modela od kojih se mnogi također često koriste. S obzirom da je u ovom radu korišten standardni $k - \varepsilon$ model turbulencije, u ovom poglavlju će biti dane osnovne jednadžbe tog modela.

Standardni $k - \varepsilon$ model turbulencije je model turbulencije koji je opisan s dvije parcijalne diferencijalne jednadžbe koje je potrebno riješiti. Prva diferencijalna jednadžba predstavlja transportnu jednadžbu za disipaciju turbulentne kinetičke energije ε , a druga za turbulentnu kinetičku energiju k :

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \nabla \cdot \bar{\mathbf{U}} \varepsilon - \nabla \cdot \left(\left(\frac{\nu_T}{\sigma_\varepsilon} + \nu \right) \nabla \varepsilon \right) = C_1 \frac{P \varepsilon}{k} - C_2 \frac{\varepsilon^2}{k}, \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \nabla \bar{\mathbf{U}} k - \nabla \cdot \left(\left(\frac{\nu_T}{\sigma_k} + \nu \right) \nabla k \right) = P - \varepsilon. \quad (3.17)$$

Disipacija turbulentne kinetičke energije ε je definirana na sljedeći način:

$$\varepsilon = \overline{\mathbf{U}' \mathbf{U}' : \nabla \mathbf{U}'}, \quad (3.18)$$

a izvorski član P u jednadžbi se modelira kao:

$$P = 2\nu_T \frac{(\nabla \bar{\mathbf{U}} + \nabla \bar{\mathbf{U}}^T)}{2} \cdot \frac{(\nabla \bar{\mathbf{U}} + \nabla \bar{\mathbf{U}}^T)}{2}. \quad (3.19)$$

Izraz za turbulentnu viskoznost ν_T je:

$$\nu_T = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}. \quad (3.20)$$

Standardni koeficijenti $k - \varepsilon$ modela turbulencije su dani u Tablica 2.

Tablica 2. Koeficijenti $k - \varepsilon$ modela turbulencije

C_μ	C_1	C_2	σ_k	σ_ε
0.09	1.44	1.92	1	1.3

3.1.3. Modeliranje turbulencije u blizini zida

Glavni problem modeliranja turbulencije uz zid je tzv. obrnuta energetska kaskada. Naime, dolazi do rolanja manjih vrtloga koji su nakon toga odbačeni od zida, te se na taj način stvaraju veći vrtlozi. Takva energetska kaskada nije uzeta u obzir pri standardnom pristupu modeliranju gdje veliki vrtlozi u procesu kidanja i raspadanja tvore manje vrtloge (*vortex break up* i *vortex shedding* procesi).

No u većini inženjerskih slučajeva nije potrebno riješiti cjelokupno strujanje uz zidnu stijenu, već je najčešće želja doći do podataka o utjecaju stijene na strujanje i obratno (otpor strujanja, naprezanja na stijenci i ostalo). Upravo to dovodi do ideje da se strujanje u blizini zida ne rješava u cijelosti već modelira kako bi se smanjila potreba za velikim rezolucijama mreže u tome području (zbog postojanja velikih gradijenata), a samim time znatno smanjilo i potrebno računalno vrijeme za rješavanje takvog sustava jednadžbi. Modeliranje turbulencije uz zid se temelji na primjeni zidnih funkcija upravo s ciljem smanjenja potrebe za velikim rezolucijama mreže, te mnogo manjim računalnim vremenom računanja sustava diskretiziranih jednadžbi. Postoje i modeli turbulencije poput Low-Reynolds modela, koji u potpunosti rješavaju strujanje fluida uz zid, ali se u industrijskoj praksi rjeđe primjenjuju zbog gore navedenih razloga. Općenito se turbulentno strujanje u blizini zidne stijene može podijeliti na tri osnovna područja:

- Viskozni podsloj $y^+ < 5$

U viskoznom podsloju se efekti turbulencije mogu zanemariti s obzirom da su efekti viskoznosti nekoliko redova veličina veći.

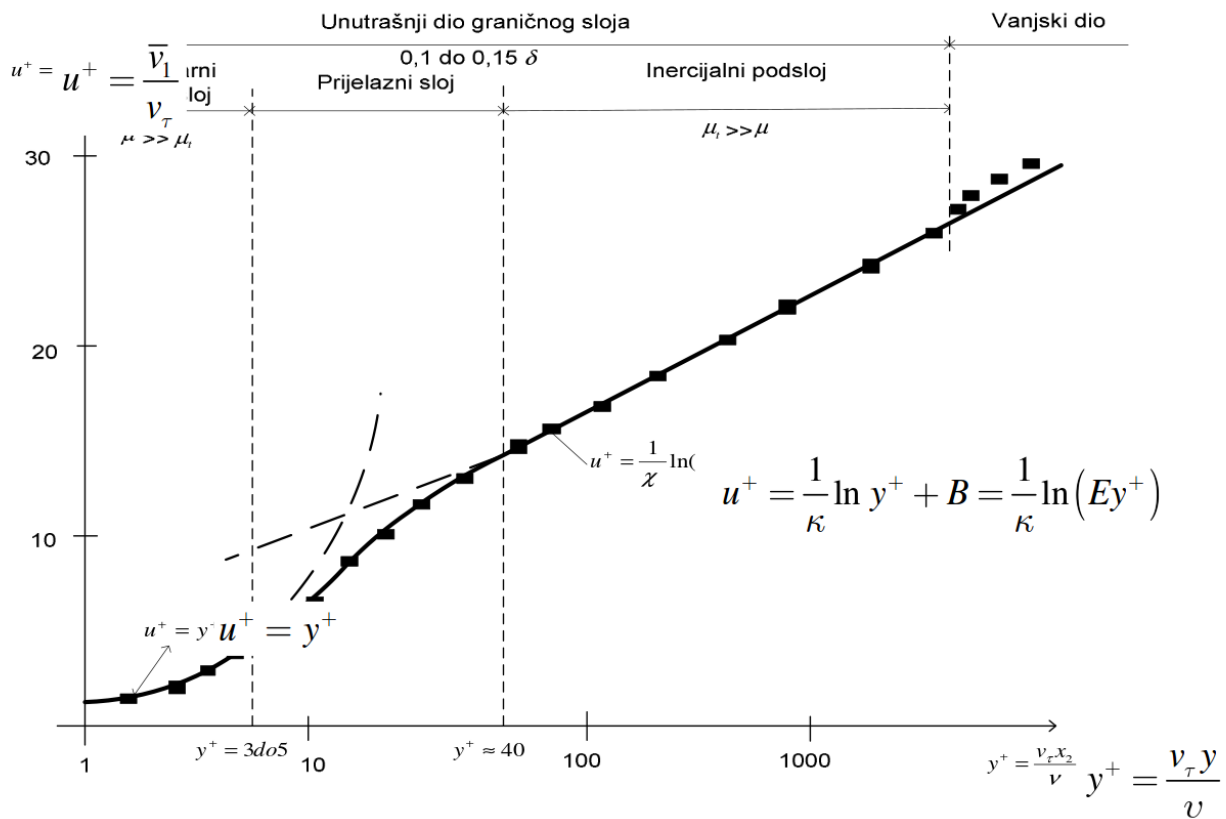
- Prijelazni podsloj $5 < y^+ < 30$

U prijelaznom podsloju su oba efekta viskoznosti i turbulencije otprilike istog reda veličine.

- Inercijalni podsloj $y^+ > 30$

U inercijalnom podsloju do izražaja dolaze efekti turbulencije, dok se efekti viskoznosti mogu zanemariti.

3.1.3.1. Standardna zidna funkcija



Slika 11: Shematski prikaz bezdimenzijske brzine u ovisnosti o bezdimenzijskoj udaljenosti od zidne stijenke [45]

Zidne funkcije (Launder and Spalding [26]) koriste empirijske relacije s ciljem opisivanja strujanja uz zidnu stijenk, a koje se ne može riješiti korištenjem standardnih jednadžbi $k - \varepsilon$ modela turbulencije. Koristeći zidne funkcije, moguće je izraziti osrednjenu brzinu paralelnu

sa stijenkom i parametre turbulencije izvan viskoznog podsloja u ovisnosti o udaljenosti od zida i uvjetima na zidu poput posmičnog naprezanja na zidu i gradijenta tlaka. Na taj način je moguće omogućiti definiranje rubnih uvjeta na zidu, te je moguće riješiti jednadžbu količine gibanja i jednadžbe modela turbulencije bez potrebe za rješavanjem viskoznog podsloja. Kako bi to bilo moguće, centar volumena definiranog uz zidnu stijenkicu mora biti smješten u intercijalnom podsloju, nakon čega se smije koristiti zakon zida za definiranje rubnih uvjeta za disipaciju turbulentne kinetičke energije ε i turbulentnu kinetičku energiju k .

Osnovni oblik standardne zidne funkcije je sljedeći (Launder and Spalding [26]):

$$u^+ = \frac{\bar{u}_t}{u_\tau} = \frac{1}{\kappa} \ln(Ey^+) + B, \quad (3.21)$$

gdje \bar{u}_t predstavlja osrednjenu brzinu paralelnu sa zidom, $\kappa = 0,41$ je von Kármán-ova konstanta, B je empirijska konstanta koja ovisi o debljini viskoznog podsloja, E je parametar hrapavosti podloge ($E \approx 9$ za glatke zidove), dok je u_τ brzina trenja definirana kao:

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}. \quad (3.22)$$

Bezdimenzijska udaljenost od zida y^+ se računa na sljedeći način:

$$y^+ = \frac{u_\tau \cdot y}{\nu}, \quad (3.23)$$

gdje y predstavlja dimenzijsku udaljenost od zida. Bezdimenzijska udaljenost od zida y^+ je važna vrijednost s obzirom da će zidna funkcija biti valjana samo u području u kojem je centar prvog volumena smješten u inercijalnom podsloju. U OpenFOAM®-u je granična vrijednost $y^+ = 11,6$, tj. ako je vrijednost $y^+ > 11,6$ koristi se zidna funkcija, a ukoliko je $y^+ < 11,6$ koristi se linearan zakon ($u^+ = y^+$). Ukoliko se zidna funkcija upotrebljava u području gdje je izračunati $y^+ < 11,6$ može doći do ozbiljnih grešaka u rješenju s obzirom da u tome području funkcija zida nije valjana.

Posmično naprezanje na zidu se može izračunati pomoću sljedećeg izraza:

$$\tau_w = \frac{u_\tau \bar{u}_P \kappa}{\ln(Ey^+)}, \quad (3.24)$$

a kako se posmično naprezanje na zidu može računati i kao:

$$\tau_w = \nu \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)_w = \nu_{\text{eff}} \frac{\bar{u}_P}{y_P}, \quad (3.25)$$

slijedi da je efektivna viskoznost jednaka:

$$\nu_{\text{eff}} = \frac{u_\tau y_P \kappa}{\ln(Ey_P^+)}. \quad (3.26)$$

Direktne numeričke simulacije (DNS) strujanja u blizini zida su pokazale kako je turbulentna disipacija približno jednaka turbulentnoj produkciji u području inercijalnog podsloja gdje je $y^+ \approx 50$. Budući da se izraz za posmično naprezanje može definirati kao:

$$-\overline{u'v'} = \frac{\tau_w}{\rho} = u_\tau^2, \quad (3.27)$$

može se doći do sljedećeg izraza za turbulentnu produkciju:

$$\varepsilon = P = -\overline{u'v'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \frac{u_\tau^3}{\kappa y}. \quad (3.28)$$

Pretpostavlja se jednakost turbulentne disipacije i turbulentne produkcije, dok su svi drugi gradijenti osim $\partial \bar{u} / \partial y$ zanemareni. Sada se primjenom pretpostavke o turbulentnoj viskoznosti može zapisati:

$$-\overline{u'v'} = \nu_T \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \frac{C_\mu k^2}{\varepsilon} \cdot \frac{u_\tau}{\kappa y}. \quad (3.29)$$

Konačni oblik za disipaciju turbulentne kinetičke energije u blizini zida je:

$$\varepsilon_P = \frac{C_\mu^{\frac{3}{4}} k^{\frac{3}{2}}}{\kappa y_P}. \quad (3.30)$$

Kada se jednadžba (3.30) koristi kao rubni uvjet na zidu za disipaciju turbulentne kinetičke energije ε , Neumannov *zero gradient* rubni uvjet se može koristiti za turbulentnu kinetičku

energiju k . Sada se izvorski (produksijski) član u prvom volumenu uz zidnu stijenku može jednostavno izračunati tako da se nađe njegova srednja vrijednost u polovini volumena, te uz pretpostavku da je τ_w konstantan po volumenu slijedi:

$$\bar{P} = \frac{1}{y_P} \int_0^{y_P} \tau_w \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} dy = \tau_w \cdot \frac{\bar{u}_P}{y_P}. \quad (3.31)$$

Produksijski se član također može računati na sljedeći način:

$$P_P = \nu_T \frac{C_\mu^{\frac{1}{4}} k_P^{\frac{1}{2}}}{\kappa y_P} \frac{\partial \bar{u}(y_P)}{\partial y}, \quad (3.32)$$

te se y^+ dobiva sljedećim izrazom:

$$y_P^+ = \frac{C_\mu^{\frac{1}{4}} k_P^{\frac{1}{2}} y_P}{\nu}. \quad (3.33)$$

Kao što je već spomenuto, zidna funkcija nije valjana u području viskoznog podsloja. U tom području se koristi linearna funkcija:

$$\frac{\bar{u}}{u_\tau} = y^+, \quad (3.34)$$

a posmično naprezanje u viskoznom podsloju je definirano na sljedeći način:

$$\frac{\tau_w}{\rho} = \nu_{\text{eff}} \frac{\bar{u}_P}{y_P}. \quad (3.35)$$

U prijelaznom podsloju nije valjana niti linearna funkcija, niti funkcija zida. Stoga kao što je već napomenuto, OpenFOAM® koristi linearnu formulaciju do $y^+ = 11,6$, a za vrijednosti $y^+ > 11,6$ se koristi funkcija zida.

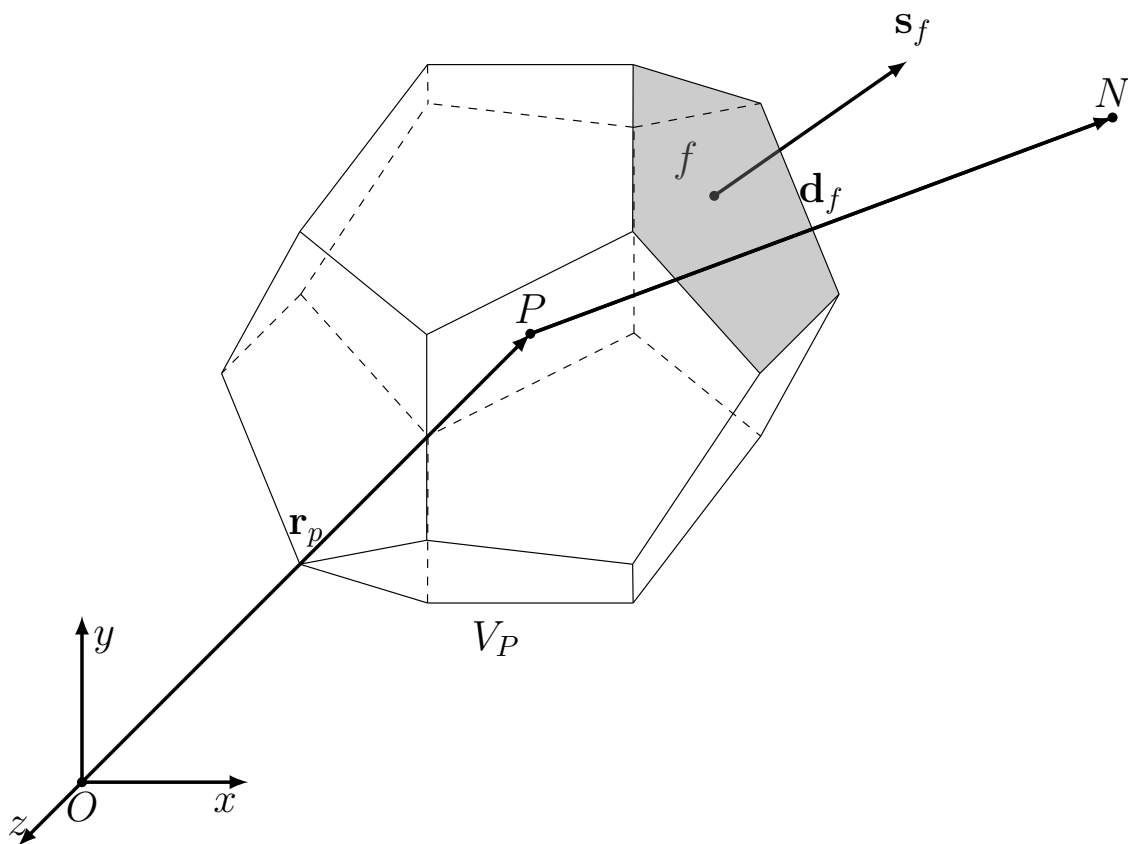
3.2. Diskretizacija članova jednadžbi matematičkog modela

Diskretizacija članova jednadžbi matematičkog modela bit će ukratko objašnjena na primjeru opće skalarne transportne jednadžbe:

$$\underbrace{\frac{\partial \rho \Phi}{\partial t}}_{\text{nestacionarni član}} + \underbrace{\nabla \cdot (\rho \mathbf{U} \Phi)}_{\text{konvektivni član}} = \underbrace{\nabla \cdot (\rho \Gamma_{\Phi} \nabla \Phi)}_{\text{difuzijski član}} + \underbrace{S_{\Phi}(\Phi)}_{\text{izvorski/ponorski član}}. \quad (3.36)$$

Metoda konačnih volumena zahtjeva integralni zapis diferencijalne jednadžbe, što znači da jednadžba (3.36) mora biti zadovoljena po kontrolnom volumenu volumena V_P i oko točke P koja predstavlja težište tog kontrolnog volumena (Slika 12.), a čiji se vektor položaja \mathbf{r}_P definira kao:

$$\mathbf{r}_P = \int_{V_P} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_P) dV = 0. \quad (3.37)$$



Slika 12: Proizvoljni konačni volumen [14]

Jednadžba (3.36) zapisana u integralnom obliku (uz $\rho = \text{konst.}$) glasi:

$$\int_V \frac{\partial \Phi}{\partial t} dV + \oint_S \Phi(\mathbf{n} \cdot \mathbf{U}) dS - \oint_S \Gamma_\Phi \mathbf{n} \cdot (\nabla \Phi)_P dS = \int_V S(\Phi) dV. \quad (3.38)$$

Kako bi se omogućila formulacija metoda diskretizacije drugog reda točnosti, diskretizacija članova (prostorna i vremenska) se mora izvršiti koristeći linearne funkcije. Općenita prostorna promjena $\Phi(\mathbf{x})$ oko točke P kontrolnog volumena se može zapisati na sljedeći način:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \Phi_P + (\mathbf{x} - \mathbf{x}_P) \cdot (\nabla \Phi)_P, \text{ gdje je } \Phi_P = \Phi(\mathbf{x}_P), \quad (3.39)$$

dok vremenska promjena glasi:

$$\Phi(t + \Delta t) = \Phi^t + \Delta t \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)^t, \text{ gdje je } \Phi^t = \Phi(t). \quad (3.40)$$

Volumni integral se može izračunati koristeći jednadžbu (3.39):

$$\int_V \Phi dV = \Phi_P V_P, \quad (3.41)$$

dok se površinski integral može rastaviti na sumu po stranicama kontrolnog volumena:

$$\oint_S \mathbf{n} \Phi dS = \sum_f \mathbf{s}_f \Phi_f, \quad (3.42)$$

gdje je \mathbf{s}_f površinski vektor definiran u centru (težištu) stranice kontrolnog volumena (Slika 12.)

i iznosa je površine stranice kontrolnog volumena:

$$\mathbf{s}_f = \int_{S_f} \mathbf{n} dS. \quad (3.43)$$

Pritom se centar (težište) stranice kontrolnog volumena definira analogno definiciji težišta kontrolnog volumena:

$$\int_{S_f} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_f) = 0. \quad (3.44)$$

3.2.1. Diskretizacija prostornih članova

Prostornim članovima se smatraju gradijent, divergens, konvektivni, difuzijski i izvorski (porski) član.

Najprije će se opisati postupak diskretizacije operatora gradijenta. Prvi način računanja gradijenta jest upotrebom Gaussovog teorema na sljedeći način:

$$\int_V \nabla \Phi dV = \oint_{\partial V} \mathbf{s} \Phi, \quad (3.45)$$

gdje se vektor \mathbf{s} definira kao:

$$\mathbf{s} = \mathbf{n} dS. \quad (3.46)$$

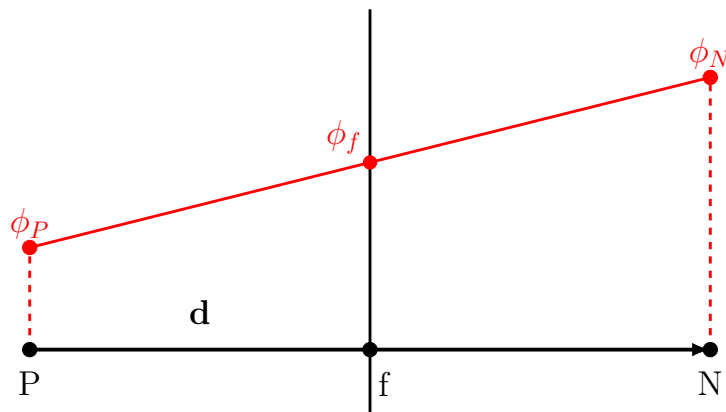
Konačan izraz za računanje operatora gradijenta (uz upotrebu jednadžbe (3.42)) glasi:

$$\oint_S \mathbf{n} \Phi dS = \sum_f \mathbf{s}_f \Phi_f. \quad (3.47)$$

Sada je osnovni problem kako izračunati vrijednost polja Φ na stranicama kontrolnog volumena.

To se ostvaruje korištenjem linearne interpolacije na stranice kontrolnog volumena:

$$\Phi_f = t\Phi_P + (1 - t)\Phi_N. \quad (3.48)$$



Slika 13: Princip određivanja vrijednosti varijable Φ na stranicama kontrolnog volumena korištenjem linearne interpolacije

Pritom Φ_P predstavlja vrijednost varijable u središtu promatranog volumena, dok Φ_N vrijednost varijable u susjednom volumenu. Faktor t predstavlja faktor linearne korekcije (Slika 13.):

$$t = \frac{\overline{fN}}{\overline{PN}}. \quad (3.49)$$

Drugi način računanja gradijenta je pomoću metode najmanjih kvadrata:

$$(\nabla\Phi)_P = \sum_N w_N^2 \mathbf{G}^{-1} \mathbf{d}_N (\Phi_N - \Phi_P). \quad (3.50)$$

Pritom se vrijednost težinskog faktora w_N određuje kao:

$$w_N = \frac{1}{|\mathbf{d}_N|}, \quad (3.51)$$

dok je \mathbf{G} simetrični tenzor drugog reda i računa se:

$$\mathbf{G} = \sum_N w_N^2 \mathbf{d}_N \mathbf{d}_N. \quad (3.52)$$

3.2.1.1. Diskretizacija konvekcijskog člana

Konvekcijski član predstavlja transport fizikalnih veličina uslijed strujanja fluida (postojanja brzine). Diskretizacija konvekcijskog člana se vrši na sljedeći način:

$$\oint_S \Phi(\mathbf{n} \cdot \mathbf{U}) dS = \sum_f \Phi_f (\mathbf{s}_f \cdot \mathbf{U}_f) = \sum_f \Phi_f F. \quad (3.53)$$

Pritom je F protok kroz stranicu kontrolnog volumena:

$$F = \mathbf{s}_f \cdot \mathbf{U}_f. \quad (3.54)$$

Veličina Φ_f je vrijednost na stranici kontrolnog volumena koju je potrebno odrediti. Moguće ju je odrediti na više načina. Jedan od načina je linearna interpolacija na stranice kontrolnog vo-

lumena na način na koji je to objašnjeno za računanje operatora gradijenta (Slika 13.). Takvu shemu diskretizacije nazivamo shema centralnih razlika (engl., *central differencing scheme*).

Vrijednost Φ_f je moguće odrediti i shemama poput uzvodne sheme (engl., *upwind differencing scheme*, gdje se vrijednost veličine na stranicama kontrolnog volumena određuje s obzirom na smjer strujanja fluida), te shemama koje koriste limitere (TVD i NVD sheme).

Za diskretizaciju konvektivnih članova je u ovom radu korištena NVD shema s limiterom (*gamma differencing scheme*) [18], koja osigurava ograničenost i konzervativnost, odnosno rješenja bez oscilacija.

3.2.1.2. Diskretizacija difuzijskog člana

Difuzijski član predstavlja transport uslijed postojanja gradijenata u sustavu, odnosno razlika u koncentraciji fizikalnih veličina. Diskretizacija se vrši na sljedeći način:

$$\oint_S \Gamma_\phi \mathbf{n} \cdot (\nabla \Phi)_P dS = \sum_f (\Gamma_\phi)_f \mathbf{s}_f \cdot (\nabla \Phi)_f, \quad (3.55)$$

a vrijednost koeficijenta difuzije $(\Gamma_\phi)_f$ se na stranici kontrolnog volumena određuje koristeći linearnu interpolaciju (metodom centralnih razlika).

Ukoliko je vektor \mathbf{d}_f poravnat s duljinom \overline{PN} (vidi Slika 13.), lako se može izračunati komponenta gradijenta u smjeru vektora \mathbf{d}_f iz jednadžbe (3.55):

$$\mathbf{s}_f \cdot (\nabla \Phi)_P = |\mathbf{s}_f| \frac{\Phi_N - \Phi_P}{|\mathbf{d}_f|}. \quad (3.56)$$

Ukoliko vektor \mathbf{d}_f nije poravnat s duljinom \overline{PN} eventualno je potrebno izvršiti korekciju uslijed neortogonalnosti. Takva se korekcija vrši ako su mreže konačnih volumena izrazito neortogonalne.

3.2.1.3. Diskretizacija izvorskog i ponorskog člana

Svi članovi jednadžbe koji se ne mogu prikazati kao konvekcijski, difuzijski ili tranzijentni članovi se nazivaju izvorskim članom. Općenito izvorski i ponorski članovi mogu biti funkcija prostora i vremena, te se prije diskretizacije lineariziraju:

$$S_{\Phi}(\Phi) = S_u + S_p \Phi. \quad (3.57)$$

Pritom je član S_p definiran kao:

$$S_p = \frac{\partial S_{\Phi}(\Phi)}{\partial \Phi}. \quad (3.58)$$

Članovi S_u i S_p su također funkcija varijable Φ , te se diskretizacija vrši na sljedeći način:

$$\int_V S_{\Phi}(\Phi) dV = S_u V_P + S_p V_P \Phi_P. \quad (3.59)$$

3.2.2. Diskretizacija vremenskog (nestacionarnog) člana

U slučaju rješavanja nestacionarnih nestlačivih strujanja, u jednadžbi količine gibanja je potrebno diskretizirati tranzijentni član. Riječ je o članu koji daje informaciju o brzini promjene fizikalne veličine. Diskretizacija nestacionarnog člana se svodi na uvođenje diskretnog vremenskog koraka Δt , čime je moguće izračunati novi vremenski korak $t^{\text{new}} = t^{\text{old}} + \Delta t$. Na taj način se mogu definirati vrijednosti varijable u starom vremenskom koraku kao $\Phi^o = \Phi(t^{\text{old}})$, te u novom vremenskom koraku kao $\Phi^n = \Phi(t^{\text{new}})$.

Diskretizirani oblik nestacionarnog člana je:

$$\int_V \frac{\partial \Phi}{\partial t} dV = \frac{\Phi^n - \Phi^o}{\Delta t} V_P. \quad (3.60)$$

3.3. Algoritam za rješavanje sustava Navier-Stokesovih jednadžbi

Kao što je već spomenuto, područje istraživanja ovog rada je stacionarni homogeni atmosferski granični sloj, pa je u skladu s time korišten stacionarni rješavač baziran na SIMPLE algoritmu. Stoga će se dati kratak pregled tog algoritma implementiranog u računalnom programu korištenom za numeričke simulacije, OpenFOAM®-u.

3.3.1. Diskretizirani sustav Navier-Stokesovih jednadžbi

Nakon što se provede diskretizacija jednadžbi matematičkog modela, dobiva se sustav jednadžbi koji se zapisuje u poludiskretiziranom obliku (s obzirom da gradijent tlaka još uvijek nije diskretiziran):

$$a_P \bar{U}_P = \mathbf{H}(\bar{U}) - \nabla p. \quad (3.61)$$

Član $\mathbf{H}(\bar{U})$ je matrica koja se sastoji od transportnog dijela koji sadrži koeficijente svih susjednih konačnih volumena pomnoženih s odgovarajućim brzinama, te izvorskog dijela koji sadrži diskretizirani tranzijentni član i ostale izvorske članove (ukoliko postoje). Jedini izvorski član koji izvorski dio matrice ne sadrži jest gradijent tlaka. Matematički se matrica $\mathbf{H}(\bar{U})$ zapisuje:

$$\mathbf{H}(\bar{U}) = - \sum_N a_N \bar{U}_N + \frac{\bar{U}^o}{\Delta t}. \quad (3.62)$$

Iz jednadžbe (3.61) se može izraziti brzina:

$$\bar{U}_P = \frac{\mathbf{H}(\bar{U})}{a_P} - \frac{1}{a_P} \nabla p, \quad (3.63)$$

te se vrijednost brzine može interpolirati na stranice kontrolnog volumena:

$$\bar{\mathbf{U}}_f = \left(\frac{\mathbf{H}(\bar{\mathbf{U}})}{a_P} \right)_f - \left(\frac{1}{a_P} \right)_f (\nabla p)_f. \quad (3.64)$$

Diskretizirani oblik jednadžbe kontinuiteta (3.12) glasi:

$$\sum_f \mathbf{S} \cdot \bar{\mathbf{U}}_f = 0. \quad (3.65)$$

Kada se jednadžba (3.64) uvrsti u jednadžbu (3.65), dobiva se izraz za računanje gradijenta tlaka:

$$\left(\frac{1}{a_P} \nabla p \right) = \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{H}(\bar{\mathbf{U}})}{a_P} \right) = \sum_f \mathbf{S} \cdot \left(\frac{\mathbf{H}(\bar{\mathbf{U}})}{a_P} \right)_f. \quad (3.66)$$

Kada je gornja jednadžba zadovoljena, osigurava se konzervativnost protoka kroz stranice konačnog volumena. Konačan oblik diskretiziranog sustava Navier-Stokesovih jednadžbi je:

$$a_P \bar{\mathbf{U}}_P = \mathbf{H}(\bar{\mathbf{U}}) - \sum_f \mathbf{S}(p)_f, \quad (3.67)$$

$$\sum_f \mathbf{S} \cdot \left[\left(\frac{1}{a_P} \right)_f (\nabla p)_f \right] = \mathbf{S} \cdot \left(\frac{\mathbf{H}(\bar{\mathbf{U}})}{a_P} \right)_f. \quad (3.68)$$

Protok F kroz stranice kontrolnog volumena se računa koristeći jednadžbu (3.64):

$$F = \mathbf{S} \cdot \bar{\mathbf{U}}_f = \mathbf{S} \cdot \left[\left(\frac{\mathbf{H}(\bar{\mathbf{U}})}{a_P} \right)_f - \left(\frac{1}{a_P} \right)_f (\nabla p)_f \right]. \quad (3.69)$$

3.3.2. SIMPLE algoritam

Osnovna ideja SIMPLE algoritma (Patankar, Spalding [33]) je povezivanje polja brzine i polja tlaka, koji se često koristi za rješavanje stacionarnih problema u računalnoj dinamici fluida. Takav način rješavanja se bazira na iterativnom rješavanju sustava lineariziranih jednadžbi. Princip rada SIMPLE algoritma je sljedeći:

1. Preuzeti polja tlaka i protoka iz prethodne iteracije

Potrebno je preuzeti polje tlaka i protoka iz prethodne iteracije.

2. Izračunati novo polje brzine koristeći podrelaksiranu jednadžbu (3.67)

Kako bi se ubrzala i uspostavila konvergencija, jednadžba (3.67) se implicitno podrelaksira podrelaksacijskim faktorom α_u za brzinu. Tako se dobiva novi sustav podrelaksiranih jednadžbi koji je potrebno riješiti da bi se dobilo novo polje brzine (računa se korištenjem polja tlaka i protoka iz prethodne iteracije):

$$\frac{a_p}{\alpha_u} \bar{U}_P = \mathbf{H}(\bar{U}) - \sum_f \mathbf{S}(p)_f + \frac{1 - \alpha_u}{\alpha_u} \bar{U}_P^o. \quad (3.70)$$

3. S tako dobivenim poljem brzina može se izračunati novu matricu $\mathbf{H}(\bar{U})$, te se nakon toga može riješiti jednadžba (3.68) za tlak. Na taj način se dobiva novo polje tlaka p .

4. Izračunati novo polje tlaka i eksplicitno ga podrelaksirati

Izračunato novo polje tlaka je potrebno podrelaksirati. Naime, rješavanje stacionarnih strujanja unosi veću grešku nelinearnih efekata nego što je to slučaj kod rješavanja nestacionarnih strujanja. Stoga je dovoljno dobiti samo aproksimaciju vrijednosti polja tlaka, a nakon toga ponovno izračunati matrični operator $\mathbf{H}(\bar{U})$ s novim konzervativnim protocima. Iako rješavanje jednadžbe (3.69) daje nove konzervativne protoke (protoci zadovoljavaju jednadžbu kontinuiteta), novo polje tlaka nosi grešku gradijenta tlaka, konvekcije i difuzije. Upravo se iz tog razloga uvodi podrelaksacija polja tlaka, s ciljem smanjenja grešaka koje se javljaju uslijed netočnog polja brzine:

$$p^{\text{new}} = p^{\text{old}} + \alpha_p (p^P - p^{\text{old}}). \quad (3.71)$$

5. Izračunati nove protoke koristeći jednadžbu (3.69)

6. Riješiti diskretizirane jednadžbe modela turbulencije

U slučaju postojanja dodatnih jednadžbi u matematičkom modelu (poput skalarnih transportnih jednadžbi za k i ε) potrebno je riješiti diskretizirane sustave za te jednadžbe.

7. Provjeriti konvergenciju rješenja

Ukoliko rješenje nije konvergiralo, nastaviti s postupkom rješavanja.

Standardne vrijednosti podrelaksacijskih faktora brzine i tlaka su:

$$\alpha_u = 0,8, \text{ te } \alpha_p = 0,2. \quad (3.72)$$

3.4. Novi matematički model za simulaciju atmosferskog graničnog sloja

Novi model za simulaciju atmosferskog graničnog sloja je stacionaran, jednodimenzionalan, izoterman i nestlačiv, te su stoga jednačbe (3.13), (3.16) i (3.17) sljedećeg oblika:

- Jednačba količine gibanja

$$-\frac{\partial}{\partial y} \nu_T(y) \frac{\partial \bar{u}(y)}{\partial y} + \frac{\partial \bar{p}(y)}{\partial x} = W_{s,x}, \quad (3.73)$$

- Transportna jednačba za turbulentnu kinetičku energiju

$$-\frac{\partial}{\partial y} \frac{\nu_T(y)}{\sigma_k} \frac{\partial k(y)}{\partial y} - P(y) + \varepsilon(y) = 0, \quad (3.74)$$

- Transportna jednačba za disipaciju turbulentne kinetičke energije

$$-\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \varepsilon(y)}{\partial y} - C_1 \frac{P(y)\varepsilon(y)}{k(y)} + C_2 \frac{\varepsilon(y)^2}{k(y)} = 0. \quad (3.75)$$

Važno je naglasiti kako u matematičkom modelu koordinata x predstavlja smjer strujanja, dok koordinata y predstavlja visinu. Sve tri jednačbe modela ne sadrže konvekcijski član. Zbog pretpostavke uniformnosti strujanja, konvekcijski protok mora biti jednak nuli, isto kao što je i gradijent tlaka u tome slučaju približno jednak nuli zbog uvjeta strujanja u AGS-u:

$$\frac{dp}{dx} = 0. \quad (3.76)$$

Turbulencija je modelirana koristeći standardni $k - \varepsilon$ model, te se turbulentna viskoznost ν_T računa iz turbulentne kinetičke energije $k(y)$ i disipacije turbulentne kinetičke energije $\varepsilon(y)$ [19]:

$$\nu_T(y) = C_\mu \frac{k(y)^2}{\varepsilon(y)}, \quad (3.77)$$

dok je turbulentna produkcija $P(y)$ modelirana kako slijedi:

$$P(y) = -\overline{u'v'} \frac{\partial \bar{u}(y)}{\partial y} = \nu_T \left(\frac{\partial \bar{u}(y)}{\partial y} \right)^2. \quad (3.78)$$

Za potrebe razvoja novog modela, napravljena je modifikacija standardnih koeficijenata $k - \varepsilon$ modela turbulencije. Tako se vrijednost koeficijenta C_μ računa kao [35]:

$$\frac{1}{\sqrt{C_\mu}} = \frac{k(y)}{u'v'(y)} = \frac{k(y)}{u'v'(y)} = \frac{k(y)}{\nu_T \left(\frac{\partial \bar{u}(y)}{\partial y} \right)}. \quad (3.79)$$

U području inženjerstva koje se bavi problemima utjecaja atmosferskih pojava na građevinske objekte, uobičajene su malo drugačije vrijednosti parametara turbulencije od onih standardnih. Prema Juretić i Kozmar [21][22], u novom modelu su korišteni koeficijenti turbulencije dani u Tablica 3.

Tablica 3. Koeficijenti $k - \varepsilon$ modela turbulencije korišteni u novom modelu

C_μ	C_1	C_2	σ_k	σ_ε
0.044	1.44	1.92	1	1.67

3.4.1. WS izvorski član

U jednadžbi količine gibanja (3.73) je implementiran novi izvorski član $W_{s,x}$. Glavna uloga tog člana je osiguravanje uniformnosti (homogenosti) atmosferskog graničnog sloja po duljini računalne domene, te odgovarajuće razdiobe opterećenja s visinom. S obzirom da u tome slučaju konvekcijski član i izvorski član gradijenta tlaka moraju biti jednaki nuli, modeliranje

$W_{s,x}$ člana započinje iz jednadžbe količine gibanja u njezinom općenitom obliku. Prvo se izvodi tenzor naprezanja iz tenzora viskoznih naprezanja kako slijedi:

$$\sum = \nu(\nabla\bar{\mathbf{U}} + \underbrace{\nabla\bar{\mathbf{U}}^T}_{\text{za 1D strujanje} = 0}) = \nu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}, \quad (3.80)$$

a Reynoldsov tenzor naprezanja slijedi iz

$$-\overline{\mathbf{U}'\mathbf{U}'} = \nu_T(\nabla\bar{\mathbf{U}} + \underbrace{\nabla\bar{\mathbf{U}}^T}_{\text{za 1D strujanje} = 0}) = \nu_T \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}. \quad (3.81)$$

S obzirom da je ukupan tenzor naprezanja jednak:

$$R_{xy} = \nu_{\text{eff}} \nabla\bar{\mathbf{U}} = \nu_{\text{eff}} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}, \quad (3.82)$$

izvorski član se može izračunati kao derivacija eksperimentalnih vrijednosti naprezanja:

$$W_{s,x} = \frac{\partial R_{xy}^{\text{exp}}}{\partial y}. \quad (3.83)$$

Upravo taj izraz se koristi kao početna formulacija za računanje izvorskog člana u jednadžbi količine gibanja.

3.4.1.1. Korekcija iznosa izvorskog člana

Jednadžba (3.83) je početni izraz za računanje izvorskog člana. Kako je sustav jednadžbi koje opisuju model nelinearan, takav sustav je potrebno rješavati iterativnim postupcima. Pokazalo se da je tijekom rješavanja sustava diskretiziranih jednadžbi potrebno vršiti korekciju vrijednosti izvorskog člana, jer njegove inicijalne vrijednosti ne garantiraju da će gradijent tlaka biti približno jednak nuli i da će naprezanje po visini odgovarati mjerenim vrijednostima. Korekcija se vrši putem sljedećeg izraza:

$$W_{s,x}^{\text{new}} = W_{s,x}^{\text{old}} + W_{s,x}^{\text{corrected}} - \nabla p, \quad (3.84)$$

gdje se korekcija izvorskog člana $W_{s,x}^{\text{corrected}}$ računa na sljedeći način:

$$W_{s,x}^{\text{corrected}} = \frac{C_d}{z_{\text{ref}}} \left(R_{xy}^{\text{exp}} - \nu_T \left(\frac{\partial \bar{u}(y)}{\partial y} \right) \right). \quad (3.85)$$

Vrijednost z_{ref} je vrijednost referentne visine, R_{xy}^{exp} predstavlja vrijednost mjerenih naprezanja, dok je $\nu_T \left(\frac{\partial \bar{u}(y)}{\partial y} \right)$ izračunato naprezanje dobiveno numeričkim rješavanjem sustava jednadžbi. C_d je korekcijski faktor koji računamo kao:

$$C_d = \frac{W_{s,x}^{\text{old}} \cdot z_{\text{ref}}}{\nu_T \left(\frac{\partial \bar{u}(y)}{\partial y} \right)}. \quad (3.86)$$

Korekcija vrijednosti izvorskog člana je implementirana na način da se može zadavati koliko puta se izvorski član želi ispraviti. Time se pospješuje točnost računalnog modela i omogućuje bolje poklapanje numeričkih rezultata s mjerenim vrijednostima.

3.4.2. Rubni uvjeti na vrhu računalne domene

Već je u uvodnom dijelu ovog rada spomenuto kako su mnogi autori pokazali da je u svrhu pravilnog numeričkog modeliranja potrebno zadati konzistentne rubne uvjete na vrhu računalne domene. Upravo zbog toga je u programskom paketu OpenFOAM® implementirana aplikacija koja na vrhu domene zadaje pravilne rubne uvjete za brzinu, turbulentnu kinetičku energiju, disipaciju turbulentne kinetičke energije, te turbulentnu viskoznost.

- Rubni uvjet za brzinu \bar{u}_{top}

Za brzinu se na vrhu domene definira rubni uvjet gradijenta (*fixedGradient*), a koji se računa iz vrijednosti dobivenih mjerenjima u zračnom tunelu.

- Rubni uvjet za turbulentnu kinetičku energiju k_{top}

Na vrhu računalne domene se zadaje vrijednost turbulentne kinetičke energije dobivene iz mjerenih podataka.

- Rubni uvjet za disipaciju turbulentne kinetičke energije ε_{top}

Vrijednost disipacije turbulentne kinetičke energije na vrhu domene se dobiva iz relacija koje su definirane standardnim $k - \varepsilon$ modelom turbulencije:

$$\varepsilon_{\text{top}} = C_{\mu} \frac{k(y)_{\text{top}}^2}{(\nu_{\text{T}}(y))_{\text{top}}}. \quad (3.87)$$

- Rubni uvjet za turbulentnu viskoznost $(\nu_{\text{T}})_{\text{top}}$

Vrijednost turbulentne viskoznosti na vrhu računalne domene se računa pomoću sljedećeg izraza:

$$(\nu_{\text{T}})_{\text{top}} = \frac{(R_{\text{xy}}^{\text{exp}}(y))_{\text{top}}}{\left(\frac{\partial \bar{u}(y)}{\partial y}\right)_{\text{top}}} - \nu. \quad (3.88)$$

3.4.3. ABL zidna funkcija

Kako bi se pravilno mogao numerički modelirati atmosferski granični sloj, odnosno kako bi se pravilno riješile sve karakteristične veličine u atmosferskom graničnom sloju, implementirana je zidna funkcija za hrapave zidne stijenke koja u obzir uzima i aerodinamičku duljinu hrapavosti z_0 [21]:

$$\tau_w = \frac{\bar{u}(z_{\text{P}})u_{\tau}\kappa}{\ln\left(\frac{z_{\text{P}} + z_0}{z_0}\right)}, \quad (3.89)$$

a brzina trenja u_{τ} se računa kao:

$$u_{\tau} = C_{\mu}^{\frac{1}{4}} \sqrt{k(z_{\text{P}})}. \quad (3.90)$$

Disipacija turbulentne kinetičke energije u konačnom volumenu uz zid se dobiva sljedećim izrazom:

$$\varepsilon_{\text{P}} = \frac{u_{\tau}^3}{\kappa(z_{\text{P}} + z_0)}, \quad (3.91)$$

a za turbulentnu kinetičku energiju k se koristi Neumannov *zero gradient* rubni uvjet. Turbulentna produkcija $P(y)$ u zidnoj funkciji se dobiva pomoću sljedećeg izraza:

$$P_P = \tau_w \nabla \bar{u}(z_P), \quad (3.92)$$

što predstavlja formulaciju koju obično koristi OpenFOAM®. Za zadanu vrijednost z_0 izračunatu kao:

$$z_0 = \frac{z_P}{e^D - 1}, \quad (3.93)$$

moguće je kreirati brzinu i posmično naprežanje konzistentno s vrijednostima dobivenim mjerenjima. Također valja napomenuti kako je z_P centar konačnog volumena smještenog uz zidnu stijenku, $\bar{u}(z_P)$ je mjerena osrednjena brzina na zadanoj udaljenosti, dok je:

$$D = \frac{\bar{u}(z_P) \kappa}{u_\tau}. \quad (3.94)$$

Korištenjem zidne funkcije koja u obzir uzima i aerodinamičku duljinu hrapavosti z_0 moguće je modelirati uvjete podne hrapavosti koja je korištena prilikom eksperimentalnog mjerenja atmosferskog graničnog sloja u zračnom tunelu. To je jedan od glavnih preduvjeta za konzistentno numeričko modeliranje AGS-a.

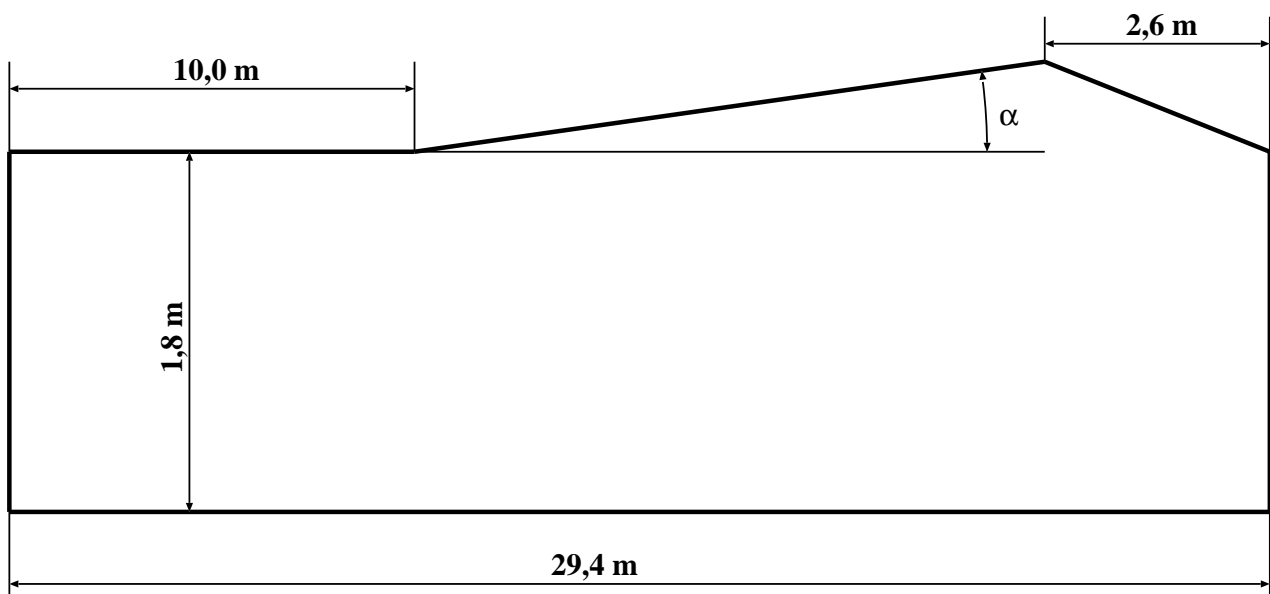
4. Numeričke postavke

U ovom poglavlju će biti opisane postavke korištene za numeričku simulaciju atmosferskog graničnog sloja. Prikazat će se računalna domena, korištena mreža konačnih volumena, korišteni rubni uvjeti, te sheme diskretizacija.

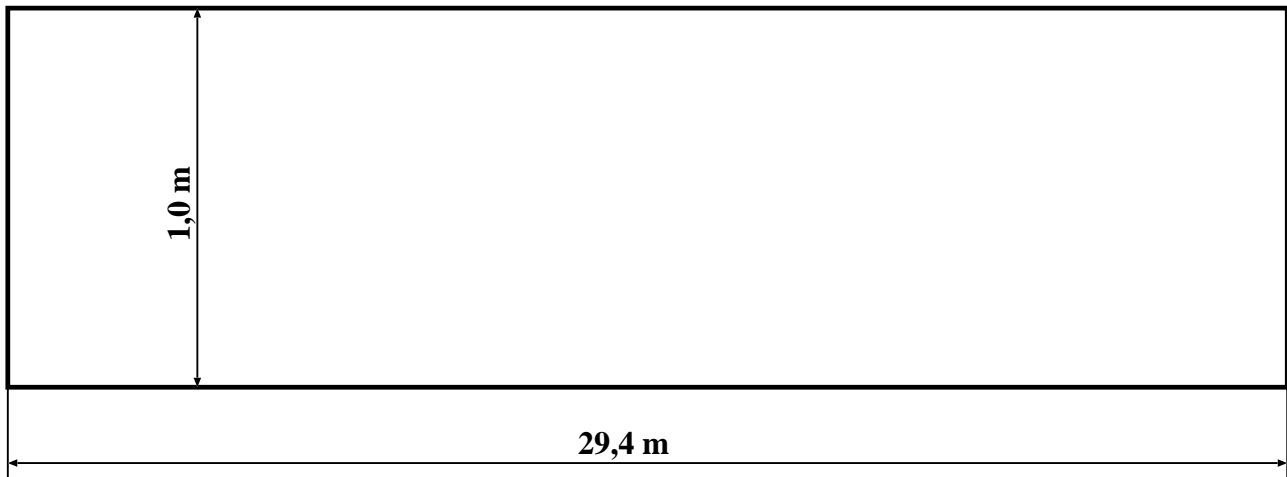
4.1. Računalna domena

Računalna domena korištena u svrhu simulacija atmosferskog graničnog sloja generirana je s obzirom na dimenzije zračnog tunela u kojem su vršena eksperimentalna mjerenja na Tehničkom Sveučilištu u Münchenu [21]. S ciljem anuliranja gradijenta tlaka, zračni tunel je izveden s difuzorom uslijed kojeg dolazi do poništavanja pada tlaka, a čime se postiže pravilno eksperimentalno modeliranje graničnog sloja.

Kako je osnovna ideja novog modela anuliranja gradijenta tlaka korištenjem izvorskog člana **WS** implementiranog u jednadžbu količine gibanja, računalna domena je generirana bez difuzora.

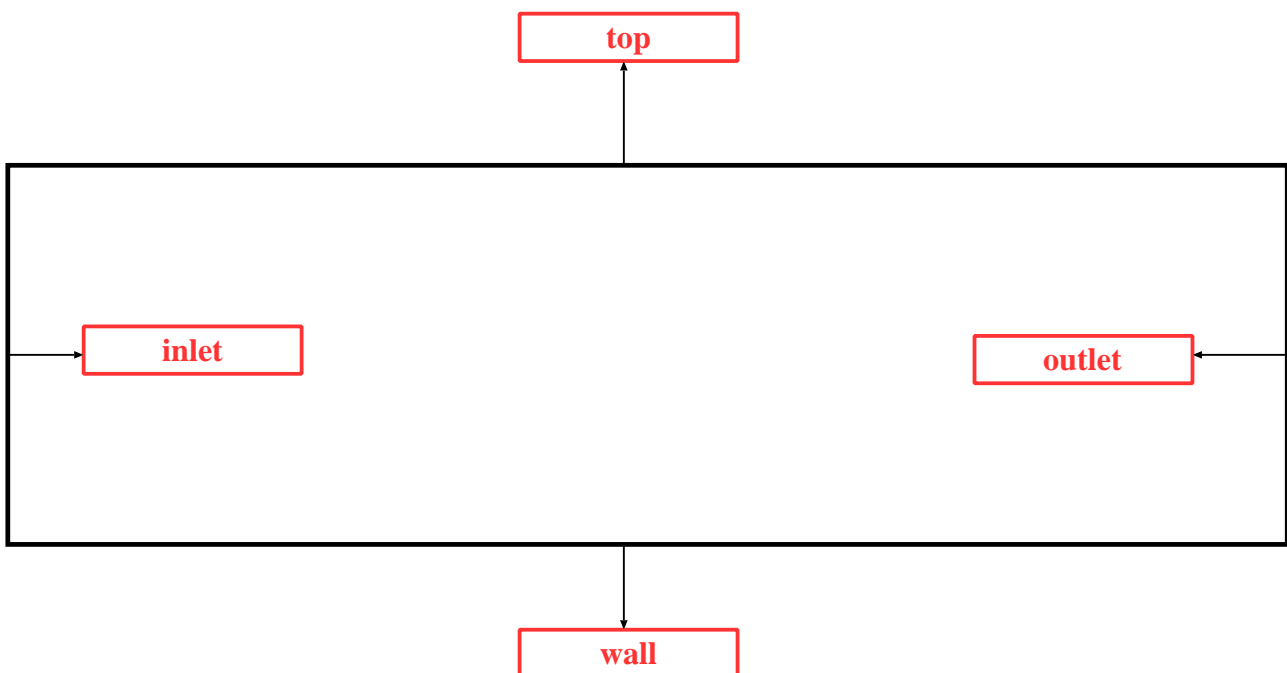


Slika 14: Shematski prikaz zračnog tunela u kojem su vršena mjerenja



Slika 15: Shematski prikaz računalne domene korištene za numeričke simulacije atmosferskog graničnog sloja

Računalna domena je omeđena s četiri ravnine (*patch-a*) nazvane *inlet*, *outlet*, *wall* i *top*. U ravnini *inlet* se definira ulazni profil atmosferskog graničnog sloja, dok se na *top*-u zadaju konzistentne vrijednosti (kao što je već napomenuto). Ravnina *wall* predstavlja zidnu stijenku, a *outlet* ravninu koja definira kraj računalne domene u horizontalnom smjeru (smjeru strujanja). Na Slika 16. je prikazana shema računalne domene s definiranim ravninama.



Slika 16: Shema računalne domene s prikazom definiranih *patch*-eva

4.2. Prostorna diskretizacija računalne domene mrežom konačnih volumena

Računalna domena je po duljini diskretizirana s petnaest konačnih volumena, s obzirom da je strujanje homogeno, a svi gradijenti po duljini domene jednaki nuli.

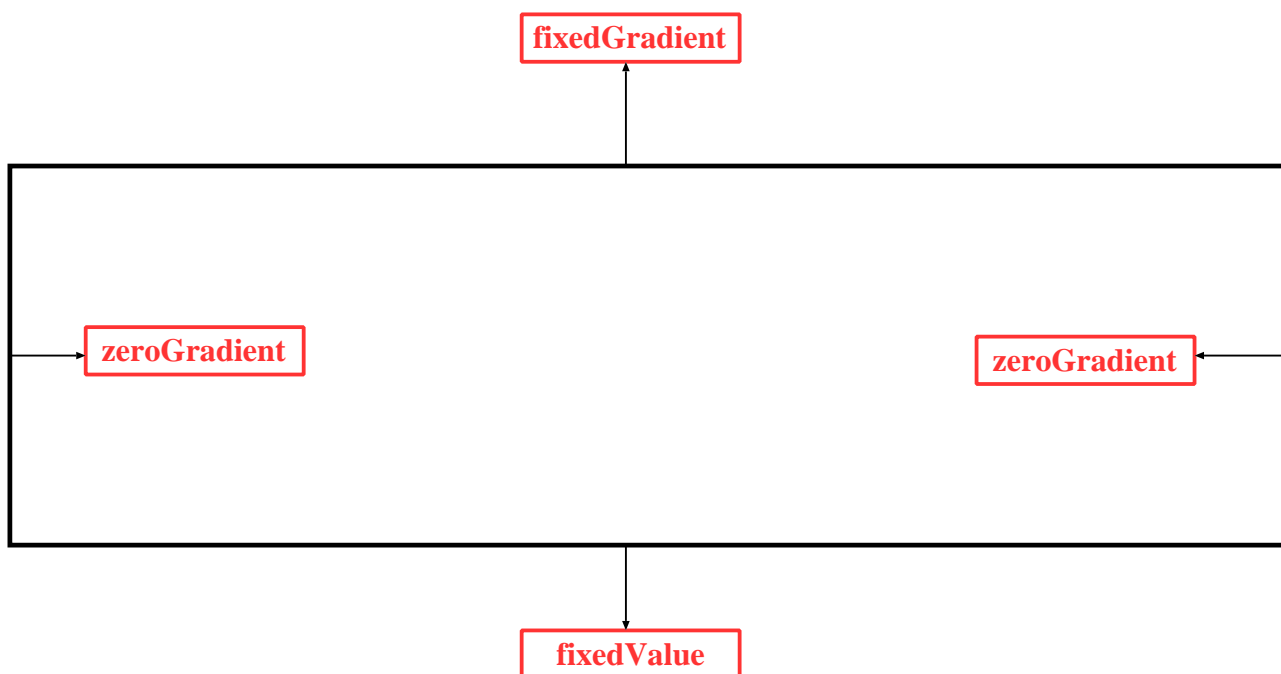
Po visini je diskretizacija uvjetovana veličinom prvog volumena uz *patch wall*. Naime, potrebno je voditi računa o tome da se centar (središte) prvog volumena uz zidnu stijenkku nalazi u inercijalnom podsloju. Također je za svaki od tri tipa terena korištena mreža konačnih volumena za koju se pokazalo da se rješenja rezultata više ne mijenjaju s dodatnim profinjenjem mreže. To je izrazito važno s obzirom da se kod strujanja homogenog atmosferskog graničnog sloja veličine mijenjaju samo s porastom visine, te se na taj način isključuju eventualne greške prostorne diskretizacije.

4.3. Zadani rubni uvjeti

- Rubni uvjeti za brzinu \bar{u}

Za brzinu \bar{u} se na *patch*-evima *inlet* i *outlet* zadaje Neumannov *zeroGradient* rubni uvjet. Na *patch*-u *wall* se zadaje rubni uvjet zadane vrijednosti *fixedValue* ($\bar{u} = 0$), dok se na *top*-u zadaje vrijednost konstantnog gradijenta koja se računa iz eksperimentalnih mjerenja u zračnom tunelu.

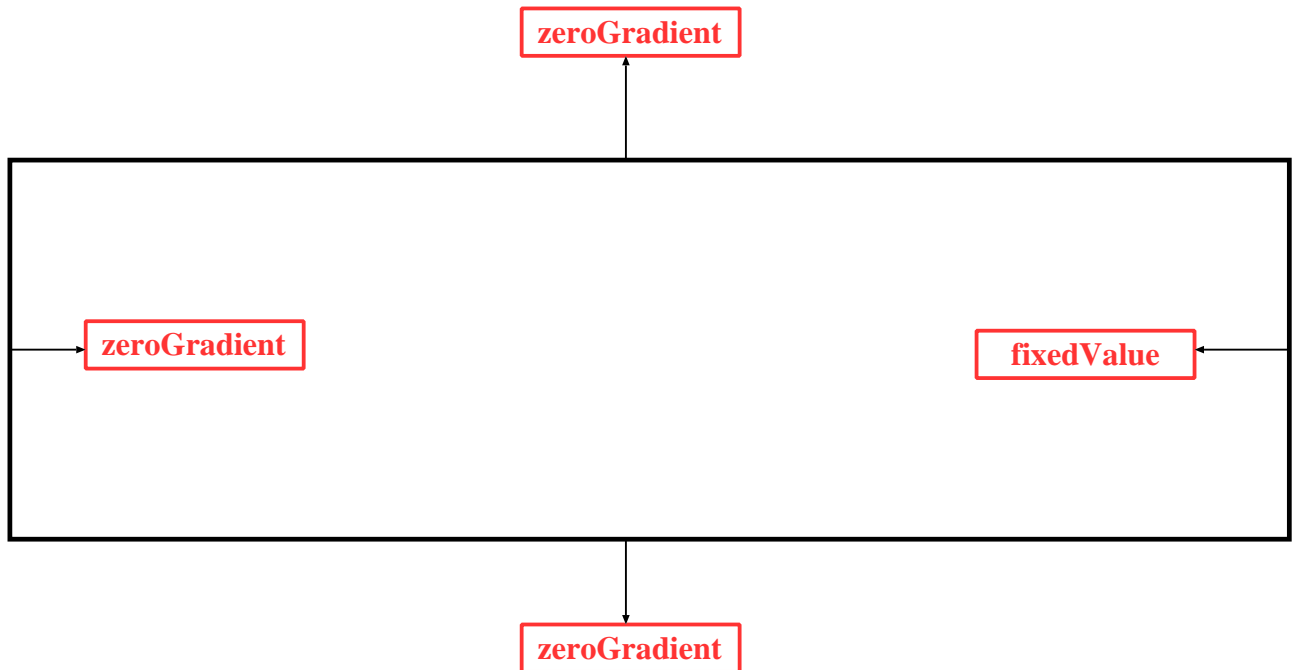
Kako bi se ubrzala konvergencija numeričkog rješavanja diskretiziranih jednadžbi matematičkog modela, za brzinu su zadani početni uvjeti na način da je izračunat početni profil dobiven eksponencijalnim zakonom (engl., *power-law*). Parametri korišteni za dobivanje profila brzine za sva tri tipa terena su dani u Tablica 4.

Slika 17: Zadani rubni uvjeti za brzinu \bar{u}

Tablica 4. Parametri eksponencijalnog zakona korištenog za definiranje početnih uvjeta za brzinu $\bar{u}(y)$

Tip terena	α	$z_{\text{ref}}, \text{ m}$	$\bar{u}_{\text{ref}}, \text{ m/s}$	$u_{\tau}, \text{ m/s}$
Ruralni teren	0,16	0,202	14,97	1,11
Suburbani teren	0,20	0,202	13,48	1,10
Urbani teren	0,37	0,202	10,14	1,43

- Rubni uvjeti za tlak p



Slika 18: Zadani rubni uvjeti za tlak p

Za tlak je potrebno zadati rubni uvjet *fixedValue* na jednom od *patch*-eva. S obzirom na uvjete strujanja, na *patch*-u *outlet* je tlak zadan s vrijednosti:

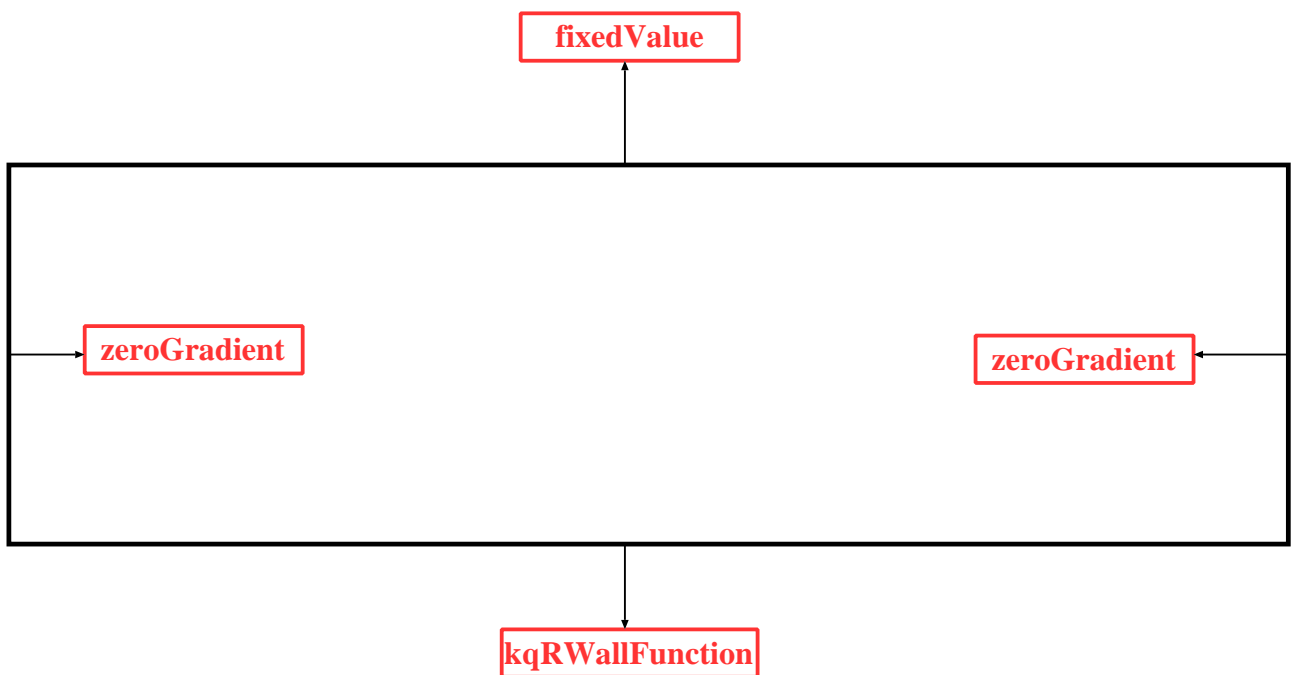
$$p_{\text{outlet}} = 0. \quad (4.1)$$

U OpenFOAM®-u se zadaje kinematska vrijednost tlaka (vrijednost tlaka podijeljena s gustoćom), te tako zadana statička komponenta tlaka neće utjecati na numerički proračun s obzirom da je razlika tlaka (gradijent tlaka) između *inlet*-a i *outlet*-a jedino što nas zanima.

Na ostalim *patch*-evima je zadan Neumannov rubni uvjet *zeroGradient*. Na Slika 18. je dan shematski prikaz rubnih uvjeta definiranih za tlak.

- Rubni uvjeti za turbulentnu kinetičku energiju k

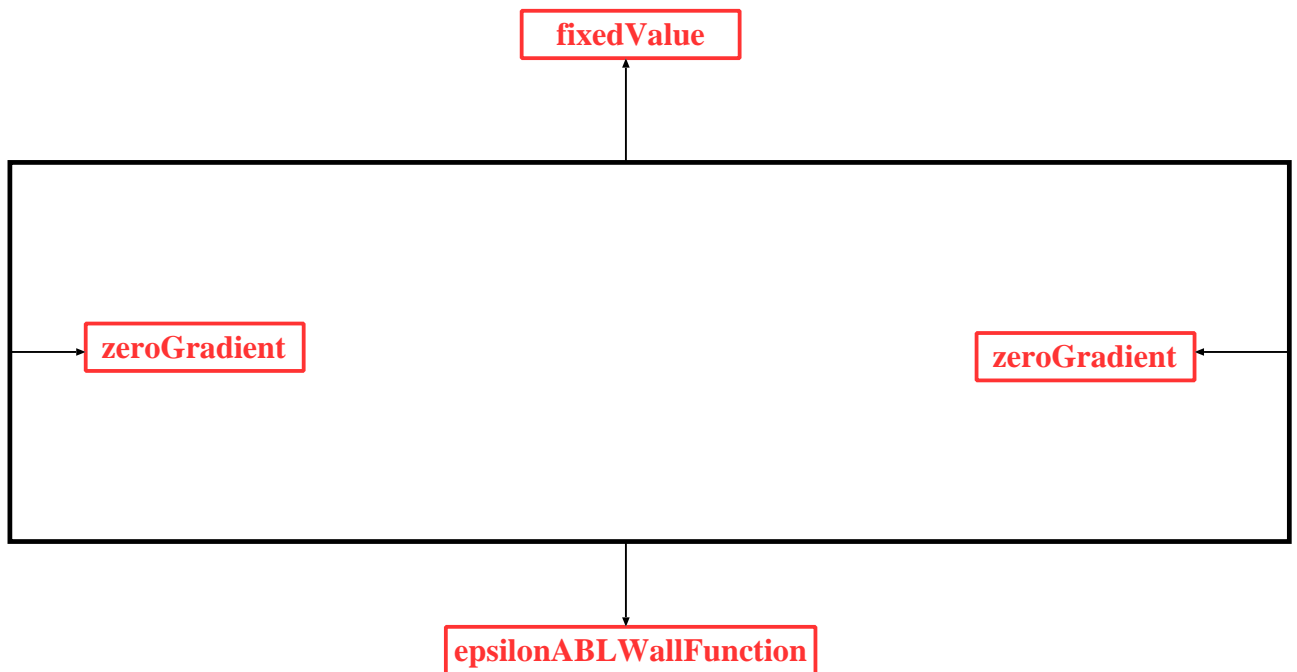
Za kinetičku energiju je potrebno zadati rubni uvjet zidne funkcije na zidu, te je u skladu s time zadana zidna funkcija $kqRWallFunction$ na *patch*-u *wall*. Kako je već napomenuto, ukoliko se primjenjuje zidna funkcija za disipaciju turbulentne kinetičke energije, za turbulentnu kinetičku energiju na zidu je potrebno definirati Neumannov rubni uvjet (što je učinjeno zadavanjem $kqRWallFunction$ na *patch*-u *wall*). Na *patch*-u *top* se vrijednost turbulentne kinetičke energije računa iz mjerenih podataka s ciljem zadavanja konzistentnog rubnog uvjeta.



Slika 19: Zadani rubni uvjeti za turbulentnu kinetičku energiju k

- Rubni uvjeti za disipaciju turbulentne kinetičke energije ε

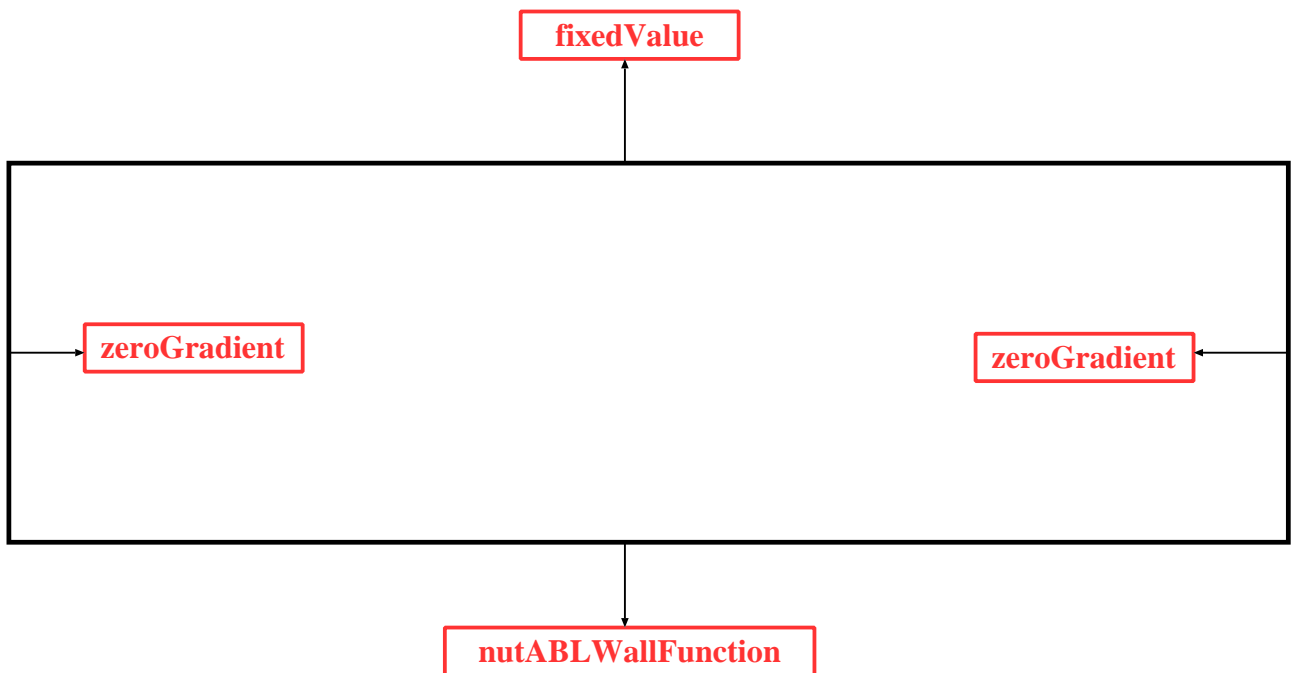
Za disipaciju turbulentne kinetičke energije je na *patch*-u *wall* definirana zidna funkcija *epsilonABLWallFunction*, koja je opisana u matematičkom modelu. Na *patch*-u *top* se vrijednost disipacije turbulentne kinetičke energije računa prema jednadžbi (3.87).



Slika 20: Zadani rubni uvjeti za disipaciju turbulentne kinetičke energije ε

- Rubni uvjeti za turbulentnu viskoznost ν_T

Na *patch*-u *wall* je potrebno zadati zidnu funkciju (*nutABLWallFunction*) za rješavanje turbulentne viskoznosti uz zidnu stijenku, dok je na *patch*-u *top* potrebno zadati konzistentu vrijednost koja se računa prema jednadžbi (3.88).



Slika 21: Zadani rubni uvjeti za turbulentnu viskoznost ν_T

4.4. Zadani parametri zidne funkcije

U Tablica 5. su dane vrijednosti osnovnih parametara zidne funkcije korištenih za simulaciju atmosferskog graničnog sloja za sva tri tipa terena.

Tablica 5. Parametri zidne funkcije korišteni za simulaciju atmosferskog graničnog sloja (Juretić i Kozmar [21])

Tip terena	Aerodinamička hrapavost z_0 , m	Koeficijent turbulencije C_μ
Ruralni teren	$1,7 \cdot 10^{-3}$	0,044
Suburbani teren	$4,00 \cdot 10^{-3}$	0,044
Urbani teren	$1,55 \cdot 10^{-2}$	0,044

4.5. Sheme diskretizacije korištene za simulaciju atmosferskog graničnog sloja

U Tablica 6. je dan kratak pregled shema diskretizacija korištenih za diskretizaciju članova jednadžbi matematičkog modela.

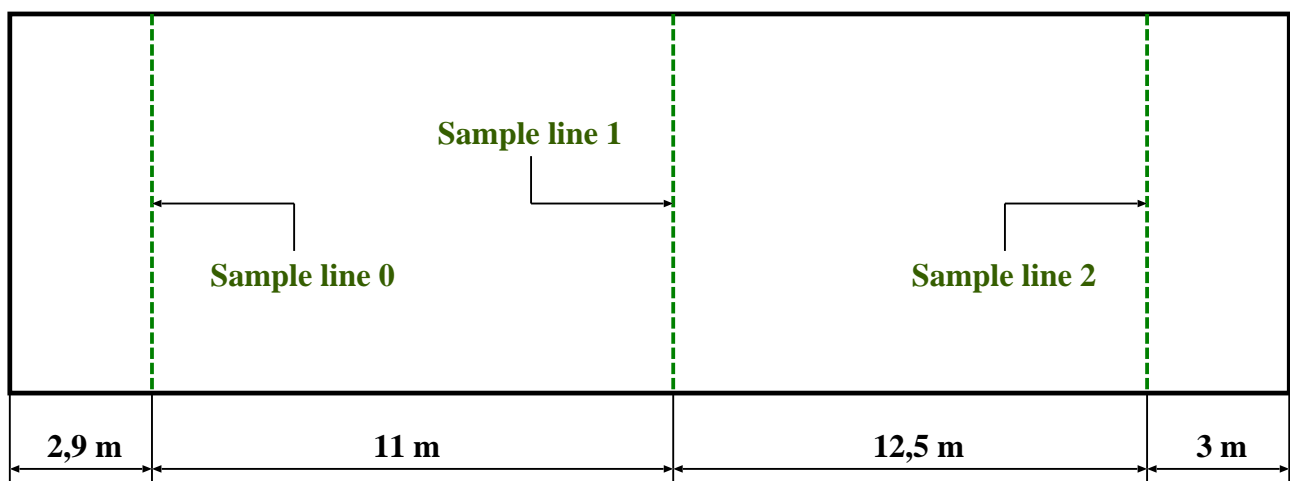
Tablica 6. Korištene sheme diskretizacija članova jednadžbi modela

Član	Shema
Gradijent	Metoda najmanjih kvadrata (<i>least squares method</i>)
Interpolacija	Linearna interpolacija (<i>linear interpolation</i>)
Difuzijski član	Linearna shema s korekcijom (<i>Gauss linear corrected</i>)
Konveksijski član	Shema s limiterom (<i>Gamma differencing scheme</i> [18])

5. Rezultati

Validacija novog numeričkog modela za simulaciju atmosferskog graničnog sloja je vršena na tri različita tipa terena, ruralnom, suburbanom i urbanom terenu. Rezultati za brzinu $\bar{u}(y)$, naprezanje $R_{xy}(y)$ i turbulentnu kinetičku energiju $k(y)$ su mjereni na tri različita mjesta u domeni kao što je prikazano na Slika 22. Na taj način je pokazana najvažnija karakteristika modela, a to je da omogućuje homogenost strujanja (fizikalne veličine se ne smiju mijenjati po duljini domene). Za svaki mjereni profil fizikalne veličine je također dana njegova usporedba s eksperimentalnim vrijednostima (mjerene vrijednosti preuzete iz Juretić, Kozmar [21]).

S obzirom da se u području industrijske aerodinamike ili aerodinamike okoliša rezultati često prikazuju u bezdimenzijskom obliku, rezultati za brzinu i naprezanje su u ovome radu normirani. Tako je brzina normirana s referentnom brzinom \bar{u}_{ref} za zadani tip terena $\left(\frac{\bar{u}}{\bar{u}_{\text{ref}}}\right)$, dok je naprezanje normirano s kvadratom brzine trenja u_{τ} $\left(\frac{R_{xy}}{u_{\tau}^2}\right)$, odnosno prema Juretić, Kozmar [21]. Vrijednosti veličina \bar{u}_{ref} i u_{τ} kojima se vršilo normiranje rezultata su dane u Tablica 4.



Slika 22: Mjesta u računalnoj domeni na kojima su vršena mjerenja izračunatih veličina

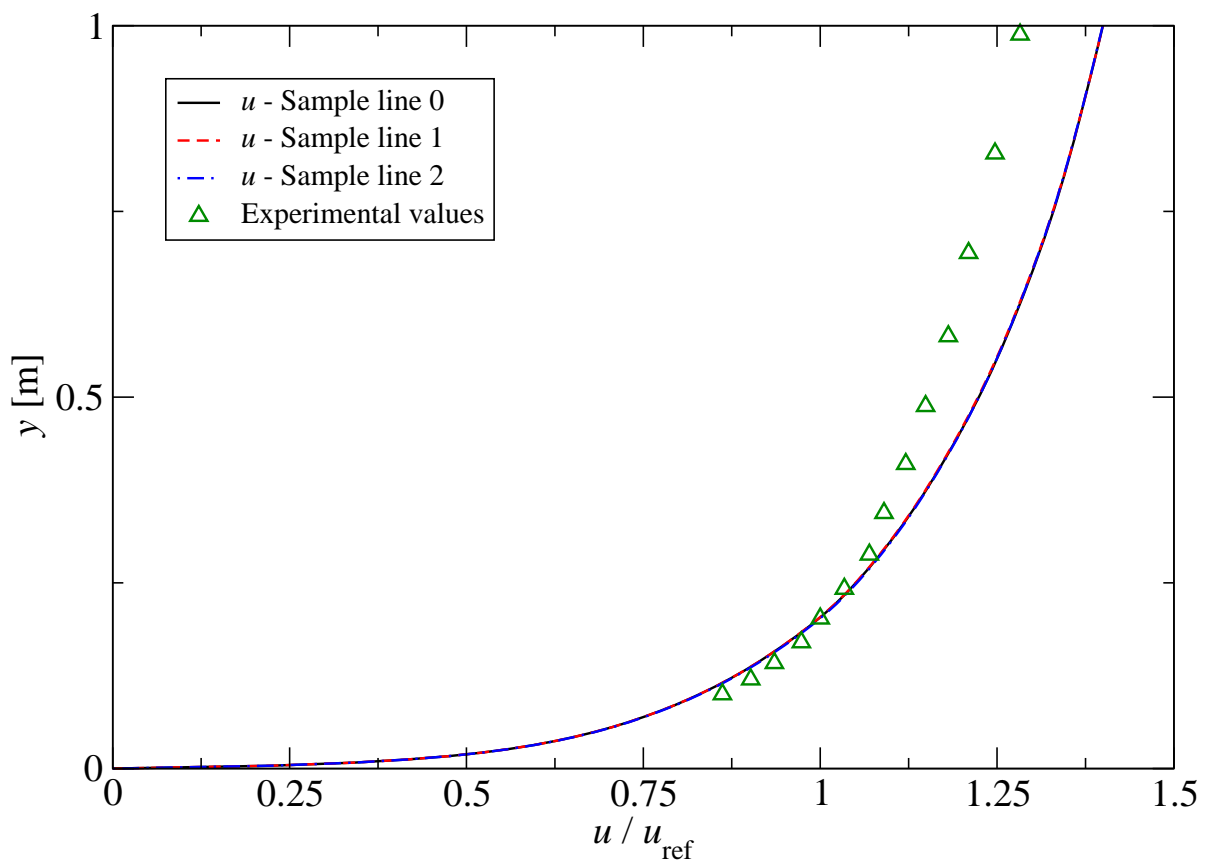
5.1. Ruralni tip terena

5.1.1. Rezultati brzine $\bar{u}(y)$ za ruralni tip terena

Na Slika 23. je dana usporedba rezultata brzine $\bar{u}(y)$ i eksperimentalnih mjerenja u zračnom tunelu za ruralni tip terena.

Može se lako primjetiti kako se do visine od $y \approx 0,2$ m izračunati i mjereni podaci jako dobro poklapaju, dok su za visine $y > 0,2$ m izračunate vrijednosti malo veće nego one mjerene. Takvi rezultati su u skladu s numeričkim rezultatima danim u Juretić, Kozmar [21], gdje su za ruralni tip terena pokazane slične karakteristike profila brzine.

Profili brzina mjereni na različitim mjestima u domeni se u potpunosti poklapaju, čime se može potvrditi kako je s obzirom na brzinu strujanje u potpunosti homogeno po duljini računalne domene.



Slika 23: Normirani rezultati brzine $\bar{u}(y)$ za ruralni tip terena

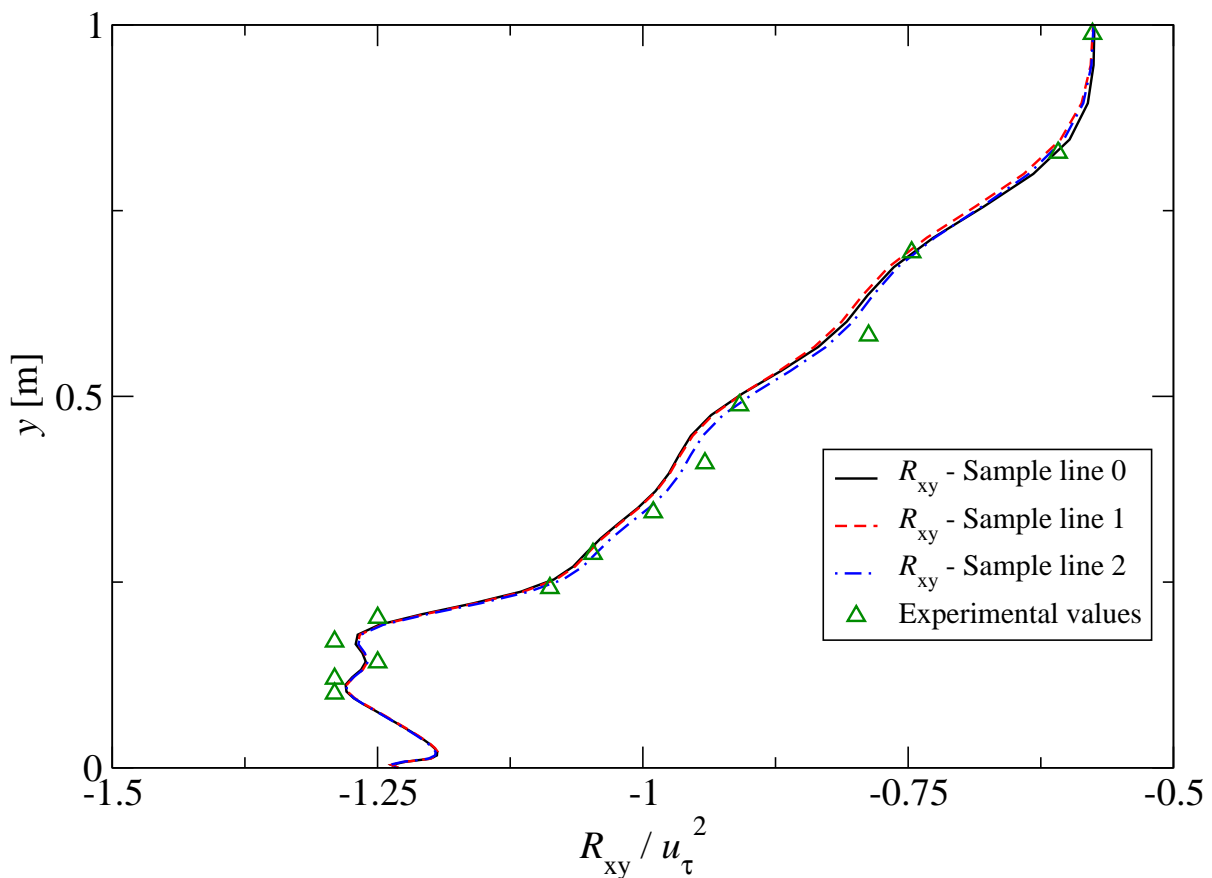
5.1.2. Rezultati naprezanja $R_{xy}(y)$ za ruralni tip terena

Na Slika 24. je dana usporedba rezultata naprezanja $R_{xy}(y)$ po visini računalne domene i eksperimentalnih mjerenja u zračnom tunelu za ruralni tip terena.

Polje naprezanja mjereno na sva tri mjesta u računalnoj domeni pokazuje dobra poklapanja s mjerenim rezultatima (greška je unutar $\approx 8\%$). Najbolja poklapanja su ostvarena u području gdje je visina $y > 0,6$ m što je i očekivano s obzirom da je u gornjem području domene najveći utjecaj rubnih uvjeta koji su egzaktno zadavani na vrhu računalne domene.

U području gdje je visina $y < 0,2$ m razlike su najveće. Razlog tomu je najvjerojatnije utjecaj zidne funkcije čija matematička formulacija dovoljno dobro ne opisuje uvjete strujanja.

Profili polja naprezanja mjereni na tri različita mjesta u domeni pokazuju da je strujanje homogeno s obzirom na naprezanje. Rezultati naprezanja mjereni na kraju domene pokazuju malena odstupanja s obzirom na rezultate u prednjem i srednjem dijelu domene.



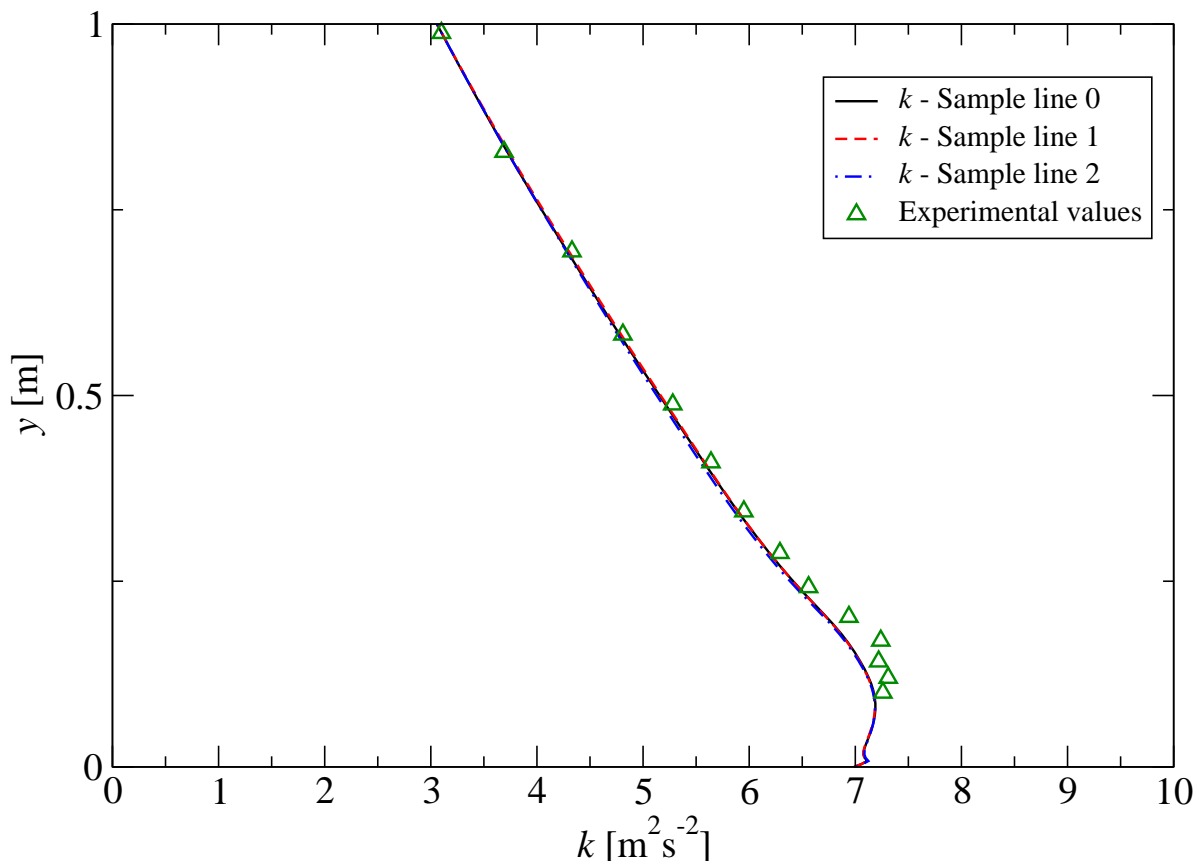
Slika 24: Normirani rezultati naprezanja R_{xy} za ruralni tip terena

5.1.3. Rezultati turbulentne kinetičke energije $k(y)$ za ruralni tip terena

Na Slika 25. je dana usporedba izračunatih vrijednosti turbulentne kinetičke energije $k(y)$ po visini računalne domene i eksperimentalnih mjerenja u zračnom tunelu za ruralni tip terena.

Na visinama većim od $y \approx 0,25$ m, mjerene i izračunate vrijednosti se gotovo u potpunosti poklapaju, dok su na visinama manjim od $y \approx 0,25$ m razlike unutar $\approx 5\%$. U samom dnu računalne domene može se uočiti lom profila koji je uzrokovan nekonzistentnim zidnim funkcijama.

Profili turbulentne kinetičke energije $k(y)$ mjereni na prednjem, srednjem i zadnjem dijelu domene se gotovo u potpunosti poklapaju, čime se potvrđuje homogenost strujanja.



Slika 25: Rezultati turbulentne kinetičke energije k za ruralni tip terena

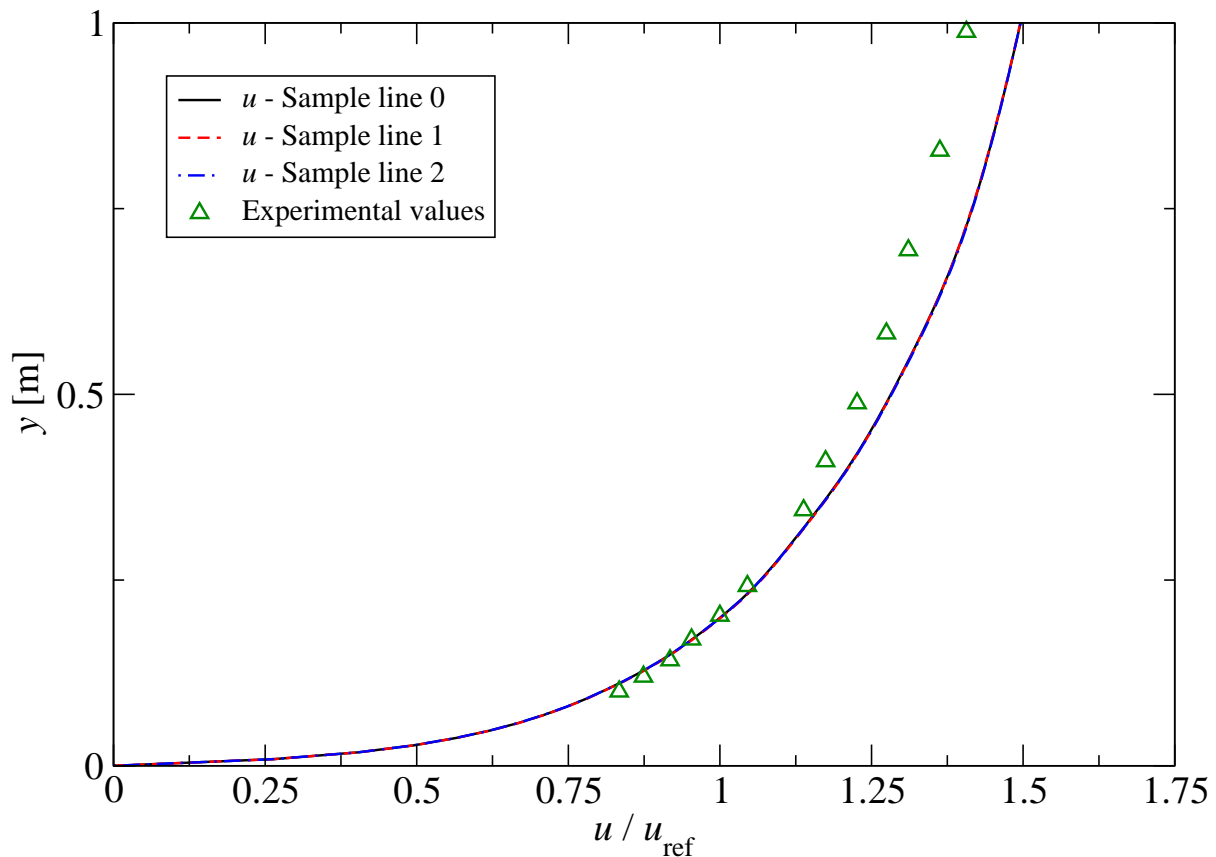
5.2. Suburbani tip terena

5.2.1. Rezultati brzine $\bar{u}(y)$ za suburbani tip terena

Na Sliku 26. je dana usporedba izračunatih vrijednosti brzine $\bar{u}(y)$ po visini računalne domene i eksperimentalnih mjerenja u zračnom tunelu za suburbani tip terena.

Do visine od $y \approx 0,3$ m postižu se dobra poklapanja izračunate brzine i mjerenih vrijednosti, a iznad te visine brzine dobivene numeričkim modelom su malo većih vrijednosti. Takva rješenja su u skladu s rezultatima dobivenim metodom rješavanja atmosferskog graničnog sloja danom u Juretić, Kozmar [21].

Jednako kao i u slučaju ruralnog tipa terena, profili brzina mjereni na tri različita mjesta računalne domene se u potpunosti poklapaju što potvrđuje homogenost strujanja.



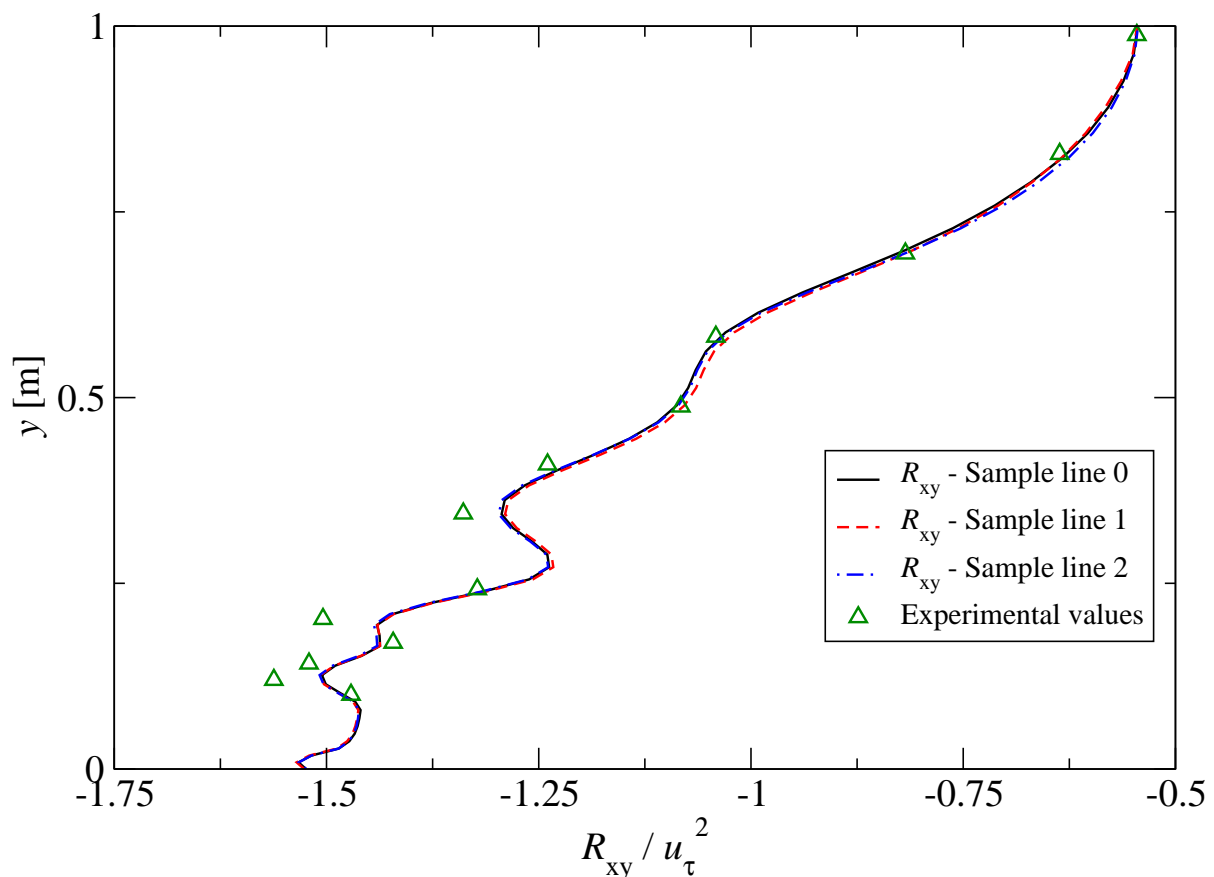
Slika 26: Normirani rezultati brzine $\bar{u}(y)$ za suburbani tip terena

5.2.2. Rezultati naprezanja $R_{xy}(y)$ za suburbani tip terena

Na Slika 27. je dana usporedba izračunatih vrijednosti naprezanja $R_{xy}(y)$ po visini računalne domene i eksperimentalnih mjerenja u zračnom tunelu za suburbani tip terena.

U gornjem dijelu domene ($y > 0,4$ m) se rezultati i mjerenja u potpunosti poklapaju, dok u donjem dijelu domene ($y < 0,4$ m) naprezanje ima tendenciju ostvarenja profila eksperimentalnih vrijednosti, ali s greškom ne većom od $\approx 10\%$.

Kao i u slučaju naprezanja dobivenog za ruralni tip terena, ponovno se može primjetiti kako postoji problem sa zidnom funkcijom uz zidnu stijenu (u donjem dijelu domene gdje je $y \approx 0$ m). Sva tri profila izračunatih profila naprezanja se poklapaju, te se može zaključiti kako je ostvarena homogenost strujanja s obzirom na dobivena naprezanja u računalnoj domeni.

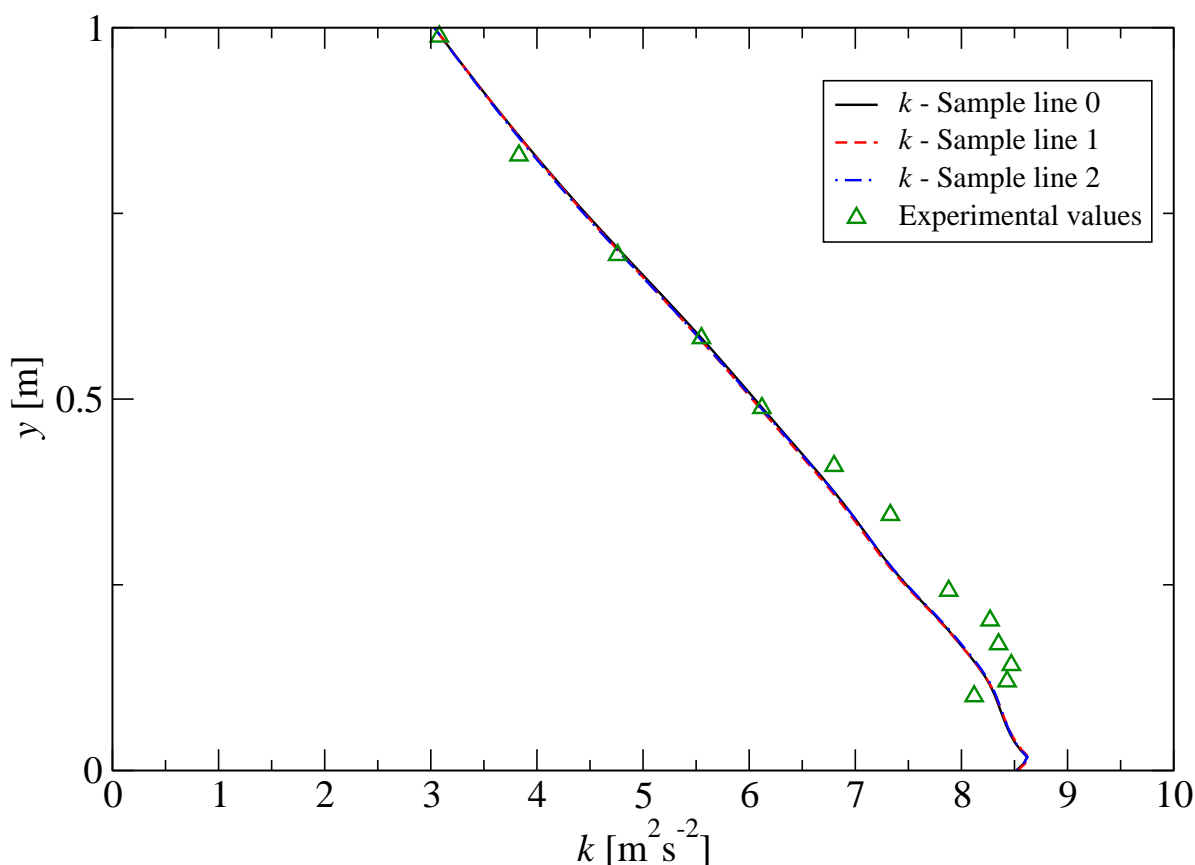


Slika 27: Normirani rezultati naprezanja R_{xy} za suburbani tip terena

5.2.3. Rezultati turbulentne kinetičke energije $k(y)$ za suburbani tip terena

Na Sliku 28. je dana usporedba izračunatih vrijednosti turbulentne kinetičke energije $k(y)$ po visini računalne domene i eksperimentalnih mjerenja u zračnom tunelu za suburbani tip terena. Najbolja poklapanja numeričkih vrijednosti i mjerenja su u gornjem dijelu domene, odnosno na visinama većim od $y \approx 0,5$ m. Na visinama manjim od $y \approx 0,5$ m, greška je sve veća kako se profil približava zidu. Upravo u području uz zid se ne može pravilno reproducirati stvarni profil turbulentne kinetičke energije.

Jednako kao i kod ruralnog tipa terena, ponovno u području uz zidnu stijenku postoji lom profila turbulentne kinetičke energije nastao zbog problema vezanih uz primjenu funkcije zida.



Slika 28: Rezultati turbulentne kinetičke energije k za suburbani tip terena

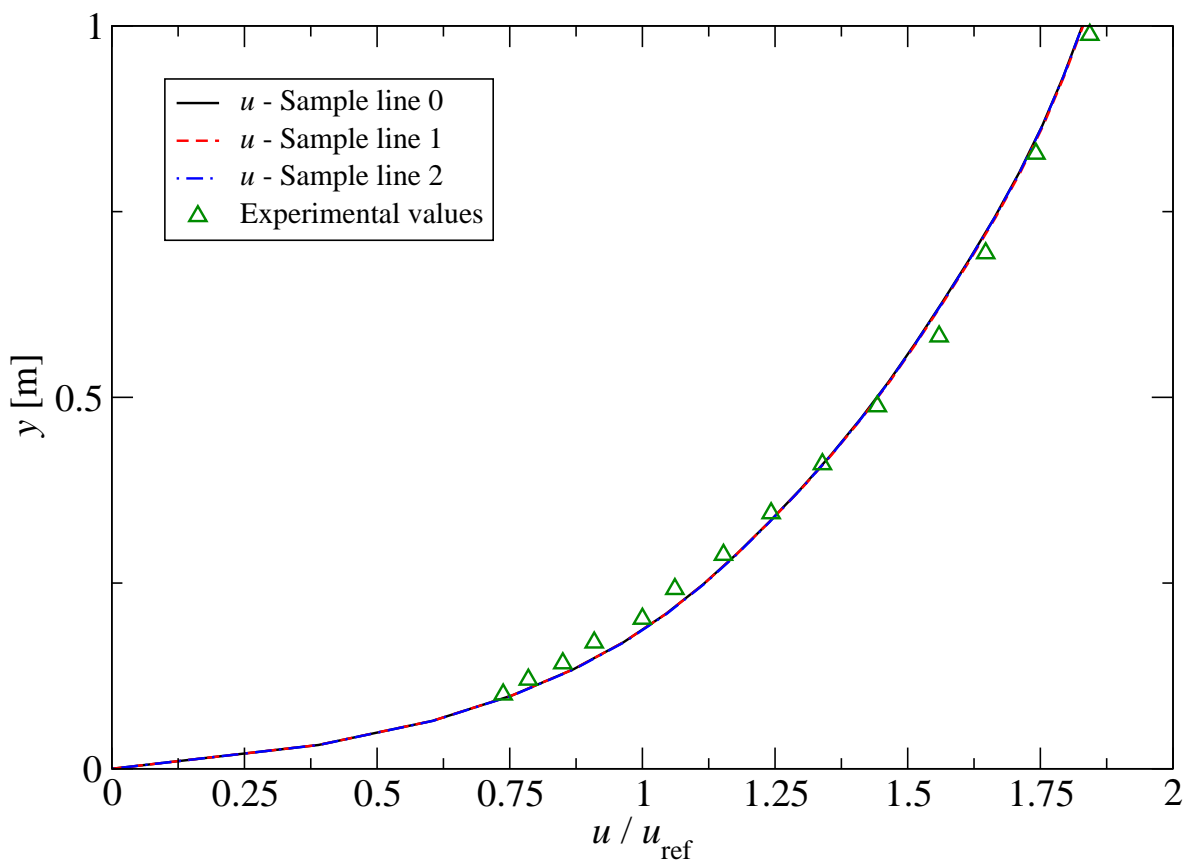
5.3. Urbani tip terena

5.3.1. Rezultati brzine $\bar{u}(y)$ za urbani tip terena

Na Sliku 29. je dana usporedba rezultata brzine $\bar{u}(y)$ i eksperimentalnih mjerenja u zračnom tunelu za urbani tip terena.

Može se primjetiti kako se rezultati brzine po cijeloj visini računalne domene praktički u potpunosti poklapaju s eksperimentalnim mjerenjima u zračnom tunelu, te su takvi rezultati slični onima dobivenima u Juretić, Kozmar [21].

Osim toga, iz rezultata se može zaključiti da je strujanje i za urbani tip terena homogeno s obzirom da se profili brzina mjereni na tri različita mjesta u računalnoj domeni u potpunosti poklapaju.



Slika 29: Normirani rezultati brzine $\bar{u}(y)$ za urbani tip terena

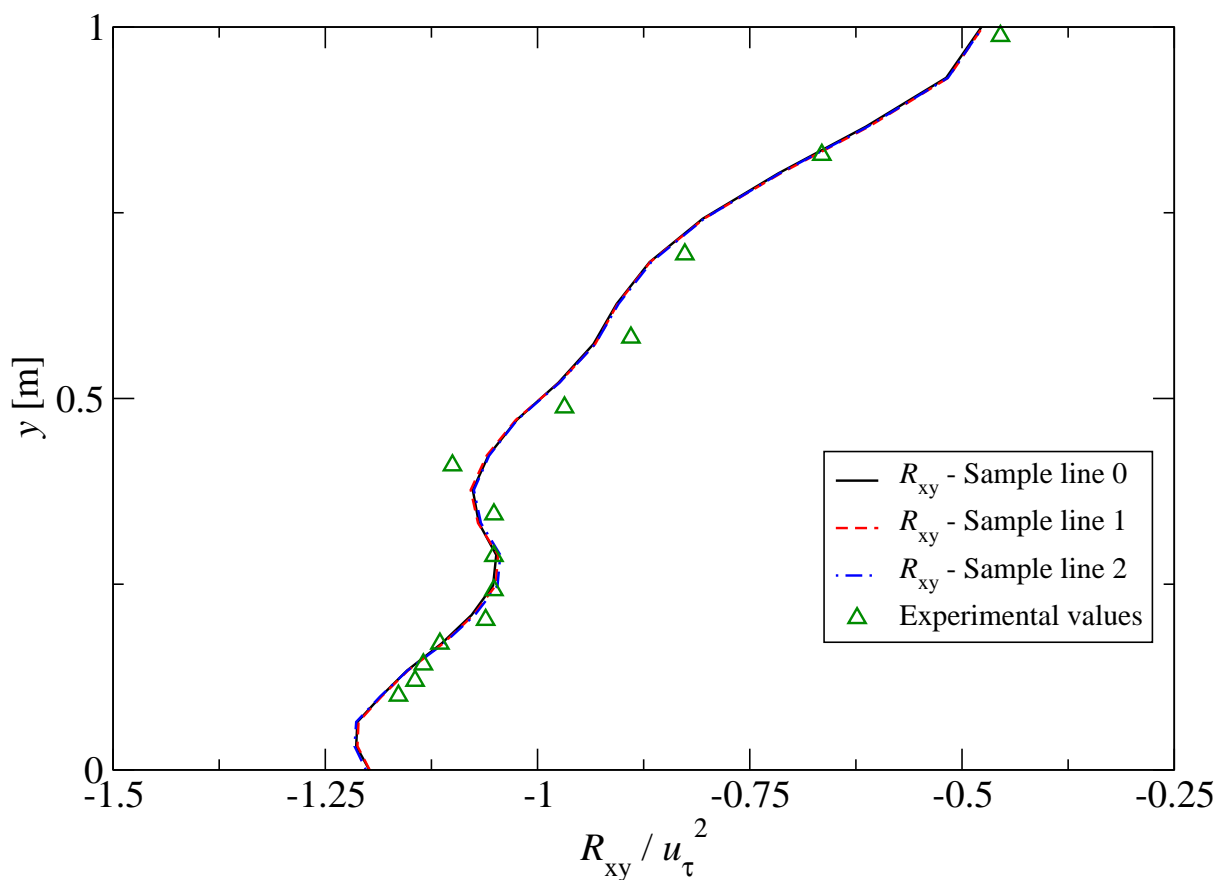
5.3.2. Rezultati naprezanja $R_{xy}(y)$ za urbani tip terena

Na Sliku 30. je dana usporedba rezultata naprezanja $R_{xy}(y)$ i eksperimentalnih mjerenja u zračnom tunelu za urbani tip terena.

Profil naprezanja po visini domene pokazuje najbolja poklapanja s mjerenjima u području visina između $y \approx 0,1$ m i $y \approx 0,4$ m. Također se mjerenja i izračunate vrijednosti naprezanja odlično poklapaju na visinama većim od $y \approx 0,8$ m. U ostalim dijelovima domene se rezultati i mjerenja malo razlikuju, ali s greškom do $\approx 5\%$.

Ponovno se može primjetiti da se u donjim dijelovima domene ($y < 0,1$ m) naprezanje naglo mijenja jednako kao i kod rezultata dobivenih za ostala dva tipa terena.

S obzirom da se sva tri izračunata profila naprezanja u potpunosti poklapaju, strujanje je homogeno po duljini domene.



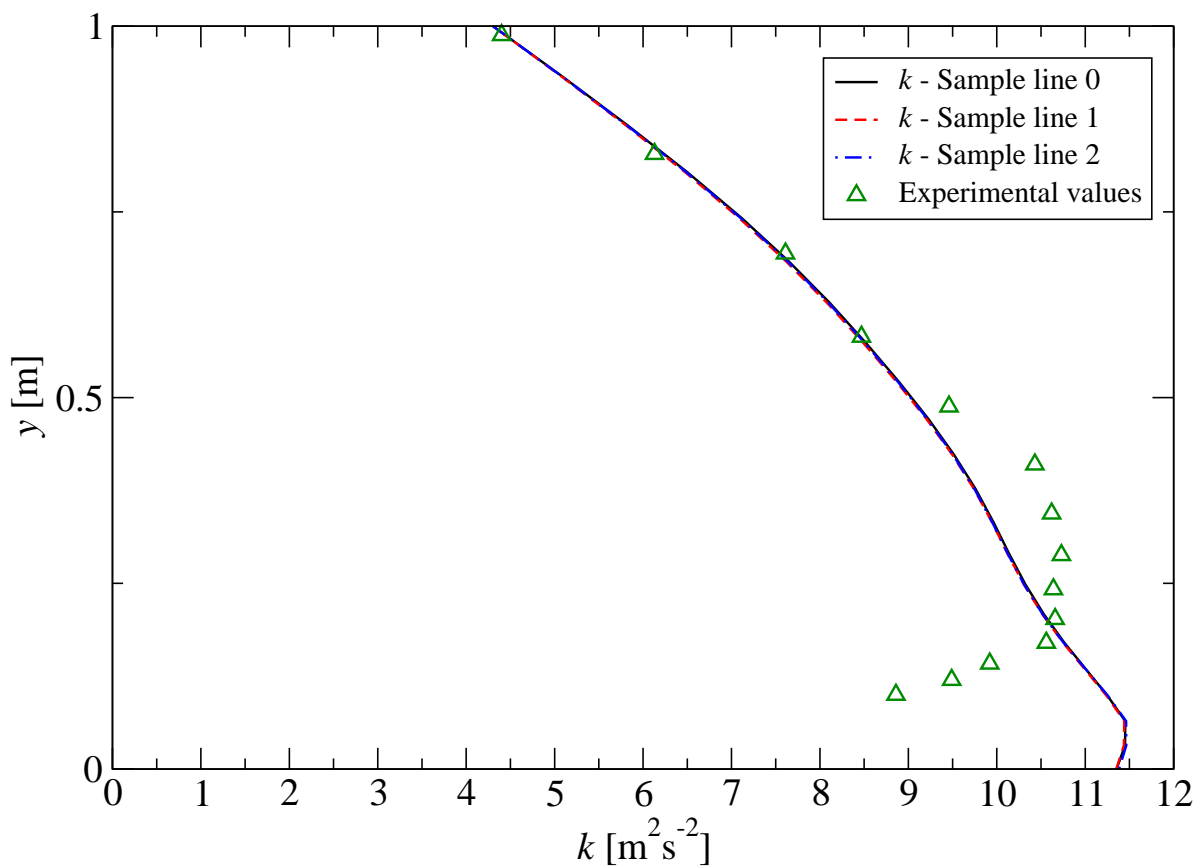
Slika 30: Normirani rezultati naprezanja R_{xy} za urbani tip terena

5.3.3. Rezultati turbulentne kinetičke energije $k(y)$ za urbani tip terena

Na Sliku 31. je dana usporedba rezultata turbulentne kinetičke energije $k(y)$ i eksperimentalnih mjerenja u zračnom tunelu za urbani tip terena.

Rezultati turbulentne kinetičke energije se izuzetno dobro poklapaju s mjerenjima na visinama većim od $y \approx 0,6$ m, dok na manjim visinama greška raste. Razlike su najveće u području blizu zida ($y < 0,1$ m).

Vrijednosti turbulentne kinetičke energije mjerene na tri različita mjesta u domeni se u potpunosti poklapaju što potvrđuje homogenost strujanja za urbani tip terena.



Slika 31: Rezultati turbulentne kinetičke energije k za urbani tip terena

6. Zaključak

U ovom radu dani su rezultati brzine $\bar{u}(y)$, naprezanja $R_{xy}(y)$ i turbulentne kinetičke energije $k(y)$ za tri različita tipa terena (ruralni, urbani i suburbani teren) dobiveni novim numeričkim modelom za simulaciju atmosferskog graničnog sloja. Pritom su uspoređeni rezultati dobiveni na tri različita mjesta u računalnoj domeni kako bi se potvrdila homogenost strujanja.

S obzirom na dobivene rezultate, može se zaključiti sljedeće:

- Najbolja poklapanja izračunatih i mjerenih brzina su dobivena za urbani tip terena, dok je greška najveća u slučaju ruralnog tipa terena. Takvi rezultati su u skladu s rezultatima dobivenima u Juretić, Kozmar [21], gdje su također razlike između izračunatih i mjerenih brzina bile najveće za ruralni tip terena, dok su najmanje bile za urbani tip terena.

Za sva tri tipa terena potvrđena je homogenost strujanja s obzirom da su izračunate vrijednosti brzine $\bar{u}(y)$ jednake na ulaznom i izlaznom dijelu domene, isto kao i u sredini računalne domene.

- Što se tiče rezultata naprezanja, dobivena su dobra poklapanja s eksperimentalnim mjerenjima za sva tri tipa terena s obzirom da razlike po visini domene nisu veće od $\approx 10\%$. No čak i na visinama unutar računalne domene na kojima su greške numeričkog modela najveće, vidljiva je tendencija postizanja egzaktnih vrijednosti naprezanja, odnosno profil naprezanja je takav da ima tendenciju postizanja mjerenih rezultata.

Najveća odstupanja od eksperimentalnih mjerenja se mogu uočiti u području uz zid (visine domene manje od $y = 0,1$ m). Uzrok takvih odstupanja je najvjerojatnije nekonzistentnost zidne funkcije kojom se modelira strujanje uz zidnu stijenu i koja bi svojom formulacijom (u obzir uzima i aerodinamičku hrapavost z_0) trebala omogućiti pravilno numeričko modeliranje rezultata dobivenih mjerenjima u zračnom tunelu za svaki od tipova terena.

Kod numeričke simulacije sva tri tipa terena postignuta su homogena polja naprezanja uzduž računalne domene. Kod rezultata sva tri tipa terena, a posebno suburbanog i urbanog terena, mogu se uočiti nagle promjene u vrijednostima naprezanja. Naime, eksperimentalne vrijednosti se izrazito mijenjaju (posebice u donjem dijelu domene), što može uzrokovati i greške koje su se javile u tom području domene. Razlog tomu je formulacija računalnog modela koji vrijednost izvorskog člana računa iz derivacije eksperimentalnih vrijednosti naprezanja, a nagle promjene vrijednosti derivacija mogu utjecati i na numerički postupak rješavanja.

- Za polje turbulentne kinetičke energije se pokazalo da je homogeno kako za ruralni, tako i za suburban i urbani tip terena, s obzirom da su rezultati na sva tri mjesta unutar računalne domene jednaki.

Najbolja poklapanja izračunatih i mjerenih vrijednosti turbulentne kinetičke energije su dobivena kod simulacije atmosferskog graničnog sloja za ruralni tip terena. Greške su nešto veće kod suburbanog terena, dok su rezultati simulacije atmosferskog graničnog sloja za urbani tip terena dali najveće razlike između eksperimentalnih i izračunatih vrijednosti turbulentne kinetičke energije. Te greške su najveće u donjem dijelu domene (na visinama manjim od $y \approx 0,5$ m). Naime, u tome području eksperimentalni profil turbulentne kinetičke energije pokazuje tendenciju naglog pada (vrijednosti se naglo smanjuju na manjim visinama), što se ne može pravilno modelirati koristeći model turbulencije s konstantnim vrijednostima koeficijenata turbulencije. Tako se npr. vrijednost koeficijenta modela turbulencije C_μ određuje koristeći jednadžbu (3.79), te se na taj način jako dobro može izračunati polje turbulentne kinetičke energije na većim visinama (visine veće od $y \approx 0,5$ m) u domeni, gdje se eksperimentalne vrijednosti praktički mogu aproksimirati pravcem. No jasno je da će na manjim visinama unutar domene, gdje se eksperimentalne vrijednosti naglo smanjuju, greška biti najveća.

Kod simulacija ruralnog i suburbanog tipa terena je uz područje zidne stijenke vidljiv lom u profilu izračunatih vrijednosti turbulentne kinetičke energije. Taj lom je uzrokovan već od prije spomenutim problemom s matematičkom formulacijom zidne funkcije.

6.1. Preporuke za daljnji rad

Nakon iznešenog zaključka o dobivenim rezultatima, može se definirati nekoliko osnovnih smjernica na temelju kojih će se bazirati budući rad na razvoju modela za numeričko modeliranje atmosferskog graničnog sloja, a čije su osnove definirane u ovom radu:

- S obzirom da su vrijednosti turbulentne viskoznosti $\nu_T(y)$ i disipacije turbulentne kinetičke energije $\varepsilon(y)$ uz zidnu stijenku modelirane korištenjem zidnih funkcija, a iz rezultata napreznja $R_{xy}(y)$ i turbulentne kinetičke energije $k(y)$ u blizini zida je vidljivo da postoji problem s dosadašnjom formulacijom zidne funkcije, u daljnjem radu će se morati analizirati utjecaj korištene zidne funkcije na numeričko modeliranje atmosferskog graničnog sloja, te eventualno postaviti nova matematička formulacija koja će biti konzistentna s korištenim numeričkim modelom.
- Iz numeričkih rezultata se može vidjeti kako su profili napreznja izrazito vijugavi čemu su uzrok mjerene vrijednosti koje se također izrazito jako mijenjaju (posebno u donjem dijelu računalne domene). Stoga se za budući rad predlaže aproksimacija eksperimentalnih vrijednosti napreznja metodom najmanjih kvadrata ili nekom drugom metodom aproksimacije, kako bi se smanjile velike razlike u vrijednostima napreznja koje mogu negativno utjecati na numerički postupak rješavanja.
- Za budući rad se također predlaže korištenje nekog od $k - \varepsilon$ modela turbulencije koji omogućuje mijenjanje vrijednosti koeficijenata turbulencije tijekom postupka numeričkog rješavanja (poput *realizable* $k - \varepsilon$ modela turbulencije), s ciljem boljeg numeričkog modeliranja vrijednosti turbulentne kinetičke energije u donjim dijelovima računalne domene.
- Predlaže se ispitivanje numeričkog modela za simulaciju atmosferskog graničnog sloja na mreži s finijom prostornom diskretizacijom mrežom konačnih volumena u smjeru strujanja. Time se može ispitati osjetljivost trenutne formulacije modela, te se eventualno napraviti neke izmjene modela kako bi se mogli riješiti konkretni problemi industrijske

aerodinamike, poput opterećenja građevinskih objekata ili simulacije disperzije štetnih plinova u urbanom okruženju.

Dodatak A

Osnove vektorske analize [11]

Transponiranje vektora

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{a}^T = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

Transponiranje tenzora

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

Simetrični tenzor

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^T \quad (\text{A.3})$$

Antisimetrični tenzor (*skew tensor*)

$$\mathbf{A} = -\mathbf{A}^T \quad (\text{A.4})$$

Dekompozicija tenzora drugog reda

$$\mathbf{A} = \underbrace{\frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)}_{\text{simetrični dio}} + \underbrace{\frac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T)}_{\text{anti-simetrični dio}} \quad (\text{A.5})$$

Jacobian vektorskog polja \mathbf{a}

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial a_1}{\partial x} & \frac{\partial a_1}{\partial y} & \frac{\partial a_1}{\partial z} \\ \frac{\partial a_2}{\partial x} & \frac{\partial a_2}{\partial y} & \frac{\partial a_2}{\partial z} \\ \frac{\partial a_3}{\partial x} & \frac{\partial a_3}{\partial y} & \frac{\partial a_3}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (\text{A.6})$$

Jedinični tenzor

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.7})$$

Skalarni produkt dva vektora

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}^T \cdot \mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \quad (\text{A.8})$$

Vektorski produkt dva vektora

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.9})$$

Tenzorski produkt dva vektora

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = \mathbf{a} \mathbf{b}^T = \mathbf{a} \mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \neq \mathbf{b} \otimes \mathbf{a} \quad (\text{A.10})$$

Dvostruki skalarni produkt dva tenzora drugog reda

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \phi, \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \quad (\text{A.11})$$

Skalarni produkt tenzora i vektora

$$\mathbf{b} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{a} = \begin{bmatrix} A_{11}a_1 + A_{12}a_2 + A_{13}a_3 \\ A_{21}a_1 + A_{22}a_2 + A_{23}a_3 \\ A_{31}a_1 + A_{32}a_2 + A_{33}a_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{a}, \quad \mathbf{A} = \mathbf{A}^T \quad (\text{A.12})$$

Skalarni umnožak dva tenzora

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_{ik}B_{kj} = C_{ij}, \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \quad (\text{A.13})$$

Trag tenzora

$$\text{tr } \mathbf{A} = \mathbf{A}^{\text{tr}} = A_{11} + A_{22} + A_{33} \quad (\text{A.14})$$

Operator gradijenta

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)^T \quad (\text{A.15})$$

Gradijent skalarnog polja

$$\nabla \phi = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} & \frac{\partial \phi}{\partial y} & \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{bmatrix}^T \quad (\text{A.16})$$

Gradijent vektorskog polja

$$\nabla \mathbf{a} = \begin{bmatrix} \frac{\partial a_1}{\partial x} & \frac{\partial a_1}{\partial y} & \frac{\partial a_1}{\partial z} \\ \frac{\partial a_2}{\partial x} & \frac{\partial a_2}{\partial y} & \frac{\partial a_2}{\partial z} \\ \frac{\partial a_3}{\partial x} & \frac{\partial a_3}{\partial y} & \frac{\partial a_3}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (\text{A.17})$$

Divergens vektorskog polja

$$\nabla \cdot \mathbf{a} = \frac{\partial a_1}{\partial x} + \frac{\partial a_2}{\partial y} + \frac{\partial a_3}{\partial z} \quad (\text{A.18})$$

Divergens tenzorskog polja

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial A_{11}}{\partial x} + \frac{\partial A_{12}}{\partial y} + \frac{\partial A_{13}}{\partial z} \\ \frac{\partial A_{21}}{\partial x} + \frac{\partial A_{22}}{\partial y} + \frac{\partial A_{23}}{\partial z} \\ \frac{\partial A_{31}}{\partial x} + \frac{\partial A_{32}}{\partial y} + \frac{\partial A_{33}}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (\text{A.19})$$

Rotor vektorskog polja

$$\nabla \times \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = \left[\frac{\partial a_3}{\partial y} - \frac{\partial a_2}{\partial z} \quad \frac{\partial a_1}{\partial z} - \frac{\partial a_3}{\partial x} \quad \frac{\partial a_2}{\partial x} - \frac{\partial a_1}{\partial y} \right]^T \quad (\text{A.20})$$

Divergens gradijenta (Laplacian)

$$\nabla \cdot \nabla \phi = \nabla^2 \phi = \Delta \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \quad (\text{A.21})$$

Laplacian vektorskog polja

$$\nabla \cdot \nabla \mathbf{a} = \nabla^2 \mathbf{a} = \Delta \mathbf{a} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 a_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_1}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 a_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_2}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 a_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_3}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_3}{\partial z^2} \end{bmatrix} \quad (\text{A.22})$$

Gaussov teorem

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{a} dV = \oint_{\partial V} ds \cdot \mathbf{a} \quad (\text{A.23})$$

$$\int_V \nabla \Phi dV = \oint_{\partial V} ds \Phi \quad (\text{A.24})$$

Korisne relacije u vektorskom računu [11]

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{a} = 0$$

$$\nabla \times \nabla \alpha = 0$$

$$\nabla(\alpha\beta) = \alpha\nabla\beta + \beta\nabla\alpha$$

$$\nabla(\alpha\mathbf{a}) = \mathbf{a} \otimes \nabla\alpha + \alpha\nabla\mathbf{a}$$

$$(\nabla\mathbf{a})\mathbf{a} = \nabla \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}{2} - \mathbf{a} \times \nabla \times \mathbf{a}$$

$$\mathbf{a} \cdot (\nabla\mathbf{a})\mathbf{a} = \mathbf{a} \cdot \nabla \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}{2}$$

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) \cdot \nabla\mathbf{a} = \mathbf{b} \cdot \nabla \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}{2}$$

$$\nabla\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \nabla\mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \nabla\mathbf{b} + \mathbf{a} \times \nabla \times \mathbf{b} + \mathbf{b} \times \nabla \times \mathbf{a}$$

$$\nabla \cdot (\alpha\mathbf{a}) = \alpha\nabla \cdot \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \nabla\alpha$$

$$\nabla \cdot \nabla\mathbf{a} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{a}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{a})$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot \nabla \times \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \nabla \times \mathbf{b}$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot \nabla\mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \nabla\mathbf{b}$$

$$\mathbf{a} \cdot \nabla \cdot (\mathbf{b} \otimes \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\nabla \cdot \mathbf{c} + (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) \cdot \nabla\mathbf{c}$$

$$\nabla \cdot (\alpha\mathbf{A}) = \mathbf{A}\nabla\alpha + \alpha\nabla \cdot \mathbf{A}$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{A}\mathbf{b}) = (\nabla \cdot \mathbf{A}^T) \cdot \mathbf{b} + \mathbf{A}^T \cdot \nabla\mathbf{b}$$

$$\nabla \times (\alpha\mathbf{a}) = \alpha\nabla \times \mathbf{a} + \nabla\alpha \times \mathbf{a}$$

$$\nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{a}\nabla \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b}\nabla \cdot \mathbf{a} - (\nabla \cdot \mathbf{a})\mathbf{b} - \mathbf{a} \cdot \nabla\mathbf{b}$$

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{A}\mathbf{b}) = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})$$

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{A}\mathbf{b}) = (\mathbf{A}\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}, \text{ ako je } \mathbf{A} = \mathbf{A}^T$$

$$\mathbf{a}\mathbf{b} : \mathbf{A} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \cdot \mathbf{A})$$

$$\mathbf{A} : \mathbf{a}\mathbf{b} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}$$

Dodatak B

Izvod RANS jednadžbi

Osnovne jednadžbe mehanike kontinuuma za nestlačivo izotermno strujanje su:

- Jednadžba kontinuiteta

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0 \quad (\text{B.1})$$

- Jednadžba količine gibanja

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{U}\mathbf{U} = -\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (\text{B.2})$$

Nakon što se izraz za Newtonov zakon viskoznosti uvrsti u jednadžbu (B.2), jednadžba količine gibanja glasi:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{U}\mathbf{U} = -\nabla \cdot \left(-\frac{1}{\rho} p \mathbf{I} + \nu (\nabla \mathbf{U} + \nabla \mathbf{U}^T) \right). \quad (\text{B.3})$$

Valja primjetiti kako su i jednadžba kontinuiteta i jednadžba količine gibanja podijeljene s konstantnom vrijednosti gustoće ρ . Jednadžba količine gibanja u konačnom obliku glasi:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{U}\mathbf{U} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nabla \cdot \left(\nu (\nabla \mathbf{U} + \nabla \mathbf{U}^T) \right). \quad (\text{B.4})$$

Osnovna ideja Reynoldsovog osrednjavanja je rastavljanje polja brzine \mathbf{U} i polja tlaka p na vremenski osrednjeni dio i fluktuacijski dio koji ovisi o vremenu:

$$\mathbf{U}(\mathbf{x}, t) = \bar{\mathbf{U}}(\mathbf{x}) + \mathbf{U}'(\mathbf{x}, t) \quad (\text{B.5})$$

$$p(\mathbf{x}, t) = \bar{p}(\mathbf{x}) + p'(\mathbf{x}, t) \quad (\text{B.6})$$

Tako rastavljena polja se sada uvrštavaju u jednadžbu (B.4):

$$\frac{\partial(\bar{\mathbf{U}} + \mathbf{U}')}{\partial t} + \nabla \cdot ((\bar{\mathbf{U}} + \mathbf{U}')(\bar{\mathbf{U}} + \mathbf{U}')) = -\frac{1}{\rho} \nabla(\bar{p} + p') + \nabla \cdot (\nu(\nabla(\bar{\mathbf{U}} + \mathbf{U}') + (\nabla(\bar{\mathbf{U}} + \mathbf{U}')^T))), \quad (\text{B.7})$$

nakon čega se jednačba može vremenski osrednjiti, što dovodi do konačnog oblika vremenski osrednjene jednačbe količine gibanja:

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{U}}}{\partial t} + \nabla \cdot \bar{\mathbf{U}}\bar{\mathbf{U}} = -\frac{1}{\rho} \nabla \bar{p} + \nabla \cdot (\nu(\nabla \bar{\mathbf{U}} + \nabla \bar{\mathbf{U}}^T)) - \bar{\mathbf{U}}'\bar{\mathbf{U}}'. \quad (\text{B.8})$$

Posljednji član u jednačbi (B.8) se naziva Reynoldsov tenzor naprezanja, te se modelira slično kao i tenzor naprezanja $\boldsymbol{\sigma}$:

$$-\bar{\mathbf{U}}'\bar{\mathbf{U}}' = \nu_T(\nabla \bar{\mathbf{U}} + \nabla \bar{\mathbf{U}}^T) - \frac{2}{3}k\mathbf{I}. \quad (\text{B.9})$$

Nakon kombiniranja jednačbe (B.9) i jednačbe (B.8), slijedi:

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{U}}}{\partial t} + \nabla \cdot \bar{\mathbf{U}}\bar{\mathbf{U}} = -\frac{1}{\rho} \nabla \bar{p} + \nabla \cdot (\nu(\nabla \bar{\mathbf{U}} + \nabla \bar{\mathbf{U}}^T)) - \nabla \cdot \left(-\nu_T(\nabla \bar{\mathbf{U}} + \nabla \bar{\mathbf{U}}^T) + \frac{2}{3}k\mathbf{I} \right) \quad (\text{B.10})$$

Konačno se uz upotrebu osnovnih relacija vektorskog i tenzorskog računa dobiva konačan oblik vremenski osrednjene jednačbe količine gibanja (RANS jednačbe):

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{U}}}{\partial t} + \nabla \cdot \bar{\mathbf{U}}\bar{\mathbf{U}} = -\frac{1}{\rho} \nabla \left(\bar{p} + \frac{2}{3}k \right) + \nabla \cdot ((\nu + \nu_T)(\nabla \bar{\mathbf{U}} + \nabla \bar{\mathbf{U}}^T)). \quad (\text{B.11})$$

Ukoliko se pretpostavi da je:

$$p_{\text{eff}} = \left(\bar{p} + \frac{2}{3}k \right), \quad (\text{B.12})$$

te

$$\nu_{\text{eff}} = \nu + \nu_T, \quad (\text{B.13})$$

jednačba (B.11) se često može naći i u sljedećem obliku:

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{U}}}{\partial t} + \nabla \cdot \bar{\mathbf{U}}\bar{\mathbf{U}} = -\frac{1}{\rho} \nabla p_{\text{eff}} + \nabla \cdot (\nu_{\text{eff}}(\nabla \bar{\mathbf{U}} + \nabla \bar{\mathbf{U}}^T)). \quad (\text{B.14})$$

Jednadžba kontinuiteta se osrednjuje na isti način kao i jednadžba količine gibanja. Upotrebom Reynoldsove dekompozicije slijedi:

$$\nabla \cdot (\bar{\mathbf{U}} + \mathbf{U}') = 0, \quad (\text{B.15})$$

te se nakon vremenskog osrednjavanja dobiva konačan oblik vremenski osrednjene jednadžbe kontinuiteta:

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{U}} = 0. \quad (\text{B.16})$$

Osnovna pravila osrednjavanja [11]

$$\overline{\phi'} = 0$$

$$\phi = \bar{\phi}$$

$$\bar{\phi} = \overline{\bar{\phi} + \phi'} = \bar{\bar{\phi}}$$

$$\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x} = \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x}$$

$$\overline{\phi + \varphi} = \bar{\phi} + \bar{\varphi}$$

$$\overline{\phi \varphi} = \overline{\bar{\phi} \bar{\varphi}} = \bar{\phi} \bar{\varphi}$$

$$\overline{\bar{\phi} \bar{\varphi}} = \bar{\phi} \bar{\varphi}$$

$$\overline{\phi \varphi'} = \bar{\phi} \bar{\varphi}' = 0$$

$$\overline{\phi \varphi} = \bar{\phi} \bar{\varphi} + \overline{\phi' \varphi'}$$

$$\overline{\phi'^2} \neq 0$$

$$\overline{\phi' \varphi'} \neq 0$$

Literatura

- [1] Blocken, B., Carmeliet, J., Stathopoulos, T. CFD evaluation of wind speed conditions in passages between parallel buildings - effect of wall-function roughness modifications for the atmospheric boundary layer flow. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 95:941–962, 2007b.
- [2] Blocken, B., Stathopoulos, T. CFD simulation of the atmospheric boundary layer. *Atmospheric Environment*, 41(2):238–252, 2007a.
- [3] Counihan, J. A method of simulating a neutral atmospheric boundary layer in a wind tunnel. In: *AGARD Conference Proceedings*, 43, 1969a.
- [4] Counihan, J. An improved method of simulating an atmospheric boundary layer in a wind tunnel. *Atmospheric Environment*, 3:197–214, 1969b.
- [5] Counihan, J. Simulation of an adiabatic urban boundary layer in a wind tunnel. *Atmospheric Environment*, 7:673–689, 1973.
- [6] Dyrbye, C., Hansen, S.O. *Wind Loads on Structures*. John Wiley and Sons, 1997.
- [7] Džijan, I. Računalna Dinamika Fluida. Predavanja iz kolegija Računalna dinamika fluida, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Sveučilište u Zagrebu, 2010.
- [8] Ferziger, J.H., Perić, M. *Computational Methods for Fluid Dynamics*. Springer-Verlag, 3 edition, 2002.
- [9] Franke, J., Hellsten, A., Schlünzen, H., Carissimo, B.E. *Best practice guideline for the CFD simulation of flows in the urban environment*. Cost Action 732: Quality Assurance and Improvement of Microscale Meteorological Models, 2007.
- [10] Gorié, C., van Beeck, J., Rambaud, P., Van Tendeloo, G. CFD modelling of small particle dispersion: the influence of the turbulence kinetic energy in the atmospheric boundary layer. *Atmospheric Environment*, 43:673–681, 2009.
- [11] Guerrero, J. Introduction to Computational Fluid Dynamics: Governing Equations, Turbulence Modeling Introduction and Finite Volume Discretization Basics. Predavanja, Ve- ljača 2014.
- [12] Hargreaves, D.M., Wright, N.G. On the use of the $k - \varepsilon$ model in commercial CFD software to model the neutral atmospheric boundary layer. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 95(5):355–369, 2007.

- [13] Irwin, H.P.A.H. The design of spires for wind simulation. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 7:361–366, 1981.
- [14] Jasak, H. *Error Analysis and Estimation in the Finite Volume Method With Application to Fluid Flows*. PhD thesis, Imperial College, University of London, 1996.
- [15] Jasak, H. Scalar Transport Equation. Predavanja, Laboratorio de Investigación en Tecnologías de la Combustión, Universidad de Zaragoza, Svibanj 2007.
- [16] Jasak, H. Finite volume discretisation with polyhedral cell support. Predavanja, NUMAP-FOAM Summer School, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Sveučilište u Zagrebu, Rujan 2009.
- [17] Jasak, H. Finite Volume Discretisation in OpenFOAM - Best Practice Guidelines. Predavanja, CFD with OpenSource Software Course, Chalmers University, 2015.
- [18] Jasak, H., Weller, H., Gosman, A. High resolution NVD differencing scheme for arbitrarily unstructured meshes. *International Journal of Numerical Methods in Fluids*, 31:431–449, 1999.
- [19] Jones, W.P., Launder, B.E. The prediction of laminarization with a two-equation model of turbulence. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 15:301–314, 1972.
- [20] Juretić, F. *Error Analysis in Finite Volume CFD*. PhD thesis, Imperial College, University of London, 2004.
- [21] Juretić, F., Kozmar, H. Computational modeling of the neutrally stratified atmospheric boundary layer flow using the standard $k - \varepsilon$ turbulence model. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 115:112–120, April 2013.
- [22] Juretić, F., Kozmar, H. Computational modeling of the atmospheric boundary layer using various two-equation turbulence models. *Wind and Structures*, 19(6):687–708, Studeni 2014.
- [23] Kaimal, J.C., Finnigan, J.J. *Atmospheric Boundary Layer Flows - Their Structure and Measurement*. Oxford University Press, 1994.
- [24] Kärholm, F.P. *Numerical Modelling of Diesel Spray Injection and Turbulence Interaction*. PhD thesis, Chalmers University, 2006.
- [25] Kozmar, H. *Utjecaj mjerila na strukturu modeliranog atmosferskog graničnog sloja*. PhD thesis, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Sveučilište u Zagrebu, 2005.
- [26] Launder, B.E., Spalding, D.B. The numerical computation of turbulent flows. *Comp. Methods Appl. Mech. Eng.*, 3:269–289, 1974.

- [27] Marić, T., Höpken, J., Mooney, K. *The OpenFOAM® Technology Primer*. Sourceflux UG, 1 edition, 2014.
- [28] Moukalled, F., Mangani, L., Darwish, M. *The Finite Volume Method in Computational Fluid Dynamics - An Advanced Introduction with OpenFOAM® and Matlab®*, volume 1. Springer-Verlag, 2015.
- [29] OpenFOAM Foundation. *The Open Source CFD Toolbox - Programmer's Guide*, Veljača 2014.
- [30] O'Sullivan, J.P., Archer, R.A., Flay, R.G.J. Consistent boundary conditions for flows within the atmospheric boundary layer. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 99(1):65–77, 2011.
- [31] Parente, A., Gorić, C., van Beeck, J., Benocci, C. Improved $k - \varepsilon$ model and wall function formulation for the RANS simulation of ABL flows. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 99(4):267–278, 2011a.
- [32] Parente, A., Gorić, C., van Beeck, J., Benocci, C. A comprehensive modelling approach for the neutral atmospheric boundary layer: consistent inflow conditions, wall function and turbulence model. *Boundary-Layer Meteorology*, 140:411–428, 2011b.
- [33] Patankar, S.V., Spalding D.B. A calculation procedure for heat, mass and momentum transfer in three-dimensional parabolic flows. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 15:1787–1806, Listopad 1972.
- [34] Pernpeintner, A. Predavanja iz kolegija "Aerodynamik der Bauwerke". Lehrstuhl für Fluidmechanik, Fakultät für Maschinenwesen, Technische Universität München, 1998.
- [35] Pope, S.B. *Turbulent Flows*. Cambridge University Press, 2000.
- [36] Ribičić, M. Atmospheric Boundary Layer Modelling in the Climatic Wind Tunnel. Master's thesis, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Sveučilište u Zagrebu, 2015.
- [37] Richards, P.J., Hoxey, R.P. Appropriate boundary conditions for computational wind engineering models using the $k - \varepsilon$ turbulence model. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 46-47:145–153, 1993.
- [38] Riddle, A., Carruthers, D., Sharpe, A., McHugh, C., Stocker, J. Comparisons between FLUENT and ADMS for atmospheric dispersion modelling. *Atmospheric Environment*, 38(7):1029–1038, 2004.
- [39] Tamura, T. Towards practical use of LES in wind engineering. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 96(10-11):1451–1471, 2008.

-
- [40] Versteeg, H.K., Malalasekera, W. *An Introduction to Computational Fluid Dynamics - The Finite Volume Method*. Pearson Education Limited, 2 edition, 2007.
- [41] Vukčević, V. Primjena računalne dinamike fluida u analizi gibanja plovniha objekata. Master's thesis, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Sveučilište u Zagrebu, 2013.
- [42] Wilcox, D.C. *Turbulence Modeling for CFD*. DCW Industries, Inc., 2 edition, 1994.
- [43] Yang, W., Gu, M., Chen, S., Jin, X. New inflow boundary conditions for modelling the neutral equilibrium atmospheric boundary layer in computational wind engineering. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 97(2):88–95, 2009.
- [44] Yang, W., Quan, Y., Jin, X., Tamura, Y., Gu, M. Influences of equilibrium atmosphere boundary layer and turbulence parameter on wind loads of lowrise buildings. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 96(10-11):2080–2092, 2008.
- [45] Mehanika Fluida II. https://www.fsb.unizg.hr/hydro/pdf/Nastavni_materijali/MFII_Predavanja.pdf, 2013. Predavanja.