

Naprezanja u parodontnom ligamentu kod ortodontskog pomaka zuba

Kamenar, Jelena

Undergraduate thesis / Završni rad

2015

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:235:040603>

Rights / Prava: [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2024-12-03**

Repository / Repozitorij:

[Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb](#)



Sveučilište u Zagrebu
Fakultet strojarstva i brodogradnje

ZAVRŠNI RAD

Voditelj rada:
Prof.dr.sc.Tanja Jurčević Lulić

Jelena Kamenar

Zagreb, 2015.

Sveučilište u Zagrebu
Fakultet strojarstva i brodogradnje

ZAVRŠNI RAD

Jelena Kamenar

Zagreb, 2015.



Sveučilište u Zagrebu
Fakultet strojarstva i brodogradnje
Datum 16-09-2015 Prilog
Klasa: 602-04/15-6/3
Ur.broj: 15-1703-15-251

ZAVRŠNI ZADATAK

Student: Jelena Kamenar Mat. br.: 0035186554

Naslov rada na hrvatskom jeziku: Naprezanja u parodontnom ligamentu kod ortodontskog pomaka zuba

Naslov rada na engleskom jeziku: Stress in the periodontal ligament during orthodontic tooth movement

Opis zadatka:

Parodontni ligament povezuje zub s alveolnom kosti. Sile koje djeluju na zub prenose se preko parodontnog ligamenta na alveolnu kost. Poznavanje raspodjele naprezanja i deformacija u parodontnom ligamentu važno je za predviđanje gibanja zubi kod ortodontske terapije. Uz pretpostavku da je zub kruto tijelo te da ima oblik paraboloida, potrebno je analitički odrediti naprezanja u parodontnom ligamentu kod horizontalne translacije jednokorijenskog zuba. Pretpostaviti da je parodontni ligament homogen, izotropan i linearno elastičan te jednolike debljine. Modul elastičnosti i Poissonov faktor parodontnog ligamenta iznose: $E = 0,68 \text{ MPa}$, $\nu = 0,49$. Kost oko zuba je kruta i nepomična. Geometrijske parametre modela dogovoriti s mentorom.

U radu navesti korištenu literaturu i eventualno dobivenu pomoć.

Zadatak zadan:
25. studenog 2014.


Zadatak zadao:


Prof.dr.sc. Tanja Jurčević Lulić

Rok predaje rada:
1. rok: 26. veljače 2015.
2. rok: 17. rujna 2015.

Predviđeni datumi obrane:
1. rok: 2., 3., i 4. ožujka 2015.
2. rok: 21., 22., i 23. rujna 2015.

Predsjednik Povjerenstva:


Prof. dr. sc. Igor Balen

Izjavljujem da sam ovaj rad izradila samostalno koristeći stečena znanja tijekom studija i navedenu literaturu.

Srdačno se zahvaljujem mentorici rada prof.dr.sc. Tanji Jurčević Lulić na stručnim savjetima i pomoći koju mi je pružila tijekom izrade ovog završnog rada.

Jelena Kamenar

SADRŽAJ

SADRŽAJ.....	I
POPIS SLIKA.....	III
POPIS TABLICA	IV
POPIS OZNAKA.....	V
SAŽETAK RADA	VI
1 UVOD	1
2 ZUBI	2
2.1 Građa zubi	2
2.2 Vrste zubi	3
2.2.1 Sjekutići.....	3
2.2.2 Očnjaci.....	3
2.2.3 Pretkutnjaci.....	4
2.2.4 Kutnjaci	4
3 PARODONT	5
3.1 Parodontni ligament.....	5
3.2 Alveolna kost.....	8
4 ORTODONTSKI POMAK ZUBA.....	10
4.1 Središte otpora.....	10
4.2 Biomehanika pomaka.....	12
5 Analitički model	13
5.1 Pretpostavke modela.....	13
5.2 Geometrija modela.....	13
6 Vrijednosti naprezanja	24
6.1.1 Naprezanje σ_{xx}	25
6.1.2 Naprezanje σ_{yy}	25
6.1.3 Naprezanje σ_{zz}	26

6.1.4 Naprezanje τ_{xy}	26
7 ZAKLJUČAK.....	27
8 LITERATURA.....	28
PRILOG.....	30

POPIS SLIKA

Slika 1. Anatomija zuba [2].....	2
Slika 2. Zubi u odrasla čovjeka [4].....	3
Slika 3. Građa parodonta [5].....	5
Slika 4. Građa parodontnog ligamenta [7]	6
Slika 5. Vlakna parodontnog ligamenta [8].....	7
Slika 6. Prikaz otpora okolne strukture kod distalnog pomaka zuba [9].....	10
Slika 7. Različiti položaj središta otpora ovisno duljini parodontnog ligamenta [10]..	11
Slika 8. Središte otpora kod različith zubi [11]	11
Slika 9. Središte otpora jednokorijenskog i višekorijenskog zuba [12]	11
Slika 10. Biomehanika ortodontskog pomaka zuba [14]	12
Slika 11. Geometrija modela	13
Slika 12. Položaj x, y, z i n, t, θ - koordinatnog sustava.....	14
Slika 13. Elipsa u x - z ravnini	15
Slika 14. Zakret lokalnog (n, t, θ) koordinatnog sustava	18
Slika 15. Raspodjela naprezanja σ_{xx} u parodontnom ligamentu duž osi y	25
Slika 16. Raspodjela naprezanja σ_{yy} u parodontnom ligamentu duž osi y	25
Slika 17. Raspodjela naprezanja σ_{zz} u parodontnom ligamentu duž osi y	26
Slika 18. Raspodjela naprezanja τ_{xy} u parodontnom ligamentu duž osi y	26

POPIS TABLICA

Tablica 1. Maseni i volumenski udjeli anorganskog dijela, organskog dijela i vode u alveolnoj kosti [6].....	8
--	---

POPIS OZNAKA

a	velika poluos elipse	mm
a_1	koeficijent parabole u y - z ravnini	-
a_2	koeficijent parabole u x - y ravnini	-
b	mala poluos elipse	mm
B	matrica koja povezuje pomake i deformacije	-
D	promjer zuba na alveolnom grebenu	mm
E	modul elastičnosti	MPa
h	duljina korijena zuba	mm
L	matrica koja povezuje pomake i naprezanja	-
P	točka na korijenu zuba	-
S	središte otpora	-
T	matrica transformacije	-
T₁	matrica transformacije iz (n, t, θ) u (x', y_p, θ) koordinatni sustav	-
T₂	matrica transformacije iz (x', y_p, θ) u (x, y, z) koordinatni sustav	-
u_x, u_y, u_z	pomaci korijena zuba	mm
δ	debljina parodontnog ligamenta	mm
ε	numerički ekscentricitet	-
$\varepsilon_{nn}, \varepsilon_{n\theta}, \varepsilon_{tt}, \varepsilon_{t\theta}, \varepsilon_{\theta\theta}, \varepsilon_{nt}$	deformacije u smjerovima osi n, t i θ	mm
$\mathbf{\varepsilon}_{xyz}$	matrica deformacije u globalnom koordinatnom sustavu	-
$\boldsymbol{\theta}^*$	vektor tangencijalan na površnu korijena	-
$\boldsymbol{\theta}$	jedinični vektor	-
ν	Poissonov koeficijent	-
$\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}$	normalno naprezanje	MPa
τ_{xy}	smično naprezanje	MPa

SAŽETAK RADA

U radu je opisana građa i funkcija zubi kao i okolnih tkiva. Posebno je naglašen parodontni ligament i alveolna kost koja ima značajnu ulogu kod ortodontskog pomaka zuba. Zatim su definirani pojmovi važni za razumijevanje biomehanike pomaka, kao što je središte otpora zuba, te je objašnjena biomehanika ortodontskog pomaka zuba.

U radu je dobiven analitički model koji, sa svojim pretpostavkama i ograničenjima, a uzimajući u obzir osnovne karakteristike zuba i mehanička svojstva parodontnog ligamenta, prikazuje raspodjelu naprezanja u parodontnom ligamentu kod horizontalne translacije jednokorijenskog zuba.

Ključne riječi: parodontni ligament, ortodontski pomak, analitički model, naprezanje

1 UVOD

Slijed pojava koje rezultiraju ortodontskim pomakom zuba počinju mehaničkim djelovanjem ortodontske naprave. Sile i momenti, čiju pojavu potiče ortodontska naprava, razmještaju zube na predvidiv način te na način koji je moguće kontrolirati. Mijenjajući iznos i smjer sila i momenata koje djeluju na zub, ortodont je u mogućnosti regulirati pomak zuba. Svaka ortodontska naprava može biti ispitana kako bi se utvrdila mehanička sila koju proizvodi. Nužno je poznavanje biomehaničkih principa i načina korištenja ortodontskih naprava kako bi se obavilo efikasno i uspješno liječenje.

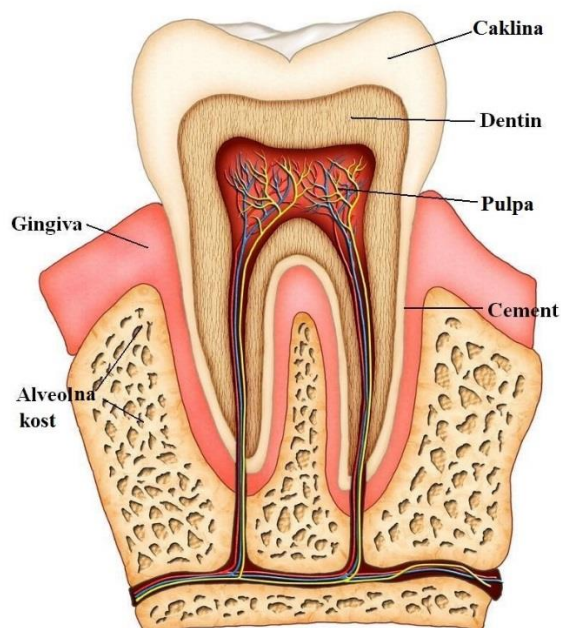
Osnovni cilj ortodontskog liječenja je dobivanje točnog morfološkog odnosa između zubi gornje i donje čeljusti kako bi se ispravio način žvakanja, estetika i udobnost pacijenta. Tijekom liječenja, pomak zuba se ostvaruje primjenom ortodontskih sila na zub. Pod utjecajem tih sila, u dijelu korijena zuba koji je tlačno opterećen će se pojaviti resorpcija kosti čeljusti (alveolne kosti), dok će se kost formirati u dijelu na kojem djeluje vlačno opterećenje. Koordinacija ova dva procesa rezultira trajnim pomakom zuba u alveolnoj kosti [1].

2 ZUBI

2.1 Građa zubi

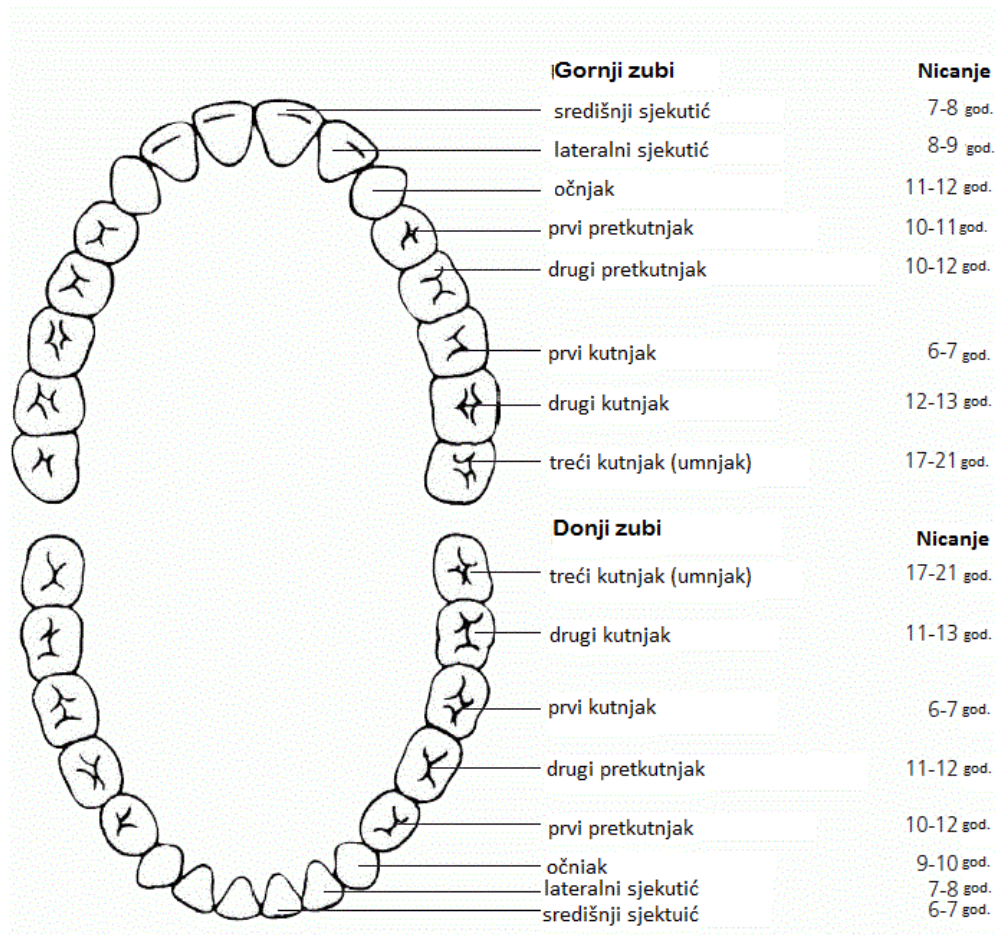
Postavljeni u gornjoj i donjoj čeljusti, zubi čine dva paralelna parabolično zavijena luka: *arcus dentalis et arcus dentalis inferior*. Građa zubi prikazana je na slici 1. Dio zuba koji slobodno strši u usnu šupljinu je kruna zuba, a dio koji se nalazi u kosti je korijen zuba. Dio koji se nalazi između krune i korijena, a pokriven je sluznicom, nazivamo vrat zuba. Zubni korijen završava jednim šiljkom – *apex radialis dentis*. U zubnoj kruni nalazi se šupljina – pulpna komora koja na vrhu zuba završava otvorom.

Šupljina zuba ispunjena je mekom crvenkastom supstancijom – zubnom pulpom, koja se sastoji od veziva koje je bogato krvnim žilama i živcima. Zubna caklina je čvrsto mineralno tkivo koje pokriva zubno meso (gingiva) u predjelu vratnog dijela zuba, dok je dentin (zubna kost) čvrsto tkivo koje izgrađuje najveći dio zuba.



Slika 1. Anatomija zuba [2]

Zubi izbijaju dva puta. Prvih zubi je dvadeset i nisu trajni. Njih nadomještaju trajni zubi kojih ima trideset dva. Prema morfološkim karakteristikama dijele se na sjekutiće, očnjake, pretkutnjake ili premolare i kutnjake ili molare [3]. Položaj zubi prikazan je na slici 2.



Slika 2. Zubi u odrasla čovjeka [4]

2.2 Vrste zubi

2.2.1 Sjekutići

Smješteni su srijeda, a ima ih osam; po četiri u svakoj čeljusti. Imaju jedan korijen. Korijen ima oblik konusa spljoštenog u smjeru lateralno – medijalno i zato na njemu razlikujemo medijalnu i lateralnu površinu na čijim sredinama, katkad, se nalazi jedna vrlo plitka brazda.

Kod zagriža, gornji zubi ne prekrivaju točno donje zube. Gornji zubi imaju širu krunu nego donji, tako da jedan gornji zub pokriva jedan čitav donji zub i još polovinu susjednog zuba. Svi su sjekutići međusobno različiti [3].

2.2.2 Očnjaci

Očnjaci su duži od sjekutića. Ima ih četiri, po dva u svakoj čeljusti. Na njihovoj kruni razlikujemo slobodan rub i četiri površine: *facies lingualis*, *labialis*, *medial* i *lateral*.

Očnjaci imaju jedan koničan korijen, malo spljošten u stranu s obzirom na medio-sagitalnu ravninu, s uzdužnim žlijebom. Zavijen je prema lateralnoj strani. Donji očnjak može imati dva korijena. Gornji su očnjaci veći od donjih. Korijen gornjih očnjaka je tako dug da seže do razine dna nosne šupljine, ali kako je smješten nešto lateralno, ne dopire u nju [3].

2.2.3 *Pretkutnjaci*

Pretkutnjaci su razvijeni samo u trajnom zubalu, kod mliječnog zubala ih nema, a na njihovom su mjestu kutnjaci. Ima ih osam, po četiri u svakoj čeljusti.

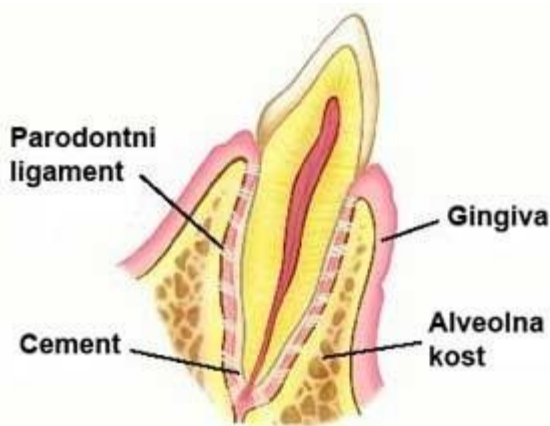
Korijen je obično spljošten u smjeru naprijed-natrag, te ima žljebove na prednjoj i stražnjoj strani. Prvi gornji pretkutnjak obično ima dva korijena. Jedan leži lateralno, a drugi medijalno. I drugi gornji pretkutnjak može imati dva korijena. Gornji pretkutnjaci veći su od donjih [3].

2.2.4 *Kutnjaci*

Kutnjaka ima dvanaest, po šest u svakoj čeljusti. Veličina kutnjaka se smanjuje od prvog prema trećemu. Gornji kutnjaci su manji od donjih. Kruna ima oblik romba, dok je donjima kruna kvadratična. Gornji zubi imaju smjer koso prema dolje i van, a donji prema gore i unutra [3].

3 PARODONT

Parodontom se nazivaju tkiva koja okružuju zub i sudjeluju u njegovu učvršćivanju i podupiranju, a čine ga gingiva (zubno meso), parodontni ligament (PDL), cement zuba i alveolna kost, kao što je prikazano na slici 3.



Slika 3. Građa parodonta [5]

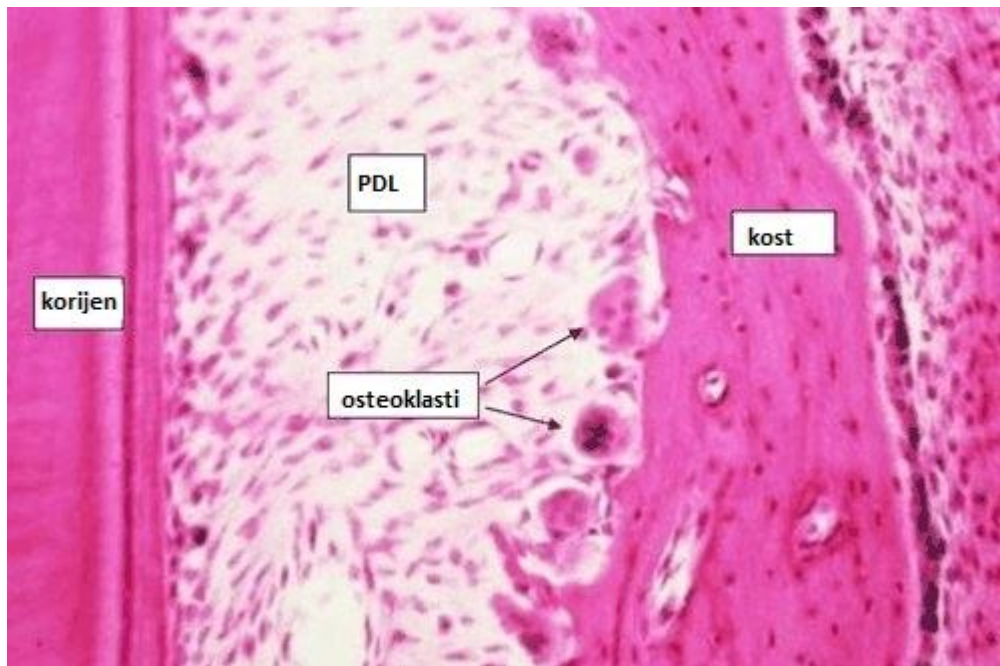
Svaka od tih komponenti je značajna po svojoj lokaciji, histologiji, biokemijskoj i kemijskoj građi. Ove komponente imaju funkcije po kojima su sposobne prilagoditi se tijekom svog životnog vijeka. Primjerice, kako zub pod djelovanjem sile vrši medijalni pomak, kost se razgrađuje na strani koja je opterećena tlačno i izgrađuje na strani na kojoj je opterećena vlačno [6].

3.1 Parodontni ligament

Parodontni ligament je čvrsto, fibrozno vezivno tkivo koje ispunjava parodontni prostor, a zadržava gingivu u pravilnom položaju spram zuba, amortizira i prenosi okluzalne sile (sile koje se javljaju kod dodira zubi gornje i donje čeljusti) sa zuba na alveolnu kost. Stanice parodontnog ligamenta sudjeluju u stvaranju i resorpciji tvrdih tkiva parodonta. Krvne žile parodontnog ligamenta osiguravaju hranu stanicama parodontnog ligamenta, te okolnim stanicama cementa i alveolne kosti. Živci parodontnog ligamenta su sastavni dio mehanizma zaduženog za prijenos osjeta boli, pritiska, dodira i sl.

Parodontni ligament, čija je građa prikazana na slici 4., građen je od stanica, međustanične tvari i vlakana. Vlakna imaju valoviti tok. Parodontni ligament je opskrbljen krvnim i limfnim žilama te živcima koji prolaze kroz vršni otvor i ulaze u pulpu. U parodontnom

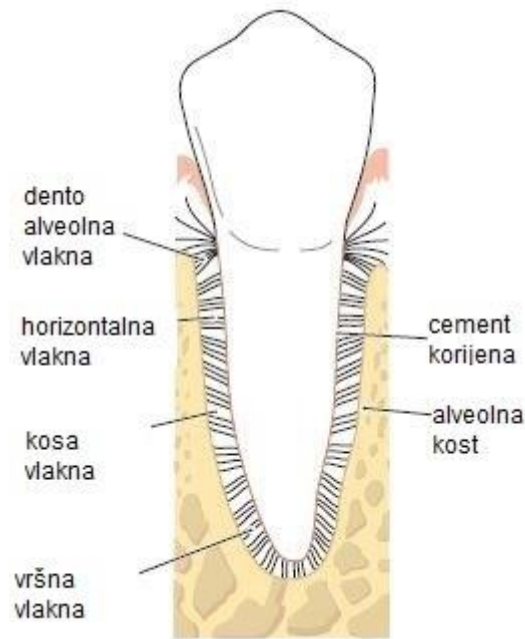
ligamentu postoje dvije vrste živčanih vlakana: aferentna ili senzorna vlakna koja su mijelinizirana i prenose osjete nastale u parodontnom ligamentu i autonomna sinaptička vlakna koja reguliraju protok krvi kroz krvne žile. Stanice parodontnog ligamenta su odgovorne za njegovo stvaranje i obnavljanje te za stvaranje i resorpciju cementa i alveolne kosti. U stanice parodontnog ligamenta spadaju: fibroblasti, osteoblasti, osteoklasti, cementoblasti, epitelne stanice, obrambene stanice.



Slika 4. Građa parodontnog ligamenta [7]

Vlakna parodontnog ligamenta, prikazana na slici 5., mogu biti kolagena (90%, tip I i tip II), oksitalanska vlakna, retikulinska, elastična. Najmanja strukturna jedinica je kolageno vlakno. Više vlakana poredanih paralelno formira kolageni snop. Snopovi kolagenih vlakana vezanih u cementu i alveolnoj kosti nazivaju se Sharpeyevi snopovi.

Cemento-gingivni snopovi vlakana (dento-alveolni snopovi) protežu se iz cementa zubnog vrata i završavaju u vezivu prirasle gingive, transeptalni snopovi vlakana protežu se od cementa horizontalno iznad septuma kroz gingivu, a cementno-alveolni snopovi vlakana mogu se protezati horizontalno, vertikalno, koso i međukorijensko.



Slika 5. Vlakena parodontnog ligamenta [8]

Parodontni ligament je jako dobro prokrvljen. Krvne žile potječu uglavnom iz odgovarajućih gornjih i donjih alveolnih arterija, ali i ponekad iz krvnih žila gingive. Dvostruka opskrba krvlju omogućuje da parodontna sveza djeluje i nakon kirurškog odstranjenja vrška korijena zuba. Krvne žile leže između glavnih snopova vlakanaca blizu stijenke alveolne kosti. Prosječan promjer krvnih žila je 20 μm . Krvne žile se granaju, isprepliću i tvore kapilarni splet oko zuba [6].

Debljina parodontnog ligamenta je oko 0,25 mm (varira od 0,2 do 0,4 mm) [8]. Parodontni ligament omogućuje da sile, izazvane žvakanjem i drugim dodirima zubi, budu raspodijeljene i resorbirane tijekom alveolnog procesa pregradnje koju omogućuju svojstva alveolne kosti. Također, PDL omogućuje pomake zuba koji su određeni širinom, visinom i kvalitetom parodontnog ligamenta.

Po funkciji, parodontni ligament je potporna struktura u alveolnoj kosti, predstavlja otpor silama i štiti sam vrh zuba; zatim predstavlja mehanizam uz pomoć kojeg se dešava rast zuba te konačno formira i obnavlja alveolna kost i cement [8].

3.2 Alveolna kost

Alveolna kost može se definirati kao koštano tkivo koje ima zadatak okružiti i učvrstiti zube. Ona izgrađuje alveolni nastavak koji predstavlja kontinuiranu cjelinu s bazalnim kostima gornje i donje čeljusti. Alveolna kost se razvija tijekom nicanja zuba i resorbira se po njihovom gubitku. Ima dvije osnovne uloge: potporna (sudjeluje u vezivanju parodontnih vlakana) i prijenosna (preko nje se sile oslobođene tijekom žvakanja, gutanja, govora i sl. razlažu, prenose i amortiziraju).

U tablici 1., prikazani su maseni i volumenski udjeli organskog i anorganskog dijela u alveolnoj kosti. Preko 90% organskog dijela otpada na kolagen. Preostali dio organskog dijela tvore citrati, glikoproteini, proteoglikani i lipidi. Oko 60% neorganskog dijela koštanog tkiva je organizirano u obliku kristala hidroksiapatita, dok je preostalih 40% najvjerojatnije amorfni kalcij-fosfat.

Tablica 1. Maseni i volumenski udjeli anorganskog dijela, organskog dijela i vode u alveolnoj kosti [6]

	Anorganski dio, %	Organski dio, %	Voda, %
Maseni udio	45	35	25
Volumenski odnosi	23	37	40

Uloge alveolne kosti su potpora i zaštita zubi, izvor je iona te omogućava remodeliranje.

S obzirom na funkciju, alveolna kost se može podijeliti na dio kosti u koji se pripajaju vlakna parodontnog ligamenta i potporni dio kosti kojeg čine vanjska kompakta (zbita kost) i spongioza (spužvasta kost).

Histološka struktura alveolne kosti je slična strukturi koštanog tkiva u drugim dijelovima organizma. Vanjska kortikalna ploča građena je od kompakte koju čine longitudinalne lamele i Haversovi sistemi. U donjoj čeljusti površinski dio čine lamele koje se kontinuirano pružaju od baze mandibule (donje čeljusti) u vanjsku kortikalnu kost. Spongioza je građena od trabekula između kojih se nalazi koštana srž. Na osnovu rendgenograma mogu se razlikovati dva osnovna oblika organizacije koštanih trabekula u spongiozi:

- prvi tip je karakterističan za mandibulu i kod njega su trabekule pravilnije postavljene, horizontalno jedna ispod druge, poput prečki na ljestvama.

- drugi tip se oblikuje većim brojem nepravilno postavljenih koštanih trebekula i češći je u maksili (gornjoj čeljusti).

Prava alveolna kost je perforirana brojnim otvorima koji potječu od Volkmanovih kanala i kroz koje prolaze krvne i limfne žile, kao i živčana vlakna. Kroz spongiozu prolaze nutritivni kanali sa arterijom, venama, limfnim žilama i živčanim vlaknima. Vanjska površina alveolnog nastavka je pokrivena periostom, čiji je fibrozni sloj srastao sa kolagenim vlaknima iz gingive. Unutrašnji dio alveolnog nastavka je prekriven osteoblastima, za koje se smatra da su dio parodontnog ligamenta.

Za stvaranje i resorpciju alveolne kosti odgovorne su osteogenetske stanice i osteoklasti. Osteogenetske stanice stvaraju kost i ovisno o aktivnosti mogu biti preosteoblasti, osteoblasti (formativne stanice koje sintetiziraju proteine kolagenog i nekolagenog koštanog matriksa), osteociti (inaktivni oblik osteoblasta). Osteoklasti su stanice koje resorbiraju alveolnu kost.

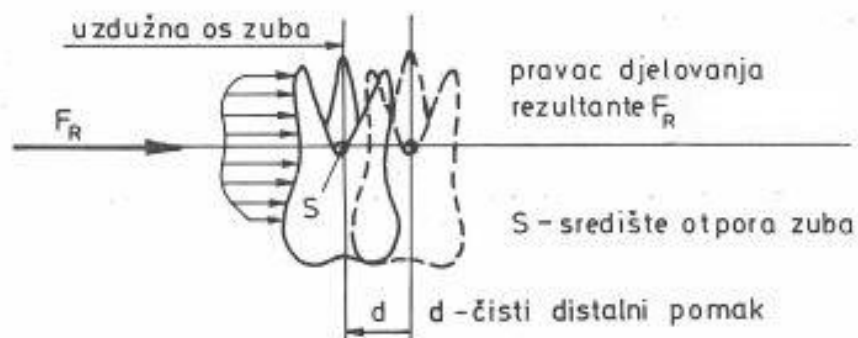
Kod djece je formiranje kosti izraženo u odnosu na resorpciju, za razliku od odraslih kod kojih su remodeliranje i sinteza u ravnoteži, dok je kod starijih izražena resorpcija. Kako bi se prilagodila na vanjske podražaje, kost se konstantno remodelira. [8]

4 ORTODONTSKI POMAK ZUBA

4.1 Središte otpora

Kako bi objasnili metodu kojom se dobiva translacija zuba te biomehaniku samog pomaka zuba, potrebno je objasniti pojam središta otpora zuba.

Središte otpora je točka u kojoj pravac djelovanja resultantne sile koja djeluje na zub siječe uzdužnu os zuba. Ukoliko ortodontska sila djeluje u središtu otpora, dolazi do čiste translacije zuba kao što je prikazano na slici 6.

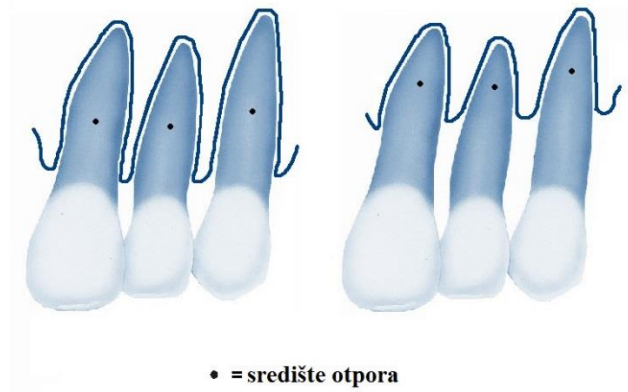


Slika 6. Prikaz otpora okolne strukture kod distalnog pomaka zuba [9]

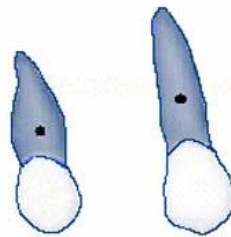
Iz toga se može zaključiti kako trebaju biti konstruirane naprave koje služe za ortodontski pomak zuba, a najbolji rezultati se postižu ako pravac djelovanja sile koja djeluje na kukicu vanjskog luka ortodontske naprave bude okomit na uzdužnu os zuba, te ako u sagitalnog projekciji prolazi kroz središte otpora zuba (točka S). [9]

Središte otpora razlikuje se između različitih zuba sa različitim duljinama korijena te različite anatomije; na primjer, između sjekutića i kutnjaka ili pretkutnjaka i očnjaka. Njegov položaj također varira s visinom alveolne kosti, tako da će biti drugačiji kod djeteta u odnosu na odraslu osobu koja boluje od parodontne bolesti (središte otpora pomiče se bliže korijenu zuba kod odraslih osoba koji gube koštanu masu) [10].

Efekt će biti drugačiji ako sila jednakog iznosa i smjera djeluje na različite zube, ili na isti zub kod različitih ljudi, slika 7 i slika 8.

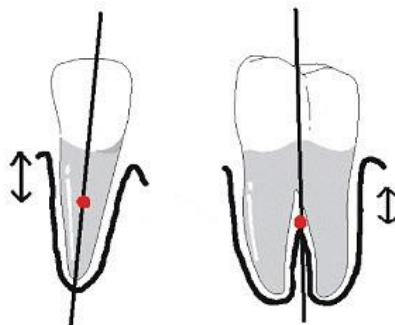


Slika 7. Različiti položaj središta otpora ovisno duljini parodontnog ligamenta [10]



Slika 8. Središte otpora kod različitih zubi [11]

Središte otpora u jednokorijenskom zubi nalazi se na približno $1/3$ do $1/2$ duljine korijena zuba, mjereno od grebena alveolne kosti po uzdužnoj osi zuba, što je prikazano na lijevom dijelu slike 9. Središte otpora višekorijenskog zuba nalazi se 1-2 mm niže od mjesta grananja korijena zuba mjereno po uzdužnoj osi zuba, kao što je prikazano na desnom dijelu slike 9.



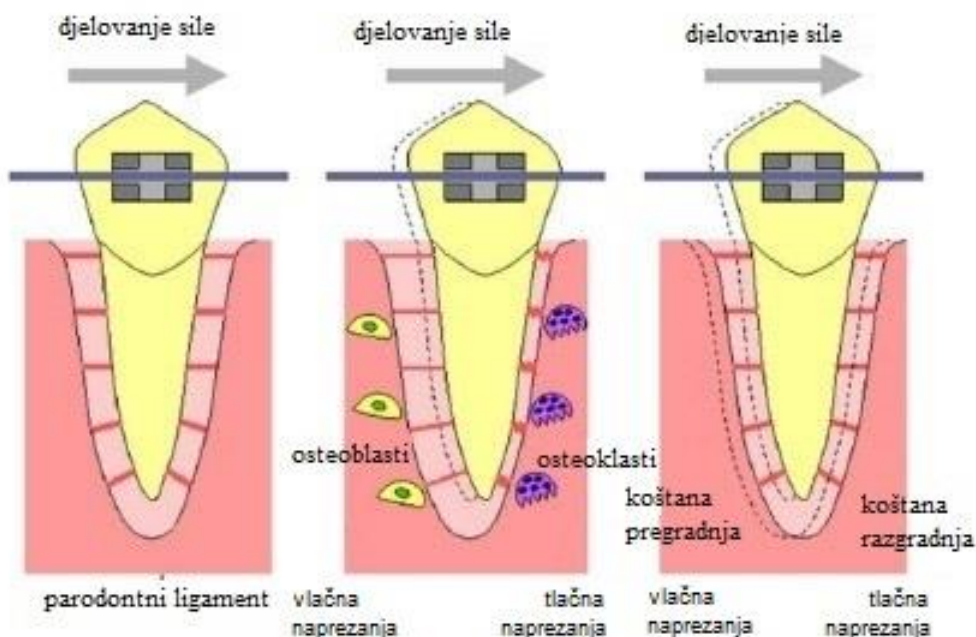
Slika 9. Središte otpora jednokorijenskog i višekorijenskog zuba [12]

4.2 Biomehanika pomaka

Ortodontski pomak zuba pojavljuje se pod utjecajem sile koju stvara ortodontska naprava. Ta se sila prenosi na krunu zuba, pa sve do korijena te naposljetku do parodontnog ligamenta i alveolne kosti koji okružuju korijen zuba.

Biomehanika ortodontskog pomaka prikazana je na slici 10. U osnovi, najbolji pomak zuba se ostvaruje djelovanjem kontinuirane sile kroz duži vremenski period. Prevelika sila uništava parodont. Na površini zuba u smjeru njegovog pomaka, parodontna membrana se skupi, što dovodi do tlačnih naprezanja u parodontnom ligamentu. Na površini kosti koja je u dodiru s parodontnom membranom, počinje resorpcija koju potiču osteoklasti svojim djelovanjem.

Na površini korijena, u suprotnom smjeru od pomaka zuba, parodontna membrana se razvlači. Počinju djelovati osteoblasti koji stvaraju dijelove alveolne kosti u području gdje se nekada nalazio zub. Zbog toga mogu zubi, tijekom ortodontskog liječenja, biti labavi. Kada je pomak postignut, ligamenti se nalaze u neutralnom položaju, a kost se stvori i popuni prostor oko parodontnog ligamenta, istovremeno učvršćujući zub [13].



Slika 10. Biomehanika ortodontskog pomaka zuba [14]

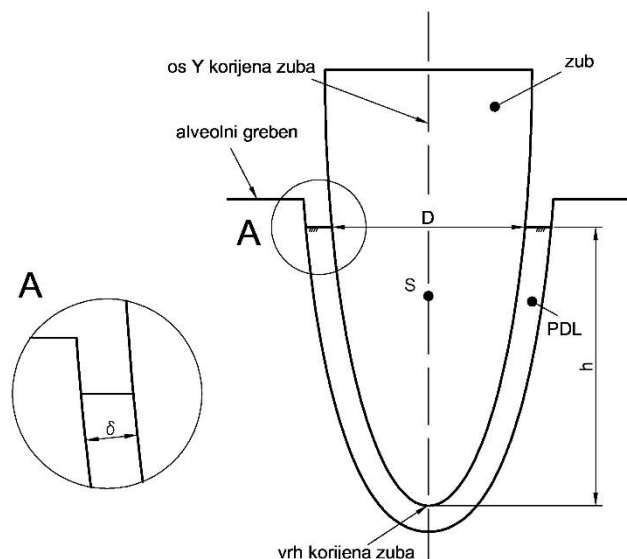
5 Analitički model

5.1 Pretpostavke modela

Potrebno je analitički odrediti naprezanja u parodontnom ligamentu koja se javljaju kod horizontalne translacije jednokorijenskog zuba. Korijen zuba aproksimiran je pomoću eliptičnog paraboloida te su uvedene pretpostavke i ograničenja modela:

- 1) PDL ima jednoliku debljinu,
- 2) Alveolni greben je horizontalan,
- 3) Koštana pregradnja se zanemaruje jer se događa u znatno dužem vremenskom periodu,
- 4) Ortodontske sile su male,
- 5) Alveolna kost i zub su znatno krući od PDL-a te su modelirani kao kruta tijela,
- 6) Središte otpora se računa uz pretpostavku linearno-elastičnog izotropnog PDL-a,
- 7) PDL je homogen, izotropan, linearno elastičan materijal.

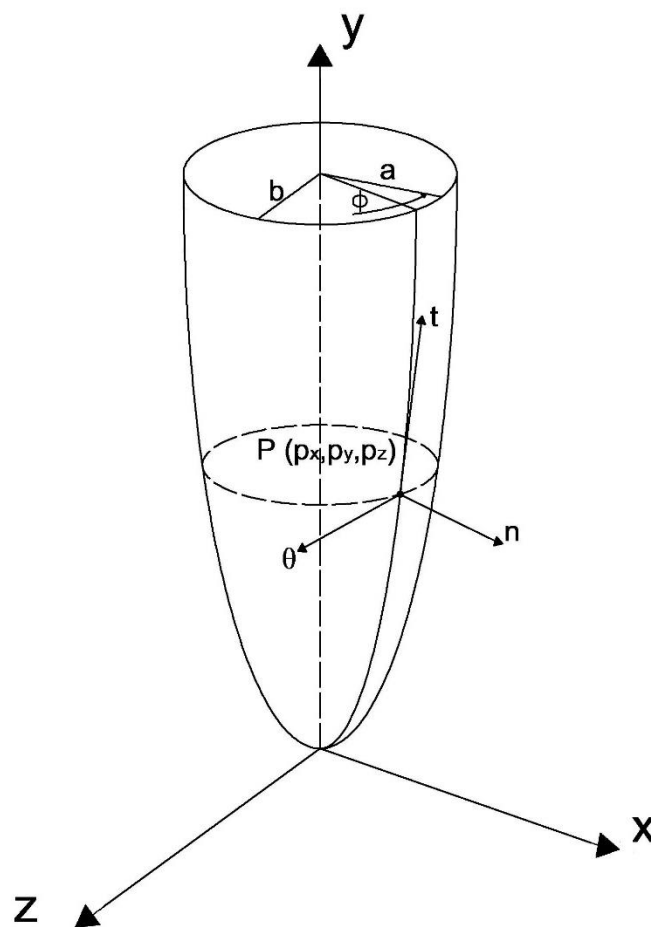
5.2 Geometrija modela



Slika 11. Geometrija modela

Korijen zuba okružen je parodontnim ligamentom debljine δ , mjereno okomito na površinu korijena, kao što je prikazano na slici 11. Os y zuba je vertikalna, te se pretpostavlja da je alveolni greben horizontalan. Duljina h korijena definira se kao udaljenost između vrha zuba i početka parodontnog ligamenta mjereno duž osi zuba. Promjer D mjeri se na alveolnom grebenu. Ako horizontalna sila djeluje u središtu otpora (S) koji se nalazi na uzdužnoj osi zuba, dolazi do čiste translacije u smjeru djelovanja sile.

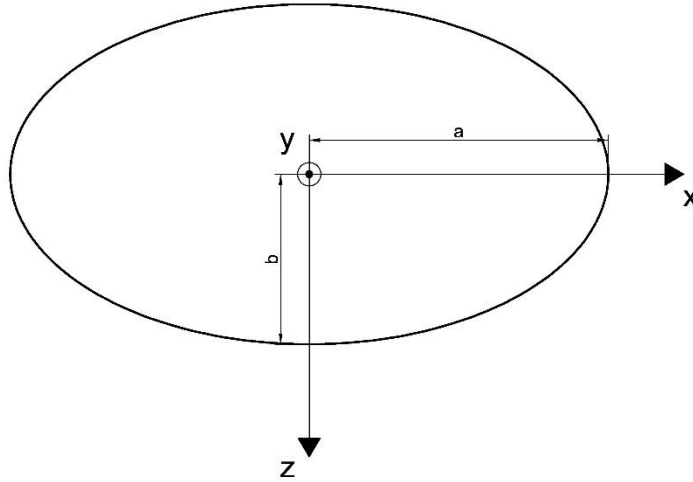
Na slici 12, prikazani su različiti koordinatni sustavi. Globalni koordinatni sustav (x,y,z) ima ishodište u vrhu korijena, a y -os se podudara s vertikalnom osi zuba.



Slika 12. Položaj x,y,z i n,t,θ - koordinatnog sustava

Lokalni koordinatni sustav (n,t,θ) prikazan na slici 12, definiran je u svakoj točki $P(p_x,p_y,p_z)$; n -os je normala na površinu, dok je θ -os horizontalna i tangencijalna na površinu.

Drugi lokalni koordinatni sustav (x', y_p, θ) prikazan na slici 14., definiran je u svakoj točki P te služi kako bi pomogao u transformaciji iz (n, t, θ) u (x, y, z) koordinatni sustav.



Slika 13. Elipsa u x - z ravnini

Elipsa je u x - z ravnini, prikazana na slici 13, opisana jednadžbom:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 \quad (1)$$

gdje je ekscentricitet:

$$\varepsilon^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2} \quad (2)$$

Uzimajući u obzir te dvije jednadžbe, dobivamo izraz:

$$x^2(1 - \varepsilon^2) + z^2 = b^2 \quad (3)$$

U y - z ravnini ligament čini parabolu:

$$y = a_1 z^2 \quad (4)$$

a koeficijent a_1 se može definirati točkom $(h, \frac{D}{2})$, dakle:

$$a_1 = \frac{4h}{D^2} \quad (5)$$

Promjenjivu vrijednost poluosi b (koordinatu z) možemo računati kao:

$$b^2 = \frac{y}{a_1} = \frac{4h}{D^2} y. \quad (6)$$

Uvrštavanjem (6) u (3) dobivamo:

$$x^2(1 - e^2) + z^2 = \frac{D^2}{4h} y. \quad (7)$$

Za transformaciju koordinata, naprezanja i deformacija potrebni su pomoćni koordinatni sustavi. Vektor $\theta^* = \left[-1, 0, \frac{\partial z}{\partial x}\right]$, gdje je $\frac{\partial z}{\partial x} = \cot\theta$.

Za određivanje $\frac{\partial z}{\partial x}$ treba veza $z(x)$, koju možemo dobiti preko ekscentriciteta:

$$\varepsilon^2 = 1 - \frac{z^2}{x^2}, \quad (8)$$

odnosno

$$x^2(1 - \varepsilon^2) = z^2 \quad / \frac{\partial z}{\partial x} \quad (9)$$

$$2x(1 - \varepsilon^2) = 2z \frac{\partial z}{\partial x} \quad (10)$$

Prema tome,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x(1 - \varepsilon^2)}{z}, \quad (11)$$

a u točki $P(p_x, p_y, p_z)$ to postaje:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(P) = \frac{p_x(1 - \varepsilon^2)}{p_z} \quad (12)$$

Vektor θ može se sada zapisati kao:

$$\vec{\theta} = \left(-1, 0, \frac{p_x(1 - \varepsilon^2)}{p_z} \right) \quad (13)$$

Jedinični vektor θ jednak je $\frac{\theta}{|\theta|}$, pri čemu je:

$$|\theta| = \sqrt{p_z^2 + [p_x(1 - \varepsilon^2)]^2} \quad (14)$$

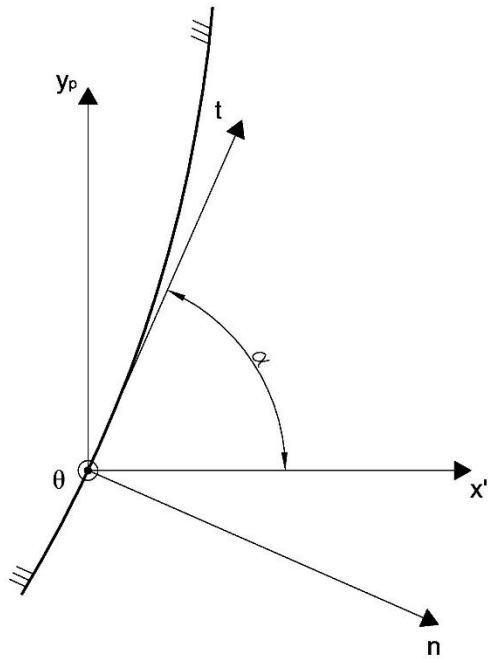
Slijedi:

$$\theta = \left(-\frac{p_z}{\theta}, 0, \frac{p_x(1 - \varepsilon^2)}{\theta} \right) = (-G, 0, H) \quad (15)$$

Os x' je također horizontalna i okomita na os θ pa slijedi:

$$\mathbf{x}' = (\theta_z, 0, -\theta_x) = \left(\frac{p_x(1 - \varepsilon^2)}{\theta}, 0, \frac{p_z}{\theta} \right) = (H, 0, G) \quad (16)$$

Transformacija iz lokalnog (x', y_p, θ) koordinatnog sustava u (n, t, θ) koordinatni sustav prikazana je na slici 14., a nastaje rotacijom oko osi θ za kut $-\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$.

Slika 14. Zakret lokalnog (n, t, θ) koordinatnog sustava

Sa slike 14 vidi se da je $\tan \alpha = \frac{\delta y}{\delta x'}(P)$, što se računa parcijalno kao $\frac{\delta x}{\delta x'} = \frac{\delta y}{\delta x} \frac{\delta x}{\delta x'}$. Iz jednadžbe (14) znamo da je:

$$\mathbf{x}' = \frac{(1 - \varepsilon^2)p_x}{\theta} \mathbf{x} + \frac{1}{\theta} \mathbf{z}, \quad (17)$$

Odnosno da je:

$$\frac{\delta x}{\delta x'}(P) = \frac{\theta}{p_x(1 - \varepsilon^2)} \quad (18)$$

Vežu $y(x)$ dobivamo analogno $y(z)$ u jed. (4). Ligament u x - y ravnini čini parabolu

$y = a_2 x^2$, a koeficijent a_2 možemo dobiti iz točke kroz koju parabola prolazi: $\left(\frac{D}{2\sqrt{1-\varepsilon^2}}, h\right)$. Prema tome, dobivamo:

$$a_2 = \frac{y}{x^2} = \frac{4h(1 - \varepsilon^2)}{D^2}, \quad (19)$$

$$y = \frac{4h(1 - \varepsilon^2)}{D^2} x^2 \quad (20)$$

Derivacijom te veze, dobivamo da je:

$$\frac{\delta y}{\delta x}(P) = \frac{8hp_x(1 - \varepsilon^2)}{D^2} \quad (21)$$

Ako uvrstimo (16) i (19) u $\frac{\delta x}{\delta x'} = \frac{\delta y}{\delta x} \frac{\delta x}{\delta x'}$, dobivamo:

$$\frac{\delta y}{\delta x'}(P) = \frac{8h\theta}{D^2} \quad (22)$$

a time i da je:

$$\tan \alpha = \frac{\partial y}{\partial x'}(P) = \frac{8h\theta}{D^2}. \quad (23)$$

Kut α je kut između tangente na površinu zuba i x' -osi. Također, možemo odrediti vezu između (n, t, θ) i (x', y_p, θ) koordinatnih sustava.

$$\begin{bmatrix} n \\ t \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \alpha & -\cos \alpha & 0 \\ \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y_p \\ \theta \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y_p \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ -\cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n \\ t \\ \theta \end{bmatrix} \quad (25)$$

Definiramo matricu transformacije \mathbf{T}_1 iz (n, t, θ) u (x', y_p, θ) koordinatni sustav:

$$\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ -\cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (26)$$

Sada odredimo vezu (x', y_p, θ) i (x, y, z) koordinatnih sustava:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y_p \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H & 0 & G \\ 0 & 1 & 0 \\ -G & 0 & H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (27)$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H & 0 & -G \\ 0 & 1 & 0 \\ G & 0 & H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y_p \\ \theta \end{bmatrix} \quad (28)$$

te matricu transformacije \mathbf{T}_2 iz (x', y_p, θ) u (x, y, z) koordinatni sustav:

$$\mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} H & 0 & -G \\ 0 & 1 & 0 \\ G & 0 & H \end{bmatrix} \quad (29)$$

To znači da ako želimo transformirati veličinu iz (n, t, θ) koordinatnog sustava u (x, y, z) , ukupna matrica transformacije je $\mathbf{T} = \mathbf{T}_2 \mathbf{T}_1$, a za suprotnu transformaciju je matrica \mathbf{T}^T (Prilog 1.).

Pomaci točaka na korijenu zuba sastoje se od translacije i rotacije oko vrha korijena. Budući da su rotacije i pomaci vrlo mali, moguće je zanemariti članove 2.rede.

$$\begin{aligned} u_{px} &= u_x + z\theta_y - y\theta_z \\ u_{py} &= u_y - z\theta_x + x\theta_z \\ u_{pz} &= u_z + y\theta_x - x\theta_y \end{aligned} \quad (30)$$

Pomaci svake točke na korijenu zuba mogu se izraziti i na lokalnom koordinatnom sustavu (n, t, θ) .

Ako te pomake želimo zapisati u (n, t, θ) koordinatnom sustavu, moramo ih množiti s matricama transformacija:

$$\mathbf{u}_{nt\theta} = (\mathbf{T}_2 \mathbf{T}_1)^T \mathbf{u}_{xyz} = (\mathbf{T}_1)^T (\mathbf{T}_2)^T \mathbf{u}_{xyz} = \begin{bmatrix} H \sin \alpha & -\cos \alpha & G \sin \alpha \\ H \cos \alpha & \sin \alpha & G \cos \alpha \\ -G & 0 & H \end{bmatrix} \mathbf{u}_{xyz} \quad (31)$$

Slijede pomaci u (n, t, θ) koordinatnom sustavu:

$$\begin{aligned} u_n &= H \sin \alpha \cdot u_{px} - \cos \alpha \cdot u_{py} + G \sin \alpha \cdot u_{pz} \\ u_t &= H \cos \alpha \cdot u_{px} + \sin \alpha \cdot u_{py} + G \cos \alpha \cdot u_{pz} \\ u_\theta &= -G \cdot u_{px} + H \cdot u_{pz} \end{aligned} \quad (32)$$

Debljina PDL-a u n -smjeru jednaka je δ , kao što je prikazano na slici 11. Dimenzije PDL-a u smjerovima osi θ i t su puno veće pa su deformacije u tim smjerovima približno jednake 0. Izrazi za deformacije glase:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{nn} &= -\frac{u_n}{\delta}, \\ \varepsilon_{n\theta} &= -\frac{u_\theta}{2\delta}, \\ \varepsilon_{tt} &= 0, \\ \varepsilon_{t\theta} &= 0, \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= 0, \\ \varepsilon_{nt} &= -\frac{u_t}{2\delta}. \end{aligned} \quad (33)$$

Jednadžbe vrijede samo za male deformacije.

Deformacije u lokalnom koordinatnom sustavu mogu se transformirati u globalni koordinatni sustav korištenjem matrica transformacije \mathbf{T}_1 i \mathbf{T}_2 , odnosno matrice \mathbf{T} .

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{xyz} = \mathbf{T}^T \boldsymbol{\varepsilon}_{nt\theta} \mathbf{T}. \quad (34)$$

Uvrštavanjem jednadžbi (30) do (34), može se dobiti izraz koji povezuje deformacije $\vec{\varepsilon} = (\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \varepsilon_{xy}, \varepsilon_{yz}, \varepsilon_{zx})^T$ u globalnom koordinatnom sustavu i pomake korijena $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z, \theta_x, \theta_y, \theta_z)^T$:

$$\vec{\varepsilon} = \mathbf{B} \cdot \vec{u} \quad (35)$$

pri čemu je:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -\frac{H \sin a}{\delta} & 0 & 0 & 0 & -\frac{zH \sin a}{\delta} & \frac{yH \sin a}{\delta} \\ 0 & \frac{\cos a}{\delta} & 0 & -\frac{z \cos a}{\delta} & 0 & \frac{x \cos a}{\delta} \\ 0 & 0 & -\frac{G \sin a}{\delta} & -\frac{yG \sin a}{\delta} & \frac{xG \sin a}{\delta} & 0 \\ -\frac{\cos a}{2\delta} & \frac{H \sin a}{2\delta} & 0 & -\frac{zH \sin a}{2\delta} & -\frac{z \cos a}{2\delta} & \frac{y \cos a + xH \sin a}{2\delta} \\ 0 & -\frac{G \sin a}{2\delta} & \frac{\cos a}{2\delta} & \frac{y \cos a + zG \sin a}{2\delta} & -\frac{x \cos a}{2\delta} & -\frac{xG \sin a}{2\delta} \\ \frac{G \sin a}{2\delta} & 0 & \frac{H \sin a}{2\delta} & \frac{yH \sin a}{2\delta} & \frac{\sin a (zG - xH)}{2\delta} & -\frac{yG \sin a}{2\delta} \end{bmatrix} \quad (36)$$

Budući da je pretpostavljeno da je PDL homogen, izotropan i linearno elastičan, može se odrediti naprezanje prema:

$$\vec{\sigma}_{xyz} = \mathbf{L} \cdot \vec{\varepsilon}_{xyz} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{B} \cdot \vec{u} \quad (37)$$

gdje je:

$$\mathbf{L} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} (1-\nu) & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & (1-\nu) & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & (1-\nu) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1-2\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1-2\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1-2\nu) \end{bmatrix} \quad (38)$$

Računanje vektora naprezanja:

$$\vec{t} = \begin{bmatrix} n_x & 0 & 0 & n_y & 0 & n_z \\ 0 & n_y & 0 & n_x & n_z & 0 \\ 0 & 0 & n_z & 0 & n_y & n_x \end{bmatrix} \cdot \vec{\sigma}_{xyz} = \mathbf{N} \cdot \vec{\sigma}_{xyz} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{B} \cdot \vec{u} \quad (39)$$

6 Vrijednosti naprežanja

Modul elastičnosti i Poissonov faktor parodontnog ligamenta iznose: $E=0,68$ MPa i $\nu = 0,49$. Vrijednost visine iznosi $h = 13$ mm, promjer zuba $D = 7,8$ mm te pomak $u = 0,000188$ mm [15].

Dobivamo analitičke izraze za naprežanja (Prilog 2.):

$$\sigma_{xx} = -\cos \emptyset \frac{Eu \sin \alpha (1 - \nu)}{\delta(1 - 2\nu)(\nu + 1)} \quad (40)$$

$$\sigma_{yy} = -\cos \emptyset \frac{Eu \sin \alpha \nu}{\delta(1 - 2\nu)(\nu + 1)} \quad (41)$$

$$\sigma_{zz} = -\cos \emptyset \frac{Eu \sin \alpha \nu}{\delta(1 - 2\nu)(\nu + 1)} \quad (42)$$

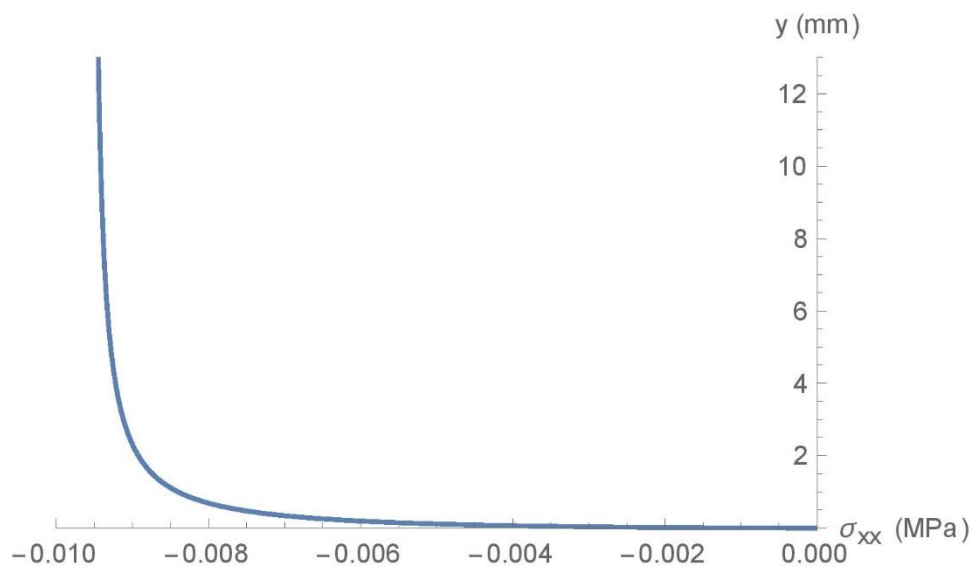
$$\tau_{xy} = \frac{Eu \cos \alpha}{2\delta(\nu + 1)} \quad (43)$$

gdje je:

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= 4\sqrt{h} \sqrt{\frac{y}{d^2(\frac{16hy}{d^2} + 1)}} \\ \cos \alpha &= \sqrt{\frac{1}{\frac{16hy}{d^2} + 1}} \end{aligned} \quad (44)$$

6.1.1 Naprezanje σ_{xx}

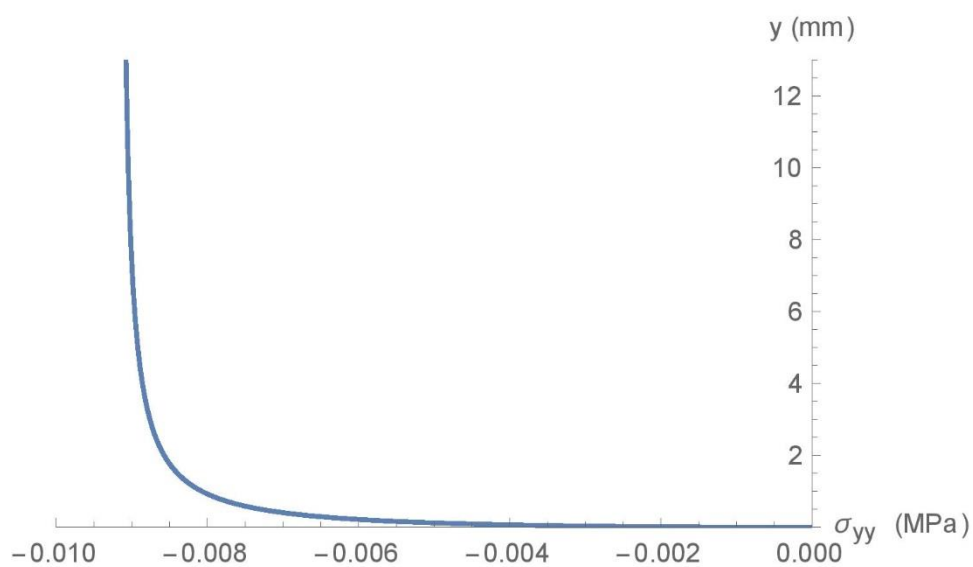
$$\sigma_{xx} = -0,01766 \sqrt{\frac{y}{1 + 3,4188y}}$$



Slika 15. Raspodjela naprezanja σ_{xx} u parodontnom ligamentu duž osi y

6.1.2 Naprezanje σ_{yy}

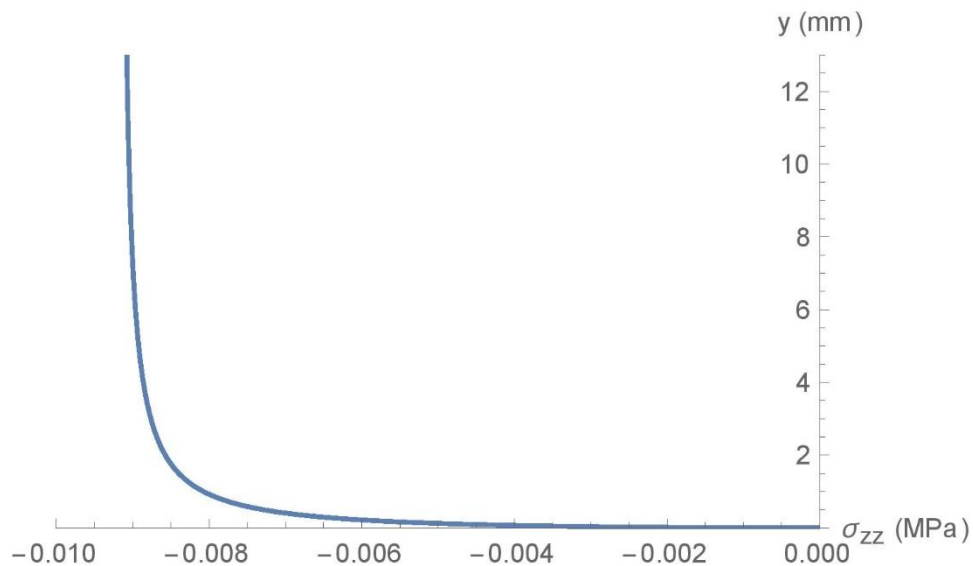
$$\sigma_{yy} = -0,01697 \sqrt{\frac{y}{1 + 3,4188y}}$$



Slika 16. Raspodjela naprezanja σ_{yy} u parodontnom ligamentu duž osi y

6.1.3 Naprezanje σ_{zz}

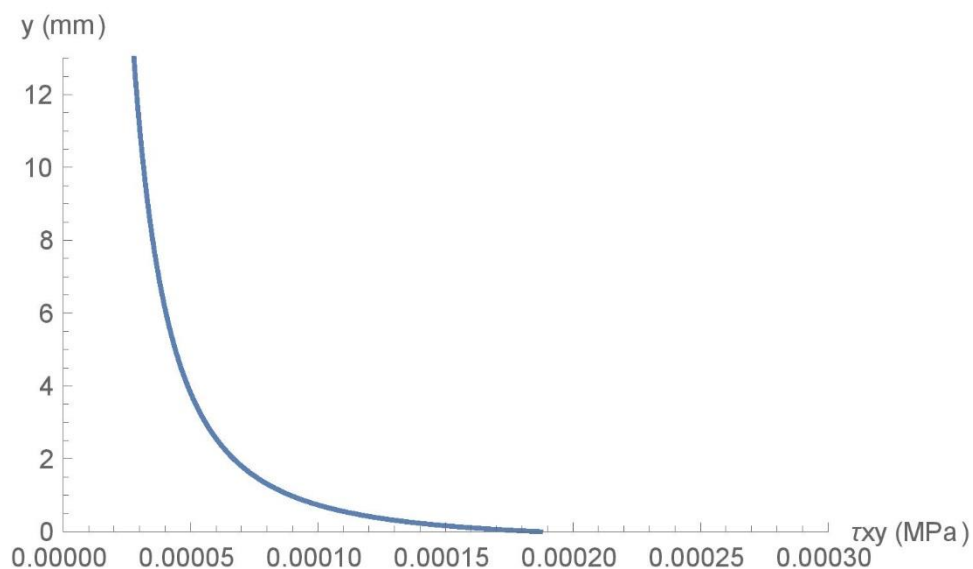
$$\sigma_{zz} = -0,01697 \sqrt{\frac{y}{1 + 3,4188y}}$$



Slika 17. Raspodjela naprezanja σ_{zz} u parodontnom ligamentu duž osi y

6.1.4 Naprezanje τ_{xy}

$$\tau_{xy} = 0,000187 \sqrt{\frac{1}{1 + 3,4188y}}$$



Slika 18. Raspodjela naprezanja τ_{xy} u parodontnom ligamentu duž osi y

7 ZAKLJUČAK

Djelovanjem sile na zub potiču se promjene u pulpi, parodontnom ligamentu, alveolnoj kosti i gingivi. U tim se tkivima, ako su izložena silama različitih iznosa, učestalosti, vremenu djelovanja opterećenja, događaju mnoge makroskopske i mikroskopske promjene [16].

Analitički model opisan u prethodnim poglavljima opisuje naprezanje uslijed čiste translacije jednokorijenskog zuba. Geometrija zuba je aproksimirana pomoću eliptičnog paraboloida. Račun ovisi o geometrijskim karakteristikama (h , D , δ) zuba te o mehaničkim svojstvima (E , ν) parodontnog ligamenta te su uvedene određene pretpostavke i ograničenja modela.

Iz jednadžbi (40), (41), (42), (43) možemo uočiti da se najveće naprezanje pojavljuje za maksimalnu vrijednost $\sin \alpha$, odnosno jednadžbe (44). Na vrhu korijena zuba kut α iznosi 0 te raste s porastom vijednosti y . Dakle, najveće naprezanje pojavljuje se na alveolnom grebenu gdje je $y = h$. Također iz analitičkih izraza za naprezanja (jednadžbe (40),(41),(42),(43)) te izraza za $\sin \alpha$ i $\cos \alpha$ iz jednadžbe (44) možemo uočiti da, za istu vrijednost naprezanja, povećanjem promjera D i visine h zuba, raste i pomak u . Važno je znati i položaj središta otpora koji se, smanjenjem visine h te povećanjem promjera D , približava alveolnom grebenu.

Nedostatak modela je nemogućnost preciznog opisivanja stanja unutar parodontnog ligamenta, tj. ne može uzeti u obzir nelinearnu distribuciju pomaka. Međutim, ovaj model ima praktičnu primjenu te se dobiveni izrazi mogu koristiti kao dopuna ili provjera kod FEM analize translacijskog pomaka zuba.

8 LITERATURA

- [1] Field, C., Ichim, I., Swain, M.V., etc.: *Mechanical responses to orthodontic loading, A-3 dimensional finite element multi-tooth model*, Am J Orthod Dentofacial Orthop, 2009.
- [2] *Anatomy of a tooth*, <https://culpepperdds.wordpress.com/basic-tooth-anatomy/>, 19.02.2015.
- [3] Perović, D., *Anatomija čovjeka I dio*, Medicinska knjiga, 1966.
- [4] *Tooth development*, http://www.smilemidland.com/tooth_development.html, 07.02.2015.
- [5] *Grada parodonta*, <http://www.mojstomatolog.com.hr/gradaparodonta/>, 19.02.2015.
- [6] Ash M.Jr., Nelson S.: *Wheeler's Dental Anatomy, Physiology, and Occlusion*, Philadelphia, Saunders, 2003.
- [7] *Periodontal disease and the bite*, <http://www.dentist-charlotte-north-carolina-nc.com/periodontal-disease-and-the-bite.html>, 28.02.2015.
- [8] Lindhe, J., Lang, N.P., Karring, T.: *Clinical Periodontology and Implant Dentistry*, Munksgaard, Blackwell, 2008.
- [9] Poje, Z.: *Translacijsko distalno pomicanje gornjih kutnjaka headgearom*, Zavod za ortodontiju Stomatološkog fakulteta u Zagrebu, Zagreb, 1984.
- [10] *Different location of center of resistance depending on the periodontal support*, <http://www.dentalpedia.ca/biomechanics/physics-in-orthodontics/centers/>, 27.08.2015.
- [11] *Different position of center of resistance in premolar versus canine*, <http://www.dentalpedia.ca/biomechanics/physics-in-orthodontics/centers/>, 27.08.2015.
- [12] *Center of resistance in different teeth*, <http://www.dentalpedia.ca/biomechanics/physics-in-orthodontics/centers/>, 27.08.2015.
- [13] *Tooth movement*, <http://www.dentalcare.com/en-US/dental-education/continuing-education/ce365/ce365.aspx?ModuleName=coursecontent&PartID=5&SectionID=-1>, 05.02.2015.

[14] *Braces and how your teeth move*, <http://mejournals.com/kai/2015/02/07/braces-and-how-your-teeth-move/>, 07.02.2015.

[15] Provatidis, C.G.: *An analytical model for stress analysis of a tooth in translation*, International Journal of Engineering Science 39, , 2001, 1361-1381.

[16] Krishnan, V., Davidovitch, Z.: *Cellular, molecular, and tissue-level reactions to orthodontic force*, American Journal of Orthodontics and Dentofacial Orthopedics, 2006;129:469e 1-460e.32

PRILOG

Prilog 1. Računanje matrice transformacije **T**

```

s = RotationMatrix[-((π/2) - α), {0, 0, 1}]
{{Sin[α], Cos[α], 0}, {-Cos[α], Sin[α], 0}, {0, 0, 1}}

MatrixForm[%]

$$\begin{pmatrix} \sin[\alpha] & \cos[\alpha] & 0 \\ -\cos[\alpha] & \sin[\alpha] & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$


d = RotationMatrix[φ, {0, 1, 0}]
{{Cos[φ], 0, Sin[φ]}, {0, 1, 0}, {-Sin[φ], 0, Cos[φ]}}

MatrixForm[%]

$$\begin{pmatrix} \cos[\phi] & 0 & \sin[\phi] \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin[\phi] & 0 & \cos[\phi] \end{pmatrix}$$


In[105]:= T1 = {{Sin[α], Cos[α], 0}, {-Cos[α], Sin[α], 0}, {0, 0, 1}};
T2 = {{H, 0, -G}, {0, 1, 0}, {G, 0, H}};
TraditionalForm[T1]

Out[107]/TraditionalForm=

$$\begin{pmatrix} \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ -\cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$


In[110]:= T1T = Transpose[T1];
TraditionalForm[T1T]

Out[111]/TraditionalForm=

$$\begin{pmatrix} \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) & 0 \\ \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$


In[22]:= TraditionalForm[T2]

Out[22]/TraditionalForm=

$$\begin{pmatrix} H & 0 & -G \\ 0 & 1 & 0 \\ G & 0 & H \end{pmatrix}$$


In[112]:= T2T = Transpose[T2];

In[113]:= TraditionalForm[T2T]

Out[113]/TraditionalForm=

$$\begin{pmatrix} H & 0 & G \\ 0 & 1 & 0 \\ -G & 0 & H \end{pmatrix}$$


In[116]:= Tnt = T1T · T2T;
TraditionalForm[Tnt]

Out[117]/TraditionalForm=

$$\begin{pmatrix} H \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) & G \sin(\alpha) \\ H \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & G \cos(\alpha) \\ -G & 0 & H \end{pmatrix}$$


```

Prilog 2. Dobivanje analitičkih izraza na naprežanje

$$\begin{aligned}
 h &= 13; \\
 \delta &= 0.229; \\
 e &= 0.68; \\
 \nu &= 0.49; \\
 A &= 16 h / d^2; \\
 u &= 0.000188; \\
 \tan[\alpha] &= \left(4 \sqrt{h} \sqrt{y} \right) / d; \\
 a &= \sqrt{(A y) / (1 + A y)} ; \rightarrow \sin[\alpha] \\
 b &= \sqrt{1 / (1 + A y)} ; \rightarrow \cos[\alpha] \\
 G &= -\sin[\phi]; \\
 H &= \cos[\phi];
 \end{aligned}$$

Out[660]/TraditionalForm=

$$\begin{pmatrix}
 \frac{e(1-\nu)}{(1-2\nu)(\nu+1)} & \frac{e\nu}{(1-2\nu)(\nu+1)} & \frac{e\nu}{(1-2\nu)(\nu+1)} & 0 & 0 & 0 \\
 \frac{e\nu}{(1-2\nu)(\nu+1)} & \frac{e(1-\nu)}{(1-2\nu)(\nu+1)} & \frac{e\nu}{(1-2\nu)(\nu+1)} & 0 & 0 & 0 \\
 \frac{e\nu}{(1-2\nu)(\nu+1)} & \frac{e\nu}{(1-2\nu)(\nu+1)} & \frac{e(1-\nu)}{(1-2\nu)(\nu+1)} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \frac{e}{\nu-1} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{e}{\nu-1} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{e}{\nu+1}
 \end{pmatrix}$$

In[668]:= $\epsilon = \{ \{ (-\cos[\phi] \sin[\alpha] u) / \delta \}, \{ 0 \}, \{ 0 \}, \{ \cos[\alpha] u / (2 \delta) \}, \{ 0 \}, \{ (G \sin[\alpha] u) / (2 \delta) \} \};$
TraditionalForm[ϵ]

Out[669]/TraditionalForm=

$$\begin{pmatrix}
 -\frac{u \cos(\phi) \sin(\alpha)}{\delta} \\
 0 \\
 0 \\
 \frac{u \cos(\alpha)}{2 \delta} \\
 0 \\
 \frac{G u \sin(\alpha)}{2 \delta}
 \end{pmatrix}$$

In[680]:= $\sigma = L . \epsilon;$ In[662]:= **TraditionalForm[σ]**

Out[682]/TraditionalForm=

$$\begin{pmatrix}
 -\frac{e u (1-\nu) \cos(\phi) \sin(\alpha)}{\delta (1-2\nu)(\nu+1)} \\
 -\frac{e u \nu \cos(\phi) \sin(\alpha)}{\delta (1-2\nu)(\nu+1)} \\
 -\frac{e u \nu \cos(\phi) \sin(\alpha)}{\delta (1-2\nu)(\nu+1)} \\
 \frac{e u \cos(\alpha)}{2 \delta (\nu+1)} \\
 0 \\
 \frac{e G u \sin(\alpha)}{2 \delta (\nu+1)}
 \end{pmatrix}$$

$$\text{In[663]}:= a = \sqrt{(A y) / (1 + A y)} ; \rightarrow \text{Sin}[\alpha]$$

$$b = \sqrt{1 / (1 + A y)} ; \rightarrow \text{Cos}[\alpha]$$

$$\text{Out[663]}= 4 \sqrt{\frac{h y}{d^2 \left(1 + \frac{16 h y}{d^2}\right)}}$$

$$\sqrt{\frac{1}{1 + \frac{16 h y}{d^2}}}$$

$$\text{In[664]}:= \text{MatrixForm}[\sigma]$$

Out[664]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} \frac{4 e u \sqrt{\frac{h y}{d^2 \left(1 + \frac{16 h y}{d^2}\right)}} (1-\nu) \text{Cos}[\phi]}{\delta (1-2 \nu) (1+\nu)} \\ \frac{4 e u \sqrt{\frac{h y}{d^2 \left(1 + \frac{16 h y}{d^2}\right)}} \nu \text{Cos}[\phi]}{\delta (1-2 \nu) (1+\nu)} \\ \frac{4 e u \sqrt{\frac{h y}{d^2 \left(1 + \frac{16 h y}{d^2}\right)}} \nu \text{Cos}[\phi]}{\delta (1-2 \nu) (1+\nu)} \\ \frac{e u \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{16 h y}{d^2}}}}{2 \delta (1+\nu)} \\ 0 \\ \frac{2 e G u \sqrt{\frac{h y}{d^2 \left(1 + \frac{16 h y}{d^2}\right)}}}{\delta (1+\nu)} \end{pmatrix}$$

$$\text{In[665]}:= \phi = 0 ;$$

$$d = 7.8 ;$$