

# Primjena kontrolnih karata za podatke s trendom

---

**Rašić, Marko**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2015**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:235:467115>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-03-01**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# **DIPLOMSKI RAD**

**Marko Rašić**

Zagreb, 2015.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# DIPLOMSKI RAD

Mentor:

Prof. dr. sc. Vedran Mudronja, dipl. ing.

Student:

Marko Rašić

Zagreb, 2015.

Izjavljujem da sam ovaj rad izradio samostalno koristeći stečena znanja tijekom studija i navedenu literaturu.

Zahvaljujem se svom mentoru, prof. dr. sc. Vedranu Mudronji, na pruženoj pomoći, strpljenju, te iznimno korisnim savjetima i informacijama potrebnim za izradu ovog rada.

Također zahvaljujem i tvrtki Ferometal - prerada d.o.o. i njezinim zaposlenicima na ustupljenim materijalima i informacijama koji su olakšali izradu ovog rada.

Marko Rašić



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
**FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE**



Središnje povjerenstvo za završne i diplomske ispite  
Povjerenstvo za diplomske ispite studija strojarstva za smjerove:  
proizvodno inženjerstvo, računalno inženjerstvo, industrijsko inženjerstvo i menadžment, inženjerstvo  
materijala i mehatronika i robotika

Sveučilište u Zagrebu Fakultet strojarstva i brodogradnje	
Datum	Prilog
Klasa:	
Ur.broj:	

## DIPLOMSKI ZADATAK

Student: **MARKO RAŠIĆ** Mat. br.: 0035183846

Naslov rada na hrvatskom jeziku: **PRIMJENA KONTROLNIH KARATA ZA PODATKE S TRENDOM**

Naslov rada na engleskom jeziku: **USE OF CONTROL CHARTS FOR TRANDING DATA**

Opis zadatka:

1. Stručno opisati temeljne značajke kontrolnih karata za mjerljive karakteristike. Navesti nedostatke konvencionalnih kontrolnih karata za praćenje procesa s trendom podataka.
2. Temeljem simuliranih i stvarnih primjera teorijski i eksperimentalno predložiti rješenje za primjenu kontrolnih karata u slučaju praćenja procesa s trendom podataka.
3. Raspraviti postupak procjenjivanja indeksa sposobnosti procesa za proces s trendom podataka.
4. Raspraviti efikasnost CuSUM i EWMA kontrolne karte u ranom otkrivanju procesa s trendom podataka.

Zadatak zadan:  
7. svibnja 2015.

Rok predaje rada:  
9. srpnja 2015.

Predviđeni datum obrane:  
15., 16. i 17. srpnja 2015.

Zadatak zadao:

Predsjednik Povjerenstva:

Prof. dr. sc. Vedran Mudronja

Prof. dr. sc. Franjo Čajner

## SADRŽAJ

SADRŽAJ .....	I
POPIS SLIKA .....	II
POPIS OZNAKA .....	IV
SAŽETAK.....	V
1. UVOD.....	1
2. ŠTO SU KONTROLNE KARTE? .....	2
2.1. Konstrukcija kontrolne karte.....	3
2.2. Vrste kontrolnih karata.....	8
2.2.1. Kontrolne karte za mjerljive (numeričke) karakteristike .....	8
2.2.2. Kontrolne karte za atributivne karakteristike.....	9
2.3. Analiza i tumačenje kontrolnih karata .....	10
3. PROCESI S TRENDOM PODATAKA .....	13
3.1. Regresijska analiza.....	13
3.1.1. Jednostavna linearna regresija .....	17
3.2. Primjena kontrolnih karata za simulirani proces s trendom podataka .....	22
4. PROCJENJIVANJE SPOSOBNOSTI PROCESA .....	37
4.1. Uvod.....	37
4.2. Indeksi sposobnosti procesa.....	38
4.2.1. Sposobnost procesa u dužem vremenskom periodu .....	38
4.2.2. Preliminarna sposobnost procesa .....	43
4.2.3. Sposobnost procesa u kratkom vremenskom razdoblju.....	44
4.2.4. Razlozi za primjenu indeksa sposobnosti procesa .....	44
4.3. Procjenjivanje sposobnosti procesa za simulirani proces s trendom podataka .....	46
5. PRIMJER IZ PRAKSE.....	55
5.1. Uvod.....	55
5.2. Praćenje procesa tokarenja kontrolnom kartom.....	58
5.3. Procjenjivanje sposobnosti procesa tokarenja.....	65
5.4. Primjena CuSUM i EWMA kontrolnih karata za rano otkrivanje trendova.....	70
6. ZAKLJUČAK.....	77
LITERATURA.....	78
PRILOZI.....	79

## POPIS SLIKA

Slika 1.	Opći model kontrolne karte .....	5
Slika 2.	Proces je u „stanju statističke kontrole“ .....	6
Slika 3.	Proces je „izvan statističke kontrole“ .....	6
Slika 4.	Kontrolna karta kao preventivni alat .....	7
Slika 5.	Izbor kontrolne karte .....	10
Slika 6.	Podjela kontrolne karte na zone .....	10
Slika 7.	Slučajno generirani podaci koji prate trend pomoću Excell-a .....	22
Slika 8.	Histogram generiranih podataka .....	23
Slika 9.	Grafički prikaz generiranih podataka u vremenu .....	23
Slika 10.	Regresijska analiza generiranih podataka .....	24
Slika 11.	Regresijska funkcija generiranih podataka.....	25
Slika 12.	X – R kontrolna karta .....	26
Slika 13.	Shematski prikaz konvencionalne kontrolne karte .....	28
Slika 14.	Shematski prikaz regresijske kontrolne karte .....	29
Slika 15.	Regresijska kontrolna karta za proces s trendom podataka.....	30
Slika 16.	Proces nakon korekcije.....	32
Slika 17.	Regresijska analiza nakon korekcije .....	33
Slika 18.	Regresijska kontrolna karta nakon prve korekcije .....	34
Slika 19.	Simulirani proces s trendom podataka nakon više korekcija .....	35
Slika 20.	Regresijska kontrolna karta nakon više korekcija.....	36
Slika 21.	Primjeri indeksa $C_p$ .....	40
Slika 22.	Različite vrijednosti indeksa $C_p$ prema normalno distribuiranom procesu .....	40
Slika 23.	Primjena indeksa $C_{pL}$ i $C_{pU}$ kada je dan jednostrani zahtjev .....	41
Slika 24.	Primjena indeksa $C_{pL}$ i $C_{pU}$ kada je dan jednostrani zahtjev .....	42
Slika 25.	Sposobnost procesa nakon 35. uzorka (prva korekcija) .....	47
Slika 26.	Sposobnost procesa nakon 25. uzorka.....	49
Slika 27.	Sposobnost procesa nakon 20. uzorka.....	50
Slika 28.	Sposobnost procesa nakon 18. uzorka.....	51
Slika 29.	Ovisnost indeksa $P_p$ za prvi regresijski pravac.....	52
Slika 30.	Ovisnost indeksa $P_p$ za drugi regresijski pravac.....	52
Slika 31.	Ovisnost indeksa $P_p$ za treći regresijski pravac .....	53
Slika 32.	Ovisnost indeksa $P_p$ za četvrti regresijski pravac .....	53
Slika 33.	Ovisnost indeksa $P_p$ za peti regresijski pravac .....	54
Slika 34.	CNC tokarilica HAAS SL 10 sa automatskim dodavačem šipki .....	55
Slika 35.	Tehnički nacrt pozicije .....	56
Slika 36.	Gotov proizvod.....	57
Slika 37.	Prikupljeni podaci mjerenja.....	58
Slika 38.	Mjerni instrument digitalni mikrometar .....	59
Slika 39.	Histogram podataka mjerenja.....	59
Slika 40.	Grafički prikaz izmjerenih podataka u vremenu .....	60

---

Slika 41.	Regresijska analiza prvog dijela podataka .....	61
Slika 42.	Regresijska analiza drugog dijela podataka .....	62
Slika 43.	Regresijska analiza trećeg dijela podataka .....	63
Slika 44.	Regresijska kontrolna karta procesa tokarenja .....	64
Slika 45.	Ovisnost indeksa $P_p$ i $C_p$ o vremenu korekcije za prvi regresijski pravac .....	66
Slika 46.	Ovisnost indeksa $P_p$ i $C_p$ o vremenu korekcije za drugi regresijski pravac .....	67
Slika 47.	Ovisnost indeksa $P_p$ i $C_p$ o vremenu korekcije za treći regresijski pravac .....	68
Slika 48.	Zahtijevana vremena korekcije .....	69
Slika 49.	Slučajno generirani podaci .....	72
Slika 50.	I – MR kontrolna karta .....	73
Slika 51.	EWMA kontrolna karta .....	73
Slika 52.	CuSUM kontrolna karta .....	74
Slika 53.	CuSUM kontrolna karta za proces tokarenja .....	75
Slika 54.	EWMA kontrolna karta za proces tokarenja .....	75



## POPIS OZNAKA

QC – Quality Control (kontrola kvalitete)

SQC – Statistical Quality Control (statistička kontrola kvalitete)

SPC – Statistical Process Control (statistička kontrola procesa)

CL - Central Line (središnja linija)

UCL – Upper Control Limit (gornja kontrolna granica)

LCL – Lower Control Limit (donja kontrolna granica)

LSM – Least Square Method (metoda najmanjih kvadrata)

SSE – Sum of Squares of errors (suma kvadrata grešaka)

$\bar{x}$  – aritmetička sredina varijable  $x$

$\bar{y}$  – aritmetička sredina varijable  $y$

$R$  – raspon vrijednosti

$s$  – procjenjena standardna devijacija

$s_x^2$  – srednje kvadratno odstupanje varijable  $x$  od  $\bar{x}$

$s_y^2$  – srednje kvadratno odstupanje varijable  $y$  od  $\bar{y}$

$s_{xy}$  – uzročna kovarijanca

$\varepsilon$  – rezidual

$S_e$  – Standard Error of Estimate (procjenjena standardna greška regresije)

$r$  – koeficijent korelacije

$r^2$  – koeficijent determinacije

$\hat{y}$  – teorijska (regresijska) vrijednost varijable  $y$

$t$  – parametar Studentove  $t$  razdiobe

$F$  – parametar  $F$  razdiobe

$\beta_0$  – slobodni parametar regresijskog pravca

$\beta_1$  – koeficijent regresije

## SAŽETAK

Ovim radom prikazana je primjena kontrolnih karata za podatke s izraženim trendom. Objasnjen je princip konvencionalnih kontrolnih karata, vrste, konstrukcija, te glavni ciljevi koji se žele postići njihvom primjenom. Nadalje, u skladu za zadatkom rada, na simuliranom primjeru i stvarnom primjeru iz prakse, objašnjena je regresijska kontrolna karta kao rješenje u slučaju praćenja procesa koji imaju trend podataka. Osim toga, prikazan je i način procjenjivanja sposobnosti takvih procesa i razlike u odnosu na procese bez trenda, te su na temelju dobivenih informacija izvedeni odgovarajući zaključci. Na kraju rada ukratko su objašnjene i prikazane posebne kontrolne karte koje se koriste u ranom otkrivanju procesa s trendom podataka

Ključne riječi: *kontrolne karte; procesi s trendom; regresijska kontrolna karta; sposobnost procesa*

## 1. UVOD

Gospodarski razvoj i napredak natjerao je poduzeća da, osim cijenovnoj konkurentnosti, veliku pozornost posvete i konkurentnosti u kvaliteti. Riječ kvaliteta potječe od latinske riječi "qualitas" što u prijevodu znači "takav". Iako svatko općenito zna što je kvaliteta, nju nije lako u potpunosti definirati. Definicijom se može obuhvatiti različita širina tog pojam, a jednako se tako kvaliteta može promatrati s različitih gledišta. S gledišta potrošača, kvaliteta se povezuje s vrijednošću, korisnošću ili čak cijenom, gdje predstavlja jako relativnu kategoriju ovisnu o individualnim preferencijama potrošača. S gledišta proizvođača, kvaliteta se povezuje s oblikovanjem i izradom proizvoda da bi se zadovoljile potrebe potrošača i gdje se ne toleriraju razlike u kvaliteti. Nadalje, u literaturi se mogu naći brojne definicije, a jedno je zajedničko svima njima, a to je da se uvijek u središtu pozornosti nalazi kupac i zadovoljavanje njegovih potreba na što je moguće bolji način. Može se slobodno reći da kontrola kvalitete (quality control - QC) ima dugu povijest. Međutim, statistička kontrola kvalitete (statistical quality control - SQC<sup>1</sup>) relativno je nova metoda. Počela se uspješno primjenjivati dvadesetih godina prošloga stoljeća, kao rezultat prihvaćanja teorije uzoraka. Koncept kontrole kvalitete u proizvodnji prvi je uveo **dr. Walter A. Shewart**, koji je 1924. godine izumio kontrolne karte. Za svoj rad nikada nije dobio zaslužen priznanje, ali su na osnovu njegovih saznanja *Deming*, *Juran*, *Ishikawa* i mnogi drugi tijekom dvadesetoga stoljeća, razvijali i konstantno unaprjeđivali koncept statističke kontrole kvalitete. Od Shewart-a do danas praktički nije objavljena niti jedna knjiga iz područja kvalitete u kojoj značajno mjesto ne zauzimaju i kontrolne karte. Primjena kontrolnih karata je posljednjih dvadesetak godina značajno porasla. Ponajprije je uzrok tome otvorena mogućnost integriranja SPC (*Statistical proces control*) softvera u proizvodne procese, te sve šira primjena u postupcima procjenjivanja i dokazivanja sposobnosti procesa. One također zauzimaju značajno mjesto i u metodologiji „6 Sigma“, statističkim tolerancijama i dr. Može se reći da se svi moderni pristupi kontroli i poboljšavanju kvalitete u prvom redu oslanjaju na kontrolne karte, koje se bez ikakve sumnje smatraju najznačajnijim alatom kontrole i poboljšavanja kvalitete. Cilj ovog rada je približiti čitatelju sam pojam kontrolnih karata, te njihovu primjenu u specifičnim tehnološkim ili drugim procesima s izraženim trendovima.

---

<sup>1</sup> Statistička kontrola kvalitete (eng. Statistical Quality control- SQC) - je skup metoda i postupaka za prikupljanje, obradu, analizu, tumačenje i prikaz podataka. Koristi se u svrhu osiguranja kvalitete proizvoda i procesa. Pravilnom primjenom SQC moguće je smanjiti troškove proizvodnje. Također je definirana i kao primjena statističkih metoda za mjerenje i analizu varijacija u bilo kojem procesu.

## 2. ŠTO SU KONTROLNE KARTE?

Kontrolna karta je u prvom redu „slika“ procesa. Kontrolna karta pokazuje kako se mjerni podaci (značajke procesa, proizvoda i sl.) kreću u vremenu i što treba poduzimati u cilju poboljšavanja kvalitete. Osnovni su instrument pomoću kojega se provodi statistička kontrola proizvoda ili proizvodnoga procesa. Osnovna uloga kontrolnih karata je u otkrivanju i vizualizaciji poremećaja kvalitete proizvoda.

Kontrolna karta predstavlja vrlo efikasan alat za reguliranje i upravljanje kvalitetom proizvoda i procesa rada. Koristi se kako u proizvodnim, tako i u uslužnim djelatnostima. Neke osnovne mogućnosti ovog alata su sljedeće:

- upravljanje kvalitetom procesa rada na bazi prostorne i vremenske slike stanja procesa, a u cilju sprečavanja proizvodnje nesukladnih proizvoda,
- kontrola kvalitete proizvoda u pojedinim fazama proizvodnje, fazi pripreme i fazi završetka,
- stabilizacija procesa na osnovu otkrivanja nedopuštenih faktora i njihovog isključenja iz toka procesa,
- analiza točnosti i stabilnosti procesa rada,
- usavršavanje tehnoloških procesa rada s gledišta kvalitete,
- analiza grešaka obrade u toku odvijanja tehnoloških procesa,
- primjena u svim fazama nekog procesa (ulazna, procesna, izlazna kontrola i kontrola u eksploataciji) i svim tipovima proizvodnje (maloserijskoj, srednjeserijskoj i masovnoj proizvodnji). [1]

Zadatak kontrolnih karti je:

- dovođenje procesa proizvodnje u stanje pod kontrolom,
- održavanje procesa proizvodnje u stanju kontrole (**preventivna uloga**)
- pokazati postignuto stanje kontrole.

Kontrolne karte temeljene na teoriji koju je razvio dr. Walter A. Shewart poznate su i kao *Shewart-ove* kontrolne karte. Sama tehnika sastoji se od uzimanja većeg broja malih uzoraka iz procesa. Uzima se veći broj uzoraka kako bi povezanost između osnovnog skupa i uzoraka bila posve određena. Pritom se uzorci, ako je to primjenljivo, uzimaju u slučajnim obilascima. Važno je ponovno naglasiti da se kontrolnom kartom prate **varijacije procesa u vremenu**. To

znači da uzorci **uvijek moraju biti zadnje proizvedene jedinice**. Varijacije unutar procesa mogu nastati kao posljedica dvije vrste uzroka [2]:

1. *opći ili sustavni* (common causes), koji su svojstveni procesu (npr. genotipske varijacije),
2. *specifični ili posebni* (special causes), koji uzrokuju pretjeranu varijaciju.

Dakle, kontrolne se karte koriste za razlikovanje tih dviju vrsta varijacija u procesu, na osnovu analize podataka iz prošlosti i budućnosti (procjena). Uklanjanjem posebnih uzroka, proces se dovodi u stanje statističke kontrole. Daljnje poboljšanje procesa zahtjeva identificiranje, prepoznavanje i uklanjanje općih ili sustavnih uzroka varijacija.

Bitno je istaknuti važnost kontrolnih karti kao **preventivnog alata**. Naime, optimalnom primjenom kontrolnih karata osigurava se konstantno praćenje procesa, usmjeravanje ka željenom toku i poduzimanje eventualnih korektivnih mjera. Također, njihovom primjenom osigurava se ispunjenje projektiranih ili zahtjevanih karakteristika kvalitete, odnosno ispunjenje zahtjeva određenog standarda.

## 2.1. Konstrukcija kontrolne karte

Konstrukcija kontrolne karte vrlo je jednostavna. One se sastoje od tri linije ucrtane u kontrolnoj karti, kao što je to prikazano slikom 1., a to su:

- Gornja kontrolna granica (Upper Control Limit-UCL)
- Središnja crta (Central Line-CL)
- Donja kontrolna granica (Lower Control Limit-LCL)

Kontrolne granice izračunavaju se na tri načina:

- na temelju snimljenih podataka tehnološkog procesa (nepoznat proces – najčešći slučaj);
- na temelju zadane tolerancije karakteristike kvalitete koja se prati;
- na temelju poznavanja sposobnosti tehnološkog procesa ( $6\sigma$ ).

Najčešći način konstrukcije kontrolnih karata i izračunavanja pripadajućih kontrolnih granica je za prethodno nepoznati proces. Takav proces potrebno je najprije snimiti te na temelju prikupljenog seta podataka izračunati pripadajuće kontrolne granice. Kada su kontrolne granice

izračunate moguće je ocjenjivati stabilnost procesa na temelju prikupljenih podataka i njihovom „izgledu“ u vremenu.

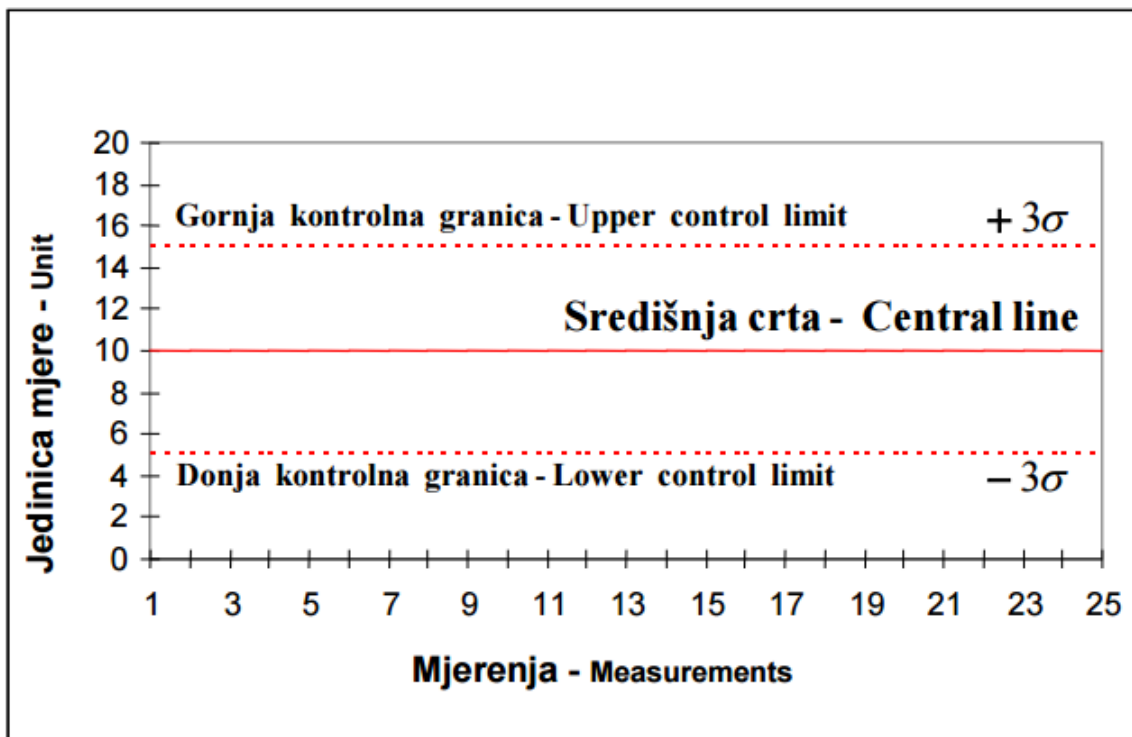
Ovdje je jako bitno naglasiti kako su kontrolne granice statističke granice i one **nisu povezane** s granicama zahtjeva definiranih od strane kupaca. U praksi se, nažalost, kod primjene kontrolnih karata neopravdano velika pažnja posvećuje kontrolnim granicama i nepotrebnoj „filozofiji“ da li je podatak unutar ili izvan istih. Statistički značajna varijacija procesa uvijek je uočljiva, te iziskuje brzu akciju u otkrivanju njenog uzroka. Stoga je važno razumijeti isključivo statističko značenje kontrolnih granica i nepovezanost s granicama zahtjeva. Nadalje, središnja linija procesa predstavlja liniju aritmetičke sredine statističkog parametra koji se prati kontrolnom kartom. Ona predstavlja prosječnu vrijednost datog parametra karakteristike kvalitete koja odgovara stanju "pod kontrolom" kada su prisutni samo slučajni izvori varijabilnosti u procesu. Kontrolne se granice (donja i gornja) postavljaju, odnosno računaju na granice rasipanja ( $\pm 3\sigma$ ) statističkog parametra ( $\bar{X}$ , R, s i drugo) koji se prati kontrolnom kartom tj. računa iz uzorka. Pored kontrolnih granica mogu se koristiti i tzv. granice upozorenja koje se postavljaju na  $\pm 2\sigma$  ili  $\pm 1\sigma$ . Te tri karakteristične linije u kontrolnim kartama predstavljene su sljedećim izrazima:

$$UCL = \mu_s + L \cdot \sigma_s, \quad (2.1)$$

$$CL = \mu_s, \quad (2.2)$$

$$LCL = \mu_s - L \cdot \sigma_s \quad (2.3)$$

gdje je S neki parametar iz uzorka koji se veže za određenu karakteristiku kvalitete, čija je očekivana vrijednost jednaka  $\mu_s$  i standardna devijacija  $\sigma_s$ .



Slika 1. Opći model kontrolne karte [2]

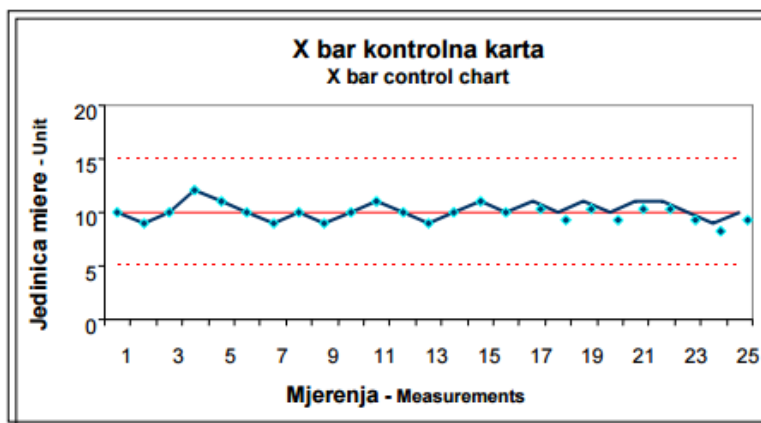
Nakon što je kontrolna karta završena, sa ucrtanim kontrolnim granicama, središnjom linijom, te podacima dobivenim iz uzoraka, može se preći na analizu stabilnosti procesa. Tada se može pojaviti jedan od ovih slučajeva:

- Sve točke su unutar kontrolnih granica, simetrično naizmenično rasporedjene oko (CL). Proces je stabilan (pod kontrolom).
- Sve točke su unutar kontrolnih granica, ali su točke rasporedjene većinom u nizu iznad ili ispod (CL). Proces je stabilan, ali treba vidjeti zašto je nastao ovaj pomak.
- Jedna (ili dvije) točke nalaze se izvan kontrolnih granica. U ovom slučaju pojedinačna točka (podatak) se izbacuje, a proračun (CL) i (KG) se vrši ponovo, bez nje. Ako se tada nijedna točka ne nalazi izvan KG, proces je pod kontrolom. Ako neke točke izlaze izvan novih KG, proces nije pod kontrolom.
- Više točaka je izvan KG. Proces je nestabilan.

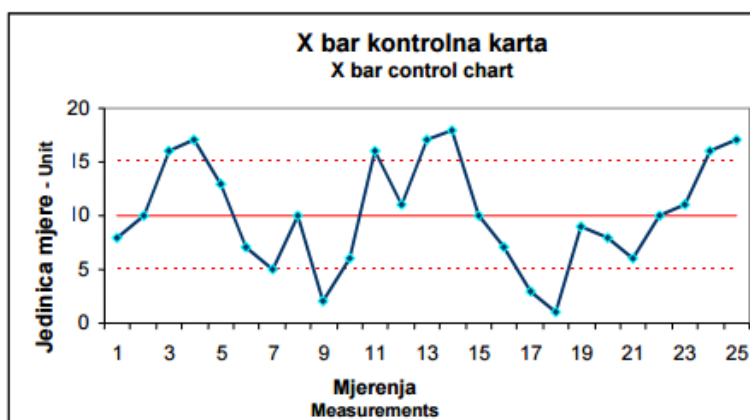
Podatak izvan kontrolne granice (iznad UCL ili ispod LCL) pokazuje da se u procesu, statistički promatrano, dogodio ne slučajan nego značajan uzrok varijacije (odstupanja). Pritom je bitno naglasiti da u slučaju podataka izvan kontrolnih granica, to nipošto ne znači da proces daje

nesukladne jedinice (proizvode), upravo iz prije navedenog razloga što kontrolne granice nemaju veze sa granicama specifikacije, nego su to statističke granice. Kad varijacija prelazi statističke kontrolne granice, to je znak da su posebni uzroci ušli u proces i da proces treba ispitati kako bi se oni utvrdili. Za takav proces kažemo da je „izvan kontrole“. Najefikasniji postupak poboljšavanja kvalitete praćenog procesa je promptno otkrivanje uzroka značajnih varijacija i provođenje popravnih radnji. Niti jedno poboljšavanje procesa ne odvija se preko noći. Poboljšavanja se sastoje od „sitnih koračića“ u dugom vremenskom razdoblju, te je važno znati kojim redom koračati (izbor prioriteta).

U slučaju kad nema podataka izvan kontrolnih granica onda se koristi termin „*pod kontrolom*“. To je dakle, statistički termin kojim se samo pokazuje da proces varira isključivo pod utjecajem slučajnih, procesu svojstvenih uzroka. Na sljedećim slikama (Slika 2. i Slika 3.) dan je primjer ovih dvaju navedenih slučajeva.



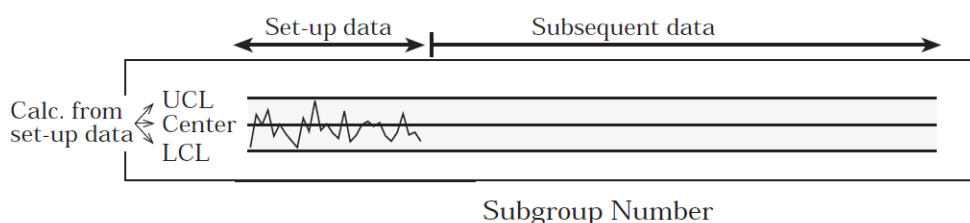
Slika 2. Proces je u „stanju statističke kontrole“ [2]



Slika 3. Proces je „izvan statističke kontrole“ [2]



Iz prethodno iznesenog valja naglasiti primarnu ulogu kontrolnih karata, te njihovu primjenu u tijeku odvijanja procesa primarno iz preventivnih razloga i pravovremenog podešavanja procesa (izmjene alata i sl.). Iz tog razloga, konstrukcija kontrolne karte na temelju mjerenja proizvoda sa skladišta i primjena takve karte za daljnje odvijanje procesa ne bi imala nikakvog smisla, jer ona u tom slučaju ne bi prikazivala trenutno stanje i „sliku“ procesa i ne bi bila adekvatna za korištenje. Za pravilnu konstrukciju i primjenu kontrolnih karti, potrebno je na temelju mjerenja posljednje proizvedenih jedinica izračunati kontrolne granice i ocjeniti stabilnost samog procesa, te nadalje, kartu s takvim kontrolnim granicama koristiti kao preventivni alat za buduće odvijanje procesa, kao što je to prikazano slikom 4.



**Slika 4. Kontrolna karta kao preventivni alat [3]**

Dinamiku korištenja kontrolnih karata treba prilagoditi učincima, mogućnostima poboljšavanja, preventivi i slično. Važno je znati što se hoće postići, a ne samo samo stvarati lijepa izvješća radi formalnog opravdanja svoje aktivnosti. Dakle **glavni ciljevi** primjene kontrolnih karata jesu [4]:

- dovođenje procesa u stanje statističke kontrole,
- utvrđivanje trendova i pomaka procesa u cilju zaštite od neželjenih rezultata (pojave dijelova lošije kvalitete, nesukladnih dijelova itd.),
- utvrđivanje potreba za remontom ili nabavom nove opreme, elemenata procesa i sl.,
- dobivanje svih saznanja o mogućnostima poboljšavanja procesa i mogućnostima postizanja zahtijevane kvalitete proizvoda (procjenjivanje sposobnosti procesa).

## 2.2. Vrste kontrolnih karata

Uzevši u obzir vrstu podataka, na osnovi kojih izrađujemo kontrolnu kartu, razlikujemo dva osnovna tipa kontrolnih karata:

1. **Kontrolne karte za mjerljive (numeričke) karakteristike,**
2. **Kontrolne karte za atributivne karakteristike.**

U nastavku će se ukratko dati pregled pojedinih kontrolnih karata, kako bi se dobio bolji uvid što koja vrsta kontrolnih karata predstavlja. [4]

### 2.2.1. Kontrolne karte za mjerljive (numeričke) karakteristike

Numeričke karakteristike kvaliteta su takva svojstva koja se ocjenjuju brojnim vrijednostima kao na primjer: temperatura, tlak, dužina, gustoća, snaga itd. Obično se pri tome koristi odgovarajuća mjerno-kontrolna i ispitna oprema. U ovu grupu kontrolnih karti pripadaju:

- $\bar{X} - R$  kontrolna karta
- $\bar{X} - s$  kontrolna karta
- $X - MR$  kontrolna karta za individualno praćenje kvaliteta (kontrolna karta sa pomičnim rasponom)

Matematička podloga ovih karata je **normalna raspodjela**.

$\bar{X} - R$  kontrolna karta – ovom kartom se registrišu dva važna pokazatelja procesa a to su kretanje aritmetičkih sredina uzoraka, te kretanje raspona uzoraka  $R_i$ . Prvi podatak daje uvid u centriranost procesa, dok drugi  $R_i$  govori o njegovom rasipanju. Primjena ove karte dolazi do izražaja kod serijske i velikoserijske komadne proizvodnje, gdje se kontrola svodi na mjerenje malih uzoraka (u literaturi navedeno  $n=2$  do 10 komada).

$\bar{X} - s$  kontrolna karta – ova karta prati dvije karakteristike procesa. Njegovu centriranost preko kretanja aritmetičkih sredina uzoraka, te njegovo rasipanje preko kretanja standardnih odstupanja. Budući da se računaju standardna odstupanja uzoraka preporučuje se da veličina uzorka bude veća od 25. Ove karte se primjenjuju u procesima koji su zaokruženog tipa i odvijaju se u zatvorenim ciklusima određene dužine trajanja kada se proces ne može pratiti dok je ciklus u toku.

$\bar{X}$  – MR kontrolna karta – ova kontrolna karta se upotrebljava u situacijama kada se ne može omogućiti statistički uzorak, odnosno kada je veličina uzorka jednaka jedinici ( $n=1$ ). Kod sprovođenja 100% kontrole kvaliteta, npr. kod složenih proizvoda, skupih agregata (turbine, generatori, pumpe) koje se rade u malim količinama, registrišu se parametri kvalitete i prate uz pomoć ove kontrolne karte. Pored toga, ima i takvih tehnoloških procesa gdje je dovoljno izvršiti jedno ispitivanje da bi se ocijenila čitava proizvedena masa. Ovaj slučaj se javlja u procesnoj i kemijskoj industriji, npr. u proizvodnji piva, alkoholnih pića i kemikalija. Naziv karta sa pomičnim rasponom dat je zbog toga što se raspon izračunava između dva uzastopna ispitivanja, tako da je broj raspona za jedan manji od broja izmjerenih veličina.

### 2.2.2. *Kontrolne karte za atributivne karakteristike*

Atributivne karakteristike kvalitete su takva svojstva koja se ocjenjuju opisno pa se kaže da je nešto dobro ili loše, da odgovara ili ne, da ide ili ne ide itd. Vizualna kontrola kvaliteta je tipično atributivno ocjenjivanje. Međutim i kod atributivnih svojstava kvaliteta postoje mogućnosti ocjenjivanja putem odgovarajuće mjerno-kontrolne i ispitne opreme. U ovu grupu kontrolnih karti pripadaju [4]:

- np kontrolna karta
- p kontrolna karta
- c kontrolna karta
- u kontrolna karta

Matematička podloga ovih karata je **Binomna** i **Poissonova raspodjela**.

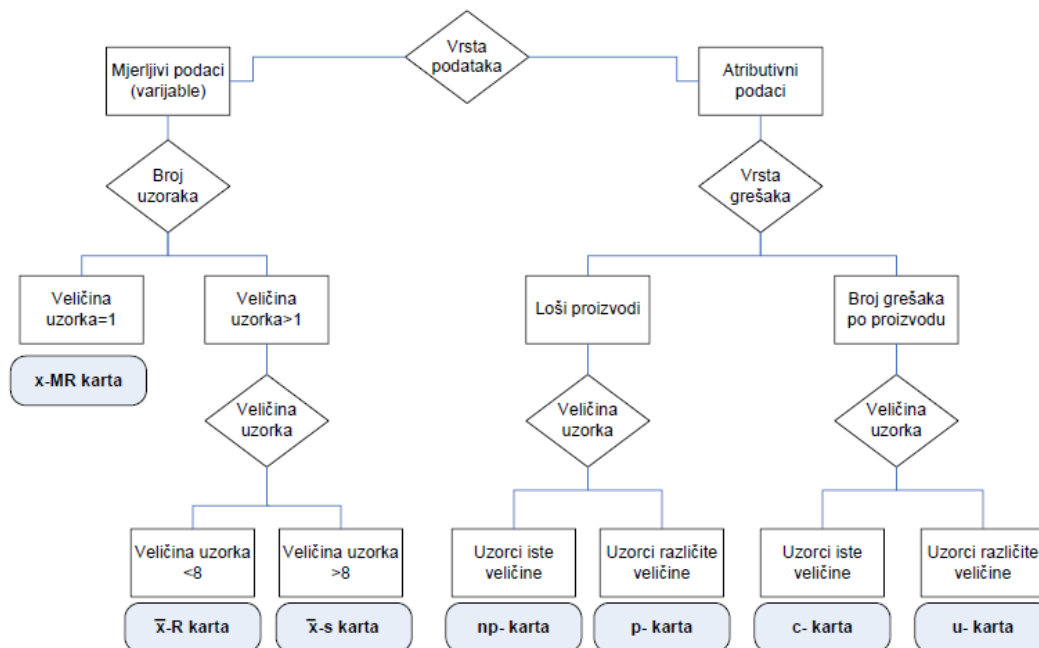
np kontrolna karta – neposredno prikazuje broj pronađenih škart jedinica u uzorku. Ova je karta primjenjiva kada je veličina uzorka konstantna.

p kontrolna karta – prikazuje grafičko kretanje proporcije loših komada u uzorcima. Veličine uzoraka pri tome mogu biti različite. Matematička osnova je binomna raspodjela.

c kontrolna karta – prati broj grešaka na jednom proizvodu ili uzorku. Uzorci moraju biti iste veličine.

u kontrolna karta – prikazuje prosječan broj grešaka iskazan na jedinicu proizvoda pronađenih u isporuci (uzorku). Veličine uzoraka pri tome mogu biti različite.

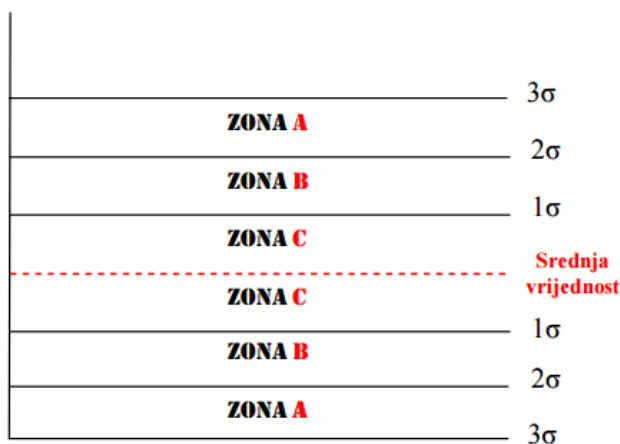
Na sljedećoj slici 5. vidljiv je shematski prikaz izbora pojedine Shewart-ove kontrolne karte.



Slika 5. Izbor kontrolne karte [2]

### 2.3. Analiza i tumačenje kontrolnih karata

Kod upotrebe kontrolnih karti koristi se standardna devijacija kao mjera rasipanja procesa. Gornja kontrolna granica se nalazi na udaljenosti od  $+3\sigma$ , a donja na udaljenosti od  $-3\sigma$  od središnje linije. Prostor između kontrolnih granica se dalje može podijeliti u tri zone. Te zone, nazvane su A, B i C polaze od središnje linije i koriste se u analizi i tumačenju kontrolnih karti.



Slika 6. Podjela kontrolne karte na zone [3]

Stabilnim procesom smatra se proces koji proizvodi rezultate procesa od kojih su svi, ili zadovoljavajući broj, unutar kontrolnih granica. Potpuno idealan proces ne postoji, ali treba težiti ka njemu. Međunarodna zajednica za standarde usvojila je pravila prema kojima se donosi odluka o stabilnosti procesa. Ta pravila su:

- Od posljednjih 25 točaka svaka se mora nalaziti unutar kontrolnih granica.
- Među posljednjih 35 točaka jedna smije izaći izvan kontrolnih granica.
- Od posljednjih 100 točaka najviše dvije točke smiju izaći izvan kontrolnih granica.

Može se dogoditi da su navedena pravila zadovoljena ali da proces i dalje nije stabilan. Situacije u kojima, pored navedenih, proces nije stabilan su sljedeće [5]:

- Uzastopni porast ili pad srednjih vrijednosti uzoraka. **Ukoliko 7 točaka uzastopno raste ili opada proces nije u stabilnom stanju.** Ukoliko se dogodi da 5 uzoraka uzastopno raste ili opada tada je proces u kritičnom stanju. Dakle, proces je i dalje stabilan, ali to je znak da se može pojaviti nestabilno stanje. Ovakva situacija obično izaziva pomicanje centralne linije, što uzrokuje njeno odstupanje od osnovne mjere koja je zadana projektom.
- Zadržavanje srednjih vrijednosti uzoraka ispod ili iznad centralne linije. **Ukoliko se 7 uzastopnih tačaka nalazi ispod ili iznad centralne linije, proces nije stabilan.** Ovo stanje znači da je proces pomjeren, jer točke ne variraju oko željene centralne linije. Takođe vrijedi i pravilo da ako se desi da je 5 uzastopnih uzoraka ispod ili iznad centralne linije tada je proces u kritičnom stanju. Dakle proces je i dalje stabilan, ali je to znak da se može pojaviti nestabilno stanje.
- **Dvije od tri točke izvan područja  $2\sigma$  upozorenja, ali ipak unutar kontrolnih granica.** Ovo stanje se javlja u slučaju promjene procesa, opreme, metoda, materijala, izvršitelja posla ili promjene mjernog sustava.
- **Četiri od pet točaka izvan  $1\sigma$  kontrolnih granica.** Često se javljaju veća odstupanja što bi proces moglo dovesti do nestabilnog stanja.

Osim navedenih vrsta kontrolnih karata u literaturi je moguće naći još neke koje pripadaju grupi tzv. **specijalnih kontrolnih karata** koje su se s vremenom razvijale ovisno o tome kako su se tehnološki razvijali sami procesi te njihova priroda. Pa tako neke od tih karata su:

- Regresijska kontrolna karta,
- MA kontrolna karta,
- EWMA kontrolna karta,
- CuSUM kontrolna karta,
- Hotteling  $T^2$  kontrolna karta i dr.

U nastavku rada biti će naglasak i detaljnija razdrada **Regresijske kontrolne karte** pošto se ona koristi u situacijama procesa s izraženim trendovima (ujedno i glavna tema ovog rada) gdje primjena konvencionalnih kontrolnih karata neće davati dobre rezultate. Na kraju će se ukratko objasniti princip CuSUM i EWMA kontrolnih karta i njihova efikasnost u ranom otkrivanju procesa s trendom podataka.

### 3. PROCESI S TRENDOM PODATAKA

U zadnje vrijeme sve je više poslovnih situacija u poduzećima u kojima menadžeri žele kontrolirati određenu varijablu, odnosno poslovni proces koji očekivano ima rastući ili padajući trend u vremenu. Kao npr. stanje zaliha, prinos proizvoda, stupanj produktivnosti, podaci o prodaji, trošenje alata itd. Isto tako sve je više situacija u proizvodnji i uslužnim djelatnostima gdje menadžeri ne žele koristiti statističke kontrolne karte kojima će pratiti samo jednu varijablu u vremenu. Umjesto toga želi se pronaći povezanost između dvije ključne varijable nekog procesa, te pratiti promjene u njihovoj povezanosti s vremenom. Tradicionalne Shewartove kontrolne karte, koje su opisane u prošlom poglavlju pokazale su se kao nepouzdanе za primjenu u takvim procesima. Upravo iz ovih razloga razvijena je kontrolna karta koja omogućuje efikasno praćenje i ocjenjivanje takvih procesa, te se naziva **regresijska kontrolna karta**. U nastavku će se temeljem simuliranih i stvarnih primjera teorijski i eksperimentalno primjeniti ta kontrolna karta u slučaju praćenja procesa s trendom podataka. Kao što joj ime upućuje, radi se o kontrolnoj karti koja je nastala kombinacijom *konvencionalne kontrolne karte* i *regresijske analize*. Pošto su u prošlom poglavlju objašnjene konvencionalne kontrolne karte i njihova tehnika, u nastavku će se za bolje razumjevanje ukratko objasniti principi regresijske analize.

#### 3.1. Regresijska analiza

Regresijska analiza je statistički postupak za procjenu odnosa među varijablama. Cilj istraživanja odnosa među varijablama je utvrditi statističku ovisnost i pokazatelje jakosti takve ovisnosti. Drugim riječima, regresijska analiza je matematički postupak za pronalaženje krivulje koja prolazi kroz zadani skup točaka uz minimiziranje sume kvadrata odstupanja zadanih točaka od te krivulje. Odnosi među pojavama (varijablama) mogu biti funkcionalni (deterministički) i statistički (stohastički):

- **Funkcionalni ili deterministički odnosi** su postojani, izražavaju zakonitosti koje se iskazuju analitički (formulom, jednadžbom). Svakoј vrijednosti jedne pojave odgovara točno određena vrijednost druge pojave.

$$y = f(x) \quad (3.1)$$

- **Statistički ili stohastički odnosi** su slabiji od funkcionalnih. Jednoj vrijednosti jedne pojave odgovara više različitih vrijednosti druge pojave. Takva odstupanja su u praksi češća.

$$y = f(x) + e \quad (3.2)$$

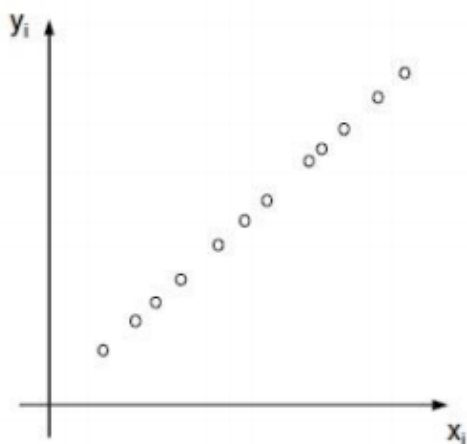
gdje je:

$f(x)$ - funkcionalna (deterministička) komponenta

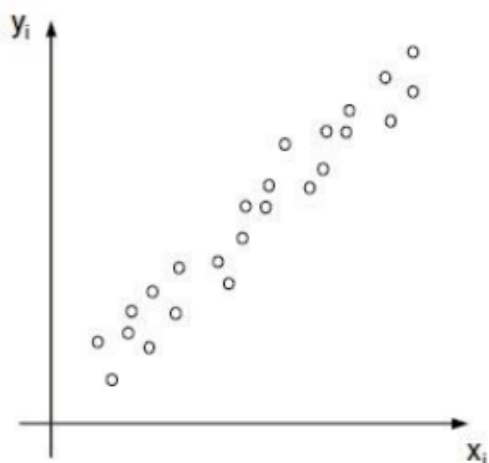
$e$  - stohastička varijabla koja predoduje nesistematske utjecaje na zavisnu varijablu.

Na slijedećim slikama, u dijagramu rasipanja koji u pravokutnom koordinatnom sustavu prikazuje parove vrijednosti dviju promatranih varijabli prikazat će se razlike između funkcionalne i statističke veze među varijablama.

- a) Pozitivna funkcionalna veza

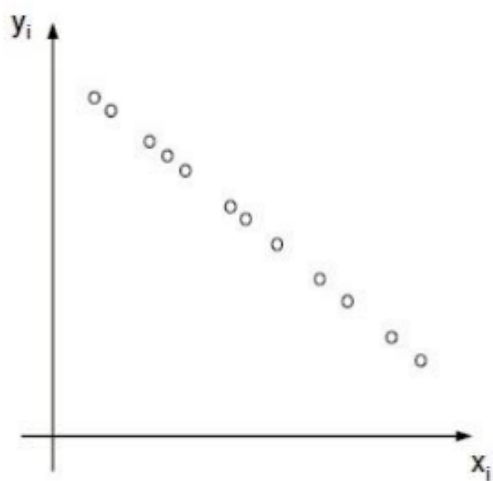


- b) Pozitivna statistička veza

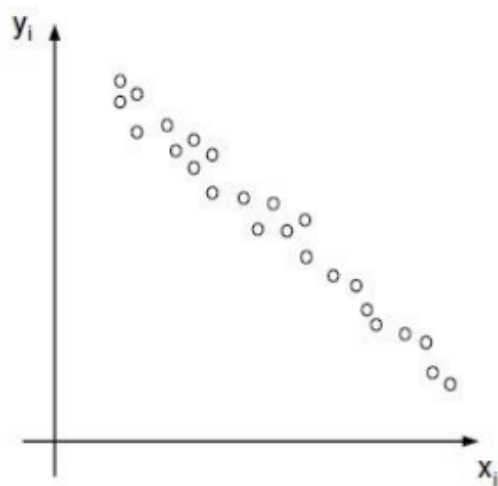




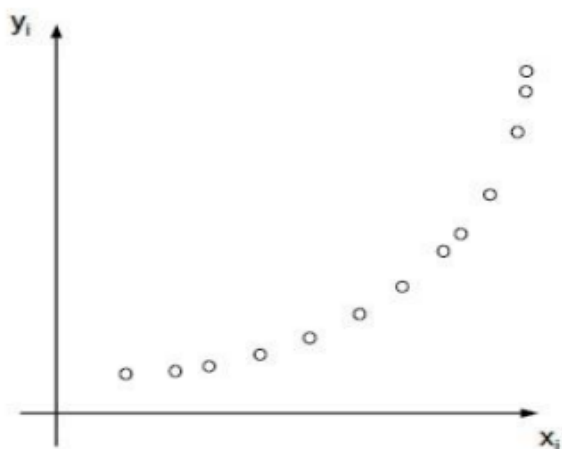
c) Negativna funkcionalna veza



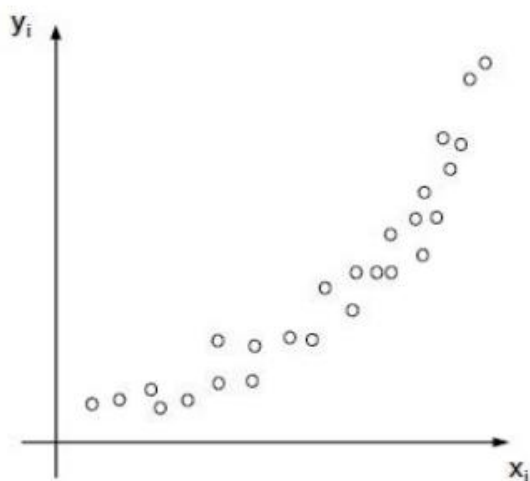
d) Negativna statistička veza



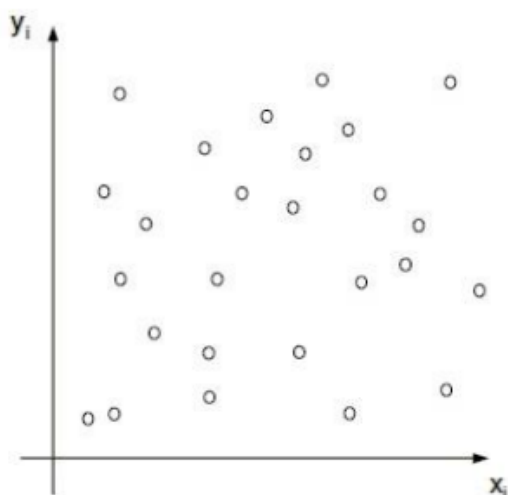
e) Pozitivna funkcionalna krivolinijska veza



f) Pozitivna statistička krivolinijska veza



g) Nema veze među varijablama



Regresijska analiza uključuje mnoge tehnike za modeliranje i analizu varijabli, gdje se fokus stavlja na odnos između zavisne varijable i jedne ili više nezavisnih varijabli. Najčešće, regresijska analiza procjenjuje uvjetno očekivanje zavisne varijable s obzirom na nezavisnu varijablu - to jest, prosječnu vrijednost zavisne varijable kada su nezavisne varijable fiksne. Ciljana procjena je funkcija nezavisnih varijabli odnosno regresijska funkcija. U regresijskoj analizi važno je karakterizirati varijacije zavisne varijable oko regresijske funkcije, a to se može opisati pomoću distribucije vjerojatnosti. Regresijska analiza često se koristi za predviđanje i prognoziranje. Također se koristi i za razumijevanje odnosa nezavisnih o zavisnim varijablama i istraživanje oblika tih odnosa (određivanje oblika krivulje koja najbolje opisuje zadane podatke). Ovdje je bitno naglasiti kako se u slučaju regresijske analize zna što je uzrok, a što

posljedica nekog procesa (zavisna, nezavisna varijabla), a **osnovni problem ove metode je odrediti koeficijente regresije**. Razvijene su mnoge tehnike regresijske analize kao što su jednostavna, višestruka, linearna i nelinearna. Najpoznatije metode su linearna regresija i metoda najmanjih kvadrata gdje se regresijska funkcija definira preko konačnog broja nepoznatih parametara koji se procjenjuju na temelju podataka. U ovom radu naglasak će biti na **jednostavnoj linearnoj regresiji** koja će se koristiti i u primjeru regresijske kontrolne karte, pa će u nastavku biti detaljnije objašnjena.

### 3.1.1. Jednostavna linearna regresija

U ovom dijelu opisat će se model jednostavne linearne regresije, te navesti polazne pretpostavke o modelu. To je dakle najjednostavniji regresijski model, a općenitiji model višestruke linearne regresije je u mnogočemu samo njegovo logično poopćenje.

Modelom jednostavne linearne regresije izražena je stohastička linearna veza između zavisne varijable  $y$  i nezavisne varijable  $x$ , koja se može formalno opisati izrazom:

$$y = f(x) + \varepsilon \quad (3.3)$$

gdje je:  $f(x)$  linearna funkcija varijable  $x$ , tj.

$$f(x) = \beta_0 + \beta_1 x \quad (3.4)$$

pri čemu su  $\beta_0$  i  $\beta_1$  nepoznati parametri pretpostavljene veze koju treba procijeniti, a  $\varepsilon$  je slučajna varijabla koja modelu daje stohastički karakter.

Pretpostavi li se da se linearna regresijska veza između varijable  $y$  i regresorske varijable  $x$  želi utvrditi na osnovi  $n$  opažanja (mjerenja), tada se vektorska jednadžba (3.3) može napisati u vidu sustava od  $n$  jednadžbi:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.5)$$

Jednadžba (3.5) se ujedno naziva i **statistički model jednostavne linearne regresije**. Polazne pretpostavke u analizi modela jednostavne linearne regresije su:

- a) Veza između zavisne varijable  $y$  i nezavisne varijable  $x$  je linearna.
- b) Varijabla  $x$  je deterministička varijabla ili se alternativno pretpostavlja da su njene vrijednosti fiksne u ponovljenim mjerenjima (uzorcima).

- c) Greške relacije u prosjeku ne utječu na zavisnu varijablu, što se formalno izražava  $E(\varepsilon_i) = 0$ .
- d) Zbog jednostavnosti se pretpostavlja da je analizirani uzorak izabran na slučajan način, te da su stoga bilo koje dvije slučajne varijable  $\varepsilon_i$  međusobno nezavisne, a time su i nekorelirane.
- e) Također se polazi od pretpostavke da su  $\varepsilon_i$  normalno distribuirane slučajne varijable s jednakom varijancom  $\sigma^2$ .

Zadatak regresijske analize je da se pronađu procjene nepoznatih parametara (procjena vektora  $\beta_0, \beta_1$ ) i procjena nepoznate varijance  $\sigma^2$  slučajnih varijabli  $\varepsilon_i$ , i to tako da procijenjeni model bude "blizu" prave regresije. U ovom koraku pretpostavka o normalnosti distribucije slučajnog vektora nije bitna. Ta je pretpostavka važna u kasnijim koracima analize kako bi se mogli provesti postupci testiranja hipoteza o modelu.

Postoje različite metode procjenjivanja parametara, a najčešće se koriste: *metoda najmanjih kvadrata*, *metoda momenata* i *metoda najveće vjerodostojnosti*. Ako nisu ispunjene polazne pretpostavke o modelu, vrijednosti parametara procjenjuju se robusnim metodama. Kao najčešća metoda koristi se **metoda najmanjih kvadrata** (*Least Square Method*) koja se sastoji u izboru onih procjena nepoznatih parametara koje minimiziraju sumu kvadrata odstupanja empirijskih vrijednosti zavisne varijable  $y_i$  od procijenjenih ili regresijskih vrijednosti  $\hat{y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i$ , tj.:

$$\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_i)^2 = S(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1) \rightarrow \mathbf{minimum} \quad (3.6)$$

pri čemu je uvedena oznaka  $S(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1)$  za funkciju procjenitelja parametara.

Procjene  $\hat{\beta}_0$  i  $\hat{\beta}_1$  regresijskih parametara  $\beta_0$  i  $\beta_1$  nazivamo procjenama u smislu metode najmanjih kvadrata ili *least square estimates*. Najbolja procjena nepoznatog regresijskog pravca  $y = \beta_0 + \beta_1 x$  je pravac  $\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x$ .

Za analitičko rješenje procjena  $\hat{\beta}_0$  i  $\hat{\beta}_1$  regresijskih parametara  $\beta_0$  i  $\beta_1$  potrebno je:

Aritmetička sredina varijable  $x_i$ : 
$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (3.7)$$

$$\text{Aritmetička sredina varijable } y_i: \quad \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \quad (3.8)$$

$$\text{Srednje kvadratno odstupanje varijable } x \text{ od } \bar{x}: \quad s_x^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad (3.9)$$

$$\text{Srednje kvadratno odstupanje varijable } y \text{ od } \bar{y}: \quad s_y^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 \quad (3.10)$$

$$\text{Uzročna kovarijanca:} \quad s_{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \quad (3.11)$$

Dobre procjena  $\hat{\beta}_0$  i  $\hat{\beta}_1$  regresijskih parametara  $\beta_0$  i  $\beta_1$  u smislu metode najmanjih kvadrata su:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{s_{xy}}{s_x^2}; \quad \hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x} \quad (3.12)$$

Konačni izrazi (jednadžbe) za izračunavanje regresijskih koeficijenata (procjena regresijskih parametara), tzv. normalne jednadžbe su:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2}; \quad \hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x} \quad (3.13)$$

Koristeći formulu regresijskog pravca, za svaku pojedinu eksperimentalnu vrijednost  $x_i$  možemo izračunati pripadnu teorijsku vrijednost  $y_i$ , pa možemo točno izračunati koliko iznosi svako odstupanje teorijske od eksperimentalne vrijednosti:

$$\varepsilon_i = y_i - \hat{y}_i = y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_i \quad (3.14)$$

Ovako dobiveni niz vrijednosti  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$  zovemo **rezidualima**. Suma kvadrata svih reziduala (*sum of squares of errors = SSE*) je minimalna postignuta vrijednost za  $S(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1)$  i predstavlja mjeru kvalitete modela koju označavamo sa SSE:

$$SSE = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_i)^2 = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 \quad (3.15)$$

Nakon ocijene parametara regresijskog modela postavlja se pitanje reprezentativnosti, odnosno sposobnosti modela da objasni kretanje ovisne varijable  $y$  uz pomoć odabrane neovisne varijable  $x$ . U tu svrhu koriste se neki apsolutni i relativni pokazatelji. Ovi pokazatelji temelje se na raspodjeli odstupanja vrijednosti ovisne varijable  $y_i$  u regresijskom modelu od njene aritmetičke sredine  $\bar{y}$  i njenih očekivanih vrijednosti  $\hat{y}_i$ .

Procjena varijance  $\sigma^2$  (standardne greške regresije)

To je objektivna procjena pogreške regresijskog modela i označava se s  $\hat{\sigma}^2$ , a zapisujemo ju kako slijedi:

$$\hat{\sigma}^2 = \sqrt{\frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_i)^2} = \sqrt{\frac{SSE}{n-2}} \quad (3.16)$$

Standardna greška regresije ili standardna devijacija regresije je apsolutni pokazatelj reprezentativnosti regresijskog modela, a pokazuje prosječni stupanj varijacije stvarnih vrijednosti ovisne varijable u odnosu na očekivane regresijske vrijednosti. Prikazani izraz odnosi se na standardna grešku (devijaciju) regresije jednostrukog modela. Ovaj pokazatelj izražen je u originalnim jedinicama mjere ovisne varijable  $y$ . Stoga je na temelju standardne greške regresije teško uspoređivati reprezentativnost modela s različitim mjernim jedinicama.

Taj problem eliminira relativni pokazatelj - koeficijent varijacije regresije, koji predstavlja postotak standardne greške regresije od aritmetičke sredine varijable  $y$ :

$$V = \frac{\hat{\sigma}^2}{\bar{y}} \times 100 \quad (3.17)$$

Najmanja vrijednost koeficijenta varijacije je 0%, a najveća nije definirana. Što je koeficijent varijacije regresijskog modela bliži nuli, to je model reprezentativniji. Često se uzima dogovorena granica reprezentativnosti od 30%. Dakle, ako je koeficijent varijacije manji od 30%, kaže se da je model dobar.

Koeficijent korelacije ( $r$ ) i determinacije ( $r^2$ )

Koeficijent determinacije  $r^2$  je pokazatelj reprezentativnosti regresijskog modela, koji se temelji na analizi varijance. Daje nam informaciju o tome koliko rasipanja izlaznih podataka potječe od funkcijske ovisnosti  $x \rightarrow \beta_0 + \beta_1 x$ , a koliko otpada na tzv. rezidualno ili neobjašnjeno rasipanje. Također nam daje informaciju o tome koliko je jaka funkcijska veza između  $x$  i  $y$ . Što je vrijednost koeficijenta  $r^2$  bliža 1, zavisnost je jača. Koeficijent determinacije  $r^2$  zapisujemo na sljedeći način:

$$r^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} \quad (3.18)$$

Vrijednost koeficijenta determinacije kreće se u intervalu  $0 \leq r^2 \leq 1$ . Regresijski model reprezentativniji je ako je ovaj pokazatelj bliži 1. Teorijska granica reprezentativnosti modela je 0,9. U praksi je ponekad vrlo teško pronaći varijablu koja dobro objašnjava ovisnu pojavu pa se ta granica reprezentativnosti spušta i do 0,6!

Koeficijent korelacije  $r$  se računa kao drugi korijen koeficijenta determinacije, te može poprimit vrijednost od -1 do 1. Njime se utvrđuje da li uopće postoji povezanost između dvije promatrane varijable (korelacija), dok koeficijent determinacije utvrđuje koliko je promjene zavisne varijable objašnjeno promjenom nezavisne varijable.

Primjer: Ako je koeficijent korelacije  $r = 0.9$ , tada je koeficijent determinacije 0.81. Što znači da je 81% promjene zavisne varijable objašnjeno promjenom nezavisne varijable. Pritom je bitno naglasiti da kada se govori o jačini veze između varijabli, ne smije se govoriti na nivou  $r$ , već treba uzeti u obzir i koeficijent determinacije!

Nadalje, važan dio procjene adekvatnosti linearnog regresijskog modela je testiranje statističkih hipoteza o parametrima modela. Za testiranje hipoteza moraju biti zadovoljeni uvjeti da su greške relacije  $\varepsilon_i$  međusobno nezavisne, normalno distribuirane slučajne varijable s očekivanom vrijednosti nula i varijancom  $\sigma^2$ . Testiranje statističkih hipoteza o parametrima modela detaljnije će se prikazati u nastavku, na primjeru regresijske kontrolne karte.

U nastavku će se temeljen simuliranih podataka modelirati proces s trendom podataka te prikazati primjena kontrolne karte za takve slučajeve [6].

### 3.2. Primjena kontrolnih karata za simulirani proces s trendom podataka

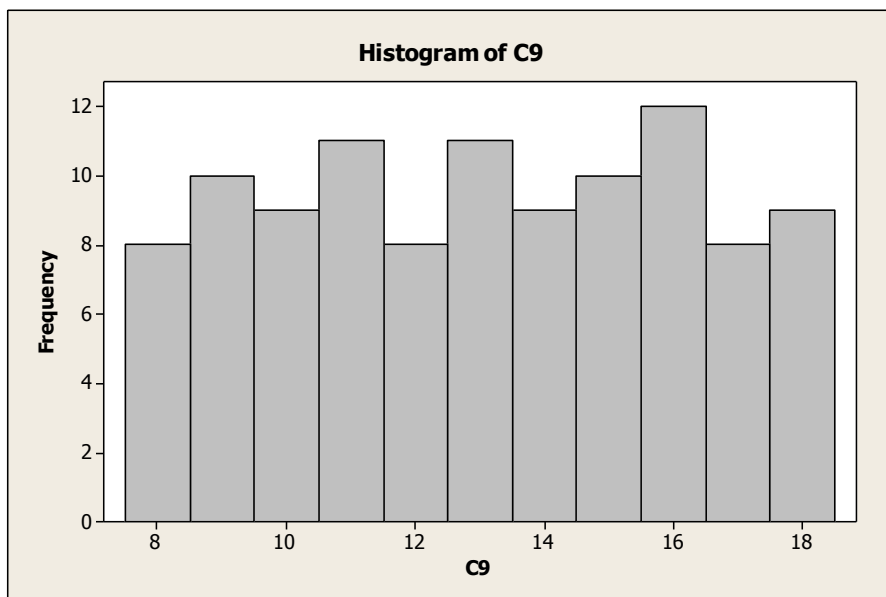
U ovom dijelu će se pomoću programskog paketa Excell simulirati podaci koji će slijediti određeni trend, odnosno, u ovom slučaju pravac  $y = m \cdot x + c$ , gdje je  $m$  koeficijent nagiba pravca, a  $c$  slobodni član. Zamisao je da se na taj način proba simulirati proizvodni proces kod kojeg je vidljivo trošenje alata što u konačnici ima utjecaj na linearni trend promatrane dimenzije. U nastavku rada osim simuliranog primjera obradit će se i jedan stvarni primjer iz proizvodnje gdje će se promatrati utjecaj koji trošenje alata ima na kontrolu samog proces. U simuliranom primjeru, pošto se ne radi o stvarnom procesu granice specifikacije postaviti će se proizvoljno. Donja granica specifikacije postaviti će se na 6 (LSL = 6), a gornja granica specifikacije na 19 (USL = 19). Iz razloga što podaci slijede trend očigledno je da će u izvjesnom trenutku izaći iz granica specifikacije te će biti potrebno izvršiti određene korekcije kako bi se proces vratio unutar zadanih granica. Zbog toga se postavljaju granice upozorenja koje služe kako bi se izvršile korekcije prije nego što proces izađe iz granica specifikacije (tolerancije), odnosno prije no što nastane škart. Donja granica upozorenja postaviti će se na 7,5, a gornja na 17,5. Na sljedećoj slici prikazani su generirani podaci.

Data Display						
C15						
7,5540	7,8003	8,1556	8,3327	8,0433	8,3753	8,2454
8,4943	8,6029	8,7202	8,7267	8,9766	9,2035	9,3227
9,1458	9,1512	9,4120	9,3390	9,8704	9,7011	9,7625
9,7665	9,9114	10,0231	10,3432	10,2697	10,7700	10,5953
10,4858	10,7153	10,5872	10,5014	10,7220	10,9272	11,2597
10,9867	11,4715	11,6241	11,6796	11,9165	11,4215	11,6861
11,7885	12,0522	12,6390	12,2217	12,6386	12,1834	12,6656
12,6697	12,8862	13,3122	12,7964	13,2566	13,0157	13,4815
13,2639	14,0635	13,7285	14,0232	13,9573	13,9644	13,9531
13,7181	14,1567	14,6243	14,6092	14,7434	14,5182	14,5258
15,4171	14,2752	15,1917	15,6805	15,5773	15,8123	15,3383
15,4877	15,6572	15,4692	15,6052	16,2261	16,3344	15,6651
16,2124	16,8010	16,9530	16,8618	16,3208	17,2516	17,3082
16,4874	16,4887	17,1809	17,3571	17,1297	17,5667	17,5044
17,9089	17,6469	17,5673	17,6171	18,3354	18,1887	18,0377

Slika 7. Slučajno generirani podaci koji prate trend pomoću Excell-a

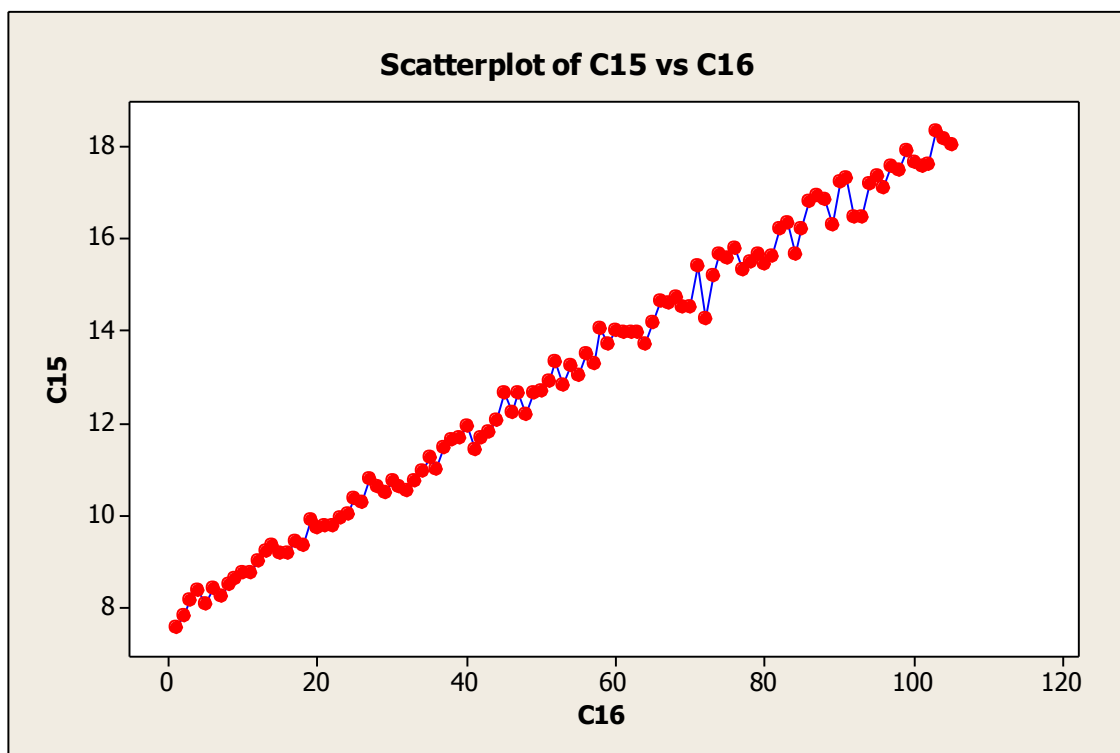
Generirane podatke potrebno je grafički prikazati kako bi se moglo bolje zaključiti kretanje procesa u vremenu.





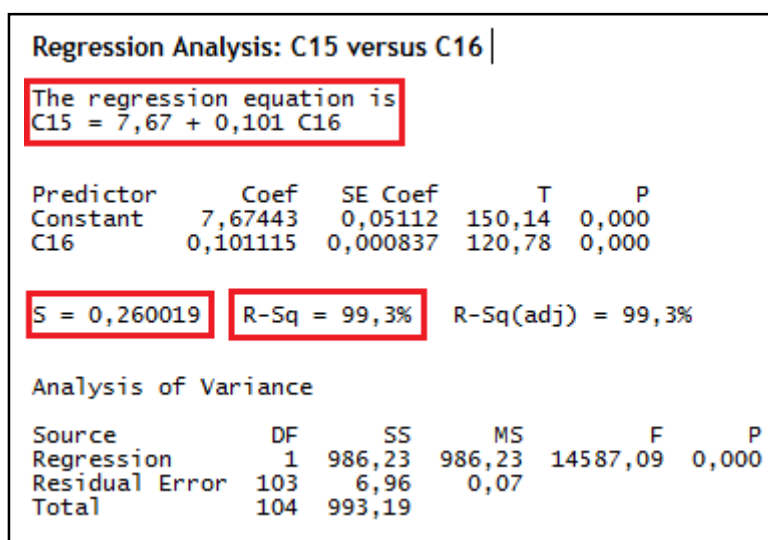
**Slika 8. Histogram generiranih podataka**

Iz histograma nije moguće zaključiti kakvo je kretanje podataka u vremenu, ali je vidljivo kako podaci očekivano slijede uniformnu (pravokutnu) raspodjelu. Pored histogramskog prikaza podataka nužno je dobiti uvid i u varijabilnost podataka u vremenu. To je prikazano na sljedećoj slici 9.



**Slika 9. Grafički prikaz generiranih podataka u vremenu**

Sa slike 9. vidljivo je kako generirani podaci očigledno slijede zadani trend po pravcu, odnosno kako se podaci mijenjaju u ovisnosti o vremenu, te je jasno kako ti podaci neće biti normalno distribuirani. Dakle potrebno je za dobivene podatke provesti regresijsku analizu kako bi se utvrdila statistička ovisnost među varijablama, u ovom slučaju, promjena generiranih podataka u ovisnosti o vremenu. Nakon što je utvrđen oblik statističke ovisnosti moguće je i utvrditi pokazatelji jakosti te ovisnosti. Sva statistička obrada i prikazivanje podataka provodi se u statističkom programskom paketu Minitab.



**Slika 10. Regresijska analiza generiranih podataka**

Nakon dobivenih rezultata regresijske analize potrebno je testirati značajnost koeficijenta korelacije, tj utvrditi da li postoji statistička povezanost između dvije varijable. To se provodi t-testom. Testira se hipoteza o koeficijentu korelacije osnovnog skupa iz kojeg je uzet uzorak sa N parova podataka (N=105 u ovom slučaju). Hipoteze glase:

$H_0 \longrightarrow$  koeficijent korelacije osnovnog skupa  $\rho = 0$

$H_1 \longrightarrow$  koeficijent korelacije osnovnog skupa  $\rho \neq 0$ .

t vrijednosti (pripadna i tablična) se računaju na sljedeći način:

$$|t| = \frac{|r| \cdot \sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}} \quad (3.19)$$

$$t_{tab} = \left\{ \begin{array}{l} k = n - 2 = 103 \\ \alpha = 0.05 \end{array} \right\} \quad (3.20)$$

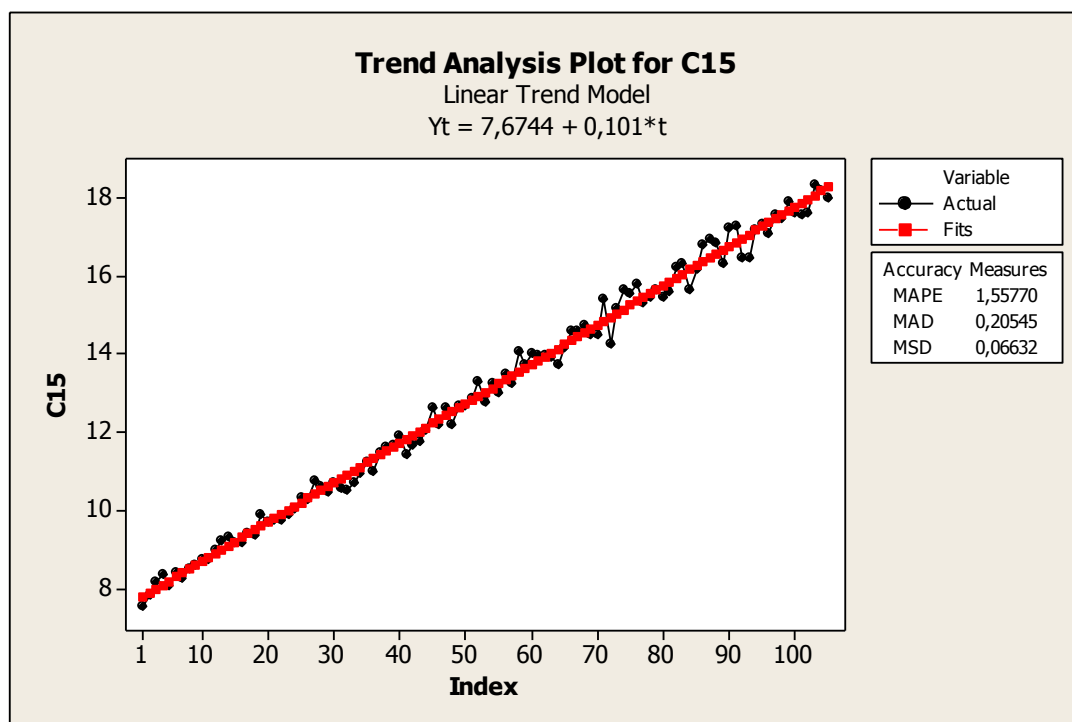
Iz toga slijedi da je  $|t| = 120,78$ , a  $t_{tab} = 1,96 \rightarrow |t| > t_{tab}$

Što znači da se odbacuje hipoteza  $H_0$  i prihvaća hipoteza  $H_1$ , tj. postoji koeficijent korelacije u osnovnom skupu između ovih dviju varijabli!

Sljedeće što treba napraviti je odrediti oblik povezanosti. Sa slike 10. se može vidjeti kako je programski paket Minitab izračunao regresijsku jednadžbu (jednadžbu pravca) koja glasi:

$$\hat{y}_i = 7,67 + 0,101 \cdot x_i \quad (3.21)$$

Iz te jednadžbe se mogu očitati parametri regresije:  $\beta_0 = 7,67$  i  $\beta_1 = 0,101$ . Osim tih parametara može se iščitati i procjenjena standardna greška regresije (*Standard error of estimate*) koja iznosi  $S_e = 0,26$ . Ona će bit bitna i kod određivanja kontrolnih granica regresijske kontrolne karte. Također jako bitna veličina koja se pojavljuje u regresijskoj analizi i izračunata je na slici 3. je koeficijent determinacije koji iznosi  $r^2 = 0,993$  ili 99,3 %. Što u prijevodu znači da je 99,3 % promjene zavisne varijable objašnjeno promjenom nezavisne varijable, dok ostatak promjene zavisne varijable se ne može pripisati promjeni zavisne varijable nego nekim drugim uzrocima. Kako je koeficijent determinacije visok to ukazuje na činjenicu da dobiveni regresijski model jako dobro opisuje generirane podatke. Na sljedećoj slici 11. prikazana je regresijska funkcija koja odgovara danim podacima.



Slika 11. Regresijska funkcija generiranih podataka

I na kraju provedene regresijske analize potrebno je testirati adekvatnost dobivenog modela, a to se provodi F-testom. Hipoteze u ovom slučaju glase:

$H_0 \longrightarrow$  model je neadekvatan  $F < F_{tab}$

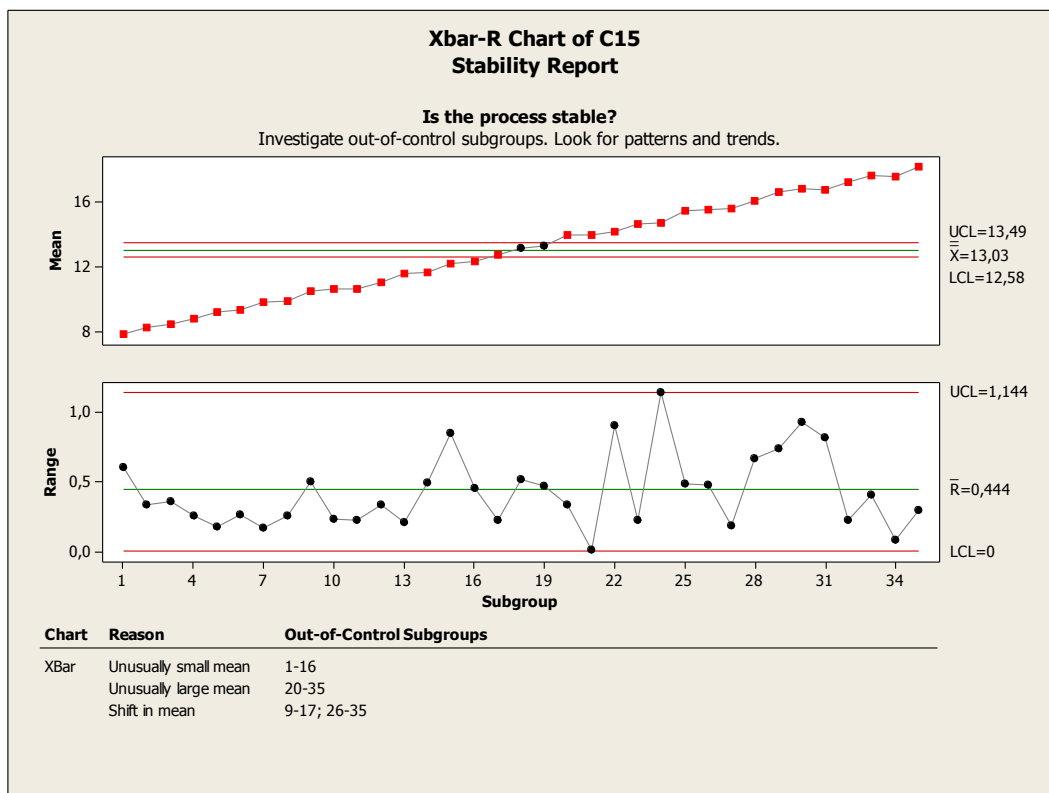
$H_1 \longrightarrow$  model je adekvatan  $F > F_{tab}$

Sa slike 8. vidimo da je izračunata vrijednost  $F = 14587,09$  dok se tablična vrijednost računa tj. iščitava iz odgovarajuće statističke tablice na slijedeći način:

$$F_{tab} = \left\{ \begin{array}{l} k_b = 1 \\ k_n = n - 2 = 103 \\ \alpha = 0.05 \end{array} \right\} = 3,98 \text{ (očitano iz statističkih tablica)} \quad (3.22)$$

Vidljivo je da je  $F > F_{tab}$  te da je potrebno odbaciti hipotezu  $H_0$  i prihvatiti hipotezu  $H_1$ , tj. Odabrani regresijski model je adekvatan!

U nastavku će se prikazati koji nedostaci postoje kada se proces s trendom podataka prati konvencionalnom kontrolnom kartom za mjerljive karakteristike ( $\bar{X} - R$  karta). Ovih 105 generiranih podataka podijeljeno je na veličinu uzorka od 3, te je proces praćen  $\bar{X} - R$  kartom.



Slika 12.  $\bar{X} - R$  kontrolna karta

Očigledno je kako praćenje procesa s trendom podataka konvencionalnom kontrolnom kartom neće biti moguće iz jednostavnog razloga što se simulirani proces ne ponaša po normalnoj raspodjeli, te kod njega postoji stalni pomak aritmetičke sredine, te je zbog toga u dijelu karte koja prati aritmetičke sredine najveći dio podataka izvan kontrolnih granica, pa bi se trebalo zaključiti kako proces nije u stanju statističke kontrole. Međutim takav zaključak ne bi bilo ispravno donositi na temelju ove karte. Nadalje, bitno je za naglasiti i ukazati na činjenicu kako karta koja prati rasipanje (u ovom slučaju raspone uzoraka - R) ne slijedi varijabilnost, pomake ili trendove procesa! Iz tog razloga što mjere rasipanja (raspon, procjenjeno standardno odstupanje) se odnose na jedinice izrađene u relativno kratkom vremenskom intervalu, dakle prate varijabilnost unutar uzorka, te je zbog toga izuzetno bitno da uzorak uvijek budu zadnje proizvedene jedinice.

Dakle da bi se ovakav proces mogao pratiti kontrolnom kartom bitno je napraviti neke „promjene“ u konvencionalnoj  $\bar{X} - R$  karti kako bi se korektno moglo zaključivati o stabilnosti procesa u kojem je očigledno da će podaci slijediti neki trend. Drugim riječima potrebno je primijeniti, ranije spomenutu regresijsku kontrolnu kartu.

#### Elementi regresijske kontrolne karte:

Regresijska kontrolna karta razlikuje se od konvencionalnih Shewart-ovih kontrolnih karata u nekoliko pogleda, a to su [7]:

- koristi se za kontrolu varijabli s izraženim trendom. Pritom središnja linija karte nije paralelna sa koordinatnom osi nego je to regresijski pravac s jednačbom:

$$CL = \hat{y} = \beta_0 + \beta_1 x \quad (3.23)$$

gdje se varijabla  $y$  naziva zavisna, a  $x$  nezavisna varijabla,

- kontrolne granice (UCL i LCL) su paralelne sa središnjom linijom (CL), za razliku kod konvencionalnih gdje su i središnja linija i kontrolne granice paralelne s horizontalnom osi:

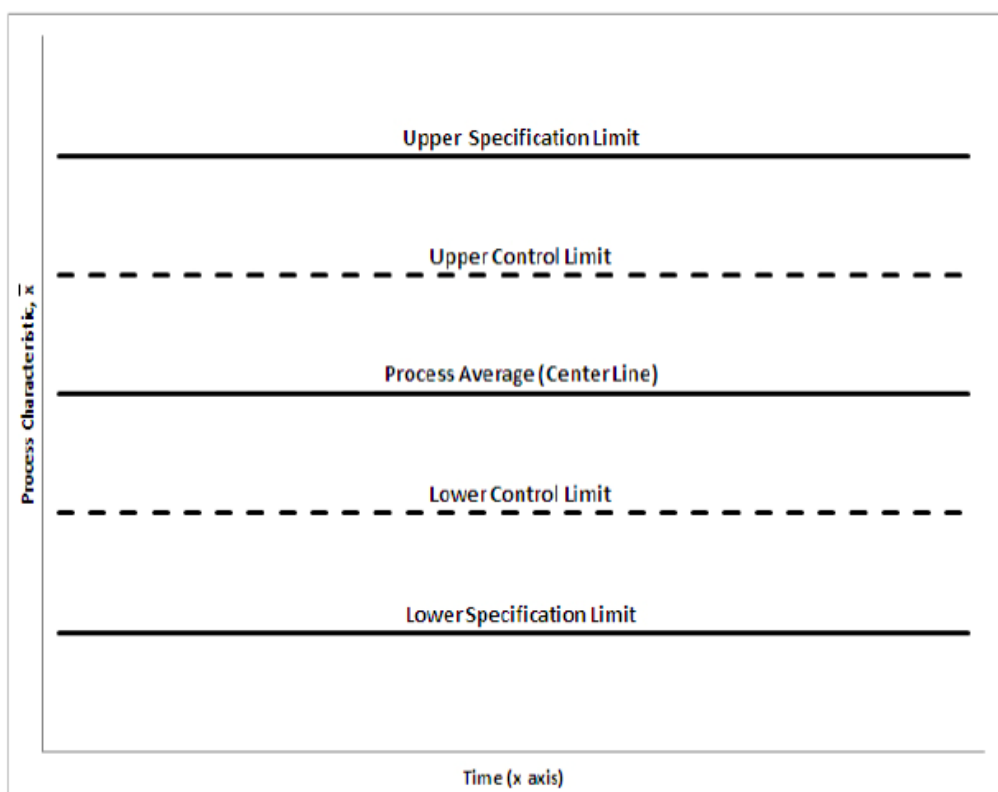
$$UCL = \hat{y} + K \cdot S_e \quad (3.24)$$

$$LCL = \hat{y} - K \cdot S_e \quad (3.25)$$

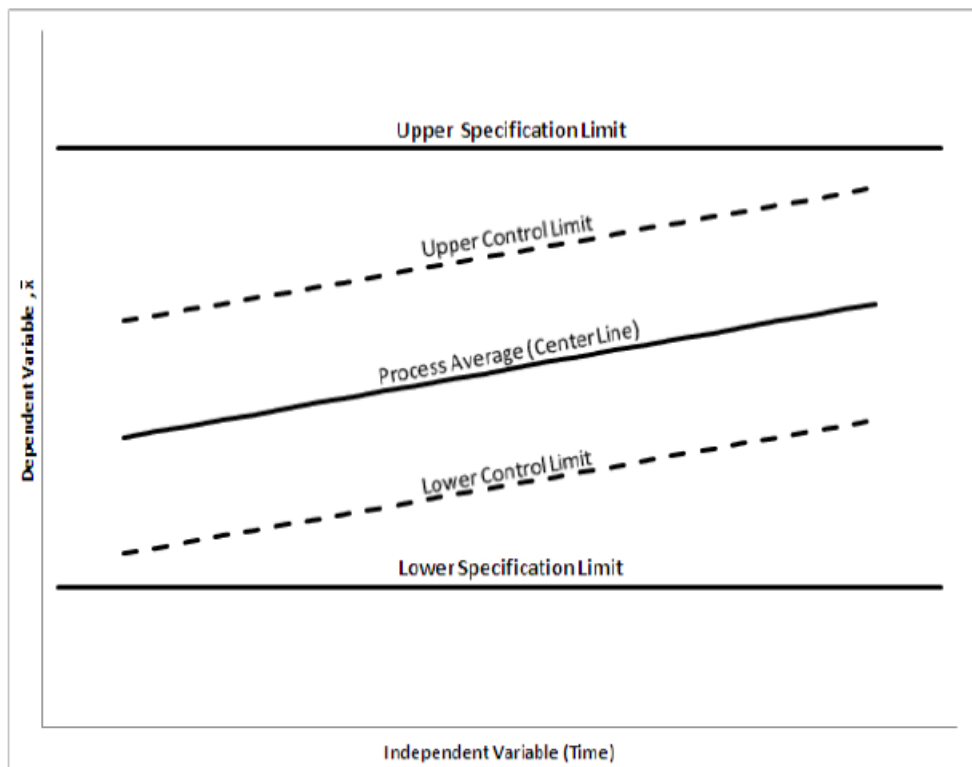
gdje je  $K$  – broj standardnih devijacija na kojoj udaljenosti se postavljaju kontrolne granice od središnje linije, uobičajeno je to 3 (99,73 % površine ispod normalne krivulje), dok je  $S_e$ - procjenjena standardna greška regresije,

- matematička podloga za računanje je nešto kompleksnija i zahtjeva više vremena nego kod konvencionalnih kontrolnih karata. Međutim u zadnje vrijeme svaki računalni program sadrži mogućnost brzog računanja svih ovih parametara,
- regresijska je kontrolna karta prikladna za velik broj primjena gdje konvencionalna karta ne bi dala odgovarajuće rezultate. Pa tako naprimjer regresijska karta predstavlja osnovu za mjerenje dobitaka ili gubitaka povezanih sa utrošenim radnim satima, za predivđanje potreba za radnom snagom i njihovo raspoređivanje, za utvrđivanje potreba za korekcijom ili zamjenom alata u cilju produženja životnog vijeka alata nadalje može se koristiti za povećanje godišnjeg profita, analiziranje učinkovitosti pojedinih organizacijskih jedinica itd.

Na sljedećim slikama prikazat će se bitne vizualne razlike između konvencionalne i regresijske kontrolne karte.



**Slika 13. Shematski prikaz konvencionalne kontrolne karte [7]**

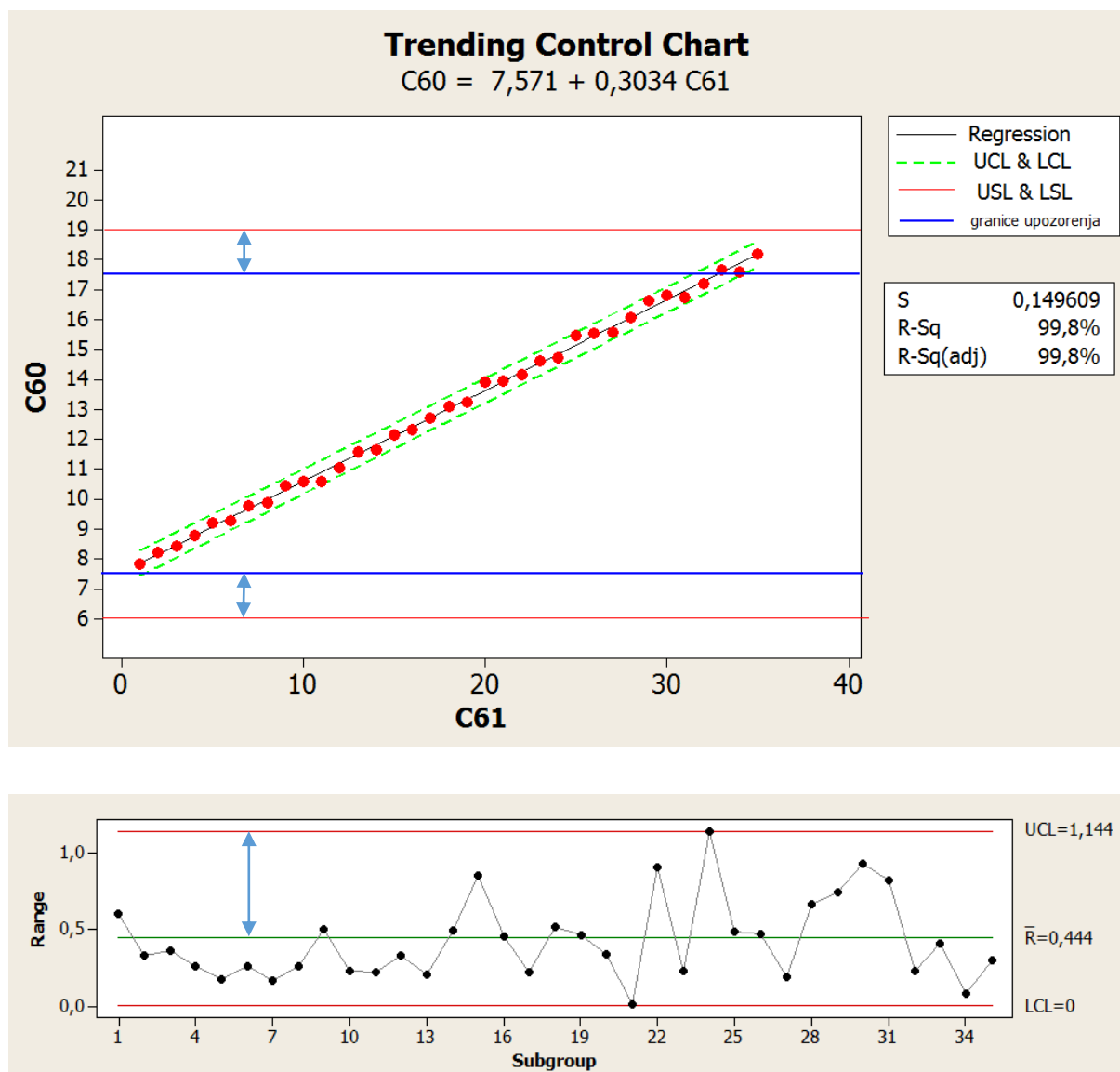


**Slika 14. Shematski prikaz regresijske kontrolne karte [7]**

Kod konvencionalnih Shewart-ovih kontrolnih karata uobičajeno se ucrtavaju samo kontrolne granice dok se granice specifikacije u pravilu ne ucrtavaju. Međutim kod regresijske kontrolne karte to će biti potrebno zbog trenda koji postoji kod aritmetičkih sredina uzoraka. Na sljedećim slikama prikazat će se praćenje simuliranog procesa s trendom podataka kontrolnom kartom, gdje je veličina uzorka 3.

Na slici 15. prikazana je primjena regresijske kontrolne karte za simulirani proces. Vidljivo je kako je ova kontrolna karta zapravo „zarotirana“ konvencionalna  $\bar{X} - R$  kontrolna karta. U ovom slučaju kontrolne granice su paralelne sa središnjom linijom koja je zapravo pravac regresije simuliranih podataka. Sada postoji mogućnost ispravnog donošenja odluke o tome da li je proces pod kontrolom ili nije. Kontrolne granice za ovu kartu je kao i za  $\bar{X} - R$  kontrolnu kartu moguće postaviti na tri načina [4]:

- praćenjem nepoznatog procesa u cilju ustanovljavanja njegovih prirodnih mogućnosti u pogledu centriranosti i rasipanja,
- na temelju poznatih prošlih podataka o procesu
- na temelju unaprijed zadanih tolerancija (zbog pretpostavki danas praktički nije upotrebljiv)



**Slika 15. Regresijska kontrolna karta za proces s trendom podataka**

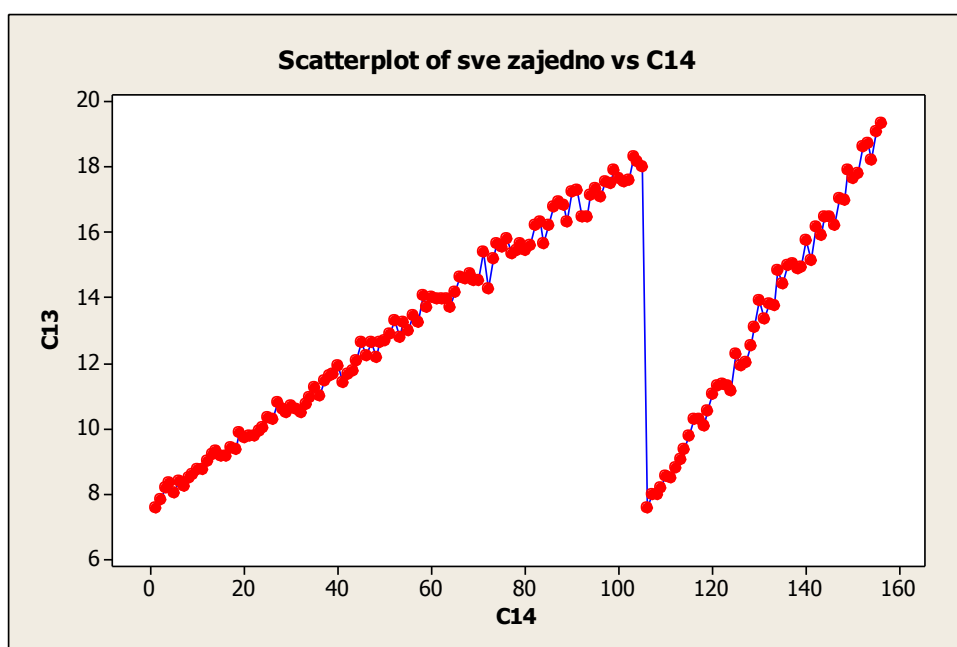
Kako se u ovom slučaju radi o simuliranim podacima, može se pretpostaviti kao da je nepoznati proces, te će se i na taj način određivati kontrolne granice. U slučaju određivanja (računanja) kontrolnih granica za proces za koji nemamo prethodnih saznanja (nepoznate varijacije procesa) potrebno je provesti korekciju granica u slučaju pojave podataka izvan kontrolnih granica. Korekcija (ponovno računanje granica) provodi se nakon eliminacije uzoraka (odgovarajućih statističkih parametara koji se prate) koji su izvan kontrolnih granica. Na slici 15. vidljivo je kako su svi podaci unutar kontrolnih granica iz čega se može zaključiti kako je proces, iako ima očekivani trend podataka, a time i rastući trend aritmetičkih sredina uzoraka (stalni sustavni pomak) pod kontrolom. Termin „pod kontrolom“ je statistički termin kojim se



pokazuje da proces varira samo pod utjecajem slučajnih, procesu svojstvenih utjecaja (nema značajnih varijacija).

Također i u regresijskoj kontrolnoj karti isti je slučaj sa kontrolnom kartom koja prati rasipanje. Naime, i u ovom slučaju kontrolna karta raspona izgledat će identično kao i kod konvencionalne  $\bar{X} - R$  kontrolne karte zbog prije objašnjenog razloga da karta rasipanja ne slijedi varijabilnosti, pomake ili trendove samog procesa. Karta raspona služi dakle za utvrđivanje veličine rasipanja u relativno kratkom vremenskom razdoblju (unutar uzroka) i njom se određuje razina kvalitete koju je moguće postići nakon otklanjanja pomaka procesa. Osim kontrolnih, u regresijskoj kontrolnoj karti ucrtane su i granice specifikacija (crvene vodoravne crte), te granice upozorenja (plave vodoravne crte). Kako se ovim simuliranim podacima želi prikazati stvarni proces u kojem postoji očekivani rastući ili padajući trend, što bi primjerice u stvarnosti mogao bit proces strojne obrade u kojem uslijed obrade dolazi do trošenja alata koje za posljedicu ima promjenu dimenzije u vremenu. Takav proces moguće bi bilo održavati na način da aritmetičke sredine slijede horizontalni pravac odnosno da se otkloni trend tako da se u jako kratkim vremenskim intervalima izvode stalne korekcije ili izmjene alata. Međutim takav proces bi bio iznimno skup i ne bi bio profitabilan, pa se stoga pokušava što više produžiti vijek trajanja alata a da pritom promatrane dimenzije ostanu unutar granica tolerancije, odnosno da ne nastane škart. Vodeći se tim razmišljanjem postavljene su granice upozorenja koje, kao ne što im ime govori, služe upozoravanju kada je proces blizu granica specifikacije i ako se ubrzo ne naprave korekcije nastat će škart. Na slici 15. može se vidjeti kako je proces došao do granice upozorenja pa čak i u nekoliko uzoraka prešao granicu upozorenja i jako se približio gornjoj granici specifikacije. To je znak da proces treba zaustaviti te napraviti potrebne korekcije kako bi se proces „vratio“ u početno stanje. Na sljedećoj slici prikazan je proces nakon prve korekcije. U ovom primjeru proces je praćen na način da su uzimani uzorci veličine 3 jedinice i primjenom kontrolne karte koja prati aritmetičke sredine uzoraka i rasipanje. Prema centralnom graničnom teoremu raspodjela aritmetičkih sredina uzoraka uvijek ima manje rasipanje od osnovnog skupa iz kojeg se uzorci vade. To se dobro može vidjeti prema procjenjenom standardnom odstupanju  $S_e$  za regresijsku analizu. Kada je regresijska analiza provedena na cijelom skupu podataka procjenjeno standardno odstupanje iznosilo je  $S_{e(\text{osnovni skup})}=0,26$  (slika 10.) dok je procjenjeno standardno odstupanje svakog podatka od regresijskog pravca za slučaj promatranja uzoraka veličine 3 iznosilo očekivanih manjih  $S_{e(\text{uzorci})}=0,1496$ . Iz toga slijedi da dopuštene granice unutar kojih se smiju kretati aritmetičke sredine uzoraka se moraju nalaziti u intervalu koji je

uži od granica specifikacije. Maksimalan raspon unutar kojeg se mogu nalaziti može se odrediti preko karte koja prati raspone. Minimalna vrijednost koju može poprimiti aritmetička sredina uzorka određuje se na način da se na iznos donje granice specifikacije zbroji iznos maksimalnog raspona unutar uzorka koji se prati kartom raspona (izraz 3.26), dok se maksimalna vrijednost određuje tako da se od gornje granice specifikacije oduzme iznos maksimalnog raspona očitano iz karte raspona (izraz 3.27), kao što je to prikazano slikom 15. Na taj se način osigurava da, prilikom uzimanja uzoraka i praćenja procesa niti jedan podatak ne izlazi iz zadanih granica specifikacije, te također tako dobivene granice služe za postavljanje granica upozorenja koje su bitne kod određivanja potrebe za korekcijom i određivanja vrijednosti na koju će se proces postaviti nakon korekcije.



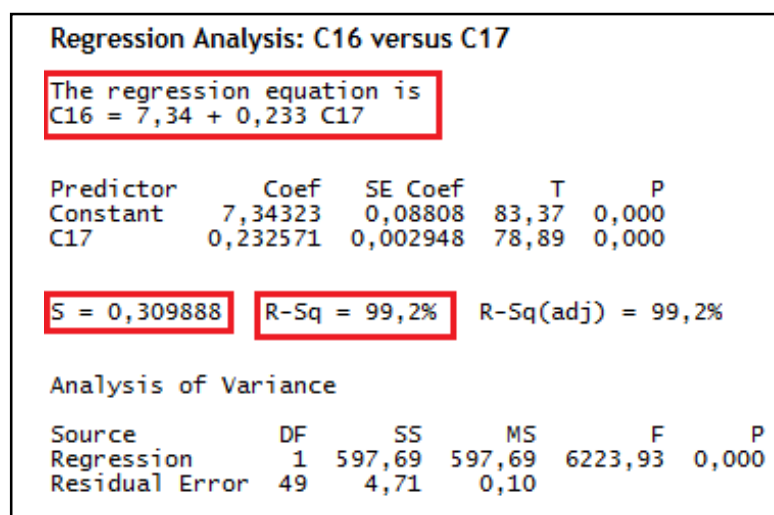
Slika 16. Proces nakon korekcije

$$DKG_{\bar{x}} = T_d + (UCL_R - \bar{R}) = 6 + 0,7 = 6,7 \quad (3.26)$$

$$GKG_{\bar{x}} = T_g - (UCL_R - \bar{R}) = 19 - 0,7 = 18,3 \quad (3.27)$$

Granice upozorenja se stoga postavljaju iznad donje odnosno ispod gornje dopuštene granice aritmetičkih sredina uzoraka, kako bi na vrijeme upozorile na potrebu za korekcijom alata prije nastanka nesukladnih dijelova. U slučaju da se proces pratio  $\bar{X} - MR$  kontrolnom kartom gdje se ne uzimaju uzorci, tada bi taj dopušteni raspon, poklapao upravo sa granicama specifikacije iz jednostavnog razloga što se u tom slučaju kontrolira svaka proizvedena jedinica.

Proces nakon korekcije opet slijedi određeni trend. Ponovno je potrebno provesti regresijsku analizu za podatke nakon korekcije kako bi se ustanovio po kojem trendu, odnosno koji pravac sada slijede podaci. Očigledno je kako nakon korekcije podaci neće slijediti identični pravac kao što je to bilo prije, to može biti sa sporijim trendom (manji nagib pravca) ili sa bržim trendom (veći nagib regresijskog pravca) što je i slučaj na slici 16.



**Slika 17. Regresijska analiza nakon korekcije**

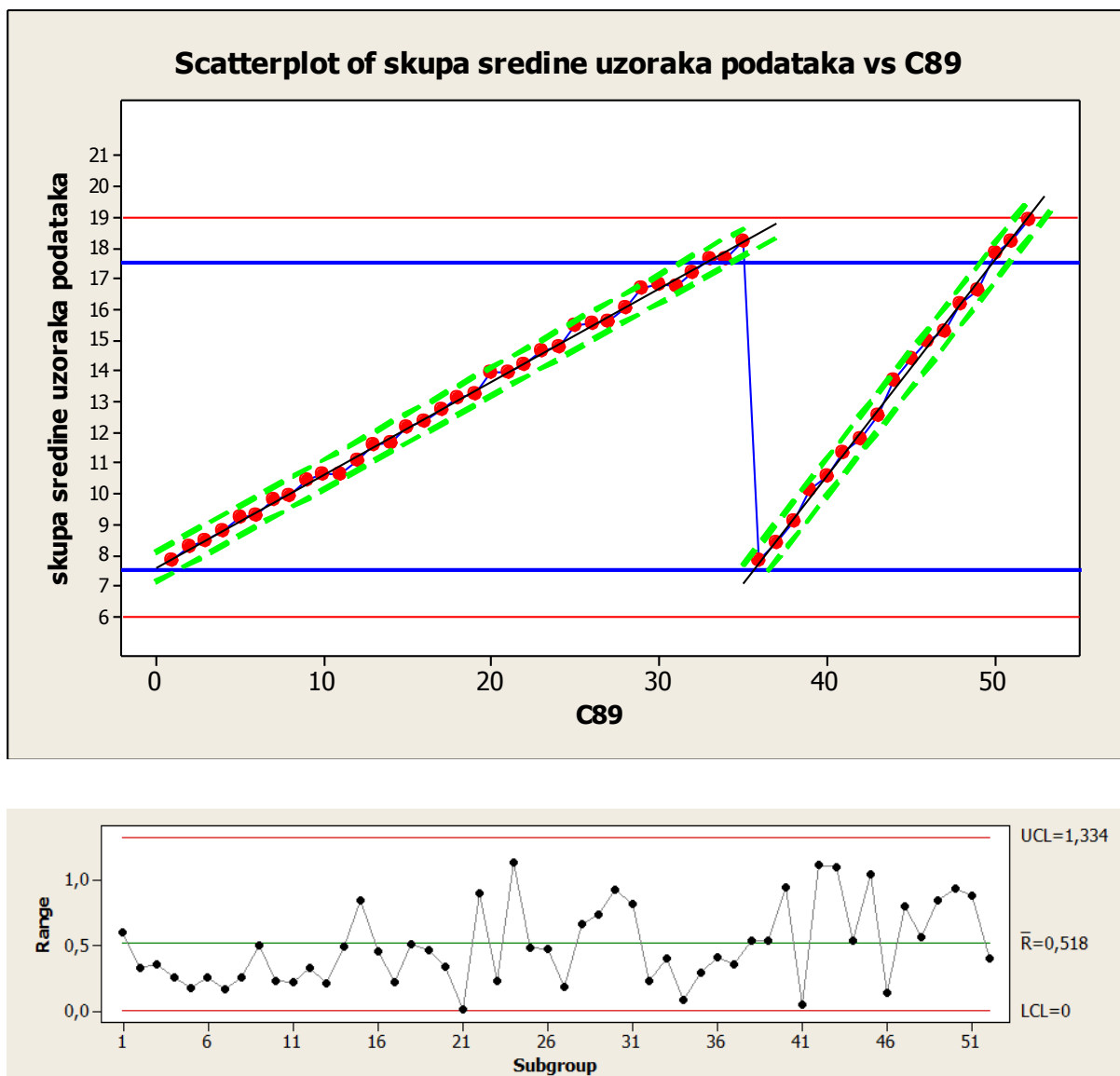
Nakon korekcije provedena je nova regresijska analiza i ustanovljen je novi regresijski pravac:

$$\hat{y}_i = 7,34 + 0,233 \cdot x_i \quad (3.28)$$

te je također moguće očitati procjenjeno standardno odstupanje regresije koje iznosi  $S_e = 0,3098$  i koeficijent determinacije koji iznosi  $r^2 = 0.992$  ili 99,2 %. I u ovom slučaju potrebno bi bilo testirati značajnost koeficijenta korelacije (t – testom) i adekvatnost dobivenog regresijskog modela (F – testom), ali pošto je to učinjeno za prvu regresijsku analizu, sada se na temelju izračunatih vrijednosti može zaključiti da kao i prije korekcije regresijski model jako dobro opisuje dobivene podatke (koeficijent determinacije jako visok!), ali i da je model adekvatan iz razloga što je izračunata F vrijednost jako velika ( $F = 6223,93$ ), čak veća nego u prvom slučaju.

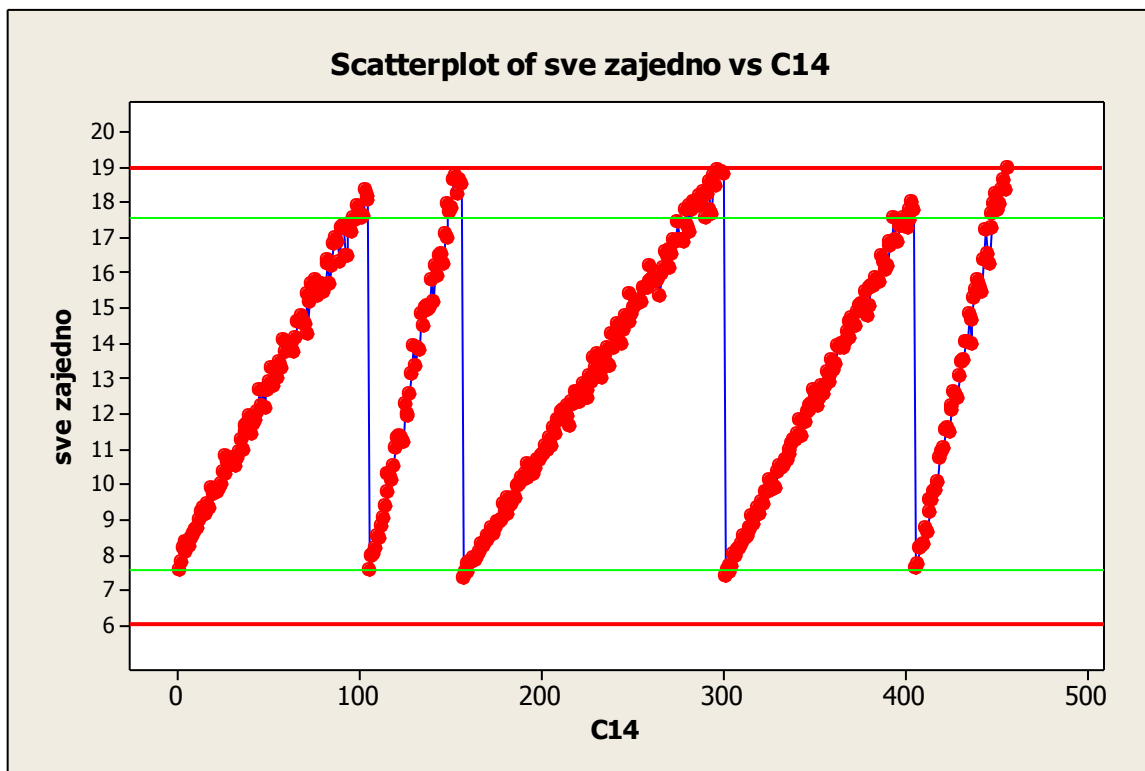
Kako bi se i nakon korekcije ustanovilo da li je proces pod kontrolom opet je potrebno koristiti regresijske kontrolne granice oko novog pravca regresije, za podatke generirane nakon korekcije. Na slici 18. prikazana je nova regresijska kontrolna karta koja sadrži podatke nakon korekcije. Kako i nakon korekcije nema podataka izvan novih regresijskih kontrolnih granica,

može se zaključiti kako je proces pod kontrolom, odnosno da varira samo pod utjecajem slučajnih, procesu svojstvenih utjecaja (nema značajnih varijacija).

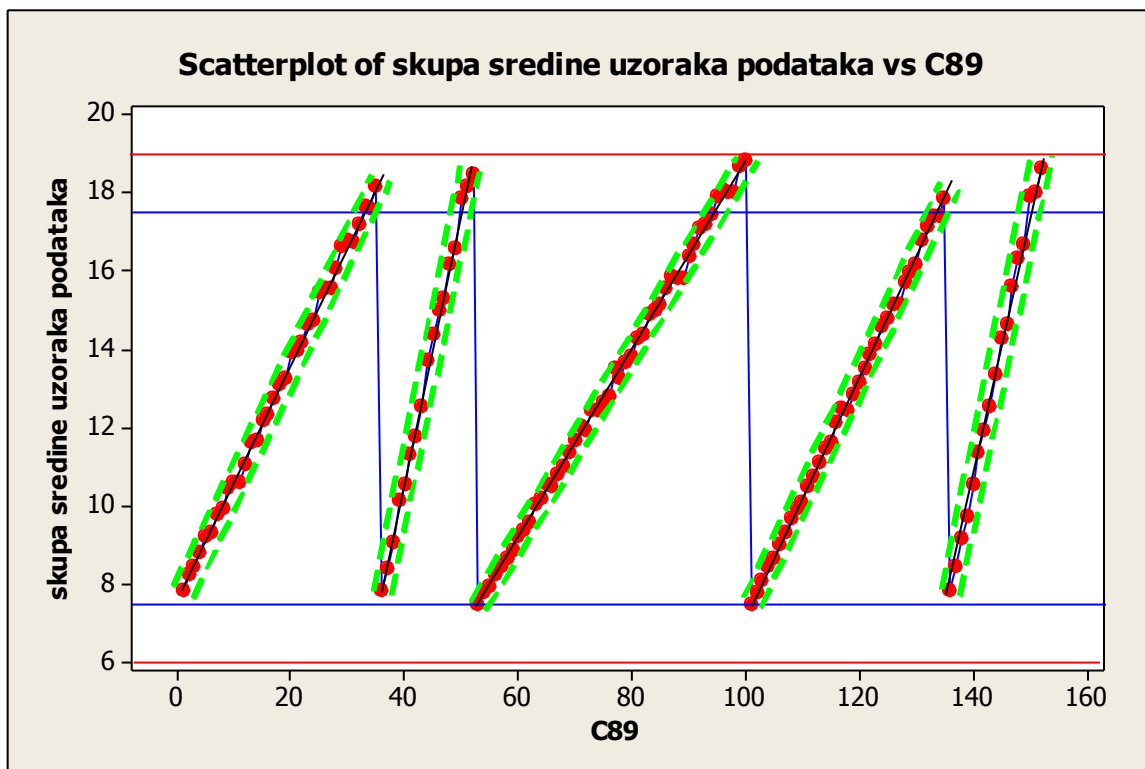


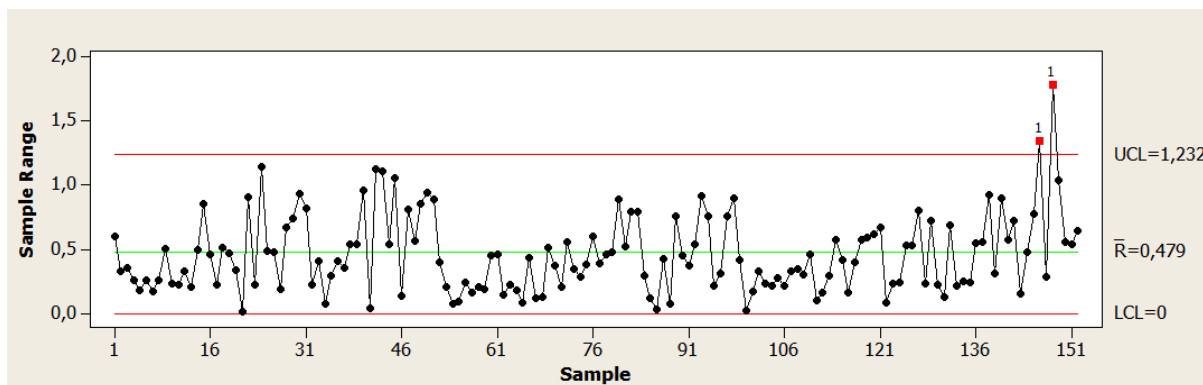
**Slika 18. Regresijska kontrolna karta nakon prve korekcije**

Dakle proces koji očekivano slijedi trend uvijek će se morati u određenom vremenskom periodu odgovarajućim korekcijama „držati“ unutar granica specifikacije. Najbolji primjer za to je proces strojne obrade u kojem je prisutno trošenje alata. Na slici 19. prikazan je simulirani proces s više korekcija, dok je istovremeno na slici 20. prikazana regresijska kontrolna karta tog procesa.



Slika 19. Simulirani proces s trendom podataka nakon više korekcija





**Slika 20. Regresijska kontrolna karta nakon više korekcija**

Sa slike 20. vidimo kako se proces korekcijama drži unutar granica specifikacije, te je vidljivo kako je proces pod kontrolom jer niti jedan podatak ne izlazi izvan regresijskih kontrolnih granica (zelene isprekidane crte) u karti koja prati aritmetičke sredine uzoraka, dok se na karti raspona može vidjeti kako od 152 uzorka samo dva uzorka izlaze izvan kontrolnih granica. Međutim bez obzira na to, može se zaključiti kako je proces pod kontrolom zbog toga što je proces svojom velikom većinom unutar kontrolnih granica i ne pokazuje neke nepravilnosti u svom kretanju oko srednje vrijednosti, te se može reći kako su te dvije točke statistički neznačajne za zaključivanje o stabilnosti procesa. Ono što je specifično kod regresijske kontrolne karte je to da će se za svaku korekciju procesa morati uspostaviti novi regresijski pravac a time i nove regresijske kontrolne karte za taj dio podataka. Ono što je cilj svake kontrolne karte je dovođenje procesa u stanje statističke kontrole, odnosno u stanje „pod kontrolom“ kako bi se dobila saznanja o mogućnostima poboljšavanja procesa i mogućnostima postizanja zahtijevane kvalitete proizvoda. Upravo se mogućnosti postizanja zahtijevane kvalitete proizvoda naziva **spособnost procesa**, dok se procjenjivanje sposobnosti procesa provodi računanjem tzv. indeksa sposobnosti. U nastavku će se ukratko objasniti sposobnost procesa, pojedini indeksi sposobnosti, te će se prikazati postupak procjenjivanja indeksa sposobnosti procesa kada u procesu postoji trend podataka.

## 4. PROCJENJIVANJE SPOSOBNOSTI PROCESA

### 4.1. Uvod

Osnovni koncept statističke kontrole procesa temelji se na uspoređivanju podataka dobivenih iz procesa s izračunatim kontrolnim granicama te na osnovi toga donošenje zaključaka o samome procesu. Ovaj postupak se prepoznaje kao suvremena metoda za analizu sposobnosti procesa preko različitih indeksa sposobnosti. Dakle, definicija sposobnosti kaže da je **sposoban onaj proces koji može proizvoditi jedinice (dijelove) unutar zahtijevanih granica (granica specifikacije)** [4].

Proces je sposoban ako je raspon zahtjeva veći ili jednak od raspona procesa. To je ujedno i temeljni uvjet sposobnosti procesa. Raspon zahtjeva, odnosno tolerancijsko područje  $T$  je područje između gornje (USL) i donje granice zahtjeva (LSL), odnosno

$$T = USL - LSL \quad (4.1)$$

Raspon procesa podrazumijeva područje unutar  $\pm 3$  standardna odstupanja ( $6\sigma$ ) u odnosu na sredinu procesa (99,73 % površine ispod krivulje normalne raspodjele kojom se aproksimira proces). Stoga temeljni uvjet sposobnosti procesa je:

$$T \geq 6 \cdot \sigma \quad (4.2)$$

Ocjena sposobnosti procesa odgovara na pitanje treba li poboljšati proces. Ako je odgovor potvrđan, postavlja se pitanje za koliko ga treba poboljšati. Drugim riječima, ova se analiza svodi na razmatranje uzroka varijabilnosti procesa, budući da se u svakom procesu pojavljuje određeni stupanj varijabilnosti iz slučajnih ili posebnih uzroka. Ocjenom sposobnosti procesa mjeri se učinkovitost i efikasnost procesa u slučaju nepostojanja posebnih uzroka varijacija, dakle u slučaju kada je proces u stanju statističke kontrole. Kad je proces pod kontrolom bit će manja vjerojatnost da promatrani parametri procesa izađu izvan okvira kontrolnih granica. To će biti tako zbog toga jer se na proces može djelovati već u trenutku kada se pojave naznake da bi mogao izaći izvan kontrole, odnosno izvan specificiranih kontrolnih granica. Također treba osigurati ne samo da je proces pod kontrolom, već i da je ispravno centriran u odnosu na definiranu i praćenu karakteristiku proizvoda ili nekog njegovog parametra.

Prije ocjene sposobnosti procesa potrebno je izabrati kritični parametar ili promjenjivu veličinu koja će se kontrolirati. To je veličina koja se mora uklopiti u zadane tolerancije, npr. dimenzija neke pozicije ili bilo koja druga veličina. Kad se odabere kritični parametar, može se pristupiti

prikupljanju rezultata mjerenja. Kritični parametar treba biti mjereno što preciznijim mjerilom s klasom točnosti većom od veličine tolerancije. U suprotnom, proces mjerenja će biti uzrok pojave varijacija na konkretnom parametru. Najbolje je prikupljati što više podataka tijekom dužeg vremenskog perioda. Tako se s većom pouzdanošću dobiva ocjena sposobnosti procesa jer se zasniva na velikom uzorku.

## 4.2. Indeksi sposobnosti procesa

Sposobnost procesa procjenjuje se računanjem tzv. **indeksa sposobnosti procesa**. Računanje i pravilna interpretacija indeksa sposobnosti procesa temelji se na sljedećim pretpostavkama [8]:

- raspodjela podataka se može aproksimirati normalnom raspodjelom,
- proces koji se razmatra je stabilan i bez značajnih uzroka varijacija (proces je „pod kontrolom“),
- pouzdana procjena sposobnosti procesa može se donijeti samo temeljem praćenja procesa primjenom odgovarajuće kontrolne karte i nakon dovođenja procesa u stanje statističke kontrole.

Pritom je važno istaknuti, ukoliko proces nije „pod kontrolom“ računanje indeksa sposobnosti je puka formalnost i zavaravanje. Tek otklanjanjem značajnih uzroka varijacija u procesu i dovođenjem sredine procesa u okoliš ciljane vrijednosti ima smisla procjenjivati njegovu sposobnost. U literaturi se mogu naći različita tumačenja indeksa sposobnosti procesa koja su često kontradiktorna i mogu unijeti zbrku u primjeni. Zbrka je uglavnom povezana s načinom procjenjivanja raspona procesa (standardnog odstupanja) i s tim u svezi primjenjene terminologije. Uvažavajući vrijeme odvijanja procesa procjenjivanje sposobnosti (pripadajući indeksi) može pripadati jednoj od sljedeće tri kategorije:

1. Sposobnost procesa u dužem vremenskom razdoblju (Long-Term Process Capability)
2. Preliminarna sposobnost procesa (Preliminary Process Capability)
3. Sposobnost u kratkom vremenskom razdoblju (Short-Term Capability)

### 4.2.1. Sposobnost procesa u dužem vremenskom periodu

Indeksi sposobnosti procesa računaju se nakon odvijanja procesa tijekom razložno dugog vremenskog razdoblja u kojem su se mogli pojaviti sve moguće varijacije procesa. Preporuka je 20 proizvodnih dana. Indeksi su sljedeći:



**Potencijalna sposobnost  $C_p$  (Potential Capability)**

Ovaj se indeks računa kao odnos tolerancije prema  $6\sigma$ :

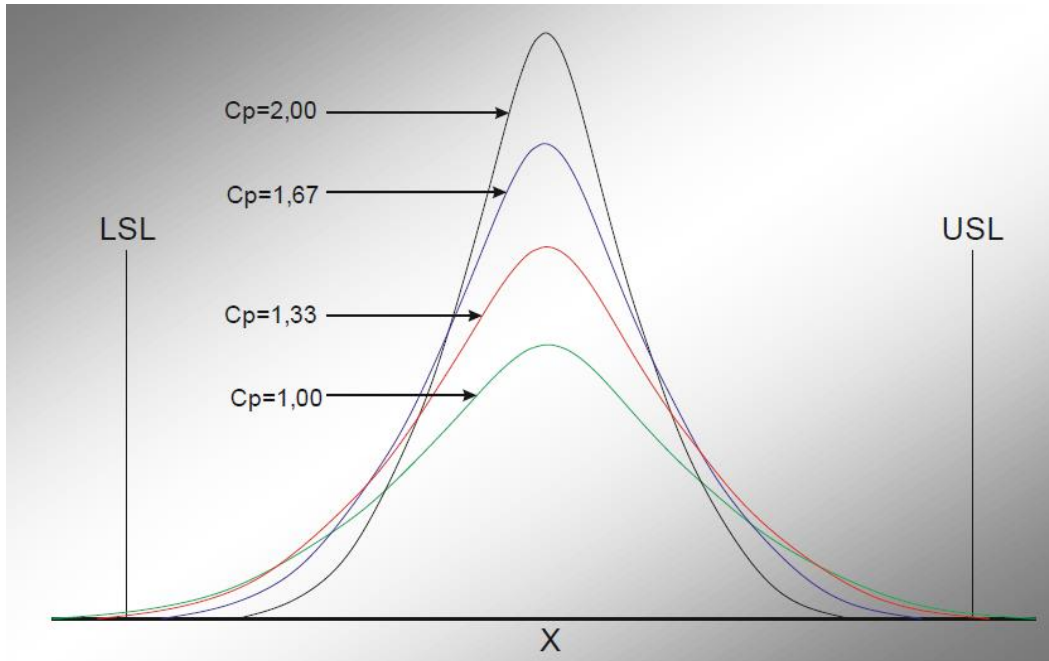
$$C_p = \frac{T}{6\sigma} \quad (4.3)$$

Vrijednost  $C_p$  pokazuje koliko je puta širina tolerantnog polja veća od stvarne širine odgovarajuće raspodjele. Standardno odstupanje se procjenjuje analizom odgovarajuće kontrolne karte, odnosno iz izraza:

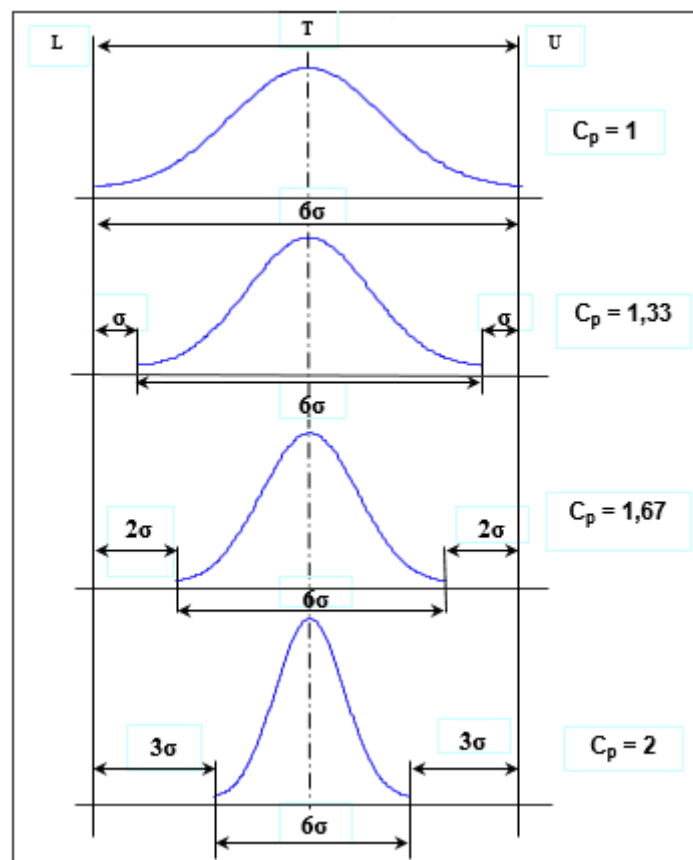
$$\hat{\sigma} = \frac{\bar{R}}{d_2} \text{ (u slučaju primjene } \bar{x} - R \text{ kontrolne karte) ili} \quad (4.4)$$

$$\hat{\sigma} = \frac{\bar{R}}{c_2} \text{ (u slučaju primjene } \bar{x} - s \text{ kontrolne karte).} \quad (4.5)$$

Ovako procijenjeno standardno odstupanje naziva se „*standardno odstupanje iz uzorka*“ ili „*unutrašnje standardno odstupanje*“ (within subgroups or internal standard deviation). Vrijednost ovog indeksa neposredno pokazuje može li proces biti sposoban. Što je iznos indeksa veći, to je rasipanje procesa manje. Njegove vrijednosti se kreću oko nule do vrlo velikih pozitivnih brojeva. Što je vrijednost indeksa veća, to je manje rasipanje procesa. Teorijski je proces sposoban ako je  $C_p \geq 1$ . Sve dok je srednja vrijednost rezultata mjerenja jednaka centralnoj točki tolerancije, može se komentirati i povezati  $C_p$  i preciznost procesa. Nedostatak ovog indeksa je u tome što zanemaruje sredinu procesa, te se u slučaju loše centriranosti procesa može doći do pogrešnog zaključka. Na slikama 21. i 22. prikazana je povezanost širine raspodjele nekog parametra procesa s vrijednošću  $C_p$ . Na taj način, jedan od prvih i polaznih zadataka uvođenja faktora sposobnosti procesa sastoji se u karakterizaciji procesa prema postotku škarta pomoću jednog jednostavnog broja. Različite tvrtke usvajaju za svoje procese različite kritične vrijednosti  $C_p$ . Mnogi japanski proizvođači orijentiraju se na vrijednosti  $C_p = 1,33$ , što odgovara takvoj situaciji kada interval  $\pm 3\sigma$  zauzima 75% od polja dopuštenog odstupanja. Neke tvrtke u razvijenim zemljama danas ovu vrijednost podižu na 1,67, odnosno na  $C_p \geq 2$ . Važno je naznačiti da iznos indeksa  $C_p$  ukazuje na potencijalnu sposobnost procesa, odnosno sposobnost procesa koja se uz raspoložive resurse (strojevi, radnici, materijali i dr.) eventualno može postići. Drugim riječima ovim indeksom su obuhvaćene samo slučajne, procesu svojstvene varijacije. Vrijednost indeksa tijekom dužeg vremenskog razbolja u pravilu ima vrlo malu varijabilnost bez obzira na pomake u procesu, trendove i sl.



Slika 21. Primjeri indeksa  $C_p$  [4]



Slika 22. Različite vrijednosti indeksa  $C_p$  prema normalno distribuiranom procesu [4]

**Omjer sposobnosti  $C_r$  (Capability Ratio)**

Iznos ovog indeksa je recipročna vrijednost indeksa  $C_p$ , odnosno:

$$C_r = \frac{1}{C_p} = \frac{6\hat{\sigma}}{T} = \frac{6\hat{\sigma}}{USL - LSL} \quad (4.6)$$

Ako se iznos ovog indeksa prikaže u postocima ( $C_r \cdot 100, \%$ ) dobiva se postotak tolerancijskog područja koji je „iskorišten“ rasponom procesa. Za sposoban proces iznos indeksa  $C_r$  treba biti manji od 1.

**Donja i gornja potencijalna sposobnost  $C_{pL}$  i  $C_{pU}$  (Lowe and Upper Potential Capabilit)**

Vrijednosti indeksa  $C_{pL}$  i  $C_{pU}$  računaju se korištenjem sljedećih izraza:

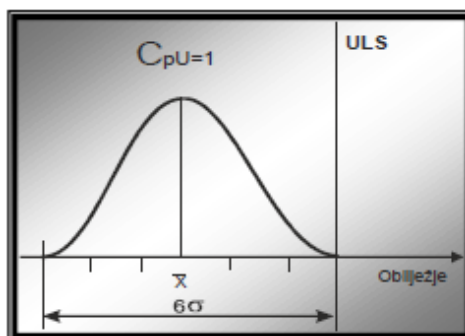
$$C_{pL} = \frac{(\text{sredina procesa} - LSL)}{3\hat{\sigma}} \quad (4.7)$$

$$C_{pU} = \frac{(USL - \text{sredina procesa})}{3\hat{\sigma}} \quad (4.8)$$

Sredina procesa je središnja linija primjenjene kontrolne karte. U slučaju računanja statističkih parametara iz svih podataka sredina procesa odgovara aritmetičkoj sredini tih podataka. Indeksi  $C_p$  i  $C_r$  ne pokazuju kako je smješten proces u odnosu na granice specifikacija. To se može utvrditi usporedbom iznosa indeksa  $C_{pL}$  i  $C_{pU}$ :

- identični iznosi ukazuju na potpunu centriranost procesa (vrijednosti indeksa jednake su vrijednosti indeksa  $C_p$ )
- iznos manji od 1 ukazuje na nesukladnost
- proces je pomaknut prema granici specifikacije manje vrijednosti indeksa

Ovi indeksi se računaju u slučaju procjenjivanja sposobnosti procesa kada je dan jednostrani zahtjev na proces (samo jedna granica specifikacije-primjer pokazuje slika 23.).



**Slika 23. Primjena indeksa  $C_{pL}$  i  $C_{pU}$  kada je dan jednostrani zahtjev [4]**

### **Faktor korekcije necentriranosti k (Non-centering correction)**

Iznos indeksa  $C_p$  može se korigirati zbog necentriranosti računanjem faktora korekcije necentriranosti  $k$ :

$$k = \frac{|D - sredina procesa|}{\frac{(USL - LSL)}{2}} \quad (4.9)$$

gdje je  $D$  ciljana vrijednost procesa, odnosno:

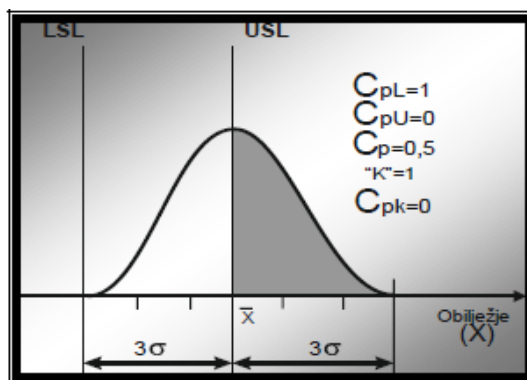
$$D = \frac{(USL - LSL)}{2} \quad (4.10)$$

### **Demonstrirana izvrsnost $C_{pk}$ (Demonstrated excellence)**

Vidjelo se da indeks  $C_p$  mjeri potencijalnu sposobnost, pretpostavljajući da je prosjek procesa jednak srednjoj točki granica tolerancije i da se odvija pod statističkom kontrolom. Budući da prosjek nije često u srednjoj točki, korisno je imati indeks sposobnosti koji odražava varijaciju i položaj prosjeka procesa. Takav indeks je  $C_{pk}$ . Negativna vrijednost  $C_{pk}$  ukazuje da je srednja vrijednost izvan granica tolerancije. Ako je  $C_{pk} = 0$  onda je srednja vrijednost jednaka jednoj od granica tolerancije (slika 24.).  $C_{pk}$  između 0 i 1,0 znači da proces ( $6\sigma$ ) izlazi izvan granica tolerancije.  $C_{pk}$  od 1,0 znači da jedan kraj procesa ( $6\sigma$ ) pada na granicu tolerancije.  $C_{pk}$  iznad 1,0 znači da proces ulazi potpuno unutar granica tolerancije. Što je veća vrijednost  $C_{pk}$ , to će biti manja količina proizvoda koji su izvan dopuštenih granica.

Veza između indeksa  $C_p$  i  $C_{pk}$  matematički se prikazuje kao:

$$C_{pk} = (1 - k) \cdot C_p \quad (4.11)$$



**Slika 24. Primjena indeksa  $C_{pL}$  i  $C_{pU}$  kada je dan jednostrani zahtjev [4]**

Ako je proces idealno centriran tada je  $k$  jednak nuli i  $C_{pk} = C_p$ . Pomicanjem procesa od ciljne vrijednosti (sredine područja tolerancija)  $k$  se povećava, a  $C_{pk}$  postaje manji od  $C_p$ . Ako se vrijednost  $C_{pk}$  povećava, to zahtijeva promjenu u prosjeku procesa, procesnom standardnom odstupanju ili objema vrijednostima. Za neke procese može biti lakše povećati vrijednost  $C_{pk}$  mijenjanjem prosječne vrijednosti (pomoću jednostavnog prilagođavanja procesnom cilju), nego smanjivanjem standardnog odstupanja (istraživanjem mnogih uzroka varijacija). Histogram procesa treba uvijek kritički analizirati kako bi se naglasio prosjek i raspon procesa. Treba biti oprezan te imati na umu da se vrijednosti  $C_{pk}$  i  $C_p$  izračunavaju za procese s normalnom razdiobom, ali svi procesi se ne ponašaju prema zakonu normalne razdiobe. Bez poznavanja razdiobe kojom se može opisati proces, upotreba  $C_{pk}$  vrijednosti može nepravilno utjecati na procjenu i dovesti do loših poslovnih odluka. Sadašnji standardi za indekse sposobnosti procesa su  $C_p > 1,33$  i  $C_{pk} > 1,33$ .

#### 4.2.2. Preliminarna sposobnost procesa

Preliminarno procjenjivanje sposobnosti procesa provodi se na njegovom početku ili nakon kratkog praćenja procesa. Preporuka je da se razmatra uzorak od najmanje 100 jedinica ili kontrolna karta s najmanje 20 uzoraka. U nazivlju indeksa se umjesto riječi sposobnost (Capability) koristi termin značajka (Performance). U tom smislu se indeksi označavaju kao  $P_p$ ,  $P_{pL}$ ,  $P_{pU}$ ,  $P_{pk}$ , a računaju se na isti način kao  $C_p$ ,  $C_{pL}$ ,  $C_{pU}$ ,  $C_{pk}$ , a standardno odstupanje naziva se „ukupno standardno odstupanje“ (engl. overall or total standard deviation).

Zahtjevi na najmanje iznose indeksa  $P_p$  i  $P_{pk}$  su stroži nego za iznose indeksa  $C_p$  i  $C_{pk}$  (npr., ako je zahtjev za  $C_p \geq 1,33$ , tada je ekvivalentni zahtjev za  $P_p \geq 1,67$ ). U SPC softverima za računanje ovih indeksa koristi se ukupno standardno odstupanjema ono se računa iz izraza:

$$P_p = \frac{T}{6\hat{\sigma}} ; \quad \hat{\sigma} = s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} \quad (4.12)$$

Iznos indeksa  $P_p$  varira u funkciji pomaka procesa u promatranom vremenskom razdoblju. Ako su u procesu prisutne samo slučajne varijacije tada su vrijednosti indeksa  $C_p$  i  $P_p$  jednake. U općem slučaju iznos indeksa  $P_p$  je uvijek manji od iznosa indeksa  $C_p$  osim ako nije analiziran dovoljno velik broj podataka.

### 4.2.3. Sposobnost procesa u kratkom vremenskom razdoblju

Za analizu sposobnosti procesa u kratkom vremenskom razdoblju često se koristi termin „analiza sposobnosti stroja“ (engl. Machine Capability Analysis). Primjenjuje se prilikom preuzimanja stroja. Preporučuje se analiza na uzorku od najmanje 50 jedinica. Temeljni interes je informacija o rasipanju podataka oko ciljane vrijednosti  $D$ .

$$D = \frac{(USL - LSL)}{2} \quad (4.13)$$

### **Potencijalna sposobnost stroja $C_{pm}$ (Potential Machine Capability)**

$C_{pm}$  se računa korištenjem alternativne procjene standardnog odstupanja koja sadrži efekt slučajne necentriranosti (rasipanja oko ciljane vrijednosti), odnosno:

$$C_{pm} = \frac{T}{6\hat{\sigma}} = \frac{(USL - LSL)}{6\hat{\sigma}} \quad (4.14)$$

gdje je:

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{\sum(x_i - D)^2}{n-1}} \quad (4.15)$$

Pored opisanih pokazatelja sposobnosti procesa, treba navesti da postoji još nekoliko pokazatelja uspješnosti procesa, koji se ovdje neće razmatrati zato što nemaju široku primjenu u industriji.

### 4.2.4. Razlozi za primjenu indeksa sposobnosti procesa

Sve veća primjena indeksa sposobnosti procesa u vodećim poduzećima u svijetu može se pojasniti na sljedeći način:

1. Razvoj suvremenog pristupa upravljanju kvalitetom sve više u prvi plan stavlja probleme varijabilnosti konkretnih vrijednosti, tj. odstupanja parametara proizvoda od zadanih vrijednosti. U suvremenom svijetu ovo je glavni uvjet konkurentne sposobnosti, a pokazatelji sposobnosti procesa služe kao prikladna mjera varijabilnosti procesa.
2. Inzistiranje na certifikaciji i atestiranju proizvoda zahtijeva postojanje kvantitativnih karakteristika deklarirane kvalitete. Za tu namjenu indeksi sposobnosti procesa su najjednostavniji i najjeftiniji.

3. Indeksi sposobnosti procesa su prikladni za suvremeni audit procesa, tj. za periodičku provjeru usklađenosti nekog procesa s definiranim zahtjevima.
4. Provjera sredstava u eksploataciji, njihovo podešavanje, kontrola, održavanje i dr. zahtijeva jednostavne kvantitativne pokazatelje stabilnosti karakteristika kroz određeni vremenski period, za što su također veoma prikladni indeksi sposobnosti procesa.
5. Indeksi sposobnosti procesa prikladni su za praćenje, izbor i ocjenu dobavljača, a pomoću njih se mogu postavljati zahtjevi dobavljačima i tako se stimulira njihov razvoj.
6. Istu ulogu mogu imati indeksi sposobnosti procesa pri interakciji s korisnicima i kupcima. Danas je sve teže prodati proizvode za koje se ne znaju indeksi sposobnosti procesa proizvodnje.
7. Indeksi sposobnosti procesa su odlično sredstvo za kontrolu stanja tehnoloških procesa i prikladna mjera za njihovo poboljšanje.
8. Možda je jedna od najvažnijih osobina indeksa sposobnosti procesa što omogućuje svim sudionicima u procesu (od dobavljača do kupca, od radnika do menadžera) da o problemima kvalitete govore istim jezikom, što je neophodan uvjet za dostizanje suvremene kvalitete proizvoda.

Kod indeksa sposobnosti procesa postoje i nedostaci. Navode se dva najvažnija. To je prije svega jednostavno usklađivanje sa zahtjevima prema određenoj vrijednosti indeksa, jednostavnom izmjenom vrijednosti USL i LSL u tehničkoj dokumentaciji, bez aktivnosti u stvarnoj proizvodnji. Proizvoljno određivanje i korigiranje tolerancije je najveći problem primjene ovih indeksa. Tolerancija se izračunava ili određuje na osnovi  $\sigma$ . Tolerancija se mijenja samo ako se u procesima mijenjaju parametri (npr. broj ljudi, novi stroj i dr) jer se smanjuje  $\sigma$ , što automatski utječe na smanjenje tolerancije. Postoji mogućnost da se ne primijete ozbiljni nedostaci proizvoda, oslanjajući se na visoke vrijednosti indeksa sposobnosti procesa u slučaju nepotpunog razumijevanja dopuštenih odstupanja, na kojima se zasniva njihova točna primjena. [8]

### 4.3. Procjenjivanje sposobnosti procesa za simulirani proces s trendom podataka

U ovom dijelu će se za simulirani proces s trendom podataka (poglavlje 3.2 slika 20.) prikazati postupak procjenjivanja indeksa sposobnosti. U prethodnom poglavlju objašnjen je način i primjena kontrolne karte za slučaj takovog procesa i zaključeno je kako je proces, iako ima stalni pomak aritmetičkih sredina, u stanju statističke kontrole („pod kontrolom“) tj. da uz očekivani trend proces (podaci) varira isključivo pod utjecajem slučajnih, procesu svojstvenih uzroka. Pa stoga ima smisla dalje procjenjivati sposobnost takvog procesa!

Osnovni problem koji se pojavljuje kod procjenjivanja sposobnosti procesa s trendom podataka je taj što se takvi procesi ne ponašaju po normalnoj raspodjeli nego slijede određeni trend (padajući ili rastući) pa je kod njih izvjesno da će u nekom trenutku proces očekivano izaći iz granica specifikacije. To će to imati značajan utjecaj na sposobnost procesa. A kako definicija sposobnosti procesa kaže da je sposoban onaj proces koji može proizvoditi jedinice unutar zahtjeva granica specifikacije, tako se ovi procesi moraju pratiti odgovarajućom kontrolnom kartom iz preventivnih razloga za korekcijom, odnosno „vraćanjem“ procesa u željeni okoliš granica specifikacije. Korekcije na simuliranom primjeru vršene su kada bi podaci prešli gornju granicu upozorenja i jako se približili gornjoj granici specifikacije. Iz navedenog se može zaključiti kako će se kod procesa s trendom i sama sposobnost procesa mijenjati u vremenu, te će biti potrebno ustanoviti funkcionalnu vezu između vremena korekcije i indeksa sposobnosti procesa. To je ujedno i osnovna razlika u procjenjivanju sposobnosti u odnosu na normalne procese tj. one koji nemaju izražene trendove.

Sa slike 20. vidljivo je kako vrijeme korekcije ovisi o nagibu regresijskog pravca kojeg podaci slijede, pa će stoga i sam regresijski pravac imati utjecaja na vremensku promjenu sposobnosti procesa. Osim regresijskog pravca još i granice specifikacije imaju utjecaj na vrijeme korekcije. Stoga se vrijeme korekcije može prikazati kao funkcija regresijskog pravca i tolerancijskog polja na slijedeći način:

$$t_k = \frac{(USL - c)}{tg\alpha}, \quad \alpha = arctg(m) \quad (4.16)$$

gdje je:  $t_k$  – vrijeme korekcije,

$\alpha$  – nagib regresijskog pravca,

$c$  – slobodni član u jednadžbi pravca regresije,

$m$  – nagib pravca regresije.

Ovo vrijeme korekcije  $t_k$  treba uzeti kao okvirni broj uzoraka (podataka) koji se mogu generirati prije nego se prijeđe gornja granica specifikacije. To bi bio točan broj kada bi proces

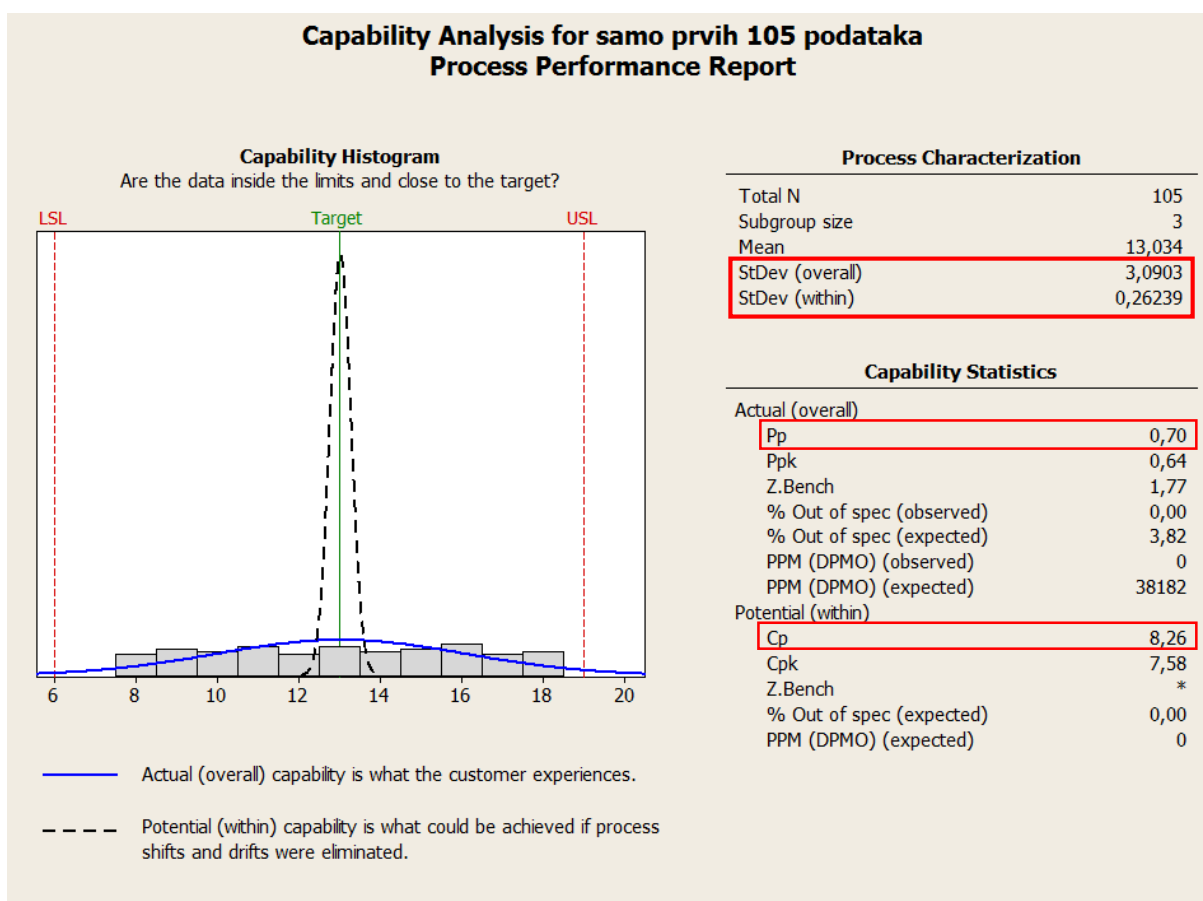


idealno slijedio regresijski pravac, no pošto to praktički nikad nije slučaj stvarna korekcija će se vršiti u pravilu nešto malo prije ili nešto malo poslije iz razloga što podaci variraju oko pravca regresije.

Za primjer prvog regresijskog pravca koji ima jednadžbu  $\hat{y}_i = 7,571 + 0,3034 \cdot x_i$  (slika 15.), iz koje se mogu očitati:  $m = 7,571$  i  $\alpha = \arctg(0,3034) = 16,878^\circ$  iz čega slijedi da je:

$$t_k = \frac{(USL - c)}{tg\alpha} = \frac{(19 - 7,571)}{tg(16,878^\circ)} = 37,67$$

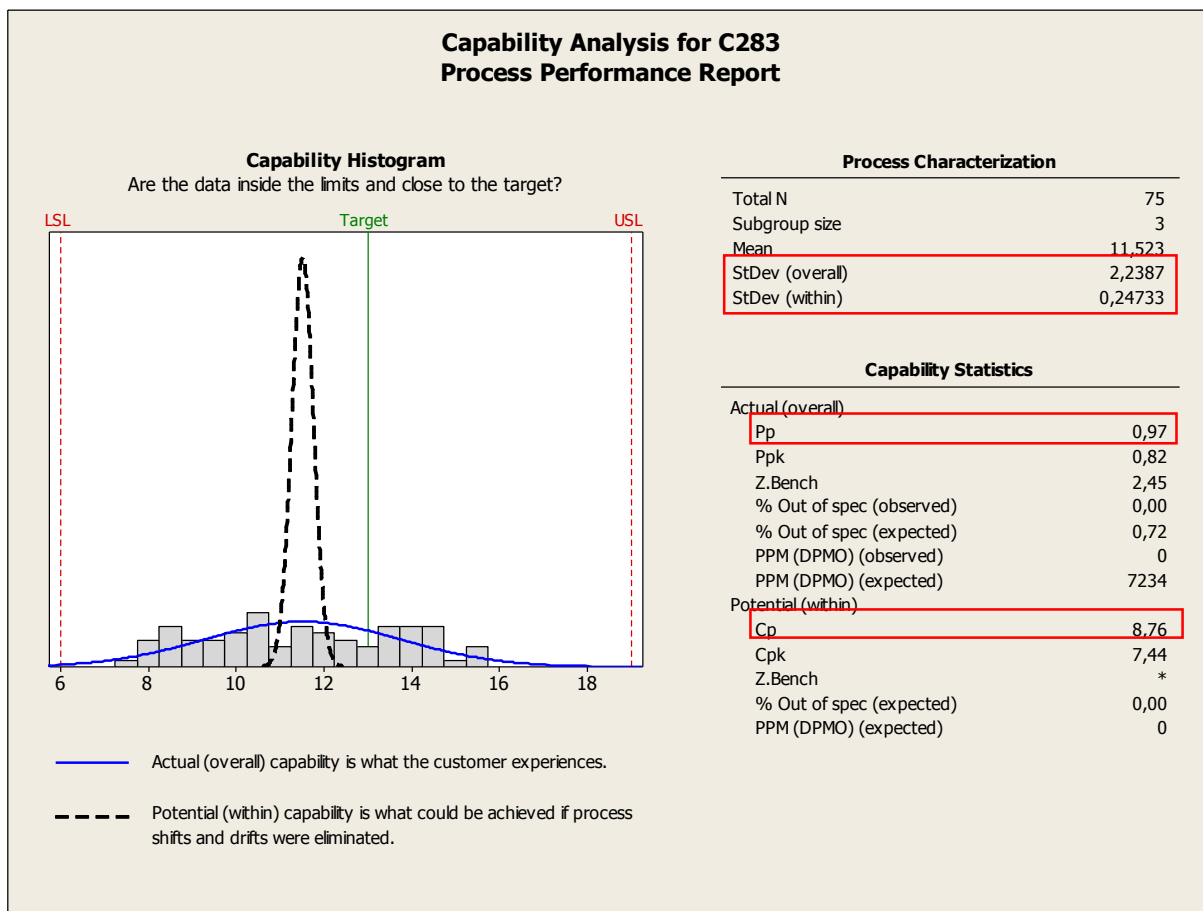
Stvarna korekcija je vršena na 35 uzoraka iz čega se vidi da je to malo manji broj nego što je to izračunata vrijednost a zbog navedenog razloga kako podaci nikada ne slijede idealno regresijski pravac.



Slika 25. Spособnost procesa nakon 35. uzorka (prva korekcija)

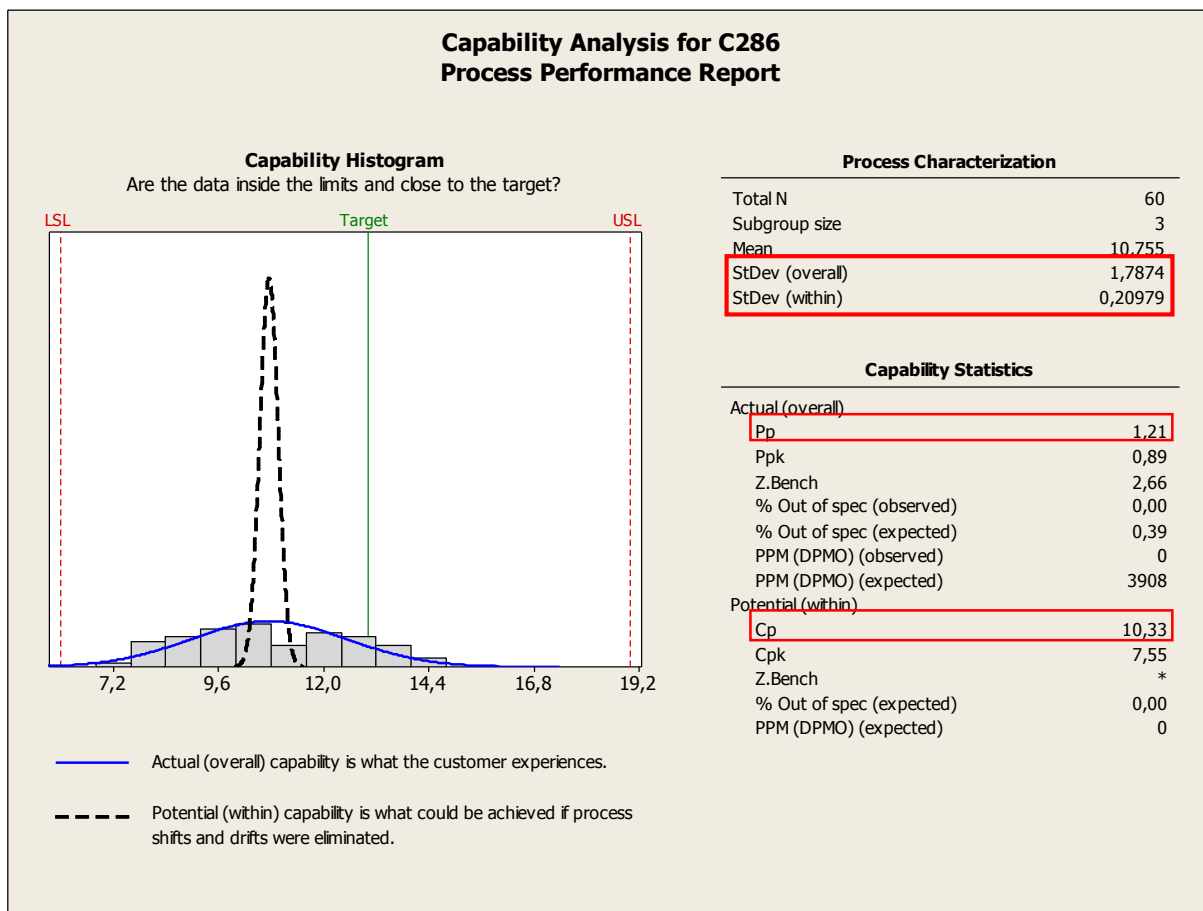
Slika 25. prikazuje sposobnost procesa, ukoliko se ona procjenjuje kad se podaci jako približe gornjoj granici specifikacije (prije prve korekcije). Vidi se kako je iznos potencijalne sposobnosti, indeks  $C_p$  jako visok i iznosi čak 8,26 dok je iznos preliminarnе sposobnosti  $P_p$  puno manji i iznosi nedovoljnih 0,70. Glavni razlog u ovako velikoj razlici ovih indeksa sposobnosti je u tome što su velike razlike u odstupanjima. Unutrašnje standardno odstupanje  $s_u$  se odnosi na odstupanja podataka unutar pojedinih uzoraka i iznosi 0,2624 (računa se na temelju praćenja procesa odgovarajućom kontrolnom kartom), dok ukupno standardno odstupanje  $s_t$ , odnosno odstupanje koje se računa iz svih podataka je puno veće i iznosi 3,0903. Ove velike razlike posljedica su trenda aritmetičkih sredina uzoraka, te treba istaknuti kako indeks  $C_p$  daje informaciju kolika bi bila potencijalna sposobnost procesa kada bi bili prisutni slučajni uzroci varijabilnosti (koji se javljaju unutar pojedinog uzorka). Međutim kod ovakvih procesa nije za očekivati eliminaciju sustavnog pomaka aritmetičkih sredina iz razloga što je taj pomak dio procesa i predstavlja primjerice trošenje alata koje je nemoguće izbjeći. S druge strane relevantnu informaciju o sposobnosti procesa daje iznos indeksa  $P_p$ . On dakako varira u funkciji pomaka procesa u promatranom vremenskom razdoblju. Ako su u procesu prisutne samo slučajne varijacije tada su vrijednosti indeksa  $P_p$  i  $C_p$  jednake. Informacija o jednakosti tih indeksa upućuje na nemogućnost daljnjeg poboljšavanja kvalitete procesa ako se ne izvrši određena promjena u proizvodnim resursima.

Kako je u ovom slučaju iznos indeksa  $P_p$  ispod prosječno zahtjevanih 1,33, moraju se napraviti neke promjene kako bi se njegova vrijednost povećala. Drugim riječima potrebno je napraviti korekciju u kraćem vremenskom intervalu. Na slici 24. prikazani su indeksi sposobnosti kada je korekcija vršena nakon 25. uzorka.



**Slika 26. Sposobnost procesa nakon 25. uzorka**

Sa slike 26. se dobro vidi kako se skraćivanjem vremena korekcije iznos indeksa  $P_p$  promijenio sa 0,7 na 0,97 što je promjena od oko 40 %. Dok se istovremeno vrijednost indeksa  $C_p$  neznatno promijenio za oko 5 %. Dakle daljnjim skraćivanjem vremena korekcije potrebno je podići indeks  $P_p$  na prosječnu zahtijevanu razinu od 1,33. Također je bitno naglasiti kako indeksi sposobnosti koji govore o centriranosti procesa ( $C_{pk}$ ,  $P_{pk}$ ) za slučaj proces s trendom podataka neće biti toliko bitni iz razloga što se kod procesa s trendom namjerno korekcijama proces smješta bliže granicama specifikacije kako bi to vrijeme između dviju korekcija bilo što je moguće duže iz razloga što je proces sa što češćim korekcijama i izmjenama alata skuplji ali i sporiji.

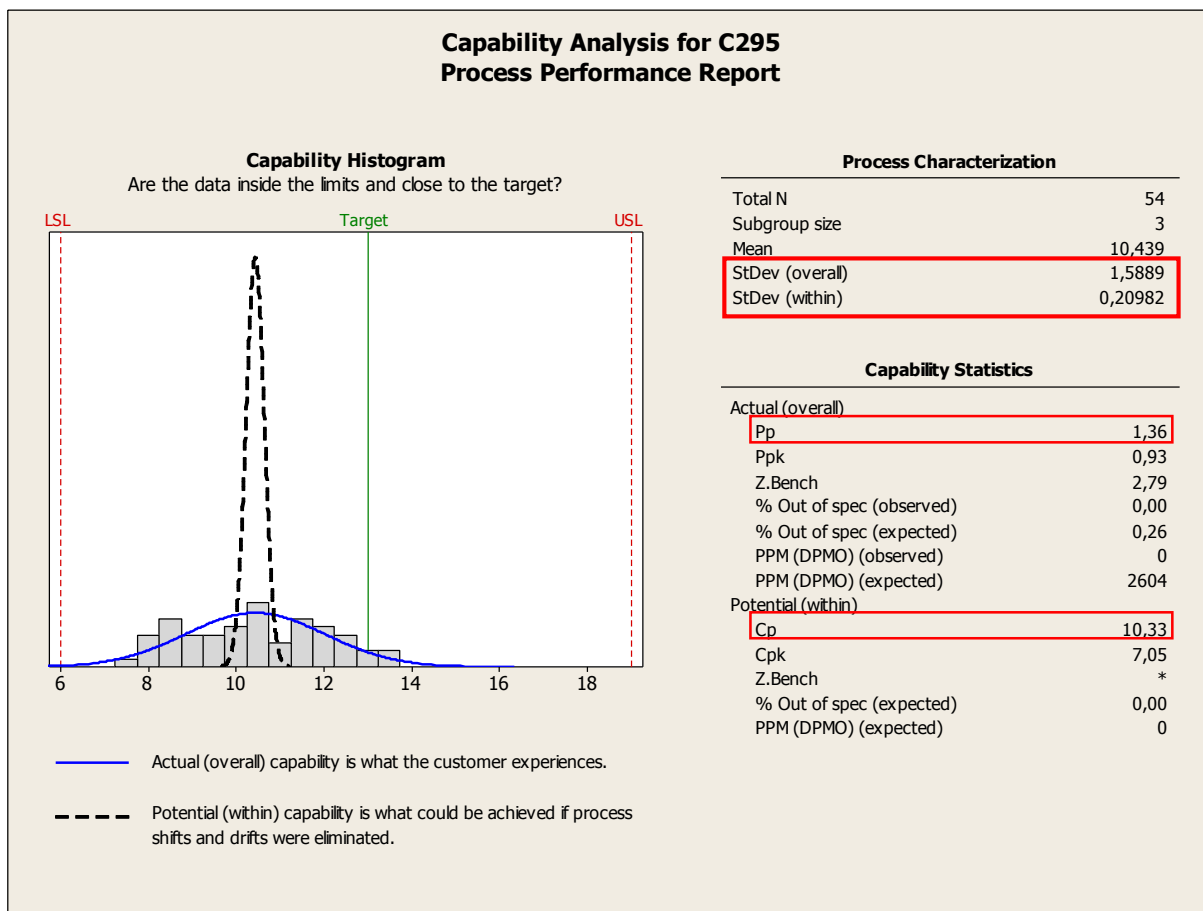


**Slika 27. Sposobnost procesa nakon 20. uzorka**

Skraćivanjem vremena korekcije na 20 uzoraka vrijednost indeksa  $P_p$  prešla je preko vrijednosti 1 i iznosi 1,21, te je također nastavljen i rast indeksa  $C_p$  koji u ovom slučaju iznosi visokih 10,33. Što znači da smo se približili graničnoj vrijednosti indeksa  $P_p$  od 1,33, te će sljedeće smanjenje vremena korekcije trebati biti manje

Na sljedećoj slici 28. prikazana je sposobnost procesa nakon skraćivanja vremena korekcije na 18 uzoraka. Ovdje je vidljivo da je vrijednost indeksa  $P_p$  prešla zahtijevanu vrijednost, te iznosi 1,36. Istovremeno vrijednost indeksa  $C_p$  se nije promijenila i ostala je iznosu 10,33. Iz čega se može zaključiti kako bi se pravovremeno podešavanje (korekcija) za prvi regresijski pravac:

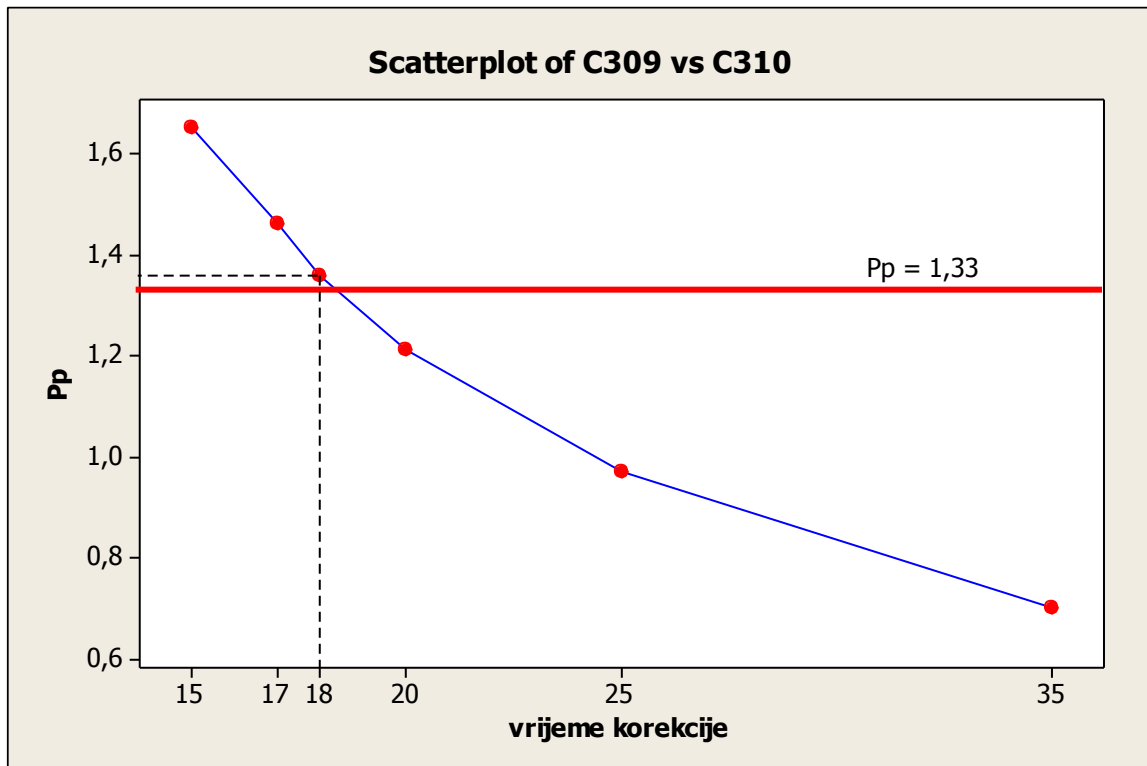
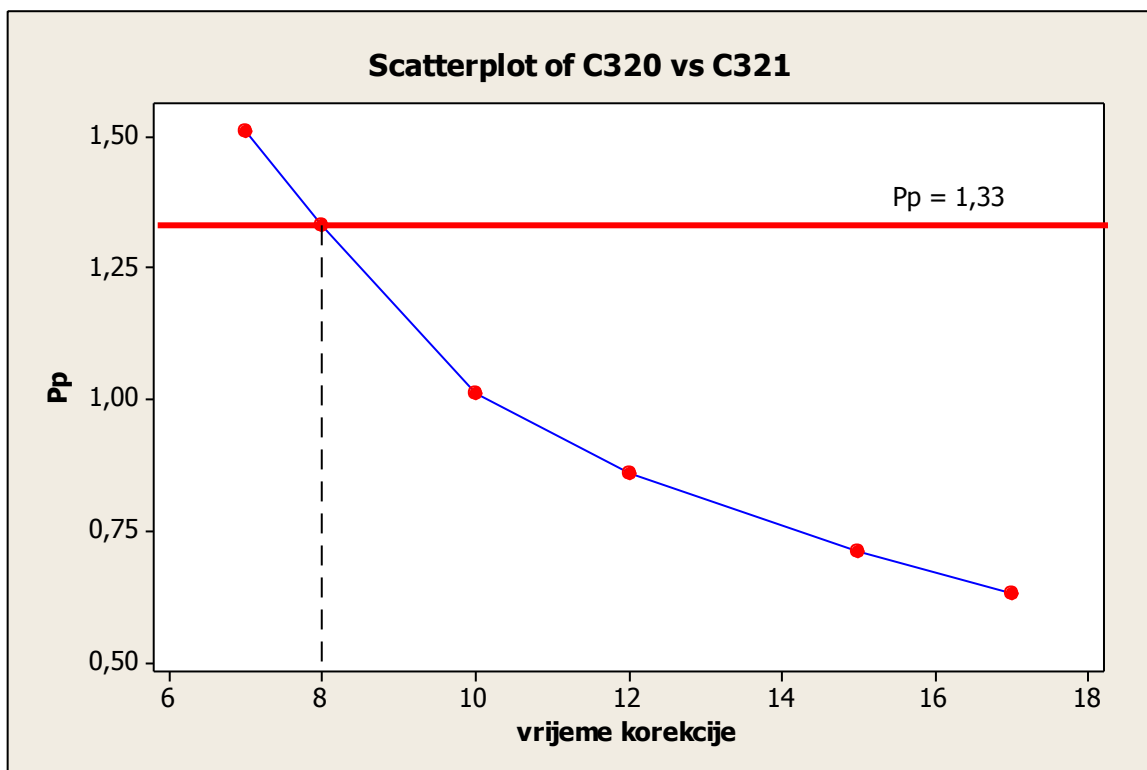
$\hat{y}_i = 7,67 + 0,101 \cdot x_i$  trebalo izvršavati nakon 18. uzorka kako bi se ostvario zahtijevani iznos indeksa  $P_p$  od minimalno 1,33.

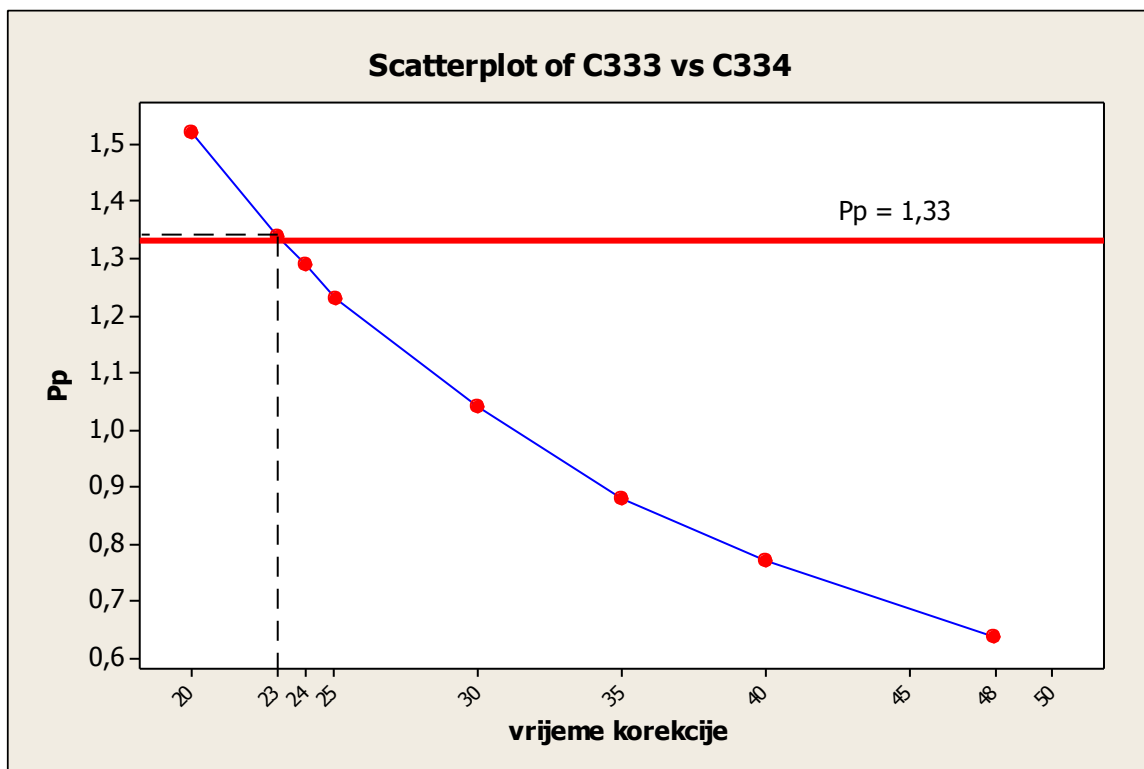


**Slika 28. Sposobnost procesa nakon 18. uzorka**

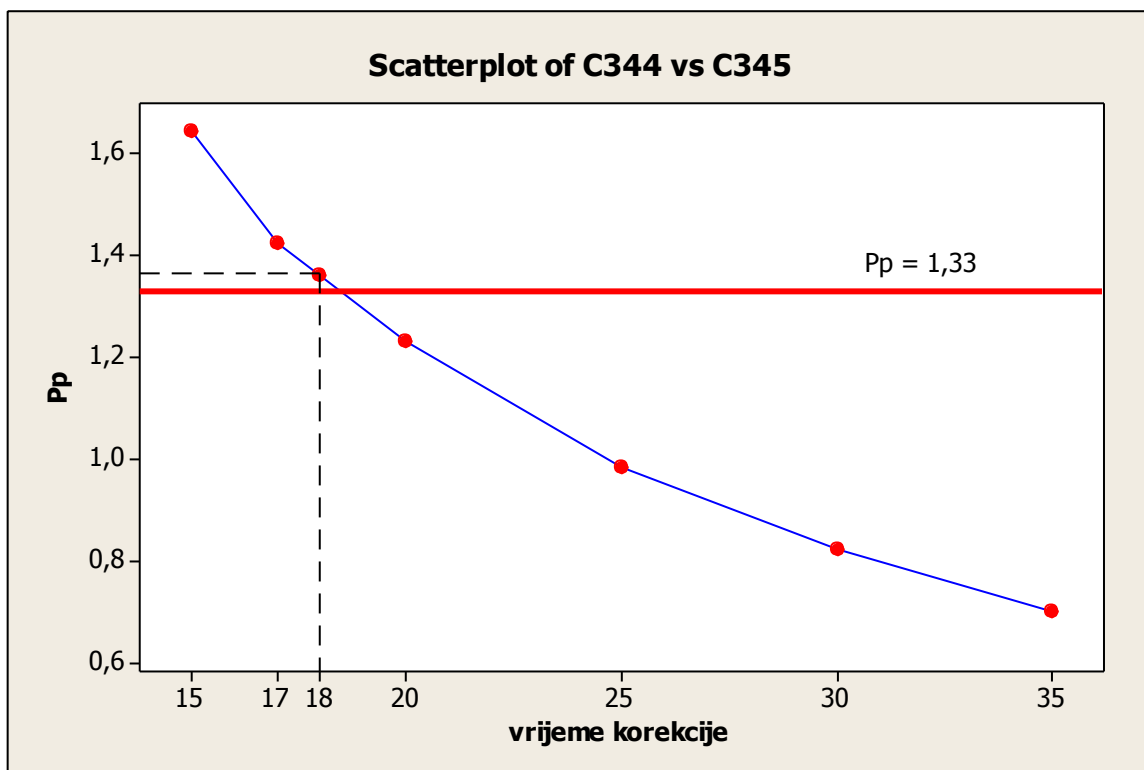
Nakon provedene analize promjene indeksa sposobnosti procesa u zavisnosti o vremenu korekcije za prvi regresijski pravac, na isti način provode se analize i za druge regresijske pravce kako bi se i kod njih ustanovilo pravovremeno provođenje korekcije a da se ostvari zahtijevani iznos indeksa preliminarne (stvarne) sposobnosti procesa.

U nastavku će se grafički za svaki od pet regresijskih pravaca simuliranog procesa prikazati ovisnost indeksa sposobnosti  $P_p$  u funkciji vremena korekcije. Analiza će se provoditi na isti način kao i za prvi regresijski pravac skraćivanjem vremena korekcije dok se ne dobije zahtijevana razina indeksa preliminarne sposobnosti procesa

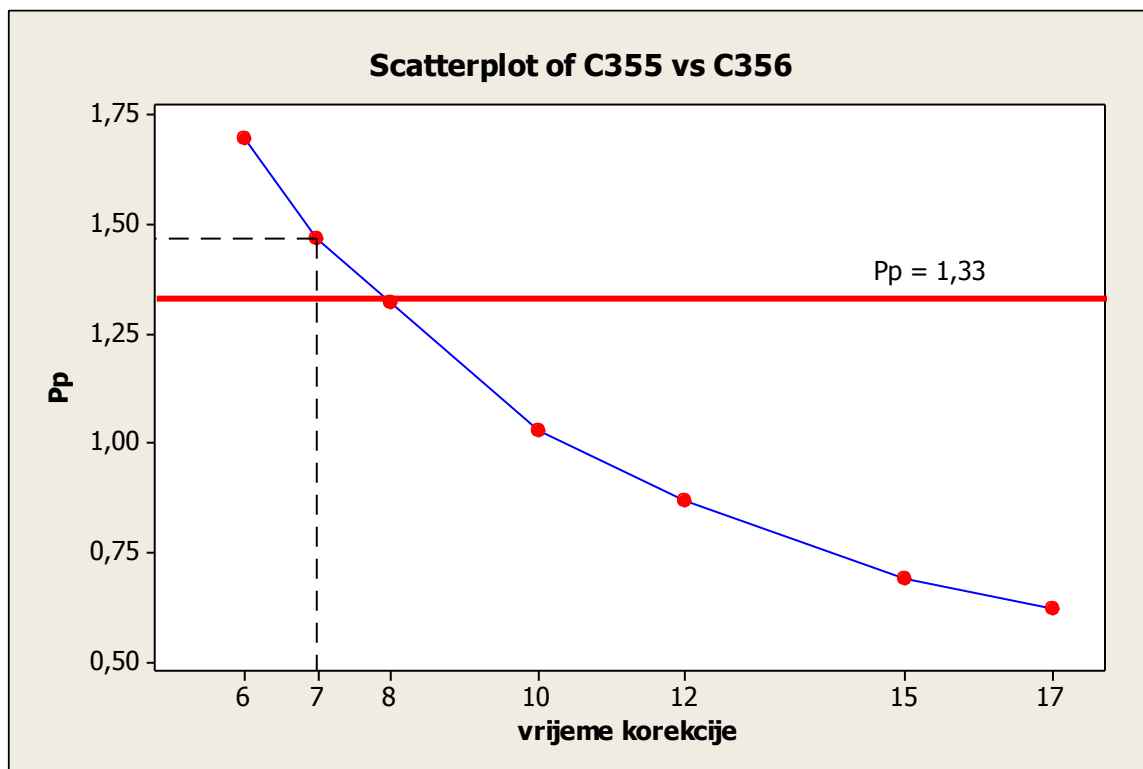
Slika 29. Ovisnost indeksa  $P_p$  za prvi regresijski pravacSlika 30. Ovisnost indeksa  $P_p$  za drugi regresijski pravac



Slika 31. Ovisnost indeksa  $P_p$  za treći regresijski pravac



Slika 32. Ovisnost indeksa  $P_p$  za četvrti regresijski pravac



**Slika 33. Ovisnost indeksa  $P_p$  za peti regresijski pravac**

Na temelju dobivenih grafičkih prikaza može se analizirati i zaključiti kako za pojedine regresijske pravce koji imaju približno isti nagib, kao što su regresijski pravci 1 i 4, te 2 i 5 zahtijevanu vrijednost preliminarnu sposobnost, odnosno indeksa  $P_p$  ostvaruju u gotovo istom vremenskom intervalu. Za svih pet regresijskih pravaca dobiveno je da korekciju treba vršiti kada podaci dosegnu otprilike polovicu tolerancijskog polja.

Također iz provedene analize može se zaključiti kako bi daljnjim skraćivanjem vremena korekcije iznos indeksa  $P_p$  težio vrijednosti indeksa  $C_p$ . U praksi bi to značilo provođenje korekcije nakon svakog uzorka čime bi se osiguralo normalno ponašanje procesa bez ikakvih izraženih trendova. Svakako da to u praksi nije primjenjivo iz više razloga, a najvažniji je taj da bi takav proces sa konstantnim korekcijama i izmjenama alata bio ekonomski neopravdan a time i neprofitabilan. Upravo se suprotno želi postići, a to je, korištenjem regresijske kontrolne karte i procjenjivanjem sposobnosti na provedni način, dobiti informaciju o potrebnom pravovremenom podešavanju odnosno korekciji procesa kako bi se zadržali postavljeni zahtjevi u pogledu granica specifikacije i zahtijevanog iznosa indeksa sposobnosti procesa, ali i produžiti životni vijek alata što je više moguće. U nastavku će se na stvarnom primjeru iz proizvodnje prikazati proces s trendom, te njegovo praćenje kontrolnom kartom i procjenjivanje sposobnosti.



## 5. PRIMJER IZ PRAKSE

### 5.1. Uvod

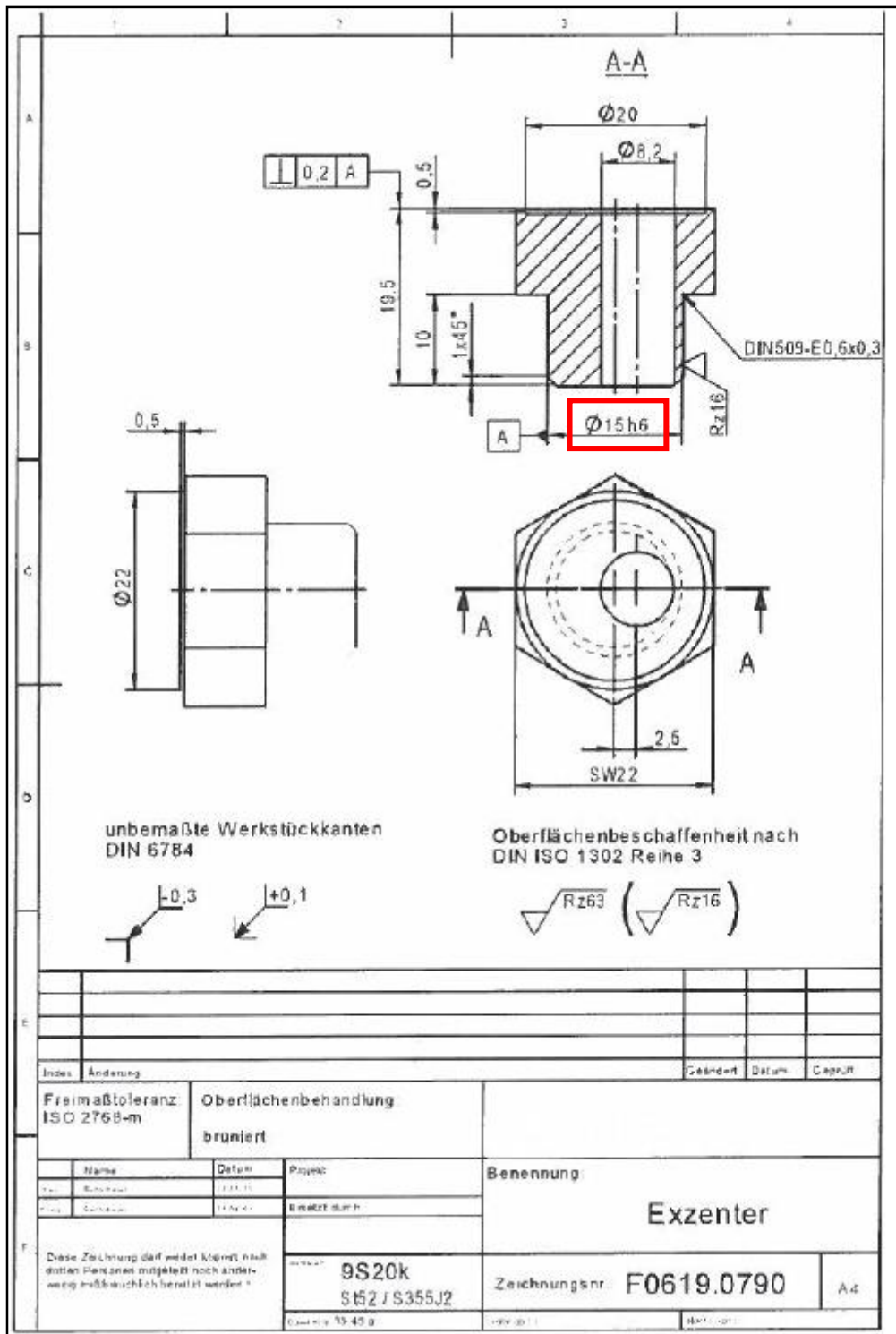
U stvarnosti, u mnogim proizvodnim poduzećima javljaju se procesi s određenim trendom. Najčešće je taj trend povezan s trošenjem alata koji je zapravo neizbježna pojava u mnogim procesima strojne obrade kao što su tokarenje, glodanje, bušenje i sl.

Za ovaj primjer odabrana je jedna pozicija iz proizvodnog programa poduzeća **Ferometal-prerada d.o.o.** iz Gornjeg Stupnika, koje je specijalizirano za CNC strojnu obradu metala. Radi se o poziciji koja se proizvodi u serijama od 4000 komada (slika 36.). Obrada se vrši na CNC tokarilici marke HAAS SL-10 sa automatskim dodavačem šipki koji omogućuje bržu i efikasniju proizvodnju (slika 34.).

Matetrijal sirovine je čelik St-52 (S355J2) koji priprada grubi konstrukcijskih čelika. Sirovina je u obliku šipke šesterokutnog presjeka, a za obradu se koriste rezne pločice od tvrdog metala. Za primjer je odabrana ova pozicija iz razloga što se radi o seriji s većim brojem komada, te proizvodnji koja je automatizirana pa je u tom slučaju omogućeno lakše praćenje utjecaja trošenja alata na promatranu dimenziju, te je također omogućeno uzimanje većeg broja uzoraka na temelju kojih će onda biti moguće donijeti zaključke o samom procesu. Dakle, temeljna ideja je pratiti zadanu toleriranu dimenziju ( $\varnothing 15 h6$ ), te vidjeti kakav utjecaj trošenje rezne pločice za fino tokarenje ima na promatranu dimenziju. Na sljedećim slikama prikazan je CNC tokarilica na kojoj se vršila obrada, nacrt odabrane pozicije, te gotov proizvod.



**Slika 34. CNC tokarilica HAAS SL 10 sa automatskim dodavačem šipki**



Slika 35. Tehnički nacrt pozicije



**Slika 36. Gotov proizvod**

Tehnološki postupak proizvodnje promatrane pozicije sastoji se prije svega od piljenja šesterokutnih šipki od 6 m na dijelove od 1,5 m, zatim od tokarenja šipki na CNC tokarilici, glodanja i bušenja provrta na CNC glodalici i u konačnici od obrade površine bruniranjem. U ovom primjeru pratit će se samo proces tokarenja (tolerirana dimenzija), te će se na temelju toga konstruirati odgovarajuća kontrolna karta i na kraju procijeniti sposobnost samog procesa tokarenja.

## 5.2. Praćenje procesa tokarenja kontrolnom kartom

Pošto se radi o nepoznatom procesu, za koji prije nije korištena nikakva kontrolna karta, odlučeno je da će se u početku kontrolirati svaka proizvedena jedinica kako bi se snimio sam proces i uvidjelo na koji način trošenje rezne oštrice ima utjecaja na promjenu tolerirane dimenzije. Prikupljeno je 260 podataka, pri čemu je nazivna mjera  $\varnothing 15$  sa tolerancijskim poljem  $-0.027 / 0$  mm. Prikupljeni podaci prikazani su na sljedećoj slici, a korišteni mjerni instrument bio je digitalni mikrometar.

Data Display							
tokarenje							
14,973	14,973	14,973	14,974	14,975	14,976	14,976	14,976
14,977	14,977	14,976	14,978	14,977	14,977	14,979	14,978
14,978	14,979	14,979	14,978	14,980	14,980	14,981	14,980
14,977	14,979	14,977	14,979	14,978	14,978	14,983	14,979
14,982	14,981	14,982	14,983	14,979	14,982	14,984	14,983
14,981	14,981	14,983	14,984	14,982	14,984	14,983	14,985
14,985	14,985	14,986	14,987	14,987	14,987	14,986	14,985
14,988	14,986	14,989	14,989	14,988	14,987	14,987	14,989
14,989	14,990	14,992	14,991	14,991	14,992	14,992	14,993
14,995	14,996	14,996	14,996	14,996	14,998	14,997	14,998
14,973	14,973	14,974	14,974	14,973	14,973	14,973	14,973
14,973	14,974	14,973	14,974	14,975	14,973	14,973	14,974
14,974	14,976	14,974	14,975	14,976	14,976	14,976	14,977
14,975	14,978	14,976	14,977	14,977	14,977	14,978	14,975
14,976	14,977	14,978	14,980	14,978	14,979	14,977	14,979
14,978	14,978	14,978	14,979	14,979	14,979	14,978	14,978
14,978	14,979	14,980	14,980	14,980	14,979	14,982	14,980
14,981	14,981	14,981	14,982	14,981	14,982	14,983	14,982
14,982	14,982	14,982	14,983	14,983	14,982	14,985	14,983
14,983	14,984	14,984	14,986	14,985	14,984	14,985	14,986
14,986	14,986	14,986	14,987	14,987	14,987	14,987	14,988
14,988	14,989	14,988	14,990	14,989	14,990	14,989	14,992
14,990	14,990	14,989	14,992	14,994	14,994	14,994	14,993
14,993	14,994	14,993	14,994	14,996	14,995	14,996	14,996
14,995	14,996	14,996	14,996	14,997	14,997	14,996	14,996
14,997	14,997	14,998	14,998	14,998	14,999	14,998	14,998
14,999	15,000	14,976	14,976	14,977	14,976	14,978	14,977
14,977	14,977	14,977	14,978	14,978	14,979	14,980	14,980
14,980	14,979	14,979	14,979	14,980	14,980	14,980	14,980
14,982	14,981	14,981	14,982	14,981	14,982	14,982	14,981
14,982	14,982	14,983	14,983	14,982	14,984	14,984	14,985
14,984	14,986	14,986	14,988	14,985	14,986	14,986	14,987
14,987	14,986	14,987	14,988				

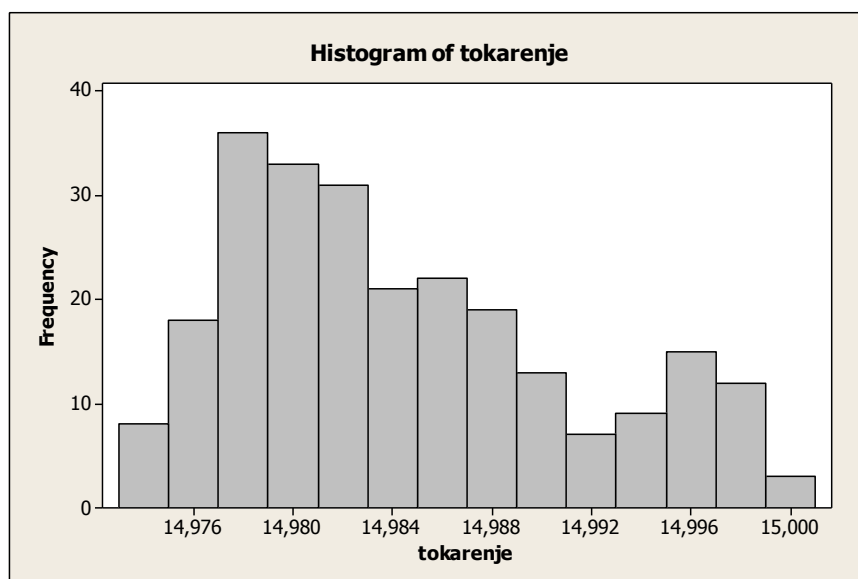


Slika 37. Prikupljeni podaci mjerenja



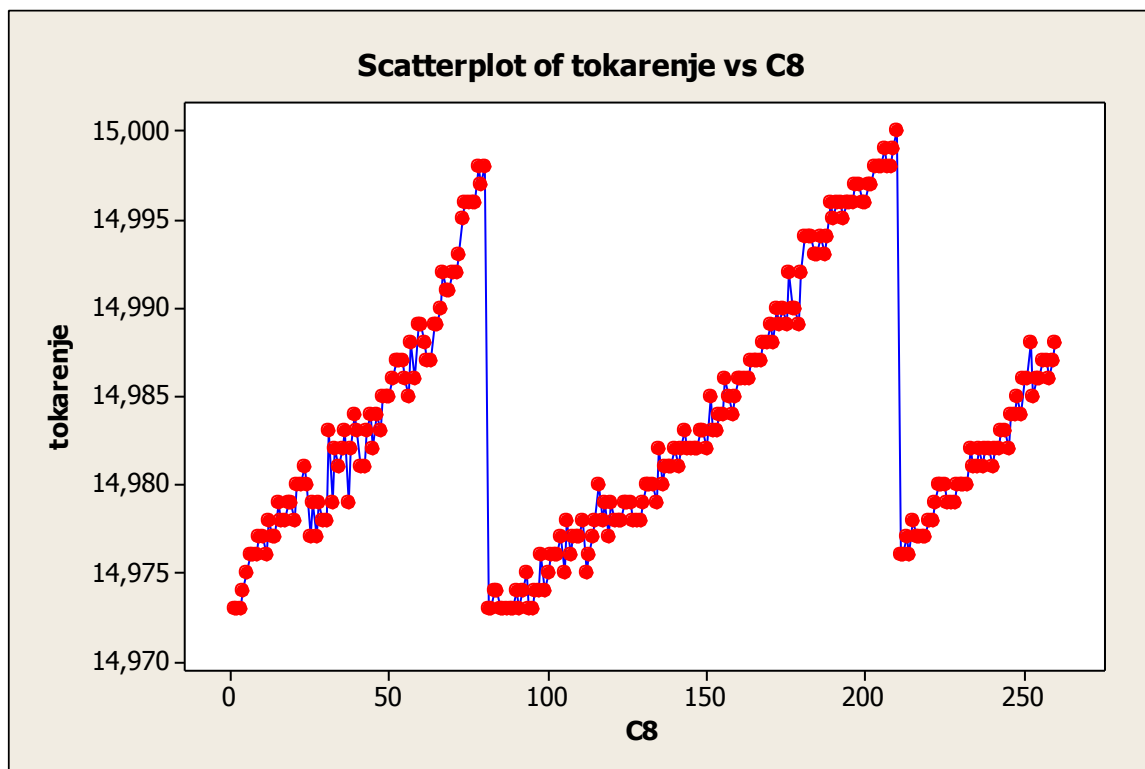
**Slika 38. Mjerni instrument digitalni mikrometar**

Kao i kod simuliranog primjera i ovdje je izmjerene podatke potrebno grafički prikazati kako bi se moglo bolje zaključiti kretanje procesa u vremenu. Za prikazivanje podataka koristi se histogram, ali i prikaz podataka u vremenu kako su prikupljeni kako bi se dobio uvid u stvarno kretanje procesa u vremenu.



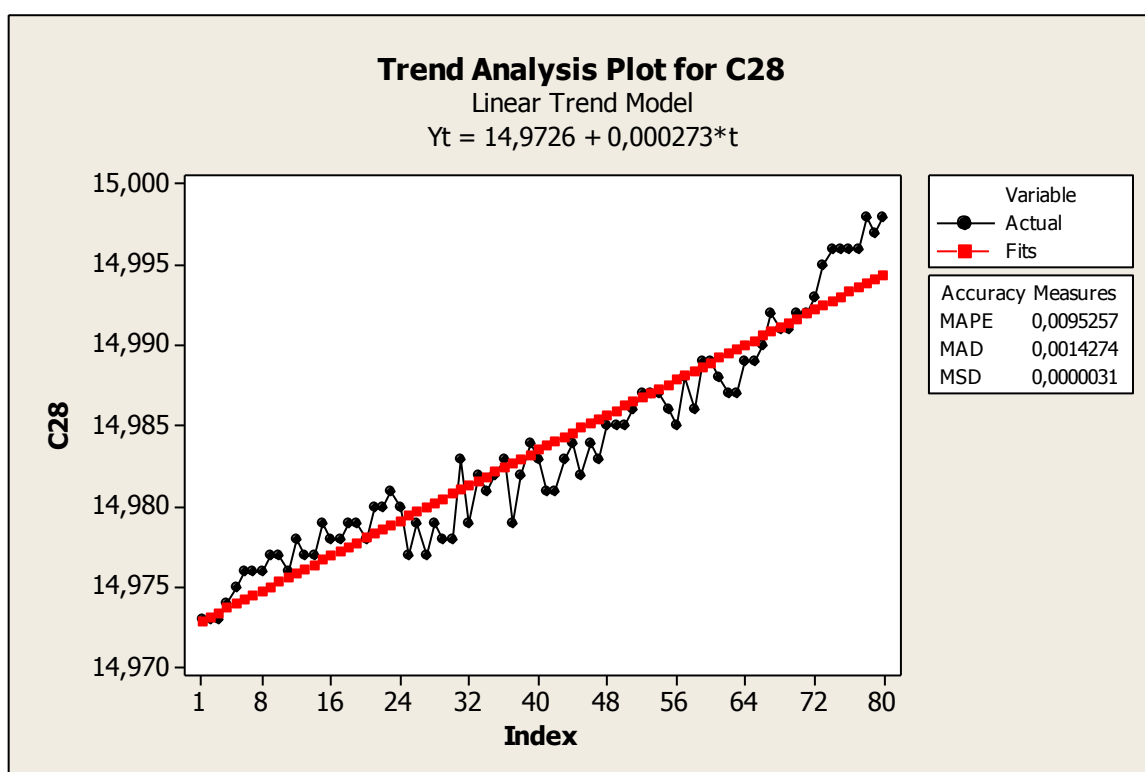
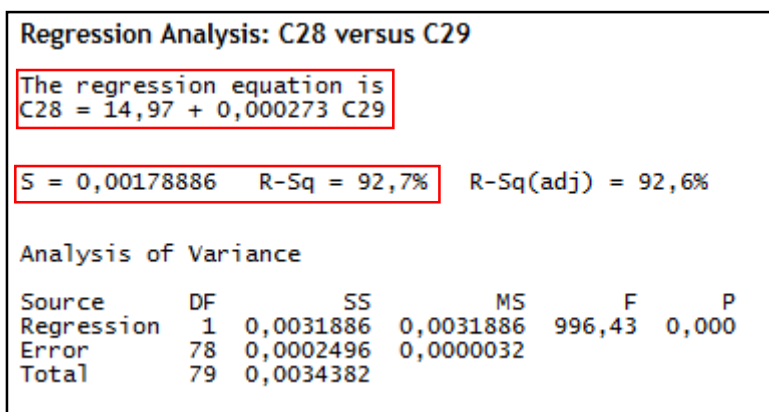
**Slika 39. Histogram podataka mjerenja**





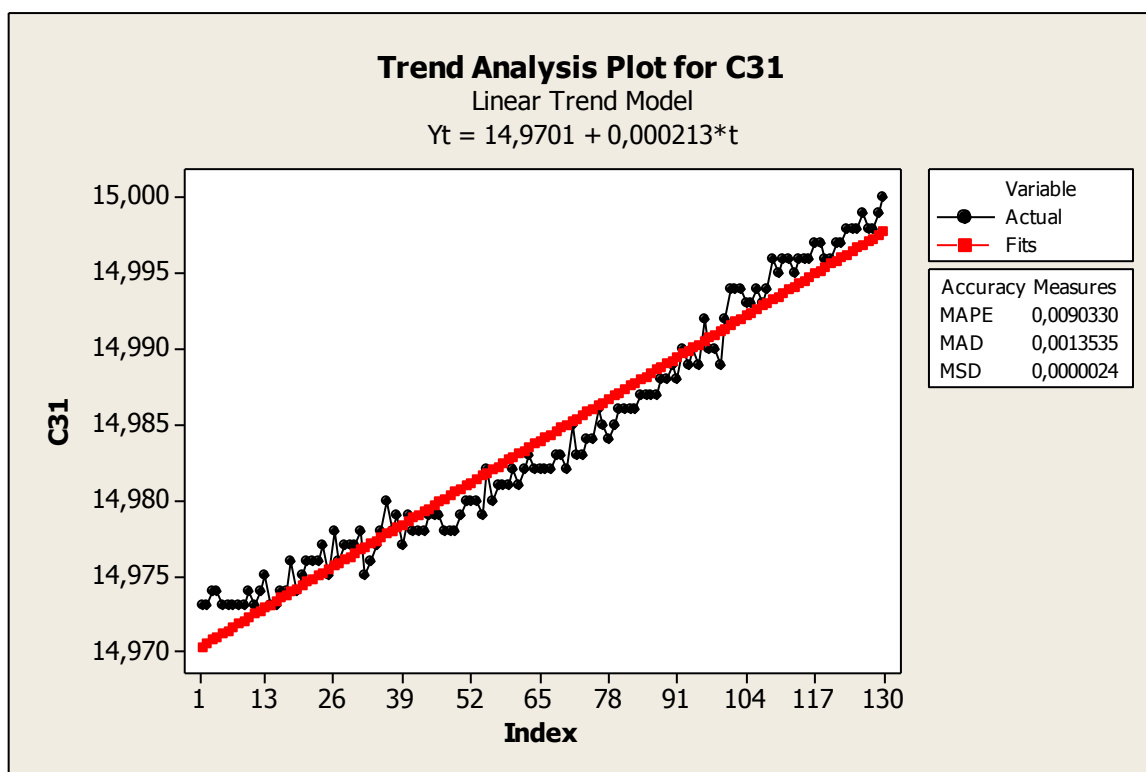
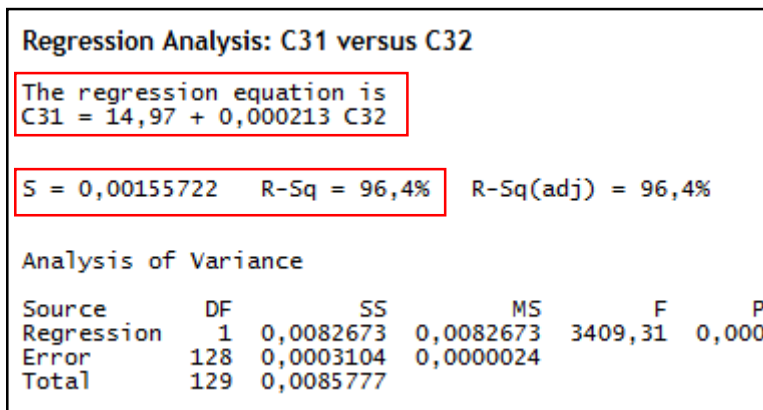
**Slika 40. Grafički prikaz izmjenjenih podataka u vremenu**

Iz histograma na slici 39. vidljivo je odmah da se proces ne odvija po normalnoj razdiobi, a glavni razlog tomu je upravo trošenje reznog alata tijekom procesa tokarenja. Naime tijekom tokarenja zbog površinskog trenja između obratka i reznog alata i velike topline koja se pritom oslobađa, oštrica reznog alata se vremenom troši (dimenzija joj se smanjuje) a posljedica tog trošenja je porast promatrane dimenzije (obrnuto bi bilo da se promatra proces unutarnjeg tokarenja tijekom kojeg bi se promatrana dimenzija, uslijed trošenja reznog alata smanjivala). Porast promatrane dimenzije se jako dobro vidi na slici 40. Zbog očekivanog porasta dimenzije na početku odvijanja procesa rezni alati se umjeravaju tako da se promatrana dimenzija namjesti što je moguće bliže donjoj granici tolerancijskog polja kako bi se što duže proces odvijao bez potrebe za korekcijama. Slika 40. prikazuje kako su se tijekom praćenja procesa dogodile dvije korekcije, te će se u nastavku za svaki dio podataka između korekcija, koji očigledno slijedi određeni trend napraviti regresijska analiza. Regresijskom analizom pokazat će se kakav je oblik povezanosti dviju varijabli, a u ovom slučaju to su promatrana dimenzija i vrijeme.

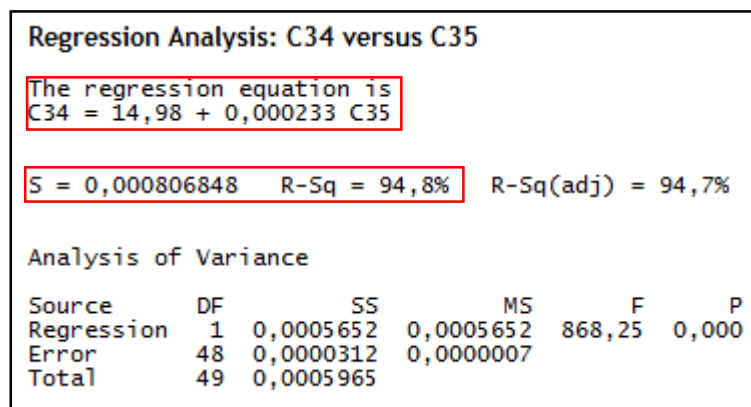


**Slika 41. Regresijska analiza prvog dijela podataka**

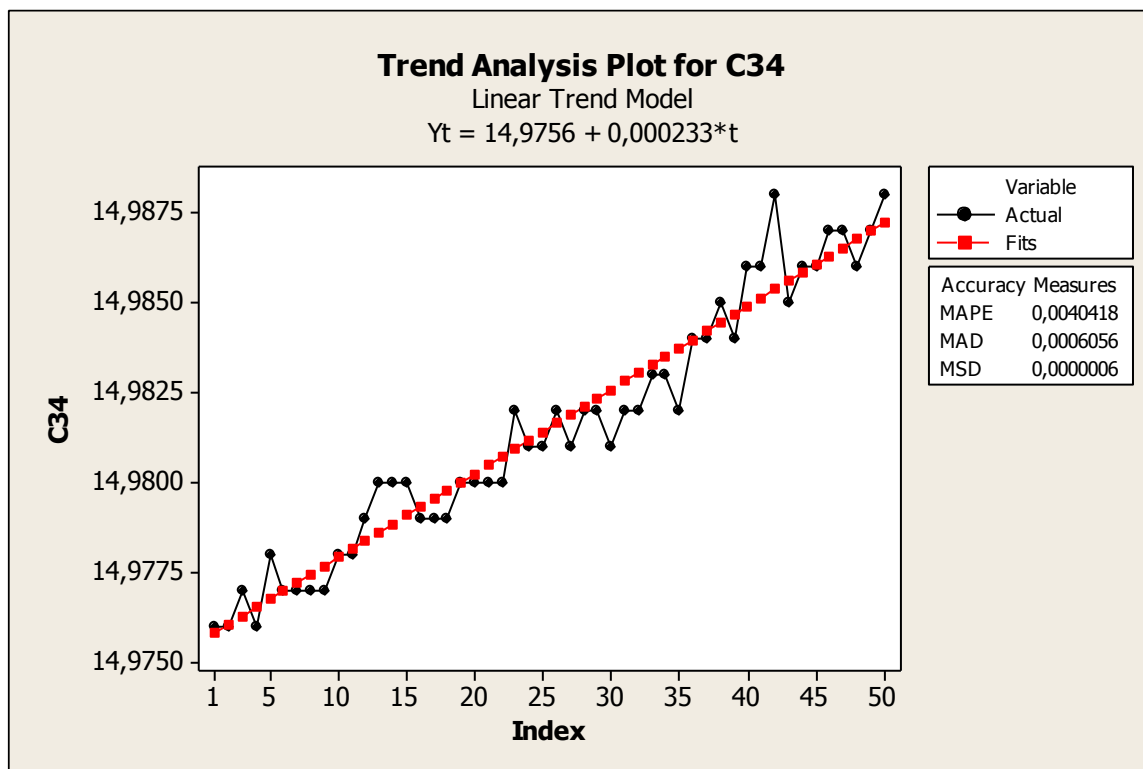
Sa slike 41. vidljivo je kako se izmjereni podaci mogu dobro aproksimirati danim regresijskim pravcem. Osim toga jakost te veze prikazana je visokim koeficijentom determinacije koji iznosi  $r^2 = 92,7\%$ , te se može zaključiti kako je odabrani model adekvatan ( F vrijednost je visoka i iznosi 996,43) i bez testiranja hipoteza o dobivenom regresijskom modelu (testiranje hipoteza prikazano je za simulirani primjer, gdje su vrijednosti ovih parametara bile također visoke kao i u ovom slučaju). Također bitna veličina koja se može iščitati iz ovih prikaza regresijskih analiza je i procjenjena standardna greška regresije koja govori koliko prosječno svaki podatak odstupa od izračunatog regresijskog pravca a koristit će se za konstrukciju regresijskih kontrolnih granica u nastavku.



Slika 42. Regresijska analiza drugog dijela podataka



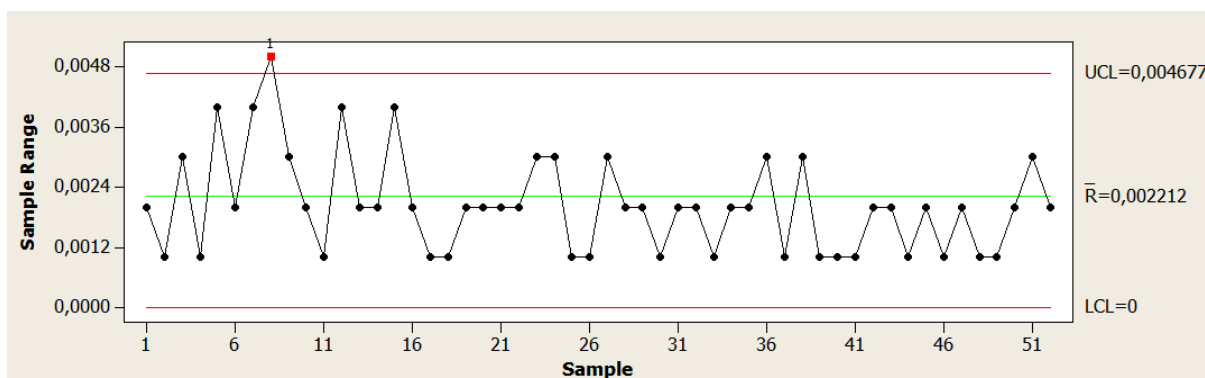
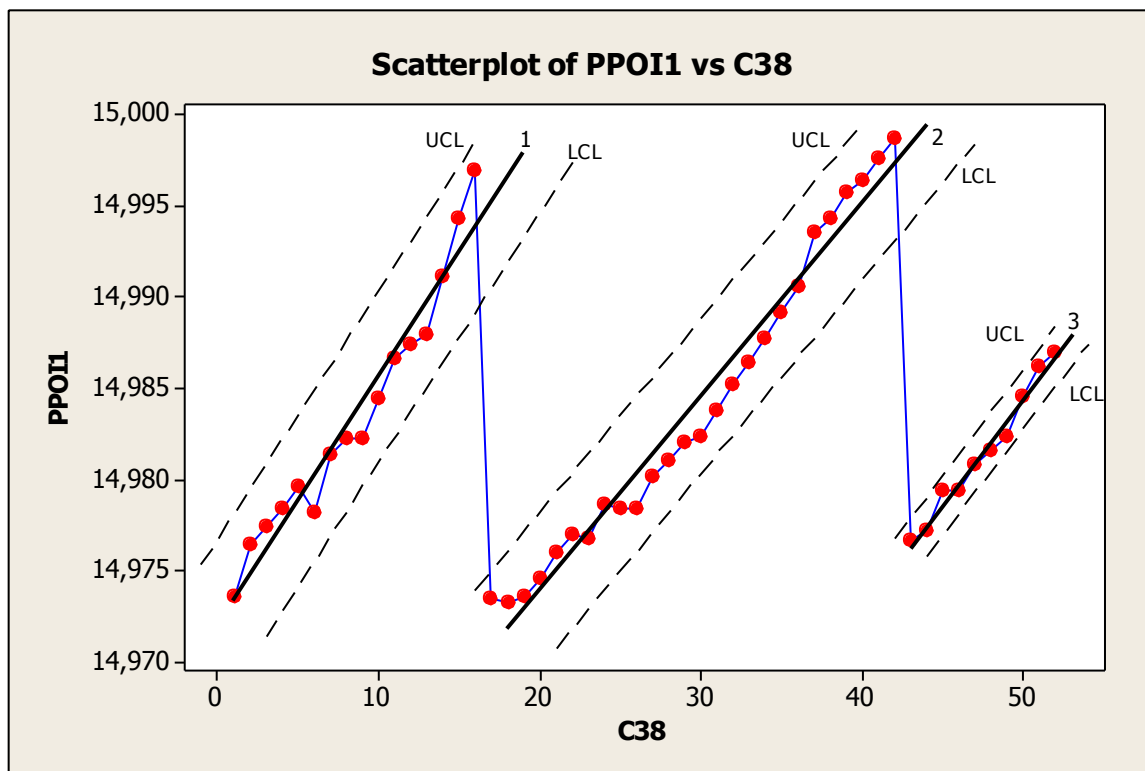




**Slika 43. Regresijska analiza trećeg dijela podataka**

Kako se iz provedenih regresijskih analiza bez problema može zaključiti kako podaci nedvojbeno slijede trend koji se može opisati pravcem, tako će za praćenje ovog procesa i odlučivanje o njegovoj stabilnosti biti potrebno konstruirati **regresijsku kontrolnu kartu**, koja je detaljnije objašnjena u poglavlju 3.2 na simuliranom primjeru. Na slici 44. prikazana je regresijska kontrolna karta za promatrani proces tokarenja. Kontrolna karta konstruirana je na temelju dobivenih podataka mjerenje pri čemu je veličina uzorka 5. U dijelu koji prati aritmetičke sredine uzoraka jasno je vidljiv trend koji se javlja, te korekcije koje je nužno vršiti kako nebi nastao škart tj. kako proces ne bi izašao iz granica tolerancija. U dijelu karte koji prati raspone uzoraka nema izraženih trendova zbog prije spomenutog razloga što se tom kartom prate varijacije unutar samog uzorka. S obzirom na dobivenu kartu može se zaključiti kako je proces tokarenja pod kontrolom i da varira isključivo pod utjecajem slučajnih uzroka. To se može zaključiti na temelju činjenice kako su svi podaci koji su prikazani u dijelu karte koji prati aritmetičke sredine uzoraka unutar regresijskih kontrolnih granica. Unutar karte raspona također je vidljivo kako u procesu nema nekih značajnih varijacija, pomaka ili trendova i bez obzira što je jedan podatak izvan kontrolnih granica u toj karti, može se sa sigurnošću tvrditi da je proces pod kontrolom. Također je moguće, pošto se radi o procesu o kojem nema prijašnjih saznanja a time i postojećih kontrolnih granica, podatak koji je izašao izvan

kontrolnih granica izbaciti i ponovno izračunati kontrolne granice bez njega, međutim u tom slučaju kontrolne granice neće se značajno promijeniti i proces će ostati u postojećem stanju statističke kontrole.



**Slika 44. Regresijska kontrolna karta procesa tokarenja**

Regresijska kontrolna karta bi u prvom redu trebala biti preventivni alat koji bi omogućavao vizualno praćenje procesa u cilju osiguranja od pojave značajnih varijacija u procesu, ali i zaštite od mogućeg škarta u procesima s očekivanim trendom podataka. A da bi to bio preventivni alat mora se konstruirati istovremeno kako se proces odvija. Dakle morali bi unaprijed biti poznati podaci kao što su regresijski pravac i regresijske kontrolne granice pa da se podaci kako nastaju unose u takvu kartu. U slučaju da se pojavi određena količina podataka

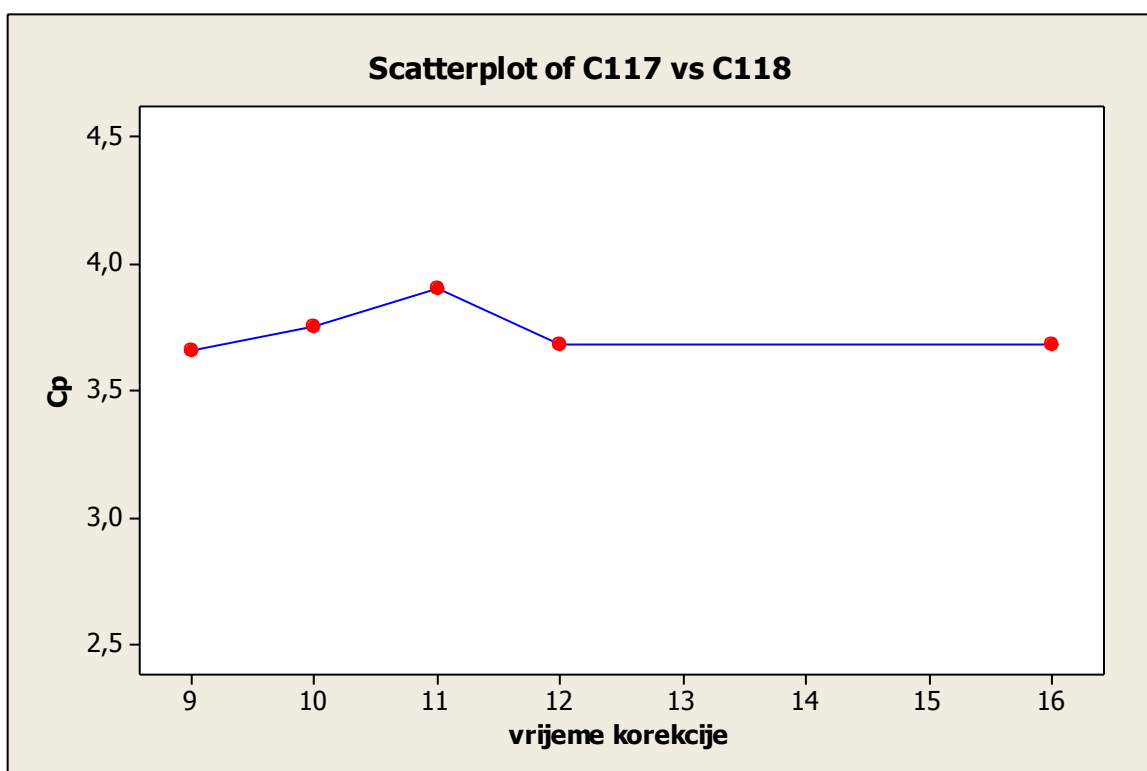
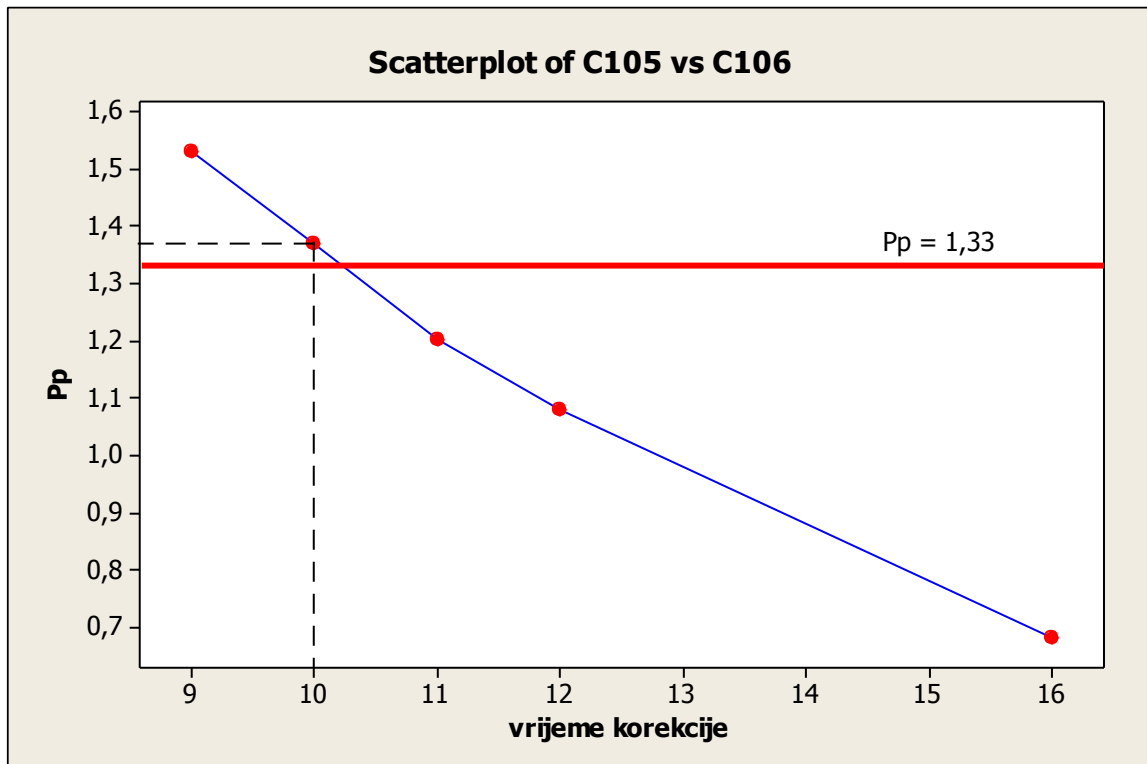
koji bi izlazili iz takvih granica, proces bi trebalo zaustaviti i tražiti uzroke takvih značajnih varijacija. U tom pogledu ovaj dio prikupljenih podataka iz procesa tokarenja obređenih u ovom primjeru može se smatrati kao snimanje nepoznatog procesa u cilju uspostavljanja regresijskog pravca i odgovarajućih mu regresijskih kontrolnih granica na temelju kojih bi se proces nadalje trebao pratiti i kontrolirati. Na slici 44. u dijelu kontrolne karte koja prati aritmetičke sredine uzoraka može se jako dobro vidjeti kako su pravci regresije nakon pojedinih korekcije zapravo jako slični pravci s približno istim koeficijentom nagiba i procjenjenom standardnom greškom regresije. Što znači da bi se oni zapravo mogli aproksimirati jednim regresijskim pravcem i kontrolnim granicama na temelju kojih bi se u budućnosti pratio proces. Drugim riječima proces trošenja alata ima približno periodički utjecaj na promjenu promatrane dimenzije (nakon dovoljno dugog snimanja procesa mogao bi se odrediti prosječan broj proizvedenih komada nakon kojih bi trebalo izvršiti korekciju, ako se ne bi dogodili neki značajni uzroci varijacije).

Dakle temeljem regresijske kontrolne karte zaključeno je kako je promatrani proces tokarenja u stanju statističke kontrole, te je moguće, i ima smisla pristupiti procjenjivanju sposobnosti procesa s ciljem dobivanja saznanja o mogućnostima poboljšavanja procesa i mogućnostima postizanja zahtijevane kvalitete proizvoda.

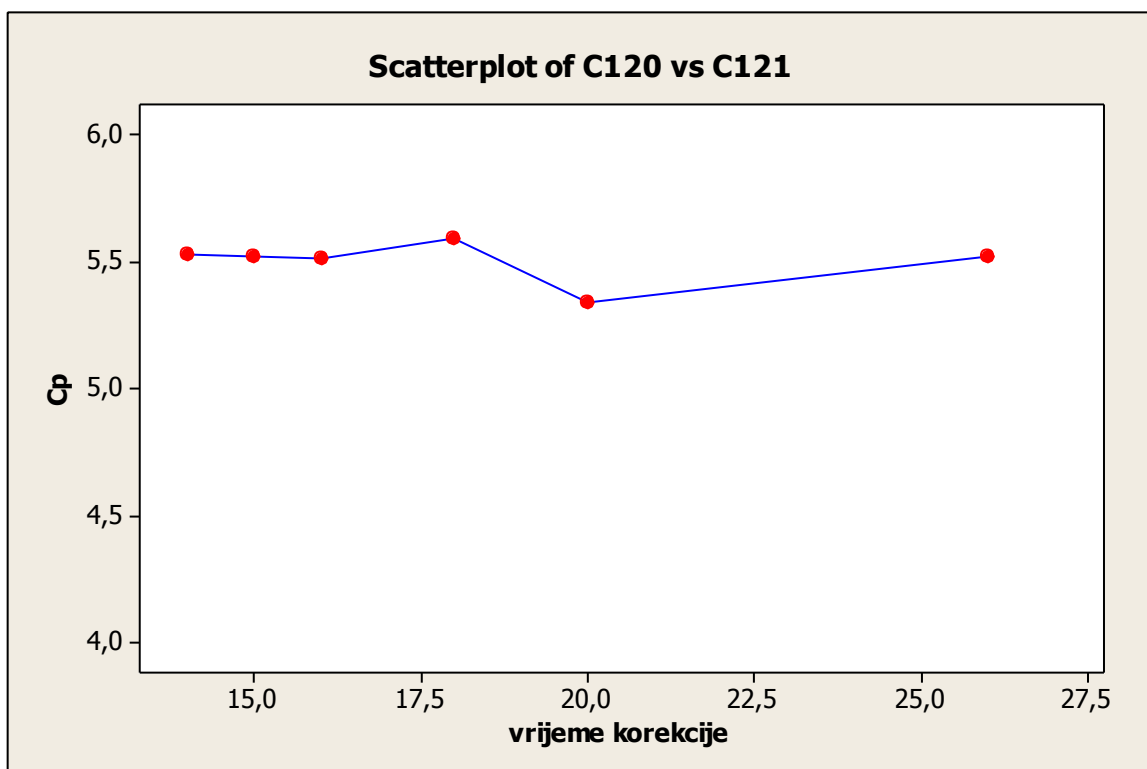
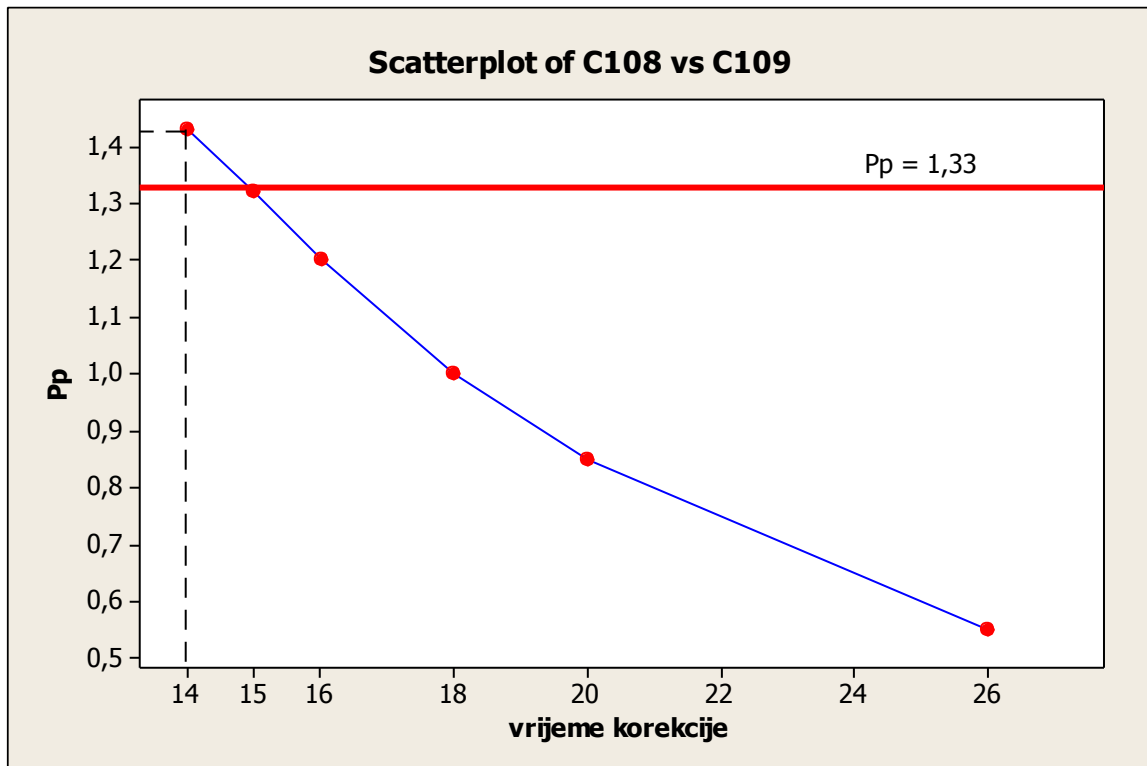
### 5.3. Procjenjivanje sposobnosti procesa tokarenja

Procjenjivanje sposobnosti ovog procesa tokarenja koji pokazuje ponašanje po linearnom pravcu vršit će se na način kao što je to objašnjeno u poglavlju 4.3 gdje se procjenjivala sposobnost simuliranog procesa s trendom podataka. Dakle temeljna ideja je pronaći ovisnost indeksa preliminarne (stvarne) sposobnosti procesa  $P_p$  o vremenu izvođenja korekcije. Kako vrijeme korekcije direktno ovisi o dobivenom regresijskom pravcu, prema izrazu (4.16) tako će se za svaki regresijski pravac mjerenih podataka trebati odrediti vremenska ovisnost indeksa  $P_p$ . Može se reći kako će se podaci koji slijede pojedini regresijski pravac zapravo promatrati kao jedan zasebni proces. Pretpostavljena zahtijevana razina indeksa preliminarne sposobnosti procesa  $P_p$  iznosi 1,33, dok je zahtjev za indeksom  $C_p$  nešto blaži i iznosi minimalno 1.

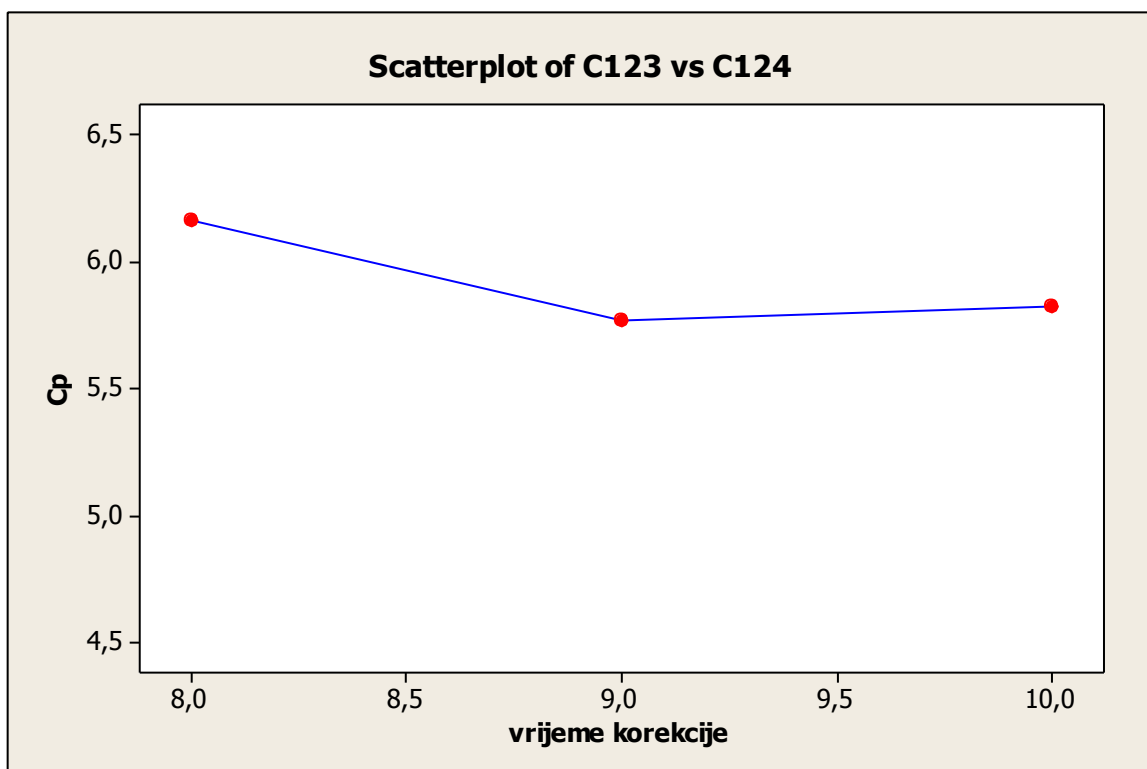
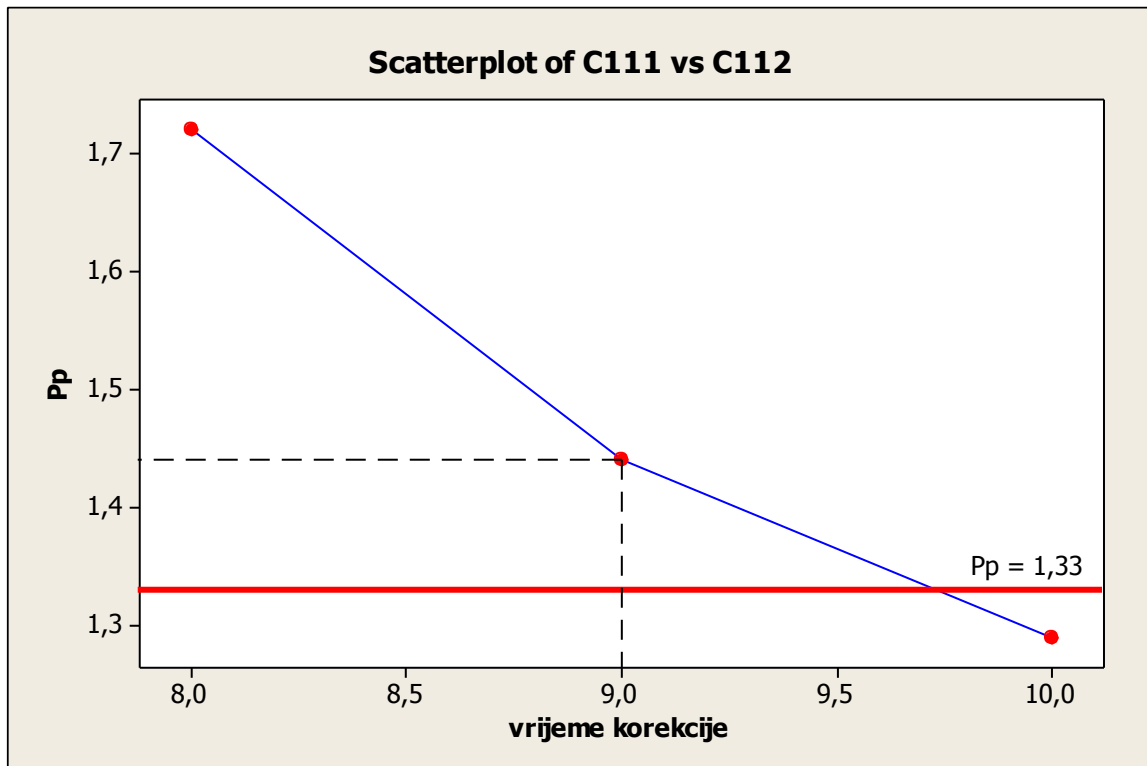
Cilj je pronaći najduži vremenski interval nakon kojeg se mora provesti korekcija procesa a da se pritom vrijednost indeksa preliminarne sposobnosti procesa  $P_p$  drži iznad ili minimalno na zahtijevanih 1,33. U nastavku će se indeksi sposobnosti procesa prikazati u funkciji vremena do korekcije za svaki od tri ustanovljena regresijska pravca.



Slika 45. Ovisnost indeksa  $P_p$  i  $C_p$  o vremenu korekcije za prvi regresijski pravac

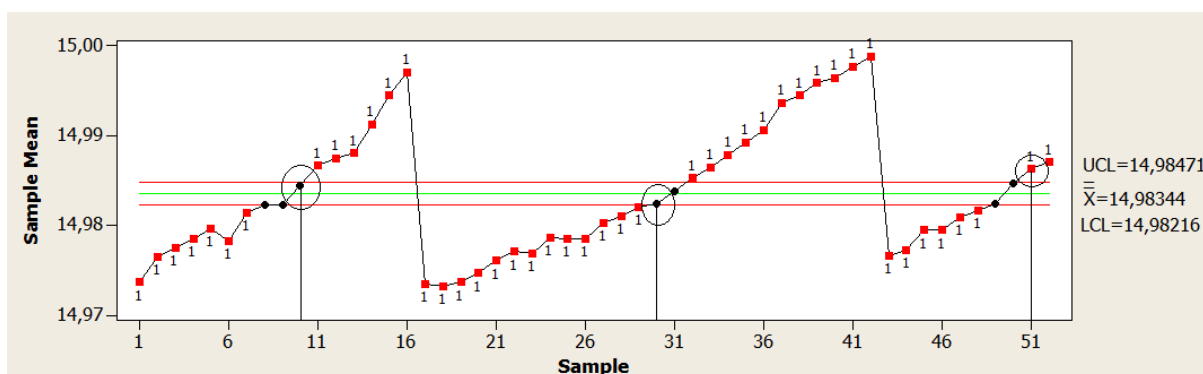


Slika 46. Ovisnost indeksa  $P_p$  i  $C_p$  o vremenu korekcije za drugi regresijski pravac



Slika 47. Ovisnost indeksa  $P_p$  i  $C_p$  o vremenu korekcije za treći regresijski pravac

Sa prethodne tri slike vidljivo je kako je za svaki regresijski pravac iznos indeksa  $C_p$  daleko veći od zahtijevane vrijednosti 1. Što u stvari znači da je proces potencijalno sposoban, tj. kada bi se otklonio sustavni pomak aritmetičkih sredina tada bi njegova sposobnost bila na toj razini. Međutim kao što je i prije rečeno to u ovom slučaju nije realno za očekivati. Sustavni pomak nastaje zbog neizbježne posljedice trošenja alata i on će uvijek postojati, ali je moguće ga otkloniti na takav način da se korekcije vrše u sve kraćim intervalima, i kao što je pokazano u simuliranom primjeru kada bi to vrijeme korekcije težilo praktički nuli odnosno kada bi se korekcije vršile nakon svakog uzorka tada bi se vrijednosti indeksa  $C_p$  i  $P_p$  izjednačile. Zbog toga u slučaju procesa s trendom vrijednost indeksa  $C_p$  neće biti od prevelike važnosti (bitno samo da bude veća od 1) nego će se u obzir uzimati vrijednost indeksa preliminarne (stvarne) sposobnosti procesa. Kao što je vidljivo sa prethodna tri grafa, taj indeks za vrijeme vršenih korekcija nije dostatan onom zahtijevanom iznosu, tj. može se zaključiti kako tada proces nije sposoban. Da bi se to promijenilo, treba skraćivati vrijeme korekcije do trenutka kada vrijednost indeksa  $P_p$  ne prijeđe graničnu vrijednost.



**Slika 48. Zahtijevana vremena korekcije**

Na slici 48. jasno su prikazani zahtijevani vremenski intervali (zaokruženi uzorci) u kojima je za pojedini regresijski pravac potrebno provesti korekciju kako bi se ostvarila zahtijevana razina sposobnosti procesa s trendom. Dakle i ovdje kao i u simuliranom primjeru dobiveni su rezultati koji upućuju na činjenicu kako bi se korekcije trebale vršiti kada proces dosegne otprilike polovicu tolerancijskog polja!

Nakon što je proveden postupak procjenjivanja sposobnosti procesa tokarenja kod kojeg postoji izraženi trend podataka u nastavku će se prikazati i primjena posebnih kontrolnih karata namijenjene ranom otkrivanju trendova podataka.

#### 5.4. Primjena CuSUM i EWMA kontrolnih karata za rano otkrivanje trendova

Kao što je već spomenuto, s vremenom su se od konvencionalnih kontrolnih karata razvile brojne vrste specijalnih karata namijenjene posebnim zadacima u kojima primjena konvencionalnih kontrolnih karata ne daje dovoljno dobre rezultate. Primjeri takvih kontrolnih karata su i kontrolna karta kumulativnih suma (engl. Cumulative Sum - CuSUM) te kontrolna karta eksponencijalno vaganih pokretnih prosjeka (engl. Exponentially Weighted Moving Average – EWMA).

Ove karte koriste se u situacijama kada su važna mala odstupanja od ciljane vrijednosti koje se u konvencionalnim kontrolnim kartama ne mogu detektirati.

##### CuSUM kontrolna karta [9]

Kao i sve kontrolne karte i ova se bavi varijacijom procesa. Ovom kartom se prate odstupanja pojedinačnih rezultata mjerenja ili aritmetičkih sredina uzoraka od ciljanih vrijednosti. Ciljana vrijednost je ona željena vrijednost na kojoj bi se proces trebao odvijati. Kumulativne sume su sume tih odstupanja tijekom vremena odvijanja procesa.

Dva su osnovna parametra koja definiraju ovu kontrolnu kartu, a to su:

- Dopušteno odstupanje od ciljane vrijednosti („allowable slack“),  $k$  – uobičajeno se uzima 0,5 do 1 standardna devijacija parametra koji se promatra kontrolnom kartom
- Akcijske granice,  $H$  – slične su kontrolnim granicama u konvencionalnim kartama. Uobičajeno se postavljaju na  $\pm 4$  standardne devijacije.

Nakon definiranja ovih parametara, CuSUM kontrolna karta prati odstupanje svakog podatka od ciljane vrijednosti i to se bilježi u karti. Postoje dvije kumulativne sume, jedna za pozitivna odstupanja  $SH(i)$ , a druga za negativna odstupanja od ciljane vrijednosti  $SL(i)$ . Ako jedna od ove dvije kumulativne sume prijeđe preko granice  $H = 4 \cdot \sigma$ , smatra se da je proces van kontrole i potrebna je reakcija.

Računaju se na sljedeći način:

$$SH_{(i)} = \text{Max}[0, SH_{(i-1)} + X_i - \text{ciljana vrijednost} - k] \quad (5.1)$$

$$SL_{(i)} = \text{Max}[0, SL_{(i-1)} + X_i - \text{ciljana vrijednost} + k] \quad (5.2)$$



Za procese koji su u stanju kontrole (stabilni) i centrirani na ciljanu vrijednost, kumulativne sume će u tom slučaju varirati pod utjecajem slučajnih varijacija oko vrijednosti 0. Ako aritmetička sredina procesa ima rastući trend i promijeni se na neku vrijednost  $\mu$ , ( $\mu > T$ ), tada će se taj rastući trend jako brzo uočiti u kumulativnoj sumi. Ova osjetljivost CuSUM kontrolne karte prikazat će se u nastavku na primjeru gdje će se usporediti s još jednom kartom, koja se također koristi u ranom otkrivanju trendova procesa, a to je EWMA kontrolna karta.

#### EWMA kontrolna karta [10]

EWMA karte su karte eksponencijalno vagnanih pokretnih prosjeka. Kao i CuSUM karte služe u svrhu reakcije na mala odstupanja kod procesa gdje je to neophodno. Može se koristiti za individualna mjerenja ali i za uzorke. Kod ove kontrolne karte se za svaki uzastopni uzorak ili rezultat mjerenja izračunava vrijednost EWMA (eksponencijalno ponderiranog pokretnog prosjeka). To izračunavanje uključuje dodjeljivanje težinskih faktora prošlim podacima, te stoga oni imaju određeni utjecaj na vrijednost EWMA ( $z_i$ ). Nakon toga dobivene vrijednosti se unose u kartu. Kako bi se izračunala pojedina vrijednost EWMA potrebno je odrediti težinski faktor  $\lambda$  koji određuje koliki udio će prošli podaci imati na izračunavanje EWMA vrijednosti. Preporučena vrijednost tog faktora je 0,2

$$EWMA = z_i = \lambda X_i + (1 - \lambda)z_{i-1}, \quad 0 < \lambda \leq 1, \quad z_0 = \mu_0 \quad (5.3)$$

Kontrolne granice ovise o broju o uzoraka ili pojedinih mjerenja, a računaju se na sljedeći način:

$$UCL_i = \mu_0 + 3\sigma \sqrt{\frac{\lambda}{(2 - \lambda)} [1 - (1 - \lambda)^{2i}]}$$

$$LCL_i = \mu_0 - 3\sigma \sqrt{\frac{\lambda}{(2 - \lambda)} [1 - (1 - \lambda)^{2i}]}$$
(5.4)

gdje je  $\sigma$  procjenjeno standardno odstupanje mjerenih podataka, a  $\mu_0$  ciljana vrijednost procesa. U nastavku će se na jednom primjeru pokazati primjena navedenih kontrolnih karata i njihova efikasnost u ranom otkrivanju trendova podataka u odnosu na konvencionalnu kontrolnu kartu.

**PRIMJER**

Trideset sljedećih podataka dobiveno je slučajnim generiranjem iz dvije različite normalne raspodjele kako slijedi:

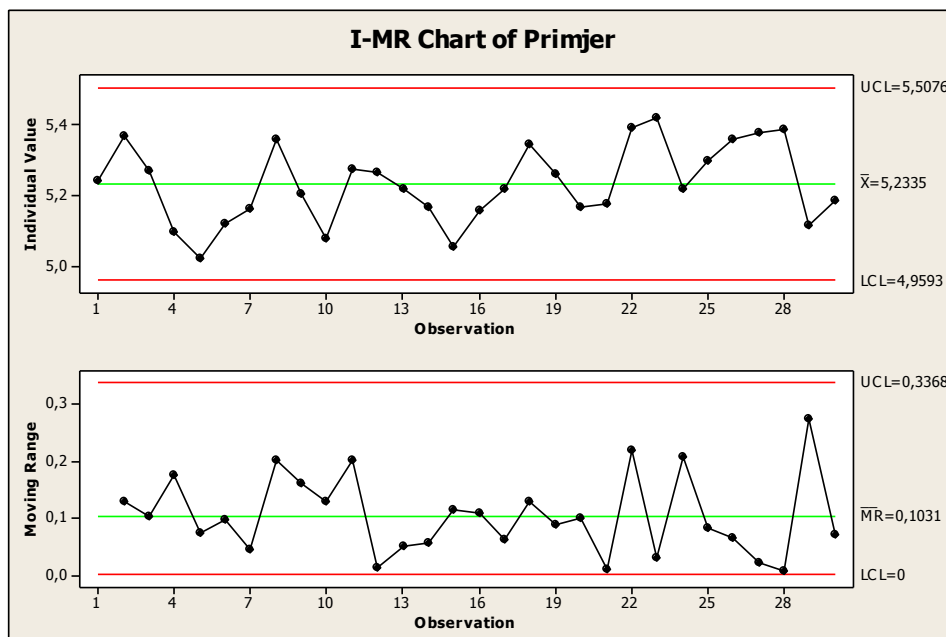
- prvih dvadeset su podaci koji slijede normalnu razdiobu s očekivanjem  $\mu = 5.2$  i standardnom devijacijom  $\sigma = 0,1$ ,
- zadnjih deset su podaci koji slijede normalnu razdiobu s očekivanjem  $\mu = 5.3$  i standardnom devijacijom  $\sigma = 0,1$ .

Uzorak	Mjerni podaci	Uzorak	Mjerni podaci
1	5,245	16	5,158
2	5,372	17	5,22
3	5,27	18	5,349
4	5,095	19	5,263
5	5,023	20	5,165
6	5,118	21	5,175
7	5,162	22	5,393
8	5,363	23	5,423
9	5,204	24	5,217
10	5,077	25	5,299
11	5,278	26	5,362
12	5,267	27	5,382
13	5,219	28	5,389
14	5,165	29	5,115
15	5,052	30	5,184

**Slika 49. Slučajno generirani podaci [7]**

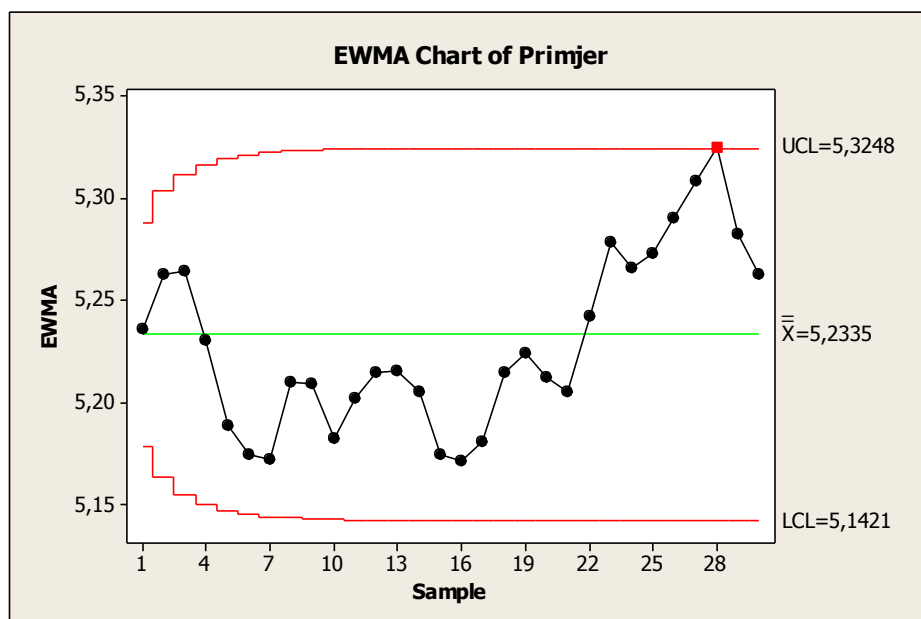
Vidljivo je kako je u primjeru namjerno posljednjih deset podataka generirano s drugačijom normalnom raspodjelom čije se očekivanje razlikuje od prve za  $1 \sigma$ . Cilj je utvrditi razlike između CuSUM i EWMA karta u odnosu na konvencionalnu kontrolnu kartu kada su u pitanju male promjene u odstupanjima mjerenih podataka.

Najprije će se dani podaci prikazati konvencionalnom kontrolnom kartom za individualna mjerenja I - MR, a zatim EWMA i CuSUM kontrolnom kartom.



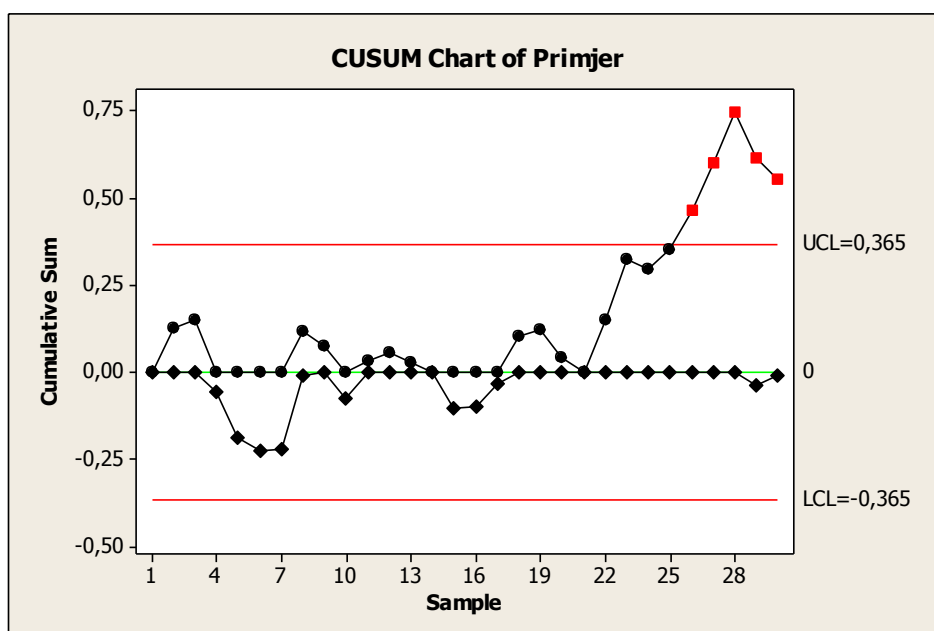
Slika 50. I – MR kontrolna karta

Na ovoj karti nije vidljiva nikakva značajna promjena odstupanja mjerenih podataka, te nema nijedne točke izvan kontrolnih granica niti su vidljivi trendovi. Također niti primjenom pravila o zonama kontrolnih karata o uzastopnim točkama ne može se zaključiti kako je proces nestabilan. Očigledno je da ova kontrolna karta nije dovoljno osjetljiva kako bi reagirala na male promjene odstupanja srednje vrijednosti od  $1 \sigma$ .



Slika 51. EWMA kontrolna karta

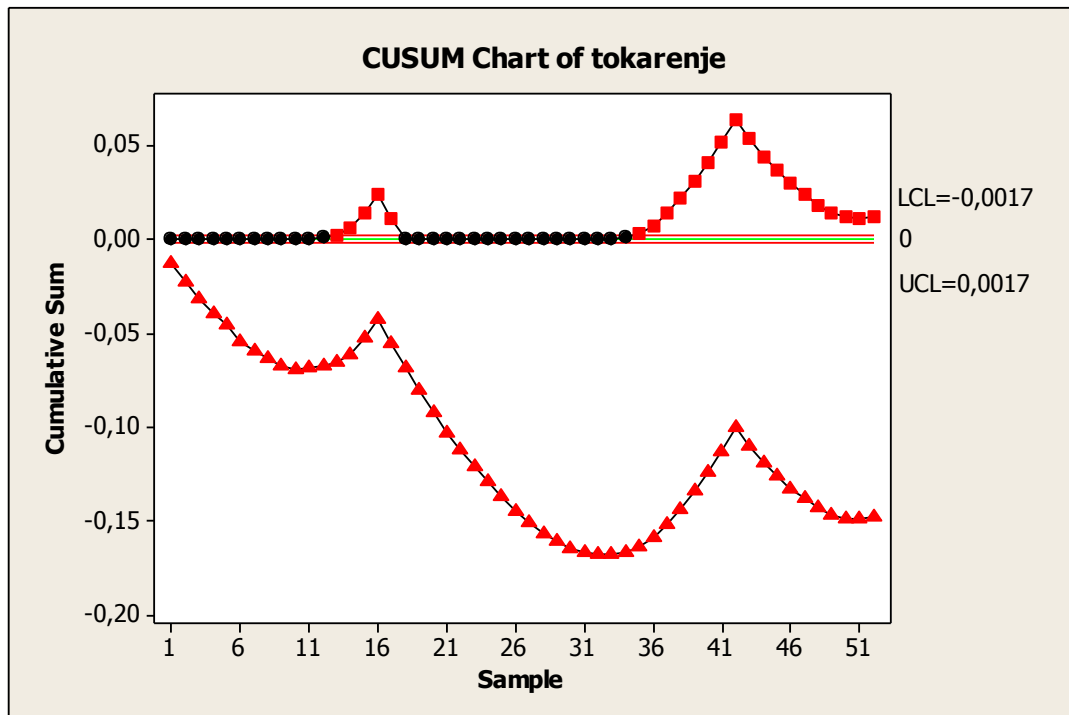
Na slici 51. prikazana je konstruirana EWMA karta za date generirane podatke. Razlikuje se po kontrolnim granicama koje ovise o broju podataka te se za svaki podatak (uzorak) računaju. S time da s povećanjem broja podataka kontrolne granice teže asipmtotskoj vrijednosti. Karta je konstruirana s vrijednošću težinskog faktora  $\lambda = 0,2$  i  $K = 3$ . Za razliku od prošle karte na ovoj se uočava očiti trend podataka nakon dvadesetog podatka te u izvjesnom trenutku dolazi do izlaska podataka izvan kontrolnih granica. Dakle, vidljiv je trend podataka, koji ukazuje na to da je potrebno zaustaviti proces i napraviti korekcije kako bi se otklonili značajni uzroci koji su doveli do ovog odstupanja. Za razliku od konvencionalne karte ovdje je demonstrirana veća osjetljivost na manja odstupanja podataka od ciljane vrijednosti. Sljedeća karta koja će se prikazati je karta kumulativnih suma.



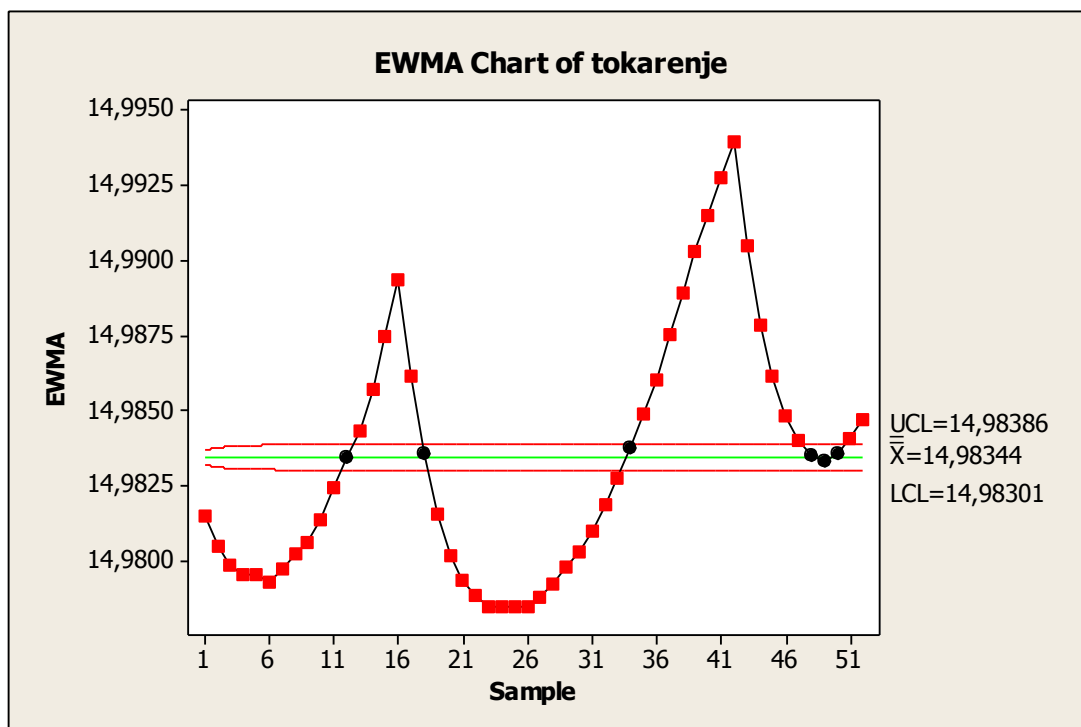
Slika 52. CuSUM kontrolna karta

Karta zorno prikazuje postojanje trenda podataka i to upravo nakon 20. podatka kada su generirani podaci s drugim parametrima normalne raspodjele. Očigledno je kako je ova karta daleko osjetljivija od konvencionalne kontrolne karte, ali i od prikazane EWMA karte. Osjetljivija je iz razloga što već na 26. podatku su prekoračene kontrolne granice i time ukazuje na nestabilnost procesa. Treba napomenuti kako trendovi i pravila zona koja vrijede i primjenjuju se kod konvencionalnih karata u svrhu povećanja osjetljivosti, ovdje se ne smiju koristiti. Kod karte kumulativnih suma, o stabilnosti procesa se može zaključivati tek kad podaci prekorače postavljene kontrolne granice.

Na sljedećim slikama prikazat će se primjena navedenih karti na provedenom primjeru tokarenja.



Slika 53. CuSUM kontrolna karta za proces tokarenja



Slika 54. EWMA kontrolna karta za proces tokarenja

Prethodne dvije slike pokazuju kako proces tokarenja nije stabilan tj. kako postoji značajna promjena u mjernim podacima, jer u obje karte mjerni podaci odmah na početku daleko nadmašuju postavljene kontrolne granice. No, međutim primjena ovih karata, koje su povećane osjetljivosti u slučaju procesa s izraženim trendom podataka (kao što je to slučaj procesa tokarenja, gdje je izrazito uočljiv porast mjerene dimenzije zbog trošenja alata) neće davati neke nove i pretjerano korisne podatke iz razloga što je trend podataka moguće otkriti i konvencionalnom kontrolnom kartom manje osjetljivosti. S druge strane ove karte će biti od velike koristi u slučajevima kao što je to prethodni primjer kada se konvencionalnom kontrolnom ne mogu uočiti male promjene, a one stvarno postoje.

Ovim primjerom željela se pokazati razlika u primjerni različitih karata za iste podatke. Pitanje koje se postavljalo na početku je da li će nam različite kontrolne karte dati iste informacije? Nakon provedene analize, očigledno je kako su dobivene informacije daleko različite. Konvencionalna karta za individualna mjerenja indicira kako je proces u stanju statističke kontrole te nema nikakvih indicija da se bilo šta promijenilo u procesu. S druge strane EWMA i CuSUM kontrolne karte indiciraju kako je u procesu došlo do značajnih varijacija, te da je potrebno zaustaviti proces i otkloniti ih. Dakle, temeljna prednost EWMA i karte kumulativnih suma je u tome što mnogo brže uočavaju odstupanja od ciljane vrijednosti. Međutim, s druge strane treba imati na umu kako ove kontrolne karte imaju različitu svrhu. Primarna svrha konvencionalne karte za individualna mjerenja je držati proces u stanju statističke kontrole i vidjeti utjecaj napora za poboljšavanje procesa. Svi procesi imaju vremenske promjene srednje vrijednosti. Ako male promjene u prosječnoj vrijednosti procesa nisu od kritičnog utjecaja tada će primjena konvencionalnih kontrolnih karata biti zadovoljavajuća. S druge strane, ako su zahtjevane granice specifikacija male, te nema puno mjesta za raspianje i greške, nego je bitno da se proces odvija na ciljanoj vrijednosti tada će od velike važnosti biti korištenje upravo EWMA i CuSUM kontrolnih karata.

Jedna od najvećih nedostataka tih karata je što se u njima gube podaci mjerenja, tj. one nisu „slika“ procesa te se ne može vidjeti izravno što se zapravo događa u procesu kao što je to moguće kod konvencionalnih kontrolnih karata.

## 6. ZAKLJUČAK

Zaključno se može konstatirati kako je poboljšanje kvalitete proizvoda ili usluge moguće postići unapređenjem samog procesa koji može biti učinkovitiji pomoću statističke kontrole kvalitete. Ista rabi statističku analizu u cilju praćenja, kontrole i neprekidnoga poboljšavanja procesa. Niska proizvodnost, proizvodi koji ne zadovoljavaju potrebe tržišta, oštećeni proizvodi i drugo rezultat su varijacija u procesu. Statistička kontrola procesa unapređuje proizvodni proces tako što smanjuje uzroke varijacije u njima. Kontrolne karte, kao inženjersko – matematičko sredstvo, predstavljaju veoma pogodan alat za ostvarenje ciljeva statističke kontrole kvalitete. Optimalnom primjenom kontrolnih karata osigurava se konstantno praćenje procesa, usmjeravanje ka željenom toku i poduzimanje eventualnih korektivnih mjera. Ovim radom željela se istaknuti i predstaviti regresijska kontrolna karta kao primjer kontrolne karte koja se koristi kod procesa s odgovarajućim trendom podataka. Trend mjernih podataka nastaje zbog poremećaja u proizvodnom procesu. Primjer takvog poremećaja je trošenje alata koje je nemoguće izbjeći, pa se ono u praksi nastoji produžiti što je više moguće a da pritom ne nastaju nesukladne jedinice. Prilagodбом konvencionalne kontrolne karte nastaje regresijska kontrolna karta, čija primjena u takvim procesima pridonosi povećanju trajnosti alata, smanjenju troškova povezanih sa učestalim korekcijama i promjenama alata. Proces s izraženim trendom podataka ne slijede normalnu razdiobu te je očigledno da će u izvjesnom trenutku izaći iz granica specifikacije. Kako se to nebi dogodilo rade se stalne korekcije kojima se proces „vraća“ u željeno područje unutar granica specifikacije. Postupak procjenjivanja sposobnosti takvih procesa nešto je drukčiji nego kod procesa koji slijede normalnu razdiobu. Zbog trenda podataka i sama sposobnost takvog procesa će se onda mijenjati u vremenu. Glavna ideja je pronaći optimalno vrijeme korekcije za koje bi indeks sposobnosti procesa imao zadovoljavajuću razinu. Ono što se može navesti i primijetiti kao nedostatak regresijske kontrolne karte je taj da ako povezanost između dvije varijable koje se žele promatrati nije dovoljno jaka, odnosno ako im je, kako se navodi u literaturi koeficijent determinacije  $r^2$  manji od 0.6. Tada zbog slabe povezanosti regresijska analiza i regresijski model neće biti adekvatni te se neće moći konstruirati adekvatna regresijska kontrolna karta. Bitno je istaknuti kako kontrolna karta mora predstavljati „sliku“ procesa koju treba inženjerski promatrati, utvrditi anomalije ako postoje, ocijeniti koje elemente (parametre) procesa treba pozornije pratiti i stalno tražiti i otklanjati uzroke statističkih pomaka procesa.

---

**LITERATURA**

---

- 
- [1] V. Mudornja: Kontrolna karta - slika procesa, stručni rad, FSB
- 
- [2] D. Horvat, A. Eđed, Đ. Banaj: Statistička kontrola procesa i proizvoda u poljoprivredi, stručni članak
- 
- [3] B. Žmuk: Povijesni pregled razvoja metoda statističke kontrole kvalitete, stručni rad
- 
- [4] B. Runje: Osnove osiguravanja kvalitete, materijali s predavanja, FSB
- 
- [5] E. Resić: Pregled statističkih i njima suglasnih upravljačkih procedura i tehnika kod analize kvalitete proizvodnih procesa, 4. Naučno-stručni skup sa međunarodnim učešćem "KVALITET 2005" Fojnica, BiH, 09.-12. studeni 2005.
- 
- [6] S. Senturk: Fuzzy Regression Control Chart Based on  $\alpha$ -cut Approximation, Statistic Department, Anadolu University, Turkey
- 
- [7] J. Gaylord May, J. M. Sulek: Regression control charts for limited process data
- 
- [8] B. J. Mandel: The Regression Control Chart, Post Office Department, Washington, D. C., Journal of Quality Tehnology, vol. 1, No. 1, January 1969.
- 
- [9] <http://www.itl.nist.gov/div898/handbook/pmc/section3/pmc323.htm> internet stranice „Engineering statistics handbook“
- 
- [10] <http://www.itl.nist.gov/div898/handbook/pmc/section3/pmc324.htm> internet stranice „Engineering statistic handbook“
-



## **PRILOZI**

I. CD-R disc