

# Numerička analiza krutosti gumenog zgloba rastojnika-prigušivača

---

Čakmak, Damjan

Master's thesis / Diplomski rad

2015

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:235:932942>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-08-19**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb](#)





SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# DIPLOMSKI RAD

**Damjan Čakmak**

**Zagreb, 2015.**



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

## DIPLOMSKI RAD

---

# Numerička analiza krutosti gumenog zgloba rastojnika-prigušivača

---

Mentor:  
**Prof. dr. sc. Hinko Wolf**

Student:  
**Damjan Čakmak**

Smjer:  
**Konstruktivski**  
Usmjerenje:  
**Konstruiranje i razvoj proizvoda**

Zagreb, 2015.

Iskreno se zahvaljujem svom mentoru prof. dr. sc. Hinku Wolfu na svom dosadašnjem uloženom trudu, vremenu i povjerenju, autoritetu i prijateljstvu, beskrajnim debatama i razgovorima o tematici vibracija te numerike koje su mi pružile potrebna znanja, želju i sigurnost za otvaranje novih vrata spoznaje pa tako i hvatanja u koštac sa složenijim nepoznatim inženjerskim građama i formulacijama.

Iznimno zahvaljujem prof. dr. sc. Janošu Kodvanju i dr. sc. Zvonimiru Tomičeviću na pomoći pri ekperimentalnom ispitivanju rastojnika-prigušivača.

Zahvalu dugujem i prof. dr. sc. Igoru Karšaju na vrlo korisnim savjetima glede područja mehanike kontinuuma te odabira konstitutivnih modela, kao i preporuke literature.

Zahvalu izražavam i doc. dr. sc. Krešimiru Vučkoviću na kritičkim debatama o kontaktnim problemima u numeričkom kontekstu, a doc. dr. sc. Milanu Kostelcu specijalno zahvaljujem na susretljivosti i razumijevanju.

Zahvaljujem također i prof. dr. sc. Jurici Soriću te prof. dr. sc. Zdenku Tonkoviću na svim prenešenim znanjima iz područja numeričke analize i nelinearnosti, koja su uvelike pridonjela kvaliteti i širini ovog rada.

Zahvaljujem i doc. dr. sc. Ivici Skozritu, dr. sc. Eduardu Mareniću te doc. dr. sc. Marku Jokiću na kvalitetnim razgovorima o tematici metode konačnih elemenata.

Zahvalu na trudu oko problematike nelinearnih proračuna pomoću metode konačnih elemenata izražavam i Lani Virag, mag. ing. te Borisu Jalušiću, mag. ing, kao i Ivanu Trapiću, mag. ing, te Filipu Zoričiću, univ. bacc. ing. mech. na komentarima i bodrenjima.

Zahvaljujem najsrdahnije svojoj najbližoj obitelji koja me sve ove godine podržavala i vjerovala u mene, ponajprije prerano preminuloj baki Dani, djedu Emilu te celestialnom prijatelju i poočimu Mariu. Majci Sanji hvala na lektorskim sugestijama i borovnicama.

Posebnu zahvalu izražavam svojoj voljenoj Hanni koja je uvijek i bez iznimke bila uz mene, a najviše kada je bilo najteže.

Zahvaljujem i na prijateljstvu te podršci svim kolegama s FSB-a, vi znate tko ste.

Sve to je rezultirao u konačnici izradom ovog rada, hvala vam svima!

Damjan Čakmak

Zagreb, srpanj 2015.



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE



Središnje povjerenstvo za završne i diplomske ispite  
Povjerenstvo za diplomske ispite studija strojarstva za smjerove:  
procesno-energetski, konstrukcijski, brodostrojarški i inženjersko modeliranje i računalne simulacije

Sveučilište u Zagrebu Fakultet strojarstva i brodogradnje	
Datum	Prilog
Klasa:	
Ur.broj:	

## DIPLOMSKI ZADATAK

Student: Damjan Čakmak

Mat. br.: 0035115794

Naslov rada na hrvatskom jeziku: **Numerička analiza krutosti gumenog zgloba rastojnika-prigušivača**

Naslov rada na engleskom jeziku: **Numerical Analysis of the Spacer Damper Rubber Joint Stiffness**

Opis zadatka:

Rastojnik-prigušivač dio je ovjesne opreme dalekovoda koja se koristi za održavanje propisanog razmaka između susjednih vodiča u snopu te za smanjenje intenziteta vjetrom uzrokovanih (aeolskih) vibracija vodiča. Smanjenje intenziteta aeolskih vibracija vodiča funkcija je kako mehaničkih karakteristika samog rastojnika-prigušivača (inercijskih, elastičnih i prigušnih), tako i njihovog razmještaja duž raspona. U ovom radu potrebno je numerički odrediti krutost gumenog zgloba razmatranog rastojnika-prigušivača.

Tijekom rada potrebno je:

1. Ukratko opisati pojavu aeolskih vibracija vodiča dalekovoda i osnovne tipove rastojnika-prigušivača.
2. Definirati tipove strukturne nelinearnosti (geometrijsku, materijalnu, nelinearnost uslijed kontakta), te za svaki tip nelinearnosti verificirati konačne elemente usporedbom numeričkih rješenja s referentnim rješenjima.
3. Opisati specifičnosti jednadžbi koje se koriste u analizi hiperelastičnih materijala (gume).
4. Na temelju dobivene tehničke dokumentacije izraditi trodimenzionalni nelinearni numerički model rastojnika-prigušivača (metoda konačnih elemenata).
5. Odrediti komponente krutosti gumenog zgloba rastojnika-prigušivača.

U radu navesti korištenu literaturu i eventualno dobivenu pomoć.

Zadatak zadan:

7. svibnja 2015.

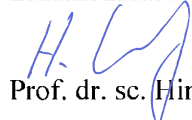
Rok predaje rada:

9. srpnja 2015.


Predviđeni datumi obrane:

15., 16. i 17. srpnja 2015.

Zadatak zadao:

  
Prof. dr. sc. Hinko Wolf

Predsjednica Povjerenstva:

  
Prof. dr. sc. Tanja Jurčević Lulić

## Sadržaj

<b>Sadržaj</b> .....	<b>I</b>
<b>Popis slika</b> .....	<b>III</b>
<b>Popis tablica</b> .....	<b>VII</b>
<b>Popis tehničke dokumentacije</b> .....	<b>VIII</b>
<b>Popis važnijih oznaka i skraćenica</b> .....	<b>IX</b>
<b>Sažetak</b> .....	<b>XV</b>
<b>Summary</b> .....	<b>XVII</b>
<b>1. Uvod</b> .....	<b>1</b>
1.1. Motivacija .....	3
1.2. Pregled literature .....	4
1.3. Vibracije .....	5
1.3.1. Aeolske vibracije .....	5
1.3.2. Rastojnik-prigušivač.....	6
<b>2. Opis problema</b> .....	<b>9</b>
2.1. Gumeni zglob .....	11
2.2. Pomaci ruku.....	13
2.3. Kontakt gumenog zgloba.....	13
<b>3. Metoda konačnih elemenata</b> .....	<b>14</b>
3.1. Opis primijenjenih konačnih elemenata.....	15
3.1.1. Prostorni gredni konačni element.....	15
3.1.2. Tetraedarski konačni element.....	16
3.1.3. Prizmatični konačni element .....	16
3.1.4. Ljuskasti konačni elementi .....	17
<b>4. Nelinearna analiza</b> .....	<b>18</b>
4.1. Inkrementalna metoda .....	20
4.2. Nelinearni konstitutivni model .....	23
4.2.1. Hiperelastični materijal.....	24
4.3. Kontakt .....	30
<b>5. Verifikacija primijenjenih konačnih elemenata</b> .....	<b>33</b>
5.1. Kontakt .....	33
5.1.1. Primjer I: analiza kontaktnog pritiska .....	34
5.1.1.1. Analitičko rješenje.....	35
5.1.1.2. Numeričko rješenje.....	36
5.1.1.3. Dodatak: verifikacija naprezanja kontaktnog modela .....	41

5.1.2.	Primjer II: Analiza savijanja uzorka bez zareza u tri točke .....	43
5.1.2.1.	Analitičko rješenje I.....	44
5.1.2.2.	Numeričko rješenje I.....	44
5.1.2.3.	Analitičko i numeričko rješenje II.....	46
5.2.	Geometrijska nelinearnost.....	50
5.2.1.	Primjer III: analiza zglobno oslonjene štapne konstrukcije.....	50
5.2.1.1.	Linearni pristup.....	51
5.2.1.2.	Nelinearni pristup, modeli A i B .....	52
5.2.1.2.1.	Kinematički model A (točni plan pomaka) .....	53
5.2.1.2.2.	Kinematički model B (približni plan pomaka) .....	53
5.2.1.3.	Nelinearni pristup, Newton-Raphsonova metoda .....	54
5.2.1.4.	Nelinearni pristup, Riks-Wempner-Wesselsova metoda.....	54
5.2.1.5.	Algoritam rješenja nelinearnog problema .....	56
5.2.1.6.	Nelinearni pristup, MKE .....	57
5.2.1.7.	Dodatak: dinamički model.....	59
5.3.	Materijalna nelinearnost.....	60
5.3.1.	Primjer IV: analiza jednoosno opterećenog gumenog uzorka .....	60
5.3.1.1.	Validacija prema Treloaru .....	72
5.3.1.1.1.	Validacija I, $e_{\max} = 600\%$ .....	73
5.3.1.1.2.	Validacija II, $e_{\max} = 100\%$ .....	73
5.3.1.2.	Višeosno stanje opterećenja.....	75
5.3.1.3.	Odnos tvrdoće $H_A$ i modula elastičnosti $E_0$ .....	77
5.3.2.	Primjer V: analiza Cookove membrane .....	78
5.3.3.	Primjer VI: kontaktna analiza gumene brtve .....	83
5.4.	Zaključak verifikacije.....	87
<b>6.</b>	<b>Kreiranje proračunskog modela.....</b>	<b>90</b>
<b>7.</b>	<b>Krutost gumenog zgloba .....</b>	<b>97</b>
<b>8.</b>	<b>Rezultati numeričke analize.....</b>	<b>106</b>
<b>9.</b>	<b>Zaključak .....</b>	<b>111</b>
<b>10.</b>	<b>Dodatak A: Tankostjeni cilindar s dijafragmama .....</b>	<b>114</b>
<b>11.</b>	<b>Dodatak B: Tankostjeni cilindar .....</b>	<b>117</b>
<b>12.</b>	<b>Dodatak C: Tankostjena usječena prstenasta ploča.....</b>	<b>119</b>
<b>13.</b>	<b>Dodatak D: Membrana s kružnim otvorom.....</b>	<b>122</b>
<b>14.</b>	<b>Dodatak E: Napuhavanje sfernog balona .....</b>	<b>123</b>
	<b>Prilozi.....</b>	<b>132</b>
	<b>Literatura.....</b>	<b>133</b>

## Popis slika

Slika 1.1. Odvajanje von Kármánovih vrtloga oko cilindra, <i>Abaqus</i> 6.12-1 CFD analiza, prikaz $v_{zr}$ .....	2
Slika 1.2. Rastojnik-prigušivač tip „ <i>Twin</i> “ montiran na snop vodiča dalekovoda .....	3
Slika 1.3. Shematski mehanizam nastanka aeolskih vibracija i djelovanje na rastojnik-prigušivač .....	5
Slika 1.4. Kármánovi vrtlozi na snop vodiča, <i>FloEFD</i> 12.1. CFD analiza, prikaz $\mu_{zr}$ .....	6
Slika 1.5. Rastojnik-prigušivač, prednji pogled, razmak ruku (vodiča) i položaji težišta .....	6
Slika 1.6. Rastojnici-prigušivači, prostorni prikaz modela .....	7
Slika 2.1. Uređaj za ispitivanje krutosti i prigušenja gumenog zgloba rastojnika prigušivača [55] .....	9
Slika 2.2. Petlja histereze gumenog zgloba rastojnika-prigušivača .....	9
Slika 2.3. Shema ispitivanja krutosti i prigušenja gumenog zgloba rastojnika-prigušivača, IEC 61854 .....	10
Slika 2.4. Rastojnik-prigušivač, tip „ <i>Twin</i> “: a) polovina modela, b) cijeli model .....	10
Slika 2.5. Rastojnik-prigušivač: a) presjek po ravnini simetrije $y-z$ , b) gumeni zglob .....	11
Slika 3.1. Osnovni prostorni gredni element .....	15
Slika 3.2. Tetraderski konačni element: a) osnovni, b) parabolični .....	16
Slika 3.3. Prizmatski elementi drugog reda: a) pentaedar, b) heksaedar .....	16
Slika 3.4. Četverokutni ljuskasti element: a) I. reda, b) II. reda .....	17
Slika 3.5. <i>Abaqus</i> ljuskasti elementi: a) CPS4, b) CPS4R .....	17
Slika 3.6. Trokutni ljuskasti element: a) I. reda, b) II. reda .....	17
Slika 4.1. Usporedba proračunskih modela: a) linearno, b) nelinearno, c) nelinearno, sila $F$ prati pomake, d) nelinearno, promjenjivi rubni uvjeti uslijed kontakta .....	18
Slika 4.2. Pomak: a) krivulja opterećenje-pomak, b) polje pomaka .....	20
Slika 4.3. Standardna Newton-Raphsonova (N-R) metoda .....	21
Slika 4.4. Kombinacija Newton-Raphson i inkrementalne metode .....	22
Slika 4.5. Statički vlačni pokus: a) shematski $\sigma$ - $\epsilon$ / $S$ - $e$ dijagram, b) odnos $A_0/A$ uzorka .....	24
Slika 4.6. Nelinearno elastični model, <i>sekantni</i> moduli elastičnosti $E_s$ .....	25
Slika 4.7. Funkcije gustoće energije deformiranja $U$ i $U^*$ .....	25
Slika 4.8. $S$ - $e$ dijagram hiperelastičnog materijala .....	26
Slika 4.9. ASTM D412 <i>dumb-bell</i> ( <i>dogbone</i> ) testni uzorak tip C, statički vlačni pokus .....	27
Slika 4.10. <i>Abaqus</i> simulacija, ASTM D412 testni uzorak C, 100 % deformacije $e$ .....	29
Slika 4.11. Kontakt krutog poklopca i gumene brtve uz velike deformacije, <i>Abaqus</i> 2D simulacija .....	32
Slika 5.1. Definicija kontakta: a) pogrešna, b) ispravna .....	33
Slika 5.2. Primjer I: kontakt cilindra i ploče (postolja) .....	34
Slika 5.3. Raspored kontaktnog pritiska $p_h$ : a) proračunski model, b) normalizirano rješenje .....	35
Slika 5.4. Polovina kontaktnog proračunskog modela: a) particije, b) referentna točka RP-1 .....	36
Slika 5.5. Proračunski model: a) rubni uvjeti, b) mreža, c) detalj mreže .....	37
Slika 5.6. Konvergencija ravninskog proračunskog modela .....	37
Slika 5.7. Ovisnosti kontaktnog pritiska $p_h$ o udaljenosti $x$ , $F = 35$ kN .....	38
Slika 5.8. Familija krivulja $F_{nk}$ : a) ovisnost $p_{h,max}$ i $a$ , b) ovisnost $p_{h,max}$ o $F_{nk}$ .....	39
Slika 5.9. Ovisnost maksimalnog kontaktnog pritiska $p_{h,max}$ o koordinati $z$ , C3D20R .....	40
Slika 5.10. a) ovisnost pritiska $p_h$ o koordinati $x$ , $F = 10$ N b) ovisnost $p_{h,max}$ o $F_{nk}$ .....	40
Slika 5.11. Iznosi komponenata naprezanja $\sigma$ i $\tau$ aluminijskog postolja u ovisnosti o koordinati $y$ .....	41



Slika 5.12. Usporedba normaliziranih rezultata naprezanja: analitički model, <i>HertzWin</i> i <i>Abaqus</i> .....	42
Slika 5.13. Primjer II: uzorak bez zareza za savijanje u tri točke: a) nacrt, b) prostorni pogled .....	43
Slika 5.14. Prostorni prikaz četvrtine proračunskog modela uzorka.....	43
Slika 5.15. <i>Abaqus</i> 6.9-3: a) particionirani proračunski model, b) III. mreža KE .....	45
Slika 5.16. Ukupni pomak $w_I$ <i>Abaqus</i> 6.9-3, C3D20R III. mreža.....	45
Slika 5.17. Konvergencija I. proračunskog modela.....	46
Slika 5.18. Pomak $w_{II}$ <i>Abaqus</i> 6.9-3, C3D20R III. mreža .....	47
Slika 5.19. Konvergencija II. proračunskog modela .....	48
Slika 5.20. Usporedba relativne greške $E_{rel}$ pomaka $w_I$ i $w_{II}$ .....	48
Slika 5.21. Usporedba konvergencije pomaka C3D20R KE.....	49
Slika 5.22. Primjer III, štapna konstrukcija opterećena silom.....	50
Slika 5.23. Ravnoteža sila: a) nedeformirani oblik, b) deformirani oblik .....	51
Slika 5.24. Proračunski model: a) pomak zgloba C, b) rubni uvjeti polovine modela.....	51
Slika 5.25. Linearni pomak $v$ : a) <i>Nastran</i> , b) <i>Abaqus</i> .....	52
Slika 5.26. Plan pomaka: a) točni, model A, b) približni, model B.....	53
Slika 5.27. Dijagram tôka: a) kinematički modeli A i B, b) Riks .....	56
Slika 5.28. Konvergencija modela A, B i N-R: a) N, b) $\delta$ .....	56
Slika 5.29. Nelinearni pomak $v$ : a) <i>Nastran</i> , b) <i>Abaqus</i> .....	57
Slika 5.30. Ovisnost sile opterećenja $F$ o pomaku zgloba C $\delta$ .....	57
Slika 5.31. Ovisnost sile opterećenja $F$ o pomaku zgloba C $\delta$ , Riks LPF = 5.....	58
Slika 5.32. Proporcionalno (Rayleigh–evo) prigušenje, $\alpha_R = 0,025$ rad/s, $\beta_R = 1 \cdot 10^{-5}$ s/rad .....	59
Slika 5.33. Dinamičko rješenje <i>snap-through</i> problema varirajući koeficijente $\alpha_R$ i $\beta_R$ .....	59
Slika 5.34. Primjer IV, statički jednoosno opterećen prizmatični uzorak.....	60
Slika 5.35. <i>Mathematica</i> interpolirani <i>S-e</i> dijagram zadanog materijala .....	62
Slika 5.36. Usporedba $\sigma$ , $S/\varepsilon$ , $e$ krivulja za M-R model.....	64
Slika 5.37. <i>S-e</i> krivulja, uključeno tlačno područje, M-R model.....	65
Slika 5.38. Proračunski model 1/8 uzorka: a) rubni uvjeti, b) mreža, 1 KE .....	65
Slika 5.39. Stvarna deformacija $\varepsilon$ : a) 1 štapni/gredni KE, b) 1 membranski KE, c) 1 prizmatični KE .....	66
Slika 5.40. Usporedba Mooney-Rivlin PM, $\sigma_z$ : a) <i>Abaqus</i> , b) <i>Marc</i> , c) <i>Cosmos</i> .....	67
Slika 5.41. Usporedba $\sigma$ , $S/\varepsilon$ , $e$ krivulja za N-H i M-R modele .....	68
Slika 5.42. Usporedba M-R modela I i II.....	69
Slika 5.43. <i>Mathematica</i> prilagodba krivulja: a) $S(M-R)_{II}$ , b) $E_0$ , $S(N-H)_{II}$ , $S(M-R)_{II}$ .....	69
Slika 5.44. Konačna usporedba: a) <i>Mathematica</i> prilagodba krivulja, b) Mooney-Rivlin I, II i III .....	70
Slika 5.45. Mooney-Rivlin <i>S-e</i> dijagram EPDM materijala gumenog zgloba .....	71
Slika 5.46. <i>S-e</i> dijagram hiperelastičnog materijala prema [189] .....	72
Slika 5.47. Validacija I, $e_{max} = 600$ %.....	73
Slika 5.48. Validacija II, $e_{max} = 100$ % .....	74
Slika 5.49. Validacija II, $e_{max} = 100$ %, neo-Hooke i Mooney-Rivlin .....	74
Slika 5.50. Statički pokus: a) jednoosni, b) dvoosni, c) ravninsko stanje deformacije.....	75
Slika 5.51. M-R <i>S-e</i> krivulje za jednoosno, dvoosno i ravninsko opterećenje uz $C_{10} = 1$ i $C_{01} = C_{10}/4$ .....	76
Slika 5.52. Usporedba empirijskih rješenja $E_0(H_A)$ .....	77
Slika 5.53. Primjer V, Cookova membrana .....	78

Slika 5.54. Polovina proračunskog modela: a) rubni uvjeti, b) referentna točka RP-1 .....	80
Slika 5.55. <i>S-e</i> krivulja N-H i M-R modela.....	80
Slika 5.56. III. <i>hex</i> mreža proračunskog modela: a) <i>Abaqus</i> , b) <i>Marc</i> / <i>Nastran</i> .....	81
Slika 5.57. Cookova membrana: a) konvergencija pomaka $v_{RP-1}$ , b) ovisnost pomaka $v_i$ o sili $F_i$ .....	81
Slika 5.58. Pomak $v$ III. <i>hex</i> mreže proračunskog modela: a) <i>Abaqus</i> , b) <i>Marc</i> .....	82
Slika 5.59. a) relativna greška $E_{rel}$ pomaka $v_{RP-1}$ , b) <i>Abaqus</i> nominalna deformacija $e_{max}$ (NE).....	82
Slika 5.60. Primjer VI, sklop gumene brtve .....	83
Slika 5.61. <i>S-e</i> krivulja N-H i M-R modela.....	84
Slika 5.62. Definiranje kontaktnih ploha. a) shematski prostorni prikaz, b) <i>Abaqus</i> .....	85
Slika 5.63. Proračunski model: a) particije, b) mreža KE <i>Abaqus</i> , c) mreža KE <i>Marc</i> .....	86
Slika 5.64. a) <i>Abaqus</i> dijagram $F_{r(RP-1)-w}$ , b) <i>Abaqus</i> nominalna deformacija $e_{max}$ (NE).....	86
Slika 5.65. Ukupni pomak: a) <i>Abaqus</i> , b) <i>Marc</i> .....	86
Slika 5.66. Stabilni i nestabilni M-R konstitutivni model, Treloar [189] prilagodba krivulje.....	89
Slika 6.1. Rastojnik-prigušivač, kontaktne površine i ravnina simetrije polovine modela.....	90
Slika 6.2. Referentna sila $F_i$ na referentnu točku RP-1 modela rastojnika-prigušivača.....	91
Slika 6.3. Novi globalni koordinatni sustav i komponente sila na gumeni zglob .....	91
Slika 6.4. Pojednostavnjeni numerički model rastojnika-prigušivača .....	91
Slika 6.5. CAI sučelje za konverziju formata iz <i>Catie V5</i> u <i>Abaqus 6.xx</i> .....	93
Slika 6.6. Pomak $w$ linearnih modela. a) Abq cij., b) Abq poj., c) Nas cij., d) Nas poj. ....	93
Slika 6.7. Konvergencija linearnih proračunskih modela: a) $w_{RP-1}$ , b) $f_{n1}$ .....	94
Slika 6.8. Modeli rastojnika-prigušivača i montažni preklap kontaktnih ploha .....	95
Slika 6.9. Kontaktne plohe pojednostavnjenog proračunskog modela.....	96
Slika 7.1. <i>S-e</i> dijagram EPDM materijala gumenog zgloba.....	97
Slika 7.2. Prilagodba krivulja EPDM materijala gumenog zgloba do $e_{max} = 1$ .....	97
Slika 7.3. Prilagodba krivulja EPDM materijala gumenog zgloba: N-H, M-R i Yeoh .....	99
Slika 7.4. <i>Hyperfit</i> prilagodba EPDM krivulja: a) Arruda-Boyce, b) Ogden .....	99
Slika 7.5. Usporedba modela: a) M-R/N-H, b) M-R/Yh, c) M-R/A-B, d) M-R/Og.....	100
Slika 7.6. Usporedba modela: a) N-H, b) M-R, c) Yh, d) A-B, e) Og, f) Og num/anlt.....	101
Slika 7.7. Osnovne <i>Abaqus hex</i> mreže proračunskog modela: a) cijev, b) gumeni zglob, c) tijelo.....	102
Slika 7.8. Osnovne <i>SimDesigner tet</i> mreže proračunskog modela: a) cijev, b) gumeni zglob, c) tijelo .....	102
Slika 7.9. Osnovna mreža proračunskog modela sklopa: a) <i>Abaqus</i> , b) <i>SimDesigner</i> .....	102
Slika 7.10. Konvergencija nelinearnih proračunskih modela rastojnika-prigušivača, $\mu_{g/Al} = 1,25$ .....	103
Slika 7.11. Pomak RP-1 $u_{PI}$ : a) <i>Abaqus</i> , b) <i>Marc</i> .....	103
Slika 7.12. Usporedba rezultata: a) <i>Abaqus</i> i <i>Marc</i> , b) eksperiment i simulacija .....	104
Slika 7.13. Sila $F_{ix}$ na proračunski model: a) shema, b) rezultati <i>Abaqus</i> i <i>Marc</i> .....	105
Slika 8.1. Sile na gumeni zglob rastojnika-prigušivača .....	106
Slika 8.2. Ukupni normalizirani maksimalni pomak $u_n$ , sila $F_x$ : a) <i>Abaqus</i> , b) <i>Marc</i> .....	107
Slika 8.3. Ukupni normalizirani maksimalni pomak $u_n$ , sila $F_y$ : a) <i>Abaqus</i> , b) <i>Marc</i> .....	107
Slika 8.4. Ukupni normalizirani maksimalni pomak $u_n$ , sila $F_z$ : a) <i>Abaqus</i> , b) <i>Marc</i> .....	107
Slika 8.5. Ukupni normalizirani maksimalni pomak $u_n$ , sila $M_x$ : a) <i>Abaqus</i> , b) <i>Marc</i> .....	107
Slika 8.6. Ukupni normalizirani maksimalni pomak $u_n$ , sila $M_y$ : a) <i>Abaqus</i> , b) <i>Marc</i> .....	107
Slika 8.7. Ukupni normalizirani maksimalni pomak $u_n$ , sila $M_z$ : a) <i>Abaqus</i> , b) <i>Marc</i> .....	107

Slika 8.8. Usporedba nelinearnih karakteristika gumenog zgloba: a) $c_{x,y,z}$ , b) $c_{tx,y,z}$ .....	108
Slika 8.9. Karakteristika opruge: progresivna, linearna, degresivna .....	108
Slika 8.10. Nelinearna krutost gumenog zgloba, $Abq$ : a) $F_{x,y,zmax} = 1$ kN, b) $M_{x,y,zmax} = 125$ kN · mm .....	109
Slika 8.11. Nelinearna krutost gumenog zgloba, $Abq$ : a) $F_{x,y,zmax} = 500$ N, b) $M_{x,y,zmax} = 50$ kN · mm .....	109
Slika 8.12. Koordinatni sustav komponenti krutosti gumenog zgloba .....	110
Slika 10.1. Dodatak A: Tankostjeni cilindar s dijafragmama .....	114
Slika 10.2. Neo-Hooke $S$ - $e$ dijagram materijala proračunskog modela cilindra .....	115
Slika 10.3. Konvergencija proračunskog modela tankostjenog cilindra s dijafragmama .....	115
Slika 10.4. Ovisnost inkrementalnih pomaka $v_A$ , $u_B$ o sili $F_{y(A)}$ .....	116
Slika 11.1. Dodatak B: Tankostjeni cilindar .....	117
Slika 11.2. Neo-Hooke $S$ - $e$ dijagram materijala proračunskog modela cilindra .....	118
Slika 11.3. Konvergencija proračunskog modela tankostjenog cilindra .....	118
Slika 11.4. Ovisnost inkrementalnog pomaka $v_A$ o sili $F_y$ .....	118
Slika 12.1. Dodatak C: tankostjena usječena prstenasta ploča .....	119
Slika 12.2. Neo-Hooke $S$ - $e$ dijagram materijala proračunskog modela prstenaste ploče .....	120
Slika 12.3. Konvergencija proračunskog modela tankostjene usječene prstenaste ploče .....	121
Slika 12.4. Ovisnost inkrementalnog pomaka $v_A$ o sili $F_y$ .....	121
Slika 13.1. Dodatak D: a) četvrtina proračunskog modela, b) mreža konačnih elemenata .....	122
Slika 13.2. Proračunski model: a) M-R $S$ - $e$ dijagram, b) konvergencija pomaka modela membrane .....	122
Slika 13.3. Ovisnost inkrementalnih pomaka $u_A$ , $u_B$ i $ v_C $ o linijskoj sili $q_x$ .....	122
Slika 14.1. Dodatak E: napuhavanje sfernog balona, osmina modela: a) prostorni pogled, b) nacrt .....	123
Slika 14.2. Konstitutivni modeli: a) Ogden, b) Ogden, N-H i M-R, dvoosno opterećenje .....	126
Slika 14.3. Analitičko rješenje ovisnosti inkrementalnog tlaka $p_i$ o omjeru istežanja $\lambda$ .....	126
Slika 14.4. Sučelje i prilagođena Ogden $N = 3$ krivulja programskog paketa <i>Hyperfit</i> .....	127
Slika 14.5. Usporedba analitičkog i numeričkih modela: <i>Abaqus</i> i <i>Marc</i> .....	128
Slika 14.6. <i>Abaqus</i> proračunski modeli: a) ljuskasti S4R, b) osnosimetrični CAX8RH .....	129
Slika 14.7. S4R deformirani oblik PM, $p_i \approx 3,16$ kPa, $e_n \approx 1,56$ : a) polovina modela, b) cijeli model .....	130
Slika 14.8. Usporedba rezultata: numerički i analitički modeli .....	130
Slika 14.9. 3D model: a) rubni uvjeti i periodičnost, b) mreža elemenata .....	131
Slika 14.10. Usporedba proračunskih modela: a) $S$ - $\lambda$ , b) $p_i$ - $\lambda$ .....	131
Slika 14.11. Nove prilagođene krivulje N-H i M-R modela: a) $S$ - $\lambda$ , b) $p_i$ - $\lambda$ .....	131

## Popis tablica

Tablica 5.1. Primjer I, zadani parametri .....	34
Tablica 5.2. Usporedba rješenja $p_{h,max}$ .....	38
Tablica 5.3. Usporedba ovisnosti $p_{h,max}$ o $F_{nk}$ , analitičko i numeričko rješenje.....	40
Tablica 5.4. Primjer II, zadani parametri.....	43
Tablica 5.5. Usporedba proračunskih modela: a) $w_I$ , b) $w_{II}$ .....	49
Tablica 5.6. Primjer III, zadani parametri.....	50
Tablica 5.7. Usporedba rezultata linearnih i nelinearnih modela.....	58
Tablica 5.8. Primjer IV, zadani parametri .....	60
Tablica 5.9. Verifikacijski parametri zadanog materijala .....	63
Tablica 5.10. Usporedba Mooney-Rivlin PM, naprezanje $\sigma$ .....	67
Tablica 5.11. Usporedba neo-Hooke i Mooney-Rivlin PM, $\sigma$ .....	68
Tablica 5.12. Usporedba rezultata M-R modela II.....	69
Tablica 5.13. Usporedba Mooney-Rivlin modela varirajući koeficijente $C_{ij}$ .....	71
Tablica 5.14. Primjer V, zadani parametri .....	78
Tablica 5.15. Usporedba rezultata pomaka $v_{RP-1}$ .....	82
Tablica 5.16. Primjer VI, zadani parametri.....	83
Tablica 6.1. Usporedba rezultata linearnih proračunskog modela .....	95
Tablica 7.1. Parametri EPDM materijala: a) Yeoh, b) Ogden, anlt (hyp), c) Ogden, abq.....	101
Tablica 7.2. Usporedba numeričkih max. pomaka $u_{Fx}$ i $v_{Fy}$ referentne točke RP-1 .....	105
Tablica 8.1. Usporedba <i>max</i> pomaka $u_{Fx}$ , $v_{Fy}$ i $w_{Fz}$ te zakreta $\varphi_{Mx}$ , $\varphi_{My}$ i $\varphi_{Mz}$ referentne točke RP-2.....	110
Tablica 10.1. Dodatak A, zadani parametri .....	114
Tablica 10.2. Dodatak A, rezultati ulaznih parametara.....	114
Tablica 10.3. Dodatak A: usporedba rezultata.....	116
Tablica 11.1. Dodatak B: zadani parametri I.....	117
Tablica 11.2. Dodatak B: zadani parametri II.....	117
Tablica 11.3. Dodatak B: rezultati prema parametrima I .....	117
Tablica 11.4. Dodatak B: rezultati prema parametrima II.....	117
Tablica 11.5. Dodatak B: usporedba rezultata.....	118
Tablica 12.1. Dodatak C, zadani parametri.....	119
Tablica 12.2. Dodatak C, rezultati ulaznih parametara.....	120
Tablica 12.3. Dodatak C, usporedba rezultata .....	121
Tablica 13.1. Dodatak D, zadani parametri .....	122
Tablica 14.1. Dodatak E, zadani parametri.....	123
Tablica 14.2. Dodatak E, rezultati ulaznih parametara: a) Mooney-Rivlin, b) neo-Hooke .....	123
Tablica 14.3. Referentni parametri Ogden konstitutivnog modela, $N = 3$ .....	124
Tablica 14.4. <i>Abaqus</i> parametri Ogden konstitutivnog modela, $N = 3$ .....	128

## Popis tehničke dokumentacije

---

1. 38\_77\_47\_A – tehnička dokumentacija rastojnika-prigušivača, model „*Twin*“
2. 38\_95\_40\_2 – tehnička dokumentacija rastojnika-prigušivača, model „*Triple*“
3. 38\_96\_40\_2 – tehnička dokumentacija rastojnika-prigušivača, model „*Quad*“
4. 38\_97\_40\_2 – tehnička dokumentacija rastojnika-prigušivača, model „*Diamond*“

## Popis važnijih oznaka i skraćenica

### Latinične oznake

Oznaka	Jedinica	Opis oznake
$A$	m	amplituda vibracija
$A_0$	$m^2$	početna površina poprečnog presjeka uzorka
$c$	N/m	radijalna/aksijalna konstanta krutosti opruge/zgloba
$C_{ij}$	Pa ( $N/m^2$ )	hiperelastična materijalna konstanta ( $i, j = 0 \dots N$ )
$c_t$	$N \cdot m/rad$	torzijska konstanta krutosti opruge/zgloba
$D_{ij}$	$Pa^{-1}$ ( $m^2/N$ )	hiperelastična obimna materijalna konstanta ( $D_1 = 2/K_0$ )
$E$	$J$ ( $N \cdot m$ )	energija
$e$	-	baza prirodnog logaritma ( $e \cong 2,718281$ )
$E_0$	Pa ( $N/m^2$ )	Youngov modul (početni modul elastičnosti uz $\varepsilon = 0$ )
$e_n$	%	inženjerska (nominalna) deformacija ( $e_n \equiv e = (l - l_0)/l_0$ )
$E_{rel}$	%	relativna greška ( $E_{rel} = (x_{NUM}/x_{REF, ANLT} - 1) \cdot 100$ )
<b>F</b>	-	gradijent deformiranja
$F(t)_{x, y, z}$	$N$ ( $kg \cdot m/s^2$ )	uzbudna (poremećajna) sila u smjerovima osi $x, y, z$
$\mathbf{F}_i$	$N$ ( $kg \cdot m/s^2$ )	vektor unutarnjih sila ( $i$ eng. <i>internal</i> )
$F_{jed}$	$N$ ( $kg \cdot m/s^2$ )	jedinična sila ( $F_{jed} = 1$ N)
$f_n$	Hz (1/s)	vlastita frekvencija
$F_{x, y, z}$	$N$ ( $kg \cdot m/s^2$ )	sila u smjerovima osi $x, y, z$
$\bar{F}(t)_{x, y, z}$	$N$ ( $kg \cdot m/s^2$ )	kompleksna uzbudna sila u smjerovima osi $x, y, z$
$\hat{F}_{x, y, z}$	$N$ ( $kg \cdot m/s^2$ )	amplituda uzbudne sile u smjerovima osi $x, y, z$
$g$	$m/s^2$	akceleracija Zemljine sile teže ( $g \cong 9,80665$ $m/s^2$ )
$G_0$	Pa ( $N/m^2$ )	modul smicanja ( $G_0 \equiv \mu_0 = E_0/(2 \cdot (1 + \nu)) = N \cdot k_B \cdot T$ )
$H_A$	- (ShA)	tvrdoća prema Shoreu, tip A
$h_{KE}$	m	veličina (srednja) konačnog elementa
$i$	-	imaginarna jedinica ( $i^2 = -1$ )
$I_{1,2}$	-	invarijanta tenzora deformacije
$I_p$	$m^4$	polarni moment tromosti poprečnog presjeka
$I_{x, y, z}$	$m^4$	aksijalni moment tromosti popr. presjeka oko osi $x, y, z$
<b>J</b>	-	Jacobijeva matrica (Jakobijana $J = \det[\mathbf{F}]$ )
$J_{x, y, z}$	$kg \cdot m^2$	dinamički moment inercije oko osi $x, y, z$
$k$	$N \cdot s/m$	koeficijent viskoznog prigušenja
$K_0$	Pa ( $N/m^2$ )	volumenski modul elastičnosti (modul stlačivosti)
$k_B$	J/K ( $N \cdot m/K$ )	Boltzmannova konstanta ( $k_B \approx 1,38 \cdot 10^{-23}$ J/K)
$K_{din}$	-	omjer dinamičke i statičke krutosti ( $K_{din} = c_{din}/c_{st} \geq 1$ )
$k_i$	-	faktor uvećanja/smanjenja prikaza
$k_{kr}$	$N \cdot s/m$	kritično prigušenje

$k_s$	-	faktor smicanja (Timoshenkov/Cowperov)
$\mathbf{K}_T, \mathbf{k}_T$	N/m	globalna, lokalna tangencijalna matrica krutosti štapa
$L_n, l_n, s$	m	duljina, put
$m$	kg	masa
$N$	$1/m^3$	broj polimernih lanaca po jedinici volumena
$n_{KE}$	-	broj konačnih elemenata proračunskog modela
$\varnothing d$	m	promjer kružnog poprečnog presjeka
$p_0$	Pa ( $N/m^2$ )	pritisak (opterećenje) proračunskog modela ( $p_0 \equiv \sigma$ )
$P_C(A)$	W (J/s)	snaga koju vodič disipira uslijed vlastitog prigušenja
$P_D(A)$	W (J/s)	snaga koju prigušivač disipira (apsorbira)
$P_W(A)$	W (J/s)	snaga koju uzbudne aerodinamičke sile unose u sustav
$r$	m	polarna koordinata
$R^2$	-	faktor determinacije ( $0 < R^2 < 1$ )
$R_e$	Pa ( $N/m^2$ )	stvarna granica tečenja (uz $\varepsilon_{pl} = 0,2 \%$ , $R_e \equiv R_{p0,2}$ )
$\mathbf{R}_e$	N ( $kg \cdot m/s^2$ )	vektor vanjskog opterećenja ( $e$ eng. <i>external</i> )
$\mathbf{R}_i$	N ( $kg \cdot m/s^2$ )	vektor unutarnjeg opterećenja ( $i$ eng. <i>internal</i> )
$R_m$	Pa ( $N/m^2$ )	stvarna vlačna čvrstoća
$S_E$	Pa ( $N/m^2$ )	inženjerska granica elastičnosti
$S_f$	Pa ( $N/m^2$ )	inženjerska lomna čvrstoća
$S_n$	Pa ( $N/m^2$ )	inženjersko (nominalno) naprežanje ( $S_n \equiv S = F/A_0$ )
$S_p$	Pa ( $N/m^2$ )	inženjerska granica proporcionalnosti
$S_u$	Pa ( $N/m^2$ )	inženjerska vlačna čvrstoća
$S_y$	Pa ( $N/m^2$ )	inženjerska granica tečenja ( $e_{pl} \approx 0,2 \%$ )
$T$	K	apsolutna temperatura ( $T_0 = 0 \text{ K} \approx 273,15 \text{ }^\circ\text{C}$ )
$\mathbf{T}$	- (rad)	matrica transformacije
$t$	s	vrijeme
$U$	$J/m^3$ ( $N/m^2$ )	gustoća energije deformiranja, eng. <i>strain energy density</i>
$u, v, w$	m	pomak u smjerovima osi $x, y, z$
$\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}$	m	amplituda pomaka u smjerovima osi $x, y, z$
$V$	$m^3$	volumen (obujam)
$\mathbf{V}$	m, rad	globalni vektor pomaka (u čvorovima)
$\mathbf{v}$	m, rad	lokalni vektor pomaka (u čvorovima)
$v_{vj}$	m/s	brzina vjetra
$v_{x,y,z}$	m/s	brzina u smjerovima osi $x, y, z$
$\hat{v}_{x,y,z}$	m/s	amplituda brzine u smjerovima osi $x, y, z$
$\hat{\hat{v}}_{x,y,z}$	m/s	kompleksna amplituda brzine u smjerovima osi $x, y, z$
$W$	J ( $N \cdot m$ )	energija
$w(t)$	m	pomak ovisan o vremenu
$X, Y, Z, x, y, z$	-	globalne, lokalne Kartezijeve koordinate
$\hat{Z}$	N $\cdot$ s/m	kompleksna amplituda mehaničke impedancije

## Grčke oznake

Oznaka	Jedinica	Opis oznake
$\alpha$	rad	kut (općenito)
$\alpha_i$	-	eksponencijalni hiperelastični faktor Ogden modela
$\beta$	rad	fazni kut između vektora brzine i vektora sile
$\delta$	m	pomak (općenito), debljina/širina uzorka
$\delta_{ij}$	-	Kroneckerov delta operator
$\Delta t_i$	s	vremenski inkrement
$\Delta \lambda_t$	-	faktor Riksovog modela
$\Delta v_j^*$	m	dopušteni pomak u Riksovoj metodi
$\varepsilon$	-	stvarna deformacija ( $\varepsilon = \ln(l/l_0)$ ), dopuštena num. greška
$\gamma$	rad	fazni kut impedancije
$\zeta = k/k_{kr}$	-	bezdimenzijski faktor prigušenja
$\eta = \Omega/\omega_n$	-	bezdimenzijska kružna frekvencija
$\Theta$	rad	polarna kutna koordinata
$\lambda$	Pa (N/m <sup>2</sup> )	prva <i>Laméova</i> konstanta ( $\lambda = 2 \cdot G \cdot \nu / (1 - 2 \cdot \nu)$ )
$\lambda_{1,2,3}$	-	istezanje, omjer istežanja/omjer stlačivanja, vl. vrijednost
$\mu$	-	faktor trenja (Coulombov faktor trenja)
$\mu_i$	Pa (N/m <sup>2</sup> )	hiperelastični koeficijent Ogden modela
$\mu_{zr}$	Pa · s	dinamička viskoznost zraka (uzduha)
$\nu$	-	Poissonov faktor
$\zeta$	-	normalizirana bezdimenzijska koordinata ( $\zeta = x_i/x_{max}$ )
$\pi$	-	Ludolfovo brojevi ( $\pi \cong 3,14159$ )
$\rho$	kg/m <sup>3</sup>	gustoća ( $\rho = m/V$ )
$\sigma_{1,2,3}$	Pa (N/m <sup>2</sup> )	stvarno (Cauchyjevo) glavno naprezanje
$\sigma_E$	Pa (N/m <sup>2</sup> )	stvarna granica elastičnosti
$\sigma_{ekv}$	Pa (N/m <sup>2</sup> )	ekvivalentno naprezanje prema von Misesu
$\sigma_L$	Pa (N/m <sup>2</sup> )	stvarna lomna čvrstoća
$\sigma_p$	Pa (N/m <sup>2</sup> )	stvarna granica proporcionalnosti
$\sigma_r$	Pa (N/m <sup>2</sup> )	stvarno radijalno naprezanje
$\sigma_{x,y,z}$	Pa (N/m <sup>2</sup> )	stvarno (Cauchyjevo) naprezanje u smjerovima osi $x, y, z$
$\sigma_\Theta$	Pa (N/m <sup>2</sup> )	stvarno cirkularno naprezanje
$\tau_{max}$	Pa (N/m <sup>2</sup> )	stvarno najveće naprezanje smicanja
$\varphi$	rad	fazni kut između vektora sile i vektora pomaka
$\varphi_{x,y,z}$	rad	kut zakreta oko osi $x, y, z$
$\dot{\varphi}_{x,y,z}$	rad/s	kutna brzina oko osi $x, y, z$
$\ddot{\varphi}_{x,y,z}$	rad/s <sup>2</sup>	kutno ubrzanje (akceleracija) oko osi $x, y, z$
$\Omega$	rad/s	kružna frekvencija uzbude
$\omega_n = f_n/2\pi$	rad/s	vlastita kružna frekvencija (slob. neprigušenih vibracija)



## Skraćenice, indeksi

Oznaka	Puno značenje
1D, 2D, 3D	jednodimenzionalno, dvodimenzionalno, trodimenzionalno
A	aksijalno (uzdužno), Almansi
A-B	Arruda-Boyce
ABQ	programski paket <i>Simulia Abaqus</i>
AL	aluminij
AMT	<i>Advanced Meshing Tools</i> (napredni alati za umrežavanje)
ANLT	analitički
B	<i>biaxial</i> (dvoosno)
C	Cauchy
CAD	<i>Computer Aided Design/Drafting</i> (konstruiranje pomoću računala)
CAE	<i>Computer Aided Engineering</i> (inženjerstvo pomoću računala)
CAI	<i>Catia Associative Interface</i> ( <i>Catia</i> asocijativno sučelje)
CFD	<i>Computational Fluid Dynamics</i> (računalna mehanika fluida, RDF)
D	dvoosno
DET	determinanta
DIN	dinamički
E-B	Euler-Bernoulli
EKV	ekvivalentno
EL	element
EXP	<i>experiment</i> (eksperiment)
G	Green, guma
F	faktor
FEM	<i>Finite Element Method</i> (metoda konačnih elemenata)
GSA	<i>Generative Structural Analysis</i> (generativna strukturna analiza)
GSS	globalni stupanj slobode
H	horizontalno, hibridno, Hertz
HEX	<i>hexahedron</i> (heksaedar)
I	<i>internal</i> (interni, unutarnji)
INŽ	inženjerski
J	jednoosno
JED	jedinično
KE	konačni element
L	Lagrange
LPF	<i>Load Proportionality Factor</i> (faktor proporcionalnosti opterećenja)
LSS	lokalni stupanj slobode
M	modificirano (eng. <i>modified</i> )
MARC	programski paket <i>MSC Marc</i>
MAT	programski paket <i>Wolfram Mathematica</i>

MAX	maksimalno
MDS	<i>Mass Damper Spring</i> (masa prigušivač opruga)
MIN	minimalno
MKE	metoda konačnih elemenata
MSC	( <i>The</i> ) MacNeal-Schwendler <i>Corporation</i>
M-R	Mooney-Rivlin
N	nominalno, normalno
NAS	programski paket <i>MSC Nastran</i>
N-H	neo-Hooke
NUM	numerički
N-R	Newton-Raphson
ODB	odabrano
OG	Ogden
P	Piola-Kirchhoff, planarno (eng. <i>planar</i> )
PENT	pentaedar
PM	proračunski model
R	reaktivno
RAD	radijalno
RD/RN	ravninsko stanje deformacije/ravninsko stanje naprezanja
REF	referentno (eng. <i>referent</i> )
REL	relativno (eng. <i>relative</i> )
RP	<i>Reference Point</i> (referentna točka)
RU	rubni uvjet (eng. <i>boundary condition, BC</i> )
R-W-W	Riks-Wempner-Wessels
S	<i>shear</i> (smicanje), sekanta
SR	srednje
SSG	stupanj slobode gibanja
STV	stvarno
SYMM	<i>symmetry</i> (simetrija)
T	tangencijalno
TET	<i>tetrahedron</i> (tetraedar)
TIMO	Timoshenko
TL	<i>total Lagrangian</i>
U	<i>ultimate</i> (zadnji), <i>uniaxial</i> (jednoosno)
UL	<i>updated Lagrangian</i>
UZ	uzbudno
V	vlačno (eng. <i>tensile</i> ), vertikalno
VL	vlastito
Y	<i>yield</i> (popuštanje)
YH	Yeoh

**Konačni elementi – oznake**

Oznaka	Puno značenje
B21	<i>Abaqus</i> 1D gredni element prvog reda, Timoshenko (2 x 3 SSG)
B23	<i>Abaqus</i> 1D gredni element prvog reda, Euler-Bernoulli (2 x 3 SSG)
C3D10	<i>Abaqus</i> tetraedarski 3D element drugog reda (10 x 3 SSG)
C3D15	<i>Abaqus</i> pentaedarski 3D element drugog reda (15 x 3 SSG)
C3D20	<i>Abaqus</i> heksaedarski 3D element drugog reda (20 x 3 SSG)
CAX8RH	<i>Abaqus</i> 2D membranski osnosimetrični element drugog reda (8 x 2 SSG)
CBAR	<i>Nastran</i> štapni 1D element prvog reda, Timoshenko (2 x 3 SSG)
CHEXA	<i>Nastran</i> heksaedarski 3D element drugog reda (20 x 3 SSG)
CPE4	<i>Abaqus</i> 2D membranski element prvog reda (4 x 2 SSG) (RD)
CPE8	<i>Abaqus</i> 2D membranski element drugog reda (8 x 2 SSG) (RD)
CPENTA	<i>Nastran</i> pentaedarski 3D element drugog reda (15 x 3 SSG)
CPS4	<i>Abaqus</i> 2D membranski element prvog reda (4 x 2 SSG) (RN)
CPS8	<i>Abaqus</i> 2D membranski element drugog reda (8 x 2 SSG) (RN)
CTETRA	<i>Nastran</i> tetraedarski 3D element drugog reda (10 x 3 SSG)
S4	<i>Abaqus</i> 2D ljuskasti element prvog reda (4 x 6 SSG)
<i>Spider</i>	<i>Nastran RBE2/Abaqus Coupling</i> virtualni elementi ( $n$ x 6 SSG)
T2D2	<i>Abaqus</i> 1D štapni element prvog reda (2 x 2 SSG)

## Sažetak

Tema ovog diplomskog rada je numeričko određivanje krutosti gumenog zgloba rastojnika-prigušivača. Rastojnici-prigušivači služe za održavanje razmaka između vodiča dalekovoda te za prigušenje aeolskih vibracija.

Cilj rada je izračun konstanti krutosti gumenog zgloba rastojnika-prigušivača i kreiranje ispravnog numeričkog modela koji može prikazati dovoljno točan odziv za proizvoljnu dinamičku uzbuđu.

Analiza je izvršena numerički pomoću metode konačnih elemenata u komercijalnim programskim paketima kompanija *Dassault Systèmes Abaqus 6.9-3 CAE* te *MSC Software Corporation MSC SimDesigner R4 WBE CATIA V5R18* unutar sučelja *Dassault Systèmes Catia P3 V5R18 SP3*. Rad je podijeljen u devet dijelova.

U prvom, uvodnom dijelu, ukratko je objašnjena problematika aeolskih vibracija te osnovni tipovi i način funkcioniranja rastojnika-prigušivača. Opisana je metoda ravnoteže energija te način proračuna, kao i moguće netočnosti koje se pritom javljaju.

U drugom dijelu opisan je problem određivanja karakteristika krutosti te način na koji se vrše mjerenja karakteristika krutosti i prigušenja gumenog zgloba.

U trećem dijelu ukratko je opisana metoda konačnih elemenata kao i 1D, 2D i 3D konačni elementi korišteni u radu.

U četvrtom dijelu, uz osnovna načela mehanike kontinuuma, ukratko je opisana inkrementalno-iterativna metoda, geometrijska nelinearnost, te materijalna nelinearnost, kao i općeniti nelinearni kontaktni problem.

U petom dijelu, kroz šest detaljnih primjera, verificirani su i validirani konačni elementi te metodologije za primjenu u višestruko nelinearnom kontaktnom problemu.

U šestom dijelu opsežno je opisan tijek stvaranja proračunskog modela, kao i brojne iteracije, pojednostavljenja i pretpostavke u svrhu stvaranja jednostavnijeg, a dovoljno točnog modela za proračun pomoću metode konačnih elemenata.

U sedmom dijelu opisan je usvojeni numerički proračunski model. Model je uspoređen s referentnim eksperimentalnim mjerenjima te je ispitana konvergencija dobivenih numeričkih rezultata.

U osmom dijelu vizualno su i tablično prikazani rezultati krutosti gumenog zgloba. Također je napravljena kratka kritička usporedba proračunskih modela kreiranih u programskim paketima *Abaqus* i *Nastran/Marc*.

U devetom dijelu, izveden je zaključak o dobivenim rezultatima krutosti gumenog zgloba. Istaknuta je nužnost provjere numeričkih metoda, kako kroz više numeričkih formulacija, tako i obaveznom usporedbom s eksperimentalnim mjerenjima.

**Ključne riječi:** aeolske vibracije; rastojnik-prigušivač; krutost; guma; metoda konačnih elemenata; nelinearna analiza; hiperelastičnost; velika deformacija; kontakt

## Summary

The subject of this thesis is a numerical analysis of the spacer damper rubber joint stiffness. Spacers dampers are used to maintain the gap between the overhead transmission lines and for damping of Aeolian vibrations.

The aim of this work is to calculate the stiffness constants of the spacer damper rubber joint with the ultimate goal of creating a correct numerical model that can display sufficiently accurate response to arbitrary dynamic excitation.

Analysis was carried out numerically using the finite element method in commercial software packages of company *Dassault Systèmes Abaqus 6.9-3 CAE* and *MSC.Software Corporation MSC SimDesigner R4 CATIA V5R18 WBE* inside of *Dassault Systèmes CATIA V5R18 SP3 P3* interface. The work is divided into nine sections.

In the first, introductory section, the Aeolian vibration problem, with basic types and way of functioning of the spacer dampers are briefly described. The energy balance method with calculation methods and possible errors that occur are also described.

In the second section, the problem of determining the stiffness characteristics and the measurements of the stiffness and damping of the rubber joint are clarified.

The third section briefly describes the finite element method and 1D, 2D and 3D finite elements used in the scope of work.

In the fourth section, the basic principles of continuum mechanics, incremental-iterative method, geometric nonlinearity, material nonlinearity, and general nonlinear contact problem are briefly described.

In the fifth section, finite elements and methodologies for use in multiple nonlinear contact problems are verified and validated through six detailed examples.

In the sixth section, the course of creating the calculation model, as well as a number of iterations, simplifications and assumptions in order to create a simpler and sufficiently accurate model for the calculation using the finite element method, is extensively described.

In the seventh section, the adopted numerical calculation model is presented. Model is compared to reference experimental data and examined through convergence of the obtained numerical results.

In the eighth section, the visual and tabulated results of rubber joint stiffness are shown. Also, a brief critical comparison of numerical design models created in software packages *Abaqus* and *Nastran/Marc* was made.

In the ninth section, the comment was made on the results of the stiffness of the rubber joint. The necessity of checking numerical methods, both through many numerical formulation, and mandatory comparison with the experimental measurements was emphasized.

**Keywords:** Aeolian vibrations; spacer damper; stiffness; rubber; finite element method; nonlinear analysis; hyperelasticity; finite strain; contact

## 1. Uvod

Razumijevanje problematike vibracija čest je konstrukcijski izazov u strojarstvu. Velika pažnja posvećuje se statičkoj i dinamičkoj stabilnosti u procesu proračuna, testiranja te implementacije kompliciranih i kompleksnih konstrukcija.

Napretkom tehnike i tehnologije, mogućnosti izvedbe konstrukcija postaju sve šire, a tako i složenije pa je sve teže naći jednostavnije analitičke modele kojima bi se aproksimirala i linearizirala konstrukcija u svrhu lakšeg i bržeg proračuna.

Neprocjenjivu važnost, u svrhu proračuna i verificiranja takvih analitički teško rješivih konstrukcija, imaju moderne numeričke inženjerske metode kao što je metoda konačnih elemenata. Prednosti numeričkih metoda dolaze do izražaja sve više razvojem modernih brzih računala i računalnih algoritama pomoću kojih se postupak iznalaženja rješenja znatno pojednostavljuje. Proračuni za koje su prije trebali dani i mjeseci, u današnje doba računalni procesor riješi za vrlo kratko vrijeme (milisekunde) što povećava produktivnost i efikasnost pri rješavanju inženjerskih problema. Ovaj rad, orijentiran je određivanju konstanti krutosti gumenog zgloba rastojnika-prigušivača pomoću metode konačnih elemenata, kao glavnog primijenjenog alata.

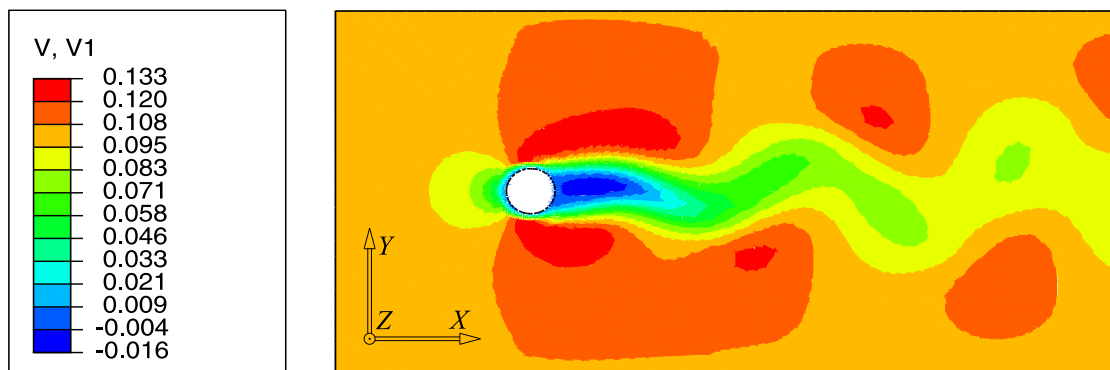
Vjetrom uzrokovane vibracije (eng. *wind induced vibrations*), koje nastaju kao posljedica odvajanja vrtloga (eng. *vortex shedding*), česta su pojava u visokonaponskim nadzemnim vodičima dalekovoda. Iako su takve vibracije jedva primjetne zbog njihove malene amplitude (često manje od promjera vodiča), njihova kontrola, tj. smanjenje intenziteta je vrlo važno, budući da mogu dovesti do *zamora* i time katastrofalnih posljedica loma vodiča. Matematički modeli stoga su nužno potrebni za proračun takvih vibracija, ne samo za procjenu rizika od mogućeg oštećenja dalekovoda, već i za proučavanje učinkovitosti primijenjenih mjera prigušenja. Za *jedan vodič* dalekovoda, tzv. metoda ravnoteže energija (snaga) daje prilično dobre rezultate za procjenu amplituda vibracija, međutim problem postaje kompleksniji za *snop vodiča* dalekovoda s montiranim različitim prigušnim uređajima [52]. Snopovi, tj. više paralelnih susjednih vodiča, u novije doba koriste se sve češće u svrhu povećanja učinkovitosti i smanjenja negativnih efekata korištenja samo jednog vodiča.<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup> U prijašnja doba, mislilo se da su snopovi vodiča praktični samo za vrlo visoki napon  $U$ , kao npr. 500 kV, no u novije vrijeme, prednosti snopova vodiča su dokazane i danas se češće koriste za napone od 230 kV i 115 kV. Kako bi se spriječio kontakt između pojedinih vodiča u normalnim radnim uvjetima, vodiči se drže na odstojanju montiranjem *nevodljivih* (eng. *nonconducting*) rastojnika ili stegnutih krutih okvira na odgovarajućim razmacima, a koji održavaju ujednačenu geometriju, tj. položaj snopa duž cijelog raspona [52].



Snopovi vodiča dalekovoda trpe mnoge slične mehaničke probleme kao i samostalni (eng. *single*) vodiči dalekovoda. Od različitih dinamičkih pojava u visokonaponskim nadzemnim vodičima, vjetrom uzrokovane vibracije vodiča predstavljaju značajan problem.<sup>2</sup> Najčešće vjetrom pobuđene vibracije vodiča su *galopiranje* (eng. *galloping*) i *aeolske vibracije* (eng. *Aeolian vibrations*). Za razliku od galopiranja, što je rijedak fenomen koji se pojavljuje u posebnim klimatskim uvjetima, vrtloženjem izazvane aeolske vibracije se mogu češće zamijetiti. Unakrsni vjetrovi malih brzina (1-7 m/s) imaju tendenciju izazivanja aeolskih vibracija vodiča zbog naizmjeničnog odvajanja von Kármánovih vrtloga u frekvencijskom rasponu od 3-150 Hz, uglavnom u vertikalnoj ravnini [52]. Slika 1.1. prikazuje tipično odvajanje von Kármánovih vrtloga (eng. *Vortex St.*) nastalo strujanjem fluida (npr. zraka) oko *stacionarnog* cilindra, uzrokujući harmonično oscilirajuće aerodinamičke sile na cilindar.

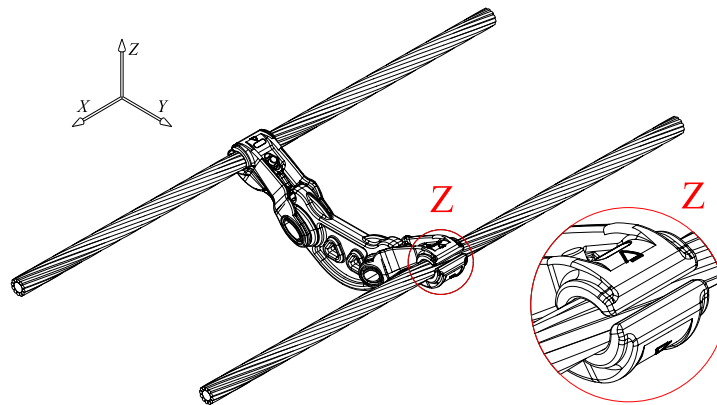


Slika 1.1. Odvajanje von Kármánovih vrtloga oko cilindra, *Abaqus 6.12-1* CFD analiza, prikaz  $v_x$

U slučaju snopova vodiča, interakcija rastojnika dovodi do kompleksnog povezivanja vibracija u vertikalnoj ravnini s onima u horizontalnoj ravnini, kao i međudjelovanja vibracija jednog snopa na drugi. Inženjeri koji se bave dalekovodima, uglavnom se bave fizičkim posljedicama aeolskih vibracija snopova vodiča koje izazivaju kontinuirano savijanje na mjestima spojeva vodiča. Navedeno može dovesti do smanjenja životnog vijeka i kolapsa uzrokovanog zamorom na tim kritičnim mjestima najvećih gradijenata naprezanja. Ovaj problem dodatno je uvećan modernom tendencijom da se vodiče sve više mehanički napinje, tj. da im je zategnutost sve veća. Zbog visokih aksijalnih tenzija, prigušenje zbog unutarnjeg trenja u napeto-žičanim (eng. *taut-wired*) vodičima, koji su opterećeni savojnim vibracijama, je zanemarivo. Kao posljedica, samo-prigušivanje vodiča obično nije dovoljno za ublažavanje posljedica vjetrom pobuđenih vibracija te na kritičnim mjestima mogu uslijediti visoka mehanička naprezanja. Dodatni uređaji za kontrolu, tj. smanjenje aeolskih vibracija stoga su potrebni u svrhu održavanja naprezanja vodiča u željenim granicama [52].

<sup>2</sup> Vjetrom pobuđene vibracije tako mogu npr. biti klasificirane prema dominantnim frekvencijama  $f$ .

Najčešće korišteni uređaji za prigušenje vibracija dalekovoda su uobičajeno pasivni. Najuspješnije prigušenje aeolskih vibracija za jedan vodič dalekovoda, postignuto je primjenom tzv. Stockbridge prigušivača, dok je za prigušivanje snopa vodiča potreban rastojnik-prigušivač (eng. *spacer damper*). Moderni rastojnik-prigušivač sastoji se od krutog aluminijskog okvira i određenog broja različito usmjerenih ruku (dvije ili više), ovisno o broju vodiča u snopu [52]. Ruke su pritom pričvršćene na središnji kruti okvir (tijelo) pomoću posebnih viskoelastičnih spojeva, tj. gumenim zglobovima. Slika 1.2. prikazuje tipični rastojnik-prigušivač koji ima dvije ruke, tj. tip „Twin“. Navedeni model korišten je u ovom radu.



Slika 1.2. Rastojnik-prigušivač tip „Twin“ montiran na snop vodiča dalekovoda

Smanjenje intenziteta aeolskih vibracija vodiča je, uz razmještaj duž raspona vodiča, funkcija i *inercijskih*, *elastičnih* te *prigušnih* svojstava rastojnika-prigušivača. Inercijske karakteristike moguće je dobiti pomoću CAD paketa, prigušne karakteristike je moguće mjeriti eksperimentalno, dok je elastične karakteristike gumenog zgloba (koje *nije moguće mjeriti eksperimentalno*) potrebno dobiti *numerički*, čemu je usmjeren ovaj rad.

## 1.1. Motivacija

Rad je direktno nastavljen na već postojeće radove vezane za problematiku aeolskih vibracija dalekovoda [54] i [55] te je jedna od karika u lancu iznalaženja rješenja za smanjenje intenziteta aeolskih vibracija snopa vodiča. Eksperimentalne metode ispitivanja konstrukcija vrlo su skupe, komplicirane i zahtjevne, stoga se koriste isključivo u posebne svrhe. Cilj ovog rada jest osmisliti proračunski model koji brzo, efikasno i zadovoljavajuće točno numerički proračunava konstante krutosti gumenog zgloba rastojnika-prigušivača. U tu svrhu, kreiran je fleksibilan i parametriziran proračunski model koji pokušava dati odgovore na to pitanje.<sup>3</sup>

<sup>3</sup> Iznimna pažnja posvećena je izradi detaljne, strukturirane mreže konačnih elemenata proračunskog modela rastojnika-prigušivača. S ciljem sprječavanja pogrešaka te u nedostatku dovoljno detaljnih referentnih rezultata eksperimentalnih mjerenja, rad je kritički promatran kroz više provjera i formulacija proračunskog modela.

## 1.2. Pregled literature

Budući da rad pokriva široko područje, korištena literatura i dosadašnja istraživanja podijeljena su i razvrstana radi lakšeg snalaženja prema tematskim cjelinama.

Prva tematska cjelina [1] do [44], odnosi se na opća inženjerska znanja o numerici (prvenstveno metoda konačnih elemenata), čvrstoći i stabilnosti te dinamici gdje je posebno bitno spomenuti djela Bowera i Pilkeya, čija širina te preglednost pružaju neizmjernu količinu korisnih informacija predstavljenih brojnim originalnim tablicama i dijagramima.

Druga tematska cjelina [45] do [63], odnosi se na dokumentaciju rastojnika-prigušivača, korištene ASTM/ISO norme i direktno/indirektno vezana istraživanja na sličnu tematiku, posebice gume te općenito hiperelastične materijale.

Treća tematska cjelina [64] do [82], odnosi se na literaturu o problemima nelinearnosti te inkrementalnim metodama gdje je bitno spomenuti rad Bathea i Holzapfela.

Četvrta tematska cjelina [83] do [97], odnosi se na kontaktne probleme te uvođenje trenja u proračun gdje je bitno napomenuti djela i doprinos Wriggersa.

Peta tematska cjelina [98] do [152], odnosi se na polimerne, elastomerne materijale, prvenstveno gumu, gdje je posebno važno napomenuti opus Genta [107] i [108] koji se pokazao jednim od najbitnijih izvora za rad, od konstitutivnih modela za gumu pa do preporuka nelinearnih numeričkih proračuna te općenito praktičnih korištenih metodologija.

Šesta tematska cjelina [153] do [172], odnosi se općenito na mehaniku kontinuuma i teoriju elastičnosti koje daju osnovne pretpostavke za konstitutivne modele korištene u radu.

Sedma tematska cjelina [173] do [191], odnosi se prvenstveno na konstitutivne modele hiperelastičnih materijala korištene u radu, gdje posebno valja napomenuti djela Mooneya i Rivlina čiji konstitutivni modeli daju jedan od osnovnih temelja rada, kao i istraživanja Treloara, čiji rezultati i dan danas daju jedan od temelja validacije numeričkih metoda u kontekstu hiperelastičnih materijala.

Osma tematska cjelina [192] do [258], odnosi se na verifikacije i validacije konačnih elemenata, konstitutivnih modela te metodologija numeričkog rješavanja problema.

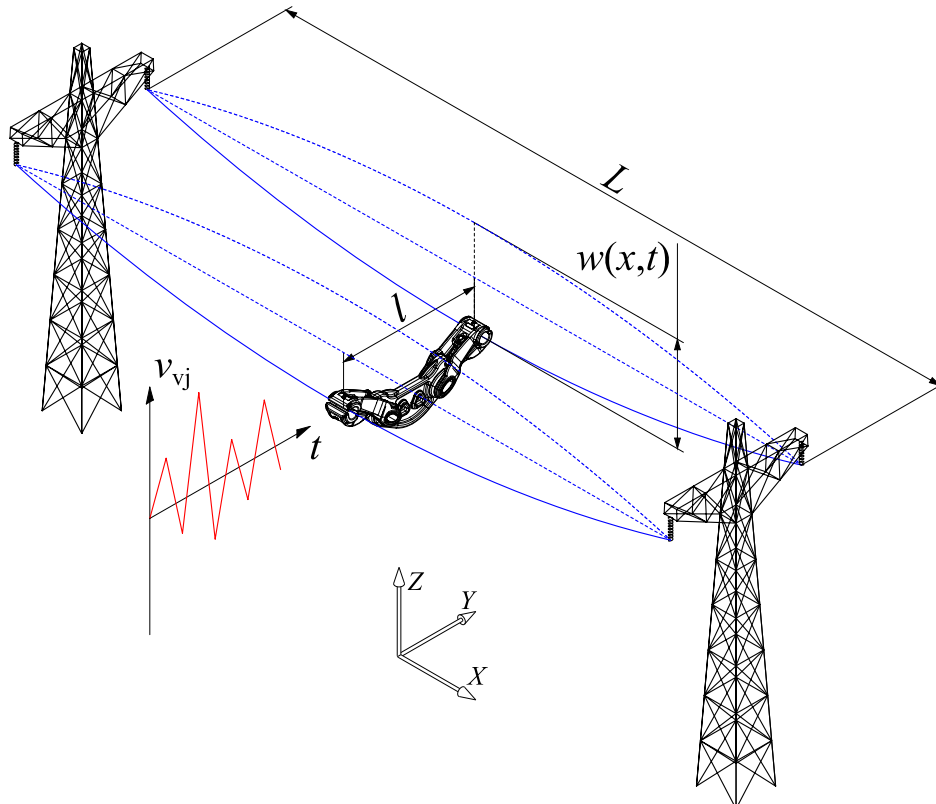
Deveta tematska cjelina [259] do [287], odnosi se na programske pakete, te dokumentacije korištene u radu gdje primarni i najvažniji udio imaju dokumentacija i građa vezana uz programske pakete *Abaqus* te *MSC Nastran/Marc*.

### 1.3. Vibracije

Gibanja koja se tijekom vremena uzastopno ponavljaju nazivaju se vibracijama ili oscilacijama. U tehničkoj praksi, vibracije su vrlo često štetna i neželjena pojava koja može uzrokovati oštećenje ili kolaps konstrukcije [4]. U kontekstu ovoga rada, aeolske vibracije dalekovoda, opisane opširnije u [52] i [54], smatraju se štetnom i neželjenom pojavom koja se nastoji minimizirati, ali prije svega procijeniti te izmjeriti.

#### 1.3.1. Aeolske vibracije

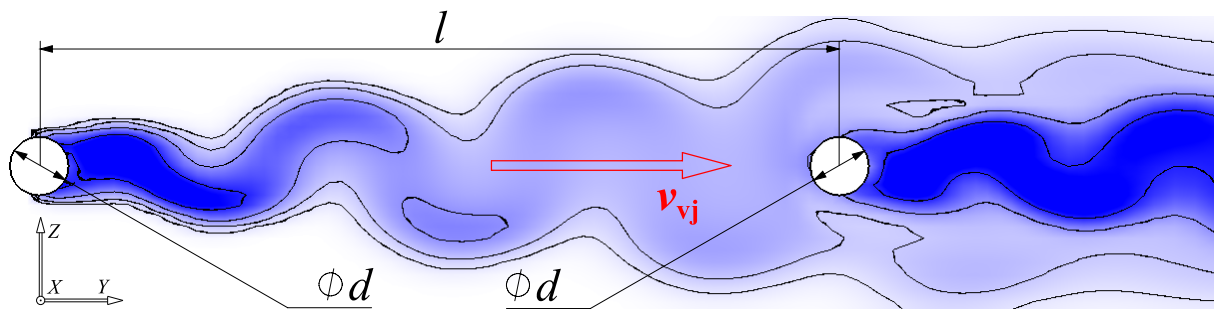
Stari Grci su u antičko doba, promatrajući utjecaj vjetra na napeto uže, uočili vibracije malih amplituda. Te vibracije nazvane su „aeolskim vibracijama“ prema grčkom vladaru vjetra Aeolu<sup>4</sup> [54], a posljedica su utjecaja slabog vjetra okomitog na uzdužnu os užeta. Amplitude aeolskih vibracija su relativno male, iznosa do maksimalno jednog promjera užeta  $d$  (Slika 1.4.), no u promatranom slučaju, i pod utjecajem vibracija malih amplituda može doći do značajnih trajnih oštećenja vodiča dalekovoda. Aeolske vibracije javljaju se kao posljedica stacionarnih laminarnih zračnih strujanja malih brzina ( $v_{vj} \cong 1 - 7$  m/s) [52] koja djeluju u smjeru *okomitom* na os vodiča kružnog poprečnog presjeka.



Slika 1.3. Shematski mehanizam nastanka aeolskih vibracija i djelovanje na rastojnik-prigušivač

<sup>4</sup> Prema grčkoj mitologiji, postojala su tri mitska lika imenom *Aeol*, nadnaravnih moći upravljanja vjetrovima.

Strouhal, V. (1878.) i von Kármán, T. (1912.), bili su među prvima koji su istraživali strujanje fluida oko cilindričnog tijela [39]. Slika 1.4. predstavlja detalj orijentacijske računalne simulacije stvaranja Kármánovih vrtloga oko dva vodiča dalekovoda u programskom paketu *FloEFD* 12.1. [287], prikazom dinamičke viskoznosti<sup>5</sup> zraka  $\mu_{zr}$  uz zadanu maksimalnu brzinu strujanja vjetra  $v_{vj} = 7$  m/s. Pretpostavljeni režim strujanja je *laminarni* prije udara u prvi vodič (lijevi cilindrični presjek na slici 1.4.), a potom *turbulentni*.

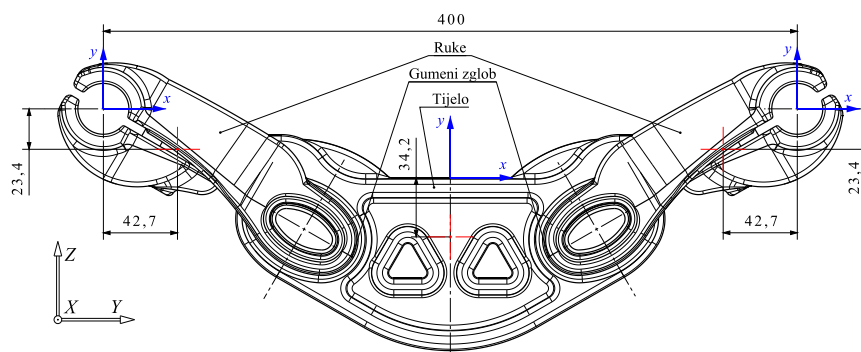


Slika 1.4. Kármánovi vrtlozi na snop vodiča, *FloEFD* 12.1. CFD analiza, prikaz  $\mu_{zr}$

Naizmjenično odvajanje Kármánovih vrtloga sa suprotnih strana profila stvara harmonijski promjenjivu silu uzgona koja djeluje u smjeru okomitom na brzinu vjetra [36]. Kad se frekvencija odvajanja Kármánovih vrtloga poklopi s nekom od vlastitih frekvencija vodiča dalekovoda  $f_n$ , može doći do intenzivnih rezonantnih vibracija. Ova pojava je posebno opasna jer može dovesti do zamora<sup>6</sup> (eng. *fatigue*) materijala vodiča. Frekvencije aeolskih vibracija se najčešće kreću  $f \cong 5 - 100$  Hz [54] (3 - 150 Hz prema [52]), stoga je taj raspon od najvećeg značaja za istraživanje vlastitih frekvencija  $f_n$  razmatranog rastojnika-prigušivača.

### 1.3.2. Rastojnik-prigušivač

Osnovna funkcija rastojnika-prigušivača održavanje je zadanog, predefiniranog razmaka između vodiča (u ovom slučaju  $l \approx 400$  mm, Slika 1.3., Slika 1.4. i Slika 1.5.).



Slika 1.5. Rastojnik-prigušivač, prednji pogled, razmak ruku (vodiča) i položaji težišta

<sup>5</sup> Predstavlja koeficijent unutrašnjeg trenja fluida  $\mu$ , a izražava otpornost smičnom strujanju [39].

<sup>6</sup> Jedna od najpopularnijih metoda brojanja ciklusa promjenjive amplitude je *tok kiše* (eng. *rainflow*) [57].

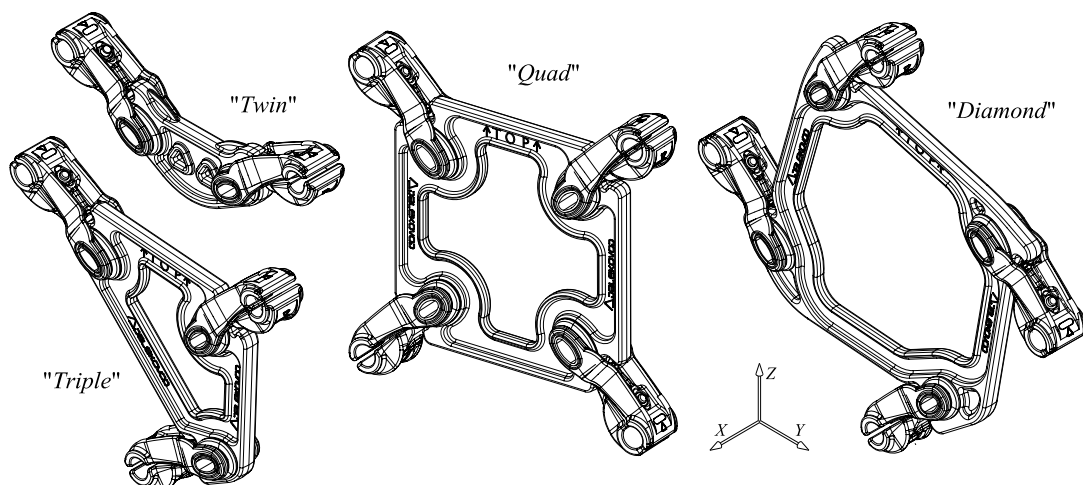
Ugradnjom gumenih elemenata (predstavljaju elastični i prigušni element) u zglobove ruku rastojnika, postiže se prigušenje aeolskih vibracija. Za vrijeme pomicanja ruku rastojnika-prigušivača utjecajem gumenog elementa dolazi do disipacije energije, pa tako i smanjenja amplituda aeolskih vibracija. Za procjenu i određivanje amplituda aeolskih vibracija snopa vodiča s rastojnicima-prigušivačima, u tehničkoj praksi koristi se metoda ravnoteže energija (snaga) (eng. *Energy balance method/principle*, EBP) [46], [52] i [54].

Metoda ravnoteže energija temelji se na nelinearnoj algebarskoj jednadžbi ravnoteže snaga za slučaj stacionarnih vibracija vodiča. Jednadžba ravnoteže energija pri stacionarnim vibracijama vodiča za određenu frekvenciju vibracija  $f$  glasi

$$P_w(A) = P_D(A) + P_C(A). \quad (1.1)$$

Član  $P_w(A)$  označava snagu koju uzbudne aerodinamičke sile unose u sustav (za zadanu brzinu vjetra  $v_{vj}$  i odgovarajuću frekvenciju  $f$  odvajanja Kármánovih vrtloga),  $P_D(A)$  je snaga koju prigušivač disipira (apsorbira), dok je  $P_C(A)$  snaga koju vodič disipira uslijed vlastitog prigušenja. Izraz (1.1) je nelinearna funkcija amplitude vibracija vodiča  $A$  na nekoj određenoj frekvenciji. Amplituda vibracija vodiča  $A$  može se odrediti pomoću izraza (1.1) za bilo koju zadanu brzinu vjetra  $v_{vj}$  ili frekvenciju  $f$ . Za određivanje frekvencijskog odziva, tj. amplituda vibracija  $A$  u ovisnosti o frekvenciji vibracija  $f$ , odnosno brzini vjetra  $v_{vj}$ , potrebno je poznavati funkcije koje opisuju gore navedene snage. Snaga  $P_D(A)$  koju rastojnik-prigušivač disipira, funkcija je mehaničkih karakteristika rastojnika-prigušivača.

Slika 1.6. prikazuje različite modele rastojnika-prigušivača. Svi se sastoje od *geometrijski jednakih* gumenih zglobova, ruku, kao i vijaka, dok im je tijelo *različito*. Materijal svih modela je također jednak, a za izradu se koriste Al legura te EPDM guma.



Slika 1.6. Rastojnici-prigušivači, prostorni prikaz modela

Uz svoju primarnu funkciju održavanja željenog razmaka između snopa vodiča, rastojnik-prigušivač također apsorbira energiju mehaničkih vibracija vodiča pomoću navedenih viskoelastičnih<sup>7</sup> gumenih zglobova. Prema [53], gumeni zglobovi najčešće se izrađuju od kloroprenske (neoprenske) gume, EPDM gume, NBR gume, silikonske gume i specijalnih spojeva.<sup>8</sup> Pritom je bitno da guma ima sljedeće karakteristike:

- visoki gubici (tj. velika površina petlje) histereze,
- izdržavanje utjecaja ozona i UV (ultraljubičasto, eng. *ultraviolet*) zračenja,
- održavanje svojstava u cijelom rasponu radnih temperatura,
- održavanje svojstva za očekivani vijek trajanja dalekovodne linije.

Rastojnik-prigušivač stoga služi za održavanje naprezanja savijanja (a time i deformacija) vodiča na sigurnoj razini, što rezultira produljenim životnim vijekom snopova vodiča dalekovoda izloženih aeolskim vibracijama. U idealnom slučaju, rastojnici-prigušivači bi trebali eliminirati potrebu za zasebnim prigušivačima vibracija (npr. Stockbridge), no još nije jasno pod kojim uvjetima se taj cilj može postići u potpunosti, koristeći prigušivače trenutno ponudene na tržištu. Nesavršen dizajn rastojnika-prigušivača, u nedostatku dobrog razumijevanja fizike iza efekta vibracija snopa vodiča, dovodi do potrebe za dodatnim Stockbridge prigušivačima za prigušivanje lokaliziranih vibracija, posebno u slučaju velikog raspona snopa vodiča [52]. Stvaranje *točnijih* matematičkih modela u kontekstu proračuna aeolskih vibracija, stoga je nužnost, a sve u svrhu poboljšanja dizajna kao i optimizacije.

Za korektno definiranje detaljnog proračunskog modela rastojnika-prigušivača, kao što je već navedeno, potrebno je definirati mehanička (inercijska, elastična i prigušna) svojstva pa tako i komponente krutosti  $c_i$  gumenog zgloba, tj. *nelinearno* elastična svojstva.

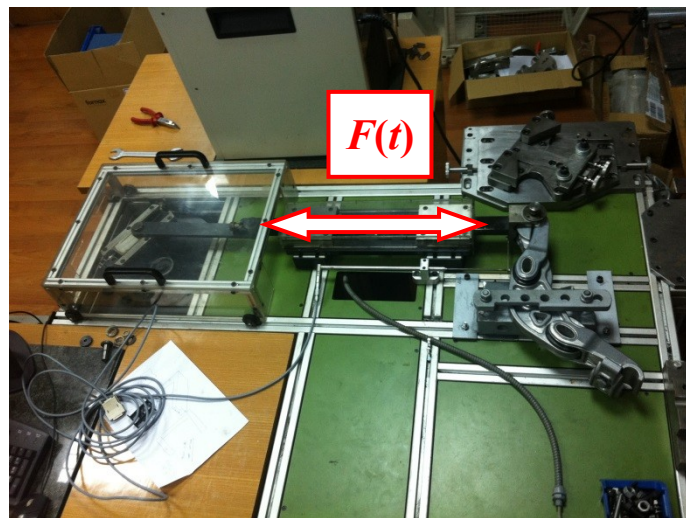
Torzijska krutost  $c_t$  (u slučaju da je globalni koordinatni sustav rastojnika prigušivača okrenut kao što prikazuje Slika 1.3., tada je to torzijska krutost oko osi  $x$ , tj.  $c_{tx}$ ) određena je eksperimentalnim mjerenjima prema [45] za jednu amplitudu sile, što prikazuje Slika 2.1., a komponente radijalne krutosti  $c_{x,y,z}$ , kao i torzijske krutosti  $c_{ty,z}$ , s obzirom na trenutnu nemogućnost takvih eksperimentalnih mjerenja, potrebno je *orijentacijski* odrediti numerički.

<sup>7</sup> Viskoelastičnost *pojednostavljeno* znači „elastičnost ovisna o vremenu“, tj modul elastičnosti  $E = E(t)$ .

<sup>8</sup> Za detaljnije informacije o rastojnicima općenito, preporučljivo je pogledati sažeti prezentacijski dokument: *Cosmai, U., Tutorial Presentation on Spacers and Spacer Dampers*, CIGRE SC B2, 2011, web stranica: <http://www.aeolus.bz/Seminar%202011/Umberto%20-%20SPACER%20TUTORIAL%20CIGRE%202011.pdf>, studeni 2014.

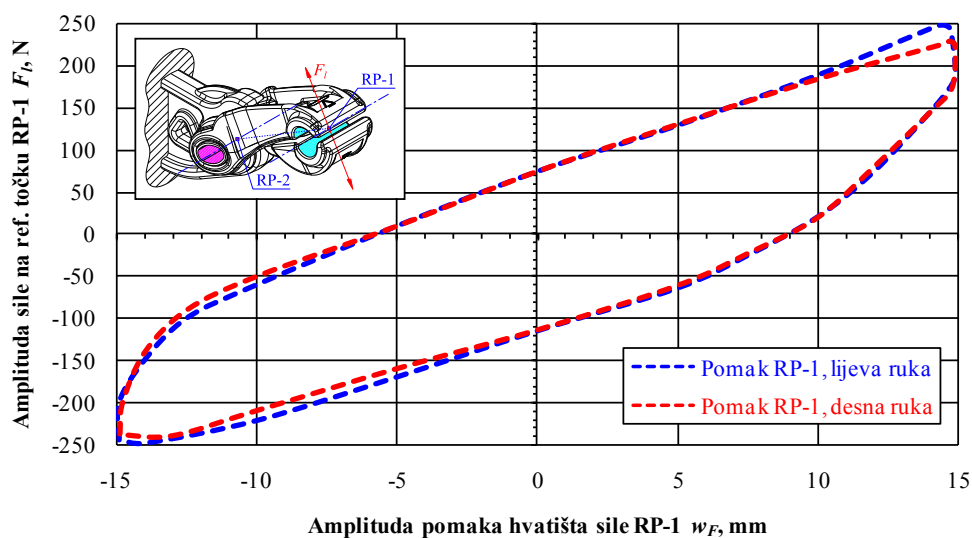
## 2. Opis problema

Rastojnik-prigušivač izrazito je kompleksnog geometrijskog oblika. Kompleksnost oblika odnosi se na ruke, tijelo te *gumeni zglob* koji je glavna tema ovog rada. Gumeni zglob omogućuje rotacije ruku oko tijela te je *znatno manje* krut od aluminijskog tijela i ruku koje se pri eksperimentalnim ispitivanjima, kao i numeričkom proračunu smatraju *idealno* tj. *apsolutno krutim*. Slika 2.1. prikazuje uređaj za ispitivanje krutosti i prigušenja gumenog zgloba rastojnika-prigušivača u laboratoriju za mjerenje [45].



Slika 2.1. Uređaj za ispitivanje krutosti i prigušenja gumenog zgloba rastojnika prigušivača [55]

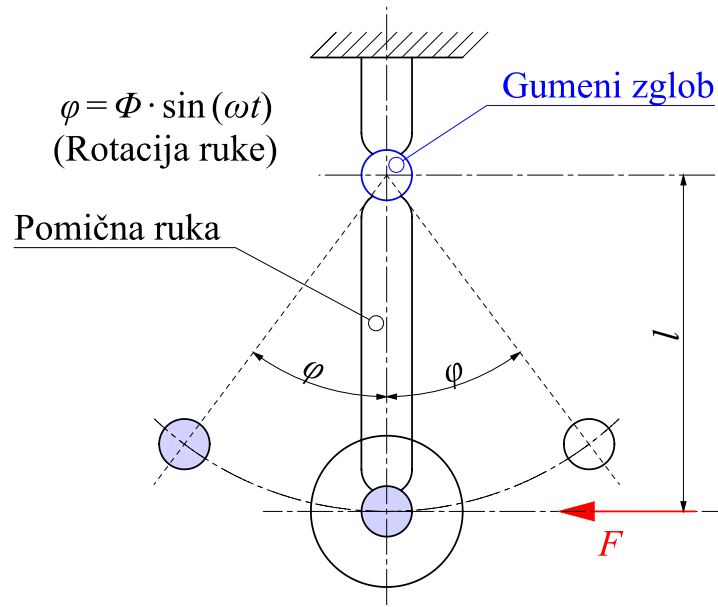
Eksperimentalna mjerenja provedena su prema gornjoj slici, a rezultati amplitude pomaka iznosa  $w_{\max} = 15$  mm uz uzbudnu silu  $F_{\max} = \sim 250$  N (Slika 2.2.) [55] korišteni su kao kontrolni validacijski parametar pri kreiranju numeričkog proračunskog modela.



Slika 2.2. Petlja histereze gumenog zgloba rastojnika-prigušivača

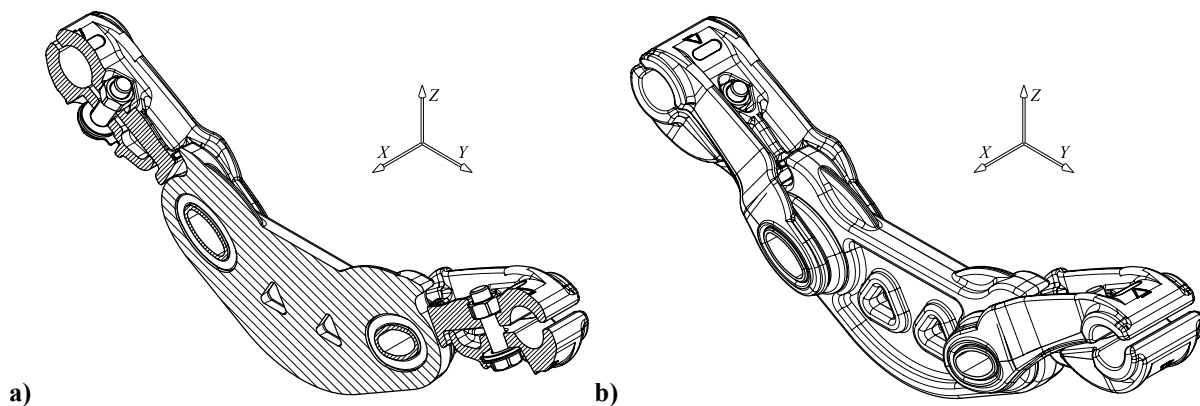


Slika 2.3. prikazuje osnovnu shemu za ispitivanje krutosti i prigušenja rastojnika-prigušivača prema IEC 61854 standardu [47] što je norma koja se koristila pri eksperimentalnom ispitivanju [55], kao što prikazuje Slika 2.1.



Slika 2.3. Shema ispitivanja krutosti i prigušenja gumenog zgloba rastojnika-prigušivača, IEC 61854

Slika 2.4. a) i b) prikazuje rastojnik-prigušivač u prostornom pogledu. Iz slike je jednostavno zamijetiti već prije navedenu veliku geometrijsku kompleksnost modela. Iz tog razloga, a budući da je problem ravninski (Slika 2.1.), prikladno je koristiti polovinu geometrijskog modela uz primijenjene rubne uvjete simetrije na presječnoj ravnini y-z.

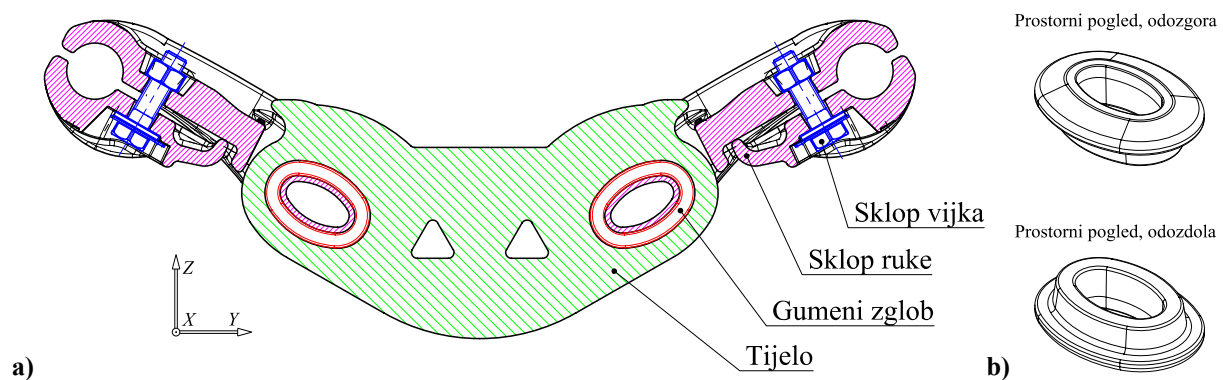


Slika 2.4. Rastojnik-prigušivač, tip „Twin“: a) polovina modela, b) cijeli model

Slika 2.4. a) prikazuje polovinu modela rastojnika-prigušivača, što je model koji se koristio u [55] pri proračunu metodom konačnih elemenata u svrhu štednje ograničenih računalnih resursa. Budući da je potrebno izračunati *sve* komponente krutosti, problem više nije simetričan prema opterećenju, stoga je korišten model kakav prikazuje Slika 2.4. b).

## 2.1. Gumeni zglob

Sastavni dio rastojnika-prigušivača (model „Twin“) čine četiri gumena elementa, a dva gumena elementa postavljena u zglobove ruku (u svaki zglob umeću se ukupno dva elementa), sačinjavaju oprugu koja geometrijsko-materijalnim karakteristikama daje konstante krutosti  $c_{x,y,z}$ , konstante torzijske krutosti  $c_{tx,y,z}$  i konstante viskoznog prigušenja  $k$ . Slika 2.5. a) prikazuje rastojnik prigušivač u presjeku po ravnini simetrije  $y-z$  (Slika 2.4. a) gdje je rastojnik razložen na osnovne dijelove: *tijelo*, *gumeni zglob*, *sklop ruke* te *sklop vijka*.



Slika 2.5. Rastojnik-prigušivač: a) presjek po ravnini simetrije  $y-z$ , b) gumeni zglob

Krutost  $c$  (eng. *stiffness*) teško je jednoznačno odrediti, budući da je dinamička krutost  $c_{\text{din}}$  (eng. *dynamic stiffness*, efektivna krutost u vibracijskom uvjetima) gume, tj. općenito elastomernih materijala, često veća od statičke krutosti  $c_{\text{st}}$  (eng. *static stiffness*) prema [13], [15], [29] i [30], što se može izraziti općenitom relacijom

$$c_{\text{din}} = K_{\text{din}} \cdot c_{\text{st}}, \quad (2.1)$$

gdje za bezdimenzijski omjer  $K_{\text{din}} = f(c_{\text{din}}/c_{\text{st}})$  općenito vrijedi  $K_{\text{din}} \geq 1$ . Pritom se podrazumijeva da je statička krutost  $c_{\text{st}}$  mjerena na niskoj frekvenciji  $f \leq \sim 0,1$  Hz [30]. Uz to,  $c_{\text{din}}$  često ovisi o amplitudi vibracija  $A$  ( $c_{\text{din}}$  pada s povećanjem amplitude  $A$  [149] i [149]) i/ili o frekvenciji uzbude  $f$ , što se naziva Payneov ili Fletcher-Gentov efekt [103], [104] i [105].

U referentnoj literaturi, autori daju različite maksimalne vrijednosti faktora  $K_{\text{din}}$ , primjerice prema [13], str. 336, dinamički faktor kreće se u rasponu  $K_{\text{din}} \approx 1 \dots 3$ , dok se prema [15] str. 32.7 (odjeljak *Static and Dynamic Stiffness*), faktor kreće u nešto manjem rasponu, tj. vrijedi  $K_{\text{din}} \approx 1 \dots 2$ . Prema [29], raspon se kreće u znatno većem području gdje vrijedi  $K_{\text{din}} \approx 1 \dots 10$ , str. 336 (termin *ratio of dynamic-to-static stiffness*, tj. omjer). Brown [99] uz ovisnost dinamičkih svojstava gume o frekvenciji navodi i problem ovisnosti svojstava o temperaturi, tj.  $c = f(t)$ , što dodatno povećava kompleksnost proračuna.

Uz sve prethodno navedeno, bitno je znati da se većina materijala može opisati *konstitutivnim modelom* (eng. *Constitutive Model*). U općem smislu, ovaj model predstavlja odnos između naprezanja  $\sigma$  i deformacije  $\varepsilon$ . Iako ova aproksimacija vrijedi za neke vrste materijala, kod drugih naprezanje ovisi o znatno više parametara nego samo deformaciji, što je slučaj kod gume koja pokazuje vrlo kompleksno ponašanje. Složenu korelaciju amplitude, frekvencije i opterećenja ističe i *Nafems* [194], a autori (Ahmadi i Muhr) tvrde da hiperelastični modeli korišteni za numeričke proračune kvazi-statičkog opterećenja gume nisu sposobni dati dovoljno točan odziv u slučaju *dinamičkog* opterećenja. U tu svrhu dodatno su razvijeni viskoelastični modeli koji mogu opisati fenomene kao što su popuštanje naprezanja (eng. *stress-relaxation*), puzanje (eng. *creep*) [12], dinamička svojstva ovisna o frekvenciji (eng. *frequency dependent*) te Mullinsov efekt (eng. *Mullins effect*) [79], [98], [103], [104], [105], [110] i [116] koji se odnosi na omekšavanje gume (eng. *softening*) tj. pojavu da krivulja naprezanje-istezanje elastomera direktno ovisi o najvećem opterećenju kojem je prethodno podvrgnuta, a materijal kao posljedica efekta postaje djelomice *anizotropan* [194]. Bitno je znati da je u inicijalnom, neopterećenom stanju, guma homogena i *izotropna* prema [11], [108], [155], [172], [181], [182], [183], [184], [185], [186], [187], [188], [189].<sup>9</sup> U okviru ovog rada, zbog nedostatka referentnih podataka, *nisu* razmatrani Mullinsov efekt ni viskoelastičnost, kao niti efekti otvrdnjavanja/omekšavanja te puzanje-relaksacija, već je naglasak stavljen na nelinearnost gume u kontekstu *statičkog* opterećenja.

Najvažnije jedinstveno svojstvo elastomera (guma), je njihova sposobnost za *velike elastične* deformacije, odnosno mogućnost istezanja i vraćanja u izvorni oblik potpuno reverzibilno, od kuda ime *elastomer* i dolazi. Teorije za ovo svojstvo velike (nelinearne) elastičnosti, prema [110] prošle su kroz tri različite distinktivne faze:

- rani razvoj molekularnog modela koji se odnosi na eksperimentalna opažanja u odnosu na poznate molekularne karakteristike gumenih polimera (statistička mehanika) [173] i [174],
- generalizacija ovakvog pristupa putem principa preuzetih iz mehanike kontinuuma koji su neovisni o molekularnoj strukturi (fenomenološki pristup) [179], [181], [182], [183], [184], [185], [186], [190] i [191], [214],
- *kritička* ponovna procjena (eng. *reassessment*) osnovnih premisa na kojima su dvije prethodne kvantitativne teorije temeljene.

<sup>9</sup> „Izotropan“ implicira jednaka svojstva u *svim smjerovima*, a „homogen“ jednaka svojstva u *svim točkama*.

Prema podacima proizvođača [45], materijal gume je EPDM  $72 \pm 5$  Sh°A 20714, što znači da ima tvrdoću 72 (uz toleranciju  $\pm 5$ ) prema Shoreu, tip A [8], str. 374 i [50].

EPM je kopolimer *etilena* i *propilena*. U procesu kopolimerizacije etilena i propilena, može se EPM-u dodati treći monomer *dien* te se tako dobiva *terpolimer* (eng. *terpolymer*, tj. polimer koji se sastoji od tri monomera) poznat kao EPDM tj. etilen-propilen-dien-monomer (eng. *ethylene-propylene-diene-monomer*). EPDM je poznat po svojim dobrim svojstvima otpornosti na vremenske uvjete, kao i ozon, ultraljubičasto zračenje, starenje, kemijske otopine, kiseline, lužine te utjecaj pare, postojanosti na toplinu, kao i električnim izolacijskim svojstvima te se najčešće koristi kao brtva ili izolator. Također posjeduje i dobra elastična i zamorna svojstva te visoku tvrdoću i izdržljivost [98], [102], [103], [104], [105], [106], [108], [114], [128] i [281]. Mehanička svojstva EPDM-a su postojana tijekom dugog vremenskog perioda što taj materijal čini pogodnim za eksploataciju pod opterećenjem vjetra.

Prema navedenom, očekuju se relativno velike *nelinearno elastične* deformacije pri eksploataciji te je za analizu gume potrebno uključiti hiperelastični konstitutivni model [173] do [191] što je detaljnije pojašnjeno u podpoglavlju 4.2.1., Hiperelastični materijal.

## 2.2. Pomaci ruku

Budući da su očekivani realtivni pomaci ruku u odnosu na tijelo pri eksploataciji kao i pri eksperimentalnim mjerenjima (Slika 2.1.) rastojnika-prigušivača *relativno* veliki (zbog dugog kraka sile  $F_t$ , čak i *malene* rotacije rezultiraju *velikim* pomacima. Za korektnu i potpunu, tj. dovoljno detaljnu analizu potrebno je stoga obuhvatiti i nelinearne efekte, tj. uz *materijalno nelinearnu elastičnost*, predvidjeti obavezno i *geometrijsku* nelinearnost [64] do [82], što je detaljnije pojašnjeno u poglavlju 4., Nelinearna analiza.

## 2.3. Kontakt gumenog zgloba

Budući da je gumeni zglob rastojnika prigušivača u kontaktu s velikim brojem ploha ruke, kao i cijevi ruke te tijela (Slika 6.1., detaljni prikaz), za potpunu analizu gumenog zgloba, potrebno je uključiti i efekt interakcije kontakata više tijela, koji je u numeričkom smislu *nelinearan* [83] do [97]. Uključivanjem trenja u proračunski model, problem postaje dodatno nelinearan [193], a u nedostatku referentnih eksperimentalnih mjerenja i podataka, usprkos preporukama, korišten je Coulombov model trenja [88] (detaljnije, poglavlje 4.3.).<sup>10</sup>

<sup>10</sup> Faktor trenja  $\mu$  općenito *nije* primjenjiv na gumu [89] zbog *viskoelastičnog* ponašanja materijala te *adhezije*.

### 3. Metoda konačnih elemenata

Metoda konačnih elemenata (MKE) numerička je metoda temeljena na diskretizaciji kontinuuma [1], [7], [11], [17], [18], [19], [20], [21], [25], [26], [27] i [28]. Po svojoj definiciji, MKE unosi trajnu grešku u rješenje problema proračunskog modela (PM), a dužnost je analitičara da grešku kontrolira i drži unutar standardom propisanih veličina.

MKE je prikladna numerička metoda za analizu složenih konstrukcijskih problema, prvenstveno onih koje je komplicirano ili nemoguće riješiti poznatim analitičkim metodama te je u tom kontekstu korištena kao glavni alat pri izradi ovog rada.

U današnje doba postoji velik broj komercijalnih računalnih programa temeljenih na MKE koji omogućuju analizu kompleksnih konstrukcija bez razmatranja složene teorije koja opisuje njihovo fizikalno ponašanje. Korištenje programa nerijetko se svodi na zadavanje ulaznih podataka prema propisanim uputama, a dobivena rješenja prihvaćaju se bez dovoljno kritičnosti i potrebnog znanja pri interpretaciji rezultata. To, uz već očekivanu grešku po definiciji, unosi dodatni problem nekorektnosti pri izradi proračunskog modela od strane nedovoljno educiranih pojedinaca i prezentiranju netočnih rješenja. Jedan od primijenjenih načina ispitivanja točnosti dobivenih rješenja je ispitivanje konvergencije [1]. Cilj analize je da se rješenja dobivena pomoću MKE što više približe vrijednostima koje dovoljno točno opisuju razmatrani problem. S povećanjem broja konačnih elemenata (KE) numerička rješenja moraju se približavati točnim vrijednostima. To fizikalno znači da usitnjavanjem mreže KE energija deformiranja konvergira prema točnom iznosu energije deformiranja PM. Pritom se podrazumijeva da se mreža s većim brojem KE dobiva tako da se elementi početne mreže dijele na više manjih elemenata. Opisana metoda približavanja točnom rješenju uz jednoliko smanjenje dimenzija elemenata, u literaturi je poznata kao  $h$ -postupak. Konvergenciju je moguće postići i povećanjem stupnja polinoma interpolacijskih funkcija i kod relativno grube mreže, što je opisano kao  $p$ -postupak. Veliku brzinu konvergencije moguće je dobiti ako se istodobno smanjuju dimenzije elemenata i povećava stupanj polinoma interpolacijske funkcije, što je poznato kao  $h/p$ -postupak.

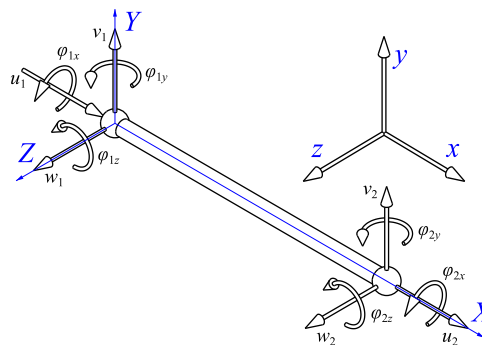
U kontekstu ovog rada korišten je isključivo  $h$ -postupak, dok je stupanj polinoma interpolacijske funkcije uvijek višeg (drugog u slučaju 2D i 3D elemenata, iznimno prvog u slučaju 1D greda/štapova) reda. Takva metodologija pokazala se optimalnom u okvirima rješavanja većine linearno/nelinearno elastičnih inženjerskih problema u domeni i statičkog i dinamičkog opterećenja, što je primarno područje od interesa za ovaj rad.

### 3.1. Opis primijenjenih konačnih elemenata

Cilj ovog dijela rada je kratki opis testiranih elemenata u kontekstu kreiranja korektnog proračunskog modela. Kombiniranjem više vrsta konačnih elemenata opisanih u ovom poglavlju te prikladnog odabira kojom vrstom elementa aproksimirati proračunski model, u poglavlju 5. je ispitana konvergencija za jednostavnije slučajeve koje je moguće provjeriti korištenjem analitičkih metoda i poznatih podataka iz referentne literature.

Kao glavni numerički alat rada korišten je programski paket *Abaqus* verzija 6.9-3 kompanije *Dassault Systèmes* [259], [260] i [261]. Za dodatnu orijentacijsku numeričku verifikaciju korišten je MKE modul komercijalnog programskog paketa *MSC SimDesigner Catia P3 V5R18*, kompanije *MSC* [265] za kompaniju *Dassault Systèmes*, modul *GSA (Generative Structure Analysis)* za analizu pomoću metode konačnih elemenata.

#### 3.1.1. Prostorni gredni konačni element



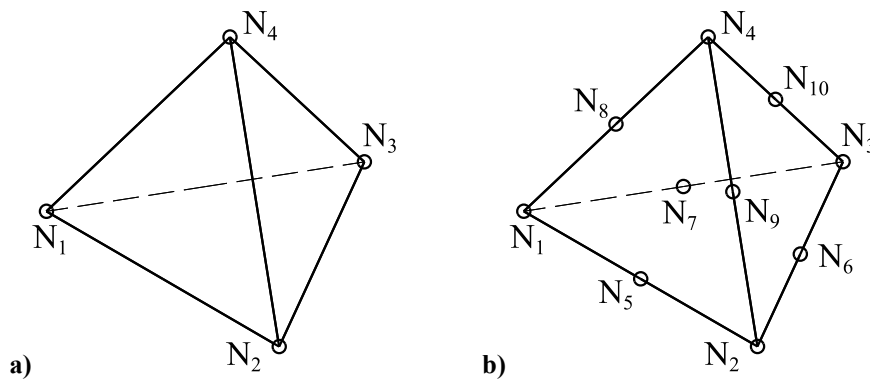
Slika 3.1. Osnovni prostorni gredni element

Osnovni gredni 2D elementi (*Nastran* CBAR, *Abaqus* B21) imaju dva čvora, a svaki čvor ima 3 stupnja slobode gibanja: 2 translacije i 1 rotaciju u smjerovima globalnih osi Kartezijevog koordinatnog sustava [1]. Svi navedeni gredni elementi sadrže Timoshenkovu formulaciju koja uzima u obzir posmične efekte kratkih greda (*Abaqus* eng. *shear flexible*, posmično fleksibilan), no sadržavaju i Euler-Bernoullijevu formulaciju koja služi primarno za duge grede, tako da se mogu smatrati *univerzalno* točnima [202], [205] i [206]. *Abaqus* B23 konačni element identičan je B21 elementu prema stupnjevima slobode i broju čvorova s time da koristi samo Euler-Bernoulli formulaciju, tj. teoriju vitkih, dugih greda.

Gredni elementi prikladni su za diskretizaciju tijela čija je jedna dimenzija bitno veća od ostale dvije. U kontekstu ovog rada korišteni su za numeričku verifikaciju 3D elemenata.

Dodatno su korišteni i *Abaqus* T2D2 2D štapni konačni elementi koji imaju 2 čvora i 2 stupnja slobode gibanja po čvoru, tj. dvije translacije.

### 3.1.2. Tetraedarski konačni element

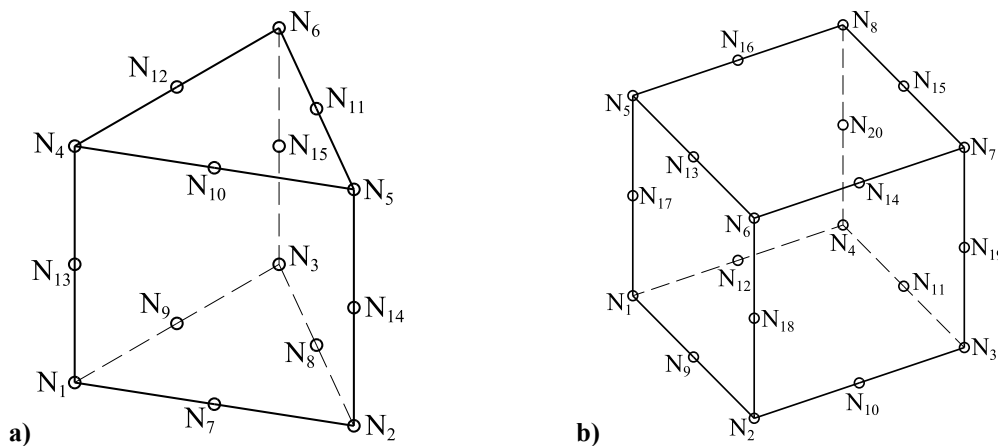


Slika 3.2. Tetraedarski konačni element: a) osnovni, b) parabolni

Pri stvaranju 3D mreža za kompliciranije geometrije korišteni su isključivo parabolni tetraedri (*Nastran* CTETRA i *Abaqus* C3D10 – KE drugog reda) [1], [260], [261] i [267]. Tetraedar drugog reda ima 10 čvorova, a svaki čvor ima 3 SSG – 3 translacije.

### 3.1.3. Prizmatični konačni element

Za jednostavnije geometrije korištena je strukturirana prizmatična mreža. Svi korišteni elementi temelje se na prizmatičnim elementima prvog i drugog reda – pentaedru i heksaedru, tj. 3D Serendipity<sup>11</sup> elementima drugog reda [1], [260] i [261].



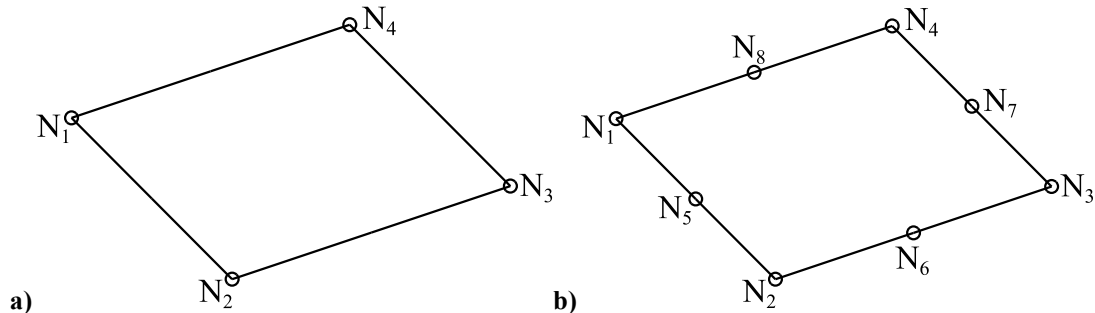
Slika 3.3. Prizmatični elementi drugog reda: a) pentaedar, b) heksaedar

Pentaedar (*Nastran* CPENTA, *Abaqus* C3D15) ima 15 čvorova i 3 SSG (translacije) po svakom čvoru. Heksaedar (*Nastran* CHEXA, *Abaqus* C3D20) ima 20 čvorova i 3 SSG (translacije) po svakom čvoru. Strukturirana prizmatična mreža daje ravnomjeren rezultat duž cijelog promatranog područja modela i pogodna je za korištenje prilikom umrežavanja geometrijski višestruko simetričnih modela [54], [57], stoga je *preferirana* u ovom radu.

<sup>11</sup> Doslovni prijevod eng. riječi *serendipity* je „ugodno iznenađenje“ prema perzijskoj bajci „Tri princa iz Serendipa“ povezanoj sa sretnim i neočekivanim otkrićima [1].

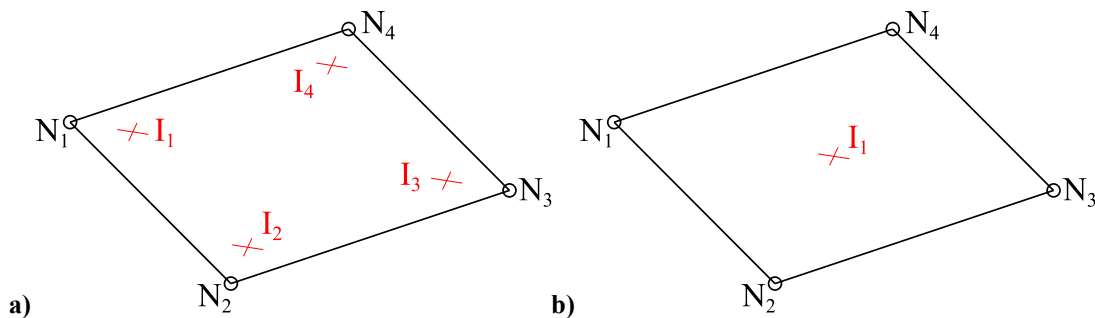
### 3.1.4. Ljuskasti konačni elementi

Za mreže KE kojima se aproksimiraju modeli s jednom dimenzijom znatno manjom od ostale dvije, korišteni su ljuskasti KE koji su isključivo verifikacijski elementi ovog rada.



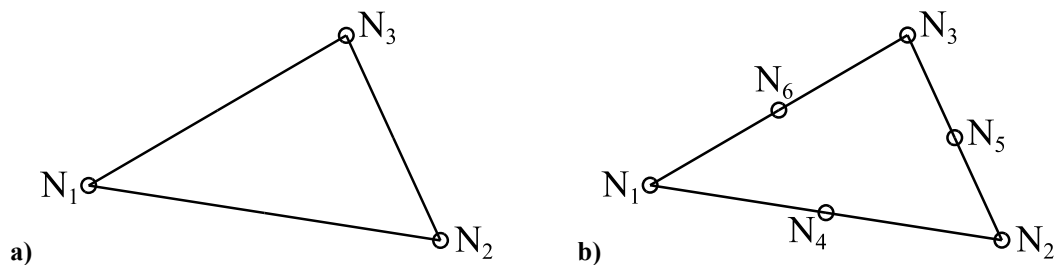
Slika 3.4. Četverokutni ljuskasti element: a) I. reda, b) II. reda

Pri analizi su korišteni osnovni linearni ljuskasti četverokutni konačni elementi s 4 čvora (*Nastran* CQUAD4, *Abaqus* CPS4/CPE4). Svaki čvor ima 2 SSG – 2 translacije [1], [260] i [261]. Pri dodatnoj analizi konvergencije korišteni su četverokutni ljuskasti elementi drugog reda s dodatnim čvorom (*Nastran* CQUAD8, *Abaqus* CPS8/CPE8).



Slika 3.5. Abaqus ljuskasti elementi: a) CPS4, b) CPS4R

Sufiks „R“ označava *reduciranu* integraciju u programskom paketu *Abaqus* [260].



Slika 3.6. Trokutni ljuskasti element: a) I. reda, b) II. reda

Također su za referencu korišteni i osnovni trokutni elementi (*Nastran* CTRIA3, *Abaqus* CPS3/CPE3) te trokutni elementi drugog reda (*Nastran* CTRIA6, *Abaqus* CPS6/CPE6). Osnovni trokutni ljuskasti element ima 3 čvora, a svaki čvor ima 2 SSG. Trokutni ljuskasti element drugog reda ima 6 čvorova, a svaki čvor ima 2 SSG [1] i [260].



## 4. Nelinearna analiza

Većinu inženjerskih problema moguće je riješiti *linearnim* aproksimacijama [1] i [2]. U tom slučaju, osnovna relacija metode konačnih elemenata opisane u poglavlju 3. glasi

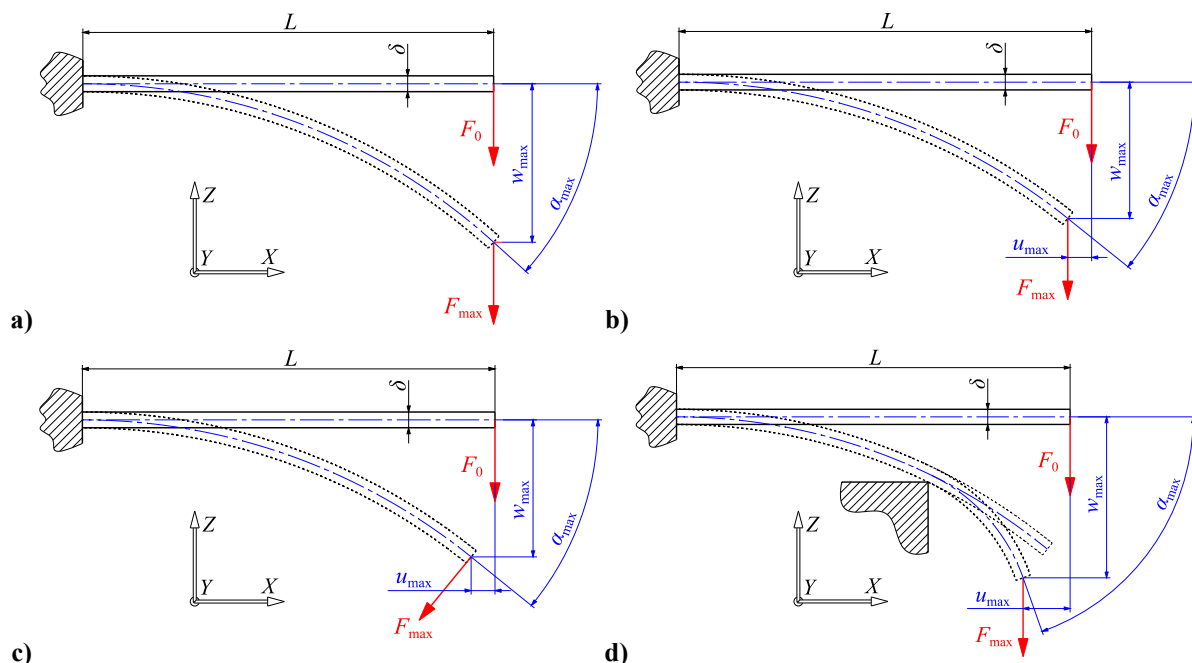
$$\mathbf{KV} = \mathbf{R}, \quad (4.1)$$

gdje je  $\mathbf{K}$  konstantna matrica krutosti,  $\mathbf{V}$  je vektor pomaka u čvorovima, a  $\mathbf{R}$  je vektor čvornih sila. U slučaju da linearna aproksimacija ne opisuje *dovoljno točno* razmatrani problem, potrebno je definirati *nelinearnu* relaciju konačnog elementa [6] koja općenito glasi

$$\mathbf{K}(\mathbf{V}, \mathbf{R})\mathbf{V} = \mathbf{R}, \quad (4.2)$$

gdje je vidljivo da je krutost  $\mathbf{K}$  funkcija trenutnog stanja pomaka  $\mathbf{V}$  i opterećenja  $\mathbf{R}$ . Zbog nelinearnog odziva, problem nije moguće riješiti u jednom koraku, već se proces pronalazjenja rješenja temelji na inkrementalno-iterativnim metodama koje su moguće tek uz linearizaciju izraza (4.2) [6] i [69]. Pritom se iz osnovnog ravnotežnog stanja (OS) traži ravnoteža bliskog stanja (BS) koje je definirano prirastom inkrementalnog opterećenja  $\Delta\mathbf{R}$  i/ili pomaka  $\Delta\mathbf{V}$ .

Slika 4.1. a) prikazuje osnovni *linearni* model uklještene grede, dok Slika 4.1. b), c) i d) prikazuje različite vrste *nelinearnih* modela gdje moguća nelinearnost ovisi o više faktora.



Slika 4.1. Usporedba proračunskih modela: a) linearno, b) nelinearno, c) nelinearno, sila  $F$  prati pomake, d) nelinearno, promjenjivi rubni uvjeti uslijed kontakta

U općem slučaju, nelinearna analiza očito je uvijek *točnija* od linearne, jer obuhvaća sve fenomene, no često vremenski nije isplativa ni racionalna jer je računalno zahtijevna [6].

Izrazi za mala naprezanja, deformacije i pomake prema [2] vrijede uz ograničenja:

- visina štapa/grede  $\delta$  malena je u usporedbi s rasponom  $L$  te treba biti ispunjen uvjet  $\delta/L \leq 1/5$  do  $1/4$  uz grešku u granicama oko 2 %,
- maksimalni nagib tangente na elastičnu liniju  $\alpha_{\max}$  je malen, tj. nalazi se u granicama  $\alpha_{\max} \leq 0,05$  do  $0,1$  rad. (tj.  $\sim 2^\circ$  do  $5^\circ$ ),
- omjer maksimalnog pomaka i raspona je malen, tj.  $w_{\max}/L \leq 0,01$  do  $0,02$ .

U općem slučaju, *linearna* analiza provodi se uz sljedeće pretpostavke [6] i [71]:

- pomaci su *maleni*, ravnoteža se promatra na *nedeformiranom* obliku, a opterećenje *ne mijenja* smjer, tj. *konzervativno* je (Slika 4.1. a),
- ponašanje materijala je linearno elastično (tj. vrijedi *linearni* Hookeov zakon koji u općem obliku glasi  $\sigma = E \cdot \varepsilon$ ),
- nehomogenosti i anizotropija u materijalu nisu funkcija opterećenja,
- postoji linearna veza između deformacije i pomaka (tj.  $\varepsilon/w = \text{konst.}$ ).

Ako i *jedan* od gornjih uvjeta nije zadovoljen, radi se o *nelinearnosti*, a razlikuju se:

- **geometrijska nelinearnost** (veliki pomaci, gubitak stabilnosti: *snap-through* [6] i [69] i *bifurcation* [6], [69], [72] i [73], nekonzervativno opterećenje tj. nametnuta sila prati pomake/deformacije, Slika 4.1. b) i c),
- **materijalna nelinearnost** – velike deformacije (plastičnost, puzanje, nelinearna elastičnost (*hiperelastičnost*), visko-elastičnost/plastičnost) [82],
- **nelinearni rubni uvjeti** (problem kontakta, trenje, Slika 4.1. d) [82].

Problem može sadržavati i kombinaciju više vrsta nelinearnosti. Pomaci kod nelinearnog ponašanja konstrukcije tad više nisu direktno proporcionalni opterećenju kao kod linearne analize, odnosno više nije moguće primijeniti zakon superpozicije te izraz (4.1) *ne* vrijedi [71]. Linearizacijom izraza (4.2) dobiva se jednačba krutosti

$$\mathbf{K}_T(\bar{\mathbf{V}})\Delta\mathbf{V} = \mathbf{R}_e - \mathbf{R}_i(\bar{\mathbf{V}}), \quad (4.3)$$

gdje je  $\mathbf{K}_T$  tangencijalna matrica krutosti,  $\bar{\mathbf{V}}$  osnovno i poznato ravnotežno stanje,  $\Delta\mathbf{V}$  vektor inkrementalnih pomaka,  $\mathbf{R}_e$  vektor vanjskog opterećenja i  $\mathbf{R}_i$  vektor unutarnjih sila [6].

Ravnoteža je postignuta kada je desna strana izraza (4.3) jednaka nuli, tj. kada su unutarnje sile  $\mathbf{R}_i$  jednake vanjskom opterećenju  $\mathbf{R}_e$ , ili kada je vektor inkrementalnih pomaka  $\Delta\mathbf{V}$  jednak nuli. Numerički, nulu nikada *nije moguće* postići, stoga je potrebno postaviti kriterij dozvoljne greške  $\varepsilon \approx 0$  [44]. Također, vrijedi općenita relacija inkrementalnog stanja

$$\mathbf{V} = \bar{\mathbf{V}} + \Delta\mathbf{V}, \quad (4.4)$$

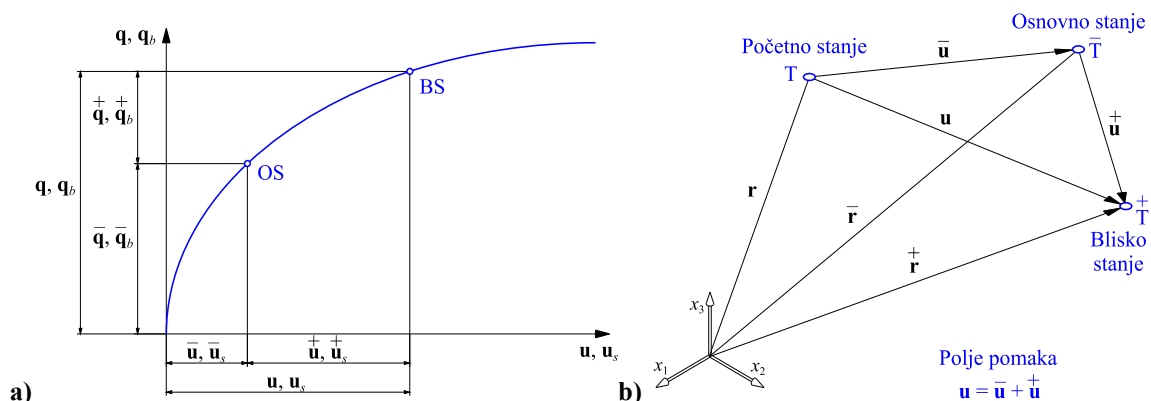
gdje ukupno stanje  $\mathbf{V}$  u svakom sljedećem koraku iteracije postaje osnovno stanje  $\bar{\mathbf{V}}$ .

Neke bitna pravila nelinearne analize prema [6] i [71] su:

- princip superpozicije ne može se primijeniti, stoga se rezultati nekoliko slučajeva nelinearnog opterećenja *ne mogu* kombinirati,
- samo jedan slučaj opterećenja može biti analiziran odjednom,
- slijed primjene opterećenja (eng. *load history*) može biti važan, a posebno plastične deformacije ovise o načinu opterećenja, što je razlog za podjelu opterećenja na male korake (inkremente),
- strukturno ponašanje konstrukcije može biti izrazito disproporcionalno nametnutom opterećenju (primjerice *snap-through*, poglavlje 5.2.1.4.),
- početno stanje naprezanja (npr. zaostala naprezanja od toplinske obrade, zavarivanja itd.) može biti od velike važnosti.

#### 4.1. Inkrementalna metoda

Budući da se pri nelinearnoj analizi traži ravnoteža *bliskog* stanja, potrebno je za to stanje postaviti princip virtualnih pomaka koji se izvodi u inkrementalnom<sup>12</sup> obliku [6].



Slika 4.2. Pomak: a) krivulja opterećenje-pomak, b) polje pomaka

<sup>12</sup> Postupak inkrementiranja može se shvatiti kao dijeljenje opterećenja na manje segmente – *inkremente*.

Na krivulji opterećenje-pomak<sup>13</sup> (Slika 4.2. a), označava se osnovno ravnotežno OS te blisko (susjedno) stanje ravnoteže BS, a Slika 4.2. b) predstavlja shematski prikaz polja pomaka gdje se početno, osnovno i blisko stanje mogu pojasniti sljedećim definicijama:

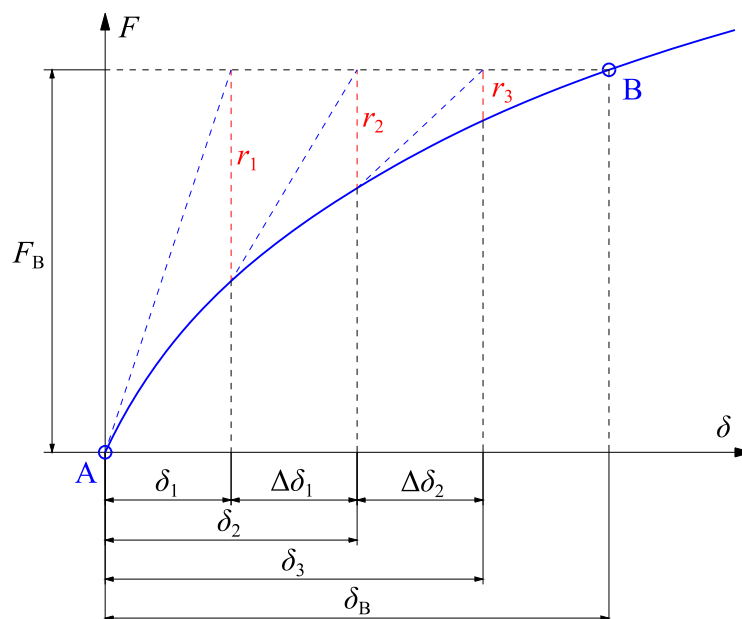
- početno stanje predstavlja *neopterećeni* i *nedeformirani* oblik,
- osnovno stanje predstavlja opterećeni i deformirani oblik u stanju ravnoteže,
- blisko stanje predstavlja oblik susjedan osnovnom obliku, a određen je inkrementalnim pomakom  $\mathbf{u}^+$ , što je specijalna prva varijacija pomaka koji određuje osnovno stanje.

Provodi se postupak inkrementiranja te se dobijaju izrazi za pomak  $\mathbf{u}$  i vanjske sile  $\mathbf{q}$

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^+, \quad \mathbf{q} = \bar{\mathbf{q}} + \mathbf{q}^+, \quad (4.5)$$

$$\mathbf{q}_b = \bar{\mathbf{q}}_b + \mathbf{q}_b^+.$$

Newton-Raphsonova metoda [69] jedna je od najčešće korištenih numeričkih iterativnih metoda u praksi [260], [261], [266], [268] i [273] (shematski prikaz – Slika 4.3.).



Slika 4.3. Standardna Newton-Raphsonova (N-R) metoda

Bitno je napomenuti da plave isprekidane linije moraju biti *tangencijalne*<sup>14</sup> [6] i [71] na krivulju spojnice A-B što je radi jasnijeg vizualnog prikaza slike ovdje *zanemareno*.

<sup>13</sup> Pritom  $\mathbf{q}_b$  označava vektor površinskog opterećenja, dok je  $\mathbf{u}_s$  vektor pomaka na plohi površine „s“ [1] i [6].

<sup>14</sup> Od tuda i dolazi naziv *tangencijalna* matrica krutosti (eng. *tangent stiffness matrix*) [6].

U slučaju da su poznati početni pomaci  $\delta_0$  (Slika 4.3., točka A), prva iteracija čvornih pomaka za silu  $F_B$  računa se rješavajući sustav linearnih algebarskih jednačbi [71] izrazom

$$\mathbf{K}_{T(0)}\delta_1 = \mathbf{F} \equiv \mathbf{R}_e, \quad (4.6)$$

gdje je  $\mathbf{K}_{T(0)} = \mathbf{K}_T(\delta_0)$  tangencijalna matrica krutosti izračunata za početne pomake  $\delta_0$ .

Budući da pomaci  $\delta_1$  vjerojatno nisu točni u prvoj iteraciji, jednačba ravnoteže nije zadovoljena, tj. desna strana izraza (4.3) nije jednaka nuli, stoga vrijedi

$$\mathbf{R}_1(\delta_1) \neq \mathbf{F} \equiv \mathbf{R}_e, \quad (4.7)$$

što znači da postoje nebalansirane (ili rezidualne) čvorne sile iznosa

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{R}_1(\delta_1) - \mathbf{F} \neq 0. \quad (4.8)$$

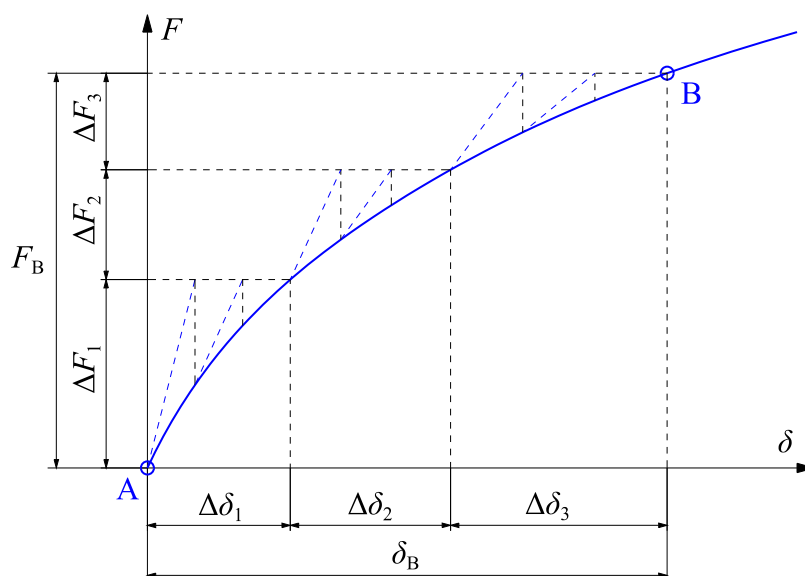
Računanjem nove tangencijalne matrice krutosti  $\mathbf{K}_{T(1)} = \mathbf{K}_T(\delta_1)$  te rješavanjem novog sustava algebarskih linearnih jednačbi koje glase

$$\mathbf{K}_{T(1)}\Delta\delta_1 = \mathbf{r}_1, \quad (4.9)$$

dolazi se do *točnijeg* rješenja (u odnosu na prethodno rješenje  $\delta_1$ ) čiji je izraz

$$\delta_2 = \delta_1 + \Delta\delta_1. \quad (4.10)$$

U slučaju da  $\mathbf{r}_2 = \mathbf{R}_1(\delta_2) - \mathbf{F} \neq 0$ , procedura se nastavlja dok ne rezultira dovoljno točnim rješenjem [71]. Kriterij *dozvoljene* greške definiran je već spomenutim parametrom  $\varepsilon$ . Slika 4.4. shematski prikazuje kombinaciju Newton-Raphson, te inkrementalne metode.



Slika 4.4. Kombinacija Newton-Raphson i inkrementalne metode

## 4.2. Nelinearni konstitutivni model

Osnovna formulacija zakona koji opisuje *elastično* deformiranje glasi: „za svaku točku deformiranog tijela, komponente elastičnog tenzora deformacije  $\varepsilon_{ij}$  linearno ovise o komponentama tenzora naprezanja  $\sigma_{ij}$ “ [3], [6], [12] i [7]. Konstitutivna relacija Hookeovog *linearnog* zakona zapisanog u indeksnom obliku prema [3] glasi

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad (4.11)$$

gdje je  $D_{ijkl}$  simetrična matrica elastičnosti predstavljena tenzorom četvrtog reda, dok su naprezanje  $\sigma_{ij}$  i deformacija  $\varepsilon_{ij}$  tenzori drugog reda. U općem slučaju, matrica elastičnosti  $D$  sastoji se od 36 komponenata koje se opisuju s 21 nezavisnom konstantom materijala te je tada riječ o *anizotropnim* materijalima. Ako je materijal *homogen*, *izotropan* i *linearan* (u razmatranom radnom području), broj nezavisnih konstanti smanjuje se na samo dvije: modul elastičnosti  $E$ , tj. Youngov modul i modul smicanja  $G$  [3].

Tenzor elastičnosti  $D_{ijkl}$  iz izraza (4.11) zapisan u indeksnom obliku glasi

$$D_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}), \quad (4.12)$$

gdje su  $\lambda$ , i  $\mu$  *Laméove* konstante, a  $\delta_{ij}$  *Kroneckerov* simbol [6].

Konstanta  $\lambda$  iz izraza (4.12) naziva se još i prva *Laméova* konstanta te glasi

$$\lambda = \frac{\nu \cdot E}{(1+\nu) \cdot (1-2 \cdot \nu)} = \frac{2 \cdot G \cdot \nu}{1-2 \cdot \nu} = \frac{G \cdot (E-2 \cdot G)}{3 \cdot G-E}, \quad (4.13)$$

dok se konstanta  $\mu$  naziva druga *Laméova* konstanta i glasi

$$\mu \equiv G = \frac{E}{2 \cdot (1+\nu)} = \frac{\lambda \cdot (1-2 \cdot \nu)}{2 \cdot \nu}, \quad (4.14)$$

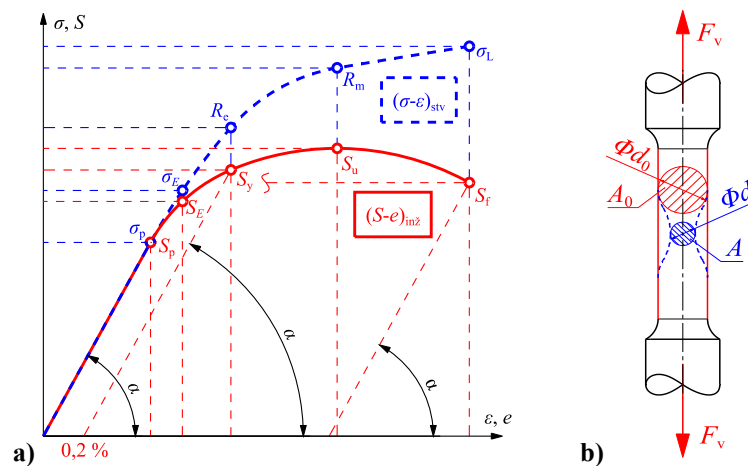
gdje je očito da je *Laméova* konstanta  $\mu$  identična modulu smicanja  $G$  [6]. Također je iz izraza (4.13) i (4.14) vidljivo da su konstante  $\lambda$  i  $\mu$  ovisne o Youngovom modulu  $E$  te Poissonovom faktoru  $\nu$  [12]. Izraz za volumenski modul elastičnosti  $K$  (modul stlačivosti) glasi

$$K = \frac{E}{3 \cdot (1-2 \cdot \nu)} = \frac{2 \cdot G \cdot (1+\nu)}{3 \cdot (1-2 \cdot \nu)}, \quad (4.15)$$

a u slučaju da je iznos Poissonovog faktora  $\nu$  jednak 0,5, vrijednost modula stlačivosti  $K$  teži u beskonačno, što znači da je kontinuum nestlačiv i svaka promjena *izohorna*, tj. vrijedi relacija  $V/V_0 = 1$ . Maksimalni iznos  $\nu$  stoga može biti 0,5, što je uobičajena vrijednost za gumu [12].

### 4.2.1. Hiperelastični materijal

Radi boljeg razumijevanja problematike nelinearnosti, kao i korištenih oznaka, potrebno je definirati parametre statičkog vlačnog pokusa pomoću  $\sigma$ - $\varepsilon$  ( $S$ - $e$ ) dijagrama duktilnog čeličnog materijala [2]. Slika 4.5. *orijentacijski* prikazuje razlike između inženjerskog (nominalnog) i stvarnog naprezanja i deformacije, a kako se u kontekstu proračuna *nelinearnih* materijala u referentnoj literaturi koriste egzaktni termini za naprezanja i deformacije, potrebno je uvesti novu,  $\sigma$ - $\varepsilon$  ( $S$ - $e$ ) nelinearnu nomenklaturu<sup>15</sup>.



Slika 4.5. Statički vlačni pokus: a) shematski  $\sigma$ - $\varepsilon/S$ - $e$  dijagram, b) odnos  $A_0/A$  uzorka

Inženjersko naprezanje  $S$  te stvarno naprezanje  $\sigma$  (Cauchy *stress*) prema [82] iznose

$$\boxed{S = \frac{F}{A_0}}, \quad \boxed{\sigma = \frac{F}{A}}, \quad (4.16)$$

dok inž. deformacija  $e$  te stvarna (logaritamska, Henckyjeva) deformacija  $\varepsilon$  prema [82] iznose

$$\boxed{e = \frac{l - l_0}{l_0}}, \quad \boxed{\varepsilon = \int_{l_0}^l \frac{dl}{l} = \ln \frac{l}{l_0}}. \quad (4.17)$$

Inženjerska naprezanja i deformacije radi jednostavnosti ne uzimaju u obzir suženje poprečnog presjeka uzorka, tj. omjer  $A_0/A$  (Slika 4.5. b). Razlika iznosa  $S$  i  $\sigma$ , u linearno-elastičnom području, je *zanemariva* tj. vrijedi relacija  $S \approx \sigma$ , no u slučaju materijalno nelinearnih proračuna, s porastom naprezanja i deformacija, razlike postaju sve izraženije.

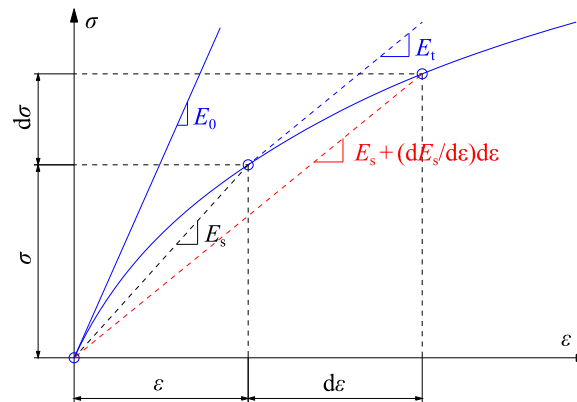
Transformirani izrazi (4.16) i (4.17) za  $\varepsilon$  i  $\sigma$  u *slučaju nestlačivosti* prema [82] glase

$$\varepsilon = \ln(1+e), \quad \sigma = S \cdot (1+e). \quad (4.18)$$

<sup>15</sup> Bitno je pritom ne miješati oznaku za bazu prirodnog logaritma „e“ (piše se uspravno,  $e \approx 2,718281$ ) s bezdimenzijskom (m/m) oznakom za inženjersku deformaciju „e“ (piše se *koso*).

Nelinearno elastično ponašanje materijala može biti formulirano na više načina, no najjednostavniji je potpuni format (eng. *total format*) [71], gdje su deformacija  $\varepsilon$  i naprezanje  $\sigma$  analogno (4.11) definirani preko *sekantnog* modula elastičnosti  $E_s$  (Slika 4.6.) izrazom

$$\sigma = E_s(\varepsilon) \cdot \varepsilon. \quad (4.19)$$



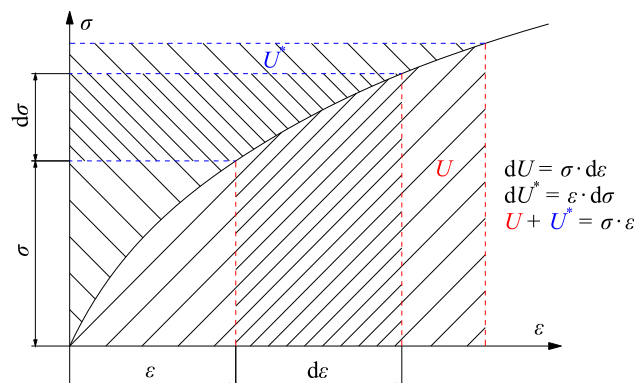
Slika 4.6. Nelinearno elastični model, *sekantni* moduli elastičnosti  $E_s$

Nelinearno elastično ponašanje može biti formulirano i pomoću *hiperelastičnog*<sup>16</sup> formata koji pretpostavlja postojanje *funkcije* gustoće energije deformiranja  $U$  (eng. *strain energy density*) te pripadne komplementarne funkcije gustoće energije  $U^*$  [71] tako da vrijedi

$$U = \oint_{\varepsilon} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} = 0 \Rightarrow \boxed{\sigma = \frac{dU}{d\varepsilon}}, \quad \boxed{\varepsilon = \frac{dU^*}{d\sigma}}. \quad (4.20)$$

što prikazuje Slika 4.7., a takav konstitutivni model najčešće se koristi za materijale od gume. Materijalni modeli za višeosno stanje naprezanja obično su temeljeni na generalizaciji 1D koncepta. Tako u hiperelastičnoj formulaciji komponente tenzora naprezanja iznose

$$\sigma = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon}, \quad \text{te vrijedi:} \quad \sigma_x = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_x}, \quad \sigma_y = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_y}, \quad \tau_{xy} = \frac{\partial U}{\partial \gamma_{xy}}, \quad \text{itd.} \quad (4.21)$$

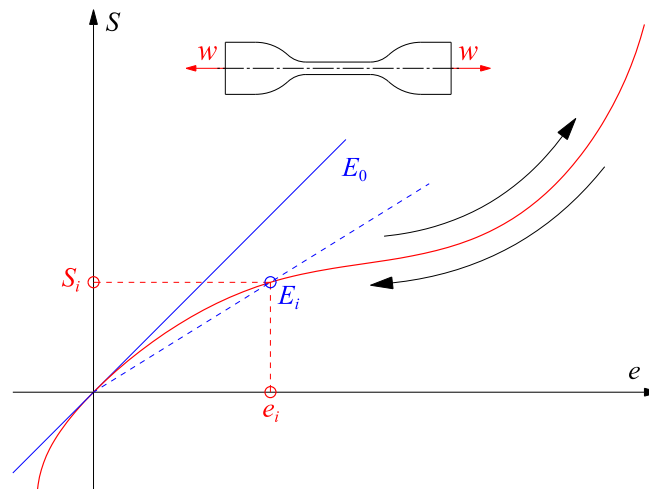


Slika 4.7. Funkcije gustoće energije deformiranja  $U$  i  $U^*$

<sup>16</sup> Hiperelastičan materijal prema literaturi se naziva i *Greenov* materijal [160].



Slika 4.8. kvalitativno prikazuje  $S$ - $e$  krivulju dobivenu eksperimentalnim mjerenjem hiperelastičnog materijala pomoću statičkog *vlačnog* pokusa (eng. *uniaxial test*) [187].



Slika 4.8.  $S$ - $e$  dijagram hiperelastičnog materijala

Vidljivo je da je krivulja vrlo kompleksnog i *izrazito* nelinearnog karaktera, a ovakav oblik krivulje dobija se eksperimentalnim mjerenjima deformacije  $e$  do  $\sim 600 \dots 700 \%$  [189]. Također je vidljivo da je materijal, makar nelinearan, *potpuno reverzibilan*, tj. na istoj krivulji se može pratiti tok opterećenja/rasterećenja. Potrebno je stoga, uz pretpostavku da je materijal homogen i izotropan, definirati takvu funkciju  $U$  koja će deriviranjem prema izrazu (4.21) dati oblik kakav ima Slika 4.8. Izraz za jednu od najranijih definicija funkcije  $U$  dali su u svojim radovima Mooney [181] i Rivlin [184], [185] i [186], koji prema nomenklaturi programskog paketa *Abaqus* [260] i [261] u punom polinomskom (Mooney-Rivlin) obliku glasi:

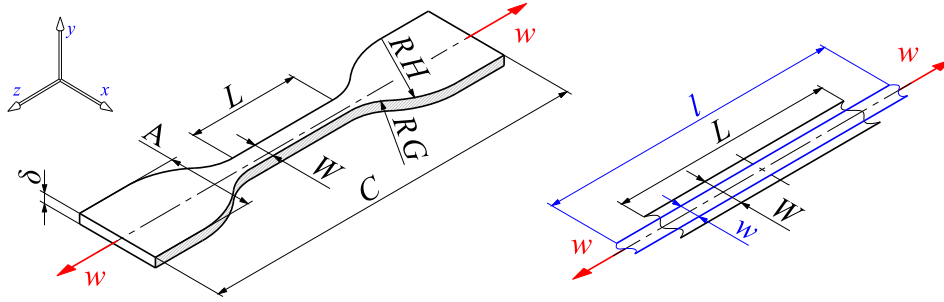
$$U = U(\bar{I}_1, \bar{I}_2, J_{el}) = \sum_{i+j=1}^N C_{ij} \cdot (\bar{I}_1 - 3)^i \cdot (\bar{I}_2 - 3)^j + \sum_{i=1}^N \frac{1}{D_i} \cdot (J_{el} - 1)^{2i}, \quad (4.22)$$

te je u sličnom obliku implementiran i u primjerice numeričke programske pakete *MSC Marc* [268] te *Cosmos* [273]. U izrazu (4.22),  $\bar{I}_1$  i  $\bar{I}_2$  su prva i druga invarijanta devijatora deformacije, dok su  $C_{ij}$  te  $D_i$  materijalne konstante. Jacobijeva determinanta  $J_{el}$  je prema *Abaqus* dokumentaciji [261] elastični volumni omjer (eng. *elastic volume ratio*). Materijalni koeficijent  $C_{ij}$  definira smično ponašanje materijala, dok  $D_i$  uključuje (ne)stlačivost. Za indeks  $i = 1$ , izraz koji povezuje  $D_i$  te *početni* modul stlačivosti  $K_0$  prema [261] glasi

$$N = 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^{N=1} \frac{1}{D_1} \cdot (J_{el} - 1)^{2 \cdot 1} \Rightarrow K_0 = \frac{2}{D_1} = \frac{2 \cdot \mu_0 \cdot (1 + \nu)}{3 \cdot (1 - 2 \cdot \nu)}, \quad (4.23)$$

gdje je vidljivo da za  $D_1 \approx 0 \text{ MPa}^{-1}$ , tj. potpuno nestlačiv materijal (što je ekvivalentno izrazu za  $\nu = 0,5$ ), *početni* modul stlačivosti  $K_0$  teži u beskonačno, što odgovara izrazu (4.15).

Za potpuno definiranje krivulje jednoosnog stanja napreznja (te troosnog stanja deformacije) statičkim vlačnim pokusom gumenog (hiperelastičnog) materijala, prikladno je poslužiti se standardiziranim uzorkom prema ASTM D412 [48] i ISO 37 [49] normama te ga opteretiti na način koji prikazuje Slika 4.9. Promatra se promjena glavne duljine  $L$  koja se povećava na  $l$ , kao i promjena dimenzija širine  $W$  na  $w$  te smanjenje debljine uzorka  $\delta$ .



Slika 4.9. ASTM D412 *dumb-bell* (*dogbone*) testni uzorak tip C, statički vlačni pokus

Prema referentnim istraživanjima (Treloar, [187], [188] i [189]), krivulja za ovakvo opterećenje ima kvalitativan oblik kao Slika 4.8., a glavno istežanje  $\lambda_1$  u tom slučaju iznosi

$$\lambda_1 = l/L, \quad \text{tj.} \quad \lambda_1 = 1 + e_1. \quad (4.24)$$

Izrazi za invarijante  $\bar{I}_1$  i  $\bar{I}_2$  te Jacobijevu determinantu  $J_{(el)}$  glase

$$I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \Rightarrow \bar{I}_1 = J^{-2/3} \cdot I_1, \quad I_2 = \lambda_1^2 \cdot \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \cdot \lambda_3^2 + \lambda_3^2 \cdot \lambda_1^2 \Rightarrow \bar{I}_2 = J^{-4/3} \cdot I_2, \quad (4.25)$$

$$J_{el} = J/J_t, \quad \nu = 0,5, \quad \Delta t \cong 0 \Rightarrow J_t = 1, \quad J = \det(\mathbf{F}) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3, \quad (4.26)$$

s napomenom da invarijanta istežanja  $I_3$  koja je povezana sa stlačivošću nije uključena u izraze, uz uvjet  $\nu = 0,5$ , tj.  $U = f(I_1, I_2)$  prema izrazu (4.23). Za  $I_3$  tada vrijedi relacija

$$\nu = 0,5, \quad V/V_0 = 1 = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3, \quad I_3 = \lambda_1^2 \cdot \lambda_2^2 \cdot \lambda_3^2 = J^2 \Rightarrow I_3 = 1. \quad (4.27)$$

U izrazu (4.26), indeks „t“ predstavlja temperaturu,  $J_t$  je promjena volumena zbog temperaturnih razlika  $\Delta t$ , a  $\mathbf{F}$  predstavlja gradijent deformiranja<sup>17</sup> čiji matricni izraz glasi

$$\mathbf{F} \equiv F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}, \quad (4.28)$$

a za nestlačivi materijal uz izraz (4.26) te izotermni odziv ( $\Delta t = 0$ ), općenito vrijedi izraz

$$J = \det(\mathbf{F}) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = 1 \quad \text{tj.} \quad \lambda_3 = 1/(\lambda_1 \cdot \lambda_2). \quad (4.29)$$

<sup>17</sup> Gradijent deformiranja  $\mathbf{F}$  je po općenitoj definiciji parcijalna derivacija svake komponente deformiranog  $\mathbf{x}$  vektora u odnosu na svaku komponentu referentnog  $\mathbf{X}$  vektora, uz uvjet da vrijedi izraz  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X})$  [70] i [261].

Uvrštavanjem vrijednosti determinante izraza (4.29), tj.  $J = 1$  u (4.26) te na kraju u početnu relaciju (4.22), vidljivo je da druga suma  $i = 1 \dots N$  nestaje budući da je  $1 - 1 = 0$ .

Definiranjem parametra  $N = 1$ , izraz (4.22) transformira se u jednostavniji oblik

$$U = C_{10} \cdot (\bar{I}_1 - 3) + C_{01} \cdot (\bar{I}_2 - 3), \quad (4.30)$$

a korištenjem izraza (4.29) i uvrštavanjem u (4.25) te kombiniranjem s (4.30), slijedi

$$\bar{I}_1 = I_1, \quad \bar{I}_2 = I_2 \Rightarrow U = C_{10} \cdot (I_1 - 3) + C_{01} \cdot (I_2 - 3), \quad (4.31)$$

što je konačni sređeni izraz za gustoću unutarnje energije deformiranja  $U$  uz uvjet *nestlačivosti*. Budući da mora biti održana konzistencija (kompatibilnost) s linearno elastičnim modelom (Hookeov zakon) u području malih deformacija [108], tj. u slučaju da vrijede relacije  $S \approx \sigma$ , kao i  $e \approx \varepsilon$  (uz  $\nu \approx 0,5$ ), za početni modul smicanja  $G_0$  vrijedi

$$\lambda \cong 1 \Rightarrow G_0 = 2 \cdot (C_{10} + C_{01}), \quad (4.32)$$

a uvrštavanjem uvjeta nestlačivosti  $\nu = 0,5$  u izraz (4.14), iz relacije (4.32) se dobija

$$\lambda \cong 1, \quad \nu \cong 0,5 \Rightarrow E_0 = \partial S_{(M-R)} / \partial \lambda \Big|_{\lambda=1} = 3 \cdot G_0 \Rightarrow E_0 = 6 \cdot (C_{10} + C_{01}), \quad (4.33)$$

dok je analogna relacija konzistencije za modul stlačivosti  $K_0$  prikazana izrazom (4.23).

Za dobivanje eksplicitne ovisnosti napreznja  $\sigma$  o deformaciji  $\varepsilon$ , izraz (4.31) potrebno je derivirati prema izrazu (4.21), uz napomenu da vrijedi općenita transformacija

$$U = U(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \Rightarrow \boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \Rightarrow S_{(M-R)} = \frac{\partial U}{\partial \lambda}, \quad (4.34)$$

gdje je vidljivo da je varijabla stvarne deformacije  $\varepsilon$  zamijenjena varijablom  $\lambda$  čiji izraz glasi

$$L \equiv l_0 \Rightarrow \lambda = \frac{l}{l_0} = 1 + \frac{l - l_0}{l_0} = 1 + e_n, \quad (4.35)$$

a indeks „n“ stavljen je da se posebno naglasi da je riječ o *nominalnoj* deformaciji  $e_n$ . U slučaju jednoosnog stanja napreznja  $\sigma$  (i troosnog stanja deformacije  $\varepsilon$ ), vrijede izrazi

$$\lambda_1 = \lambda, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}, \quad (4.36)$$

a korištenjem izraza (4.36) i uvrštavanjem u (4.25), moguće je dobiti ovisnost  $I_i(\lambda_i)$  koja glasi

$$I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = \lambda^2 + \frac{2}{\lambda}, \quad I_2 = \lambda_1^2 \cdot \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \cdot \lambda_3^2 + \lambda_3^2 \cdot \lambda_1^2 = 2 \cdot \lambda + \frac{1}{\lambda^2}. \quad (4.37)$$

Uvrštavanjem izraza (4.37) u izraz (4.31) za unutarnju energiju  $U$ , te deriviranjem prema izrazu (4.34), dobija se konačna, eksplicitna  $S$ - $e$  relacija, tj. ovisnost *nominalnog* naprezanja  $S$  o *nominalnoj* deformaciji  $e$  za Mooney-Rivlin konstitutivni model, koja glasi

$$S_{(M-R)} = \frac{\partial U}{\partial \lambda} \Rightarrow S_{(M-R)j} = 2 \cdot \left( C_{10} + \frac{C_{01}}{\lambda} \right) \cdot \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right). \quad (4.38)$$

U slučaju da se relacija (4.38) želi prikladno izraziti u formi *stvarnog* naprezanja  $\sigma$ , potrebno ju je prema izrazu (4.18) množiti faktorom  $\lambda$ , tj.  $(1 + e)$ . Relacija tada glasi

$$(1+e) = \lambda \Rightarrow \sigma_{(M-R)} = S_{(M-R)} \cdot \lambda \Rightarrow \sigma_{(M-R)j} = 2 \cdot \left( C_{10} + \frac{C_{01}}{\lambda} \right) \cdot \left( \lambda^2 - \frac{1}{\lambda} \right). \quad (4.39)$$

U formama u kakvima je raspisana u izrazima (4.38) i (4.39), konstitutivna funkcija se u programskom paketu *Abaqus* zove generalna polinomna forma (eng. *general polynomial*,  $N = 1$ ), materijal je potpuno nestlačiv i potrebno je definirati dva materijalna parametra,  $C_{10}$  i  $C_{01}$ . Način određivanja parametara pojašnjen je u verifikacijskom poglavlju 5.3.1.

U slučaju da je parametar  $C_{01}$  jednak nuli, izrazi (4.38) i (4.39) prelaze u jednostavniju neo-Hooke formu [186], tj. reducirani polinom uz  $N = 1$  relacijama

$$C_{01} = 0 \Rightarrow S_{(N-H)j} = 2 \cdot C_{10} \cdot \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right), \quad \sigma_{(N-H)j} = 2 \cdot C_{10} \cdot \left( \lambda^2 - \frac{1}{\lambda} \right). \quad (4.40)$$

te je vidljivo da je neo-Hooke (N-H) konstitutivni model posebna, osnovna varijacija M-R modela [69] i [70]. I dalje vrijedi izraz (4.23), dok (4.32) poprima jednostavniji oblik

$$C_{01} = 0 \Rightarrow G_0 \equiv \mu_0 = 2 \cdot C_{10}, \quad (4.41)$$

što znači da je za definiranje N-H modela dovoljno poznavanje dvije linearne konstante prema izrazima (4.13), (4.14) i (4.15), npr. Youngov modul  $E$  i Poissonov faktor  $\nu$ . Uz preuzete parametre gume  $C_{10}$  i  $C_{01}$  iz [11], str. 105, tablica 3.7 prema [189], te prema izvedenom M-R modelu, napravljena je *orijentacijska* simulacija ASTM uzorka<sup>18</sup> (Slika 4.9. prikazuje dimenzije i način opterećenja) u programskom paketu *Abaqus* što prikazuje Slika 4.10.



Slika 4.10. *Abaqus* simulacija, ASTM D412 testni uzorak C, 100 % deformacije  $e$

Faktor uvećanja iznosi  $k = 1$ , a deformirani model prikazan je uz uključenu *simetriju*.

<sup>18</sup> Numeričke simulacije ASTM D412 *dumb-bell* uzorka česta su tema članaka na temu gume [213] i [214].

Bitno je napomenuti da su pri nelinearnoj analizi uporabom ukupnog Lagrangeovog pristupa (eng. *total Lagrangian approach*, tj. TL), diskretne jednadžbe formulirane u odnosu na referentnu (početnu) konfiguraciju što se prema [71], [76] i [77] može zapisati izrazom

$$\int_{V_0} \delta \boldsymbol{\varepsilon}_G^T \boldsymbol{\sigma}_p dV = \delta \mathbf{V}^T \mathbf{R}_e, \quad (4.42)$$

gdje je  $V_0$  početni volumen, a zbog transformacija, uvode se nove veličine za naprezanje: tzv. drugi Piola-Kirchhoff tenzor naprezanja  $\boldsymbol{\sigma}_p$ , te Greenov tenzor deformacije  $\boldsymbol{\varepsilon}_G$ .

Za ažuriran Lagrangov pristup (eng. *updated Lagrangian approach*, UL), diskretne jednadžbe su formulirane u odnosu na trenutno stanje ( $i + 1$ ), za koje se pretpostavlja da je nova referentna konfiguracija što se prema [71], [76] i [77] može zapisati izrazom

$$\int_{V_i} \delta \left( {}^{(i+1)} \boldsymbol{\varepsilon}_A^T \right) {}^{(i+1)} \boldsymbol{\sigma}_c dV = \delta \mathbf{V}^T \mathbf{R}_e. \quad (4.43)$$

Na lijevoj strani izraza (4.43),  $\boldsymbol{\sigma}_c$  je Cauchyjev tenzor naprezanja (stvarno naprezanje), a  $\boldsymbol{\varepsilon}_A$  je Almansijski tenzor deformacije. Notacija  ${}^{(i+1)} \boldsymbol{\varepsilon}_A$  i  ${}^{(i+1)} \boldsymbol{\sigma}_c$  znači da su trenutna deformacija i naprezanje u stanju ( $i + 1$ ). Izraz se integrira po volumenu  $V_i$  koji je u stanju  $i$ . Budući da su desne strane izraza (4.42) i (4.43) jednake, virtualni rad unutarnjih sila mora biti *jednak* neovisno o volumenu  $V_i$  preko kojeg se integracija vrši.

Ugrađeni *Abaqus* i *Marc* algoritmi pri rješavaju *nelinearnih* hiperelastičnih problema koriste ažurirani Lagrangeov pristup [260], [261], [266], [268] i [269], budući da su izgledne *velike* deformacije (eng. *finite deformations*, tj. *strains*), kao i osvježavanje (ažuriranje) tangencijalne matrice krutosti  $\mathbf{K}_T$  u svakom narednom inkrementu/iteraciji.

### 4.3. Kontakt

Osnovna motivacija u razvoju kontaktne mehanike sadržana je u potrebi što točnijeg poznavanja raspodjele kontaktnih pritisaka na površini tijela te složenih efekata koji nastaju kao posljedica te interakcije. Potreba proučavanja kontaktnih fenomena seže još u drevni Egipat, kao i u doba eksperimenata da Vincija ili Coulomba [90], no znanstvena potreba za zasebnim proučavanjem mehanike kontakta postala je očita 1882. godine objavljivanjem vrlo utjecajnog rada H. R. Hertza, naslovljenog *Über die Berührung Fester Elastischer Körper*<sup>19</sup> [196] što se smatra začetkom kontaktne mehanike kao zasebne znanstvene discipline unutar okvira teorije elastičnosti [83], [86], [88], [91] i [97].

<sup>19</sup> Prijevod s njemačkog: „O kontaktu elastičnih tijela“.

*Kontakt bez trenja*, idealizacija je stvarnih kontakata i može se smatrati dovoljno dobrom aproksimacijom samo u slučaju proučavanja kontakta vrlo glatkih i/ili dobro podmazanih površina koje slobodno mogu klizati jedna niz drugu, tj. bez otpora od ikakvog praktičnog značaja. Preko kontaktne površine se uslijed djelovanja vanjskog opterećenja s jednog tijela na drugo mogu prenositi samo *normalne* komponente kontaktnih pritisaka, a tangencijalne su sile u svakoj kontaktnoj točki *uvijek* jednake nuli.

*Kontakt s trenjem* vrsta je kontakta do koje dolazi u svim realno postojećim kontaktnim problemima. Kod takvog je kontakta klizanje u točkama dodira suprotstavljeno silom trenja, što znači da je za pojavu međusobnog klizanja površina, navedenu silu trenja potrebno nadvladati silama koje djeluju na pravcu tangencijalnom na kontaktnu površinu. Sama sila trenja  $F_T$  u svakoj pojedinoj točki kontakta  $A(x_i)$  u svojem intenzitetu ovisi o svojstvima promatranih površina (hrapavost, prisutnost maziva i sl.), makroskopski objedinjenih u iznosu faktora trenja  $\mu$ , te o intenzitetu normalne komponente  $p_n(x_i)$  kontaktnog pritiska u toj istoj promatranoj točki. Takva se zavisnost uobičajeno izražava prema vrlo dobro poznatoj relaciji  $F_T = \int_{(A)} \mu \cdot p_n(x_i) dA$ . Ovisno o odnosu intenziteta tangencijalnih komponenti  $p_t(x_i)$  i normalnih komponenti kontaktnih pritisaka, a uz pretpostavku *Coulombova* zakona trenja [85], [87] i [91], skupovi točaka na kontaktnoj površini mogu stoga tvoriti zone u stanju prijanjanja (eng. *stick*), u kojima su tangencijalne komponente manje od sile trenja, ili pak u stanju klizanja (eng. *slip*), kada je sila trenja nadvladana. Uzimanje trenja u obzir neizbježno matematički čini problem kompleksnijim i svaki model čini *nelinearnim*, međutim njegovim se zanemarivanjem u krajnji rezultat analize nerijetko uvodi *značajna* pogreška [88], a ponekad i *potpuno netočno* rješenje [55].

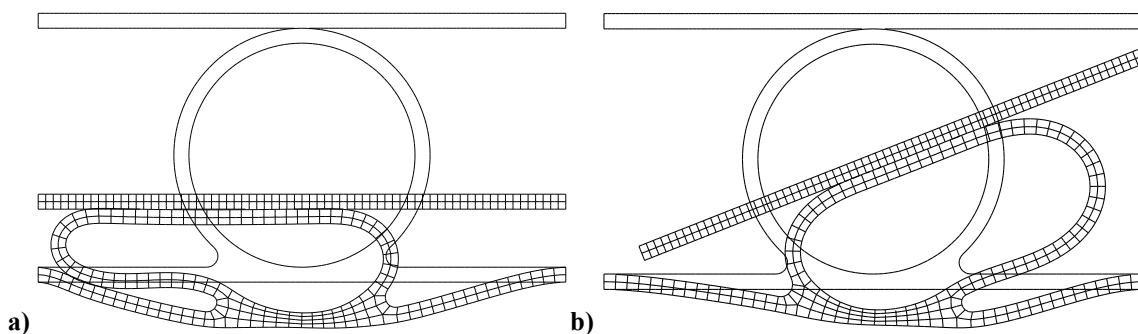
Hertzov kontakt ili Hertzov problem pojam je od izuzetnog značaja u kontaktnoj mehanici, prvenstveno stoga što se njime uz zadovoljavajući stupanj točnosti u praksi može aproksimirati velik broj realnih *nekonformnih*<sup>20</sup> kontaktnih problema. Svaki Hertzov kontakt mora zadovoljavati sljedeće uvjete [85], [87], [88] i [196]:

- površine tijela u kontaktu neprekidne su funkcije prostornih koordinata do uključno svoje druge derivacije,
- profili kontaktnih površina tvore nekonforman kontakt što implicira malu poluširinu  $a$  kontaktne površine (Slika 5.3. a) u usporedbi s polumjerima zakrivljenosti tijela i s njihovim ukupnim dimenzijama,

<sup>20</sup> Kontakt pri kojemu se tijela u odsutnosti vanjskog opterećenja dodiruju samo u jednoj *točki* ili duž *linije* [88].

- pomaci i deformacije su *mali*, a tijela homogena i izotropna – time razmatranje problema uvijek ostaje unutar okvira linearne teorije elastičnosti, bez razmatranja *materijalne* ili *geometrijske nelinearnosti*,
- naprezanja i deformacije u svakom se od dvaju tijela u kontaktu može razmatrati na način da se svako tijelo odvojeno promatra kao elastični poluprostor na kojeg djeluje rezultirajući kontaktni pritisak – ovakvo pojednostavnjenje danog problema implicitno sadrži sve elemente prvih triju navedenih pretpostavki i u stvari predstavlja analitičku implementaciju zanemarenja utjecaja oblika tijela i prostornog rasporeda njegovih oslonaca,
- površine se smatraju idealno glatkima, stoga između njih *nema trenja*.

U skupinu ne-Hertzovih kontakata spadaju svi oni slučajevi koji ne zadovoljavaju *barem jednu* od prethodno navedenih pretpostavki. U tu se skupinu ubrajaju, na primjer, sve vrste konformnih kontakata, kontakti s (nezanemarivim) trenjem, elastoplastični kontakti, višestruki elastični nekonformni kontakti (npr. valjna tijela u valjnim ležajevima), kontakti koji mogu uključivati velike pomake (npr. kod nemetalnih, *hiperelastičnih* materijala, Slika 4.11.) itd. Rješavanje takvih problema uz pretpostavke Hertzove teorije gotovo uvijek dovodi do *nezadovoljavajuće točnosti* rezultata, stoga se može doći do zaključka kako svaki realni kontaktni problem spada u klasu ne-Hertzovih problema te kako Hertzova formulacija uvijek i bez iznimke predstavlja samo *aproksimaciju* stvarnih uvjeta koji vladaju u zoni realnih kontakata. Kontaktni problem stoga spada u klasu ne-Hertzovih kontakata iz razloga *nezadovoljavajuće točnosti* rezultata koju za njegov opis pruža Hertzova teorija.



Slika 4.11. Kontakt krutog poklopcu i gumene brtve uz velike deformacije, Abaqus 2D simulacija

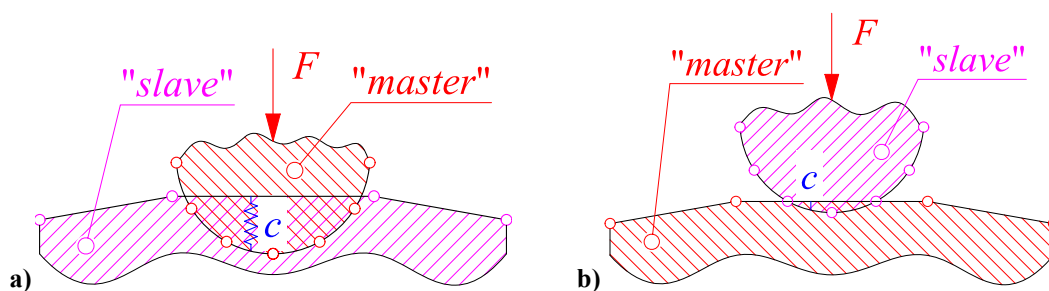
Uz korištenje Coulombove *stick/slip* formulacije, u ovom radu korištena je primarno *penalty* (eng. *penalty*, kazna, penal, globa) metoda [87], [88], [90], [209] koja u kontaktni proračunski model uključuje virtualnu oprugu  $c$  koja svojom krutošću onemogućuje prodiranje kontaktnih ploha jednu u drugu [260] i [261] kao što prikazuje Slika 5.1.

## 5. Verifikacija primijenjenih konačnih elemenata

U ovom poglavlju, numerički je riješeno šest primjera. Cilj je verificirati i validirati<sup>21</sup> prikladnost korištenih konačnih elemenata, nelinearnih modela, nametnutih rubnih uvjeta te općenito metodologije rješavanja problema kako bi se sa sigurnošću moglo pristupiti znatno kompleksnijoj nelinearnoj analizi proračuna gumenog zgloba. Primjeri su riješeni uz pretpostavku da je materijal konstrukcija *homogen* i *izotropan*, no da su pomaci i deformacije *veliki*, tj. korištena su načela geometrijske i materijalne *nelinearnosti*.

### 5.1. Kontakt

U prvom kontaktnom primjeru, riješen je klasični problem Hertzovog kontaktnog pritiska [192] gdje u obzir *nije* uzeta materijalna ni geometrijska nelinearnost (*Abaqus* NLGEOM, eng. *non-linear geometry* opcija isključena), kao ni faktor trenja  $\mu$ .



Slika 5.1. Definicija kontakta: a) pogrešna, b) ispravna

U programskom paketu *Abaqus* postoji više načina kako definirati kontaktnu interakciju dvije plohe. Slika 5.1. a) prikazuje numerički *pogrešnu* definiciju kontakta, gdje je vidljivo da je *master* (glavna) ploha koja je diskretizirana gušće, penetrirala *slave* (sporedna) plohu koja je diskretizirana rjeđe, dok je praksa da se koristi *obrnuti* princip [5]. Također, *slave* ploha je penetrirana *previše* jer je pri korištenju *penalty* metode interakcije, krutost virtualne opruge  $c$  koja sprječava prodor definirana *premekano*. Razlog prodiranju može biti i definicija kontakta kao *node-to-surface* (čvor-površina), što je numerička anomalija koja se minimizira<sup>22</sup> definiranjem kontakta kao *surface-to-surface* (površna-površina) [5] i [261].

U verifikacijskim problemima, kao i u modelu rastojnika-prigušivača, svi su kontakti nakon niza testiranja te provjere konvergencije definirani kao *penalty* (predefinirana vrijednost krutosti) s trenjem te *hard contact* (uz dozvoljenu separaciju), gušće diskretizirana ploha uvijek je određena kao *slave* te je osnovni kontakt definiran kao *surface-to-surface*.

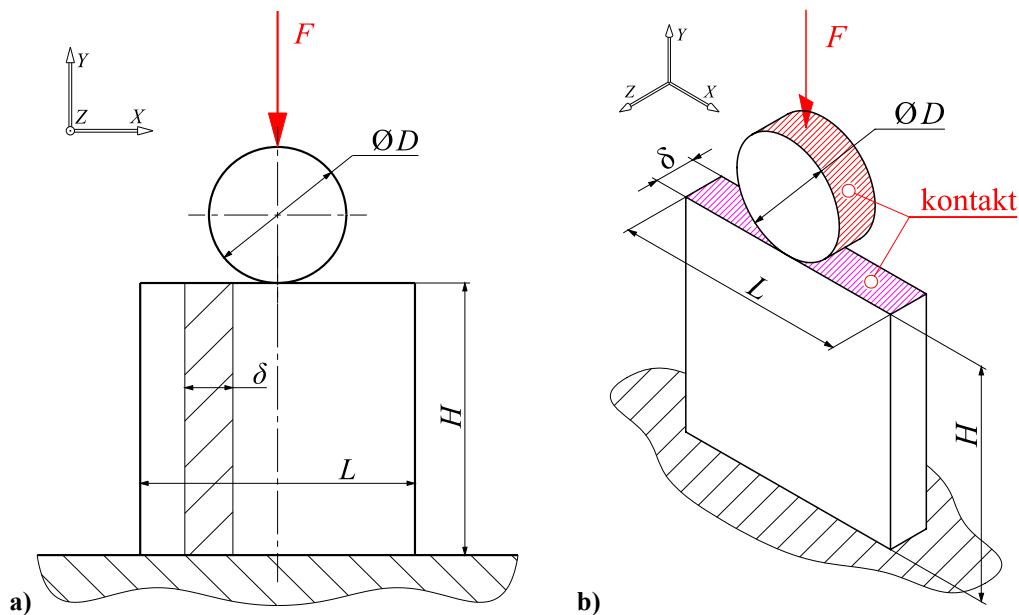
<sup>21</sup> Pod verifikacijom se misli na usporedbu s *analitičkim rješenjem*, dok validacija implicira *eksperiment*.

<sup>22</sup> Numerički *nije moguće* izbjeći penetraciju u slučaju korištenja *penalty* metode, no bitno je da je *što manja*.



### 5.1.1. Primjer I: analiza kontaktnog pritiska

Čelični cilindar pritišće uklješteni aluminijski blok, a na cilindar djeluje koncentrirana sila  $F$ . Slika 5.2. shematski prikazuje zadani problem i kontaktne plohe, a pretpostavljeno je *linearno elastično* ponašanje materijala te *ravninsko* stanje *deformacije*. Također je primijenjena formulacija malih pomaka i deformacija (NLGEOM isključen).



Slika 5.2. Primjer I: kontakt cilindra i ploče (postolja)

Tablica 5.1. prikazuje zadane geometrijsko materijalne karakteristike.

Tablica 5.1. Primjer I, zadani parametri

$D_{\text{cil}}$ , mm	$L_{\text{pos}}$ , mm	$H_{\text{pos}}$ , mm	$\delta$ , mm	$F$ , kN	$E_{\text{cil}}$ , GPa	$E_{\text{pos}}$ , GPa	$\nu_{\text{cil}}$	$\nu_{\text{pos}}$
100	200	200	1	35	210	70	0,3	0,3

Analitički i numerički određeni su:

- maksimalni iznos Hertzovog kontaktnog pritiska  $p_{h,\text{max}}$ ,
- duljina kontaktne zone  $2 \cdot a$ , tj. *poluširina*  $a$ ,
- raspored kontaktnog pritiska  $p_h(a)$  duž poluširine kontaktne zone  $a$ .

Ispitana je konvergencija numeričkog proračunskog modela, a numerički rezultati su uspoređeni s analitičkim rješenjima [192], [193] i [196].

Zbog visokog iznosa sile  $F$  (35 000 N), očito je da bi u stvarnosti nastale znatne plastične deformacije, kao što je i izgledno da bi nastupilo *izvijanje* aluminijskog bloka zbog tanke stijenke debljine  $\delta = 1$  mm, no naglašeno je načelo materijalne/geometrijske *linearnosti*.

## 5.1.1.1. Analitičko rješenje

Analitičko rješenje za ovaj kontaktni problem, Heinrich Hertz dao je 1881. [196]. Izraz za maksimalni iznos kontaktnog pritiska  $p_h$  dva cilindra (linijski *početni* kontakt) glasi

$$p_{h,\max} = \sqrt{\frac{F_n \cdot E^*}{2 \cdot \pi \cdot \delta \cdot R^*}} = \frac{2 \cdot F_n}{\pi \cdot \delta \cdot a}, \quad (5.1)$$

gdje je  $F_n$  zadana normalna sila koja djeluje na cilindar,  $E^*$  je kombinirani modul elastičnosti,  $\delta$  je debljina cilindra i ploče (postolja), a  $R^*$  je kombinirani radijus. Kombiniranim radijusom  $R^*$  definiran je ekvivalentni polumjer zaobljene (cilindar) i ravne (uklješteni blok) površine.

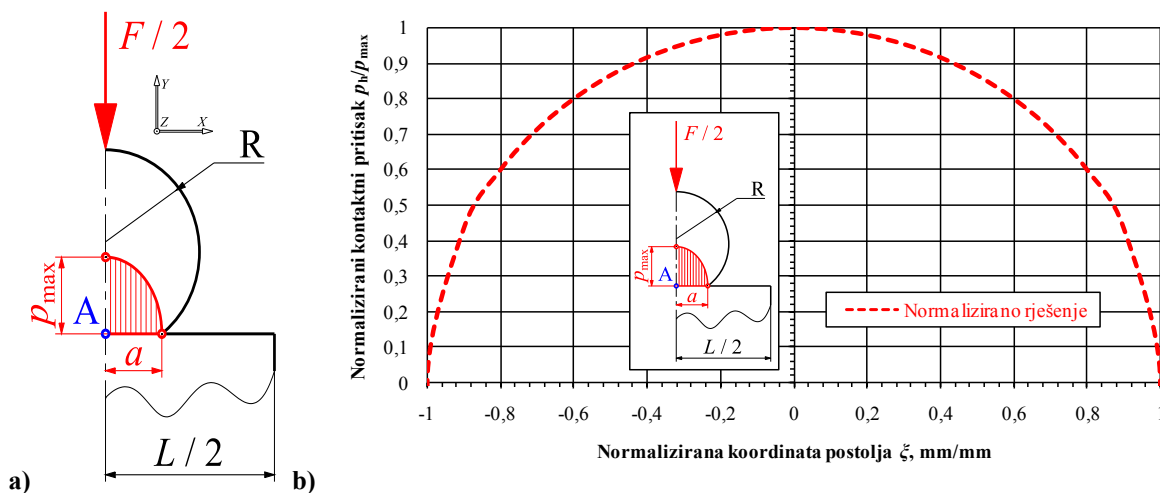
Izraz za polovinu duljine cijele kontaktne zone  $2 \cdot a$ , tj. poluširine  $a$  iznosi

$$a = \sqrt{\frac{8 \cdot F_n \cdot R^*}{\pi \cdot \delta \cdot E^*}}. \quad (5.2)$$

Koristeći *normaliziranu* bezdimenzijsku koordinatu  $\xi = x/a$ , uz uvjet da je  $x$  koordinata kartezijevog koordinatnog sustava, izraz za raspored kontaktnog pritiska glasi

$$p_h(x) = p_{h,\max} \cdot \sqrt{1 - \xi^2}. \quad (5.3)$$

Slika 5.3. prikazuje *eliptičan* profil [88] Hertzovog pritiska duž kontaktne površine.



Slika 5.3. Raspored kontaktnog pritiska  $p_h$ : a) proračunski model, b) normalizirano rješenje

Kombinirani modul elastičnosti  $E^*$  određen je iz modula elastičnosti  $E_{cil}$ ,  $E_{pos}$  te Poissonovih faktora  $\nu_{cil}$ ,  $\nu_{pos}$  čeličnog cilindra i aluminijskog bloka izrazom

$$E^* = \frac{2 \cdot E_{cil} \cdot E_{pos}}{E_{pos} (1 - \nu_{cil}^2) + E_{cil} (1 - \nu_{pos}^2)} \cong 115,385 \text{ GPa}. \quad (5.4)$$

Kombinirani, ekvivalentni radijus zaobljenja  $R^*$  određen je iz radijusa zaobljenja čeličnog cilindra  $R_{\text{cil}}$  te aluminijskog bloka  $R_{\text{pos}}$  (Tablica 5.1.) izrazom

$$R^* = \frac{R_{\text{cil}} \cdot R_{\text{pos}}}{R_{\text{cil}} + R_{\text{pos}}}. \quad (5.5)$$

Budući da je radijus postolja beskonačan ( $R_{\text{pos}} = \infty$  mm, jer je kontaktna ploha ravna), kombinirani radijus  $R^*$  određen je relacijom dobivenom preko limesa funkcije

$$R^* = \lim_{R_{\text{pos}} \rightarrow \infty} \frac{R_{\text{cil}} \cdot R_{\text{pos}}}{R_{\text{cil}} + R_{\text{pos}}} = R_{\text{cil}} = \frac{D_{\text{cil}}}{2} = 50 \text{ mm}. \quad (5.6)$$

Uvrštavanjem zadanih parametara u relacije (5.1) i (5.2), dobiveni su rezultati

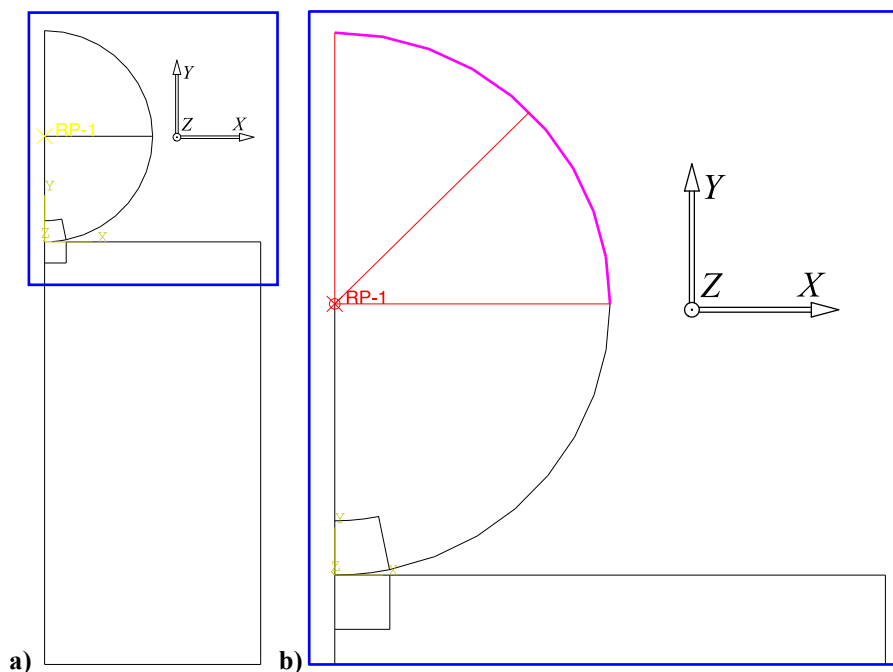
$$p_{h,\text{max}} = p_h(a), T(x = y = z = 0) \Rightarrow p_{h,\text{max}} = 3\,585,362 \text{ MPa}, \quad (5.7)$$

$$a = 6,215 \text{ mm}, \quad (5.8)$$

što su rješenja koja se uzimaju kao konačni *verifikacijski* parametri numeričke analize.

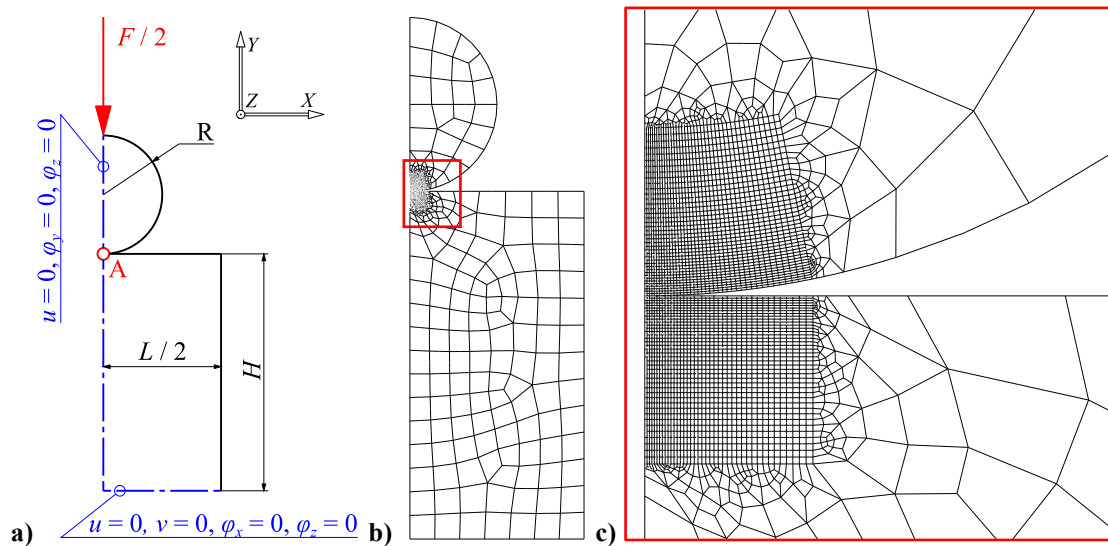
### 5.1.1.2. Numeričko rješenje

Proračunski model je jednom simetričan prema geometriji i opterećenju, stoga je u svrhu štednje resursa korišteno polovina geometrije i sile  $F$ . Slika 5.4. a) prikazuje *partitionirani* proračunski model u programskom paketu *Abaqus* osmišljen tako radi jednostavnijeg lokalnog usitnjavanja mreže te postavljanja sile  $F$  na interesnom području.



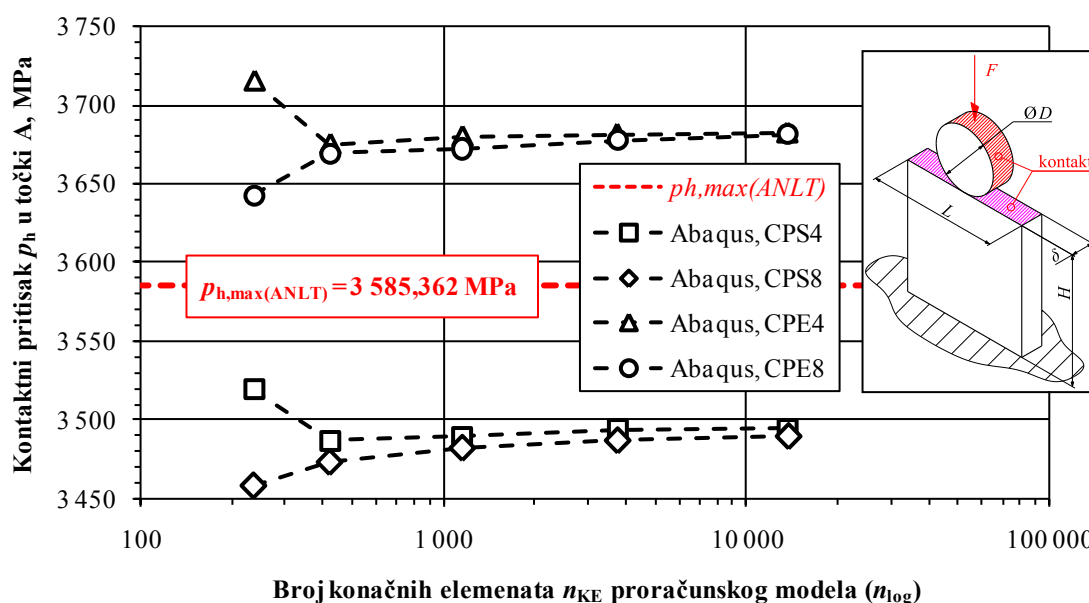
Slika 5.4. Polovina kontaktnog proračunskog modela: a) particije, b) referentna točka RP-1

Slika 5.4. b) prikazuje detalj proračunskog modela gdje je referentna točka RP-1 pozicionirana u težište cilindra i vezana s gornjom četvrtinom kružnice cilindra. Referentnoj točki RP-1 pridodano je svojstvo *Distributing* pomoću opcije *Coupling*, koja omogućuje interakciju referentne točke s drugim plohama prenoseći pomake i rotacije [260] i [261].



Slika 5.5. Proračunski model: a) rubni uvjeti, b) mreža, c) detalj mreže

Na model su primijenjeni rubni uvjeti simetrije i uklještenja (Slika 5.5. a), a mreža je lokalno usitnjena na mjestu očekivanog kontakta. Slika 5.5. c) prikazuje detalj najgušće mreže konačnih elemenata (mreža V). Konvergencija je radi dodatne kontrole ispitana u odnosu na  $p_{h,max}$  za ravninsko stanje naprezanja (eng. *plane stress*) te ravninsko stanje deformacije (eng. *plane strain*, skrać. *ravninsko*) elementima prvog (CPS4, CPE4) i drugog (CPS8, CPE8) reda.



Slika 5.6. Konvergencija ravninskog proračunskog modela

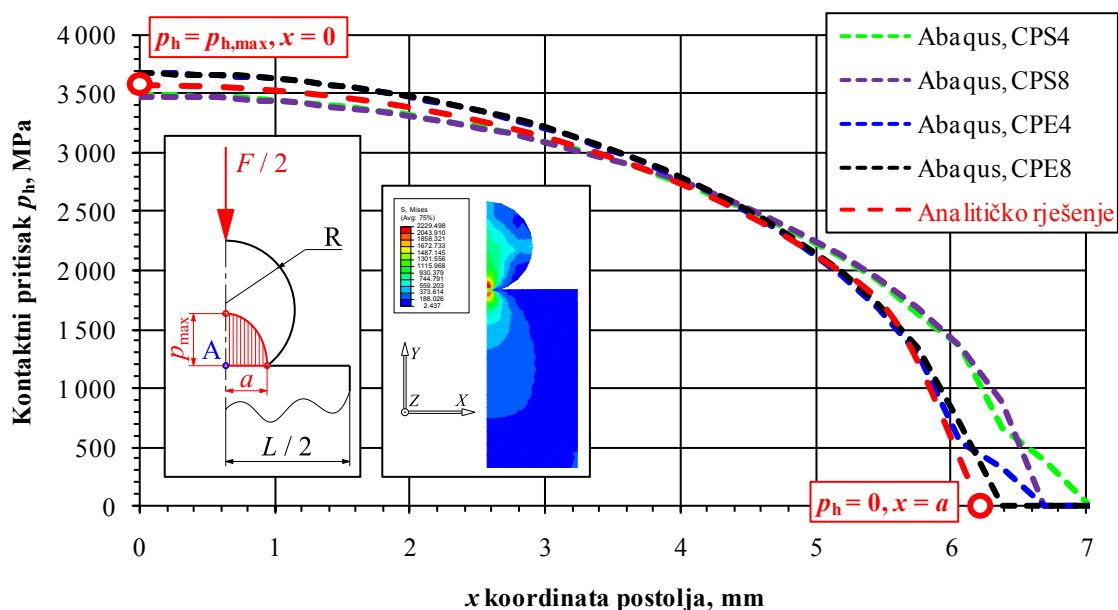
Slika 5.6. prikazuje konvergencije svih proračunskih modela. Vidljivo je da svi korišteni konačni elementi relativno brzo konvergiraju (otprilike u trećoj mreži), no isto tako je vidljiva i devijacija u odnosu na analitičko rješenje. Uvidom u dijagram konvergencije, također je vidljivo da su numerička rješenja ravninskog stanja deformacije (inicijalno pretpostavljeno analitičko i numeričko rješenje zadano u tekstu primjera) vizualno *zrcaljena* numeričkim rješenjima ravninskog stanja naprežanja u odnosu na analitičko rješenje.

Tablica 5.2. prikazuje usporedbu relativnih grešaka  $E_{rel}$  najgušćih mreža konačnih elemenata sva četiri proračunska modela u odnosu na analitičko rješenje pritiska  $p_{h,max}$ .

Tablica 5.2. Usporedba rješenja  $p_{h,max}$

Maksimalni pritisak	$\Sigma n_{KE}$	$p_{h,max}$ , MPa	$E_{rel}$ , %
Analitičko rješenje	-	3 585,362	0
Abaqus, CPS4	13 706	3 494,453	2,602
Abaqus, CPE4	13 706	3 682,128	-2,628
Abaqus, CPS8	13 706	3 489,197	2,756
Abaqus, CPE8	13 706	3 681,569	-2,613

Vidljivo je da su konačna odstupanja u iznosu od  $\approx 2,6$  %, što daje relativnu numeričku grešku od  $\approx 5,5$  % usporedbom najvišeg i najnižeg dobivenog *numeričkog* iznosa. Razlog razlika nalazi se u činjenici da je Hertzov kontaktni model *pojednostavnjen*, numerički modeli su *izričito* ravninskog stanja naprežanja/deformacije, a u stvarnosti, problemi ovakve vrste redovno su *mješovitog* tipa. Kako su iznosi pritiska  $p_{h,max}$  za ravninsko stanje deformacije *višeg* iznosa, uzimaju se radi sigurnosti kao *referentni*.



Slika 5.7. Ovisnosti kontaktnog pritiska  $p_h$  o udaljenosti  $x$ ,  $F = 35$  kN

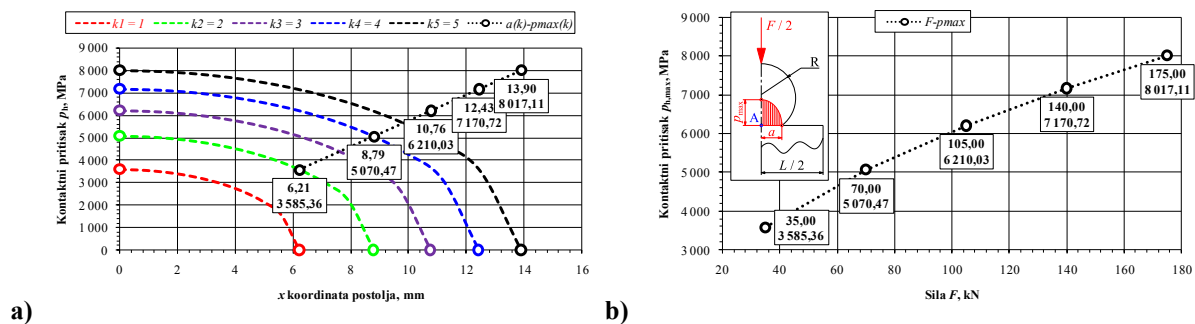
Slika 5.7. prikazuje ovisnost iznosa kontaktnog pritiska  $p_h$  o koordinati  $x$ , tj. udaljenosti od točke A, koja je prva točka kontakta cilindra i postolja. Vizualno je vidljivo dobro poklapanje svih proračunskih modela, izuzevši desnu stranu dijagrama gdje CPS4 i CPS8 KE pokazuju nešto više iznose kontaktnog pritiska  $p_h$  u odnosu na analitičko rješenje.

Također je vidljivo da je numerički vrlo zahtjevno verificirati precizno duljinu kontaktne zone  $a$ , jer numerički proračun kontaktne zone ovisi o položajima konačnih elemenata/čvorova te bi za egzaktno rješenje jedan čvor morao točno ležati na mjestu prestanka kontakta, što je numerički teško izvesti [92] i [197]. Vidljive su devijacije krivulja u krajnjem donjem desnom uglu dijagrama (Slika 5.7., između  $x$  koordinata 6 i 7 mm).

Za dodatnu kontrolu i uvid u nelinearnost numeričkog kontaktnog problema, generirano je pet familija usporednih krivulja Hertzovog kontaktnog pritiska  $p_h$  za razmatrani problem, uz diskretni faktor povećanja  $k$  ( $\Delta k = 1$ ) zadane sile  $F_n$  izrazom

$$\sum_{k=1}^n k, \quad n=5 \Rightarrow F_{nk} = k \cdot F_n. \quad (5.9)$$

Slika 5.8. a) prikazuje da je iznos maksimalnog kontaktnog pritiska  $p_{h,max}$  i kontaktne zone  $a$  *linearно* vezan, što implicira da je krivulja spojnica koordinata  $T_k(a; p_{h,max})$  pravac koji prolazi kroz ishodište koordinatnog sustava (za  $p_{h,max} = 0$  i  $a = 0$ , tj. *nema* kontaktnog pritiska).

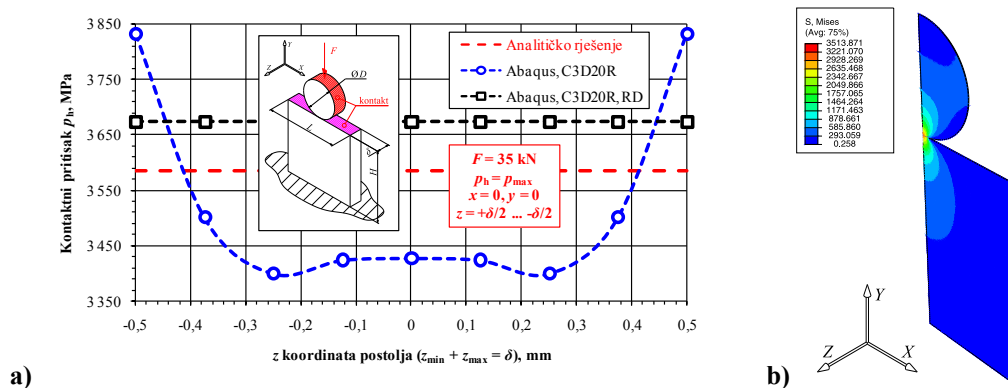


Slika 5.8. Familija krivulja  $F_{nk}$ : a) ovisnost  $p_{h,max}$  i  $a$ , b) ovisnost  $p_{h,max}$  o  $F_{nk}$

Slika 5.8. b) prikazuje da je iznos maksimalnog kontaktnog pritiska  $p_{h,max}$  *nelinearno* ovisan o normalnoj sili  $F_n$ . Vidljivo je da za sve veću silu  $F_n$ , *opada* maksimalni iznos kontaktnog pritiska  $p_{h,max}$  što je očekivan efekt iz razloga što povećanjem normalne sile  $F_n$  raste i kontaktna površina iznosa  $A_h = 2 \cdot a \cdot \delta$ , stoga se pritisak  $p_h = F_n/A_h$  smanjuje.

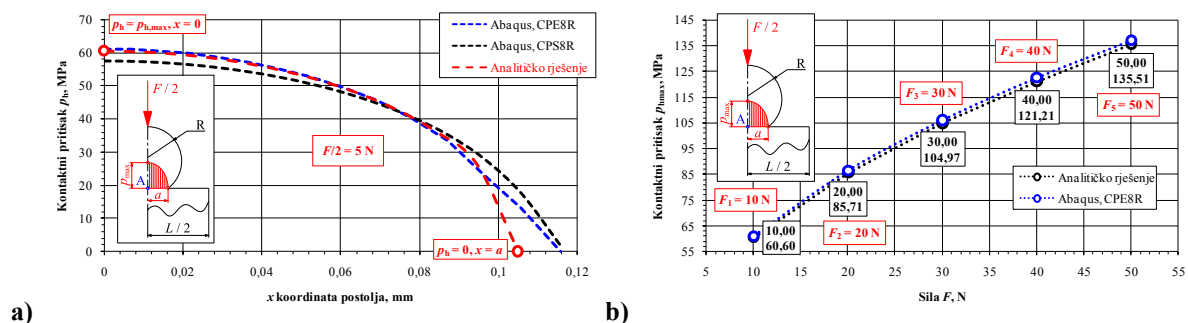
Ovim jednostavnim opažanjem pokazana je *nelinearnost* kontakta, te ono što je trivijalno riješiti analitičkim putem zbog jednostavnog modela, numerički postaje sve kompleksniji problem zbog već navedenog fenomena *promjenjivih* rubnih uvjeta.

Značajno je primijetiti i da numerički, čak i u slučaju tako malene debljine stijenke kao  $\delta = 1$  mm, kontaktni pritisak  $p_{h,max}$  nije konstantan po presjeku, što prikazuje Slika 5.9. a).



Slika 5.9. Ovisnost maksimalnog kontaktnog pritiska  $p_{h,max}$  o koordinati  $z$ , C3D20R

Radi dodatne kontrole proračunskog modela, sila je umanjena s  $F = 35$  kN na 10 N, a Slika 5.10. a) prikazuje rezultate nove analize. Vidljivo je bolje slaganje rezultata numeričkog i analitičkog modela u slučaju manje sile  $F_n$ , što implicira da povećanjem sile (tj. za veće iznose pomaka i deformacija), razlika analitičkog i numeričkog rješenja  $p_{h,max}$  sve više raste.



Slika 5.10. a) ovisnost pritiska  $p_h$  o koordinati  $x$ ,  $F = 10$  N b) ovisnost  $p_{h,max}$  o  $F_{nk}$

Slika 5.10. b) i Tablica 5.3. prikazuju usporedbe familije rješenja te relativne greške  $E_{rel}$ , uz zadane znatno manje normalne sile opterećenja  $F_n$ , a analogno izrazu (5.9).

Tablica 5.3. Usporedba ovisnosti  $p_{h,max}$  o  $F_{nk}$ , analitičko i numeričko rješenje

$k$	$F_n, N$	$p_{h,max}(anlt), MPa$	$p_{h,max}(abq), MPa$	$E_{rel}, \%$
1	10	60,604	61,196	0,977
2	20	85,707	86,640	1,089
3	30	104,969	106,157	1,132
4	40	121,207	122,622	1,167
5	50	135,514	137,128	1,191

Uvidom u prethodna rješenja, može se zaključiti da se numerički može vjerno opisati razmatrani kontaktni problem uz vrlo dobro slaganje s analitičkim rješenjem u slučaju malih pomaka i deformacija. U slučaju velikih pomaka i deformacija, potrebno je izvršiti kompleksnu nelinearnu te elastoplastičnu analizu, za što analitički model nije podoban.

### 5.1.1.3. Dodatak: verifikacija naprezanja kontaktnog modela

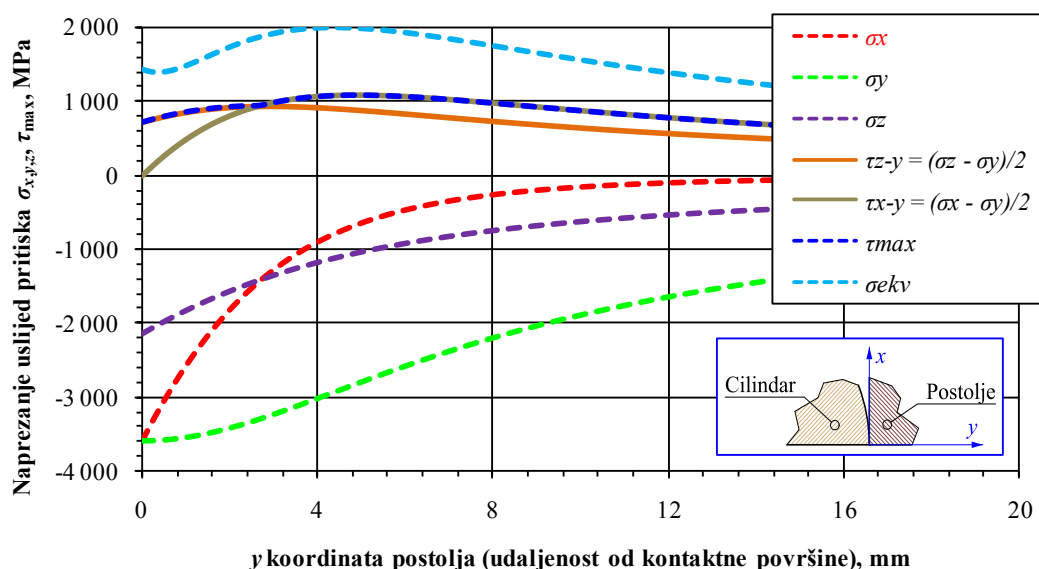
U svrhu detaljnije kontrole proračunskog modela, analizirana su i složena naprezanja koja nastaju kao posljedica elastične kontaktne interakcije cilindra te ravne ploče, tj. postolja. Izrazi za naprezanja u smjeru glavnih osi, u ovisnosti o koordinati  $y$ , tj. udaljenosti od kontaktne površine, a gdje je  $\sigma_y$  ujedno i glavno naprezanje  $\sigma_3$ , prema [37] i [199] glase

$$\sigma_x = -p_{\max} \cdot \left( \frac{1 + 2 \cdot \frac{y^2}{a^2}}{\sqrt{1 + \frac{y^2}{a^2}}} - 2 \cdot \left| \frac{y}{a} \right| \right), \quad \sigma_y = \sigma_3 = \frac{-p_{\max}}{\sqrt{1 + \frac{y^2}{a^2}}}, \quad \sigma_z = -2 \cdot \nu_{\text{pos}} \cdot p_{\max} \cdot \left( \sqrt{1 + \frac{y^2}{a^2}} - \left| \frac{y}{a} \right| \right), \quad (5.10)$$

stoga sukladno izrazu (5.10), relacije za maksimalno smično naprezanje  $\tau_{\max}$  prema [37] glase

$$\tau_{\max} = \max(\tau_{z-y}, \tau_{x-y}), \quad \text{prema izrazima } \tau_{z-y} = \frac{\sigma_z - \sigma_y}{2}, \quad \tau_{x-y} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}, \quad (5.11)$$

uz napomenu da koordinata  $x$  uvijek iznosi nula, a centar koordinatnog sustava je točka A (Slika 5.3.), koja je ujedno i prva točka kontakta. Izrazi (5.10) i (5.11) vrijede isključivo na osi simetrije (presječna ravnina  $y$ - $z$ ) oba razmatrana tijela, što prikazuje Slika 5.5. a), a u ovom slučaju, za analizu je odabrano aluminijsko postolje. Radi jednostavnosti prikaza, os  $y$  je zakrenuta za  $180^\circ$  te je prirast varijable pozitivan u smjeru udaljavanja od kontaktne zone, tj. širine  $2 \cdot a$  (do granice  $y_{\max} \approx 3 \cdot a$ ). Rezultate analitičkog proračuna prikazuje Slika 5.11.



Slika 5.11. Iznosi komponenta naprezanja  $\sigma$  i  $\tau$  aluminijskog postolja u ovisnosti o koordinati  $y$

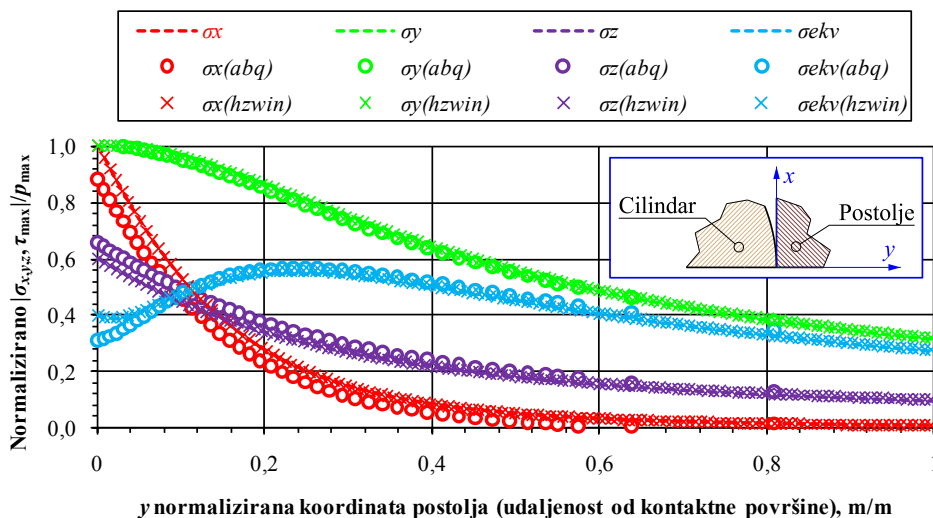
Na gornjoj slici vidljivo je da se mijenjaju omjeri iznosa naprezanja za  $\sigma_x$  i  $\sigma_z$  te  $\tau_{z-y}$  i  $\tau_{x-y}$ , stoga se ne mogu jednoznačno odrediti glavna naprezanja  $\sigma_{1,2,3}$  i  $\tau_{\max}$ , već u ovisnosti o  $y$ .



Izjednačavanjem iznosa naprežanja  $\sigma_x$  i  $\sigma_z$  te  $\tau_{z-y}$  i  $\tau_{x-y}$  iz izraza (5.10) i (5.11) te nalaženjem točke presjecišta na osi apscisa (varijabla  $y$ ), određen je omjer  $y/a \approx 0,436436$  za obje jednakosti<sup>23</sup>, stoga se mogu postaviti relacije nejednakosti dva područja  $f(y)$ : za  $0 \leq y/a \leq 0,436$ ,  $\sigma_1 = \sigma_z$ , a  $\tau_{\max} = (\sigma_1 - \sigma_3)/2 = (\sigma_z - \sigma_y)/2$ , za  $y/a \geq 0,436$ ,  $\sigma_1 = \sigma_x$ , a  $\tau_{\max} = (\sigma_x - \sigma_y)/2$ . Najviši iznos smičnog naprežanja  $\tau_{\max}$ , određen je derivacijom izraza (5.11) za  $\tau_{x-y}$ , koji je izjednačen s nulom i riješen po varijabli  $y$  traženjem vlastitih vrijednosti karakterističnog polinoma te je provjeren uvidom u referentnu vrijednost [37] i [88]  $y/a \approx 0,786$  uz  $\tau_{\max} \approx 0,3 \cdot p_{h,\max} \approx 1\,075,6$  MPa. Točno izračunata vrijednost (*Mathematica/Excel*) iznosi  $y/a \approx 0,786151$  uz  $\tau_{\max} \approx 1\,076,62$  MPa. Izraz za ekvivalentno naprežanje prema von Misesu [25] i [37] glasi

$$\sigma_{\text{ekv}} = \sqrt{1/2 \cdot [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}, \quad (5.12)$$

a deriviranjem gornjeg izraza (5.12) te izjednačavanjem s nulom moguće je dobiti omjer  $y/a \approx 0,704292$  za maksimum funkcije. Iznos maksimalnog ekvivalentnog naprežanja prema von Misesu je  $\sigma_{\text{ekv,max}} \approx 1\,998,9$  MPa. Rezultati su dodatno provjerni u programskom paketu *HertzWin* [283] gdje je postignuto izvrsno poklapanje. Rezultati su u konačnici uspoređeni s programskim paketom *Abaqus*, što prikazuje Slika 5.12., a vidljivo je dobro poklapanje.



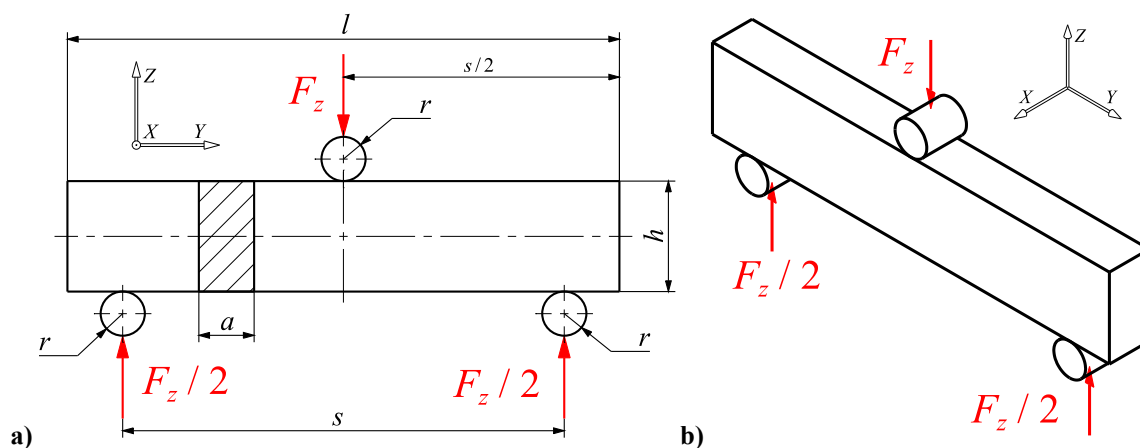
Slika 5.12. Usporedba normaliziranih rezultata naprežanja: analitički model, *HertzWin* i *Abaqus*

Numerički iznos  $\sigma_z$  je nešto višeg, dok je numerički iznos  $\sigma_x$  nešto nižeg iznosa od analitičkih modela, a na početku krivulje  $\sigma_{\text{ekv}}(\text{abq})$ , postoji odstupanje u trendu. Razlog odstupanja leži u istom razlogu kao i pri verifikaciji kontaktnog pritiska, tj. za veće pomake, deformacije i naprežanja, očekivana su odstupanja numeričkog u odnosu na analitički model.

<sup>23</sup> Nominalna vrijednost je  $y/a \approx 0,436$  prema referentnoj literaturi [37], str. 139, a ta konstanta vrijedi uvijek uz uvjet  $\nu_1 = \nu_2 = \nu_{\text{sklop}}$ . Izračunata je u programskom paketu *Mathematica* s ciljem dobivanja veće točnosti.

### 5.1.2. Primjer II: Analiza savijanja uzorka bez zarezu u tri točke

Za aluminijski homogeni izotropni uzorak konstantne krutosti i poprečnog presjeka oslonjen i opterećen prema slici 5.13. (materijalno geometrijske karakteristike te opterećenje preuzete su iz [201]), određen je pomak težišta uzorka (što je ujedno i težište elastične linije uzorka tj. referentna točka  $RP_{EI}$  prema slici 5.14.) u smjeru osi  $z - w_{RP}$ . Prikazana je konvergencija proračunskog modela, a rezultati su uspoređeni s analitičkim rezultatima.

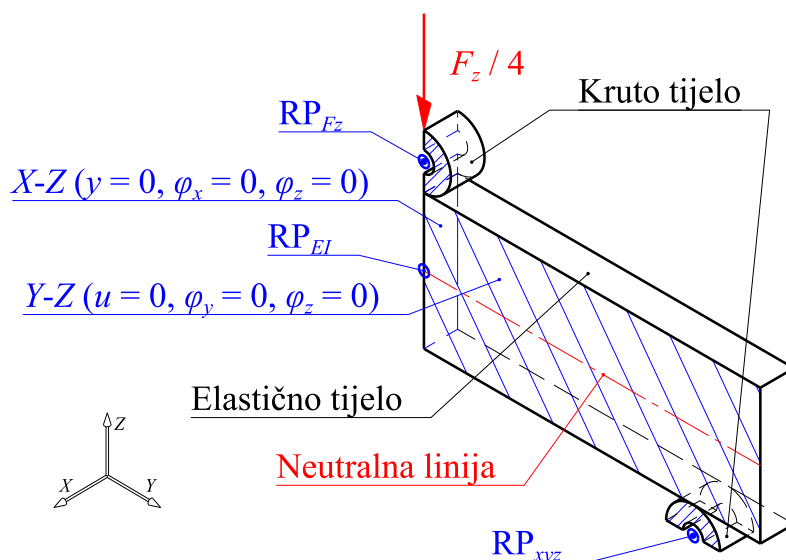


Slika 5.13. Primjer II: uzorak bez zarezu za savijanje u tri točke: a) nacrt, b) prostorni pogled

Aluminijski uzorak oslonjen je na lijevi i desni donji valjak, dok gornji valjak služi za opterećivanje uzorka zadanom silom  $F_z$ . Svi valjci su *kruti*. Dimenzije valjaka i uzorka su:  $r = 4$  mm,  $a = 10$  mm ( $a_{\text{valjka}} = a_{\text{uzorka}}$ ),  $h = 20$  mm,  $s = 80$  mm,  $l = 100$  mm.

Tablica 5.4. Primjer II, zadani parametri

$a$ , mm	$h$ , mm	$s$ , mm	$l$ , mm	$r$ , mm	$E_{Al}$ , MPa	$\nu_{Al}$	$F_z$ , N
10	20	80	100	4	76 700	0,33	8 500



Slika 5.14. Prostorni prikaz četvrtine proračunskog modela uzorka

Numerička analiza provedena je uz pretpostavku *linarno elastičnog* ponašanja materijala te *malih* pomaka. Materijal uzorka je aluminijska legura AlCu5BiPb-T8 koja je definirana modulom elastičnosti  $E = 76\,700 \text{ N/mm}^2$  te Poissonovim faktorom  $\nu = 0,33$ . Opterećenje je zadano kao koncentrirana sila koja djeluje na težište gornjeg valjka u smjeru suprotnom od pozitivnog smjera globalne osi  $z$  i maksimalnog je iznosa  $F_z = 8\,500 \text{ N}$ .

Budući da je model dva puta simetričan prema geometriji i opterećenju (presječne ravnine  $x-z$  i  $y-z$ ), korištena je četvrtina geometrije proračunskog modela kao i četvrtina sile  $F_z$ . Rubni uvjeti simetrije zadani su sukladno slici 5.14. Sila  $F_z/4$  djeluje u negativnom smjeru globalne osi  $z$  kartezijevog koordinatnog sustava prema slici 5.14.

Materijal valjaka u stvarnosti je čelik modula elastičnosti  $E = 200\,000 \text{ N/mm}^2$  te Poissonovog faktora  $\nu = 0,3$ . U numeričkom smislu, valjci su definirani kao apsolutno kruta tijela (eng. *rigid body*) te su vezani za referentne točke krutim elementima (prilagođeno, eng. *rigid spider*). Gornji valjak vezan je za referentnu točku  $RP_{F_z}$ , a donji je valjak vezan za referentnu točku  $RP_{xyz}$ . Rubni uvjeti  $RP_{F_z}$  su vezani uz ravnine simetrije, tj. moguć je samo pomak  $w$  u smjeru osi  $z$ . Rubni uvjet referentne točke  $RP_{xyz}$  je uklještenje, tj. spriječeni su svi pomaci i rotacije oko globalnih osi  $x-y-z$  kartezijevog koordinatnog sustava.

### 5.1.2.1. Analitičko rješenje I

Analitičko rješenje razmatranog problema prema [2] i [8] iznosi

$$I_x = \frac{a \cdot h^3}{12} = 6666,67 \text{ mm}^4 \Rightarrow w_{EI(\text{ANLT})_1} = \frac{F_z \cdot s^3}{48 \cdot E \cdot I_x} = 0,177 \text{ mm}, \quad (5.13)$$

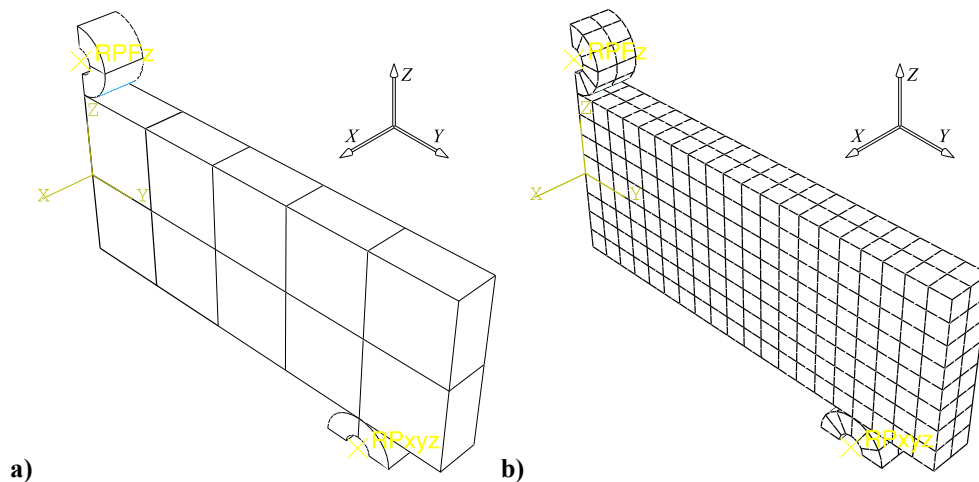
uz grešku oko 2 % uz uvjet  $h/s \leq 1/5$  do  $1/4$  što je zadovoljeno prema zadanim dimenzijama.

### 5.1.2.2. Numeričko rješenje I

Ideja ovog dijela verifikacije je, osim uvođenja *trenja* kao nove vrste nelinearnosti u kontaktni problem, testirati sve vrste 3D prizmatičnih (heksaedarskih) elemenata te utvrditi koji *najbrže* i *najtočnije* konvergiraju. Identični rubni uvjeti i karakteristike materijala te opterećenje zadani su u programskom paketu *Abaqus* u svrhu numeričke kontrole stabilnosti i točnosti svih proračunskih modela te prikladnosti korištenih konačnih elemenata.

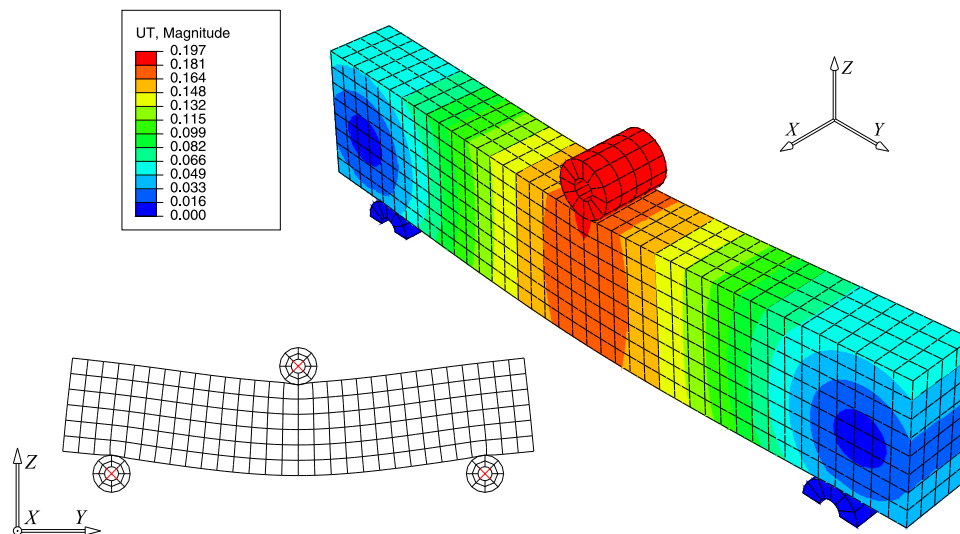
Veze između valjaka i uzorka definirane su kao kontakti uz pretpostavljeni iznos faktora trenja između čelika (valjci) i aluminijskog uzorka  $\mu_{\text{Al}} = 0,65$  prema [83] i [207].

Idejno slično prethodnom primjeru, 3D proračunski model je particioniran, no ovaj puta ne u svrhu lokalnog pogušćivanja mreže, već mogućnosti ravnomjernog strukturiranog usitnjavanja. Vidljivo je da je model tako particioniran da čvorovi konačnih elemenata uvijek na početku kontakta *leže* jedan na drugom, što osigurava *bržu* te *monotoniju* konvergenciju.



Slika 5.15. Abaqus 6.9-3: a) particionirani proračunski model, b) III. mreža KE

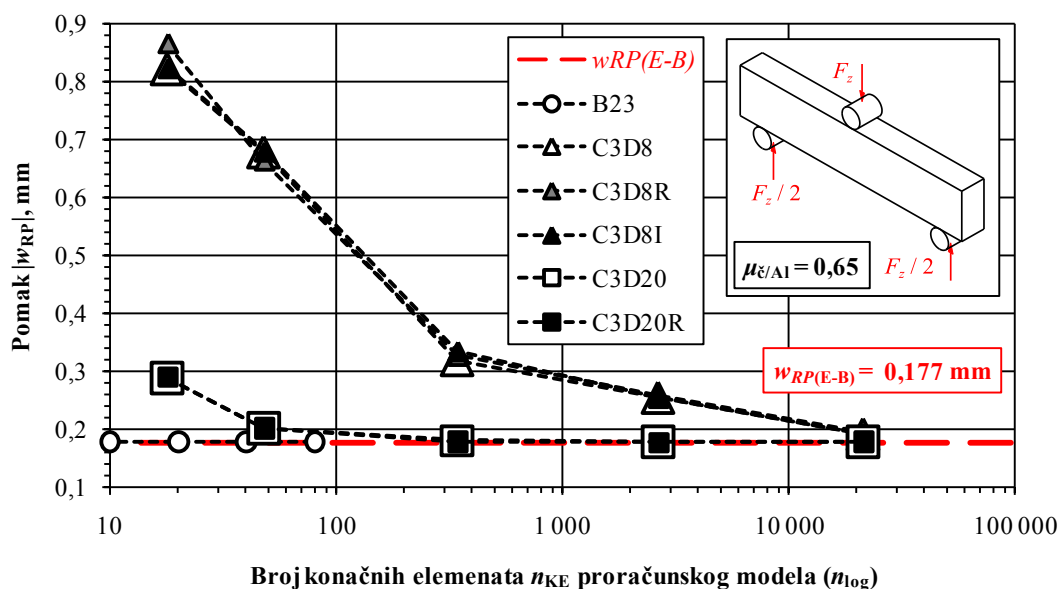
Particioniranje je napravljeno i sa svrhom da je promatrani čvor  $RP_{EI}$  uvijek na početku pozicioniran u *težištu* globalnog koordinatnog sustava. Zadnja bitna zadaća particioniranja je smanjenje površina mogućih kontaktnih ploha i time dodatno osiguranje bržeg numeričkog proračuna te konvergencije. Uz višestruko definirane kontaktne plohe te dodatno unešenu *nelinearnost* trenjem, kompleksnost numeričkog problema znatno raste, problem postaje iterativno-inkrementalan te su gore navedene metodologije *beneficija*.



Slika 5.16. Ukupni pomak  $w_1$  Abaqus 6.9-3, C3D20R III. mreža

Slika 5.16. prikazuje ukupni pomak UT proračunskog modela III. mreže C3D20R KE uz faktor uvećanja prikaza  $k = 15$ , kao i simetriju prikaza u ravninama  $x$ - $z$  i  $y$ - $z$ .

Slika 5.17. prikazuje usporednu konvergenciju svih 3D proračunskih modela. *Abaqus* B23 gredni KE testirani su radi kontrole, a koriste Euler-Bernoulli formulaciju vitke grede.



Slika 5.17. Konvergencija I. proračunskog modela

Sa slike je vidljiva monotona konvergencija, a konačni elementi drugog reda s dvadeset čvorova konvergiraju znatno brže od elemenata prvog reda s osam čvorova. Elementi drugog reda već u drugoj iteraciji daju *dovoljno točno* rješenje u kontekstu pomaka, a također je bitno primijetiti i sličnu učinkovitost C3D20 te C3D20R KE.

### 5.1.2.3. Analitičko i numeričko rješenje II

Euler-Bernoullijeva teorija korištena u izrazu (5.13) vrijedi isključivo u slučaju dugih greda ( $a, h \ll l$ ) gdje su zanemarene posmične deformacije, a poprečni presjeci ostaju ravni i okomiti na uzdužnu os. Budući da je problem na *graničnom* slučaju dozvoljenih uvjeta dimenzija duge grede prema [2], promatrano je i analitičko rješenje prema teoriji elastičnosti, tj. Timoshenkova teorija koja uzima u obzir i *posmične* efekte, što rezultira *većim* progibom.

Timoshenko (1922.) je bio prvi koji je uključio dodatne efekte u proračun greda, kao što je na primjer inercija rotacije i posmična deformacija [202]. Prema Timoshenkovoj teoriji, raspodjela posmičnih deformacija je konstantna kroz debljinu grede, stoga je bilo potrebno pronaći odgovarajući korekcijski faktor (*faktor smicanja*), ovisan o promatranom problemu i geometriji. Faktor smicanja  $k$  za pravokutni poprečni presjek  $A_0 = a \cdot h$  prema [202] iznosi

$$k = \frac{5 \cdot (1 + \nu)}{6 + 5 \cdot \nu}, \text{ za } \nu = 0 \Rightarrow k = \frac{5}{6}, \text{ uz } \nu_{Al} = 0,33 \Rightarrow k \cong 0,869. \quad (5.14)$$

Timoshenkovo rješenje iz izraza (5.14), verificirao je i nadgradio Cowper (1966.), a faktor smicanja  $k$  za pravokutni presjek prema [204] iznosi

$$k = \frac{10 \cdot (1 + \nu)}{12 + 11 \cdot \nu}, \text{ za } \nu = 0 \Rightarrow k = \frac{5}{6}, \text{ uz } \nu_{Al} = 0,33 \Rightarrow k \cong 0,851, \quad (5.15)$$

gdje je  $k \approx 0,851$  faktor smicanja rješenja koje se koristi u svrhu numeričke verifikacije ovog dijela rada. Površina poprečnog presjeka uzorka  $A_0$  i modul smicanja  $G$  uzorka iznose

$$A_0 = a \cdot h = 200 \text{ mm}^2, \quad G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)} \cong 28\,834,586 \text{ MPa}. \quad (5.16)$$

Izraz za progib grede prema Timoshenkovoj teoriji uz Cowperov faktor glasi

$$w_{EI(\text{Timo})} = \left( \frac{F_z \cdot s^3}{48 \cdot E \cdot I_x} \right)_{\text{Euler-Bernoulli}} + \left( \frac{F_z \cdot s}{4 \cdot k \cdot A_0 \cdot G} \right)_{\text{Timoshenko}}. \quad (5.17)$$

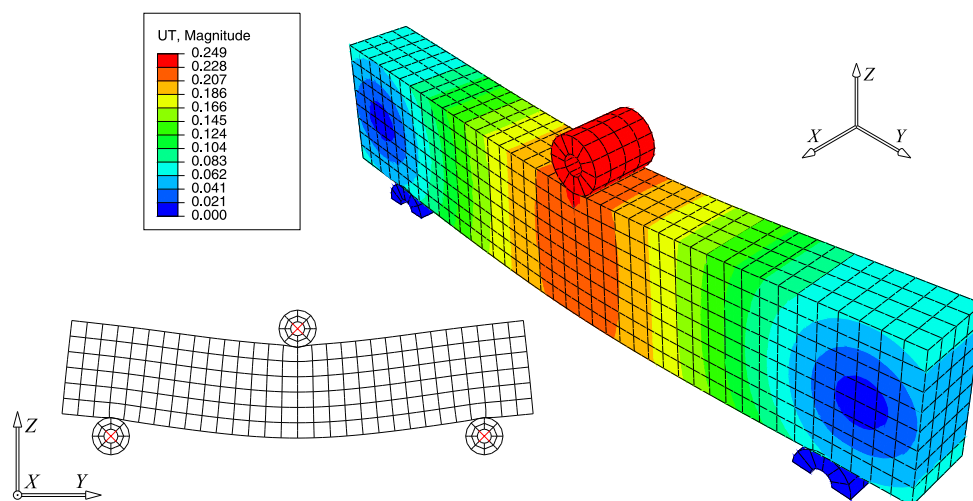
Konačni sređeni izraz i rezultat za maksimalni progib grede prema [205] i [206] glasi

$$w_{EI(\text{ANLT})_{II}} = F_z \cdot s \cdot \left( \frac{s^2}{48 \cdot E \cdot I_x} + \frac{1}{4 \cdot k \cdot A_0 \cdot G} \right) \cong 0,212 \text{ mm}. \quad (5.18)$$

Usporedbom rezultata iz izraza (5.13) te (5.18), vidljivo je da je prema Timoshenkovoj teoriji progib osjetno veći, a točni iznos relativne razlike  $E_{\text{rel}}$  glasi

$$E_{\text{rel}(\text{Timo}/E-B)} = (x_{\text{Timo}}/x_{E-B} - 1) \cdot 100\% \Rightarrow E_{\text{rel}} = 19,538\%, \quad (5.19)$$

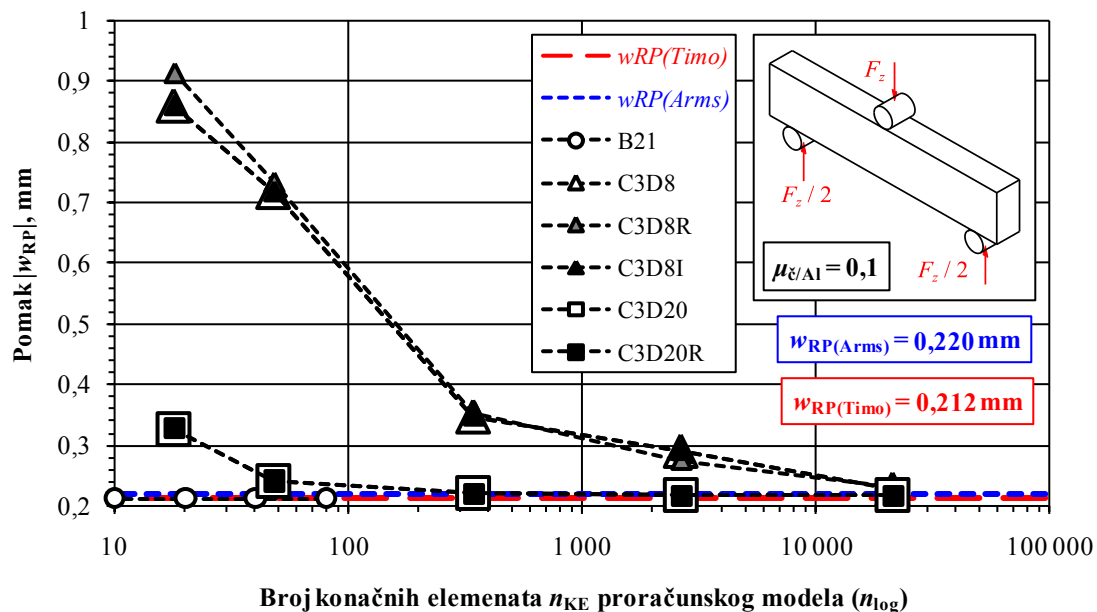
što je *značajna* razlika, stoga su postavljeni dodatni kontrolni numerički modeli uz korigiran faktor trenja na kontaktnim modelima s  $\mu_{\check{c}/Al(I)} = 0,65$  na  $\mu_{\check{c}/Al(II)} = 0,1$  prema [201]<sup>24</sup>.



Slika 5.18. Pomak  $w_{II}$  *Abaqus* 6.9-3, C3D20R III. mreža

<sup>24</sup> Faktor trenja je opravdano moguće smanjiti na nižu vrijednost, uzevši u obzir poliranje površina.

Slika 5.18. prikazuje ukupni pomak proračunskog modela III. mreže C3D20R KE uz faktor uvećanja prikaza  $k = 15$ , a zbog *manjeg* faktora trenja  $\mu$ , pomak  $w_{II}$  je sada *veći*.

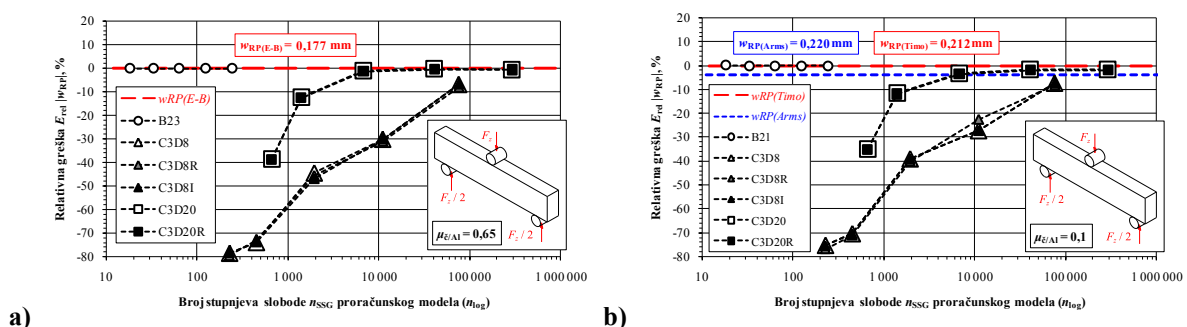


Slika 5.19. Konvergencija II. proračunskog modela

Iz dijagrama sa slike 5.19., vidljivo je da *Abaqus* B21 gredni elementi dovoljno točno opisuju promatrani problem (Timoshenkova *kratka* greda) i konvergiraju već za prvu mrežu.

Eksperimentalni rezultati očitani optičkim sustavom za mjerenje *Aramis* prema [201], variraju u odnosu na analitičko Timshenkovo rješenje, tj. pokazuju *nešto* veći progib.

Svi proračunski modeli konvergiraju monotono. Kvalitativno usporedivši oba dijagrama konvergencije (Slika 5.17. i 5.19.), vidljivo je da su *slični*, samo manipulacijom faktora trenja  $\mu$  konvergiraju *drugačijim* vrijednostima. Prikladno je stoga usporedno prikazati oba dijagrama (Slika 5.20.) gdje sada os apscisa predstavlja stupnjeve slobode tj. *skupoću* (vrijeme izvođenja) numeričke simulacije, a os ordinata predstavlja relativnu grešku  $E_{rel}$ , tj. odstupanje u odnosu na poznato analitičko rješenje pomaka  $w_{ANLT}$ .



Slika 5.20. Usporedba relativne greške  $E_{rel}$  pomaka  $w_I$  i  $w_{II}$

Tablica 5.5. prikazuje usporedbu pomaka oba proračunska modela, tj. Euler-Bernoullijevu i Timoshenkovu gredu. Gredni elementi B23 te B21 su kontrolni proračunski modeli te je vidljivo da u linearnom slučaju duge grede (E-B) greška ne postoji, a za kratku gredu (Timoshenko), greška je zanemariva (*uvjetna* greška postoji zbog različite formulacije korektivnog faktora smicanja  $k$  unutar programskog paketa *Abaqus*, uz  $k_{abq} = 0,85$  [261]).

Tablica 5.5. Usporedba proračunskih modela: a)  $w_I$ , b)  $w_{II}$

Pomak $w$ , Euler-Bernoulli ( $\mu = 0,65$ )	$\Sigma n_{KE}$	$w_{RP}$ , mm	$E_{rel}$ , %
Analitičko rješenje	-	0,177	0
B23	80	0,177	0,000
C3D8	21 376	0,190	7,263
C3D8R	21 376	0,193	8,657
C3D8I	21 376	0,190	7,182
C3D20	21 376	0,178	0,471
C3D20R	21 376	0,178	0,522

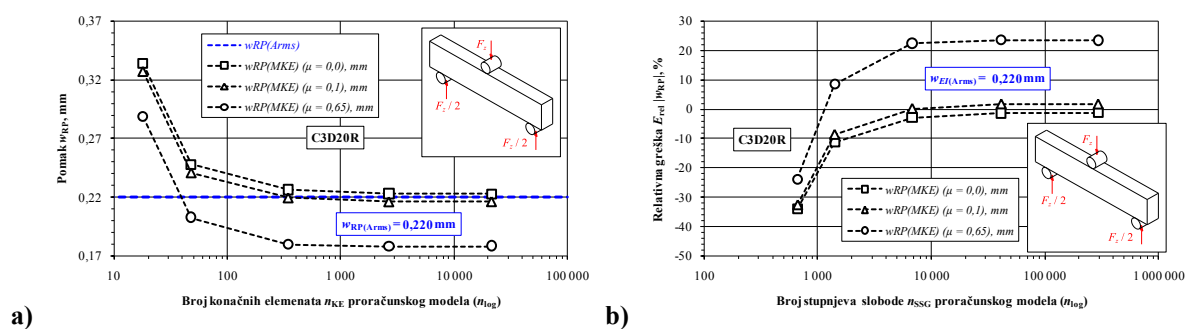
a)

Pomak $w$ , Timoshenko ( $\mu = 0,1$ )	$\Sigma n_{KE}$	$w_{RP}$ , mm	$E_{rel}$ , %
Analitičko rješenje	-	0,212	0
B21	80	0,212	0,017
C3D8	21 376	0,229	7,834
C3D8R	21 376	0,231	8,931
C3D8I	21 376	0,228	7,781
C3D20	21 376	0,216	1,958
C3D20R	21 376	0,216	1,981

b)

Na temelju pokazane superiorne učinkovitosti, za daljnje analize odabrani su prizmatični konačni elementi drugog reda s reduciranom integracijom C3D20R.

Slika 5.21. prikazuje konvergencije C3D20R KE uz dodatni model bez trenja ( $\mu = 0$ ).



Slika 5.21. Usporedba konvergencije pomaka C3D20R KE

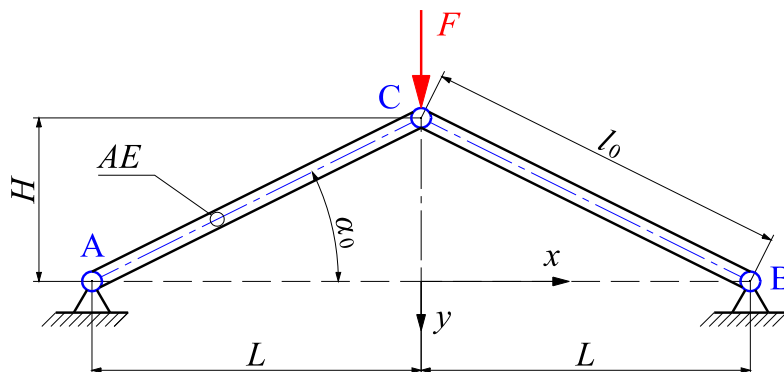
Bitno je primijetiti znatan (*čak dominantan*) utjecaj korektnog odabira faktora trenja  $\mu$  na konačne numeričke rezultate promatranog kontaktnog problema<sup>25</sup>, za što već postoje istraživanja i opažanja u referentnoj literaturi [208].

<sup>25</sup> Isti efekt evidentan je i u znatnim razlikama između rezultata izraza (5.13) i (5.18) iznosa  $E_{rel} \sim 20\%$ , kao posljedica različite formulacije pomaka u funkciji vitkosti, tj. Euler-Bernoulli nasuprot Timoshenkove grede.



## 5.2. Geometrijska nelinearnost

### 5.2.1. Primjer III: analiza zglobno oslonjene štapne konstrukcije



Slika 5.22. Primjer III, štapna konstrukcija opterećena silom

Razmatrana su dva štapa statički određene konstrukcije<sup>26</sup> opterećene silom  $F$ . Izračunata je unutarnja sila u štapovima i pomak opterećenog zgloba C za slučaj ravnoteže:

- primjenom linearnog pristupa,
- primjenom dijagrama toka za kinematički model A i kinematički model B,
- primjenom Newton-Raphsonove metode (jedan inkrement),
- primjenom Riksove metode (deset inkremenata),
- primjenom programskog paketa temeljenog na MKE (linearno i nelinearno).

Tablica 5.6. prikazuje zadane geometrijsko materijalne karakteristike.

Tablica 5.6. Primjer III, zadani parametri

$A$ , mm <sup>2</sup>	$E$ , GPa	$F$ , kN	$H$ , mm	$L$ , mm	$\varepsilon$ (greška)
1 500	210	80	200	2 000	0,001

Vrijednosti kuta  $\alpha_0$  te duljina štapa  $l_0$  iznose

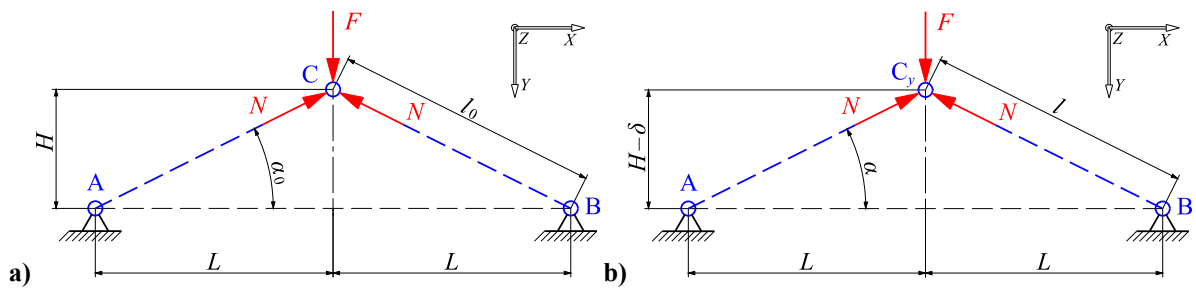
$$\alpha_0 = \arctan \frac{H}{L} \cong 5,711^\circ, \quad l_0 = \sqrt{H^2 + L^2} \cong 2\,009,975 \text{ mm}, \quad (5.20a)$$

što definira sve potrebne početne geometrijske karakteristike proračunskog modela. U slučaju da se zadana numerička dopuštena greška  $\varepsilon$  (Tablica 5.6. desno) želi prikladno izraziti u postocima, množi se faktorom 100 (%) prema izrazu

$$\varepsilon_{\text{zad}} \equiv \varepsilon \Rightarrow \varepsilon_{\text{rel}} = \varepsilon_{\text{zad}} \cdot 100\% = 0,1\%. \quad (5.20b)$$

<sup>26</sup> U literaturi se navedeni primjer može naći i pod nazivom von Misesov štap (eng. *truss*) [68] i [72].

## 5.2.1.1. Linearni pristup



Slika 5.23. Ravnoteža sila: a) nedeformirani oblik, b) deformirani oblik

Slika 5.23. a) prikazuje postavljeni uvjet ravnoteže i unutarnje sile  $N$  proračunskog modela koji se sastoji od dva štapa. Prema slici, jednačba ravnoteže sila u smjeru osi  $y$  glasi

$$\sum (F_y)_{\text{lin}} = 0 \Rightarrow F - 2 \cdot N \cdot \sin \alpha_0 = 0, \quad (5.21)$$

a uvrštavanjem iznosa  $F = 80 \text{ kN}$  u izraz (5.21), slijedi konačni iznos sile  $N$  u oba štapa

$$N = \frac{F}{2 \cdot \sin \alpha_0} \cong 401\,995,025 \text{ N}. \quad (5.22)$$

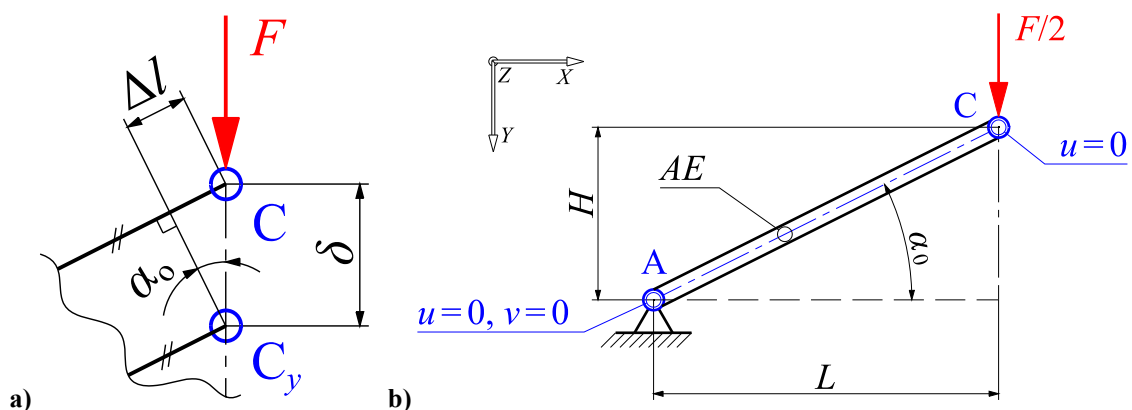
Prema [2], za linearno-elastično ponašanje materijala vrijede relacije

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{N}{A \cdot E}, \quad (5.23)$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}. \quad (5.24)$$

Izjednačavanjem te kombinacijom izraza (5.23) i (5.24), dobija se konačni izraz te iznos za *linearnu* ovisnost promjene duljine štapa o unutarnjoj sili  $N$  koji glasi

$$\Delta l = \frac{N \cdot l_0}{A \cdot E} \cong 2,565 \text{ mm}. \quad (5.25)$$

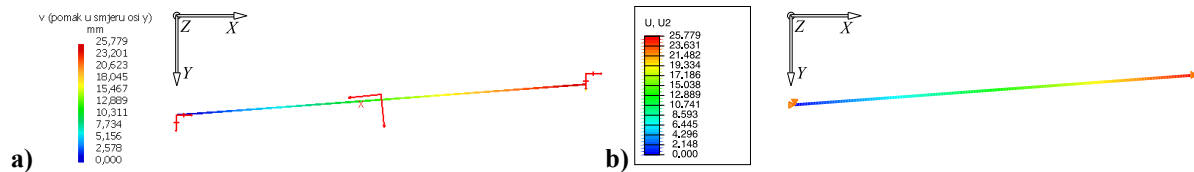


Slika 5.24. Proračunski model: a) pomak zgloba C, b) rubni uvjeti polovine modela

Slika 5.24. a) prikazuje odnose *linearne* promjene duljine štapa i pomaka zgloba C. Prema slici, vrijedi izraz kojim se dobija konačni pomak  $\delta$  koristeći izraz

$$\sin \alpha_0 = \frac{\Delta l}{\delta} \Rightarrow \delta = \frac{\Delta l}{\sin \alpha_0} \cong 25,779 \text{ mm}. \quad (5.26)$$

U svrhu kontrole analitičkog rješenja, kreirana su dva štapna numerička proračunska modela u programskim paketima *SimDesigner* (CBAR KE) te *Abaqus* (T2D2 KE).



Slika 5.25. Linearni pomak v: a) *Nastran*, b) *Abaqus*

Rubni uvjeti polovine proračunskog modela postavljeni su sukladno korištenoj ravnini simetrije u zglobu C te onemogućavanjem svih ravninskih  $x$ - $y$  translacija u zglobu A

$$u_A = 0, \quad v_A = 0, \quad u_C = 0, \quad (5.27a)$$

tj. u programskom paketu *Abaqus*

$$u_{A1} = 0, \quad u_{A2} = 0, \quad u_{C1} = 0. \quad (5.27b)$$

Budući da je problem ravninski (ravnina  $x$ - $y$ ), nije potrebno zasebno definirati sprječavanje pomaka u smjeru osi  $z$ . Primjer je za kontrolu riješen i analitički pomoću MKE.

### 5.2.1.2. Nelinearni pristup, modeli A i B

Slika 5.23. b) prikazuje novo stanje ravnoteže i unutarnje sile  $N$  proračunskog modela na *deformiranom* obliku, što je *osnovni* uvjet *nelinearnog* pristupa. Budući da je početni kut  $\alpha_0$  sada deformacijom promijenjen (Slika 5.23. b) i nepoznatog je (*zasigurno* manjeg) iznosa, više ne vrijedi izraz (5.21), stoga je potrebno postaviti novi uvjet ravnoteže

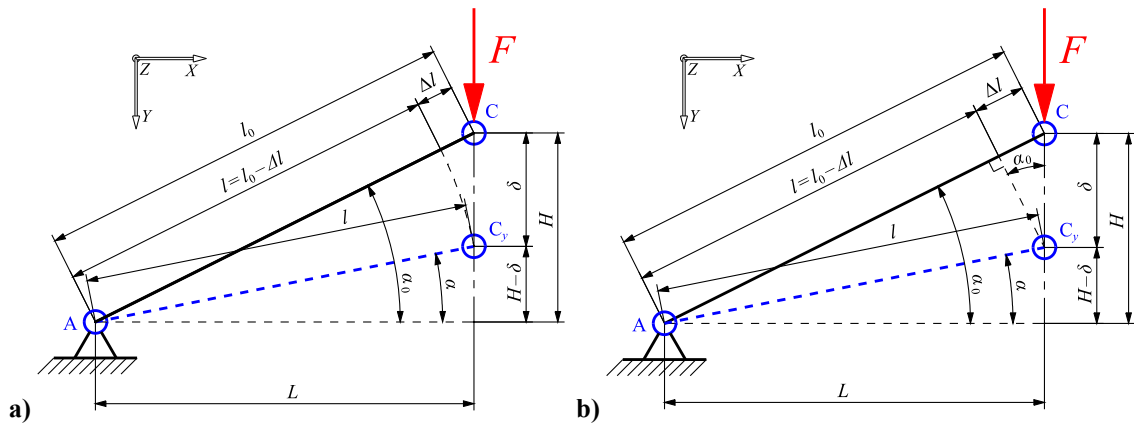
$$\sum (F_y)_{\text{nl}} = 0 \Rightarrow F - 2 \cdot N \cdot \sin \alpha = 0, \quad (5.28)$$

dok izraz za sile  $N$  u oba štapa za *nelinearni* slučaj glasi

$$N = \frac{F}{2 \cdot \sin \alpha}. \quad (5.29)$$

Budući da je i dalje pretpostavljeno linearno-elastično ponašanje materijala [2], ponovno vrijede izrazi (5.23) i (5.24), stoga se ne navode zasebno.

## 5.2.1.2.1. Kinematički model A (točni plan pomaka)



Slika 5.26. Plan pomaka: a) točni, model A, b) približni, model B

Iz plana pomaka A (Slika 5.26. a) slijede relacije

$$l = l_0 - \Delta l \Rightarrow (H - \delta)^2 = (l_0 - \Delta l)^2 - L^2, \quad (5.30)$$

$$\delta = H - \sqrt{(l_0 - \Delta l)^2 - L^2}, \quad (5.31)$$

$$\tan \alpha = \frac{H - \delta}{L} \Rightarrow \alpha = \arctan \frac{H - \delta}{L}, \quad (5.32)$$

uz napomenu da i dalje vrijedi izraz (5.25), samo uz drugi iznos unutarnje sile  $N$  u štupu.

## 5.2.1.2.2. Kinematički model B (približni plan pomaka)

Iz plana pomaka B (Slika 5.26. b) slijedi izraz

$$\sin \alpha_0 = \frac{\Delta l}{\delta} \Rightarrow \delta = \frac{\Delta l}{\sin \alpha_0}, \quad (5.33)$$

što je analogno izrazu (5.26). Nadalje, vrijedi relacija tangensovog poučka

$$\tan \alpha = \frac{H - \delta}{L} \Rightarrow \alpha = \arctan \frac{H - \delta}{L}, \quad (5.34)$$

koja je analogna izrazu (5.32), uz ponovnu napomenu da i dalje vrijedi izraz (5.25), samo uz drugi iznos (trenutno nepoznate) unutarnje sile  $N$  u štupu.

Uvidom u izraze (5.31) i (5.33), zbog nelinearnosti jednadžbi očigledno je da je vrijednosti  $N$  i  $\delta$  potrebno *iterirati*, sve dok ne uđu u zadanu toleranciju greške  $\varepsilon$ . Ovaj korak je ujedno i prvi primijenjeni doticaj s inkrementalno-iterativnim metodama koje su osnova nelinearne numeričke analize te jedan od temelja ovog rada.

Rezultat razmatranog problema moguće je dobiti i jednostavnije, raspisivanjem *implicitne* jednadžbe pomaka prema izrazima (5.31) i (5.33) u programskom paketu *Mathematica* [276], ili primjerice u znanstvenom kalkulatoru kao što je *Casio fx-991ES-PLUS* [280] te korištenjem opcije *solve*. Takvim načinom rješavanja, model A daje tri rješenja, dok model B daje dva rješenja. U obzir se uzimaju samo iznosom *najmanja* rješenja.

Rezultati dobiveni navedenom metodologijom su kako slijedi

$$N_A \cong 483,034 \text{ kN}, \quad \delta_A \cong 33,809 \text{ mm}, \quad N_B \cong 473,247 \text{ kN}, \quad \delta_B \cong 30,348 \text{ mm}. \quad (5.35)$$

### 5.2.1.3. Nelinearni pristup, Newton-Raphsonova metoda

Izraz ovisnosti unutarnje sile  $N$  o pomaku  $\delta$  potrebno je transformirati u prikladni oblik za konačnu uporabu Newton-Raphsonove metode koja je primjenjiva *isključivo* za oblik

$$f(x) = 0, \quad (5.36)$$

uz opći izraz za primjenu metode koji prema [45] glasi

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \Rightarrow N_{n+1} = N_n - \frac{f(N_n)}{f'(N_n)}. \quad (5.37)$$

Postupak proračuna je detaljno opisan u [63] te su ovdje navedena samo rješenja, a sila  $F$  je primijenjena u jednom inkrementu te je rješenje iterirano do dozvoljene greške  $\varepsilon$ .

### 5.2.1.4. Nelinearni pristup, Riks-Wempner-Wesselsova metoda

Riksova (Riks-Wempner-Wesselsova, R-W-W<sup>27</sup>) metoda, za razliku od Newton-Raphsonove, iterira istovremeno i inkrementalni pomak i parametar opterećenja, što ju čini kompleksnijom za izvedbu. Značajno je primijetiti, što je usko vezano za razmatrani problem, da je Riksovom metodom moguće korektno opisati *snap-through* problem te općenito geometrijsku *nestabilnost*, što nije moguće N-R metodom [6], [63] i [69].

Također, bitno je napomenuti da Riksova metoda po definiciji numerički *nikada* ne konvergira *točno* do zadane sile  $F$ , već je umanjena/uvećana faktorom  $\lambda$  prema [6] i [63].

Postupak iterativnog proračuna R-W-W metodom detaljno je opisan u [63] te su ovdje navedena samo rješenja, a sila  $F_i$  je aplicirana u deset inkremenata ( $n = 10$ ) te je rješenje svakog inkrementa iterirano do željene zadane točnosti (parametar greške  $\varepsilon$ , Tablica 5.6.).

<sup>27</sup> Riks je glavni idejni tvorac metode, Wempner i Wessels su je samo usavršili prema [6].

U slučaju da se želi opisati kontinuirana funkcija uz proizvoljni faktor opterećenja  $\lambda$ , ovisnost sile  $F$  o pomaku  $\delta$  moguće je definirati eksplicitno preko ravnoteže početnog i trenutnog kuta  $\alpha_0$  i  $\alpha$ . Slika 5.23. b) prikazuje ravnotežu deformiranog oblika koju je moguće definirati korištenjem izraza (5.29) za ravnotežu unutarnje sile  $N$  te izraza (5.25) za promjenu duljine  $\Delta l$ . Duljina horizontalne projekcije štapova se ne mijenja, što se može zapisati

$$(l_0 - \Delta l) \cos(\alpha_0 - \beta) = l_0 \cos \alpha_0, \quad (5.38)$$

gdje za kut  $\beta$  vrijedi relacija  $\beta = \arctan(\delta/l_0)$  (uz uvjet da je u početnom trenutku, tj. za  $\alpha = \alpha_0$ ,  $\beta = 0$ ), iz čega izražavanjem ostalih parametara kao funkcije promjene duljine  $\Delta l$  slijedi

$$\Delta l = \left[ 1 - \frac{\cos \alpha_0}{\cos(\alpha_0 - \beta)} \right] l_0, \quad (5.39)$$

te na kraju uvrštavanjem izraza (5.25) u izraz (5.39) slijedi relacija za unutarnju silu

$$N = \frac{EA}{l_0} \left[ 1 - \frac{\cos \alpha_0}{\cos(\alpha_0 - \beta)} \right] l_0, \quad (5.40)$$

koju kada se uvrsti u jednadžbu ravnoteže (5.29), slijedi konačni izraz za silu

$$F = 2EA \left[ 1 - \frac{\cos \alpha_0}{\cos(\alpha_0 - \beta)} \right] \sin(\alpha_0 - \beta). \quad (5.41)$$

U slučaju da se sila  $F$  želi izraziti eksplicitno u ovisnosti o pomaku, a ne o kutu  $\alpha$ , izraz (5.41) se može, uzimajući u obzir već spomenuti izraz  $\beta = \arctan(\delta/l_0)$ , zapisati u prikladnijem obliku

$$F_\alpha = 2EA \left\{ 1 - \frac{\cos \alpha_0}{\cos \left[ \alpha_0 - \arctan \left( \frac{\delta}{l_0} \right) \right]} \right\} \sin \left[ \alpha_0 - \arctan \left( \frac{\delta}{l_0} \right) \right]. \quad (5.42)$$

Dodatne dvije Riks krivulje preuzete su prema [67] i [251] te prikazane relacijama

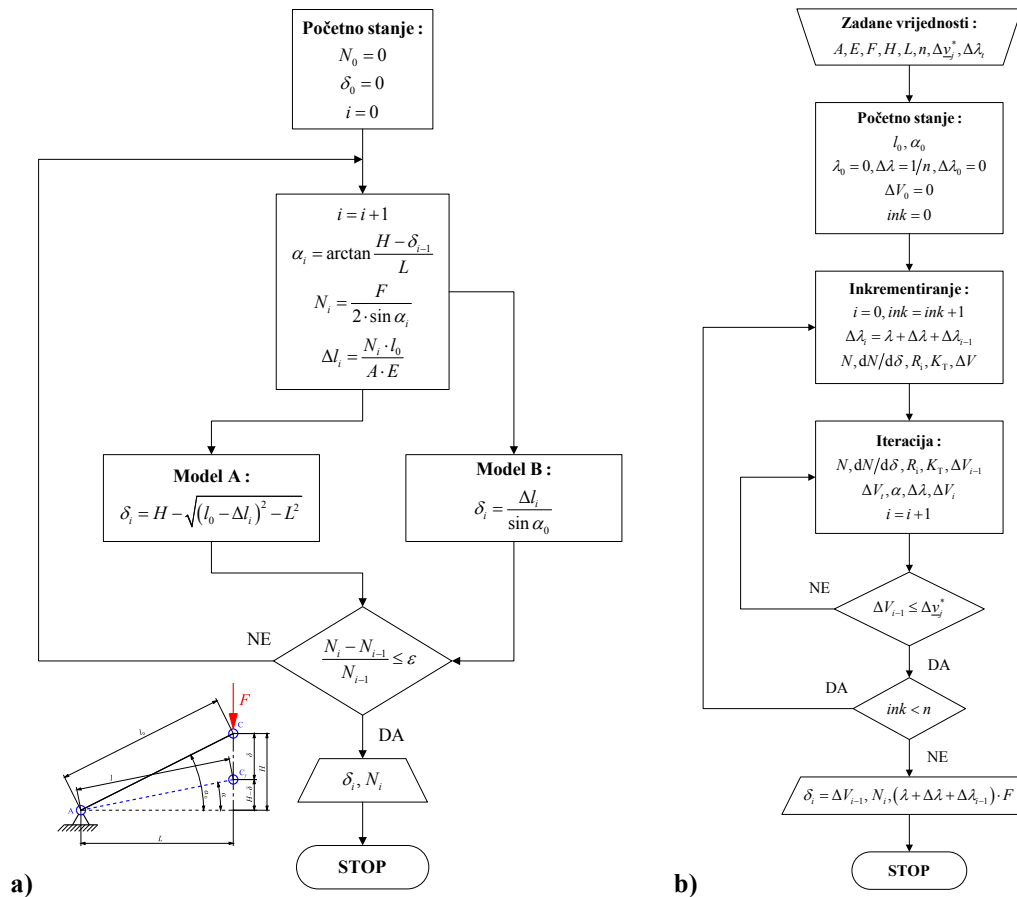
$$F_C \cong -2 \frac{EA}{l_0^3} \left[ H^2 (-\delta) + \frac{3}{2} H (-\delta)^2 + \frac{1}{2} (-\delta)^3 \right], \quad F_{i(T/S)} \cong 2 \frac{EA}{l_0} (H - \delta) \left[ \left( 1 + \left( \frac{\delta}{l_0} \right)^2 - \frac{2\delta H}{l_0^2} \right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right], \quad (5.43)$$

gdje izraz (5.43) (lijevo) predstavlja Crisfieldovu relaciju ( $F_C$ ) [67] uz modificirane predznake s obzirom na koordinatni sustav<sup>28</sup>, a izraz (5.43) (desno) predstavlja Torkamani/Shieh relaciju ( $F_{T/S}$ ) [251]. Izraze (5.42) i (5.43), u dijagramskom obliku prikazuje Slika 5.31. a).

<sup>28</sup> Originalna relacija potječe iz literature *Crisfield, M., Nonlinear Finite Element Analysis of Solids and Structures, Volume 1, Essentials*, John Wiley & Sons, Inc., Baffins Lane 2000., str. 4, izraz (1.7).

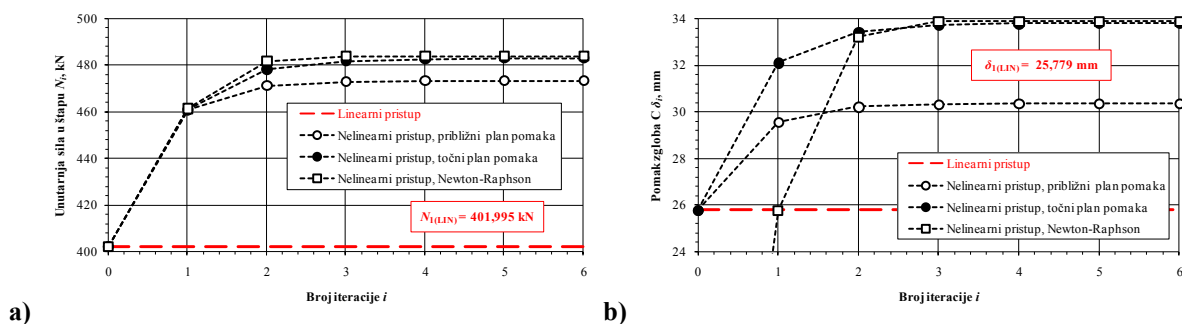
## 5.2.1.5. Algoritam rješenja nelinearnog problema

Slika 5.27. predstavlja dijagrame tókova za rješavanje nelinearnog problema prema kinematičkim modelima A i B (poglavlje 5.2.1.2.) te Riks (poglavlje 5.2.1.4.). Problemi su riješeni pomoću programskih paketa *MS Excel 2007* [277] i *Wolfram Mathematica 7.0* [276], a rješenja su prikazana tablično i dijagramski (Slika 5.28., Slika 5.30.).



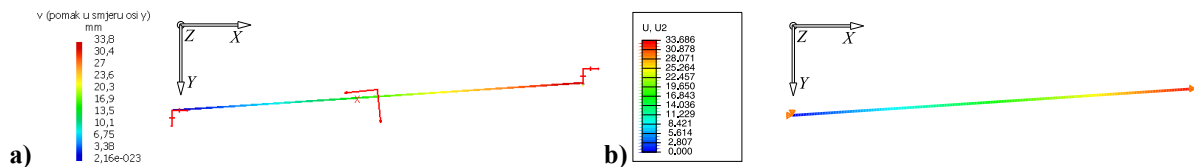
Slika 5.27. Dijagram tókova: a) kinematički modeli A i B, b) Riks

Slika 5.28. prikazuje konvergencije kinematičkih modela A i B te Newton-Raphsonove metode riješenih u jednom inkrementu. Vidljivo je da N-R konvergira na slične vrijednosti kao i kinematički model A, dok kinematički model B pokazuje odstupanja.

Slika 5.28. Konvergencija modela A, B i N-R: a)  $N$ , b)  $\delta$

### 5.2.1.6. Nelinearni pristup, MKE

Identičnom metodologijom kao u prethodnim poglavljima, u programskim paketima *Abaqus* te *MSC SimDesigner* kreirani su *nelinearni* proračunski modeli (Slika 5.29.). Modeli su *slični* linearnim (Slika 5.25.) uz izuzeće da su sada proračunati Newton-Raphsonovom metodom uz formulaciju *malih* naprezanja ( $\sigma < \sigma_p$ ) i deformacija, no *velikih* pomaka.

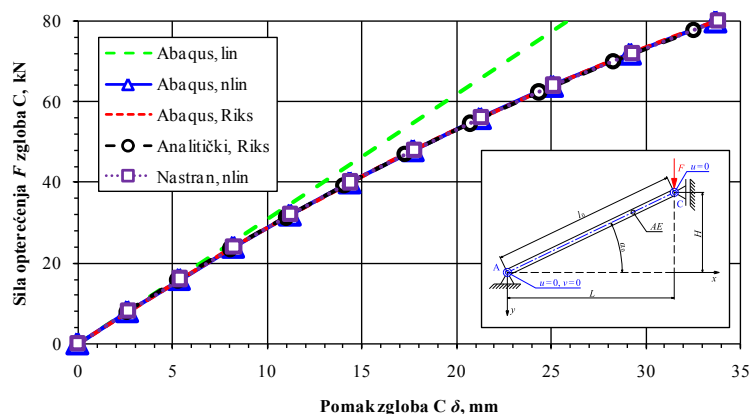


Slika 5.29. Nelinearni pomak v: a) *Nastran*, b) *Abaqus*

Slika 5.25. te Slika 5.29. prikazane su uz faktor uvećanja prikaza  $k = 2$ . Vizualno su deformirani oblici vrlo slični linearnim, no uvidom u brojeve sa skala s lijeve strane obje slike, vidljive su *osjetne* razlike u rezultatima proračunskih modela. Linearni *Nastran* i *Abaqus* te nelinearni *Nastran* i *Abaqus* se izvrsno podudaraju u konačnim rezultatima. Oba numerička proračunska modela riješena su u deset inkremenata do zadane sile iznosa 80 kN.

Bitno je napomenuti da *MSC Nastran* algoritam uspješno rješava problem *geometrijske* nelinearnosti, no u slučaju *materijalne* nelinearnosti te velikih deformacija, softver rješavanja postaje *MSC Marc*, dok *Abaqus* primjerice koristi jedinstveni algoritam.

Problem je u programskom paketu *Abaqus* dodatno riješen i Riksovom metodom, a rezultate prikazuje Slika 5.30. Budući da je *analitički* inkrementalno rješavana samo Riksova metoda (N-R te modeli A i B riješeni su u jednom inkrementu), prikazana je na istoj slici.

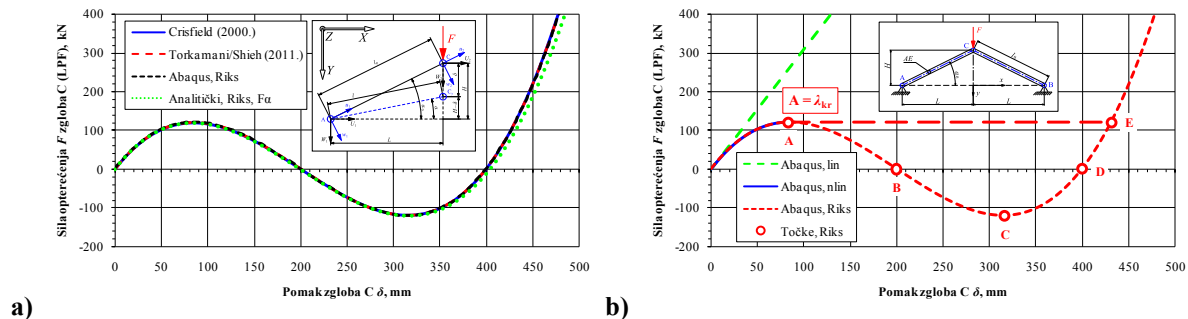


Slika 5.30. Ovisnost sile opterećenja  $F$  o pomaku zgloba  $C$   $\delta$

Vidljivo je izvrsno poklapanje svih nelinearnih modela te značajna razlika usporedbom s linearnim modelom gdje je ovisnost sile  $F$  i pomaka  $\delta$  prikazana *pravcem*.



Slika 5.31. prikazuje dijagram sila-pomak uz LPF (eng. *load proportionality factor*) jednak 5. Vidljivo je da N-R nelinearna metoda staje (*puca*) u točki ekstrema, dok Riks krivulja opisuje *snap-through* fenomen gdje je prisutna izrazita *geometrijska* nestabilnost.



Slika 5.31. Ovisnost sile opterećenja  $F$  o pomaku zgloba  $C$   $\delta$ , Riks LPF = 5

LPF označava faktor kojim se dodatno množi sila u Riksovoj metodi, izrazom  $F_{uk} = F \cdot LPF$ . Primjerice Slika 5.30. prikazuje Riksovu metodu uz LPF = 1, što implicira da je konačno inkrementalno opterećenje jednako nominalnom (tj. *uvećanom* ili *umanjenom* faktorom  $\lambda$ ). Korištenje LPF faktora prikladno je u slučaju očekivanja da će konstrukcija pretrpjeti *nelinearni* kolaps za određeni faktor opterećenja, a na ovaj način, takav efekt se može predvidjeti. Klasične, linearne metode ne mogu predvidjeti takvo ponašanje konstrukcija, a u sferi nelinearnosti, rezultati se (dok ne nastupi nestabilnost) izvrsno poklapaju s N-R metodom. Slika 5.31. a) usporedno prikazuje izraze (5.42) i (5.43) s numeričkim rezultatima programskog paketa *Abaqus*. Izraz (5.42), tj. relacije prema Crisfieldu i Torkamani/Shiehu se izvrsno podudaraju s numeričkim rješenjima, dok izvedeni izraz (5.43), tj.  $F_\alpha$  pokazuje određena odstupanja u desnom dijelu dijagrama, za veće pomake zgloba  $C$ . Slika 5.31. b) usporedno prikazuje sva numerička rješenja paketa *Abaqus*<sup>29</sup>.

Tablica 5.7. Usporedba rezultata linearnih i nelinearnih modela

Metoda	$N, N$	$E_{rel}, \%$	$\delta, mm$	$E_{rel}, \%$
Model A <sub>ref</sub>	483,034	0,000	33,809	0,000
Model B	473,247	2,068	30,348	11,406
N-R <sub>anlt</sub>	483,991	-0,198	33,883	-0,218
N-R <sub>abq</sub>	482,533	0,104	33,686	0,368
N-R <sub>nas</sub>	482,933	0,021	33,775	0,104
Linearno	401,995	20,159	25,779	31,153

Tablica 5.7. prikazuje vrlo dobro slaganje svih *nelinearnih* modela s kinematičkim modelom A, izuzevši kinematički model B. Također je vidljiva inženjerski *nedopustiva* razlika od preko 30 % usporedbom *nelinearnog* kinematičkog modela A te *linearnog* modela.

<sup>29</sup> Točke A i C predstavljaju lokalne maksimume krivulje, a u točkama B i D iznos sile  $F$  je nula. U stvarnosti, štapna konstrukcija bi iz točke A ( $\lambda_{kr}$ ) *proletila* (eng. *snap*) do idućeg ravnotežnog stanja, tj. točke E.

## 5.2.1.7. Dodatak: dinamički model

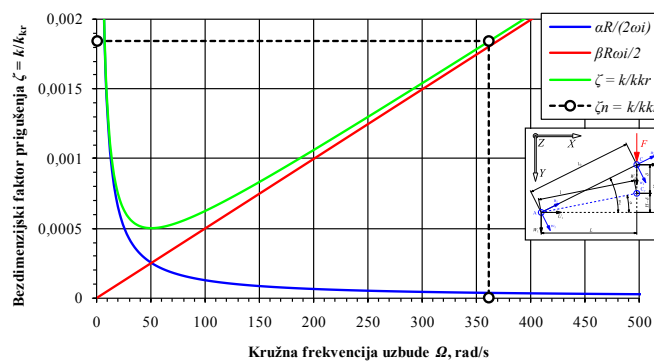
U ovom dodatku, prikazan je dinamički model rješenja *snap-through* problema štapne konstrukcije u vremenskoj domeni, u modulu *Abaqus, Explicit*. Dodatno je definirana gustoća materijala čelika  $\rho_{\text{č}} = 7\,860 \text{ kg/m}^3$  te Rayleighovo, tj. proporcionalno prigušenje [5], [34], [76] i [261] procijenjenim te proizvoljno definiranim koeficijentima Rayleighovog prigušenja  $\alpha_R$  u rad/s i  $\beta_R$  u s/rad. Prema *ibid.*, izraz za matricu prigušenja glasi

$$\mathbf{C} = \alpha_R \mathbf{M} + \beta_R \mathbf{K}, \quad (5.44)$$

gdje su  $\mathbf{C}$  matrica prigušenja,  $\mathbf{M}$  matrica masa, a  $\mathbf{K}$  matrica krutosti. Izraz koji povezuje bezdimenzijski faktor prigušenja  $\zeta$  te Rayleighove koeficijente prigušenja  $\alpha_R$  i  $\beta_R$  glasi

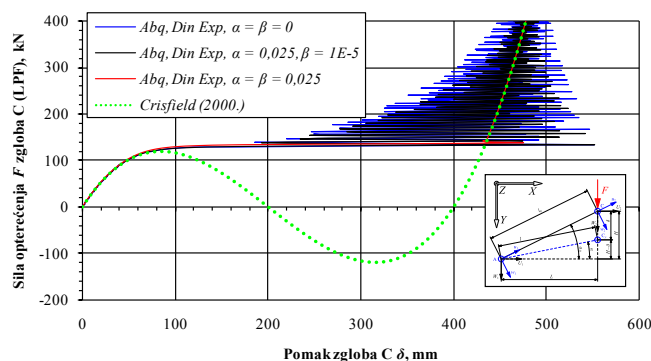
$$\zeta = \frac{k}{k_{\text{kr}}} = \frac{\alpha_R}{2\omega_i} + \frac{\beta_R \omega_i}{2}, \quad (5.45)$$

a izraz (5.45) dijagramski prikazuje Slika 5.32. uz  $\alpha_R = 0,025 \text{ rad/s}$  i  $\beta_R = 0,00001 \text{ s/rad}$ .



Slika 5.32. Proporcionalno (Rayleigh–evo) prigušenje,  $\alpha_R = 0,025 \text{ rad/s}$ ,  $\beta_R = 1 \cdot 10^{-5} \text{ s/rad}$

Uz numerički izračunat iznos vlastite frekvencije  $f_n \approx 57,595 \text{ Hz}$  ( $\omega_n \approx 361,88 \text{ rad/s}$ ) konstrukcije s jednim SSG, faktor prigušenja za  $\Omega = \omega_n$  iznosi  $\zeta \approx 0,18 \%$ . Slika 5.33. prikazuje dinamičko rješenje usporedno s izrazom (5.43), varirajući koeficijente  $\alpha_R$  i  $\beta_R$ .



Slika 5.33. Dinamičko rješenje *snap-through* problema varirajući koeficijente  $\alpha_R$  i  $\beta_R$

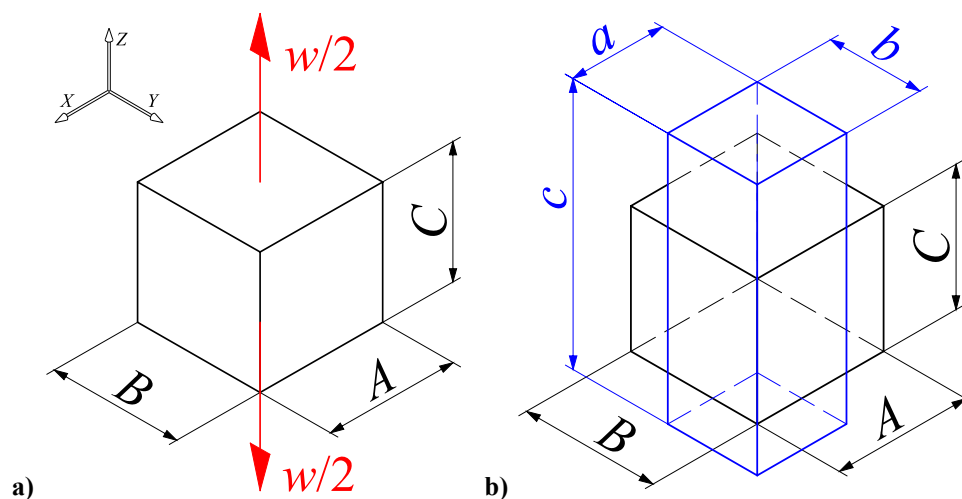
### 5.3. Materijalna nelinearnost

Materijalna verifikacija ujedno je i zadnje te najbitnije potpoglavlje verifikacijskog dijela rada. Detaljno su riješena tri primjera, ispitana je konvergencija te se rezultatima pristupilo kritički. U prvom primjeru su detaljno objašnjeni parametri definiranja materijala (naglasak na M-R materijalni model) te su uočene općenite moguće numeričke greške pri modeliranju. U drugom primjeru, riješen je standardni verifikacijski primjer Cookove membrane, a materijalni model je neo-Hooke. U trećem primjeru, objedinjene su sve do sada promatrane vrste nelinearnosti: geometrijska (N-R), materijalna (M-R), kao i kontakt.

Bitno je primijetiti da je u numeričkom smislu, prilikom korištenja i proračuna hiperelastičnih materijala *apsolutna nužnost* uključiti opciju *NLGEOM* za proračun N-R metodom, jer očekujući velike deformacije, jasno je da je potrebno očekivati i velike pomake, što nije nužno i obrnut slučaj, kako je pokazano u primjeru III, poglavlje 5.2.1.

#### 5.3.1. Primjer IV: analiza jednoosno opterećenog gumenog uzorka

Prizmatični uzorak (Slika 5.34.) podvrgnut je jednoosnom statičkom vlačnom eksperimentu. Opterećenje je zadano kao prisilni *kvazistatički*<sup>30</sup> pomak  $w$  poznatog iznosa.



Slika 5.34. Primjer IV, statički jednoosno opterećen prizmatični uzorak

Tablica 5.8. prikazuje zadane geometrijsko materijalne karakteristike.

Tablica 5.8. Primjer IV, zadani parametri

$A, B, C, \text{ mm}$	$w, \text{ mm}$	$E_0, \text{ MPa}$	$E_{100}, \text{ MPa}$	$\nu$	$H_A, \text{ ShA}$
1	1	9,8	5,76	0,5	72

<sup>30</sup> Termin *kvazistatički* uvodi dodatni pojam *pseudovrijeme*  $t_p$  uvijek predefiniranog *jediničnog* iznosa, što znači da je vrijeme trajanje simulacije 1 (s), a brzina deformacije nije uzeta u obzir [261].

Iz zadanih parametara, vidljivo je da je uzorak dimenzijama jedinična kocka ( $A = B = C = 1 \text{ mm}$ ), da je pomak  $w$  zadan tako da iznos inženjerske deformacije u smjeru globalne osi  $z$  iznosi  $e = 100 \%$ , na krivulji naprezanje-deformacija zadana su dva modula elastičnosti  $E_i$ , a materijal je *nestlačiv* što je vidljivo iz relacije za Poissonov faktor  $\nu = 0,5$ .

Uz pretpostavku da je guma *nestlačiva*, tj. da je Poissonov faktor  $\nu$  uvijek vrlo blizu iznosa 0,5, jedini materijalni parametri su zadana dva modula elastičnosti  $E_0$  i  $E_{100}$ , što je standardni način na koji proizvođač deklarira gumu [45] prema propisanim normama [48] i [49]. Uvidom u način na koji norma traži da se podaci tablično upisuju, vidljivo je da su zadana tri podatka. Modul elastičnosti  $E_0$  je *pravi* modul elastičnosti, a za gumu vrijedi samo u točki  $T_0(0; 0)$  (pri svakom novom inkrementu opterećenja, modul elastičnosti gume se mijenja, Slika 4.6.) te definira da je u početnoj točki gdje su deformacija i naprezanje iznosa nula, nagib tangente  $E_0 = (dS/de)_0 = 9,8 \text{ MPa}$  što je bitan podatak. Također, bitno je primijetiti da proizvođač prema propisanoj normi daje podatke uvijek u formi: inženjersko naprezanje  $S$ /inženjerska deformacija  $e$ , stoga je potrebno primijeniti transformacijske izraze (4.18) pri verifikaciji. Podatak  $E_{100}$  ne označava *pravi*, već *sekantni* modul elastičnosti prema izrazu (4.19), Slika 4.6., što znači da daje točnu koordinatu točke na ordinati (inženjersko naprezanje  $S = 5,76 \text{ MPa}$ ) za slučaj da inženjerska deformacija iznosi  $e = 100 \%$ .

Programski paket *Abaqus* ima mogućnost za *fit* (eng. *fit*, prilagodba, podešavanje, pristajanje, poklapanje) krivulja prema traženom materijalnom modelu i eksperimentalnim podacima, a *minimalna* vrijednost potrebnog broja točaka je *dvije*. Prilagodba krivulja rješava se uz kriterij greške  $E_{\text{num}}$  prema metodi najmanjih kvadrata (eng. *least-squares fit*) izrazom

$$E_{\text{num}} = \sum_{i=1}^n \left(1 - T_i^{\text{th}} / T_i^{\text{test}}\right)^2, \quad (5.46)$$

gdje indeks „th“ označava teoretsku (eng. *theoretical*) vrijednost prema odabranom materijalnom modelu, primjerice izrazima (4.38) i (4.39) za M-R model, dok indeks „test“ označava parametre eksperimentalno mjerenih podataka koji su ubačeni u *Abaqus*.

Točka  $T_0(0; 0)$  se ne računa, jer se kod numeričkog hiperelastičnog materijalnog modela *automatski* računa prolaz kroz nulu. Nadalje, derivaciju funkcije  $(dS/de)_0 = E_0$  nije moguće zadati u takvom obliku u programskom paketu *Abaqus*, što ostavlja samo jedan relevantan parametar. U svrhu iznalaženja rješenja problema pomoću isključivo zadanih podataka (pravo rješenje problema je vlastito eksperimentalno mjerenje, ili traženje proizvođača gume za detaljni  $S$ - $e$  dijagram), iskorištena su *sva tri* zadana materijalna podatka.

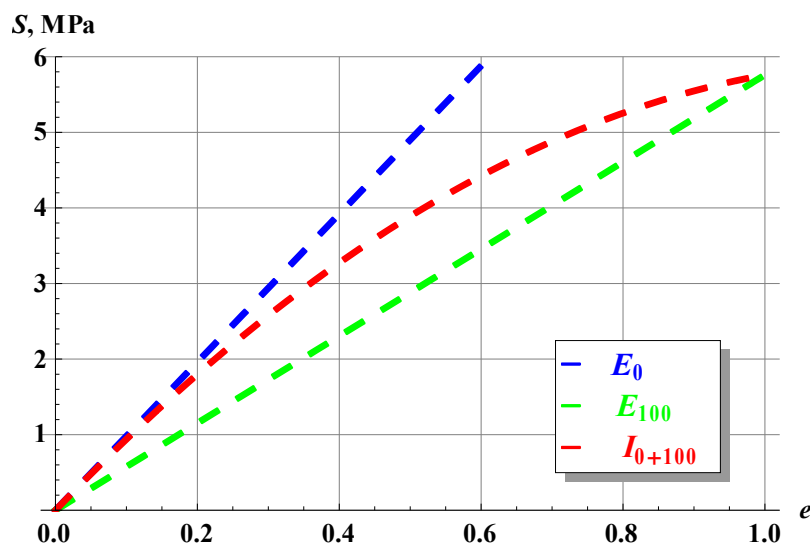
Iz definicija dvaju točaka i nagiba tangente  $T_0(0; 0; (dS/de)_0 = E_0)$ ,  $T_{100}(1; E_{100})$ , u programskom paketu *Wolfram Mathematica 7.0*, naredbom *InterpolatingPolynomial* pronađen je interpolacijski polinom *drugog* stupnja. Interpolacijski polinom, u općem slučaju uvijek je jednog reda nižeg od zadanog broja točaka, tj. za  $n$  točaka, interpolacijski polinom je  $n - 1$  stupnja. U ovom slučaju, zadane su dvije točke te dodatni uvjet derivacije u točki  $T_0$ .

Prema zadanim podacima (Tablica 5.8.), dobiven je polinomski izraz

$$f(x) = I_{0+100} = -4,04 \cdot x^2 + 9,8 \cdot x \Rightarrow S = -4,04 \cdot e^2 + 9,8 \cdot e, \quad (5.47)$$

koji predstavlja numerički izračunati interpolacijski polinom drugog reda iz tri uvjeta (koordinate dvije točke:  $T_0$  i  $T_{100}$ , derivacija  $E_0$ ) te vrijedi *samo* na zadanom intervalu.

Radi kontrole, u programskom paketu *Mathematica* generiran je donji dijagram (Slika 5.35.) gdje je vidljivo da su uvjeti ispunjeni te da polinom dobro i očekivano opisuje ponašanje funkcije na zadanom intervalu, tj. od 0 do 100 % inženjerske deformacije  $e$ .



Slika 5.35. *Mathematica* interpolirani  $S$ - $e$  dijagram zadanog materijala

Jasno je da je gornji dijagram *gruba* aproksimacija stvarnog konstitutivnog modela, no budući da je izračunata polinomska funkcija koja na rubovima dobro opisuje ponašanje materijala prema dobivenim podacima, moguće je uz odabrane inkrementalne deformacije  $e_{inc}$  od 10 %, dobiti iznose naprezanja u odgovarajućim točkama te u takvom, prikladnom obliku ubaciti u programski paket *Abaqus* tabličnom opcijom (eng. *tabular*).

Ideja ovog primjera je, uz verifikaciju KE, procijeniti i kvalitetu *Abaqus* prilagođenih (*fit*) krivulja. Osnovni test je povratno identificiranje, tj. odgovor na pitanje vraća li numerički proračun nazad željene podatke.

S tom svrhom, definirana je donja Tablica 5.9. te nadalje ukratko pojašnjena.

**Tablica 5.9. Verifikacijski parametri zadanog materijala**

$e_n$ -	$S_n$ , MPa	$\varepsilon_s$ -	$\sigma_s$ , MPa	$S_{nabq}$ , MPa	$\sigma_{sabq}$ , MPa	$\lambda (= 1 + e_n)$ -	$S_{n(N-H)}$ , MPa	$S_{n(M-R)}$ , MPa	$\sigma_{s(N-H)}$ , MPa	$\sigma_{s(M-R)}$ , MPa	$\sigma_{s,p(N-H)}$ , MPa	$\sigma_{s,p(M-R)}$ , MPa
0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
0,1	0,9396	0,09531018	1,03356	1,029	1,1319	1,1	0,968359922	1,028722277	1,065195915	1,131594505	1,065195915	1,131594505
0,2	1,7984	0,182321557	2,15808	1,871	2,2452	1,2	1,789629256	1,870946192	2,147555107	2,245135431	2,147555107	2,245135431
0,3	2,5764	0,262364264	3,34932	2,585	3,3605	1,3	2,507273031	2,585351039	3,25945494	3,360956351	3,25945494	3,360956351
0,4	3,2736	0,336472237	4,58304	3,209	4,4926	1,4	3,149811706	3,209298469	4,409736389	4,493017857	4,409736389	4,493017857
0,5	3,89	0,405465108	5,835	3,767	5,6505	1,5	3,736588556	3,767471441	5,604882833	5,651207162	5,604882833	5,651207162
0,6	4,4256	0,470003629	7,08096	4,277	6,8432	1,6	4,281098006	4,276696082	6,84975681	6,842713732	6,84975681	6,842713732
0,7	4,8804	0,530628251	8,29668	4,749	8,0733	1,7	4,792986311	4,748756051	8,148076728	8,072885287	8,148076728	8,072885287
0,8	5,2544	0,587786665	9,45792	5,192	9,3456	1,8	5,279297047	5,19209932	9,502734684	9,345778776	9,502734684	9,345778776
0,9	5,5476	0,641853886	10,54044	5,613	10,6647	1,9	5,74527048	5,612908201	10,91601391	10,66452558	10,91601391	10,66452558
1	5,76	0,693147181	11,52	6,016	12,032	2	6,1948705	6,015789943	12,389741	12,03157989	12,389741	12,03157989

Stupci gornje tablice mogu se pojasniti na sljedeći način:

- stupac 1,  $e_n$ : zadana inženjerska (nominalna) deformacija do 100 % (tj. do jedan) u odabranih deset inkremenata (jedanaest točaka, uključujući i nulu),
- stupac 2,  $S_n$ : prema podacima iz stupca 1 te izrazu (5.47) interpolacijskog polinoma za inženjersko (nominalno) naprezanje  $S$ ,

$$\lambda = 1 + e \Rightarrow \varepsilon = \ln(1 + e), \quad (5.48)$$

- stupac 3,  $\varepsilon_s$ : prema podacima iz stupca 1 te izrazu (5.48) za stvarnu (logaritamsku) deformaciju  $\varepsilon$ ,

$$S = \frac{F}{A_0}, \quad \lambda = 1 + e \Rightarrow \sigma = S \cdot (1 + e), \quad (5.49)$$

- stupac 4,  $\sigma_s$ : prema podacima iz stupaca 1 i 2 te izrazu (5.49) za stvarno (Cauchyjevo) naprezanje  $\sigma$ ,
- stupac 5, *Abaqus*  $S_{nabq}$ : jedanaest izračunatih točaka odabranog *aproksimacijskog* Mooney-Rivlin polinoma uz izračunate koeficijente  $C_{10} \approx 1,5214$  MPa,  $C_{01} \approx 0,3948$  MPa pomoću metode najmanjih kvadrata (*Abaqus* algoritam), iz izraza (5.46) za minimizaciju greške,
- stupac 6, *Abaqus*  $\sigma_{sabq}$ : prema podacima iz stupaca 1 i 5 te izrazu (5.49),

$$\lambda = 1 + e, \quad (5.50)$$

- stupac 7,  $\lambda$ : istežanje, tj. omjer istežanja (eng. *stretch*, tj. *stretch ratio*) prema podacima iz stupca 1 te izrazu (5.50) kao i izrazu (4.24),

$$S = 2 \cdot \left( C_{10} + \frac{C_{01}}{\lambda} \right) \cdot \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right), \quad C_{01} = 0 \Rightarrow S_{(N-H)} = 2 \cdot C_{10} \cdot \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right), \quad (5.51)$$

- stupac 8,  $S_n(N-H)$  (neo-Hooke): prema podacima iz stupca 7, izračunatom parametru materijala  $C_{10} \approx 1,7699$  MPa (*Abaqus*) te izrazu (5.51),

$$S = 2 \cdot \left( C_{10} + \frac{C_{01}}{\lambda} \right) \cdot \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right), \quad C_{01} \neq 0 \Rightarrow S_{(M-R)} = 2 \cdot \left( C_{10} + \frac{C_{01}}{\lambda} \right) \cdot \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right), \quad (5.52)$$

- stupac 9,  $S_n(M-R)$  (Mooney-Rivlin): prema podacima iz stupca 7, izračunatim parametrima materijala  $C_{10}$  i  $C_{01}$  (*Abaqus*) te izrazu (5.52),

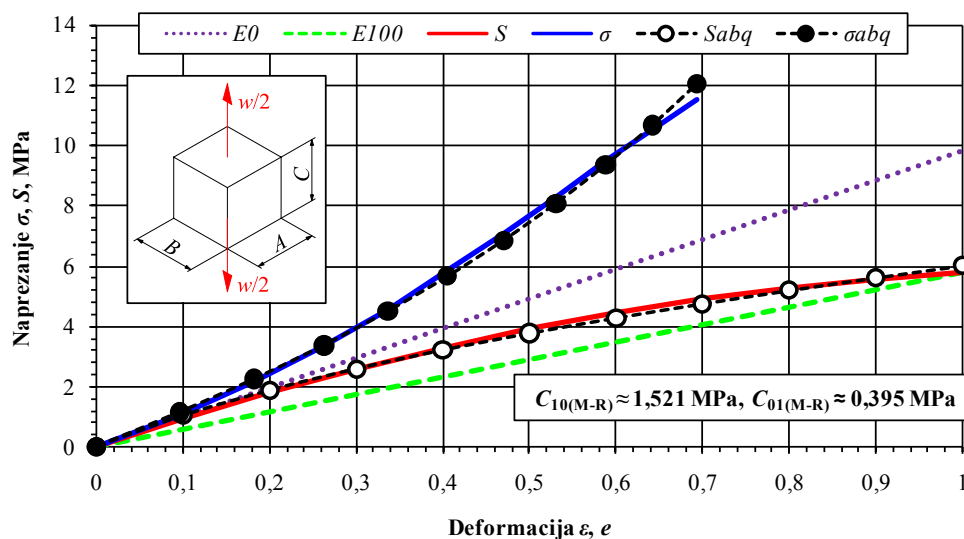
$$\sigma = 2 \cdot \left( C_{10} + \frac{C_{01}}{\lambda} \right) \cdot \left( \lambda^2 - \frac{1}{\lambda} \right), \quad C_{01} = 0 \Rightarrow \sigma_{(N-H)} = 2 \cdot C_{10} \cdot \left( \lambda^2 - \frac{1}{\lambda} \right), \quad (5.53)$$

- stupac 10,  $\sigma_s(N-H)$ : prema podacima iz stupca 7, izračunatom parametru materijala  $C_{10} \approx 1,7699$  MPa te izrazu (5.53),

$$\sigma = 2 \cdot \left( C_{10} + \frac{C_{01}}{\lambda} \right) \cdot \left( \lambda^2 - \frac{1}{\lambda} \right), \quad C_{01} \neq 0 \Rightarrow \sigma_{(M-R)} = 2 \cdot \left( C_{10} + \frac{C_{01}}{\lambda} \right) \cdot \left( \lambda^2 - \frac{1}{\lambda} \right), \quad (5.54)$$

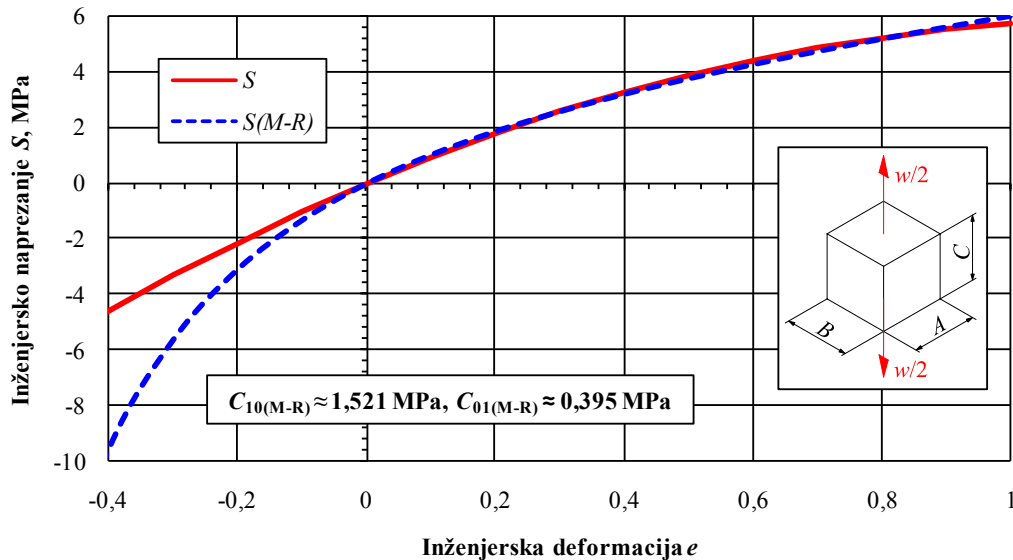
- stupac 11,  $\sigma_s(M-R)$ : prema podacima iz stupca 7, izračunatim parametrima materijala  $C_{10}$  i  $C_{01}$  te izrazu (5.54),
- stupac 12, kontrolni  $\sigma_{s,p}(N-H)$ : prema podacima iz stupaca 1 i 10 te izrazu (5.49), tj. množenjem stupca 10 inkrementalnim omjerom istežanja  $\lambda_i$ ,
- stupac 13, kontrolni  $\sigma_{s,p}(M-R)$ : prema podacima iz stupaca 1 i 11 te izrazu (5.49), tj. množenjem stupca 10 inkrementalnim omjerom istežanja  $\lambda_i$ .

Slika 5.36. daje preliminarni vizualni uvid u kvalitetu prilagođene krivulje.



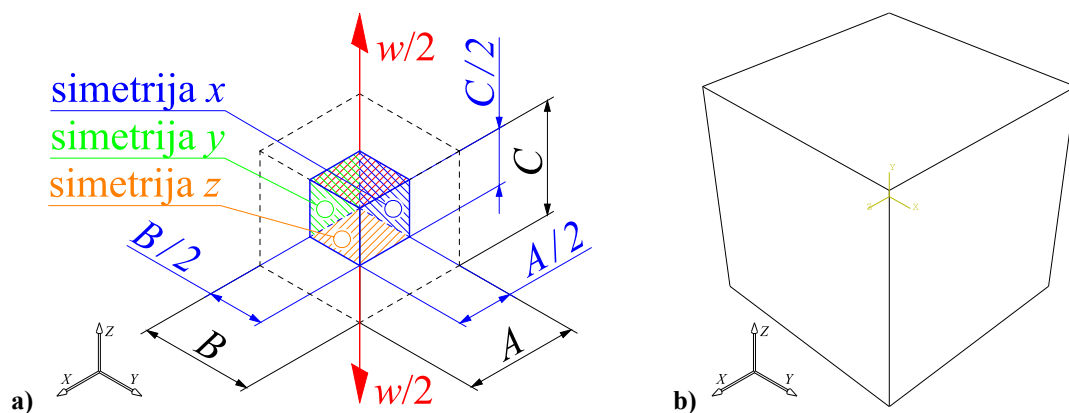
Slika 5.36. Usporedba  $\sigma, S/\epsilon, e$  krivulja za M-R model

Vizualno je vidljivo vrlo dobro poklapanje krivulja za odabrani M-R model. Također je vidljiva značajna razlika između pojma *nominalno* i *stvarno* u kontekstu naprezanja i deformacije gumenih materijala gdje je promatrajući crvenu liniju ( $S$ ) karakteristika gume *degresivna*, no promatrajući plavu liniju ( $\sigma$ ), karakteristika gume je *progresivna* (Slika 5.36.).



Slika 5.37.  $S$ - $e$  krivulja, uključeno tlačno područje, M-R model

Prikladno je produžiti dijagrame i u tlačno područje (Slika 5.37.) gdje se vidi odvajanje originalnog interpolacijskog polinoma  $S$  od M-R materijalnog modela, tj. plave isprekidane linije  $S(M-R)$ . Ovakvo vrlo izraženo progresivno opiranje tlačnom opterećenju, u sukladnosti je s referentnom literaturom<sup>31</sup> (Treloar, [187], [188] i [189]). Budući da je materijalni M-R model *verificiran*, potrebno je odabrati i verificirati konačne elemente. Slika 5.38. a) prikazuje rubne uvjete i b) mrežu modela od *jednog* prizmatičnog 3D elementa.

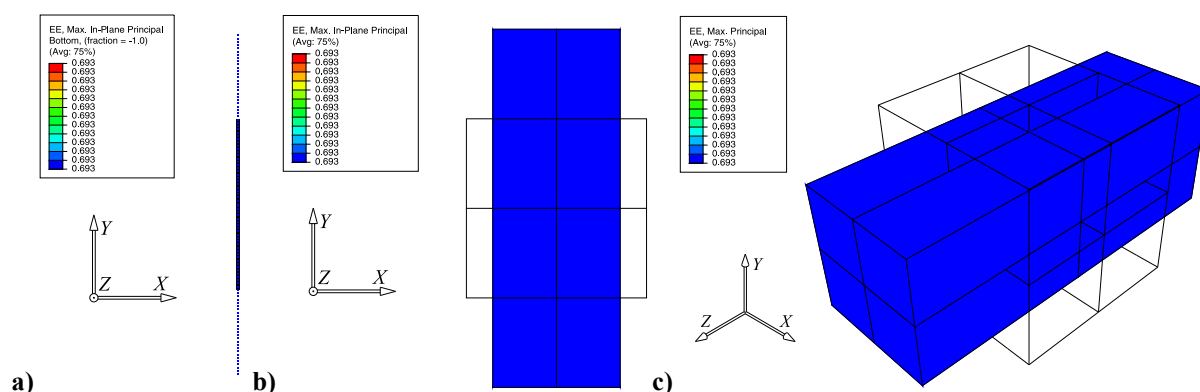


Slika 5.38. Proračunski model 1/8 uzorka: a) rubni uvjeti, b) mreža, 1 KE

<sup>31</sup> Bitno je napomenuti da je tlačne karakteristike gumenog uzorka pri jednoosnom eksperimentu teško točno odrediti zbog znatnog utjecaja trenja pri mjerenju. Faktor trenja bi trebalo svesti na minimum, tj.  $\mu \approx 0$ , stoga je kontaktne površine potrebno podmazati, za što se može koristiti primjerice talk u prahu [137].



Za test je odabran prizmatični element C3D8RH, dimenzija 0,5 x 0,5 x 0,5 mm. Pri rješavanju kontaktnog problema (primjer II), vidljivo je da prizmatični elementi drugog reda s reduciranom integracijom C3D20R pokazuju uvjerljivo superiorne karakteristike, no ovo je vrlo jednostavan slučaj opterećenja gdje i jedan element prvog reda *mora* dati egzaktne rezultate, stoga je odabran element nižeg reda s 8 čvorova, reduciranom integracijom te hibridnom formulacijom. Korištenje elemenata s hibridnom formulacijom u programskom paketu *Abaqus* preporuča se u slučaju pretpostavke nestlačivosti kontinuuma, tj. iznosa Poissonovog faktora  $\nu$  blizu 0,5. Korištenje hibridnih elemenata osigurava bržu i izgledniju konvergenciju prilikom rješavanja iterativno-inkrementalnih problema [260] i [261].



Slika 5.39. Stvarna deformacija  $\varepsilon$ : a) 1 štapni/gredni KE, b) 1 membranski KE, c) 1 prizmatični KE

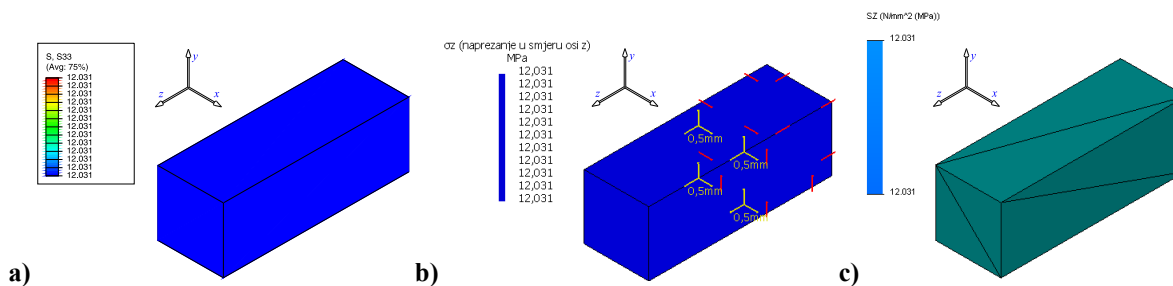
Za dodatnu kontrolu, korišteni su i 1D (T2D2H, B21H, Slika 5.39. a) te 2D elementi (CPS4R, Slika 5.39. b), a Slika 5.39. c) prikazuje deformirani oblik 3D modela, tj. C3D8RH KE. Uvidom u rezultate sa skala za *Abaqus* elastičnu deformaciju „EE“, vidljivo je da sve vrijednosti iznose  $\varepsilon \approx 0,693$ , što je identična vrijednost koju prikazuje Tablica 5.9., stupac tri, zadnji red, čime je numerički postupak povratno identificiran te *verificiran*. Značajno je primijetiti da za *nominalnu* deformaciju  $e = 100\%$ , stvarna deformacija  $\varepsilon$  iznosi  $\sim 69,3\%$ .

Pri očitavanju stvarnog naprezanja  $\sigma$ , postupak postaje kompleksniji. Bitno je zamijetiti *uvijek* prisutnu numeričku grešku *aproksimacijskog* polinoma, dobivenog pomoću metode najmanjih kvadrata, definiranu parametrom greške  $E$  u izrazu (5.46).

Iz tog razloga, točnost rezultata će, osim o gustoći diskretizacije mreže u slučaju kompleksnije geometrije, ovisiti i o stupnju točnosti polinoma u *razmatranom* području, stoga je bitno *orijentacijski* poznavati konačnu deformaciju proračunskog modela te aproksimacijski polinom definirati tako da na radnom području ima najmanju grešku  $E_{\min}$ .

U ovom slučaju, na polinomu *namjerno* nisu rađene dodatne intervencije u svrhu smanjenja greške na rubu područja (usporedba Tablica 5.9., zadnji red stupaca 2 i 5).

Slika 5.40. prikazuje usporedbu stvarnih napreznja  $\sigma$  M-R modela kreiranih u programskim paketima *Simulia Abaqus*, *MSC Marc* te *SolidWorks Cosmos*, za rubne uvjete identične onima koje prikazuje Slika 5.38. a) te materijalno geometrijske karakteristike koje prikazuje Tablica 5.8. Bitno je napomenuti da programski paket *Cosmos* ima *siromašnu* bazu konačnih elemenata te je u ovom slučaju korišteno dvanaest tetraedarskih KE prvog reda.



Slika 5.40. Usporedba Mooney-Rivlin PM,  $\sigma_z$ : a) *Abaqus*, b) *Marc*, c) *Cosmos*

U programskom paketu *Abaqus*, vidljiva je *minimalna* greška zaokruživanja u odnosu na nominalne vrijednosti (Tablica 5.9., stupci 5 i 6). *MSC Nastran (Marc)* pokazuje istu grešku radi načina unosa parametra, jer u aplikaciji *SimDesigner* nije moguće direktno unijeti vrijedost  $\nu = 0,5$ , već je modul stlačivosti  $K$  (eng. *bulk modulus*) definiran tako da ima *veliku* vrijednost te da se približava *nestlačivom* kontinuumu, tj. vrijedi  $K \approx 10^5$  MPa prema izrazu (4.15) i preporukama (Bower, [11]). Također, zbog ograničenog algoritma u programskom paketu *SolidWorks Cosmos* (vrijedi  $\nu \neq 0,5$ ), prisutna je greška unosa parametara (Poissonov faktor  $\nu \approx 0,499981$ ). Općenito se pri numeričkim proračunima temeljenim na MKE očekuju poteškoće pri konvergenciji za apsolutno nestlačiva tijela, stoga neki programski paketi onemogućuju unos takav unos podataka, dok programski paket *Abaqus* uspješno rješava taj numerički problem prema pokazanom primjeru.

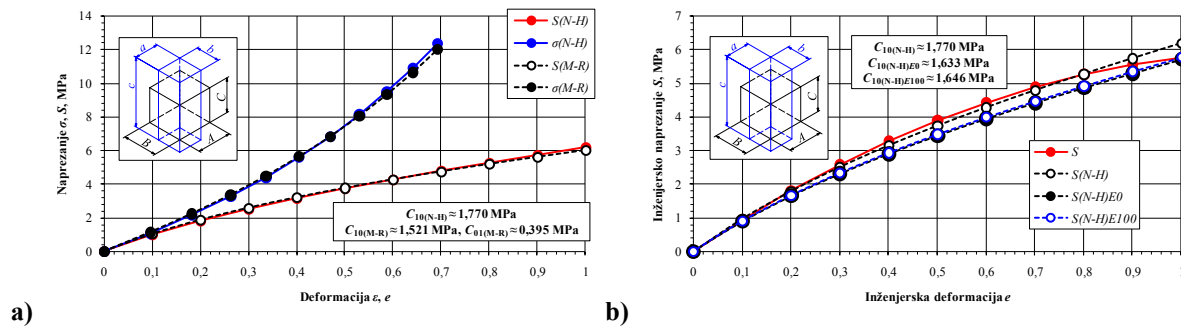
Tablica 5.10. prikazuje usporedbu rezultata sva tri proračunska modela u odnosu na analitički model gdje je vidljiva relativna greška  $E_{rel}$  prosječnog iznosa -4,247 %, što znači da su svi numerički modeli konzistentni, jer su ovisni o izračunatim M-R parametrima  $C_{10}$  i  $C_{01}$ .

Tablica 5.10. Usporedba Mooney-Rivlin PM, napreznje  $\sigma$

Metoda	$\varepsilon_s$ , %	$\sigma_s$ , MPa	$E_{rel(anlt)}$ , %	$E_{rel(abq)}$ , %
Analički		11,520	0,000	-
Abaqus C3D20RH	69,315	12,031	-4,247	0,000
Marc CHEXA		12,031	-4,247	0,000
Cosmos TET10		12,031	-4,247	0,000

Zadnji stupac tablice prikazuje usporedbu sva tri modela, no uz uvjet da se *Abaqus* rješenje smatra referentnim, gdje je vidljivo *besprijekorno* numeričko poklapanje.

Slika 5.41. a) kreirana je u svrhu usporedbe neo-Hooke te Mooney-Rivlin modela. Vidljivo je da se konstante  $C_{10}$  razlikuju radi prilagodbe  $S$ - $e$  krivulji prema izrazu (5.47).



Slika 5.41. Usporedba  $\sigma$ ,  $S/\epsilon$ ,  $e$  krivulja za N-H i M-R modele

U slučaju malog broja poznatih parametara, primjerice  $E$  i  $\nu$ , moguće je *orijentacijski* izračunati koeficijent  $C_{10}$  za neo-Hooke model prema [107] i [108] primjenom izraza

$$\nu \cong 0,5 \Rightarrow G_0 = E_0/3 \Rightarrow C_{10(N-H)E0} = G_0/2 = E_0/6 \cong 1,633 \text{ MPa}, \quad (5.55)$$

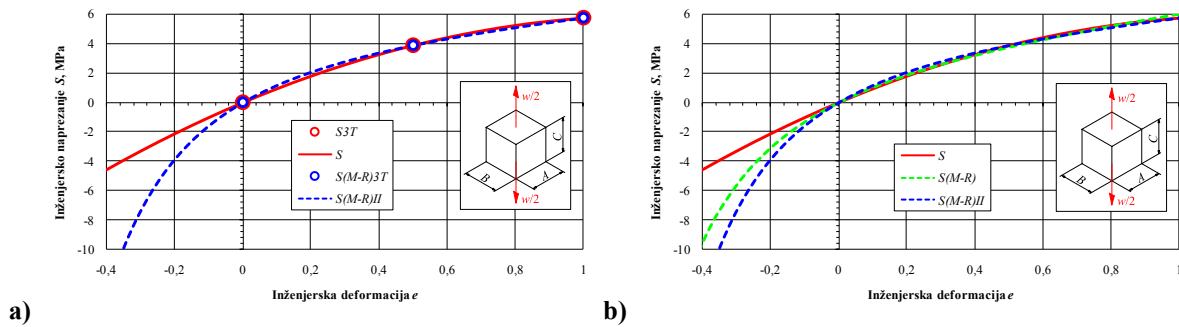
a Slika 5.41. b) prikazuje usporedbu rezultata takvog pristupa s prethodnim načinom, gdje je vidljivo dobro poklapanje, no prethodni način rezultira *točnijim* praćenjem  $S$ - $e$  krivulje. Koeficijent  $C_{10(N-H)E100}$  dobiven je uvrštavanjem točke  $T_{100}(1; E_{100})$  u izraz (5.51). Tablica 5.11. prikazuje usporedbu rezultata stvarnog naprezanja  $\sigma$  za 100 % nominalne deformacije  $e$ , gdje je vidljivo da neo-Hooke  $S(N-H)$  ima nešto veću grešku u odnosu na Mooney-Rivlin.

Tablica 5.11. Usporedba neo-Hooke i Mooney-Rivlin PM,  $\sigma$

Metoda	$\epsilon_s$ , %	$\sigma_s$ , MPa	$E_{rel}$ , %
Analitički		11,520	0,000
neo-Hooke $S(N-H)$	69,315	12,390	-7,020
Mooney-Rivlin $S(M-R)$		12,032	-4,252

Prema generalnim preporukama, neo-Hooke model koristi se do  $\sim 40$  % deformacije, a Mooney-Rivlin model dopušteno je koristiti do  $\sim 100$  % deformacije prema [108], [173], [181], [184], [185], [186], [217], [231] i [268], što su iskustvene, *orijentacijske* smjernice.

S ciljem dodatne kontrole načina izračuna pomoću metode najmanjih kvadrata u programskom paketu *Abaqus* u kontekstu prilagodbe krivulja materijalnih modela, napravljen je kratki test kako algoritam djeluje u slučaju da su zadane samo dvije točke  $S$ - $e$  krivulje prema izrazu (5.47). Zadane su točke  $T_1(0,5; 3,89)$  i  $T_2(1; 5,76)$  (stupac 1 i 2, Tablica 5.9.), a u ovom slučaju metoda najmanjih kvadrata, tj. dobivena aproksimacijska funkcija, prema teoriji [45] postaje *interpolacijska* funkcija, što znači da *mora* proći kroz obje točke (kao i kroz točku 0; 0). Izračunati su novi M-R koeficijenti  $C_{10(II)} \approx 1,055$  MPa i  $C_{01(II)} \approx 1,1815$  MPa te su kreirana dva nova  $S$ - $e$  dijagrama s ciljem lakše vizualne kontrole.



Slika 5.42. Usporedba M-R modela I i II

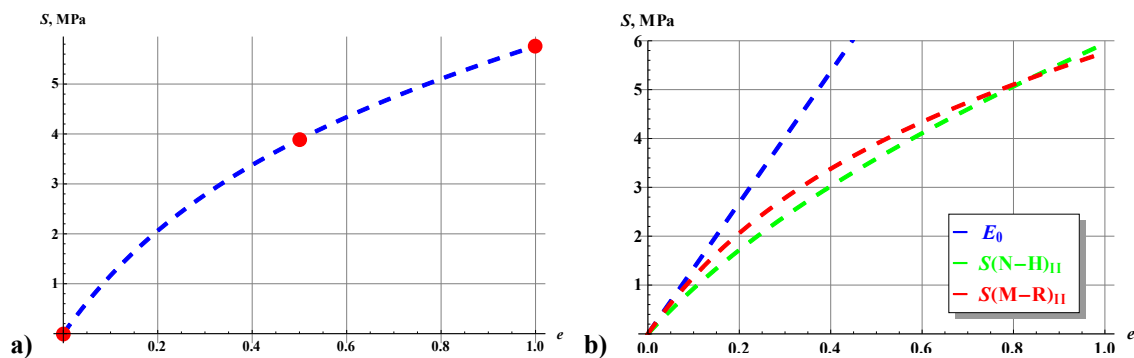
Slika 5.42. a) prikazuje usporedbu zadane interpolacijske funkcije prema (5.47) te Mooney-Rivlin modela II gdje je vidljivo da se zadane točke *u potpunosti* poklapaju. Slika 5.42. b) prikazuje usporedbu M-R modela I i II gdje je vidljivo vrlo dobro poklapanje u vlačnom području te određeno (očekivano) odstupanje u tlačnom području.

Tablica 5.12. Usporedba rezultata M-R modela II

$e_{in}$ , -	$S_{in}$ , MPa	$S_{n(M-R)}$ , MPa	$E_{rel}$ , %
0	0	0	0
0,5	3,89	3,890000009	-2,38027E-07
1	5,76	5,760000015	-2,60417E-07

Tablica 5.12. prikazuje povratnu identifikaciju usporedbom zadanih i očitanih vrijednosti gdje je očito da je relativna greška  $E_{rel}$  ranga vrijednosti  $\sim 10^{-7}$  nastala kao posljedica zaokruživanja, stoga je pokazano da u slučaju samo dvije zadane točke, aproksimacijski polinom postaje interpolacijski, što je bitan podatak koji se u praksi može iskoristiti u svrhu *povećanja točnosti* u razmatranom *radnom* području.

Za konačnu kontrolu *Abaqus* algoritma metode najmanjih kvadrata, u programskom paketu *Mathematica* napravljen je kontrolni program koji iz ulaznih parametara točaka  $S$ - $e$  krivulje dobivene eksperimentalnim mjerenjem računa N-H i M-R koeficijente. U program su ubačene tri točke, tj. točka  $T_0(0; 0)$ , kao i točke  $T_1$  te  $T_2$ . Dobiveni rezultati su identični kao i u programskom paketu *Abaqus*, tj. vrijedi  $C_{10(II)abq} = C_{10(II)mat}$ , kao i  $C_{01(II)abq} = C_{01(II)mat}$ .

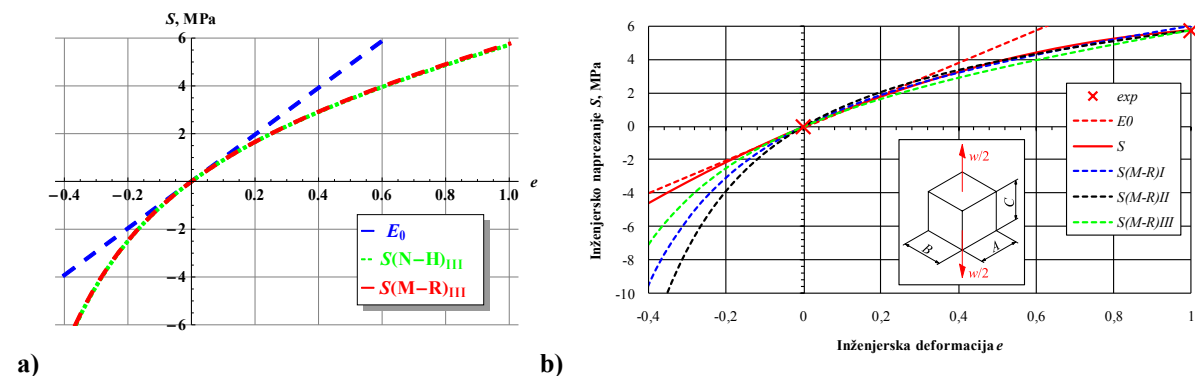
Slika 5.43. Mathematica prilagodba krivulja: a)  $S(M-R)_{II}$ , b)  $E_0$ ,  $S(N-H)_{II}$ ,  $S(M-R)_{II}$

Dvoparametarsku Mooney-Rivlin  $S$ - $e$  krivulju moguće je dobiti i samo iz zadanih podataka (Tablica 5.8.) kombiniranjem izraza (4.33) i (4.38) gdje je u ovom slučaju  $E_0$  eksplicitno zadan. Izjednačavanjem  $S_{(M-R)}$  i  $E_{100}$ , dobiva se relacija za  $C_{01}$  koja glasi

$$C_{01} = 2 \cdot \left( \frac{E_0}{6} - \frac{E_{100}}{2 \cdot (\lambda - 1/\lambda^2)} \right) / \left( 1 - \frac{1}{\lambda} \right), \quad (5.56)$$

a uvrštavanjem zadanih vrijednosti uz  $\lambda = (1 + e) = 2$ , te izračunavanjem  $C_{01}$  i uvrštavanjem u (4.33), dobija se  $C_{10}$ . Koeficijenti iznose  $C_{10(III)} \approx 1,658$  MPa i  $C_{01(III)} \approx -0,0248$  MPa, a negativna vrijednost koeficijenta  $C_{01(III)}$  implicira moguću *nestabilnost*<sup>32</sup> u nekim radnim područjima [108] što preventivno prijavljuje i programski paket *Abaqus* [261].

Slika 5.44. a) prikazuje *Mathematica* dijagram  $S$ - $e$  krivulje gdje je vidljivo da je M-R model III *stabilan* i postojan u zadanom intervalu *tlačno/vlačnog* dijela te se vizualno izvrsno podudara s neo-Hooke modelom prema izrazu (5.55) uz  $C_{10(N-H)(III/E_0)} \approx 1,633$  MPa.



Slika 5.44. Konačna usporedba: a) *Mathematica* prilagodba krivulja, b) Mooney-Rivlin I, II i III

Slika 5.44. b) prikazuje konačnu usporedbu Mooney-Rivlin modela I, izraz (5.52), II, izraz (5.52) uz nove koeficijente  $C_{10(II)}$  i  $C_{01(II)}$ , te III, izraz (5.56) uz izraz (4.33). Vidljivo je dobro poklapanje rezultata u vlačnom području te očekivano razmimoilaženje rezultata u tlačnom području, budući da eksperimentalni podaci u tom području nisu poznati.

Valja napomenuti da je koeficijente  $C_{10(II)}$  i  $C_{01(II)}$  S(M-R)II krivulje moguće dobiti i jednostavnijim načinom uz uvrštavanje točaka  $T_1(e_1; 3,89)$  i  $T_2(e_2; 5,76)$  u izraz (5.52). Uvjet je da vrijedi  $\lambda_1 = (1 + e_1) = 1,5$  i  $\lambda_2 = (1 + e_2) = 2$ . Problem se tada svodi na rješavanje dvije jednačbe s dvije nepoznanice. U ovom slučaju, prikladnije je odabrati S(M-R)I ili S(M-R)II krivulju kao konačnu krivulju, u odnosu na krivulju S(M-R)III, jer je tako osigurana stabilnost prema Druckeru [219], u *cijelom* radnom području.

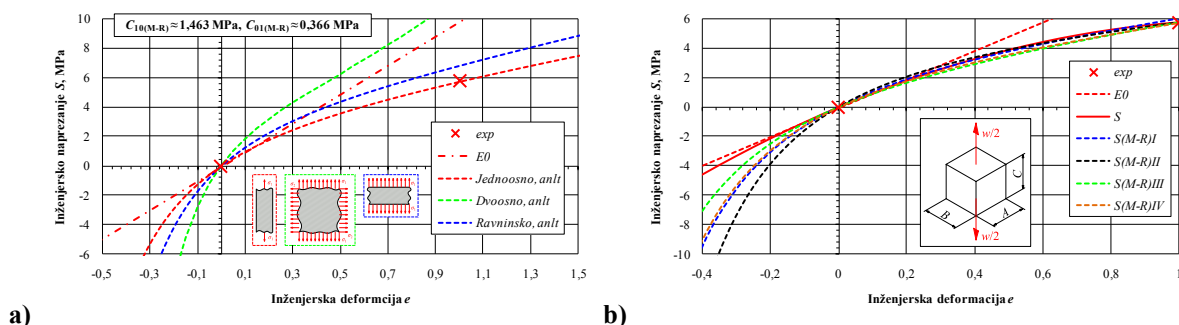
<sup>32</sup> Opširnije o Druckerovom postulatu stabilnosti, nalazi se u zaključnom verifikacijskom poglavlju 5.4.

Budući da prema normi ISO 37/ASTM D412 [48], [49] nije *točno definirano* na koji način je određen početni modul elastičnosti  $E_0$  gume u podacima dobivenima od strane proizvođača gume za gumeni zglob [45] (Tablica 5.8.), pri konačnom određivanju M-R konstanti  $C_{10}$  i  $C_{01}$ , korišten je isključivo sekantni modul elastičnosti na 100 % inženjerske deformacije  $e$ , tj. iznos inženjerskog naprezanja  $E_{100} = 5,76$  MPa uz  $e = 1$ . Prema preporukama Genta [108], str. 311 i kompanije MSC [270], str. 7-60, izraz (7-94), iskustveno je određeno/pretpostavljeno da je iznos konstante  $C_{01}$  četiri puta manji od iznosa konstante  $C_{10}$ , tj. vrijedi relacija  $C_{01} \cong 0,25 \cdot C_{10}$ , čime je jednoznačno moguće raspisati izraz

$$C_{01} = \frac{C_{10}}{k}, k \approx 4 \dots 5 \Rightarrow C_{10} = \frac{E_{100}}{2 \cdot \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right) \cdot \left( 1 + \frac{1}{x \cdot \lambda} \right)}, \quad (5.57)$$

a izračunate Mooney-Rivlin konstante iznose  $C_{10(IV)} \approx 1,463$  MPa i  $C_{01(IV)} \approx 0,366$  MPa te su u identičnom obliku unešene u programske pakete *Abaqus* i *SimDesigner (Marc)*. Slika 5.45.

a) prikazuje  $S$ - $e$  dijagram EPDM materijala gumenog zgloba uz izračunate konstante prema izrazu (5.57) za *jednoosno*, *dvoosno* i *ravninsko* (čisto smicanje) stanje opterećenja.



Slika 5.45. Mooney-Rivlin  $S$ - $e$  dijagram EPDM materijala gumenog zgloba

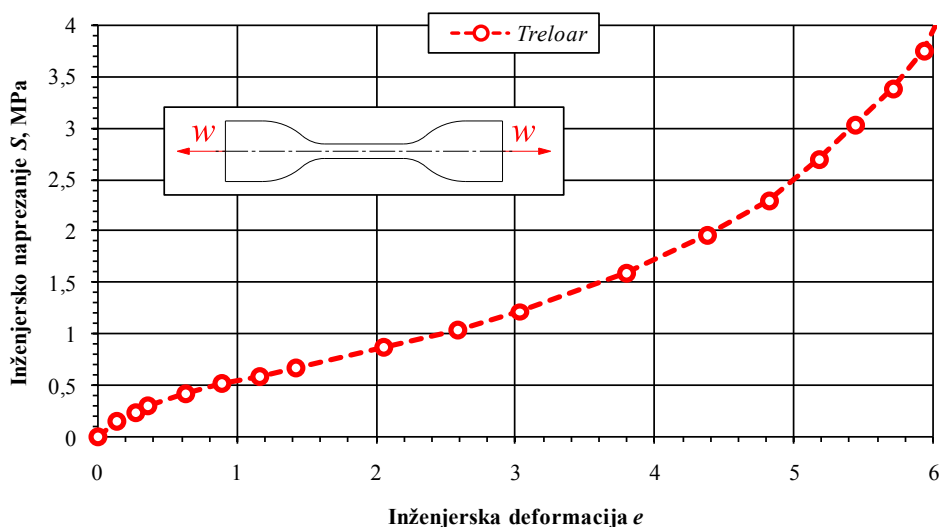
Slika 5.45. b) prikazuje usporedbe sve četiri  $S$ - $e$  krivulje Mooney-Rivlin konstitutivnog modela za jednoosno stanje naprezanja gdje je vidljivo vrlo dobro poklapanje svih modela. Tablica 5.13. prikazuje usporedne rezultate sva četiri M-R modela u slučaju  $e_n = 100$  % inženjerske deformacije gdje je vidljivo najveće odstupanje modela M-R(I), zbog već prije pojašnjanih razloga, tj. načina prilagodbe hiperelastične krivulje.

Tablica 5.13. Usporedba Mooney-Rivlin modela varirajući koeficijente  $C_{ij}$

Metoda	$C_{10}$ , MPa	$C_{01}$ , MPa	$e_n$ , %	$S_n$ , MPa	$E_{rel(anlt)}$ , %
Eksperiment	-	-		5,76	0,000
M-R(I)	1,521	0,395		6,016	-4,252
M-R(II)	1,055	1,182	100,0	5,760	0,000
M-R(III)	1,658	-0,025		5,760	0,000
M-R(IV)	1,463	0,366		5,760	0,000

### 5.3.1.1. Validacija prema Treloaru

L. R. G. Treloar, bio je jedan od najvećih priznatih znanstvenih stručnjaka na području hiperelastičnih materijala i autor brojnih utjecajnih radova na tu temu [187], [188] i [189]. Validacija je napravljena prema referentnim podacima (Treloar 1944., [189]) preuzetih iz [261] i prebačenim iz  $\text{kg/cm}^2$  u MPa ( $1 \text{ kg/cm}^2 \approx 0,0980665 \text{ MPa}$ ). Maksimalna inženjerska deformacija  $e_{\max}$  je iznosila 664 %, dok su u ovom slučaju prikazani rezultati do  $e = 600 \%$ . Slika 5.46. prikazuje  $S$ - $e$  krivulju prema referentnim podacima statičkog *vlačnog* pokusa.



Slika 5.46.  $S$ - $e$  dijagram hiperelastičnog materijala prema [189]

Budući da je *Abaqus* algoritam prilagodbe krivulja verificiran, potrebno je samo odabrati optimalni konstitutivni model za promatrano područje. Prva validacija odnosi se na cijelo promatrano područje, tj. deformaciju  $e$  do 600 %. Osim već pojašnjenih neo-Hooke te Mooney-Rivlin modela, promatrani su i konstitutivni modeli prema Yeohu (Yh, reducirani polinom uz  $N = 3$ ) [190] i [191], Ogden (Og,  $N = 3$ ) [182] i [183] te Arruda-Boyce (A-B,  $N = 5$ ) [173] i [174] uz pretpostavku da je materijal uzorka *nestlačiv* te da vrijedi  $I_1 = \lambda^2 + 2/\lambda$ .

Izrazi za jednoosne Yeoh, Ogden i Arruda-Boyce konstitutivne modele redom glase

$$U_{(Yh)} = \sum_{i=1}^3 C_{i0} \cdot (I_1 - 3)^i \Rightarrow S_{(Yh)j} = 2 \cdot \left[ C_{10} + 2 \cdot C_{20} \cdot (I_1 - 3) + 3 \cdot C_{30} \cdot (I_1 - 3)^2 \right] \cdot \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right), \quad (5.58)$$

$$U_{(Og)} = \sum_{i=1}^3 \frac{2 \cdot \mu_i}{\alpha_i^2} \cdot (\lambda_1^{\alpha_i} + \lambda_2^{\alpha_i} + \lambda_3^{\alpha_i} - 3) \Rightarrow S_{(Og)j} = \sum_{i=1}^3 \frac{2 \cdot \mu_i}{\alpha_i} \cdot \left( \lambda_j^{\alpha_i-1} - \lambda_j^{-\frac{1}{2}\alpha_i-1} \right), \quad (5.59)$$

$$U_{(A-B)} = \mu \sum_{i=1}^5 \frac{C_i}{\lambda_m^{2i-2}} \cdot (\bar{I}_1 - 3^i) \Rightarrow S_{(A-B)j} = 2 \cdot \mu \cdot (\lambda - \lambda^{-2}) \sum_{i=1}^5 \frac{i \cdot C_i}{\lambda_m^{2i-2}} \cdot \bar{I}_1^{i-1}. \quad (5.60)$$

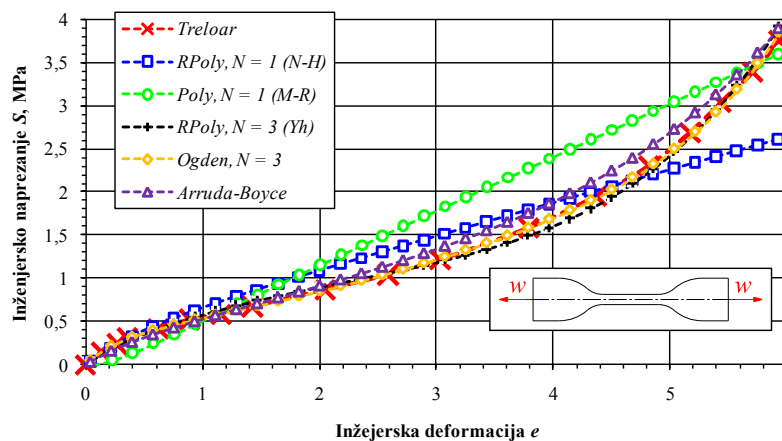
Potrebno je napomenuti da izrazi (5.58), (5.59), i (5.60) vrijede isključivo uz uvjet

$$S_1 = S = F/A_0, \quad S_2 = S_3 = 0, \quad (5.61)$$

budući da je napomenuto da se radi o *jednoosnom* stanju naprezanja. Također, izrazi (5.58), (5.59), i (5.60) razlikuju se ovisno o literaturi [11], [173], [174], [182], [183], [190], [191], [213], [260] i [261] glede korištene *nomenklature* materijalnih koeficijenata i implementacije.

### 5.3.1.1.1. Validacija I, $e_{max} = 600\%$

Slika 5.47. prikazuje prvu konstitutivnu validaciju gdje je vidljivo da Yeoh, Ogden te Arruda-Boyce vrlo dobro opisuju zadanu krivulju (Ogden je u ovom slučaju *najtočniji*), dok neo-Hooke te Mooney-Rivlin daju rezultate *nezadovoljavajuće* točnosti.



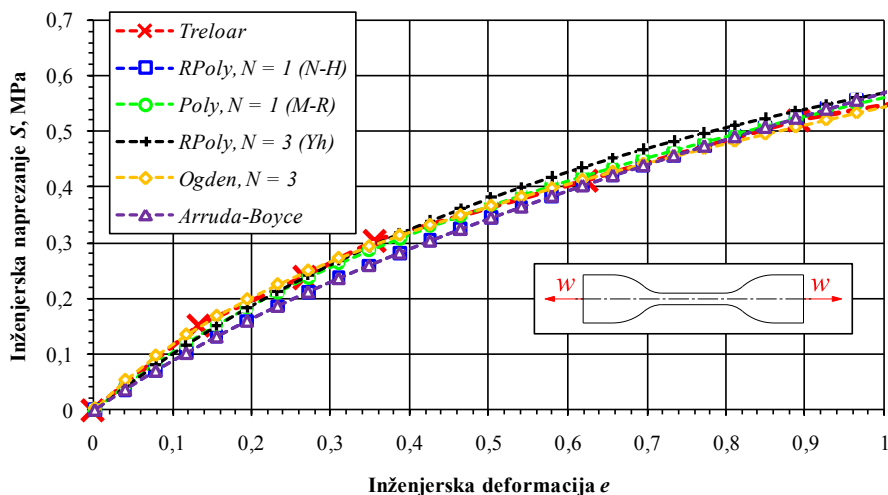
Slika 5.47. Validacija I,  $e_{max} = 600\%$

Razlog slabih rezultata kod N-H te M-R modela je što nisu primjenjivi za opisivanje velike deformacije uz *infleksiju*  $S$ - $e$  krivulje. Vidljivo je da modeli loše opisuju čak i područje *relativno* male deformacije, tj.  $e < 100\%$ , budući da algoritam prilagodbe krivulje metodom najmanjih kvadrata minimizira grešku na cijelom promatranom području prema izrazu (5.46). Ovime je pokazano da se N-H i M-R konstitutivni modeli uistinu *ne smiju* koristiti u slučaju očekivano *velikih* deformacija. Vidljivo je i da neo-Hooke model vizualno značajno točnije prati originalnu krivulju do  $\sim 500\%$  deformacije u odnosu na M-R model.

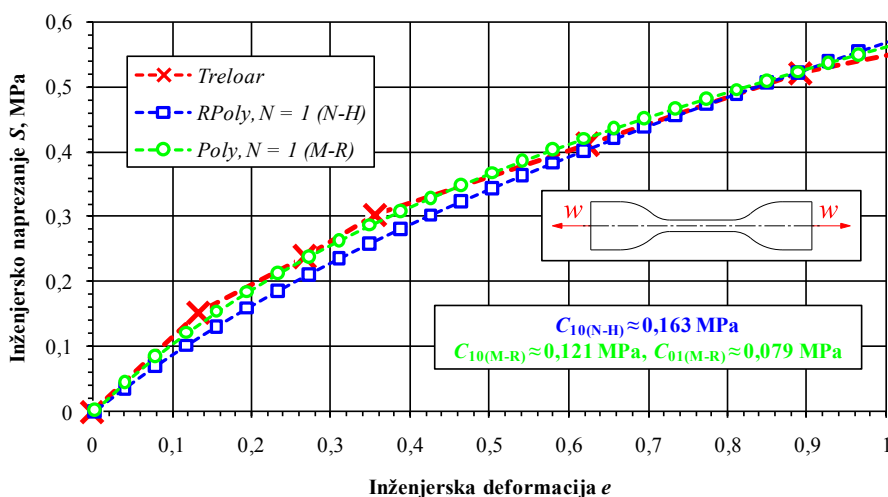
### 5.3.1.1.2. Validacija II, $e_{max} = 100\%$

Ponovljen je identičan test za sve konstitutivne modele, no sada uz traženu aproksimaciju krivulja do  $100\%$  deformacije. Slika 5.48. prikazuje nove prilagođene krivulje gdje je vidljivo da Ogdenov model i dalje daje najtočnije rezultate, no sada i neo-Hooke te Mooney-Rivlin modeli vrlo dobro opisuju razmatrani segment  $S$ - $e$  krivulje.



Slika 5.48. Validacija II,  $e_{\max} = 100\%$ 

Slika 5.49. kreirana je sa svrhom bolje razlučivosti razlika prilagođenih krivulja neo-Hooke i Mooney-Rivlin materijalnih modela u odnosu na eksperimentalne rezultate.

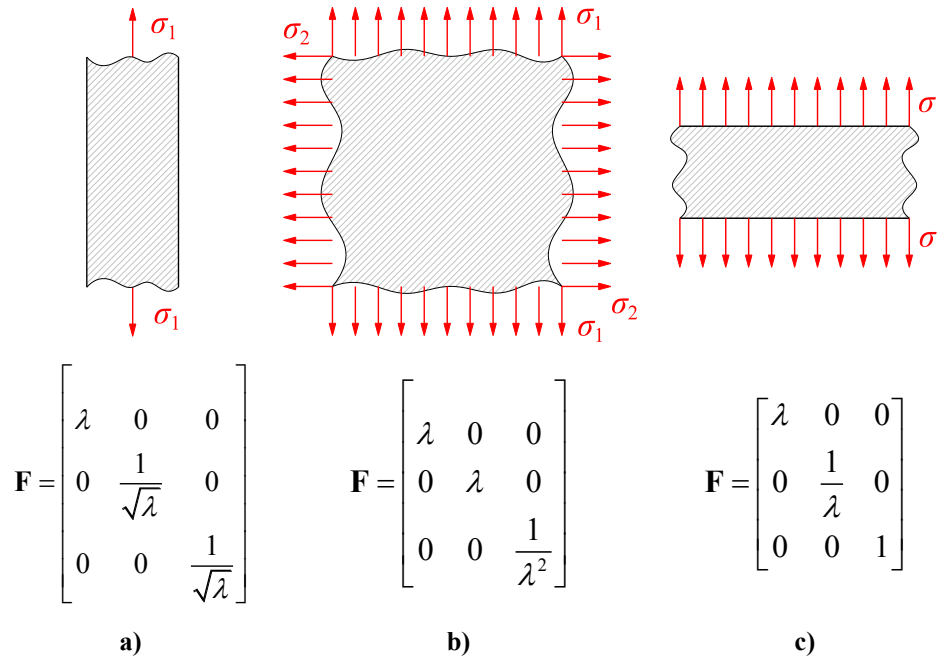
Slika 5.49. Validacija II,  $e_{\max} = 100\%$ , neo-Hooke i Mooney-Rivlin

Lako je uočljivo da je Mooney-Rivlin točniji na cijelom razmatranom segmentu u odnosu na neo-Hooke model, čime je pokazano da je ciljanim pojednostavnjenjem modela moguće na interesnom području postići visoku točnost pod uvjetom da se poznaju prednosti i mane te razlozi odabira korištene konstitutivne formulacije [107] i [108].

Ovim primjerom pokazana je točnost Mooney-Rivlin modela u području 100 % deformacije za statički vlačni pokus, tj. jednoosno stanje napreznosti. Pokazana je i točnost *Abaqus* algoritma za rješavanje problema prilagodbe krivulja metodom najmanjih kvadrata kao i prikladnost prizmatičnih hibridnih konačnih elemenata s reduciranom integracijom za točno modeliranje velikih napreznosti i deformacija što je i preporuka prema [108].

### 5.3.1.2. Višeosno stanje opterećenja

Dosada je razmatrano samo jednoosno stanje naprezanja, no kako su realne konstrukcije redovito opterećene *višeosno*, potrebno je uključiti te provjeriti ostale slučajeve.



Slika 5.50. Statički pokus: a) jednoosni, b) dvoosni, c) ravninsko stanje deformacije

Slika 5.50. shematski prikazuje jednoosno i dvoosno opterećenje, ravninsko stanje deformacije, te pripadajuće gradijente deformiranja  $\mathbf{F}$ . Analogno (4.37), za slučaj b) vrijedi

$$I_1 = 2 \cdot \lambda^2 + \frac{1}{\lambda^4}, \quad I_2 = \lambda^4 + \frac{2}{\lambda^2}, \quad (5.62)$$

dok za slučaj c), tj. uvjete ravninskog stanja deformacije (RD), vrijedi relacija

$$I_1 = 1 + \lambda^2 + \frac{1}{\lambda^2}, \quad I_2 = I_1 = 1 + \lambda^2 + \frac{1}{\lambda^2}. \quad (5.63)$$

Koristeći izraze (4.31) i (4.34) te uvrstivši gradijente deformiranja  $\mathbf{F}$  (Slika 5.50. a), b) i c) prema [269], analogno izrazu (4.38), u programskom paketu *Mathematica* izveden je izraz za simetrično dvoosno opterećenje (eng. *equibiaxial*, uz  $\sigma_1 = \sigma_2$ , Slika 5.50. b) koji glasi

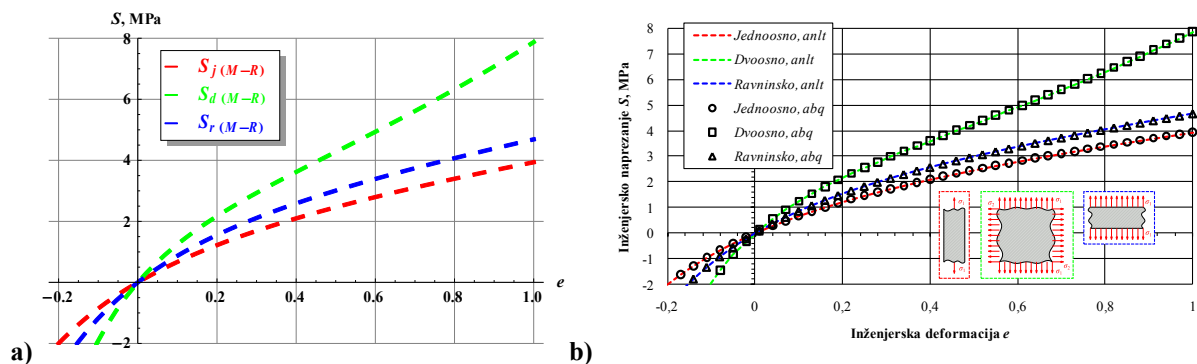
$$S_{(M-R)_d}(I_1, I_2) = \frac{\partial U}{\partial \lambda} / 2 \Rightarrow S_{(M-R)_d} = 2 \cdot \left[ C_{10} \cdot \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^5} \right) + C_{01} \cdot \left( \lambda^3 - \frac{1}{\lambda^3} \right) \right], \quad (5.64)$$

te izraz za ravninsko stanje deformacije (Slika 5.50. c) koji glasi

$$S_{(M-R)_r}(I_1, I_2) = \frac{\partial U}{\partial \lambda} \Rightarrow S_{(M-R)_r} = 2 \cdot (C_{10} + C_{01}) \cdot \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^3} \right). \quad (5.65)$$

Usporedbom izraza (5.62) i (5.63) za invarijante tenzora deformacije  $I_1$  i  $I_2$  s izrazom (8.2) navedenom u [31], str. 295 te izraza (5.64) i (5.65) s izrazima navedenima u [11], tablica 3.6, str. 103<sup>33</sup>, vidljivo je da je postupak korektan i da su izrazi točni.<sup>34</sup>

Uz proizvoljno zadane M-R materijalne parametre  $C_{10} = 1$  MPa i  $C_{01} = C_{10}/4$  MPa, a prema izrazima (4.38), (5.64) i (5.65), konstruirani su donji dijagrami (Slika 5.51. a) i b).



Slika 5.51. M-R  $S$ - $e$  krivulje za jednoosno, dvoosno i ravninsko opterećenje uz  $C_{10} = 1$  i  $C_{01} = C_{10}/4$

Diskretni rezultati u programskom paketu *Abaqus*, dobiveni su opcijom *procijeni*, *ocijeni* (eng. *Evaluate*), gdje je provjerena stabilnost zadanih M-R parametara  $C_{10}$  i  $C_{01}$ .

Slika 5.51. a) prikazuje dijagrame konstruirane analitički u programskom paketu *Mathematica*. Slika 5.51. b) prikazuje te iste dijagrame uspoređene s diskretnim numeričkim rezultatima u programskom paketu *Abaqus*. Vidljivo je *besprijekorno* poklapanje, čime je postupak formiranja  $S$ - $e$  dijagrama M-R modela verificiran.

Slika 5.51. a) i b) jasno prikazuje da  $S$ - $e$  dijagrami za slučajeve jednoosnog i dvoosnog opterećenja te ravninskog stanja deformacije nisu jednaki. Iz parametara  $C_{10}$  i  $C_{01}$ , ovisno o invarijantama tenzora deformacija  $I_1$  i  $I_2$ , formiran je polivalentni dijagram koji se koristi u slučaju istodobnog (eng. *simultaneously*) višeosnog opterećenja uzorka.

Uvidom u krivulje (Slika 5.51.) te u referentne eksperimentalne podatke, primjerice iz [268], izdanje 2010., str. 26 i [269], str. 96, vidljivo je da je hiperelastični materijal *najmekši* za slučaj jednoosnog vlačnog opterećenja, dok je *najkrući* u slučaju dvoosnog opterećenja, a krivulja ravninskog stanja deformacije nalazi se između te dvije krivulje. Vidljiva je i infleksija  $S$ - $e$  krivulje u slučaju dvoosnog opterećenja (zeleno isprekidana linija).

<sup>33</sup> Izrazi se mogu naći i na sljedećim direktnim vezama (prema Bower, A. F., **Applied Mechanics of Solids**): <http://www.brown.edu/Departments/Engineering/Courses/En221/Notes/Elasticity/Elasticity.htm>, [http://solidmechanics.org/text/Chapter3\\_5/Chapter3\\_5.htm](http://solidmechanics.org/text/Chapter3_5/Chapter3_5.htm), studeni 2014.

<sup>34</sup> Izraz (5.64) primjerice ima drugačiji oblik u slučaju da dvoosno opterećenje nije simetrično, tj. jednako u smjeru obje osi ravnine (lat. *Aequitas*, koncept jednakosti, pravde, simetrije itd.), a tada vrijedi relacija  $\sigma_1 \neq \sigma_2$ .

5.3.1.3. Odnos tvrdoće  $H_A$  i modula elastičnosti  $E_0$ 

Tablica 5.8., zadnji stupac prikazuje jedan neiskorišteni materijalni parametar, tj.  $H_A$  koji predstavlja tvrdoću (eng. *hardness*) prema Shoreu, model A [8], standard ASTM D2240 [50]. Prema brojnim autorima, moguće je proračunati početni modul elastičnosti  $E_0$  gume u slučaju da je napravljen standardni test Shore A tvrdoće. Gent [108], str. 310, daje takve preporuke za *grubo* računanje neo-Hooke koeficijenta  $C_{10}$  u slučaju da su dostupni samo *ograničeni* podaci. Referentni eksperimentalni podaci (sufiks *exp*, Slika 5.52.) ovisnosti  $E_0$  o  $H_A$  preuzeti su iz [108] i [226], a empirijski izrazi za izračune prema [222] i [108] glase

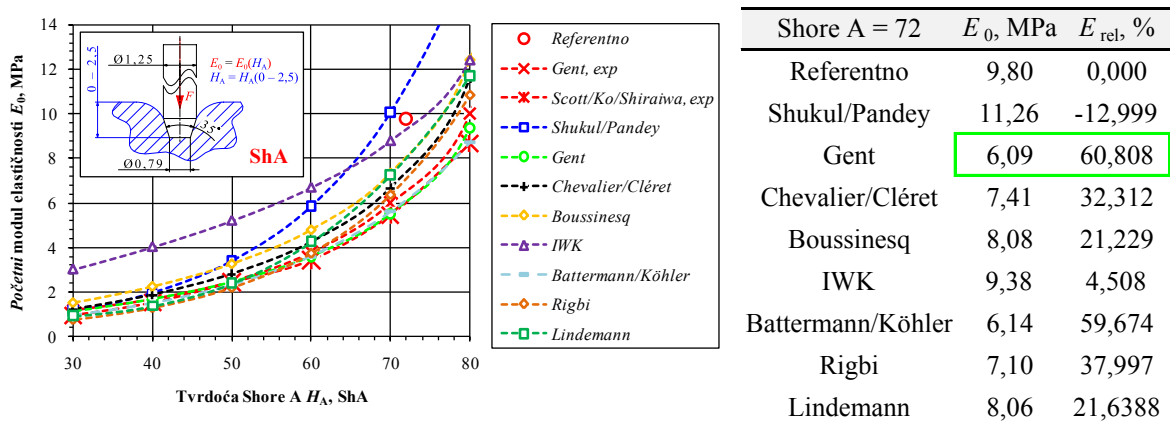
$$E_0 = \frac{0,0981 \cdot (56 + 7,66 \cdot H_A)}{0,137505 \cdot (254 - 2,54 \cdot H_A)}, \text{ MPa} \quad [222], \quad E_0 = \frac{15,75 + 2,15 \cdot H_A}{100 - H_A}, \text{ MPa} \quad [108], \quad (5.66)$$

gdje oba izraza daju skoro jednake rezultate. Uz Gentov, jedan od jednostavnijih i često korištenih empirijskih izraza za orijentacijski proračun  $E_0$  prema [224] glasi

$$\log_{10}(E_0) = 0,0235 \cdot (H_A) - 0,6403 \Rightarrow E_0 = 10^{0,0235 \cdot (H_A) - 0,6403}, \text{ MPa}, \quad (5.67)$$

a ostali korišteni empirijski izrazi, mogu se pronaći u literaturi [225] do [228] te [275].

Slika 5.52. usporedno prikazuje dijagram ovisnosti izračunatog modula elastičnosti  $E_0$  o izmjerenoj tvrdoći uz raspon  $30 \leq H_A \leq 80$  te tablicu rezultata gdje je kao referentna vrijednost uzeta zadana vrijednost modula elastičnosti  $E_0$  te tvrdoća  $H_A$  (Tablica 5.8.).

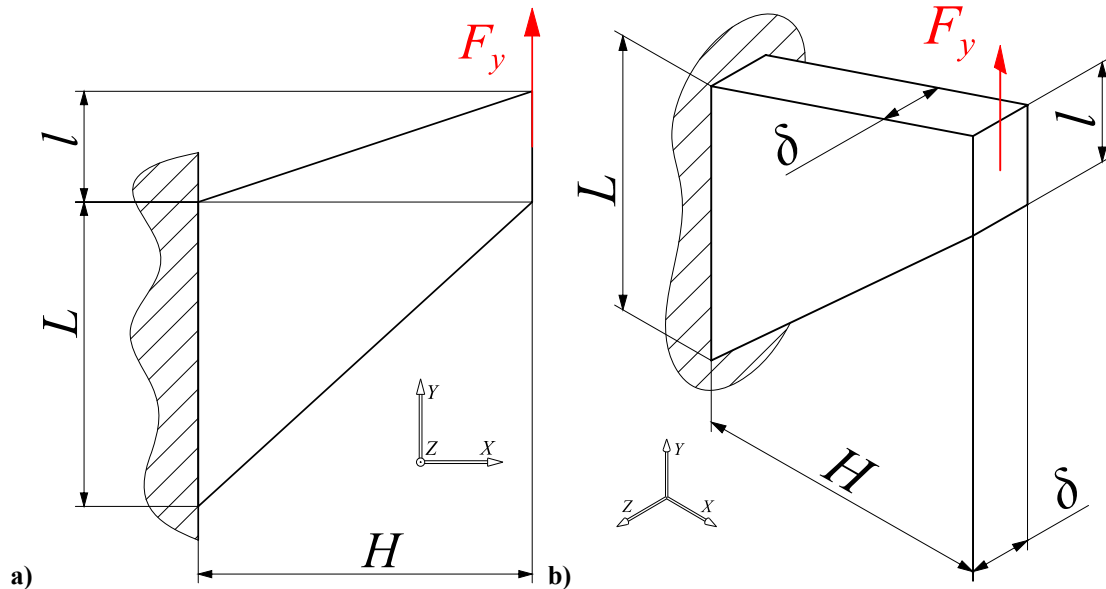


Slika 5.52. Usporedba empirijskih rješenja  $E_0(H_A)$

Slika 5.52. prikazuje korektan trend svih krivulja, no tablica ukazuje na velike relativne razlike usporedbom sa točkom  $T_{ref}(H_A; E_0)$ . Iz usporedbe Gentovog modela (zeleni krivulja) s eksperimentalnim mjerenjima (*exp*, crvene krivulje), vidljivo je da je najtočniji. Ovo je samo pokazatelj da određivanje parametara materijala nije nimalo trivijalno te da je vrlo teško napraviti robustan i točan model u nedostatku eksperimentalnih mjerenja.

### 5.3.2. Primjer V: analiza Cookove membrane

Za *debelostjenu* četverokutnu membranu, uklještenu i opterećenu kao što prikazuje Slika 5.53., određen je maksimalni pomak hvatišta sile  $F_y$  u smjeru osi  $y$ , tj. veličina  $v_{RP-1}$ .



Slika 5.53. Primjer V, Cookova membrana

Tablica 5.14. prikazuje zadane geometrijsko materijalne karakteristike.

Tablica 5.14. Primjer V, zadani parametri

$H$ , mm	$L$ , mm	$l$ , mm	$\delta$ , mm	$F_y$ , N	$C_{10(NH)}$ , MPa	$D_{11}$ , MPa <sup>-1</sup>
48	44	16	10	10	0,2	0,00002

Problem Cookove membrane (eng. *Cook's membrane*) standardni je test za odziv na kombinirano savijanje i smicanje uz *umjereno* veliku deformaciju te je česta tema knjiga, članaka i programskih paketa koji se bave tematikom numerike i nestlačivih, nelinearno elastičnih materijala [73], [210], [211], [212], [260], [261]. Sastoji se od četverokutne membrane koja se na jednom kraju nepravilno konično sužava te *skoro* nestlačivog hiperelastičnog materijala. Na jednoj strani, membrana je pričvršćena (uklještena), a smično opterećenje silom  $F_y$  djeluje na suprotnoj strani. Navedena referentna literatura sugerira da je problem *preporučljivo* riješiti uz definiciju ravninskog stanja deformacije (eng. *plane strain*).

Problem je posebno zanimljiv iz perspektive kontrole *zaključavanja* (eng. *locking*) konačnih elemenata, tj. pojave pokazivanja prevelike krutosti elemenata koji aproksimiraju nestlačivi kontinuum, stoga je ideja ovog primjera prvenstveno verificirati i demonstrirati odsustvo *locking* efekata. Budući da analitičko rješenje problema nije poznato, primjer je riješen pomoću programskih paketa *Abaqus* i *Marc* te je ispitana konvergencija.

Ideja ovog primjera je i verificirati neo-Hooke materijal, kao i konačne elemente drugog reda u slučaju proračunskog modela nešto složenije geometrije. Standardni verifikacijski primjeri iz literature [73] i [211] redovno uključuju istu nominalnu geometriju (dimenzije  $H$ ,  $L$ ,  $l$ ,  $\delta$ ) Cookove membrane, no promjenjive materijalne karakteristike i opterećenje. U ovom slučaju, neo-Hooke materijal odabran je tako da orijentacijski odgovara Treloarovim ispitivanjima [189] spomenutima u prethodnom poglavlju, a N-H koeficijent  $C_{10}$  preuzet je prema Bowerovim podacima ([11], knjiga i web stranica) gdje vrijedi relacija  $C_{10} = \mu_1/2 = 0,4/2 = 0,2$  MPa, uz  $C_{01} = 0$ . Proizvoljno je odabrano da kontinuum *nije* nestlačiv tj. vrijednost  $D_1 \neq 0$ , već očitana vrijednost iznosi  $D_1 = 2 \cdot 10^{-5}$  MPa<sup>-1</sup> (Tablica 5.14.).

Budući da su svi parametri neo-Hooke materijala ovim zadani, nije potrebno vršiti dodatne proračune, no prikladno je pokazati kako je moguće *inverzno* doći do *linearnih* materijalnih karakteristika za slučaj *male* deformacije. Prema izrazu (4.32), vrijedi

$$E_0 = \frac{\partial S_{(NH)}}{\partial \lambda} = 2 \cdot C_{10} \cdot \left(1 + \frac{2}{\lambda^3}\right), \quad \lambda \approx 1 \Rightarrow G_0 = 2 \cdot (C_{10} + C_{01}) = 2 \cdot (0,2 + 0) = 0,4 \text{ MPa}, \quad (5.68)$$

što sugerira i Gent, [108] str. 311. Budući da je materijal stlačiv, sada vrijede relacije  $V/V_0 \neq 1$  te  $\nu \neq 0,5$ , a Poissonov faktor  $\nu$  moguće je dobiti iz prethodno izračunatog *početnog* modula stlačivosti  $K_0$  pomoću izraza (4.23) te (4.15). Vrijednosti  $K_0$  i  $\nu$  iznose

$$K_0 = 2/D_1 = 1 \cdot 10^5 \text{ MPa}, \quad (5.69)$$

$$\nu = \frac{3 \cdot K_0 - 2 \cdot G_0}{2 \cdot (3 \cdot K_0 + G_0)} = 0,499998 \cong 0,5, \quad (5.70)$$

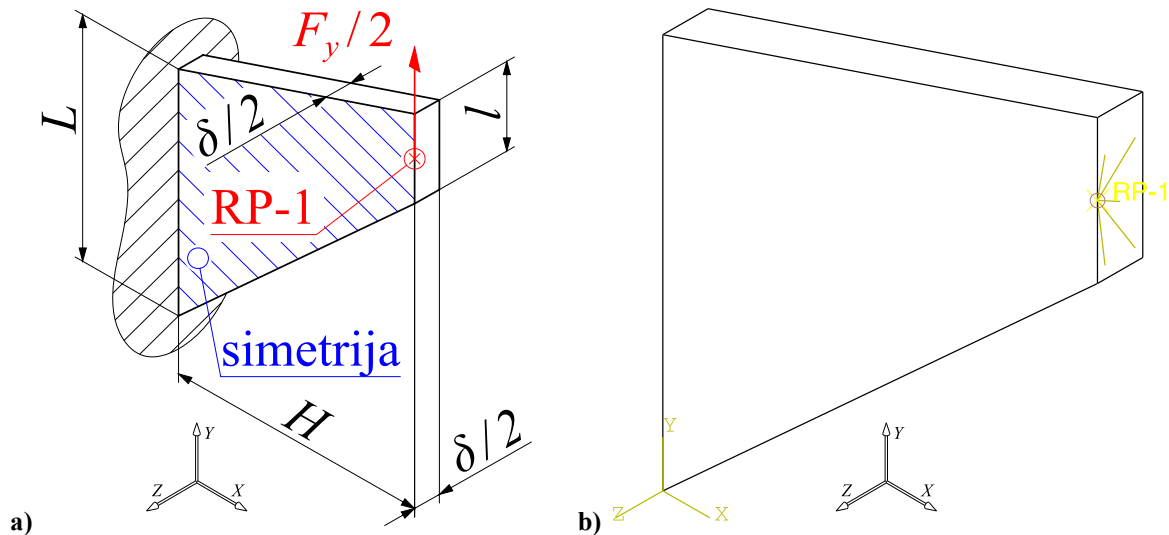
gdje je vidljivo da je vrijednost Poissonovog faktora  $\nu$  opet zaokružena na 0,5, a izraz (5.69), tj. vrijednost  $K_0$  se u ovom obliku unosi u programski paket *SimDesigner (Marc)*. Vrijednost početnog modula elastičnosti  $E_0$  računa se prema izrazu (4.14) koristeći iznos (5.70) i glasi

$$E_0 = 2 \cdot G_0 \cdot (1 + \nu) = 1,199998 \cong 1,2 \text{ MPa}, \quad (5.71)$$

stoga se može zaključiti da je materijal ipak *skoro* nestlačiv, budući da je zadani parametar materijala  $D_1$  vrlo blizu vrijednosti nula, tj.  $D_1 \approx 0$  MPa<sup>-1</sup>. S numeričke strane, to je benefičijski faktor ovog primjera zbog mogućnosti provjere zaključavanja konačnih elemenata. S analitičke strane, ovime je na praktičnom primjeru pokazana korelacija linearno elastičnih parametara  $E_0$ ,  $G_0$ ,  $\nu$  i  $K_0$  s nelinearno elastičnim neo-Hooke parametrima  $C_{10}$  i  $D_1$ .

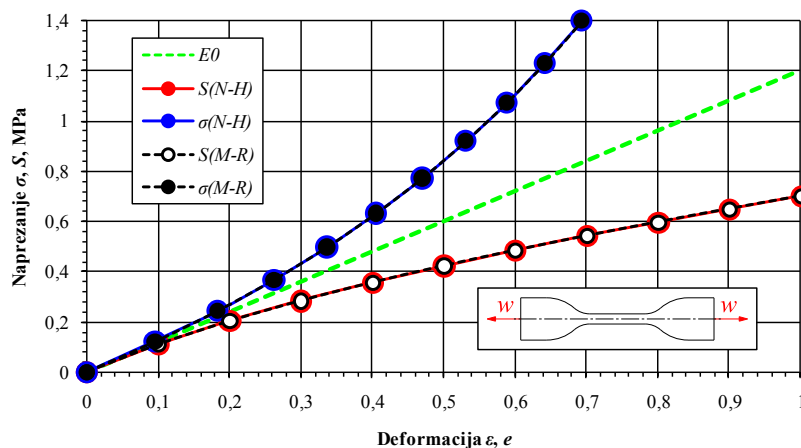
Budući da je proračunski model Cookove membrane jedanput simetričan prema geometriji i opterećenju, korištena je ravnina simetrije te polovina zadane sile  $F_y$ , tj.  $F_y/2$ .

Slika 5.54. a) prikazuje RU polovine proračunskog modela, dok Slika 5.54. b) prikazuje položaj referentne točke RP-1 koja se nalazi na ravnini simetrije te težištu (polovini) kotirane linije  $l$ . Referentnoj točki RP-1 u *Abaqusu* je pridodano svojstvo *Distributing*.



Slika 5.54. Polovina proračunskog modela: a) rubni uvjeti, b) referentna točka RP-1

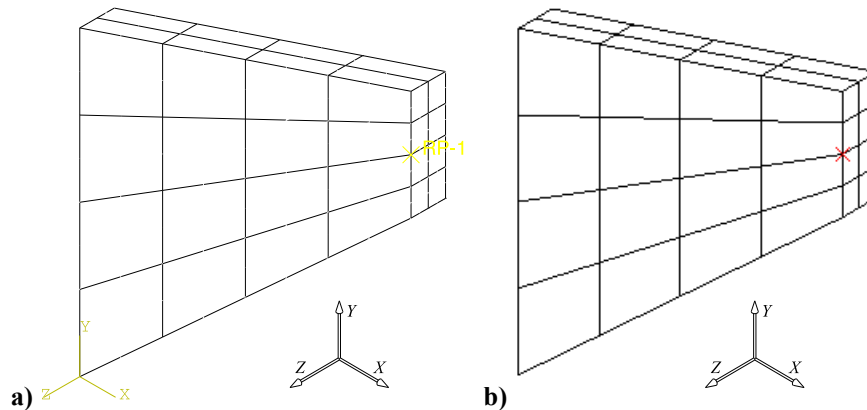
Slika 5.55. prikazuje krivulju naprezanje-deformacija u području do  $e = 100\%$  gdje je vidljivo da N-H i M-R krivulja imaju isti oblik u slučaju da je parametar  $C_{01}$  jednak nuli. Zelena isprekidana linija simbolizira početni, linearni modul elastičnosti  $E_0$  prema (5.71).



Slika 5.55. S-e krivulja N-H i M-R modela

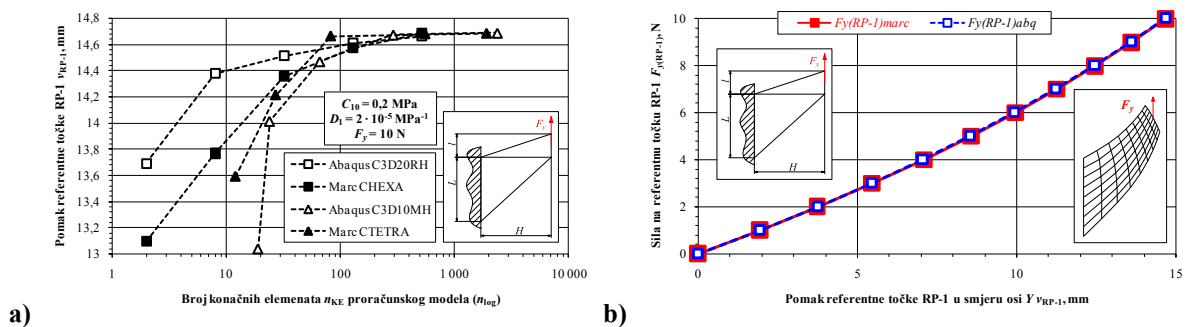
Bitno je napomenuti da je neo-Hooke model korišten jer je model formiran tako da se ne očekuju *prevelike* deformacije. Budući da je pojam *velik* ili *malen* u kontekstu nelinearne analize vrlo relativan, može se reći da očekivana inženjerska deformacija  $e$  u ovom primjeru dostiže oko 20%. Time je naglašen i jedan od najvećih problema nelinearne analize, a to je da bi jedan dio rješenja trebao biti *poznat*, tj. *pogođen* (iterativno), tako da se proračunski model prema rješenju može kalibrirati i optimirati za *radno područje*.

Slika 5.56. prikazuje III. hex mrežu KE (od ukupno V) u programskim paketima *Abaqus* i *Marc*, a III. mreža je srednje (relativno rijetke) gustoće rasporeda elemenata. Mreže su definirane tako da uvijek imaju isti raspored i broj elemenata u oba programska paketa, radi konzistencije te kontroliranja konvergencije. Također, svaka mreža je definirana tako da ima uvijek (neovisno o gustoći mreže) *samo dva* elementa po širini membrane.



Slika 5.56. III. hex mreža proračunskog modela: a) *Abaqus*, b) *Marc/Nastran*

Za dodatnu kontrolu korišteni su i tetraedarski KE drugog reda u oba programska paketa, a Slika 5.57. a) prikazuje monotonu konvergenciju oba modela gdje je vidljiva brža konvergencija *Abaqus* C3D20RH KE drugog reda u odnosu na *Marc* CHEXA KE. Također je vidljivo i da za ovaj proračunski model, *Abaqus* C3D10MH modificirani hibridni tetraedarski konačni elementi *najsporije* konvergiraju u odnosu na ostale elemente.



Slika 5.57. Cookova membrana: a) konvergencija pomaka  $v_{RP-1}$ , b) ovisnost pomaka  $v_i$  o sili  $F_i$

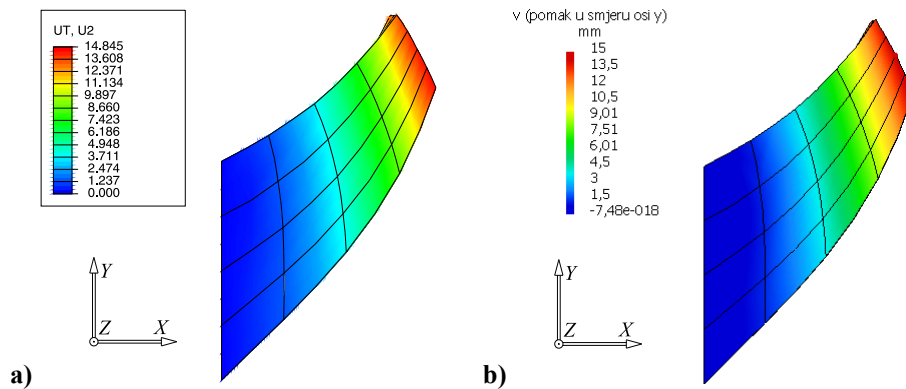
Slika 5.57. b) prikazuje nelinearnu ovisnost pomaka  $v_i$  referentne točke RP-1 o sili<sup>35</sup>  $F_i$  gdje je vidljivo izvrsno poklapanje u programskim paketima *Abaqus* i *Marc*.

Kako je već navedeno, zbog složenosti problema, analitičko rješenje nije poznato, no bitno je primijetiti da svi proračunski modeli konvergiraju monotono *sličnim* vrijednostima čime je pokazana materijalna i geometrijska *stabilnost* te izuzeće zaključavanja KE.

<sup>35</sup> Navedena ovisnost u literaturi se naziva „putanja ravnoteže“ (eng. *Equilibrium Path*) [65], [66], [72] i [73].



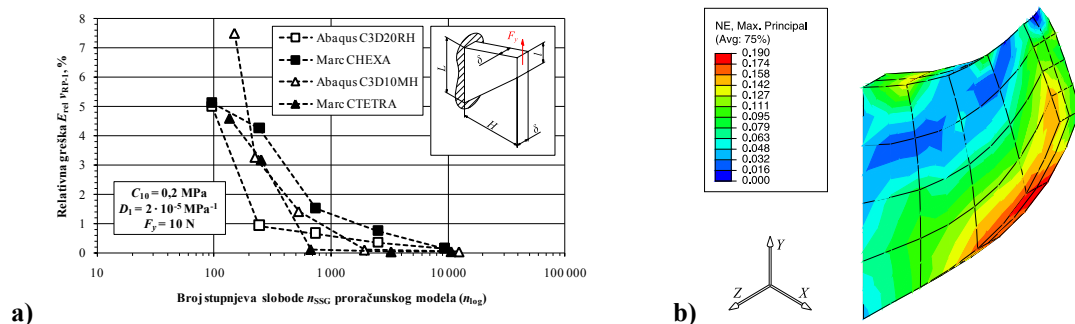
Slika 5.58. prikazuje rezultate pomaka  $v$  u smjeru globalne osi  $y$ , gdje je vidljivo da se oba proračunska modela deformiraju na jednaki način. Faktor uvećanja prikaza je prikladno ponovno  $k = 1$  pa je i vizualno jasno da je riječ o *velikim* pomacima i deformacijama.



Slika 5.58. Pomak  $v$  III. hex mreže proračunskog modela: a) Abaqus, b) Marc

Za neo-Hooke model bitno je i da deformacija ne bude *prevelika*, jer ju taj konstitutivni model ne može egzaktno opisati, kako je prikazano u prethodnom primjeru.

Slika 5.59. a) prikazuje konvergenciju greške modela gdje je relativna greška  $E_{rel}$  definirana kao razlika između dva susjedna rješenja diskretizacije. Zadnja greška (V. iteracija), definirana je kao razlika između *max/min* rješenja oba programska paketa.



Slika 5.59. a) relativna greška  $E_{rel}$  pomaka  $v_{RP-1}$ , b) Abaqus nominalna deformacija  $e_{max}$  (NE)

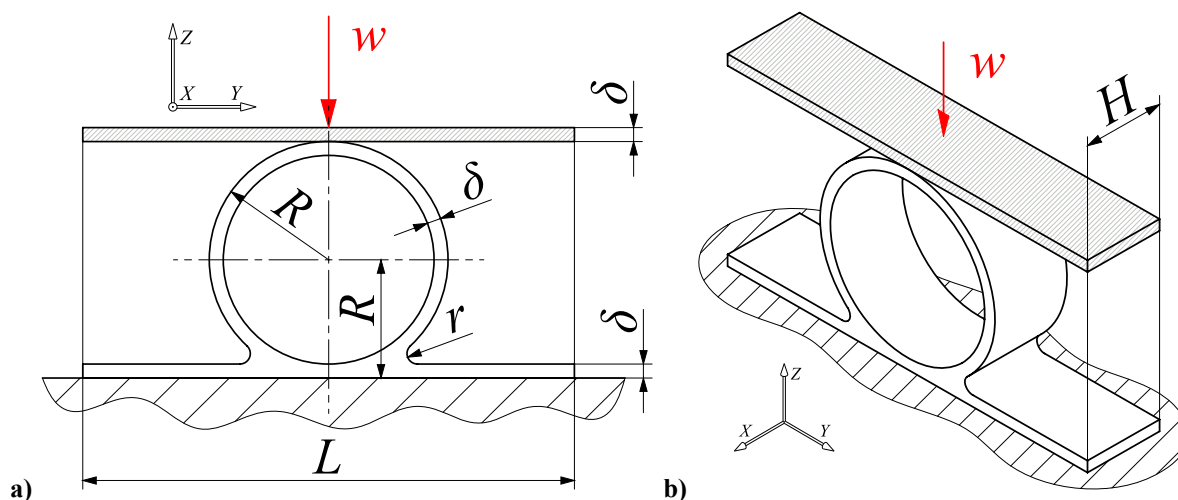
Tablica 5.15. prikazuje usporedno zadnja rješenja (iteracija V. mreže) gdje je vidljivo izvrsno poklapanje rezultata oba programska paketa. Ovim primjerom pokazana je monotona konvergencija za slučaj (skoro) nestlačivog kontinuuma, kao i nužnost potrebe *neovisnosti* konačnog, konvergirano numeričkog rješenja o korištenom programskom paketu.

Tablica 5.15. Usporedba rezultata pomaka  $v_{RP-1}$

Pomak $v_{RP-1}$	$\Sigma n_{KE}$	$v_{RP-1}$ , mm	$E_{rel(max)}$ , %
Abaqus C3D20RH	512	14,662	0,191
Marc CHEXA	512	14,685	
Abaqus C3D10MH	2 351	14,690	
Marc CTETRA	1 895	14,685	

### 5.3.3. Primjer VI: kontaktna analiza gumene brtve

Kruta pravokutna ploča dodiruje uklještenu gumenu brtvu, a na ploču djeluje prisilni pomak  $w$  u smjeru osi  $z$ , što shematski prikazuje Slika 5.60. Određen je deformirani oblik sklopa kao posljedica interakcija ploha u kontaktu, a pretpostavljeno je *nelinearno elastično* ponašanje materijala te *velike* deformacije. Trenje pri kontaktu je *zanemareno* ( $\mu = 0$ ).



Slika 5.60. Primjer VI, sklop gumene brtve

Tablica 5.16. prikazuje zadane geometrijsko materijalne karakteristike. Konstante  $C_{10}$  i  $C_{01}$  vrijede za Mooney-Rivlin hiperelastični konstitutivni model gume, a dobivene su pomoću podataka statičkog vlačnog pokusa do 100 % nominalne deformacije  $e$ .

Tablica 5.16. Primjer VI, zadani parametri

$H$ , mm	$L$ , mm	$\delta$ , mm	$R$ , mm	$r$ , mm	$w$ , mm	$C_{10}$ , MPa	$C_{01}$ , MPa	$D_1$ , MPa <sup>-1</sup>
140	700	20	170	15	-240	0,25	0,05	0,00002

Ovaj primjer je modificirani primjer kompanije MSC [266] za demonstraciju *relativno* velikih deformacija<sup>36</sup> (maksimalna procijenjena deformacija  $e_{\max} \leq 50$  %) te višestrukih kontaktnih interakcija, uključujući i kontakt gumenog tijela samim sobom (eng. *self-contact*). Budući da je primjer vrlo kompleksan te objedinjuje sve do sada prikazane principe nelinearnosti<sup>37</sup> (kontakt, materijalna i geometrijska nelinearnost), konvergencija nije ispitana, već je relativno grubom mrežom konačnih elemenata utvrđeno isključivo deformirala se konstrukcija na isti način u programskim paketima *Abaqus* i *Marc*.

<sup>36</sup> Sličnim MSC.*Software* numeričkim primjerima moguće je pristupiti na sljedećim direktnim vezama: [http://www.scc.kit.edu/scc/sw/msc/Pat322/Appendix\\_Ex\\_5\\_Rubber\\_Seal\\_II.pdf](http://www.scc.kit.edu/scc/sw/msc/Pat322/Appendix_Ex_5_Rubber_Seal_II.pdf), [http://www.scc.kit.edu/scc/sw/msc/Pat322/Exercise\\_11\\_Rubber\\_Seal.pdf](http://www.scc.kit.edu/scc/sw/msc/Pat322/Exercise_11_Rubber_Seal.pdf), <http://www.mssoftware.com/exercise-modules/hyperelastic-rubber-seal>, <https://simcompanion.mssoftware.com/library/MS/legacy2/KB/KB8017952/seal.ppt>, studeni 2014.

<sup>37</sup> Sličan primjer može se vidjeti u [29], str. 74, gdje je Slika 5.64. a) u dobroj korelaciji sa slikom 3.11 d iz [29].

Materijalna konstanta  $C_{10}$  odabrana je proizvoljno, dok je konstanta  $C_{01}$  dobivena relacijom  $C_{01} \equiv C_2 \approx 0,2 \dots 0,25 \cdot C_1 \Rightarrow C_{01} = 0,2 \cdot C_{10}$  prema Gentu, [108] str. 311. Analogno prethodnom primjeru, proizvoljno je odabrano da kontinuum *nije* nestlačiv tj.  $D_1 \neq 0$ , već očitana vrijednost iznosi  $D_1 = 2 \cdot 10^{-5} \text{ MPa}^{-1}$  (Tablica 5.16.).

Prema izrazu (4.32), za *početni* modul smicanja  $G_0$  vrijedi relacija

$$E_0 = \frac{\partial S_{(M-R)}}{\partial \lambda} = \frac{6 \cdot C_{01}}{\lambda^4} + C_{10} \cdot \left(2 + \frac{4}{\lambda^3}\right), \quad \lambda \approx 1 \Rightarrow G_0 = 2 \cdot (C_{10} + C_{01}) = 2 \cdot 0,3 = 0,6 \text{ MPa}, \quad (5.72)$$

što sugerira i Gent, [108] str. 311. Budući da je materijal stlačiv, sada vrijede relacije  $V/V_0 \neq 1$  te  $\nu \neq 0,5$ , a Poissonov faktor  $\nu$  moguće je dobiti iz prethodno izračunatog početnog modula stlačivosti  $K_0$  pomoću izraza (4.23) te (4.15). Vrijednosti  $K_0$  i  $\nu$  su

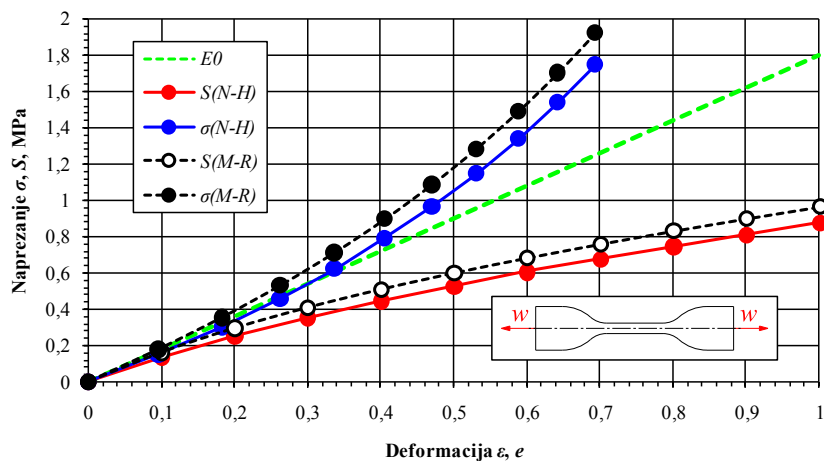
$$K_0 = 2/D_1 = 1 \cdot 10^5 \text{ MPa}, \quad (5.73)$$

$$\nu = \frac{3 \cdot K_0 - 2 \cdot G_0}{2 \cdot (3 \cdot K_0 + G_0)} = 0,499997 \approx 0,5, \quad (5.74)$$

gdje je vidljivo da je vrijednost Poissonovog faktora  $\nu$  opet zaokružena na 0,5, a izraz (5.73), tj. vrijednost  $K_0$  se u ovom obliku unosi u programski paket *SimDesigner*. Vrijednost početnog modula elastičnosti  $E_0$  računa se prema (4.14) koristeći iznos (5.74) te glasi

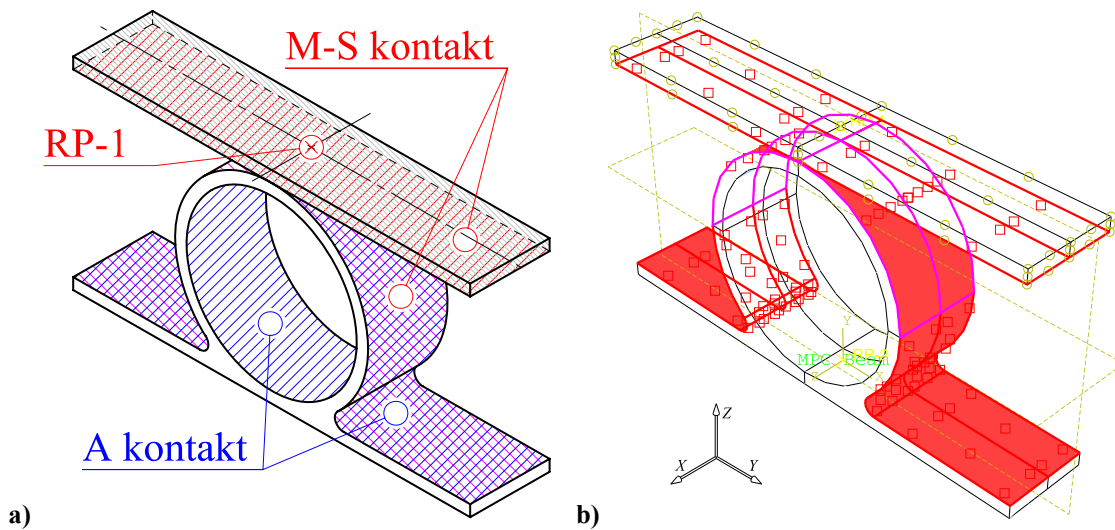
$$E_0 = 2 \cdot G_0 \cdot (1 + \nu) = 1,799996 \approx 1,8 \text{ MPa}, \quad (5.75)$$

stoga se može zaključiti da je materijal ipak *skoro* nestlačiv budući da je zadani parametar materijala  $D_1$  vrlo blizu vrijednosti nula, tj. vrijedi  $D_1 \approx 0 \text{ MPa}^{-1}$ . Slika 5.61. prikazuje krivulju naprežanje-deformacija u području do  $e = 100 \%$  gdje je vidljivo da N-H i M-R krivulja nemaju isti oblik u slučaju da za hiperelastični parametar vrijedi relacija  $C_{01} \neq 0$ .



Slika 5.61. S-e krivulja N-H i M-R modela

Proračunski model sklopa dva puta je simetričan prema geometriji i opterećenju, no u ovom slučaju *nisu* korištene ravnine simetrije. Analogno kao i kod dinamičke analize [54] te analize gubitka stabilnosti (*bifurcation* problem, tj. *grananje*) [63], pod uvjetima velikih pomaka i deformacija, a pogotovo kod *izrazito* nelinearnih kontaktnih problema, u slučaju da referentno rješenje nije poznato i potvrđeno, *nije dozvoljeno* koristiti ravnine simetrije. Razlog je što deformirani oblici redovno *nisu simetrični* te se nametanjem uvjeta simetrije stoga gubi dio rješenja i dobivaju se nekorektni, a često i potpuno krivi rezultati [193].

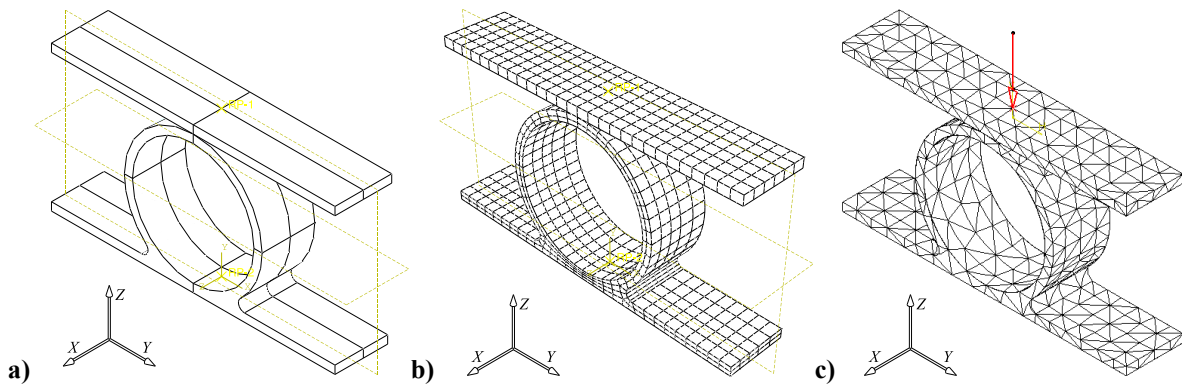


Slika 5.62. Definiranje kontaktnih ploha. a) shematski prostorni prikaz, b) Abaqus

Slika 5.62. prikazuje definiranje kontaktnih ploha. U ovom slučaju, budući da je konačni pomak referentne točke RP-1 poznat (Tablica 5.16. parametar prisilnog pomaka  $w$ ), očekivano je da će osim kontakta krute ploče (Slika 5.60., zasivljeno) i brtve (M-S, tj. *master-slave* kontakt), deformiranjem uslijediti i kontakt brtve same sa sobom (A, tj. *auto* kontakt), stoga je u programskom paketu *Abaqus*, uz opciju automatskog pronalaska kontaktnih parova (eng. *Find Contact Pairs*) dodatno definirana opcija samo-kontakta (eng. *Self contact*). U ovom slučaju, u programskom paketu *Abaqus*, diskretizacija kontakata definirana je kao čvor-površina (eng. *Node to surface*) zbog problema s konvergencijom prilikom definiranja kontaktnih ploha kao površina-površina. To pokazuje potrebu korisničkih iterativnih pokušaja za definiranje optimalne formulacije rješenja kontaktnog problema, a složenost raste eksponencijalno s povećanjem broja kontaktnih ploha te kompleksnosti geometrije.

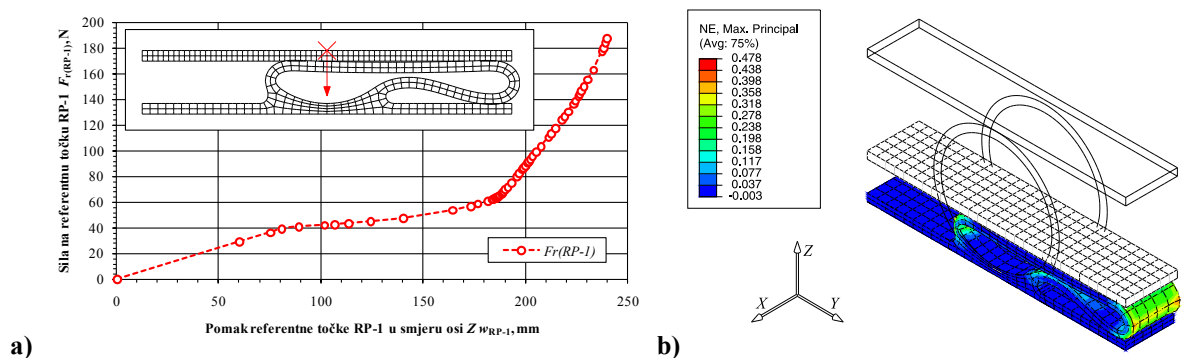
U programskom paketu *SimDesigner* (*Nastran/Marc*), nije potrebno definirati kontaktne plohe, već se jednostavno u *kontaktnu* tablicu ubacuju kontaktna *tijela* (eng. *contact body*), a *Marc* algoritam prilikom rješavanja kontaktnog problema samostalno računa koje plohe tijela dolaze u interakciju, što je znatno brže i jednostavnije s korisničke strane.

Sljedeća vrlo bitna stavka definiranja proračunskog modela, particioniranje je kontaktnih ploha/tijela s ciljem stvaranja strukturirane mreže elemenata te *namještanja* čvorova tako da na početku kontakta leže jedan na drugom. Ova tehnika korištena je obimno u programskom paketu *Abaqus*, dok je radi ograničenja zanemarena u *SimDesigneru*.



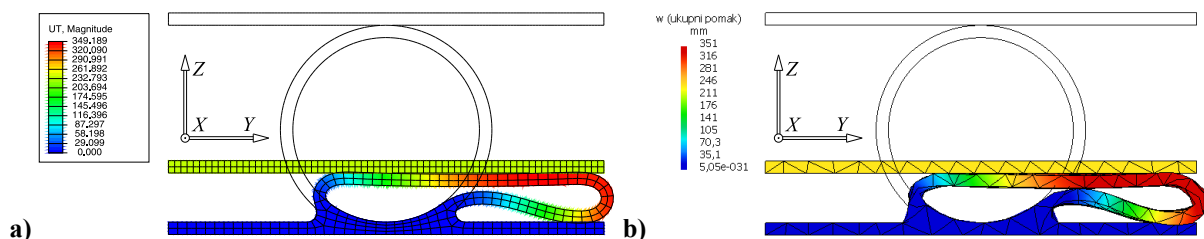
Slika 5.63. Proračunski model: a) particije, b) mreža KE *Abaqus*, c) mreža KE *Marc*

Slika 5.63. a) prikazuje particionirani *Abaqus* model, dok Slika 5.63. b) i c) prikazuje grube mreže *Abaqus* prizmatičnih (C3D20RH) i *Marc* tetraedarskih (CTETRA) KE.



Slika 5.64. a) *Abaqus* dijagram  $F_{r(RP-1)}-w$ , b) *Abaqus* nominalna deformacija  $e_{\max}$  (NE)

Slika 5.64. a) prikazuje nelinearnu ovisnost sile  $F_{r(RP-1)}$  u čvoru RP-1 o pomaku  $w$ , dok Slika 5.64. b) prikazuje da je najveća nominalna deformacija (abq NE)  $e_{\max} < 50\%$ .



Slika 5.65. Ukupni pomak: a) *Abaqus*, b) *Marc*

Slika 5.65. prikazuje konačne *nesimetrične* deformirane oblike kontaktnog sklopa u programskim paketima *Abaqus* i *Marc*. Vidljivo je dobro poklapanje rezultata, čak i za *grubu* diskretizaciju čime je pokazano da bi korištenjem simetrije točnost rješenja bila *narušena*.

## 5.4. Zaključak verifikacije

Problem proračuna hiperelastičnih materijala aktualna je inženjerska tematika [75] i [108] te predstavlja velik izazov čemu svjedoči velik broj do sada referencirane dostupne literature na temu [98] do [191]. Svih šest prethodno riješenih primjera pokazalo je prikladnost korištenih metodologija te konačnih elemenata za višestruko nelinearni kontaktni problem, stoga su kao primarni konačni elementi daljnje analize usvojeni *Abaqus* C3D20RH hibridni prizmatični konačni elementi s reduciranom integracijom, kao primarni konstitutivni model usvojen je dvoparametarski ( $C_1$  i  $C_2$ , tj.  $C_{10}$  i  $C_{01}$ ) Mooney-Rivlin model  $N = 1$ , kao inkrementalno-iterativna metoda usvojena je Newton-Raphsonova metoda, a kao kontaktni algoritam usvojena je *Penalty* metoda uz opciju *hard contact* (čvrsti kontakt uz opciju mogućnosti separacija ploha nakon kontakta) [260] i [261] te Coulombov model trenja.

Zaključci verifikacija su dodatno potvrđeni sličnim opažanjima iz referentne literature gdje je vidljivo da su reducirani konačni elementi preferirani radi odnosa učinkovitosti i *skupoće* mreže (već spomenuti Gent prema [107] i [108]), Mooney-Rivlin konstitutivni model je općenito favoriziran radi jednostavnosti i brzine implementacije [82], [108], [127] i [214] te u slučaju da krivulja naprezanje-deformacija *nema infleksiju* na radnom području, no *MSC* preporučuje oprez u slučaju prilagodbe krivulje samo iz statičkog *vlačnog* pokusa [269] što ponekad ima posljedicu nefizikalnog ponašanja materijala u *tlačnom* području<sup>38</sup>. U nedostatku referentnih podataka i nemogućnosti novih *skupih* eksperimentalnih mjerenja, proračunski model dopušteno je aproksimirati samo podacima statičkog *vlačnog* pokusa u slučaju *ne prevelike* deformacije [107] i [108], a opća preporuka je koristiti *što jednostavniji* konstitutivni model koji relativno dobro opisuje promatrano radno područje [108], [268] i [269]. Budući da su amplitude aeolskih vibracija relativno malene, kao što je rečeno u poglavlju 1.3.1., može se očekivati opravdanost pretpostavke *ne prevelikih* deformacija, a iz istog razloga nije uzet u obzir ni Mullinsov efekt pojašnjen u poglavlju 2.1. Bitno je znati i da je u praksi Newton-Raphson najčešće korištena inkrementalno-iterativna metoda [82], [108], [209], te je preporučena prema [76] i [77]. U slučaju geometrijskih nestabilnosti, preporučena metoda je Riks (*snap-through* problem) od strane Krätzig [72], [73], Wriggersa [75], Bathea [76], [77] i [78] te Belytschkoa [209], no kako se geometrijska nestabilnost *ne očekuje* u ovom radu, metoda se osim pri verifikaciji, nije koristila.

<sup>38</sup> Optimalna prilagođena krivulja u praksi se dobija iz podataka jednoosnog (eng. *uniaxial*) i dvoosnog (eng. *biaxial*, tj. *equi-biaxial* u slučaju da vrijedi relacija  $\sigma_1 = \sigma_2$ ) opterećenja, ravninskog (ili „planarnog“, eng. *planar*) stanja deformacije (eng. *plane strain*), tj. opterećenja na čisto smicanje (eng. *pure shear*), te volumnog (eng. *volumetric*) eksperimenta (testiranje stlačivosti) prema [214], [260], [261], [268] i [269].

*Penalty* je općenito favorizirana numerička metoda definiranja kontakta u praksi [82], [88] i [95]. Dokumentacija programskog paketa *Abaqus* (čak predefinirano) preporučuje *Penalty* formulaciju naspram Lagrangeovih multiplikatora u svrhu štednje resursa, a uz neznatan utjecaj na točnost rješenja u slučaju *stick/slip* ponašanja, tj. Coulombov model trenja [87], čak i za kontaktnu interakciju *gumenih* elemenata [103], [260] i [261].

Problematika trenja gume također je česta tema aktualne literature [91], a prema [11] str. 187, faktor trenja guma/suha površina (eng. *Rubbers on dry surfaces*) može biti  $\mu = 0,8 \dots 1,5$ , također prema [83], str. 145, faktor trenja guma-metal iznosi  $\mu_{g/m} = 1 \dots 4$  što implicira da su referentne vrijednosti raznolike i ovisne o načinu izvođenja eksperimentalnih mjerenja.

Bitno je zapaziti da se *materijalna nestabilnost* može izgledno očekivati na području numeričke primjene hiperelastičnih materijala, posebno narušavanje Druckerovog kriterija stabilnosti [219], [220] i [221] te volumetrijska zaključavanja u formulaciji elementa [11], [260], [261], [268] i [273]. Ti efekti u primjerima IV, V i VI nisu manifestirani<sup>39</sup> zbog naglaska na jednostavnosti korištenih modela te prilagodbe realnim eksperimentalnim krivuljama prema [11], [187], [188] i [189], no potrebno je imati na umu da je najučinkovitiji način za rješavanje problema divergencije pri korištenju hiperelastičnih materijala dobivanje parametara *stabilnog materijala* modela prije sâmog početka analize. Uz definiran stabilan materijal modela, mogu se koristiti standardne tehnike primjenjive i za linearno-elastične materijale glede rješavanja problema divergencije zbog primjerice izobličenja (distorzije) elemenata (posljedica velike deformacije), kao i strukturne nestabilnosti [72] i [73].

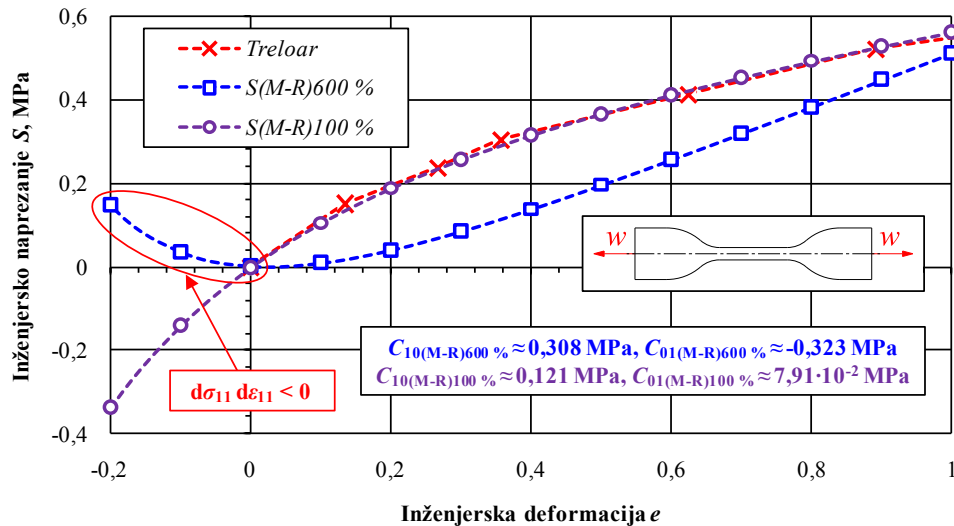
Primarno, materijalni model mora zadovoljiti određene restrikcije elastičnosti te prikazati realno moguć način deformacije, tj. mora zadovoljiti Druckerov kriterij stabilnosti koji predstavlja *pozitivnu* promjenu energije u *zatvorenom* ciklusu. Za izotropne, nestlačive materijale, Druckerov kriterij može se prema [11], [219] i [268] izraziti u obliku

$$\sigma, \varepsilon \neq f(t) \Rightarrow \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \geq 0. \quad (5.76)$$

Za model neo-Hooke materijala, Druckerov test stabilnosti zadovoljen je primjerice kada je koeficijent  $C_{10}$  *pozitivan*. Druckerov test stabilnosti u programskom paketu *Abaqus* [260] i [261] pokazao je da su modeli stabilni (eng. *stable*) za sve deformacije, osim Mooney-Rivlin materijalnog modela za 600 % deformacije (Treloar, primjer III) te S(M-R)III gdje su

<sup>39</sup> U primjeru IV, Mooney-Rivlin je nestabilan (*Abaqus* eng. *UNSTABLE FOR ALL STRAINS*, tj. nestabilan za sve deformacije zbog  $C_{01} \approx -0,32269$  MPa) prema Druckerovom kriteriju (Slika 5.66.).

koeficijenti  $C_{01}$  bili *negativni*. U slučaju validacije Treloarovog modela, nestabilnost je revidirana promjenom interesnog područja do 100 % deformacije<sup>40</sup>, čime je pokazano da je promjenom razmatranog područja prilagođene krivulje pomoću metode najmanjih kvadrata, moguće utjecati na numeričku *stabilnost* kao i na *točnost* proračunskog modela.



Slika 5.66. Stabilni i nestabilni M-R konstitutivni model, Treloar [189] prilagodba krivulje

Slika 5.66. vizualno prikazuje način na koji funkcionira Druckerov kriterij stabilnosti konstitutivnog modela za Treloarova [189] mjerenja. Vidljivo je da u *tlačnom* području model krivulje prikazuje singularne vrijednosti (plava isprekidana linija  $S(M-R)600\%$ ), tj. *jedan* iznos inženjerskog naprežanja  $S$  za *dva* iznosa inženjerske deformacije  $e$ .

Bitno je napomenuti i da je u slučaju dostupnosti svih potrebnih eksperimentalnih podataka te korištenja podataka sva četiri testa (eng. *uniaxial*, *biaxial*, *planar*, *volumetric*) za određivanje materijalnih konstanti  $C_{ij}$ , prisutno „nužno zlo“ da se gubi točnost svake zasebne testne grupe odvojeno [214]. Stoga je potrebno dobro odvagnuti koje su bitne karakteristike koje model treba zadržati pri simulaciji, što je redovno *kompromis*.

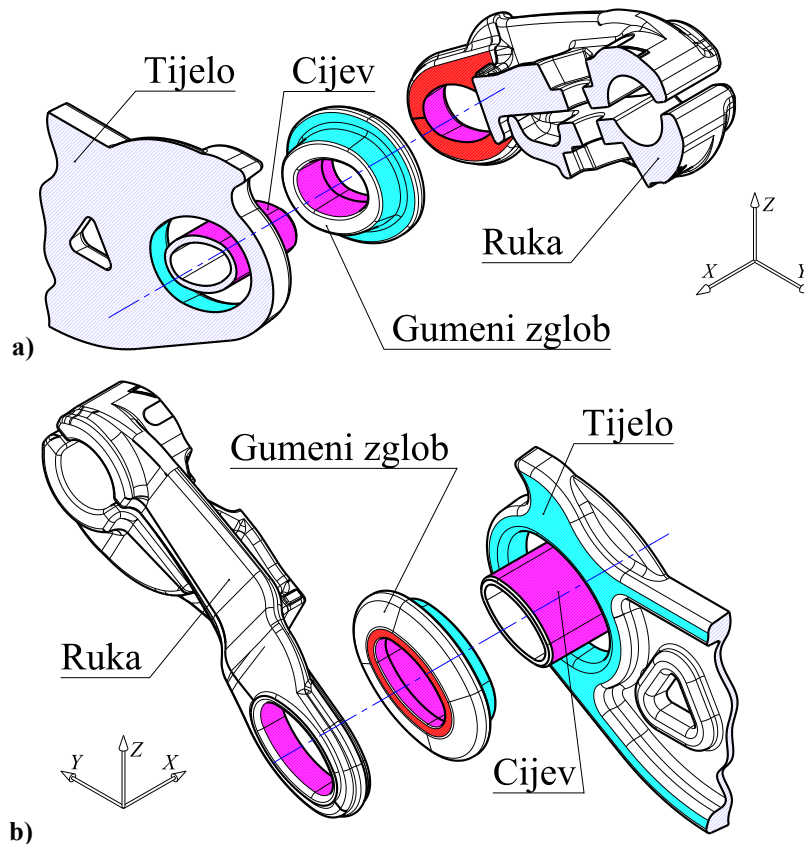
Pri simulaciji nelinearnog ponašanja gume primjenom MKE, točnost dobivenih rezultata prvenstveno zavisi od kvalitete proračunskog modela, stoga je pravilan izbor konstitutivnog modela materijala i određivanje koeficijenata najvažniji zadatak analitičara, a ispravnim modeliranjem moguće je postići veliku točnost. Dobiveni verifikacijski i validacijski rezultati ovog poglavlja, govore u prilog ovakvom zaključku i metodologiji.

<sup>40</sup> Može se stoga izvesti jednostavan zaključak da je za stabilnost Mooney-Rivlin modela jedan od uvjeta stabilnosti ispunjen u slučaju da vrijedi relacija  $C_{10}, C_{01} > 0$  te stoga i  $C_{10} + C_{01} > 0$ . Apsolutna nužnost je da je koeficijent  $C_{10} > 0$ , inače je numerički materijalni model zasigurno nestabilan [108].



## 6. Kreiranje proračunskog modela

Prvi korak analize je definiranje svih potrebnih *kontaktnih* ploha modela.



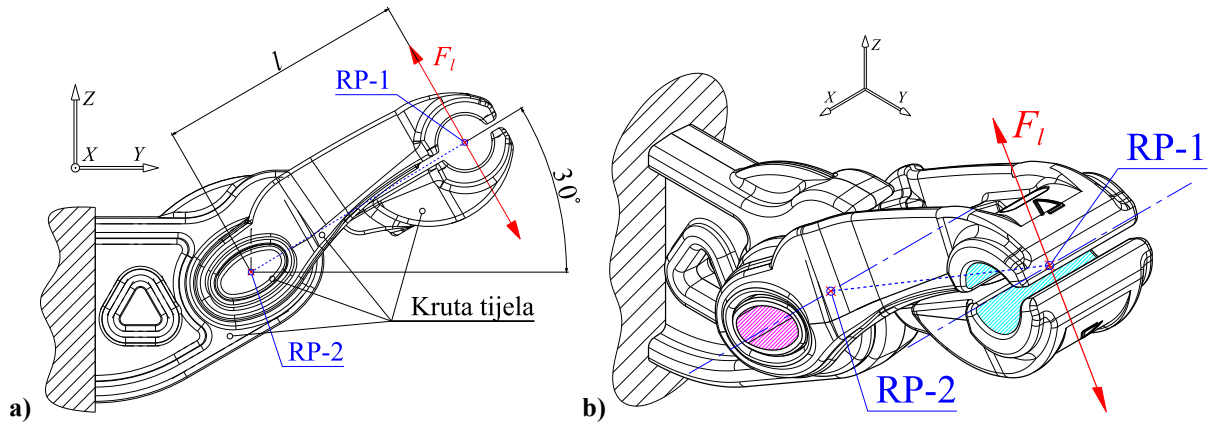
Slika 6.1. Rastojnik-prigušivač, kontaktne površine i ravnina simetrije polovine modela

Slika 6.1. prikazuje kontaktne površine promatranih dijelova modela:

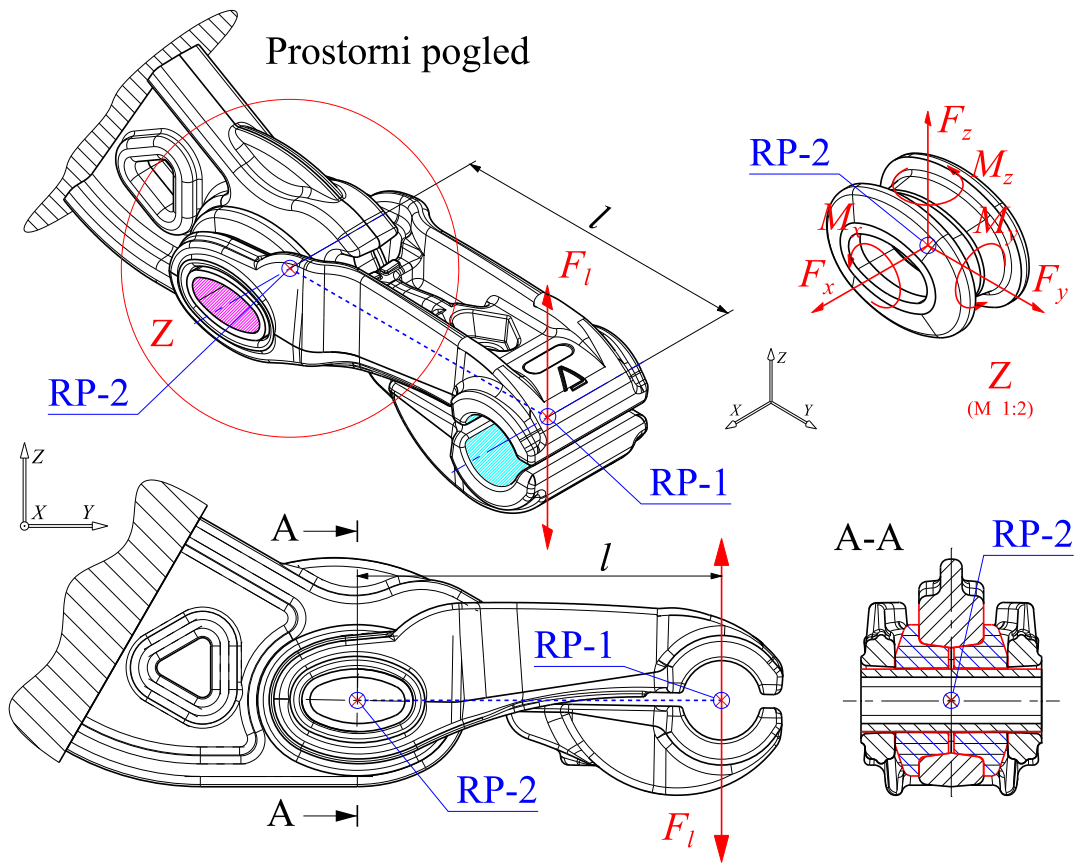
- ljubičasta boja simbolizira kontaktnu površinu cijevi i gumenog zgloba te cijevi i ruke,
- tirkizno plava boja simbolizira kontaktnu površinu tijela i gumenog zgloba,
- crvena boja simbolizira kontaktnu površinu ruke i gumenog zgloba,

dok svijetlosiva gusta šrafura predstavlja presjeke tijela, ruke i cijevi rastojnika-prigušivača.

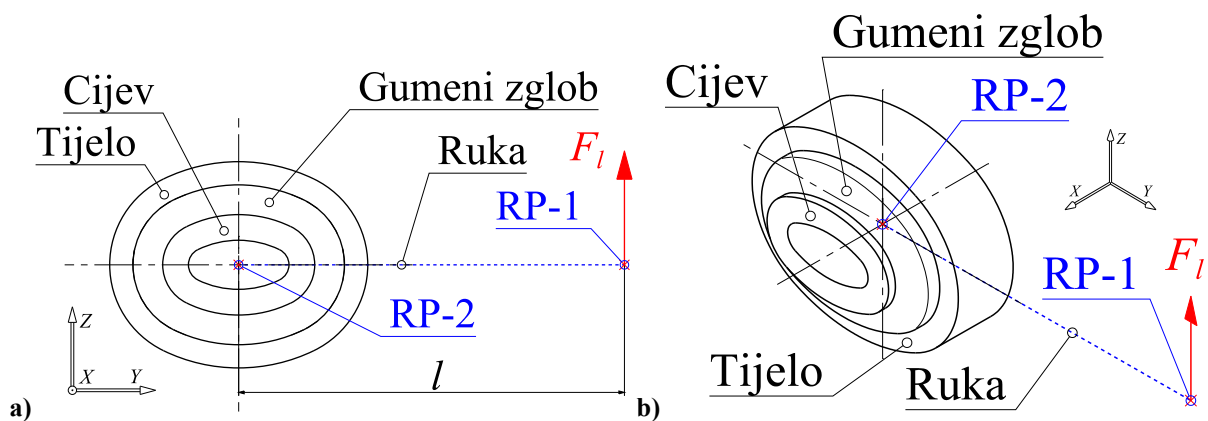
Uz već spomenute definicije kontaktnih parova, tj *master/slave* relacija između ploha u dodiru, noviji mogući način definicije kontakta u *Abaqusu* je i tzv. *općeniti* (eng. *general*, dostupan od verzije 6.8-EF [262]) kontakt koji je analogan spomenutoj *MSC* opciji *contact body* te obuhvaća sva kontaktna tijela, uključujući i samo-kontakte te se obilno koristi u primjerice *Explicit* metodi. Testiranjem je pokazano da opcija kontaktnih parova nešto brže konvergira u ovom slučaju numeričkog modeliranja rastojnika-prigušivača, stoga je usvojena.



Slika 6.2. Referentna sila  $F_1$  na referentnu točku RP-1 modela rastojnika-prigušivača



Slika 6.3. Novi globalni koordinatni sustav i komponente sile na gumeni zglob



Slika 6.4. Pojednostavnjeni numerički model rastojnika-prigušivača

Sljedeći korak analize je definiranje rubnih uvjeta uklještenja (Slika 2.1.), te hvatišta i kraka  $l$  sile  $F_l$ . Slika 6.2. prikazuje osnovni numerički model polovine uklještenog rastojnika-prigušivača s definiranom kvazistatičkom silom  $F_l$ . Radi jednostavnosti očitavanja rezultata, proračunski model definiran je u novom globalnom koordinatnom sustavu koji prikazuje Slika 6.3. Budući da su hvatište sile  $F_l$ , kao i težište gumenog zgloba u *praznom prostoru*, potrebno je numerički definirati referentne točke RP na koje se sile mogu postaviti.

Analogno verifikacijskom modelu (poglavlje 5.), s tim ciljem su kreirane dvije referentne točke: RP-1 u težištu šupljeg cilindra ruku (tirkizno plava površina, Slika 6.2. b) i Slika 6.3.) te RP-2 u težištu elipse gumenog zgloba, tj. cijevi (ljubičasta površina, Slika 6.2. b) i Slika 6.3.). Referentne točke su kruto (eng. *rigid*) vezane na površine. Preko referentne točke RP-1 verificiran je proračunski model postavljanjem sile *proizvoljnog* iznosa  $F_l = 250$  N.

Aluminij (tijelo, ruke) ima karakteristike:  $E = 70$  GPa,  $\nu = 0,346$ ,  $\rho = 2\,710$  kg/m<sup>3</sup>.

Guma (zglob) ima karakteristike:  $E_0 = 9,8$  MPa,  $\nu \approx 0,5$ ,  $\rho = 1\,140$  kg/m<sup>3</sup>.

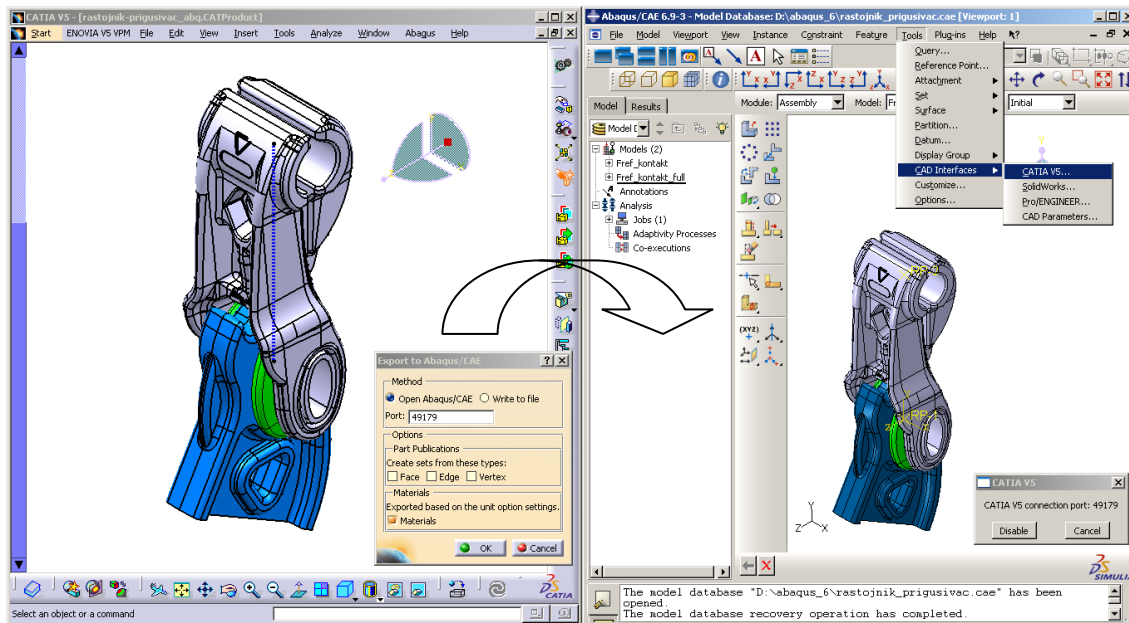
Radi pojednostavnjenja, iz analize su izbačeni sitni čelični dijelovi (vijci, podloške, matice itd.) pazeći da ta pojednostavnjenja ne utječu na željenu točnost rezultata.

Potrebno je napomenuti da su radi *znatno veće* krutosti aluminijskog tijela u odnosu na gumu, tijelo, ruka i cijev definirani kao *apsolutno kruti* te da je jedini *deformabilan* dio u proračunskom modelu *gumeni zglob*. Zbog kompleksnih zakrivljenosti kontaktnih površina i velike nelinearnosti kontakata, to se pokazalo kao *znatna* ušteda resursa.

Bitno je napomenuti i to da nije poznat točan način na koji se guma deformira između ruku i tijela, budući da vizualna kontrola nije moguća (zaklonjenost pristupa nakon montaže rastojnika). Iz tog razloga, u prvoj iteraciji stvaranja proračunskog modela, veze između gume i aluminijskog materijala definirane su *probno* i *preliminarno* kao pričvršćene (eng. *fastened/glued*) u programskom paketu *SimDesigner* te kao vezane (eng. *tie*) u programskom paketu *Abaqus*. Takve virtualne veze omogućuju spajanje *nekompatibilnih* mreža uz ostavljanje mogućnosti deformacije na kontaktnim površinama (Slika 6.1.) [5]. U ovom slučaju, deformabilnost vrijedi samo za gumu, jer je aluminij definiran kao *apsolutno krut*.

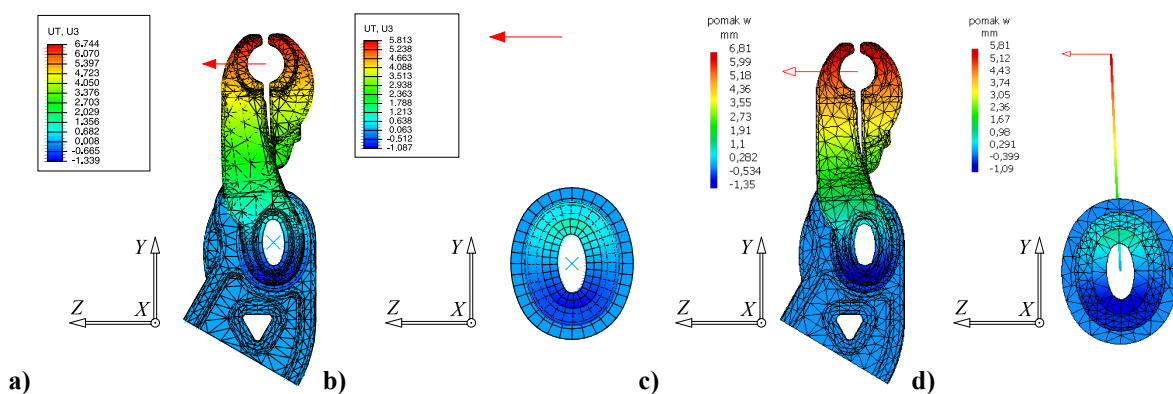
Na kraju je bitno napomenuti i definiranje svih proračunskih modela u linearno-elastičnom području, s ciljem pojednostavnjenja i kontrole prema [78], stoga točne karakteristike gume kao hiperelastičnog materijala (npr. *Mooney-Rivlin* materijalni model prema [259], [261], [268] i [269]) *nisu uzete* u obzir u ovom verifikacijskom dijelu rada.

Budući da se proračunski model i u linearnom obliku, uz *glued/tie* veze pokazao vrlo kompleksan i dugotrajan za proračun, uvedena su dodatna pojednostavnjenja za kontaktni problem. Slika 6.4. prikazuje konačni pojednostavnjeni model gdje je ruka zamijenjena krutim virtualnim elementom koji povezuje točke RP-1 i RP-2, a tijelo i cijev zamijenjeni su ekvivalentnim, jednostavnijim modelima koji prate konture kontakata s gumenim zglobo.



Slika 6.5. CAI sučelje za konverziju formata iz *Catie V5* u *Abaqus 6.xx*

CAD model je parametriziran, stoga je pri konverziji modela u *Abaqus input* format korištena *Dassault Systèmes* aplikacija CAI (*Catie Associative Interface*) namijenjena isključivo translaciji geometrije iz *Catie V5 Rxx* u *Abaqus 6.xx* što prikazuje Slika 6.5.



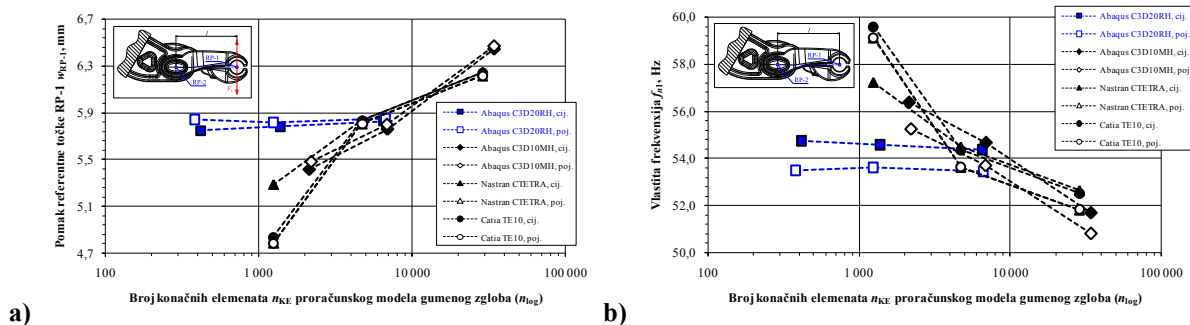
Slika 6.6. Pomak  $w$  linearnih modela. a) Abq cij., b) Abq poj., c) Nas cij., d) Nas poj.

Slika 6.6. prikazuje pomake u smjeru globalne osi  $z - w$  linearnih *Abaqus* i *Nastran* modela, a skraćenice cij. i poj. označavaju *cijeli* i *pojednostavnjeni* model. U *Abaqus* proračunskim modelima forsirana je heksaedarska mreža gdje god je bilo moguće, dok je u programskim paketima *SimDesigner/Catia* radi ograničenja korištena tetraedarska mreža.

Heksaedarska mreža u programskom paketu *Abaqus* kreirana je promišljeno i usmjereno pažljivim particioniranjem pojednostavnjenog proračunskog modela (Slika 6.6. b), analogno načinu na koji je particionirana Timoshenkova greda u primjeru II (Slika 5.15. a).

U slučaju cijelog proračunskog modela (Slika 6.6. a), particionirani te diskretizirani su samo gumeni zglob te cijev ruke, dok su tijelo i ruka zbog kompleksnosti geometrije diskretizirani isključivo tetraedarskim konačnim elementima drugog reda.

Radi dodatne provjere konzistencije proračunskih modela, numerički je izračunata i prva vlastita frekvencija neprigušenih vibracija  $f_{n1}$ . U slučaju pojednostavnjenih proračunskih modela, bilo je potrebno definirati i dodati koncentriranu masu ruke  $m_r$  kao i dinamičke momente inercije  $J_{x,y,z}$  u referentnu točku RP-4 težišta, tj. centra masa ruke (Slika 1.5.) u koordinati  $x_c = 0$  mm,  $y_c = 84,268$  mm,  $z_c = 2,601$  mm (uz uvjet da je centar globalnog koordinatnog sustava referentna točka RP-2, Slika 6.3.). Iznosi su  $m_r \approx 0,686$  kg = 0,000686 t,  $J_x = 0,002$  kg · m<sup>2</sup> = 2 t · mm<sup>2</sup>,  $J_y \approx 0,000$  kg · m<sup>2</sup> = 0 t · mm<sup>2</sup> i  $J_z = 0,002$  kg · m<sup>2</sup> = 2 t · mm<sup>2</sup>.



Slika 6.7. Konvergencija linearnih proračunskih modela: a)  $w_{RP-1}$ , b)  $f_{n1}$

Slika 6.7. prikazuje konvergencije svih linearnih modela, gdje je vidljivo da obje *Abaqus* heksaedarske mreže konvergiraju vrlo *brzo* (u drugoj iteraciji) i *monotono*, dok sve tetraedarske mreže (*Abaqus*, *Nastran*, *Catia*), konvergiraju *sporo* (*nijedna* tetraedarska mreža nije konvergirala usprkos velikom broju KE i SSG) te relativno *nemonotono*.

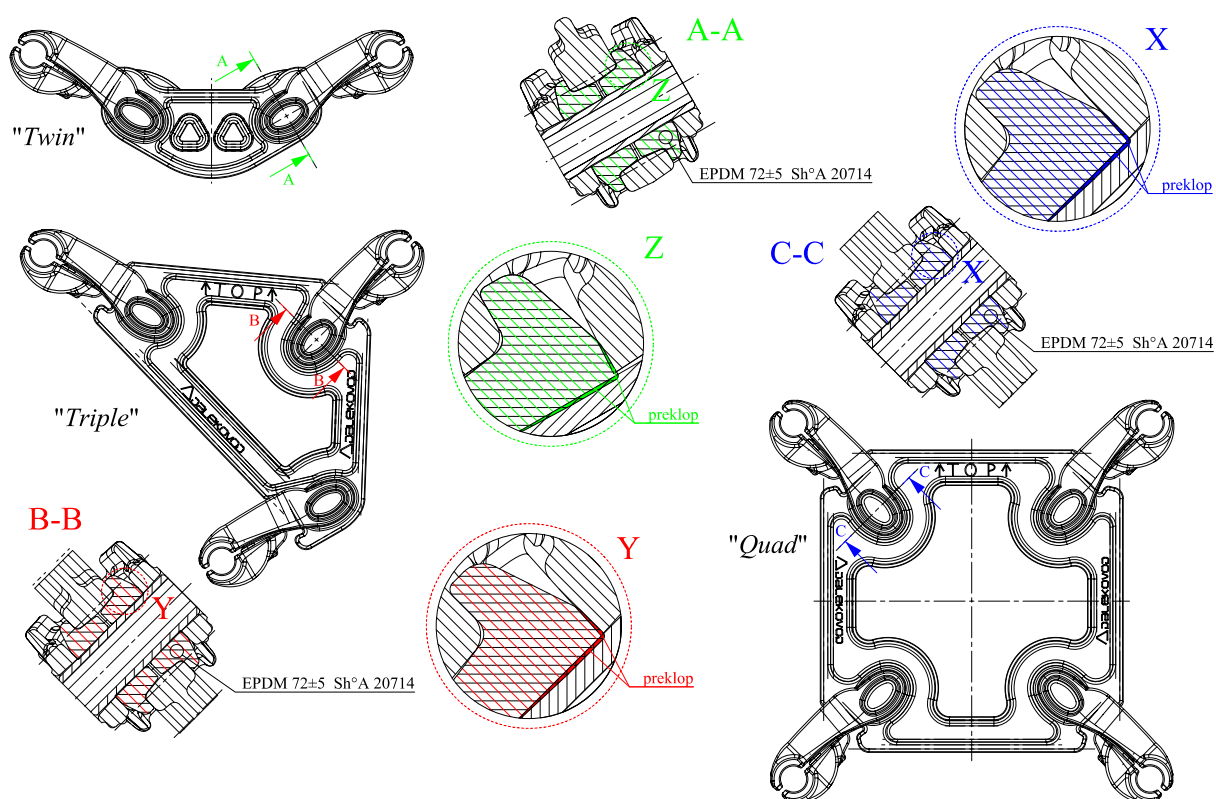
Dosadašnje iskustvo rada s tetraedarskim elementima [54], [55], [56] i [195] već je pokazalo slične numeričke poteškoće, koje se umnogostučuju s povećanjem kompleksnosti problema, stoga je rezultate tetraedarskih KE potrebno uzeti u ovom slučaju s određenom kritičkom zadržkom. Nadalje je potrebno usporediti rezultate cijelih i pojednostavnjenih proračunskih modela. Tablica 6.1. prikazuje usporedbe rezultata *linearnog* pomaka  $w_{RP-1}$  referentne točke RP-1 svih *Abaqus* i *Nastran* proračunskih modela (*Catia* proračunski modeli izostavljeni su iz tablice zbog velike sličnosti rezultata s *Nastran* rezultatima). Vidljivo je vrlo dobro slaganje numeričkih rezultata *povezanih* (cij./poj.) proračunskih modela.

Tablica 6.1. Usporedba rezultata linearnih proračunskog modela

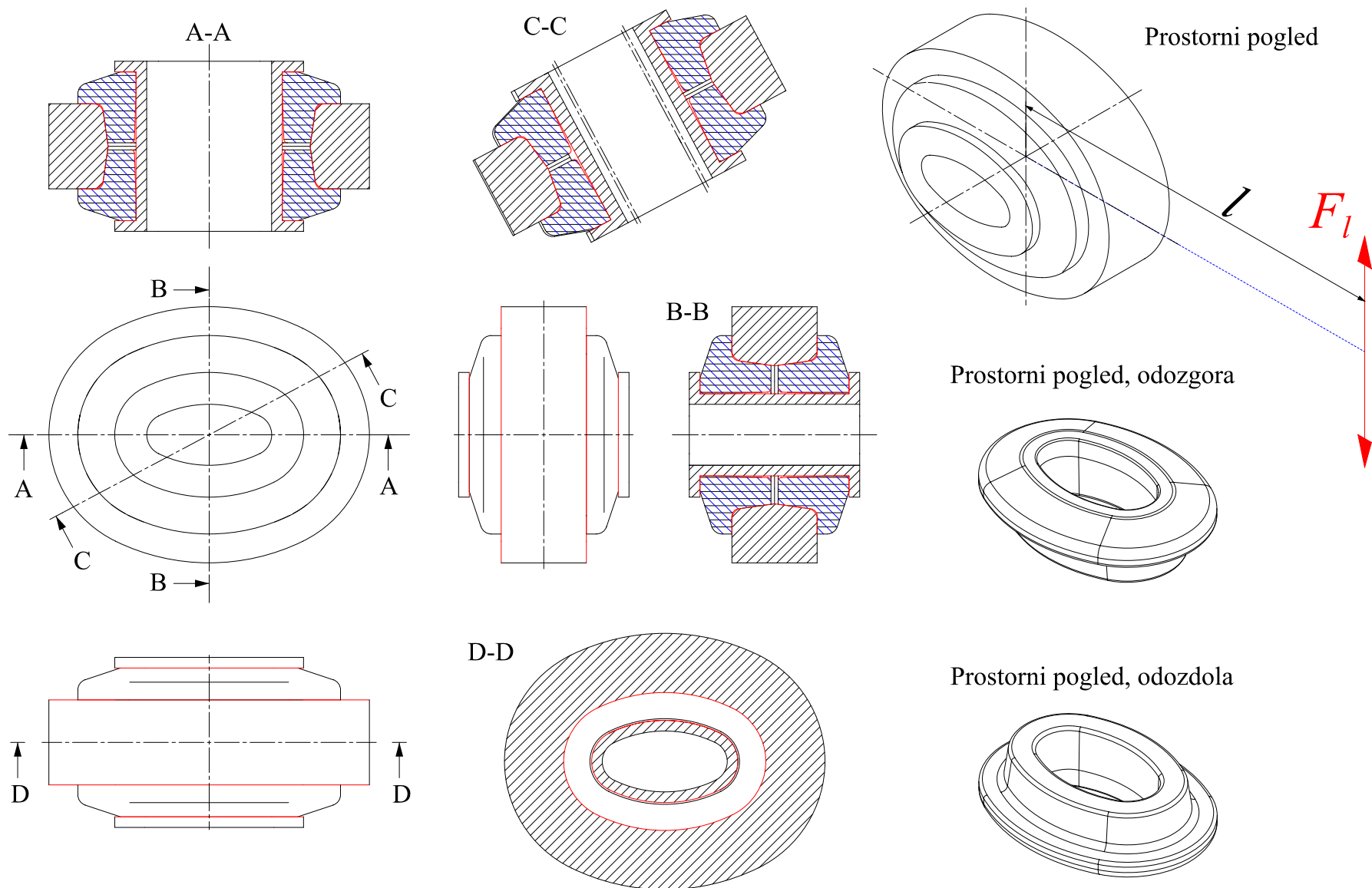
Model	Pomak $w_{RP-1}$ , mm	$E_{rel,max}$ , %	Frekvencija $f_{n1}$ , Hz	$E_{rel,max}$ , %
Abaqus C3D20RH, cij.	5,829	11,043	54,362	6,993
Abaqus C3D20RH, poj.	5,851		53,445	
Abaqus C3D10MH, cij.	6,447		51,685	
Abaqus C3D10MH, poj.	6,472		50,809	
Nastran CTETRA, cij.	6,246		52,635	
Nastran CTETRA, poj.	6,218		51,813	

Tablica 6.1. prikazuje slabije slaganje tetraedarskih i heksaedarskih mreža, tj.  $\sim 11\%$  razlike za pomak  $w_{RP-1}$  i  $\sim 7\%$  maksimalne razlike za prvu vlastitu frekvenciju  $f_{n1}$  u slučaju najgušćih mreža KE. Prva (fleksijska) glavna forma vibriranja prve vlastite frekvencije  $f_{n1}$  proračunskih modela nije prikazana, jer je vizualno identična pomaku  $w$  (Slika 6.6.).

Ovime je pokazana konzistencija *cjelovitog* (Slika 6.4.) i *pojednostavnjenog* proračunskog modela (Slika 6.9.), stoga su za nelinearnu analizu korišteni isključivo *Abaqus* pojednostavnjeni C3D20RH reducirani hibridni heksaedarski proračunski model i *SimDesigner* (*Nastran/Marc*) pojednostavnjeni CTETRA tetraedarski proračunski model, no isključivo kao dodatni *kontrolni* model. Budući da su rezultati pomaka  $w$ , kao i prve vlastite frekvencije  $f_{n1}$  *prekruti*, problem je nužno potrebno definirati kao *kontaktni* uz numerički *iterativno* određen faktor trenja  $\mu_{g/Al}$  koji odgovara eksperimentalnim rezultatima.



Slika 6.8. Modeli rastojnika-prigušivača i montažni preklop kontaktnih ploha

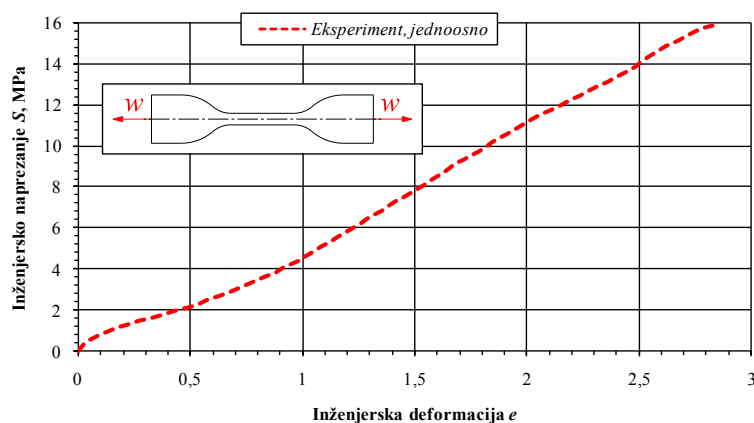


Slika 6.9. Kontaktne plohe pojednostavnjenog proračunskog modela

## 7. Krutost gumenog zgloba

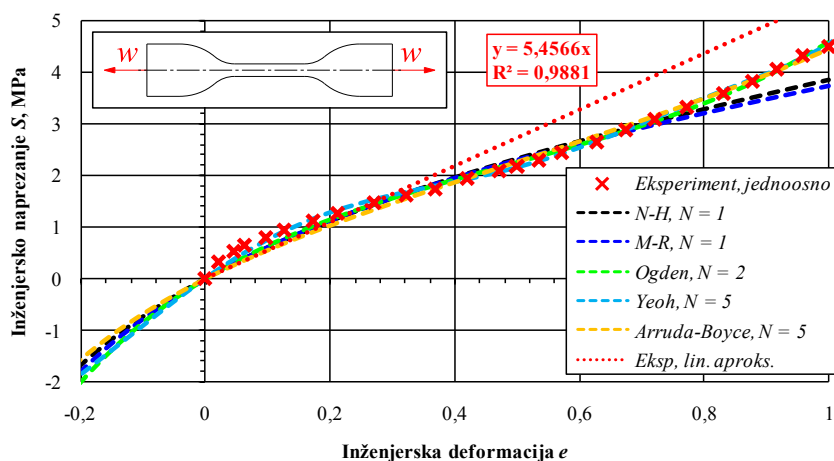
Uz potpuno određene geometrijske karakteristike proračunskog modela prema prethodnom poglavlju, sukladno verifikacijskom poglavlju 5.3.1. (primjer IV), određene su i hiperelastične materijalne konstante  $C_{10}$  i  $C_{01}$  Mooney-Rivlin modela uz uvjet  $\nu \approx 0,5$ .

Slika 7.1. prikazuje  $S$ - $e$  krivulju EPDM materijala gumenog zgloba dobivenu eksperimentalnim mjerenjem 5 uzoraka prema ASTM D412 [48] i ISO 37 [49] normama te proračunavanjem aritmetičke sredine inženjerskog naprezanja  $S_n$  uz deformaciju  $e_n$ .



Slika 7.1.  $S$ - $e$  dijagram EPDM materijala gumenog zgloba

Budući da je očekivana maksimalna deformacija manja od 100 %, tj. vrijedi  $e_{\max} < 1$ , postupak prilagodbe hiperelastičnog modela izvršen je sukladno, što prikazuje Slika 7.2.<sup>41</sup>



Slika 7.2. Prilagodba krivulja EPDM materijala gumenog zgloba do  $e_{\max} = 1$

<sup>41</sup> Pritom izraz  $y = 5,4566 \cdot x$  označava linearnu aproksimaciju  $S$ - $e$  krivulje u rasponu  $0 < e_n < 1$ , tj. Youngov modul iznosi  $E = 4,4566$  MPa, analogno verifikacijskom poglavlju 5.3.1. Izrazi za sve korištene hiperelastične konstitutivne modele (N-H, M-R, Og, Yh i A-B), a koji uključuju jednoosno i dvoosno naprezanje te ravninsko stanje deformacije mogu se pronaći na vezama: [http://solidmechanics.org/text/Chapter3\\_5/Chapter3\\_5.htm](http://solidmechanics.org/text/Chapter3_5/Chapter3_5.htm) i <http://abaqusdoc.ucalgary.ca/v6.9/books/stm/default.htm?startat=ch04s06ath124.html>, studeni 2014.



Sa slike 7.2. je vidljivo dobro poklapanje za sve konstitutivne modele do maksimalne deformacije iznosa  $e_{\max} \approx 0,7$ . Iznad deformacije  $e_{\max} > 0,7$ , N-H i M-R modeli ne mogu opisati progresivnu karakteristiku materijala, tj. otvrdnuće (eng. *upturn*), dok Ogden, Yeoh i Arruda-Boyce mogu. Također, sa slike 7.2. je vidljivo da početnu *kruću* karakteristiku, tj. iznos deformacije  $\sim 0 < e_n < \sim 0,2$  idealno opisuje samo Yeoh model, tj. reducirana polinomna forma, uz broj parametara  $N = 5$ . Stvarna nominalna deformacija gumenog zgloba prilikom eksploatacije te eksperimentalnih ispitivanja rastojnika-prigušivača očekivano ne bi trebala premašiti  $e_{\max} \approx 0,7$ , a očekivano je  $e_{\max} \approx 0,5$ . Kompleksniji Ogden i Arruda-Boyce modeli<sup>42</sup> do tog iznosa daju vrlo slične krivulje kao i jednostavni N-H i M-R, stoga su odbačeni.

Pritom je za analitičku konstrukciju Arruda-Boyce modela korišten već naveden izraz (5.60) za jednoosno opterećenje<sup>43</sup>, dok je za Ogden konstitutivni model korišten izraz

$$U_{(\text{og})} = \sum_{i=1}^3 \frac{\mu_i}{\alpha_i} \cdot (\lambda_1^{\alpha_i} + \lambda_2^{\alpha_i} + \lambda_3^{\alpha_i} - 3) \Rightarrow S_{(\text{og})j} = \sum_{i=1}^3 \mu_i \cdot (\lambda^{\alpha_i} - \lambda^{-\alpha_i/2}) / \lambda, \quad (7.1)$$

analogno izrazima (9.6) i (9.9) budući da je u dodatku pokazano (Dodatak E: Napuhavanje sfernog balona) da programski paket *Abaqus* ne koristi definiciju gustoće energije deformiranja  $U$  prema izrazu (7.1), već prema izrazu (5.59) [260] i [261]. Yeoh konstitutivni model u ovom slučaju ( $N = 5$ ) koristi prošireni izraz analogan izrazu (5.58) koji glasi

$$U_{(\text{yh})} = \sum_{i=1}^5 C_{i0} \cdot (I_1 - 3)^i \Rightarrow S_{(\text{yh})j} = 2 \cdot (\lambda - \lambda^{-2}) \sum_{i=1}^5 i \cdot C_{i0} \cdot (I_1 - 3)^{i-1}, \quad (7.2)$$

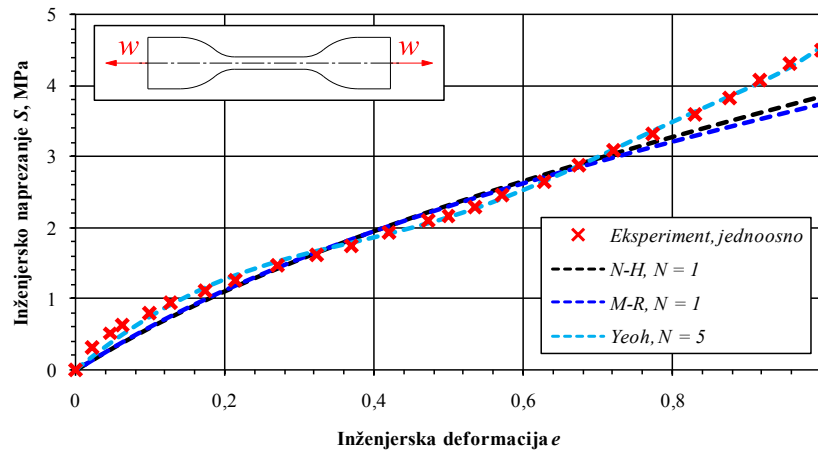
gdje je bitno zamijetiti da reducirana polinomna forma koristi samo prvu invarijantu tenzora deformacije  $I_1$ , stoga je taj konstitutivni model znatno *stabilniji* (prema Druckeru) od generalne polinomne forme gdje je gustoća energije deformiranja  $U$  funkcija prve i druge invarijante tj.  $U = U(I_1, I_2)$ . Navedeno čini reduciranu polinomnu formu jednostavnijom te *robustnijom* u odnosu na generalnu<sup>44</sup> što je primjerice u skladu s preporukama proizvođača velikih nelinearnih MKE komercijalnih programskih paketa kao *Simulia Abaqus* [260] i [261], *MSC Marc* [268], [269] i [270] ili *Ansys* [275]. Slične preporuke daje i Bergström [286], autor programskog paketa *MCalibration* za prilagodbu hiperelastičnih materijala.

<sup>42</sup> Bitno je pritom napomenuti da je Ogden model sve teže kalibrirati *stabilno* s porastom broja parametara. U ovom slučaju korišten je  $N = 2$ , jer s povećanjem stupnja polinoma nije povećana točnost, dok je smanjena stabilnost. Arruda-Boyce model se pokazao vrlo stabilnim i robustnim u kontekstu prilagodbe krivulja.

<sup>43</sup> Pritom su u izrazu (5.60) vrijednosti  $C_1 = 1/2$ ,  $C_2 = 1/20$ ,  $C_3 = 11/1\ 050$ ,  $C_4 = 19/7\ 000$ ,  $C_5 = 519/673\ 750$ , dok su  $\mu$  (u MPa) i  $\lambda_m$  (istežanje *zaključavanja*, tj.  $\lambda_L$  iz [173]) parametri, tj. konstante materijala. Uz uvjet  $\lambda_m \approx \infty$  te  $N \cdot k_B \cdot T = \mu_0 \equiv G_0 = 2 \cdot C_{10}$ ,  $\mu$  prelazi u  $\mu_0$ , a Arruda-Boyce model postaje identičan neo-Hooke modelu.

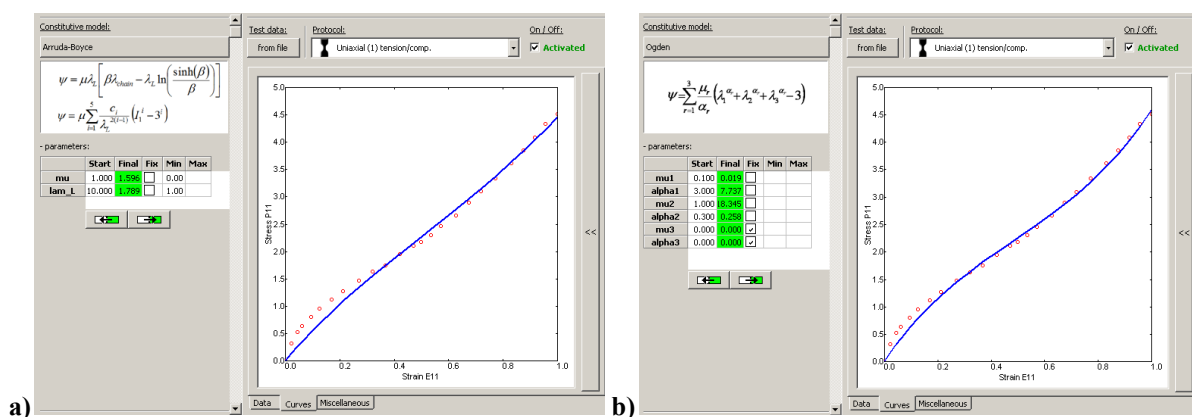
<sup>44</sup> Prikladno je ponovno napomenuti da je reducirana polinomna forma uz  $N = 1$  identična neo-Hooke modelu, dok je generalna polinomna forma uz  $N = 1$  identična Mooney-Rivlin modelu. Analogno navedenom, iz razloga moguće Druckerove nestabilnosti, neo-Hooke je stoga često preferiran naspram Mooney-Rivlin modela [286].

Slika 7.3. prikazuje prilagodbu krivulja za neo-Hooke, Mooney-Rivlin i Yeoh modele. Mooney-Rivlin model je kalibriran nešto položnije u odnosu na neo-Hooke s razlogom da bolje prati trend krivulje u području  $\sim 0,3 < e_n < \sim 0,7$ . Sa slike je također jasno vidljivo da Yeoh model izvrsno prati trend krivulje u području deformacije  $0 < e_n < 1$ .



Slika 7.3. Prilagodba krivulja EPDM materijala gumenog zgloba: N-H, M-R i Yeoh

Kako su dostupni samo eksperimentalni podaci za jednoosno statičko opterećenje, a očekivano je *simultano višeosno* opterećenje<sup>45</sup>, rizično je koristiti kompleksnije modele, stoga je i Yeoh odbačen. Budući da je M-R model zbog dodatnog parametra materijala, tj. konstante  $C_{01}$ , moguće namjestiti preciznije nego N-H model, *usvojen je*. Za prilagodbe i prikaz parametara krivulja korišteni su programski paket *Abaqus*, programski paket *Mathematica* i programski paket *MS Excel*. Dodatno je korišten komercijalni programski paket *Hyperfit*<sup>46</sup> (Slika 7.4.) [284] i [285] koji se pokazao kvalitetnijim i preciznijim u odnosu na *Abaqus* glede prilagodbe kompleksnijih konstitutivnih modela kao npr. Arruda-Boyce, Ogden ili Yeoh.

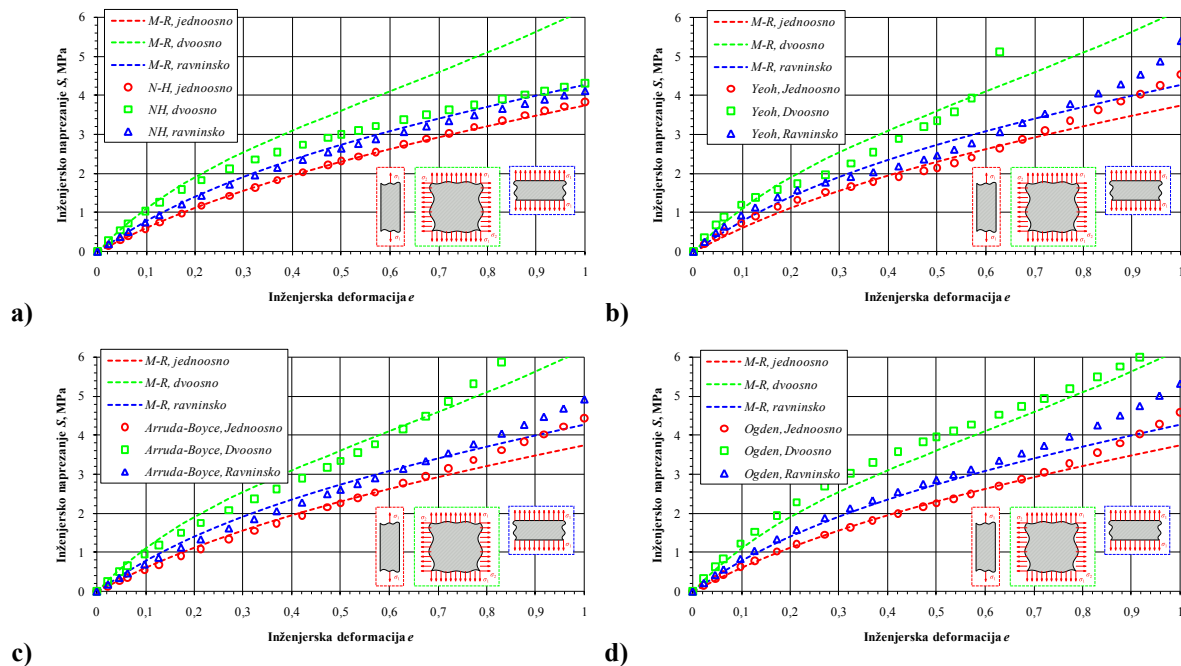


Slika 7.4. *Hyperfit* prilagodba EPDM krivulja: a) Arruda-Boyce, b) Ogden

<sup>45</sup> To implicira da je u nedostatku referentnih eksperimentalnih podataka, podatke za dvoosno opterećenje i ravninsko stanje deformacije potrebno kvalitativno i kvantitativno *iskustveno* procijeniti.

<sup>46</sup> U ovom slučaju, korištena je *besplatna* verzija programskog paketa *Hyperfit* uz ograničenu funkcionalnost.

Programski paket *Hyperfit* pokazao se korisnim i iz razloga preliminarne prilagodbe Ogden parametara, budući da je verificiran (pogavlje 14., Dodatak E: Napuhavanje sfernog balona) te proračunava parametre materijala prema nominalnom konstitutivnom modelu [182] i [183]. Veliki problem prilikom predviđanja hiperelastičnog  $S$ - $e$  dijagrama dvoosnog opterećenja (kao i ravninskog stanja deformacije), a bez referentnih podataka, moguće je nefizikalno povećanje krutosti [108], [260], [261], [268], [269], [270] i [275], pogotovo u slučaju dvoosnog opterećenja (Slika 7.6. f). Iz tog razloga, Mooney-Rivlin model kontroliran je u usporedbi s ostalim korištenim testiranim modelima što prikazuje Slika 7.5. a), b), c) i d).



Slika 7.5. Usporedba modela: a) M-R/N-H, b) M-R/Yh, c) M-R/A-B, d) M-R/Og

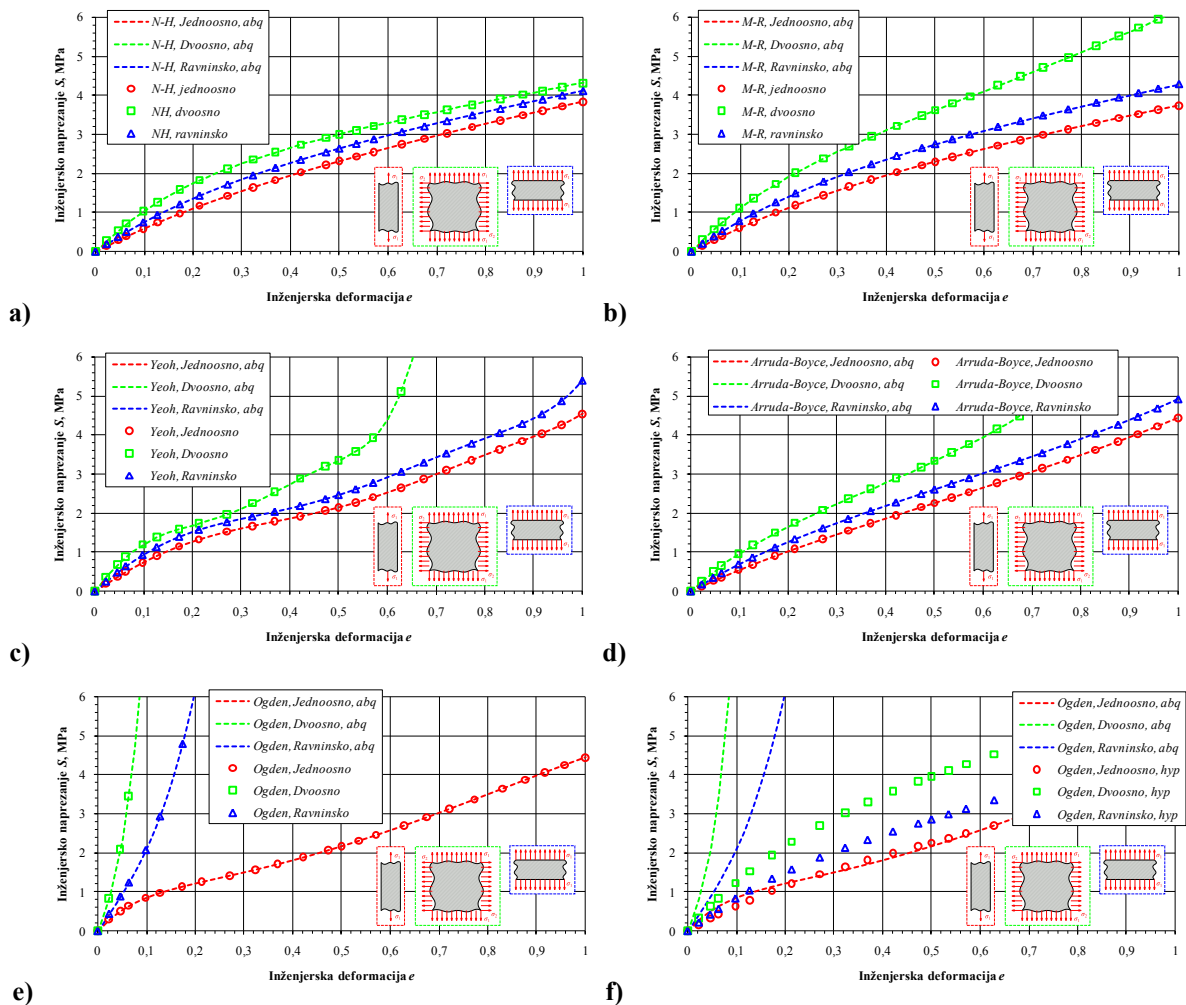
Slika 7.5. ne pokazuje velika odstupanja ostalih konstitutivnih modela u odnosu na Mooney-Rivlin model čime je pretpostavka sukladnosti potvrđena. Također, bitno je zamijetiti da svi dijagrami (Slika 7.5.) kvalitativno odgovaraju referentnom Ogden dijagramu iz Treloarovih podataka [187], [188] i [189] (pogavlje 14., Dodatak E: Napuhavanje sfernog balona, Slika 14.2. a). Još jednom je potrebno napomenuti da je korištenje M-R modela uz prilagođene podatke samo statičkog vlačnog pokusa vrlo rizično. Već navedeni razlozi su izgledne nestabilnosti i nefizikalno povećanje krutosti za slučajeve dvoosnog opterećenja i ravninskog stanja deformacije. Korištenje Mooney-Rivlin modela ipak je moguće i dozvoljeno uz prethodno opisane mjere opreza što je u skladu s preporukama [11], [107] i [108]. Zadnja mogućnost, u slučaju nezadovoljavajuće točnog kalibriranja M-R modela za dvoosno opterećenje, je postaviti vrijednost parametra  $C_{01} = 0$  MPa, čime generalna polinomna forma uz  $N = 1$  postaje reducirana polinomna forma, tj. stabilni neo-Hooke model.

Parametar neo-Hooke materijala je  $C_{10(N-H)} = 1,1$  MPa, parametri odabranog Mooney-Rivlin materijala su  $C_{10(N-H)} = 1$  MPa,  $C_{01(N-H)} \approx 0,143$  MPa (uz  $k = C_{10(M-R)}/C_{01(M-R)} = 7$ ), Arruda-Boyce parametri su  $\mu_{0(A-B)} \approx 1,5962$  MPa,  $\lambda_{m(A-B)} \approx 1,7886$ , dok parametre Yeoh te analitičkog i numeričkog *Abaqus* Ogden modela prikazuje Tablica 7.1. a), b) i c).

Tablica 7.1. Parametri EPDM materijala: a) Yeoh, b) Ogden, anlt (hyp), c) Ogden, abq

$C_{10(Yh)}$ , MPa	Ogden, $N = 3$		Ogden, $N = 3$ , abq	
1,419894322	$\alpha_1$	$\mu_1$ , MPa	$\alpha_1$	$\mu_1$ , MPa
$C_{20(Yh)}$ , MPa	7,737	0,019	5,837	-2,566
-0,864965863	$\alpha_2$	$\mu_2$ , MPa	$\alpha_2$	$\mu_2$ , MPa
$C_{30(Yh)}$ , MPa	0,258	18,345	-10,857	7,442
0,828069868	$\alpha_3$	$\mu_3$ , MPa	$\alpha_3$	$\mu_3$ , MPa
$C_{40(Yh)}$ , MPa	0,000	0,000	0,000	0,000
-0,334796383				
$C_{50(Yh)}$ , MPa				
0,051456002				

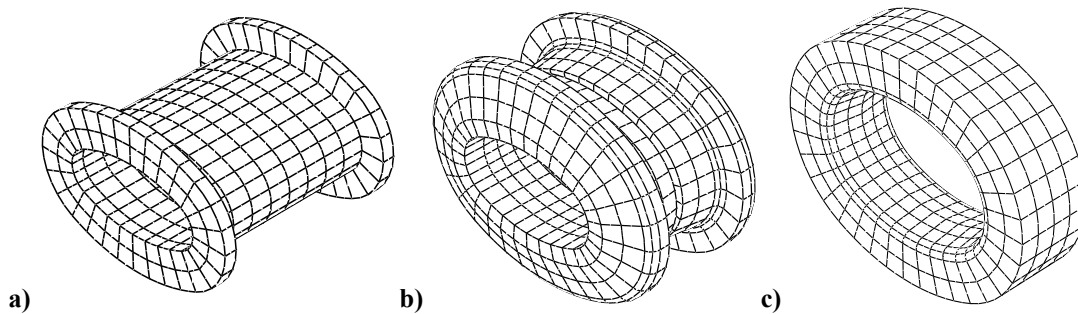
Slika 7.6. prikazuje usporedbu analitičkih i numeričkih (*Abaqus*) modela.



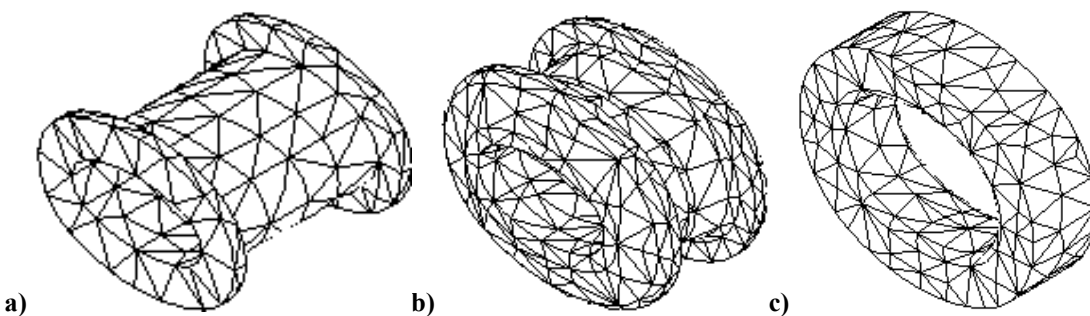
Slika 7.6. Usporedba modela: a) N-H, b) M-R, c) Yh, d) A-B, e) Og, f) Og num/anlt

Vidljivo su izvrsna poklapanja, no razlika *Abaqus* i *Hyperfit* krivulje na slici 7.6. f).

Slika 7.7. prikazuje početne, heksaedarske mreže pojednostavnjenog proračunskog modela cijevi, gumenog zgloba i tijela kreirane u programskom paketu *Abaqus*, dok Slika 7.8. prikazuje početne, rijetke tetraedarske mreže u programskom paketu *SimDesigner* (*Marc*).

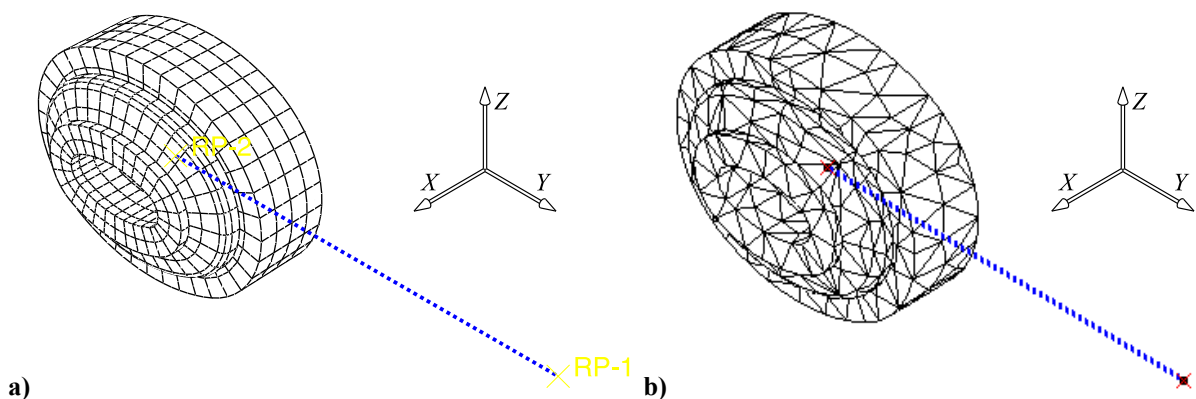


Slika 7.7. Osnovne *Abaqus hex* mreže proračunskog modela: a) cijev, b) gumeni zglob, c) tijelo



Slika 7.8. Osnovne *SimDesigner tet* mreže proračunskog modela: a) cijev, b) gumeni zglob, c) tijelo

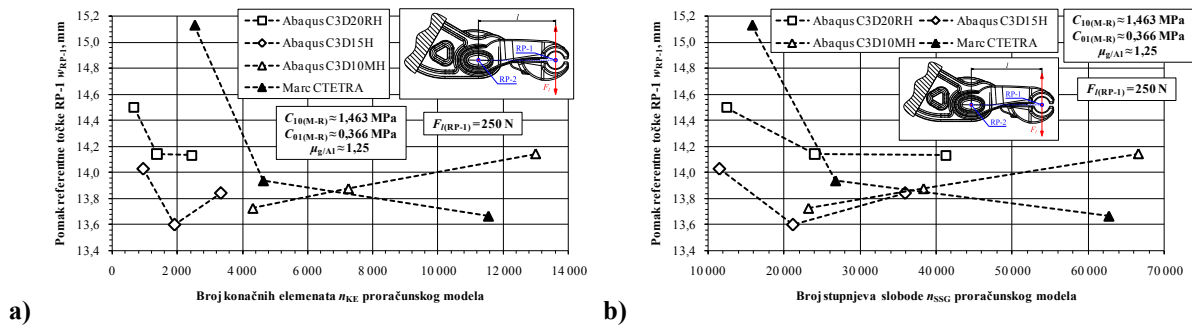
Slika 7.9. a) i b) prikazuje početne, rijetke mreže ( $h_{KE} \approx 5 \dots 10$  mm) sklopa pojednostavnjenih proračunskih modela u programskim paketima *Abaqus* i *SimDesigner*.



Slika 7.9. Osnovna mreža proračunskog modela sklopa: a) *Abaqus*, b) *SimDesigner*

Bitno je napomenuti da su pri provjeri konvergencije usitnjavane *sve mreže* KE budući da finoća diskretizacije *kontaktnih ploha* uvjetuje *točnost* kontaktnih rezultata. Numerički faktor trenja iznosa  $\mu_{g/Al} = 1,25$  je radi jednostavnosti *pretpostavljen* uz *isti* iznos na *svim* nalijegajućim površinama, što u stvarnosti *ne mora* biti slučaj. Početni M-R model za ispitivanje konvergencije koristi parametre  $C_{10(IV)} \approx 1,463$  MPa i  $C_{10(IV)} \approx 0,366$  MPa, tj. model IV prema izrazu (5.57) iz verifikacijskog poglavlja 5.3.1.

U model je sada unešena materijalna (hiperelastičnost) te geometrijska nelinearnost (veliki pomaci numerički izračunati pomoću Newton-Raphsonove iterativne metode) kao i nelinearnost trenja (*stick/slip* Coulomb model), a problem se pokazao vrlo kompleksnim zbog velike količine višestruko zakrivljenih kontaktnih površina (Slika 6.1. i Slika 6.9.). Također, male razlike kuta rotacije linije spojnice RP-1/RP-2 (apsolutno kruta linija) daju velike razlike u pomacima. Početni pretpostavljeni faktor trenja guma/aluminij  $\mu_{g/Al}$  iznosi 1,25 te je konvergencija *nelinearnog* modela prvo istražena za taj slučaj uz silu  $F_l = 250$  N.



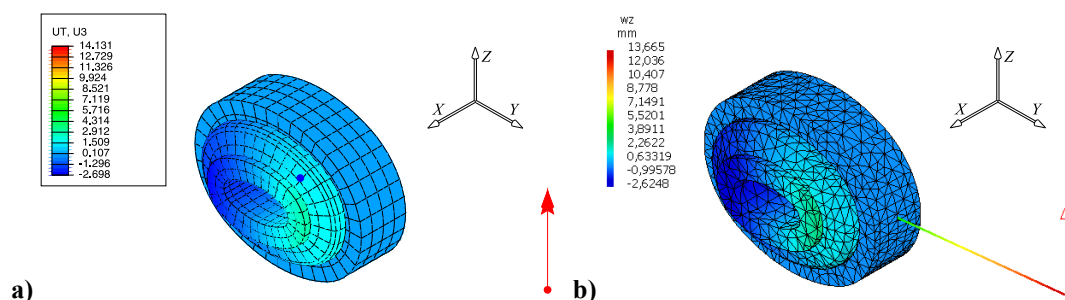
Slika 7.10. Konvergencija nelinearnih proračunskih modela rastojnika-prigušivača,  $\mu_{g/Al} = 1,25$

Usprkos *očekivanoj* nemonotnoj konvergenciji (tetraedarski i pentaedarski KE) iz razloga nelinearnosti kontakta uz trenje, kao i nelinearnosti materijala/geometrije te velikog broja geometrijski kompleksnih nalijegajućih površina, iz dijagrama konvergencije vidljivo je da *Abaqus* heksaedarski proračunski model konvergira već u drugoj iteraciji (Slika 7.10.).

Relativne razlike rezultata izračuna pomaka referentne točke RP-1 *Abaqus* i *Marc* proračunskih modela mogu se objasniti različitim numeričkim definicijama tj. algoritmu proračuna kontakta uz trenje. Relativna razlika max. pomaka  $w_{FI}$  najgušćih mreža KE iznosi

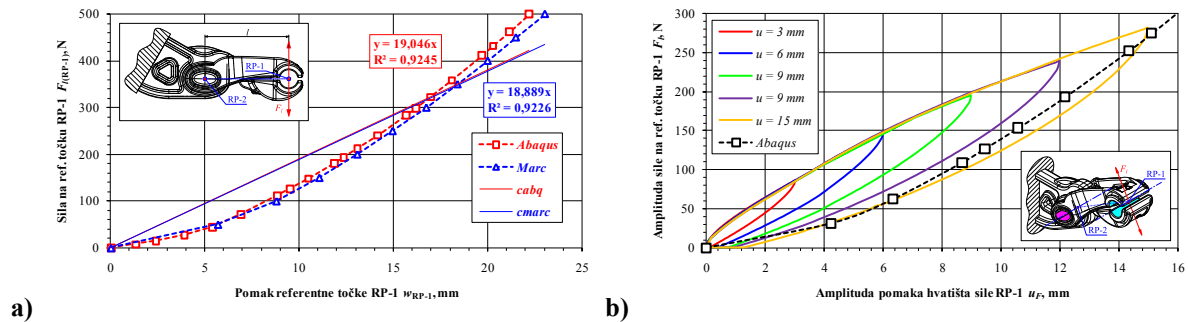
$$E_{rel,abq/marc} = \left( \frac{w_{FI(abq)}}{w_{FI(marc)}} - 1 \right) \cdot 100\% = \left( \frac{\sim 14,131}{\sim 13,665} - 1 \right) \cdot 100\% \approx 3,41\%, \quad (7.3)$$

a Slika 7.11. prikazuje rezultate maksimalnog pomaka najgušćih mreža KE u smjeru osi z  $w_{FI}$  pojednostavljenih proračunskih modela u programskim paketima *Abaqus* i *Marc*.



Slika 7.11. Pomak RP-1  $u_{FI}$ : a) *Abaqus*, b) *Marc*

Zbog velikog broja SSG tetraedarske CTETRA (KE II. reda s deset čvorova) *Marc* mreže (Slika 7.10. b), kao i problema s inkrementalno/iterativnom konvergencijom u slučaju postavljanja strožih kriterija reziduuma algoritma, *Marc* proračunski model nadalje se koristio samo kao *grubi orijentacijski model*<sup>47</sup> za verificiranje rezultata programskog paketa *Abaqus*.



Slika 7.12. Usporedba rezultata: a) *Abaqus* i *Marc*, b) eksperiment i simulacija

Slika 7.12. a) prikazuje usporedbu numeričkih rezultata u programskim paketima *Abaqus* i *Marc* uz procijenjeni faktor trenja  $\mu_{g/Al} = 1,25$  gdje je vidljivo vrlo dobro poklapanje, a krivulje pokazuju *progresivnu* karakteristiku. U plavo i crveno uokvirenim pravokutnicima nalaze se podaci o linearnim regresijskim modelima, tj. lineariziranim funkcijama dobivenim pomoću metode najmanjih kvadrata. Opći oblik takve linearne funkcije glasi

$$y = a \cdot x + b, \text{ uz } b = 0 \Rightarrow F_l = a \cdot w_{RP-1}, \quad (7.4)$$

gdje parametar  $b$  iznosi 0 iz razloga što funkcija pravca *nužno* prolazi kroz točku  $T(0; 0)$ .<sup>48</sup> Programski paket *MS Excel* ima mogućnost izračuna parametra  $a$ , tj. matematički *koeficijenta smjera* pravca, kao i faktora determinacije<sup>49</sup> ( $R^2$ ) što prikazuje Slika 7.12. a). Kontrolni kôd proračuna linearne regresije koeficijentata smjera pravaca, tj. u mehaničkom smislu *torzijskih krutosti*, za dodatnu referencu napravljen je u programskom paketu *Mathematica*, čime su verificirani podaci dobiveni u *Excelu*. Slika 7.12. b) prikazuje usporedbu *statičkih* eksperimentalnih mjerenja s numeričkom simulacijom gdje je vidljivo *loše poklapanje*. Usprkos tome što su mjerenja izvedena uz malenu brzinu deformacija, tj.  $v_{max} = 2 \text{ mm/min}$ , vidljiva je histereza gume (povećava se s pomakom), što je efekt koji nije obuhvaćen numeričkim statičkim modelom. Također, vidljivo je da eksperiment pokazuje *degresivnu* karakteristiku, dok numerička simulacija pokazuje *progresivnu* karakteristiku krivulje.

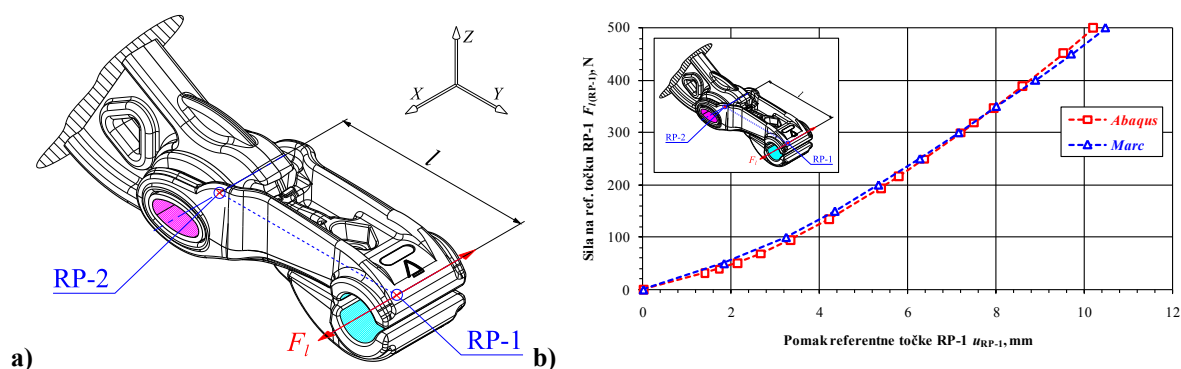
<sup>47</sup> Razlog je korištenje starije verzije programskog paketa *MSC Marc* 2004/2005.

<sup>48</sup> Numerički, takva se funkcija dobija naredbom *presjeci/prepriječi* (eng. *intercept*) u točki ishodišta  $T(0; 0)$ .

<sup>49</sup> Vrijednost  $R^2$  predstavlja faktor determinacije koji uspoređuje *procijenjene* i *stvarne* vrijednosti  $y$  te *raspone* u vrijednosti od 0 do 1. Ako vrijednost  $R^2$  iznosi 1, postoji savršena korelacija u uzorku, tj. nema razlike između procijenjene i stvarne vrijednosti  $y$ . Druga krajnost nastaje ako je koeficijent determinacije  $R^2 = 0$ . U tom slučaju regresijska jednadžba nije od koristi pri predviđanju vrijednosti  $y$  [278]. Realne vrijednosti iznose  $0 < R^2 < 1$ .

Histereza gumenog zgloba, usprkos nametnutom *statičkom* opterećenju, može se objasniti prigušenjem koje je u ovom slučaju *proporcionalno pomaku*, a ne *brzini deformacije* te je pojava koju je u ovom slučaju nemoguće izbjeći. Progresivni trend krivulje numeričkih simulacija (Slika 7.12. a) moguće je objasniti gnječenjem gume, tj. očitanim tlačnim naprežanjem koje nastaje u slučaju ovakvog opterećenja, jer konstitutivni model za gumu prema definiciji daje takve karakteristike (Slika 5.45. b). Degresivni trend eksperimentalne krivulje u slučaju ovakvog opterećenja (Slika 7.12. b) je u skladu s referentnim mjerenjima karakteristika rastojnika-prigušivača [52] te implicira da se unutar vizualno *skrivenog* zgloba (nije moguća vizualna kontrola) događaju znatno složeniji kontaktni fenomeni od onih obuhvaćenih ovdje korištenim jednostavnim Coulombovim modelom. Navedeno je već spomenuti općeniti problem numeričkog definiranja kontaktnih problema gume i metala [89].

Iterativno prilagođavanje numeričke krivulje sila/pomak variranjem Coulombovog faktora trenja  $\mu_{g/Al}$ , kao i variranje definicija kontaktnih ploha (*tie/contact*) nije rezultiralo promjenom progresivnog u degresivni trend u programskim paketima *Abaqus* i *Marc*.



Slika 7.13. Sila  $F_{lx}$  na proračunski model: a) shema, b) rezultati *Abaqus* i *Marc*

Slika 7.13. a) shematski prikazuje dodatnu verifikacijsku silu  $F_l$  u smjeru globalne osi  $x$  korištenu pri numeričkoj simulaciji, dok Slika 7.13. b) kao i Tablica 7.2. prikazuju rezultate i usporedbu, gdje je vidljivo vrlo dobro numeričko poklapanje i sukladnost.

Tablica 7.2. Usporedba numeričkih max. pomaka  $u_{Fx}$  i  $v_{Fy}$  referentne točke RP-1

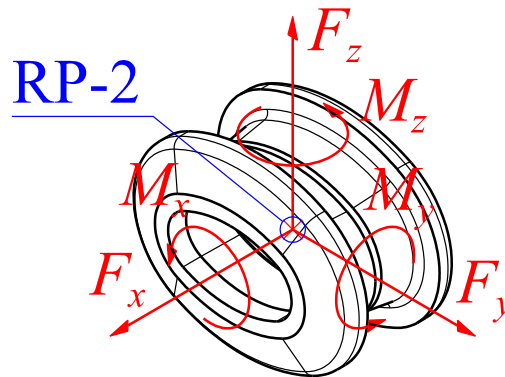
$F_{lx,z} = 500 \text{ N}$	$u_{F_{lx} \text{ max}}, \text{ mm}$	$E_{\text{rel,num}}, \%$	$v_{F_{ly} \text{ max}}, \text{ mm}$	$E_{\text{rel,num}}, \%$
<i>Abaqus</i>	22,182	-3,714	10,212	-2,612
<i>Marc</i>	23,038		10,486	

Prema ovom *numerički verificiranom* proračunskom modelu, uz iterativno određen faktor trenja  $\mu_{g/Al} = 1,25$  (što je u skladu s realno mogućim vrijednostima prema referentnoj literaturi [11] i [83]), u idućem poglavlju izračunate su orijentacijske numeričke vrijednosti statičke krutosti gumenog zgloba rastojnika-prigušivača.



## 8. Rezultati numeričke analize

Za izračun krutosti, koristila se konvergirana C3D20RH heksaedarska mreža u programskom paketu *Abaqus* (Slika 7.9. a) te rijetka, računalno *jeftina* kontrolna CTETRA mreža u programskom paketu *SimDesigner* (Slika 7.9. b). Slika 8.1. prikazuje šest postavljenih komponenta sila  $F_{x,y,z}$  i momenata  $M_{x,y,z}$  u globalnom koordinatnom sustavu na referentnu točku RP-2 za numeričko određivanje radijalne/torzijske krutosti gumenog zgloba.



Slika 8.1. Sile na gumeni zglob rastojnika-prigušivača

Za šest sila sa gornje slike vrijede odabrani maksimalni iznosi iz izraza

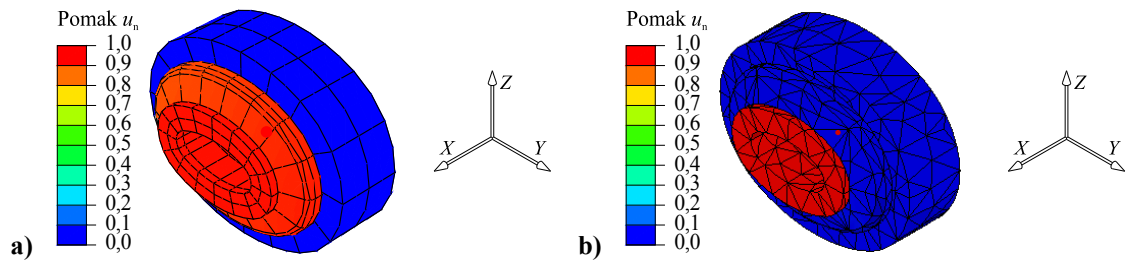
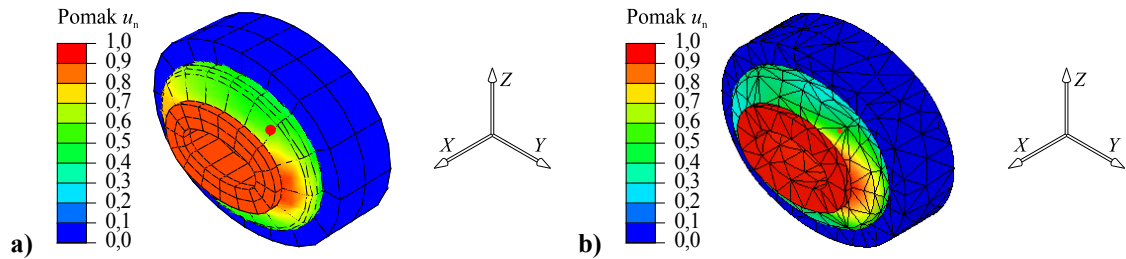
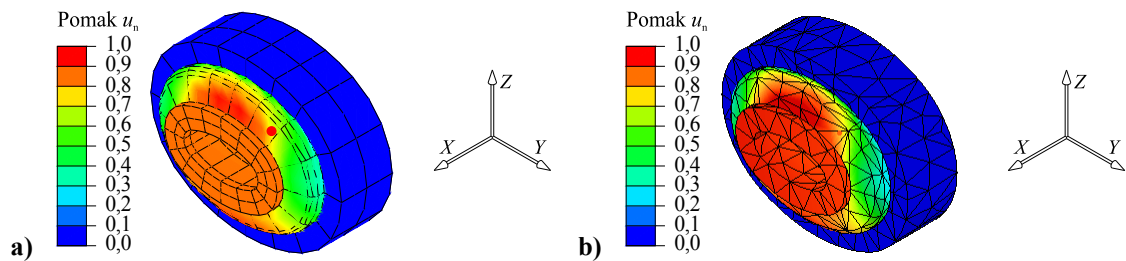
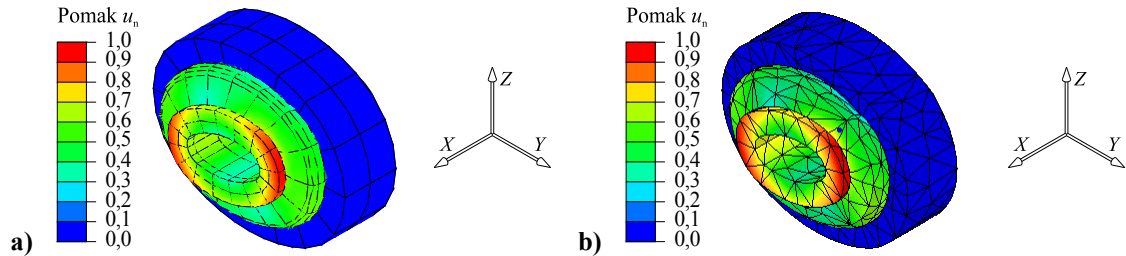
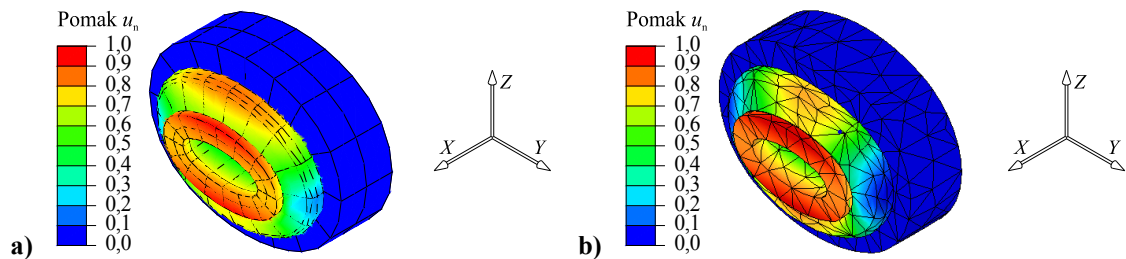
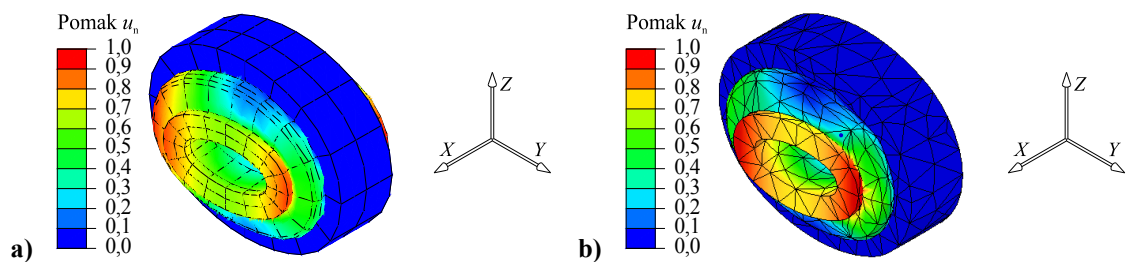
$$F_x = F_y = F_z = F_{\text{odb,max}} = 1\,000 \text{ N}. \quad (8.1)$$

$$M_x = M_y = M_z = M_{\text{odb,max}} = 125 \text{ N} \cdot \text{m} = 125\,000 \text{ N} \cdot \text{mm}. \quad (8.2)$$

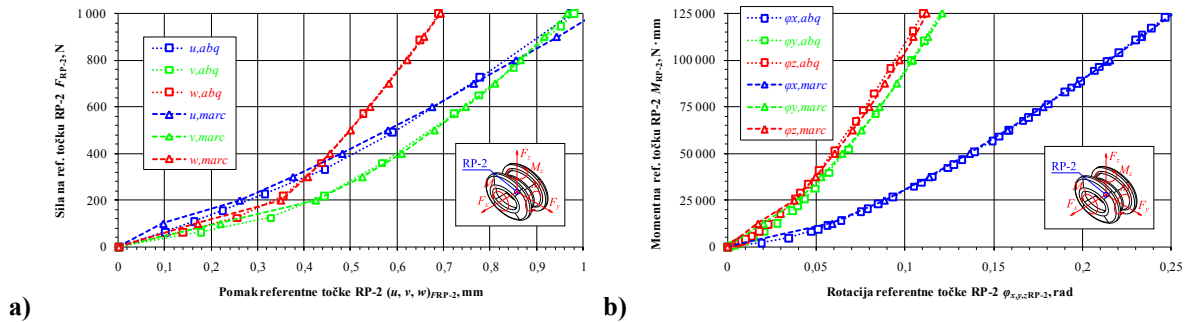
Slike na sljedećoj stranici (Slika 8.2. do Slika 8.7.) prikazuju deformirane oblike proračunskog modela u programskim paketima *Abaqus* i *SimDesigner* (*Marc eng. solver*, algoritam). Faktor uvećanja prikaza zbog velikih pomaka i deformacija iznosi  $k = 1$ . Vidljivo je da se modeli vizualno deformiraju vrlo slično, što je dobar dodatni pokazatelj sukladnosti proračunskih modela. Varijabla prikaza je normalizirani ukupni pomak  $u, v, w_n$ .<sup>50</sup>

Također su vidljive i određene razlike u načinu deformacije i pomaka za silu  $F_x$  (Slika 8.2.) te momente  $M_y$  (Slika 8.6.) i  $M_z$  (Slika 8.7.). U slučaju sile  $F_x$  (Slika 8.2. a), *Abaqus*), vidljivo je da se gumeni zglob pomiče zajedno s cijevi u smjeru osi  $x$  (*slip*), dok *Marc* proračunava da zglob ostaje nepomičan (*stick*). Slično je i u slučaju momenata  $M_y$  (Slika 8.6.) i  $M_z$  (Slika 8.7.), no Slika 8.8. prikazuje da navedene razlike nemaju velikog utjecaja na konačne rezultate numeričkih pomaka/zakreta referentne točke RP-2.

<sup>50</sup> Normalizirani pomak implicira da za maksimalni pomak uvijek vrijedi  $u_{n(\text{max})} = 1$ . U ovom slučaju, koherentna jedinica SI sustava za pomak je 1 mm, budući da su na taj način unešene mjere u CAD/CAE pakete. U slučaju momenata  $M_{x,y,z}$ , varijabla prikaza je također normalizirani pomak  $u_n$ , iz razloga što 3D konačni elementi nemaju stupanj slobode gibanja rotacije  $\varphi_{x,y,z}$ , što je općenita [1], kao i primijenjena formulacija [260] i [261].

Slika 8.2. Ukupni normalizirani maksimalni pomak  $u_n$ , sila  $F_x$ : a) Abaqus, b) MarcSlika 8.3. Ukupni normalizirani maksimalni pomak  $u_n$ , sila  $F_y$ : a) Abaqus, b) MarcSlika 8.4. Ukupni normalizirani maksimalni pomak  $u_n$ , sila  $F_z$ : a) Abaqus, b) MarcSlika 8.5. Ukupni normalizirani maksimalni pomak  $u_n$ , sila  $M_x$ : a) Abaqus, b) MarcSlika 8.6. Ukupni normalizirani maksimalni pomak  $u_n$ , sila  $M_y$ : a) Abaqus, b) MarcSlika 8.7. Ukupni normalizirani maksimalni pomak  $u_n$ , sila  $M_z$ : a) Abaqus, b) Marc

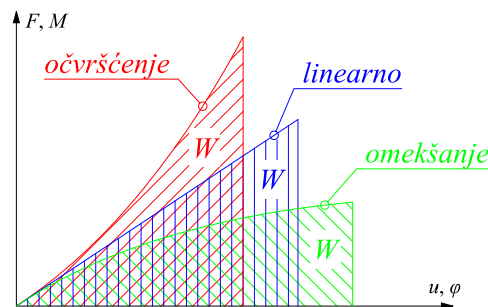
Slika 8.8. a) prikazuje usporedbu numerički izračunatih nelinearnih inkrementalnih pomaka  $u, v, w$  za tri komponente sile  $F_{x,y,z}$  u programskim paketima *Abaqus* i *Marc*, dok Slika 8.8. b) prikazuje usporedbu inkrementalnih zakreta  $\varphi_{x,y,z}$  kao posljedicu djelovanja momenata  $M_{x,y,z}$ . Usprkos gruboj diskretizaciji *Marc* CTETRA KE, vidljivo je vrlo dobro poklapanje.



Slika 8.8. Usporedba nelinearnih karakteristika gumenog zgloba: a)  $c_{x,y,z}$ , b)  $c_{\varphi_{x,y,z}}$

Bitno je uočiti beneficiju ovih proračunskih modela u činjenici da se i relativno grubom diskretizacijom mogu dobiti precizni rezultati i brza konvergencija u slučaju izračuna pomaka  $u, v, w$  (krutosti  $c$ ), kao i vlastite frekvencije  $f_n$ , što je već prikazano u radovima [54], [55], [56] i [59], a što je prednost koju ističe i Bathe u *MIT* predavanjima<sup>51</sup> [78].

U općem slučaju, karakteristika opruge može se definirati kao *progressivna*, *linearna* i *degresivna*, što shematski prikazuje Slika 8.9., gdje *progressivna* karakteristika implicira očvršćenje (eng. *hardening*), a *degresivna* karakteristika omekšanje (eng. *softening*) [13].



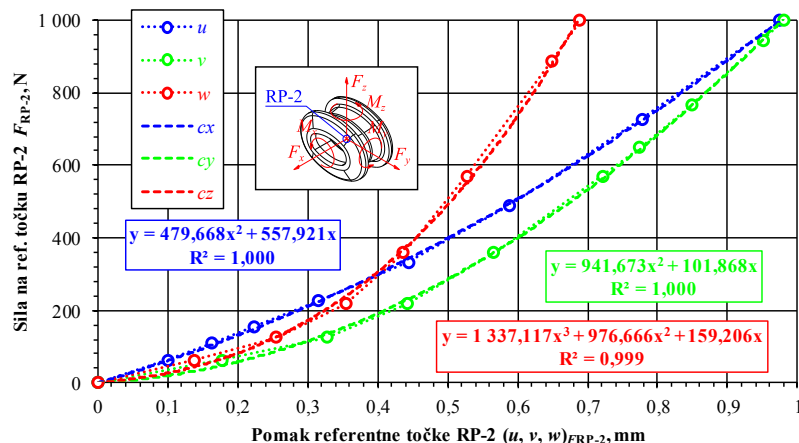
Slika 8.9. Karakteristika opruge: *progressivna*, *linearna*, *degresivna*

Energija opruge  $W$  može se napisati pomoću relacije analogne izrazu (4.20)

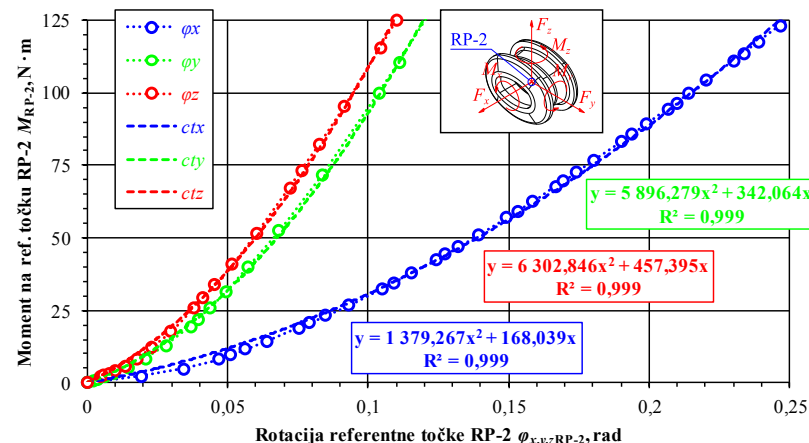
$$W = \int_0^u F \cdot ds, \text{ tj. } W = \int_0^\varphi M \cdot d\varphi. \quad (8.3)$$

Slika 8.8. prikazuje da su u razmatranom slučaju sve karakteristike opruge *progressivne*, tj. gumeni zglob s povećanjem opterećenja nelinearno pokazuje sve veću krutost.

<sup>51</sup> U slučaju proračuna velikih gradijenata naprezanja  $\sigma$ , potrebna je *znatno* finija mreža te proračunski model sporije konvergira prema točnom rješenju što je primjerice pokazano u radovima [57], [58], [59] i [63].

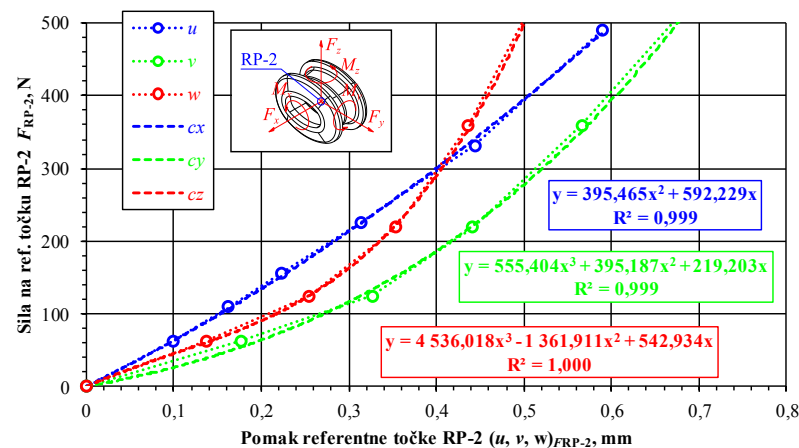


a)

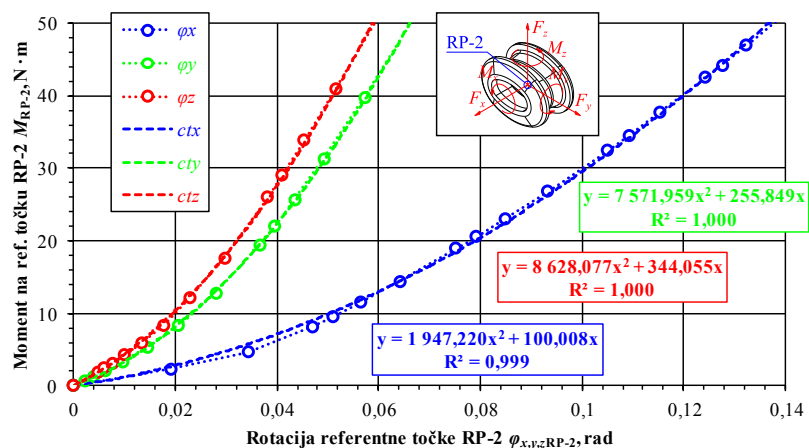


b)

Slika 8.10. Nelinearna krutost gumenog zgloba, *Abq*: a)  $F_{x,y,z,max} = 1\text{ kN}$ , b)  $M_{x,y,z,max} = 125\text{ kN}\cdot\text{mm}$



a)



b)

Slika 8.11. Nelinearna krutost gumenog zgloba, *Abq*: a)  $F_{x,y,z,max} = 500\text{ N}$ , b)  $M_{x,y,z,max} = 50\text{ kN}\cdot\text{mm}$

Slika 8.10. i Slika 8.11. prikazuju *progresivne* nelinearne karakteristike opruge gumenog zgloba gdje je vidljivo da se promjenom granica razmatranog *radnog područja* mijenjaju i vrijednosti *aproksimiranih* nelinearnih karakteristika krutosti  $c_{x,y,z}$  i torzijske krutosti  $c_{tx,y,z}$ .

Izračunata *progresivna* karakteristika gumene opruge (njem. *Gummifeder*) u skladu je s primjerice referentnom literaturom iz elemenata konstrukcija kao što je Decker [9] (hrv. izdanje, str. 140, Slika 156 a) i [10] (njem. izdanje, str. 284, Slika 14.1 a).

Radi konačne kontrole MKE proračunskih modela, generirana je Tablica 8.1. gdje su uspoređeni izračunati *maksimalni* pomaci u programskim paketima *Marc* i *Abaqus*.

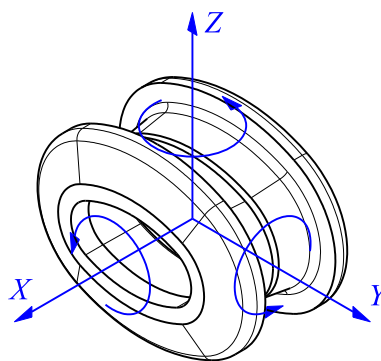
**Tablica 8.1. Usporedba *max* pomaka  $u_{Fx}$ ,  $v_{Fy}$  i  $w_{Fz}$  te zakreta  $\varphi_{Mx}$ ,  $\varphi_{My}$  i  $\varphi_{Mz}$  referentne točke RP-2**

$F_{\max} = 500 \text{ N}$	$u_{Fx \max}$ , mm	$v_{Fy \max}$ , mm	$w_{Fz \max}$ , mm
<i>Abaqus</i>	0,975	0,980	0,689
<i>Marc</i>	1,025	0,965	0,692
$E_{\text{rel,num}}$ , %	4,890	1,582	0,482
$M_{\max} = 125 \text{ N} \cdot \text{m}$	$\varphi_{Mx \max}$ , °	$\varphi_{My \max}$ , °	$\varphi_{Mz \max}$ , °
<i>Abaqus</i>	14,308	6,952	6,314
<i>Marc</i>	14,370	6,927	6,421
$E_{\text{rel,num}}$ , %	0,426	0,362	1,659

Iz gornje tablice, vidljivo je dobro numeričko podudaranje maksimalnih konačnih rezultata, gdje su razlike  $E_{\text{rel}}$  manje od inženjerski značajnih 5 %, usprkos gruboj diskretizaciji *Marc* proračunskog modela. Izračunate inkrementalne pomake i zakrete moguće je upotrijebiti za proračun konstanti krutosti  $c_{x,y,z}$  i torzijske krutosti  $c_{tx,y,z}$  prema izrazima

$$c_{x,y,z} = F_{x,y,z} / u_{x,y,z}, \text{ N/mm}, \quad c_{tx,y,z} = M_{x,y,z} / \varphi_{x,y,z}, \text{ N} \cdot \text{mm/rad}, \quad (8.4)$$

gdje su u ovom slučaju  $F$  i  $M$  proizvoljno zadani sila i moment, a  $u$  i  $\varphi$  numerički izračunat pomak ili zakret referentne točke RP-2, s obzirom na koordinatne osi. Radi lakše vizualne i fizikalne interpretacije dobivenih rezultata, Slika 8.12. prikazuje globalni koordinatni sustav.



**Slika 8.12. Koordinatni sustav komponenti krutosti gumenog zgloba**

Statički pomak  $u,v,w$ , ili zakret  $\varphi_{x,y,z}$  za danu silu  $F_{x,y,z}$  ili moment  $M_{x,y,z}$  može se orijentacijski izračunati prema izrazima dobivenih aproksimacijskih polinoma koje prikazuju Slika 8.10. i Slika 8.11., ili se vrijednosti mogu dobiti linearnom interpolacijom između numerički inkrementalno dobivenih pomaka i zakreta u programskom paketu *Abaqus*.

## 9. Zaključak

U radu je provedena nelinearna numerička analiza krutosti gumenog zgloba rastojnika-prigušivača pomoću metode konačnih elemenata.

Rad je orijentiran formiranju numeričkog proračunskog modela koji pomoću MKE daje odgovor na pitanje o konstantama krutosti gumenog zgloba rastojnika-prigušivača. S tom namjerom, provedene su brojne numeričke simulacije i testiranja proračunskih modela kroz verifikacije i validacije, korištenjem više programskih paketa te variranjem i kombiniranjem tipova (1D, 2D i 3D), kao i gustoća mreža konačnih elemenata.

Rješenja koja se dobivaju pomoću MKE su približna, stoga su postavljena kritička pitanja njihove (dovoljne) točnosti, stabilnosti i konvergencije. Pod pojmom točnosti, podrazumijeva se odstupanje približnog od točnog rješenja, dok se pod stabilnošću podrazumijeva stabilnost u numeričkom postupku pri određivanju rješenja. Dokazom konvergencije daje se odgovor i na pitanje o stabilnosti proračunskog modela, budući da je za konvergentno rješenje numerički postupak redovito i stabilan. Uz linearnu formulaciju konačnog elementa, konvergencija se odnosi isključivo na neovisnost numeričkog rješenja o gustoći mreže, tj. formiranje dovoljno kvalitetne i guste mreže konačnih elemenata koja može dati dovoljno točno rješenje. Uz nelinearnu formulaciju konačnog elementa, konvergencija se odnosi na inkrementalno-iterativni postupak koji mora biti definiran tako da metoda rješavanja uopće može konvergirati uz zadani dozvoljeni kriterij greške, a u suprotnom divergira. Naravno da obje konvergencije moraju biti postignute u slučaju da se numerički rezultati nelinearnog modela mogu smatrati uvjetno točnima, dok bez ispunjenja konvergencije, komentar o točnosti postaje trivijalan. Kako kompleksnost proračunskog modela raste, tako i numerička konvergencija inkrementalno-iterativnog postupka postaje osjetljivija na promjene i definicije unutar modela te se može dogoditi da promjenom samo jednog parametra simulacija divergira te na kraju puca (npr. primjena metode Lagrangeovih multiplikatora umjesto *penalty* metode pri kontaktu hiperelastičnog materijala). Proračunski model ovog rada objedinjuje sve tri vrste nelinearnosti (geometrijska, materijalna te kontakt uz trenje) što uvelike doprinosi mogućnosti numeričke pogreške, kao i velikih utjecaja malenih promjena ulaznih parametara na konačne rezultate. Uz ispravan odabir i implementaciju numeričke metode, mogu se dobiti vrlo točna rješenja problema, no rješenja dobivena na ovakav način nužno je potrebno usporediti s rezultatima referentnih eksperimentalnih mjerenja te rješenjima analitičkih metoda kad god je to moguće.

U najvećem broju slučajeva inženjerske prakse, linearni proračun sasvim je dostatan te dovoljno robustan. Ponekad, kao u slučaju ovog diplomskog rada, linearni proračun nije prikladan, a tada je potrebno posegnuti za nelinearnom analizom. Analogno Timoshenko i Euler-Bernoulli gredi, proračun je u slučaju nelinearnog proračuna točniji, no često i znatno dugotrajniji, a dužnost je analitičara načiniti valjanu procjenu kojom se metodom poslužiti uz optimalni omjer računalne učinkovitosti i točnosti, koja je ujedno i najbitniji kriterij.

U radu nije postignuto dobro poklapanje eksperimentalnih i numeričkih rješenja što je posljedica brojnih pojednostavnjenja osmišljenih i implementiranih u svrhu štednje ograničenih računalnih resursa. Glavno neslaganje očituje se iz eksperimentalno (statički) mjenog histereznog prigušenja gume koje je proporcionalno deformaciji, što kvazistatički numerički model (*pseudovrijeme* uvijek iznosi jedan, tj.  $t_p = 1$ ) ne može opisati. Model je pojednostavnjeno aproksimiran kvazistatično radi nedostataka referentnih podataka. To implicira da je budući numerički model potrebno definirati u dinamičkoj domeni te definirati viskoelastične i prigušne karakteristike gume, kao i puzanje, omekšanje (Mullins) itd. Nadalje, jednostavni Coulombov kontaktni model pokazao se nedovoljno detaljnim za opis stvarne regresivne karakteristike krutosti rastojnika-prigušivača, što implicira da je eksperimentalnim mjerenjem potrebno odrediti dodatne parametre potrebne za korektan numerički opis kontakta gume i aluminijskog rastojnika-prigušivača. Kontaktni problem u 3D okruženju vrlo je zahtjevan za korektan numerički opis uz ovako kompleksnu geometriju koja rezultira visoko izraženim nelinearnostima. Nelinearnosti uvećavaju mogućnost numeričke pogreške koja je iskustveno proporcionalna kompleksnosti proračunskog modela. Također, moguće su i nesukladnosti nelinearnih hiperelastičnih karakteristika EPDM gume koje su u nedostatku detaljnijih eksperimentalnih mjerenja djelomice iskustveno procijenjene, a izgledno je da znatno variraju u praksi (što je vidljivo primjerice iz tvrdoće prema Shoreu koja očekivano i uz mjerenje varira  $\pm 5$ ). Moguće je da i ostali efekti koji nisu uzeti u obzir (razvijena toplina prilikom eksploatacije/testiranja, atmosferski uvjeti itd.) imaju određeni utjecaj na stvarno ponašanje gumenog zgloba, a time i cijelog rastojnika-prigušivača.

Numerička rješenja, kako je prikazano brojnim riješenim primjerima uspoređenim s referentnim rješenjima, su rijetko kriva po definiciji (osim u slučaju grube greške analitičara pri unosu podataka), no pri dobivanju nedovoljno točnih rješenja, obično nisu definirani dovoljno detaljni proračunski modeli te su pritom zanemareni efekti koji imaju značajan utjecaj na konačne rezultate, što je slučaj prikazan u ovom radu.

Iz riješenih primjera je vidljivo da su algoritmi rješavanja gometrijske nelinearnosti (Newton-Raphson) kao i materijalne (hiperelastični konstitutivni modeli) u programskim paketima *Abaqus* i *Marc* vrlo slični te da numerička rješenja variraju minimalno. Razlog određenih razlika u numeričkim rezultatima proračunskih modela rastojnika-prigušivača kreiranih u programskim paketima *Abaqus* i *Marc*, leži u korištenju različitih konačnih elemenata (heksaedri su generalno preferirani kao superiorni naspram pentaedara i tetraedara), kao i drugačijeg algoritma rješavanja problema kontakta koji je karakterističan za svaki numerički programski paket. Kontaktni problem je u numeričkom smislu vrlo osjetljiv na nepravilnost geometrije, prodiranje geometrije i čvorova konačnih elemenata jedne kontaktne plohe u drugu (namjerno – u vidu preklopa, ili slučajno – u vidu nedovoljno detaljno rafinirane geometrije ili mreže konačnih elemenata) što se očituje u navedenoj različitosti rezultata. Također, na kontaktni problem u stvarnosti znatno utječe prednaprezanje pri montaži koje može biti veće ili manje ovisno o preklopu gume i aluminijsa. Nadalje, bitne su i tolerancije dosjednih dijelova te statističko rasipanje vrijednosti unutar više uzoraka rastojnika-prigušivača za što bi bilo potrebno eksperimentalno testirati znatno veći broj uzoraka te statistički uzeti aritmetičku sredinu kao referentni rezultat. Rubni uvjeti proračunskog modela su također upitni, budući da uzbudna sila na eksperimentalnom modelu nije konzervativna, što je opet numerički teško egzaktno definirati.

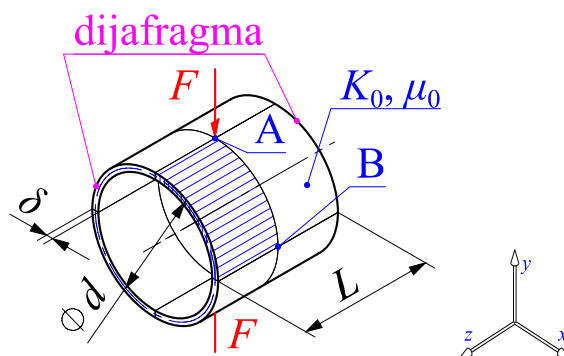
Za poboljšanje točnosti ovog modela, svakako su potrebna dodatna statička/dinamička eksperimentalna mjerenja rastojnika-prigušivača, dodatna mjerenja EPDM gume u svrhu definiranja detaljnog *S-e* dijagrama za jednoosno (uz obavezni tlačni dio eksperimenta, a posebno pazeći da trenje ne utječe na rezultat mjerenja) i dvoosno stanje opterećenja te čisto smicanje (tj. ravninsko stanje deformacije), kao i volumni test za potvrdu Poissonovog faktora (tj. nestlačivosti). Poželjno je i utvrđivanje značaja Mullinsovog efekta razmatrane gume, te mjerenje i definiranje parametara viskoelastičnosti i prigušenja u svrhu modeliranja petlje histereze. Apsolutno je nužno definirati i prikladni kontaktni model koji može dovoljno točno opisati stvarnu dodirnu interakciju gume i aluminijsa.

Beneficijski faktori ovog proračunskog modela su relativna jednostavnost i brza konvergencija u slučaju proračuna krutosti (pomaka i rotacija). Usprkos očitih nedostataka usporedbom korištenog proračunskog modela s referentnim eksperimentalnim rezultatima, uvidom u rezultate iz ovog rada, mogu se procijeniti i kao orijentacijske vrijednosti koristiti nelinearne vrijednosti komponenata statičke krutosti gumenog zgloba rastojnika-prigušivača.



## 10. Dodatak A: Tankostjeni cilindar s dijafragmama

Tankostjeni gumeni (neo-Hooke) cilindar s dijafragmama opterećen je simetrično dvjema koncentriranim silama  $F$  (Slika 10.1.). Pretpostavljeni su veliki pomaci i deformacije.



Slika 10.1. Dodatak A: Tankostjeni cilindar s dijafragmama

Tablica 10.1. prikazuje zadane geometrijsko materijalne karakteristike.

Tablica 10.1. Dodatak A, zadani parametri

$\varnothing d$ , mm	$L$ , mm	$\delta$ , mm	$E_0$ , MPa	$\nu$	$F_y$ , N
200	200	1	30 000	0,3	25 000

Primjer je preuzet prema lit. Pascon/Coda [239], Sansour/Kollmann [240], Campello/Pimenta/Wriggers [246] i Coda/Paccola [247], a određeni su pomaci točaka A i B.

Izraz za nužni uvjet tanke ljuske prema [3] glasi

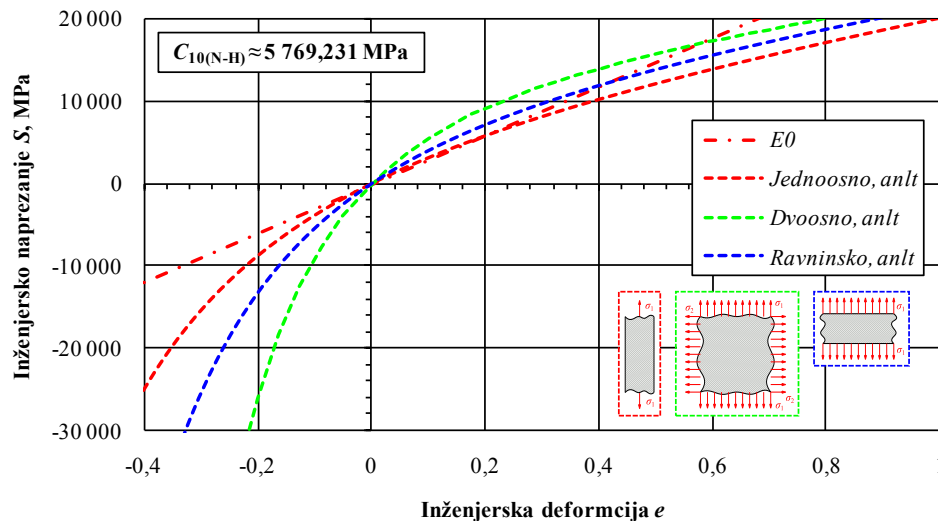
$$\frac{\delta}{r} \leq \frac{1}{20}, \text{ a uz } r = \varnothing d/2 \text{ vrijedi nejednakost } \frac{1}{100} < \frac{1}{20}, \quad (9.1)$$

čime je uvjet zadovoljen, a proračunski model može biti diskretiziran ljuskastim elementima. Koristeći izraze (4.14), (4.15), (4.23) i (4.41), izračunati su potrebni parametri za numeričku analizu (Tablica 10.2.) od kojih su u programski paket *Abaqus* unešeni  $C_{10}$  i  $D_1$ .

Tablica 10.2. Dodatak A, rezultati ulaznih parametara

$K_0$ , MPa	$\mu_0 (G_0)$ , MPa	$C_{10(N-H)}$ , MPa	$D_1$ , MPa <sup>-1</sup>
25 000	11538,46154	5769,230769	0,00008

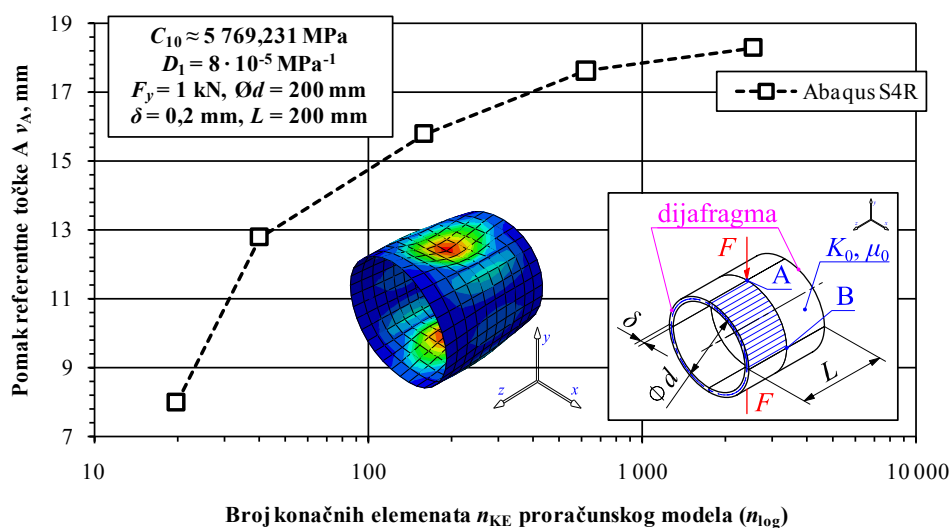
Neo-Hooke  $S$ - $e$  dijagram (Slika 10.2.) konstruiran je prema izrazima (4.40), (5.64) i (5.65), gdje je u izrazima (5.64) i (5.65) uzeto u obzir da je materijalna konstanta  $C_{01} = 0$ . Pri rješavanju problema, korišteni su ljuskasti S4R elementi prvog reda s reduciranom integracijom. *Abaqus* u slučaju korištenja hiperelastičnog materijala u kombinaciji s ljuskastim konačnim elementima ima ograničenje korištenja isključivo elemenata prvog reda.



Slika 10.2. Neo-Hooke  $S$ - $e$  dijagram materijala proračunskog modela cilindra

Budući da je proračunski model tri puta simetričan prema geometriji i opterećenju, korištena je osmina modela (Slika 10.1., plava šrafura paralelna s osi  $z$ ). Primijenjeni su rubni uvjeti simetrije na presječnim ravninama, a sila  $F$  je podijeljena faktorom  $k = 4$ . Rubni uvjeti dijafragme su za ovaj slučaj  $u = v = 0$  te  $w \neq 0$  po cijelom obodu prema [3].

Zbog nestabilnosti prilikom korištenja mreže neodgovarajuće gustoće pri tako velikim pomacima (Slika 10.4.), konvergencija je prethodno ispitana (Slika 10.3. i Tablica 10.3.) za manji pomak pod djelovanjem sile proizvoljno odabranog iznosa  $F = 1$  kN.



Slika 10.3. Konvergencija proračunskog modela tankostjenog cilindra s dijafragmama

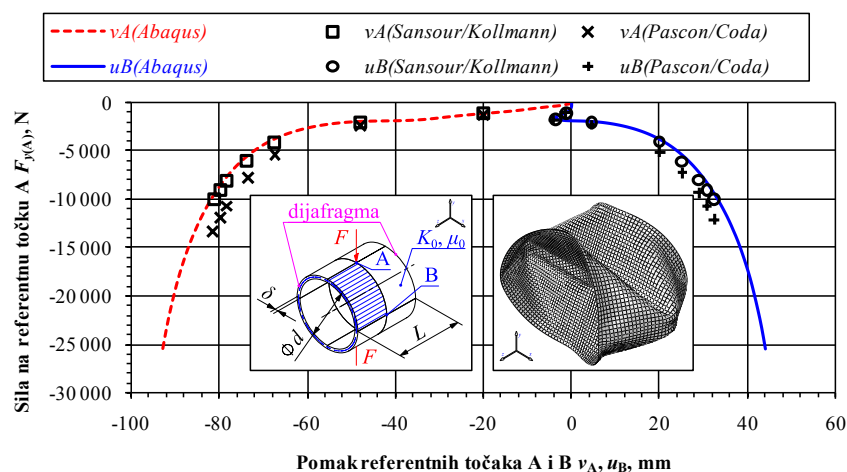
Pri ispitivanju konvergencije za iznose veće sile  $F$ , simulacija u programskom paketu *Abaqus* je prekinuta zbog *pseudo* geometrijskih nestabilnosti, koje *nestaju* u slučaju prikladne diskretizacije. Problem je moguće riješiti pomoću već pojašnjenog Riksovog algoritma.

Iz dijagrama (Slika 10.3.) je vidljiva monotona konvergencija proračunskog modela gdje je za konačni proračunski model odabrana najgušća mreža ( $n_{KE} = 2\,520$ ). Tablica 10.3. prikazuje detalje svake korištene mreže, a relativna greška  $E_{rel}$ , u nedostatku prikladnog referentnog rješenja, definirana je kao razlika rezultata svake susjedne diskretizacije analogno izrazu (7.3) te metodologiji primjera V, poglavlje 5.3.2. (*Cookova membrana*).

Tablica 10.3. Dodatak A: usporedba rezultata

Abaqus S4R						
Mreža	$h_{KE}$ , mm	$n_{KE}$	$n_{\check{C}V}$	$n_{SSG}$	$v_{RP-I(MKE)}$ (neo-Hooke), mm	$E_{rel}$ , %
I	40	20	12	72	7,977	129,305
II	20	40	54	324	12,782	43,101
III	10	160	187	1 122	15,801	15,766
IV	5	620	672	4 032	17,628	3,765
V	2,5	2 520	2 624	15 744	18,292	0,000

Konačna mreža ima 15 774 SSG te je testirana u odnosu na referentno rješenje prema [240] (Sansour/Kollman, 2000.). Slika 10.4. prikazuje putanju ravnoteže, tj. pomake referentnih točaka A i B u ovisnosti o zadanoj inkrementalnoj sili  $F_y$ .

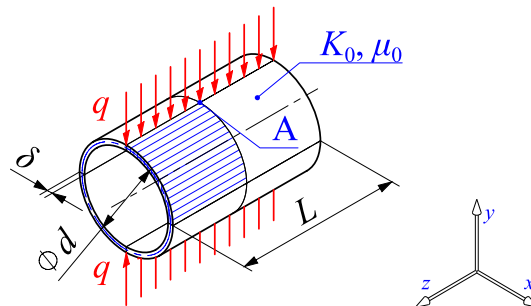


Slika 10.4. Ovisnost inkrementalnih pomaka  $v_A$ ,  $u_B$  o sili  $F_{y(A)}$

Na slici je vidljivo vrlo dobro poklapanje rezultata s referentnim numeričkim rješenjem [240] čime su verificirani ljuskasti S4R elementi i metodologija rješavanja problema u programskom paketu *Abaqus*. Bitno je napomenuti da su autori Pascon/Coda [239] dobili nešto manje pomake u svojem radu, makar im je trend krivulja korektan. Veća krutost konstrukcije je u njihovom slučaju vjerojatno posljedica prekonzervativnog postavljanja rubnih uvjeta na dijafragmu gdje su koristili dodatne RU  $\varphi_x = \varphi_y = 0$ . Također, bitan komentar je da se relacija  $G_0 = 2 \cdot C_{10}$  prema (4.41) ne bi smjela koristiti bez uzimanja u obzir izraza (4.14), tj. modula elastičnosti  $E_0$ , budući da Poissonov faktor  $\nu = 0,3 \neq 0,5$  što su pri izračunu konstitutivnog parametra materijala  $C_{10}$  navedeni autori [239] zanemarili.

## 11. Dodatak B: Tankostjeni cilindar

Tankostjeni gumeni (neo-Hooke) cilindar opterećen je simetrično linijskim opterećenjem  $q$  (Slika 11.1.). Pretpostavljeni su veliki pomaci i deformacije.



Slika 11.1. Dodatak B: Tankostjeni cilindar

Tablica 11.1. prikazuje zadane geometrijsko materijalne karakteristike.

Tablica 11.1. Dodatak B: zadani parametri I

$\text{Ø}d$ , mm	$L$ , mm	$\delta$ , mm	$K_0$ , MPa	$\mu_0 (G_0)$ , MPa	$F_y$ , N
18	30	0,2	24 000	6 000	34

Primjer je preuzet prema lit. Pascon/Coda [239], Sze/Zheng/Lo [241], Büchter/Ramm/Roehl [244] i Hauptmann/Schweizerhof/Doll [249], a određen je pomak točke A. Provjeren je nužni uvjet tanke ljuske prema [3], analogno izrazu (9.1), gdje je uz izraz  $\delta/r = 0,2/9 = 1/45 < 1/20$  vidljivo da je kriterij zadovoljen. Bitno je napomenuti da neki autori prema originalnom članku koriste i alternativno zadane materijalne parametre [244], kao što prikazuje Tablica 11.2., što utječe na iznos materijalnih parametara  $C_{10}$  i  $D_1$  korištenih pri numeričkoj analizi. Tablica 11.3. i Tablica 11.4. prikazuju izračunate vrijednosti, ovisno o tome koji se ulazni parametri koriste, što utječe na konačni iznos numeričkog rješenja pomaka. U ovom proračunu, korišteni su inicijalni parametri (Tablica 11.1.) preračunati sukladno izrazima (4.14), (4.15), (4.23) i (4.41) uz  $q_y = F_y/L \approx 1,333 \text{ N/mm}$  (Tablica 11.3.).

Tablica 11.2. Dodatak B: zadani parametri II

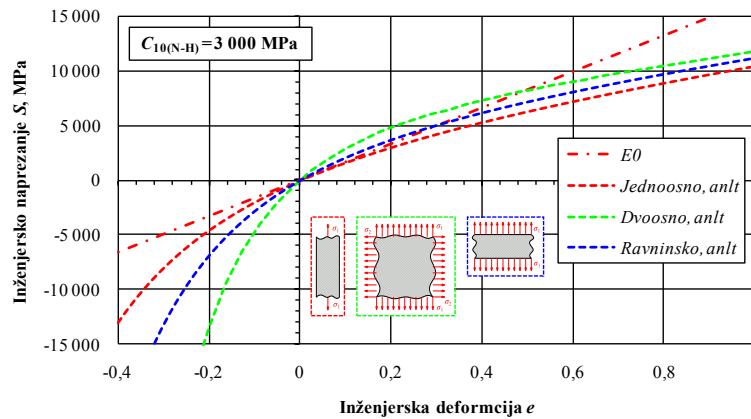
$\text{Ø}d$ , mm	$L$ , mm	$\delta$ , mm	$E_0$ , MPa	$\nu$	$F_y$ , N
18	30	0,2	16 800	0,4	34

Tablica 11.3. Dodatak B: rezultati prema parametrima I

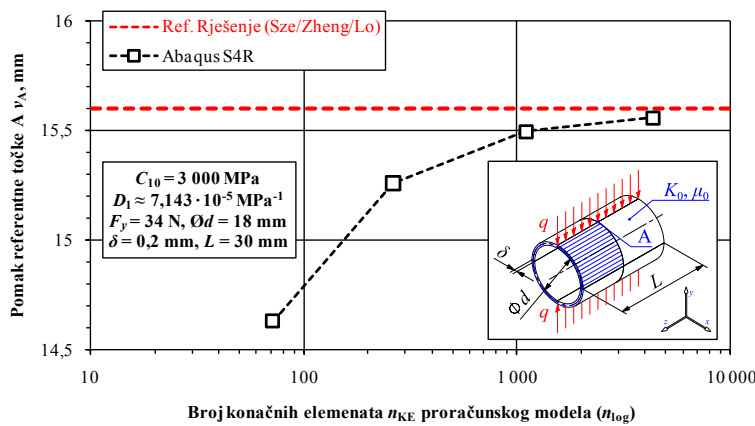
$E_0$ , MPa	$\nu$	$C_{10(N-H)}$ , MPa	$D_1$ , MPa <sup>-1</sup>	$q_y$ , N/mm
16615,38462	0,384615385	3 000	8,33333E-05	1,133333333

Tablica 11.4. Dodatak B: rezultati prema parametrima II

$K_0$ , MPa	$\mu_0 (G_0)$ , MPa	$C_{10(N-H)}$ , MPa	$D_1$ , MPa <sup>-1</sup>
28 000	6 000	3 000	7,14286E-05



Slika 11.2. Neo-Hooke  $S$ - $e$  dijagram materijala proračunskog modela cilindra



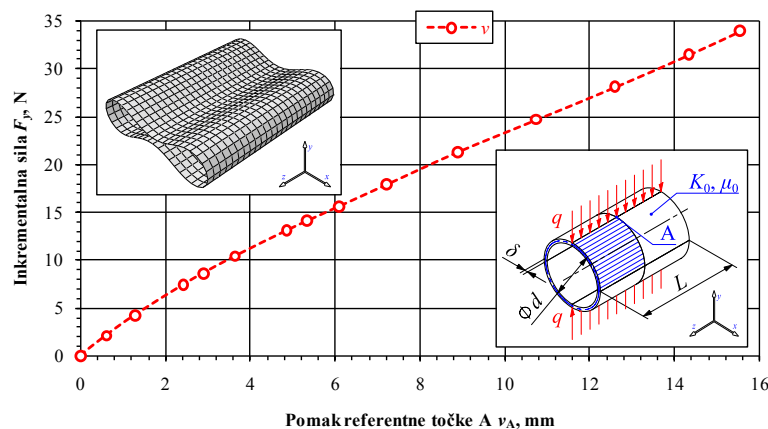
Za razliku od referentne literature [239], [241], [244] i [249], problem je riješen koristeći tri ravnine simetrije (osmina PM) te množeći pomak točke A faktorom  $k = 2$ , a potom i s dvije ravnine simetrije. Rezultati su *jednaki*.

Slika 11.3. Konvergencija proračunskog modela tankostjenog cilindra

Vidljivo je vrlo dobro poklapanje rješenja s referentnim [241] te konvergencija PM.

Tablica 11.5. Dodatak B: usporedba rezultata

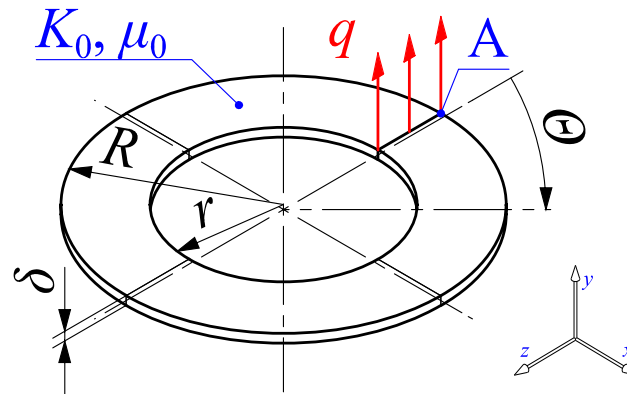
Abaqus S4R							
Mreža	$h_{KE}$ , mm	$n_{KE}$	$n_{\check{C}V}$	$n_{SSG}$	$v_{RP-I(MKE)}$ (neo-Hooke), mm	Ref. Rješenje (Sze/Zheng/Lo)	$E_{rel}$ , %
I	2,5	72	91	546	14,629	15,600	6,636
II	1,25	264	299	1 794	15,259		2,236
III	0,625	1 104	1 175	7 050	15,497		0,664
IV	0,3125	4 320	4 459	26 754	15,557		0,278



Slika 11.4. Ovisnost inkrementalnog pomaka  $v_A$  o sili  $F_y$

## 12. Dodatak C: Tankostjena usječena prstenasta ploča

Tankostjena usječena gumena (neo-Hooke) ploča opterećena je površinskim opterećenjem  $q$  na rubu (Slika 12.1.). Pretpostavljeni su veliki pomaci i deformacije.



Slika 12.1. Dodatak C: tankostjena usječena prstenasta ploča

Tablica 12.1. prikazuje zadane geometrijsko materijalne karakteristike.

Tablica 12.1. Dodatak C, zadani parametri

$R$ , mm	$r$ , mm	$\delta$ , mm	$K_0$ , MPa	$\mu_0 (G_0)$ , MPa	$q_y$ , MPa
10	6	0,03	7 000 000	10 500 000	6

Primjer je preuzet prema lit. Pascon/Coda [239], Sansour/Kollmann [240], Korelc/Solinc/Wriggers [242], Basar/Ding [243], Büchter/Ramm [245], Campello/Pimenta/Wriggers [246], Coda/Paccola [247], Petchsasithon/Gosling [248] i Wriggers/Gruttmann [250]. Iz velikog broja navedene literature, vidljivo je da je ovaj problem popularan te često korišten verifikacijski (eng. *Benchmark*) primjer. Budući da različiti autori variraju mjerne jedinice (mm/m, MPa/Pa) te faktor opterećenja  $q_i$ , kao referentni verifikacijski rezultat preuzeta su samo rješenja prema Pascon/Coda [239] i Korelc/Solinc/Wriggers [242]. Postoji moguća nesukladnost u nominalnim iznosima referentnih podataka, budući da autori Pascon/Coda [239] navode opterećenje iznosa  $q = 6$  MPa, dok autori Korelc/Solinc/Wriggers [242] navode opterećenje iznosa  $q = 6,67$  MPa, što nije zanemariva razlika, no rješenja pomaka su im jednakog iznosa  $v_A \approx 10,27$  mm, čime je narušeno načelo sljedivosti te ponovljivosti. Budući da razmatrani model izgledom podsjeća na *prsten*, no malenom dimenzijom debljine stijenke  $\delta$  implicira da je riječ o *kružnoj ploči*, potrebno je provjeriti o kojem je tijelu točno riječ. Prema [3], izraz za nužni uvjet da je tijelo prsten glasi

$$\frac{1}{3} < \frac{\delta}{R-r} = \frac{0,03}{10-6} = \frac{3}{400} < 3, \text{ te } 3 < \frac{R+r}{2(R-r)} = \frac{10+6}{2(10-6)} = 2 < 10, \quad (9.2)$$

što očito nije *ni približno* ispunjeno. Nužni uvjet tanke ploče provjeren je prema [3], analogno izrazu (9.1), gdje je uz izraz  $\delta/R = 0,03/10 = 3/1\ 000 \leq 1/10$  vidljivo da je kriterij zadovoljen, a proračunski model može biti diskretiziran ljuskastim S4R konačnim elementima. Koristeći izraze (4.14), (4.15), (4.23) i (4.41), izračunati su potrebni parametri za numeričku analizu (Tablica 12.2.) od kojih su u programski paket *Abaqus* unešeni  $C_{10}$  i  $D_1$  te  $q_{yF}$ .

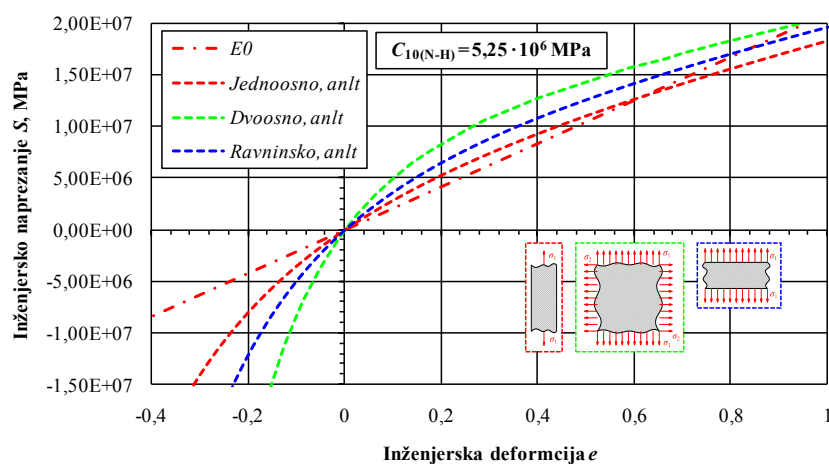
Tablica 12.2. Dodatak C, rezultati ulaznih parametara

$E_0$ , MPa	$\nu$	$C_{10(N-H)}$ , MPa	$D_1$ , MPa <sup>-1</sup>	$q_{ly}$ , N/mm	$q_{yF}$ , N
21 000 000	0	5 250 000	2,85714E-07	0,18	0,72

Opterećenje  $q$  u programskom paketu *Abaqus* nije moguće zadati kao površinsko opterećenje u N/mm<sup>2</sup> (MPa) na *rubu* ljuskastog elementa, već ga je moguće definirati kao linijsko opterećenje  $q_{ly}$  (u programskom paketu *Abaqus* eng. *Shell edge load*) transformacijom  $q_{ly} = q_l \cdot \delta = 6 \cdot 0,03 = 0,18$  N/mm, ili silu  $q_{yF}$  koja djeluje na točku (u programskom paketu *Abaqus* eng. *Concentrated force*) transformacijom  $q_{yF} = q_{ly} \cdot (R - r) = 0,18 \cdot (10 - 6) = 0,72$  N.

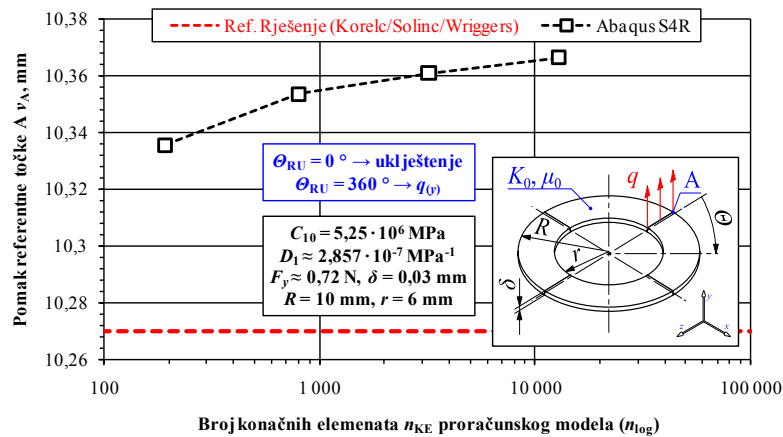
U ovom slučaju, opterećenje je unešeno silom  $q_{lF}$  koja djeluje u razmatranoj točki A. Točka A definirana je kao referentna točka (eng. *Reference Point*) i kinematičkom je vezom povezana s linijom na koju djeluje opterećenje (*Abaqus* opcija eng. *Coupling, Distributing*).

Neo-Hooke  $S$ - $e$  dijagram (Slika 12.2.) konstruiran je prema izrazima (4.40), (5.64) i (5.65), gdje je u izrazima (5.64) i (5.65) uzeto u obzir da je materijalna konstanta  $C_{01} = 0$ .



Slika 12.2. Neo-Hooke  $S$ - $e$  dijagram materijala proračunskog modela prstenaste ploče

Tijelo je tri puta simetrično prema geometriji, no nema simetrije prema opterećenju, stoga je proračunski model jednak početnom. Rubni uvjeti zadani su na liniji sječenja ploče (Slika 12.1.) i za kut  $\Theta = 0$  glase  $u = v = w = \varphi_x = \varphi_y = \varphi_z = 0$  (RU uklještenja), dok za periodični kut  $\Theta = 2\pi$  vrijedi uvjet opterećenja  $q = q_y = 6$  MPa, tj.  $q_{yF} = 0,72$  N.



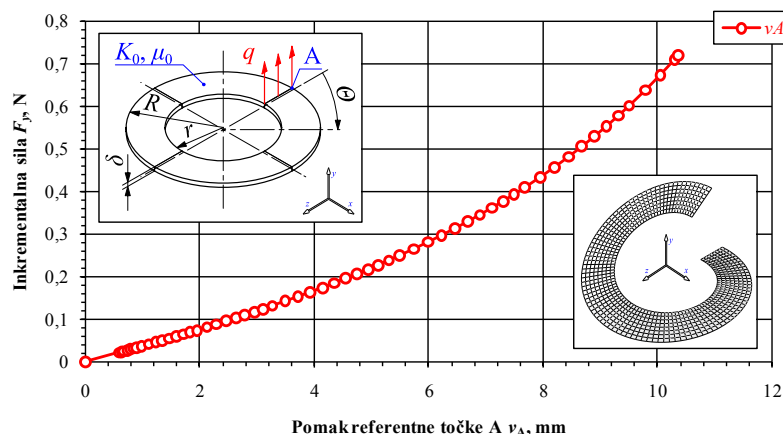
Slika 12.3. Konvergencija proračunskog modela tankostjene usječene prstenaste ploče

Slika 12.3. i Tablica 12.3. prikazuju konvergenciju proračunskog modela. Prema dijagramu (Slika 12.3.) je vidljivo da proračunski model konvergira monotono, ali višim vrijednostima od referentnih Korelc/Solinc/Wriggers [242]. Uvidom u rezultate relativne greške  $E_{rel}$  koje prikazuje Tablica 12.3., vidljivo je da su greške zanemarive ( $E_{rel} < 1\%$ ).

Tablica 12.3. Dodatak C, usporedba rezultata

Abaqus S4R							
Mreža	$h_{KE}$ , mm	$n_{KE}$	$n_{\dot{C}V}$	$n_{SSG}$	$v_{RP-1(MKE)}$ (neo-Hooke), mm	Ref. Rješenje (Korelc/Solinc/Wriggers)	$E_{rel}$ , %
I	1	192	245	1 470	10,336	10,270	-0,635
II	0,5	800	908	5 448	10,354		-0,807
III	0,25	3 200	3 417	20 502	10,361		-0,878
IV	0,125	12 800	13 233	79 398	10,367		-0,931

Očekivani razlozi greške nalaze se prvenstveno u mogućoj, već napomenutoj nesukladnosti ulaznih podataka, kao i mogućnosti drugačijeg definiranja i proračuna parametara materijala  $C_{10}$  i  $D_1$ , koji nigdje u navedenoj literaturi nisu eksplicitno izraženi.

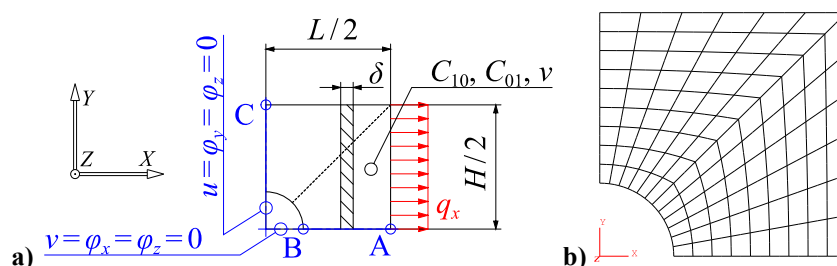
Slika 12.4. Ovisnost inkrementalnog pomaka  $v_A$  o sili  $F_y$ 

Slika 12.4. prikazuje putanju revnoteže razmatranog problema pomaka ruba A prstenaste ploče gdje je vidljiva nelinearna ovisnost inkrementalnog pomaka  $v_A$  o sili  $F_y$ .



### 13. Dodatak D: Membrana s kružnim otvorom

Slika 13.1. prikazuje četvrtinu proračunskog modela membrane od nestlačivog hiperelastičnog materijala (gume) opterećenog linijskim opterećenjem  $q_x$ , a određeni su apsolutni pomaci  $|u|$  i  $|v|$  točaka A, B i C. Pretpostavljeni su veliki pomaci i deformacije.



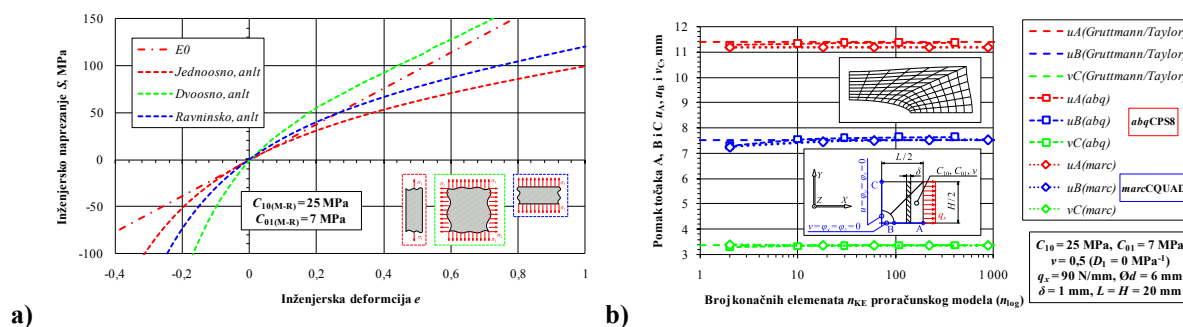
Slika 13.1. Dodatak D: a) četvrtina proračunskog modela, b) mreža konačnih elemenata

Tablica 13.1. prikazuje zadane geometrijsko materijalne karakteristike.

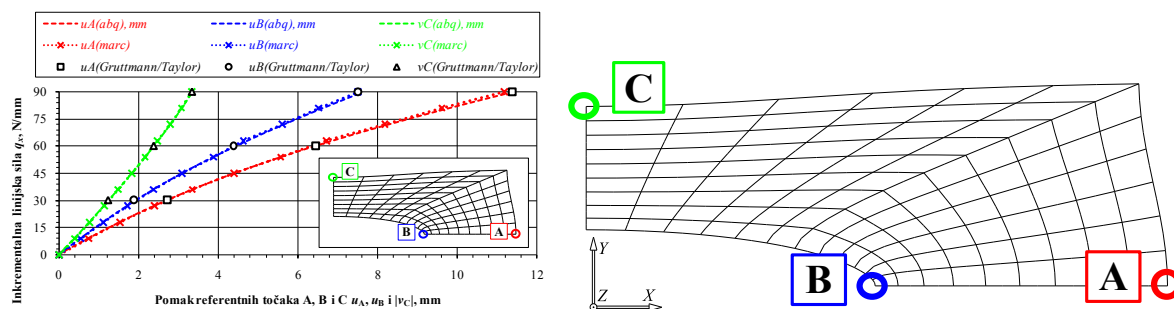
Tablica 13.1. Dodatak D, zadani parametri

$\varnothing d$ , mm	$H = L$ , mm	$\delta$ , mm	$C_{10(M-R)}$ , MPa	$C_{01(M-R)}$ , MPa	$\nu$	$q_x$ , N/mm
6	20	1	25	7	0,5	90

Primjer je preuzet prema literaturi [252] do [256]. Slika 13.2. a) prikazuje  $S$ - $e$  dijagram M-R modela, dok Slika 13.2. b) prikazuje konvergencije pomaka točaka A, B i C gdje je vidljivo da oba proračunska modela konvergiraju već za prvu mrežu ( $E_{rel} < 4\%$ ) prema referentnom rješenju [254]. Slika 13.3. a) pokazuje vrlo dobro poklapanje rješenja.



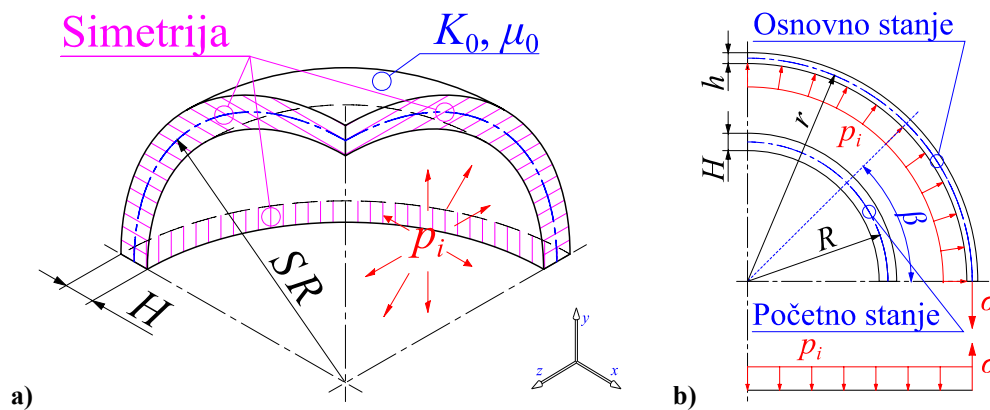
Slika 13.2. Proračunski model: a) M-R  $S$ - $e$  dijagram, b) konvergencija pomaka modela membrane



Slika 13.3. Ovisnost inkrementalnih pomaka  $u_A$ ,  $u_B$  i  $|v_C|$  o linijskoj sili  $q_x$

## 14. Dodatak E: Napuhavanje sfernog balona

Slika 14.1. prikazuje osminu tankostjenog sfernog balona od nestlačivog hiperelastičnog materijala. Primjer pokazuje ovisnost inkrementalnog unutarnjeg tlaka  $p_i$  te cirkularnog naprezanja  $\sigma_\theta$  (eng. *Circumferential Stress* ili *Hoop Stress*) o omjeru istežanja  $\lambda$ . Pretpostavljeni su veliki pomaci i deformacije, kao i geometrijska nestabilnost napuhavanja.



Slika 14.1. Dodatak E: napuhavanje sfernog balona, osmina modela: a) prostorni pogled, b) nacrt

Tablica 14.1. prikazuje zadane geometrijsko materijalne karakteristike.

Tablica 14.1. Dodatak E, zadani parametri

$R$ , mm	$H$ , mm	$\mu_0$ ( $G_0$ ), MPa	$k$ ( $C_{10}/C_{01}$ )	$\nu$	$\lambda = 1 + e$
10	0,1	0,4225	7	0,5	10

Primjer je preuzet iz lit. Holzapfel [70], str. 239, prema referentnim istraživanjima Alexander (1971.) [232]. Uspoređeni su rezultati tri hiperelastična konstitutivna modela: Ogden, neo-Hooke i Money-Rivlin (poglavlje 4.2.1.), te je pri numeričkom rješavanju, radi nestabilnosti korištena Riks metoda (R-W-W duljina luka, eng. *Arc Length*), opisana detaljnije u verifikacijskom poglavlju 5.2.1.4. Izraz za nužni uvjet tanke ljuske prema [3] glasi

$$\frac{H}{R} \leq \frac{1}{20}, \text{ a uz } H = 0,1 \text{ mm i } R = 10 \text{ mm, vrijedi nejednakost } \frac{1}{100} < \frac{1}{20}, \quad (9.3)$$

čime je uvjet zadovoljen, a numerički proračunski model može biti diskretiziran ljuskastim elementima. Koristeći izraze (4.14), (4.15), (4.23) i (4.41), izračunati su potrebni parametri za numeričku analizu, od kojih su u programski paket *Abaqus* unešeni  $C_{10(M-R)}$ ,  $C_{01(M-R)}$ ,  $C_{10(N-H)}$  (Tablica 14.2.) te  $D_{1(2,3)} = 0$  (iz uvjeta nestlačivosti, tj. za  $\nu \approx 0,5$  proizlazi  $K_0 \approx \infty$ ).

Tablica 14.2. Dodatak E, rezultati ulaznih parametara: a) Mooney-Rivlin, b) neo-Hooke

	$C_{10(M-R)}$ , MPa	$C_{01(M-R)}$ , MPa	$C_{10(N-H)}$ , MPa
a)	0,18484375	0,02640625	0,21125
b)			0,21125

Ogden materijalni parametri  $\alpha_i$  te  $\mu_i$ , uz predefinjirano  $N = 3$ , preuzeti su primarno prema Holzapfelu [70], str. 236 što prikazuje Tablica 14.3., dok su N-H i M-R parametri proračunati i preuzeti iz *ibid.*, str. 239. Originalne materijalne konstante preuzete su direktno iz referentnih i još dan danas vrlo utjecajnih te značajnih ispitivanja gume od strane Treloara [187], [188] (parametri str. 818) i [189] (parametri str. 236). Konstante su često navođene te citirane u ref. literaturi, npr. Bower [11] (Ogden, N-H i M-R parametri, str. 105).<sup>52</sup>

Tablica 14.3. Referentni parametri Ogden konstitutivnog modela,  $N = 3$

$\alpha_1$	$\mu_1$ , MPa	$\alpha_2$	$\mu_2$ , MPa	$\alpha_3$	$\mu_3$ , MPa
1,3	0,63	5	0,0012	-2	-0,01

Prema [70], uvrštavanjem vrijednosti koje prikazuje Tablica 14.3. u relaciju

$$\mu_0 = \sum_{i=1}^N \frac{\mu_i \cdot \alpha_i}{2}, \text{ uz uvjet } \mu_i \cdot \alpha_i > 0, \text{ te } i = 1, \dots, N, \quad (9.4)$$

pa dobivanjem iznosa  $\mu_0 = 0,4225$  MPa i usporedbom sa zadanim podacima (Tablica 14.1.), vidljivo je da je model povratno identificiran, čime su definirani svi parametri materijala potrebni za analitički proračun. Budući da je zadovoljen uvjet izraza (9.3) te se ljuska može smatrati *tankom*, prema jednadžbi ravnoteže sila koja glasi  $r^2 \cdot \pi \cdot p_i = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot h \cdot \sigma$  (Slika 14.1. b), postavljena je relacija za proizvoljno *ravnotežno* osnovno stanje koja se može zapisati

$$p_i = 2 \cdot \frac{h}{r} \cdot \sigma, \text{ uz geometrijske odnose } h < H, \text{ te } r > R, \quad (9.5)$$

gdje  $h$  i  $r$  predstavljaju debljinu stijenke te srednji radijus balona u *osnovnom* stanju, a  $H = 0,1$  mm i  $R = 10$  mm predstavljaju debljinu stijenke te srednji radijus balona u *početnom* stanju. Pritom je jasno da se debljina stijenke  $H$ , povećanjem omjera istezanja  $\lambda$ , smanjuje na debljinu  $h$ , dok se srednji radijus  $R$  povećava na radijus  $r$ . Bitna pretpostavka je da razmatrani model balona, usprkos nestabilnosti pri napuhavanju, *kontinuirano* zadržava *sferičan* oblik, unatoč *asferičnim* modovima nestabilnosti/izvijanja koji se u stvarnosti u ovakvom slučaju manifestiraju [70]. Za savršeno sferičan oblik balona opterećenog unutarnjim tlakom  $p_i$  vrijedi uvjet da je svaki smjer u ravnini sfere *glavni smjer* (smjer glavne osi), stoga za omjer istezanja vrijedi izraz  $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$ , što implicira jednaku-*dvoosnu* (eng. *equibiaxial*) deformaciju  $\varepsilon$ . Pritom za pripadajuće Cauchyjevo (stvarno) naprezanje  $\sigma_C$  vrijedi izraz  $\sigma_C = \sigma_1 = \sigma_2$  (uz uvjet da za treće glavno naprezanje vrijedi  $\sigma_3 = 0$  uz pretpostavku *ravninskog* stanja *naprezanja*).

<sup>52</sup> Parametri se mogu naći i na sljedećim direktnim vezama (prema Bower, A. F., **Applied Mechanics of Solids**): <http://www.brown.edu/Departments/Engineering/Courses/En221/Notes/Elasticity/Elasticity.htm>, [http://solidmechanics.org/text/Chapter3\\_5/Chapter3\\_5.htm](http://solidmechanics.org/text/Chapter3_5/Chapter3_5.htm), studeni 2014.

Bitno je napomenuti da je naprezanje  $\sigma \equiv \sigma_C$  iz izraza (9.5) stoga cirkularno naprezanje  $\sigma_\theta$ , što je primjerice u skladnosti s izrazima za tankostjeni sferni spremnik za plin prema [3]. S obzirom da su svi paramteri odabranih konstitutivnih modela poznati (Og, N-H i M-R), kao i način opterećenja (dvoosno, eng. *biaxial*), moguće je za sva tri konstitutivna modela postaviti eksplicitne relacije ovisnosti naprezanja ( $\sigma$ ,  $S$ ) o omjeru istezanja  $\lambda$ , imajući u vidu opću relaciju jednakosti  $\lambda = 1 + e_{(n)}$ , gdje  $e_{(n)}$  predstavlja nominalnu deformaciju.

Sljedeće je potrebno definirati i relacije vidljive iz kinematike trenutnog (osnovnog) stanja pri napuhavanju balona što prikazuje Slika 14.1. b), gdje je očito da za omjer trenutnog i početnog radijusa vrijedi izraz  $r/R = \lambda = \lambda_1 = \lambda_2$ . Uz to, nametnuti uvjet nestlačivosti (Poissonov faktor  $\nu = 0,5$ ) nalaže da je volumen stijenke balona, početne debljine  $H$ , u svakom trenutku *nepromijenjen*. To se može izraziti relacijom  $4 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h = 4 \cdot \pi \cdot R^2 \cdot H$ , ili jednostavnije volumenskim omjerom  $V/V_0 = 1$ . Uz taj uvjet, može se napisati izraz za treći glavni omjer istezanja  $\lambda_3$  kao omjer trenutne i početne debljine stijenke, tj. vrijedi izraz  $\lambda_3 = h/H = 1/\lambda^2$ , što predstavlja istezanje u smjeru normalnom (okomitom) na površinu sfere, a sada je očito i da vrijedi izraz  $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = \lambda^2 \cdot \lambda_3 = 1$ . Izrazi za Ogden, neo-Hooke i Money-Rivlin konstitutivne modele u slučaju *jednakog* dvoosnog opterećenja ( $\sigma_1 = \sigma_2$ ) redom glase

$$U_{(\text{Og})} = \sum_{i=1}^3 \frac{\mu_i}{\alpha_i} \cdot (\lambda_1^{\alpha_i} + \lambda_2^{\alpha_i} + \lambda_3^{\alpha_i} - 3) \Rightarrow S_{(\text{Og})d} = \sum_{i=1}^3 \mu_i \cdot (\lambda^{\alpha_i} - \lambda^{-2\alpha_i}) / \lambda, \quad (9.6)$$

$$S_{(\text{N-H})d}(I_1) = \frac{\partial U_{(\text{N-H})}}{\partial \lambda} / 2 \Rightarrow S_{(\text{N-H})d} = 2 \cdot \left[ C_{10} \cdot \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^5} \right) \right], \quad (9.7)$$

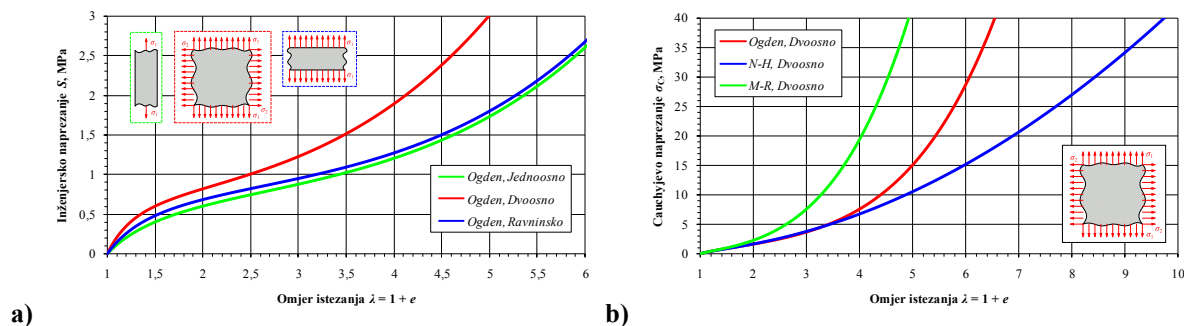
$$S_{(\text{M-R})d}(I_1, I_2) = \frac{\partial U_{(\text{M-R})}}{\partial \lambda} / 2 \Rightarrow S_{(\text{M-R})d} = 2 \cdot \left[ C_{10} \cdot \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^5} \right) + C_{01} \cdot \left( \lambda^3 - \frac{1}{\lambda^3} \right) \right], \quad (9.8)$$

gdje je iz relacije (9.7) ponovno vidljiva jednostavnost neo-Hooke konstitutivnog modela, a za definiciju je potrebna samo jedna materijalna konstanta  $C_{10}$  proračunata iz početnog modula smicanja<sup>53</sup>  $G_0$ , tj.  $\mu_0$ , izrazom  $\mu_0 = C_{10}/2$  prema [11], [70], [108] i [187]. Također, izrazi za Ogden model u slučaju jednoosnog opterećenja i ravninskog stanja deformacije glase

$$\sigma = S/\lambda \Rightarrow S_{(\text{Og})j} = \sum_{i=1}^3 \mu_i \cdot \left( \lambda^{\alpha_i} - \lambda^{-\frac{1}{2}\alpha_i} \right) / \lambda, \text{ te } S_{(\text{Og})p} = \sum_{i=1}^3 \mu_i \cdot (\lambda^{\alpha_i} - \lambda^{-\alpha_i}) / \lambda, \quad (9.9)$$

gdje su svi odgovarajući izrazi od (9.6) do (9.9) uokvireni bojama kojima su predstavljeni u pripadajućim dijagramima, što prikazuje Slika 14.2. a) i b) na idućoj stranici.

<sup>53</sup> Za početni modul smicanja  $\mu_0$  vrijedi relacija  $\mu_0 = N \cdot k_B \cdot T$ , gdje je  $N$  broj polimernih lanaca po jedinici volumena,  $k_B$  je Boltzmannova konstanta, dok je  $T$  apsolutna temperatura prema [11], [70], [108] i [187].



Slika 14.2. Konstitutivni modeli: a) Ogden, b) Ogden, N-H i M-R, dvoosno opterećenje

Ako se Slika 14.2. a) uspoređi s referentnom literaturom prema Boweru [11], str. 104 (Fig. 3.20), a b) prema Holzapfelu [70], str. 241 (Fig. 6.3), vidljivo je izvrsno poklapanje, čime je verificiran *analitički* konstitutivni model sva tri materijala. Stvarno (Cauchyjevo) naprezanje koje prikazuje Slika 14.2. b), dobiveno je analogno izrazu (4.18), tj. množenjem izraza (9.6), (9.7) i (9.8) faktorom omjera istežanja  $\lambda$ , što se može zapisati kao  $\sigma_c = S_n \cdot \lambda$ .

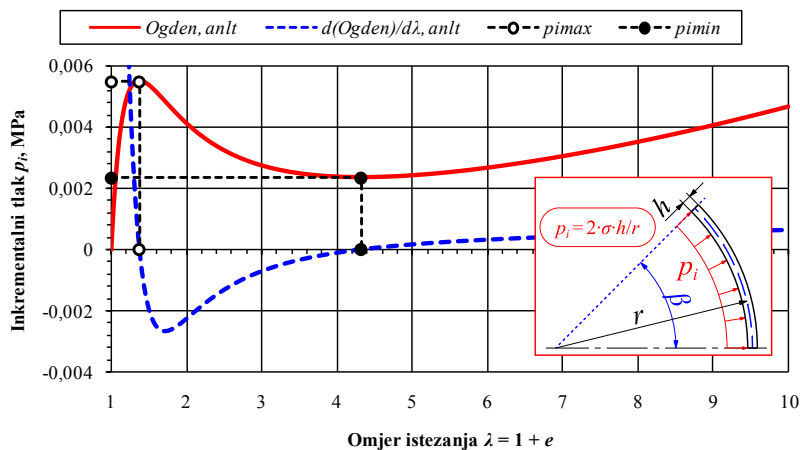
Koristeći izraze (9.5) i (9.6), prethodno navedene relacije nestlačivosti te odnosa omjera istežanja  $\lambda$  i geometrijskih parametara sređenih u oblik  $r = \lambda \cdot R$  te  $h = H/\lambda^2$ , moguće je definirati izraz eksplicitne ovisnosti inkrementalnog tlaka  $p_i$  o omjeru istežanja  $\lambda$  relacijom

$$N = 3, \quad \sigma \equiv \sigma_\theta, \quad p_i = 2 \cdot \frac{H}{R} \cdot \frac{\sigma_\theta}{\lambda^3} \Rightarrow p_{i(\text{Og})} = 2 \cdot \frac{H}{R} \cdot \sum_{i=1}^3 \mu_i \cdot (\lambda^{\alpha_i - 3} - \lambda^{-2\alpha_i - 3}), \quad (9.10)$$

gdje je vidljivo da su svi parametri poznati, a funkcija inkrementalnog tlaka  $p_i(\lambda)$  može se iz (9.10), prethodno uvrstivši sve poznate vrijednosti, raspisati u eksplicitnom obliku izrazom

$$p_{i(\text{Og})} = 0,02 \cdot \left[ 0,63 \cdot \left( \frac{1}{\lambda^{1,7}} - \frac{1}{\lambda^{5,6}} \right) - 0,01 \cdot \left( \frac{1}{\lambda^5} - \lambda \right) + 0,0012 \cdot \left( \lambda^2 - \frac{1}{\lambda^{13}} \right) \right], \quad (9.11)$$

koji je dobiven u programskom paketu *Wolfram Mathematica* i provjeren u paketu *MS Excel*.



Slika 14.3. Analitičko rješenje ovisnosti inkrementalnog tlaka  $p_i$  o omjeru istežanja  $\lambda$

Slika 14.3. („Ogden“ funkcija, crvena linija) dijagramski prikazuje funkciju ovisnosti inkrementalnog tlaka  $p_i(\lambda)$  o omjeru istežanja  $\lambda$ , tj. izraz (9.11). Deriviranjem izraza (9.11) po varijabli omjera istežanja  $\lambda$ , funkcija koja predstavlja prvu derivaciju funkcije ovisnosti tlaka  $p_i(\lambda)$  o omjeru istežanja  $\lambda$  (Slika 14.3., „dOgden/d $\lambda$ “ funkcija, plava isprekidana linija) glasi

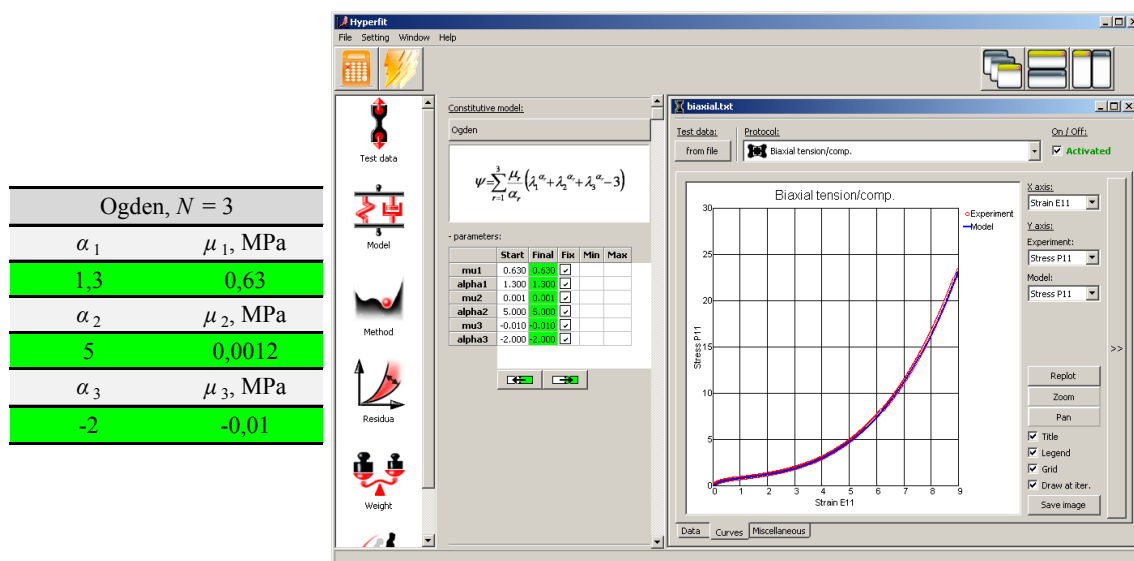
$$\frac{dp_{i(\text{Og})}}{d\lambda} = 0,02 \cdot \left[ 0,01 \cdot \left( 1 + \frac{5}{\lambda^6} \right) + 0,63 \cdot \left( \frac{5,6}{\lambda^{6,6}} - \frac{1,7}{\lambda^{2,7}} \right) + 0,0012 \cdot \left( 2 \cdot \lambda - \frac{13}{\lambda^{14}} \right) \right], \quad (9.12)$$

a formirana je u svrhu pronalaska *maksimuma* i *minimuma* funkcije  $p_i(\lambda)$ , tj. točaka  $p_{i\text{max}}$  i  $p_{i\text{min}}$  (Slika 14.3.), pomoću opcije *pronađi korijen* (eng. *Find Root*) polinoma iz izraza (9.12) u interesnom području  $1 \leq \lambda \leq 10$ . Kao početni parametar traženja, korištene su referentne vrijednosti prema Holzapfelu [70], str. 242, gdje su navedene vrijednosti iznosa  $\lambda_{\text{Holz(max)}} = 1,38$  i  $\lambda_{\text{Holz(min)}} = 4,32$ , dok su numerički dobivene vrijednosti  $\lambda_{\text{mat(max)}} \approx 1,37405$  i  $\lambda_{\text{mat(min)}} \approx 4,32028$  čime je rješenje verificirano. Pripadne vrijednosti inkrementalnih tlakova  $p_i$  su  $p_{i\text{mat(max)}} \approx 0,00549412$  MPa,  $p_{i\text{mat(min)}} \approx 0,00235553$  MPa. Numerički dobivene vrijednosti točaka maksimuma/minimuma prikazuje Slika 14.3. Analitički izrazi za ovisnost tlaka  $p_i(\lambda)$  o omjeru istežanja  $\lambda$  u slučaju korištenja neo-Hooke te Mooney-Rivlin modela glase

$$\sigma_{\theta} = S_{(\text{N-H})d} \cdot \lambda, \quad p_i = 2 \cdot \frac{H}{R} \cdot \frac{\sigma_{\theta}}{\lambda^3} \Rightarrow p_{i(\text{N-H})} = 2 \cdot \frac{H}{R} \cdot 2 \cdot \left[ C_{10} \cdot \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^5} \right) \right] \cdot \frac{\lambda}{\lambda^3}, \quad (9.13)$$

$$\sigma_{\theta} = S_{(\text{M-R})d} \cdot \lambda, \quad p_i = 2 \cdot \frac{H}{R} \cdot \frac{\sigma_{\theta}}{\lambda^3} \Rightarrow p_{i(\text{M-R})} = 2 \cdot \frac{H}{R} \cdot 2 \cdot \left[ C_{10} \cdot \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^5} \right) + C_{01} \cdot \left( \lambda^3 - \frac{1}{\lambda^3} \right) \right] \cdot \frac{\lambda}{\lambda^3}. \quad (9.14)$$

Za dodatnu verifikaciju Ogden parametara, korišten je programski paket *Hyperfit* [284], gdje Slika 14.4. prikazuje izvrsno poklapanje zadane *referentne* te *prilagođene* krivulje.



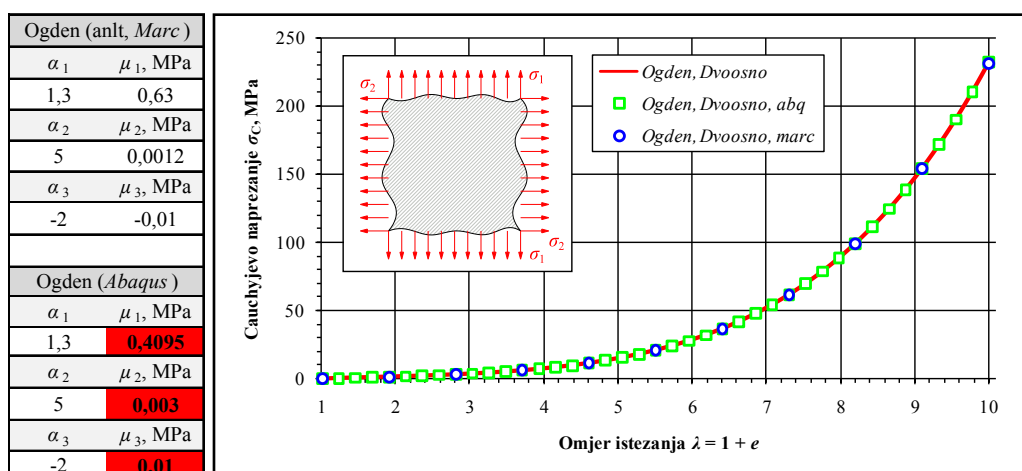
Slika 14.4. Sučelje i prilagođena Ogden  $N = 3$  krivulja programskog paketa *Hyperfit*

Provjera je obavljena definiranjem Ogden (dvoosno opterećenje, eng. *biaxial*) polinomske funkcije u programskom paketu *MS Excel* uz inkrementalni korak inženjerske deformacije iznosa  $\Delta e_n = 0,03$  te rasponom deformacije  $e_n = 0 \dots 9$ , stoga je ukupni broj *diskretnih* parova točaka  $N(e_n, S_n) = e_{n,max-min}/\Delta e_n = (9 - 0)/0,03 = 300$ . Točke su izvezene u \*.txt datoteku, uvedene u programski paket *Hyperfit* i prilagođene na način da se ponovno dobiju početni parametri. Time je ispunjen uvjet numeričkog povratnog identificiranja referentnih parametara materijala te je uspješno simuliran proces prilagodbe krivulje na osnovi eksperimentalno mjerenih podataka. Postupkom je također još jednom verificiran analitički proračun. Razlog dodatne provjere Ogden modela u programskom paketu *Hyperfit*, je izvrsno poklapanje s analitičkim rješenjem za neo-Hooke te Mooney-Rivlin konstitutivne modele u programskom paketu *Abaqus*, no *potpuno različiti* rezultati u slučaju unošenja referentnih parametara materijala (Tablica 14.3.) za Ogden model. Iz istog razloga, model za dvoosno opterećenje je provjeren u programskom paketu *MSC Marc (SimDesigner)*, no ne prilagodbom krivulja, već unošenjem referentnih predefiniраниh parametara (Tablica 14.3.).

Zadnji test odnosi se na prilagodbu krivulje u programskom paketu *Abaqus*, gdje je provedena identična procedura prilagodbe krivulje kao i za programski paket *Hyperfit*, no u ovom slučaju, *Abaqus* daje *drugačije* rezultate parametara (Tablica 14.4.) što implicira da programski paket u korištenoj verziji<sup>54</sup> 6.9-3 obrađuje Ogden model prema izrazu (5.59), a ne prema izrazu (9.6). Usporedivši rezultate (Tablica 14.3. i Tablica 14.4.), može se zamijetiti da su eksponencijalni faktori  $\alpha_{1,2,3}$  identični, dok razlika leži u koeficijentima  $\mu_{1,2,3}$ .

Tablica 14.4. *Abaqus* parametri Ogden konstitutivnog modela,  $N = 3$

$\alpha_1$	$\mu_1$ , MPa	$\alpha_2$	$\mu_2$ , MPa	$\alpha_3$	$\mu_3$ , MPa
1,3	0,4095	5	0,003	-2	0,01

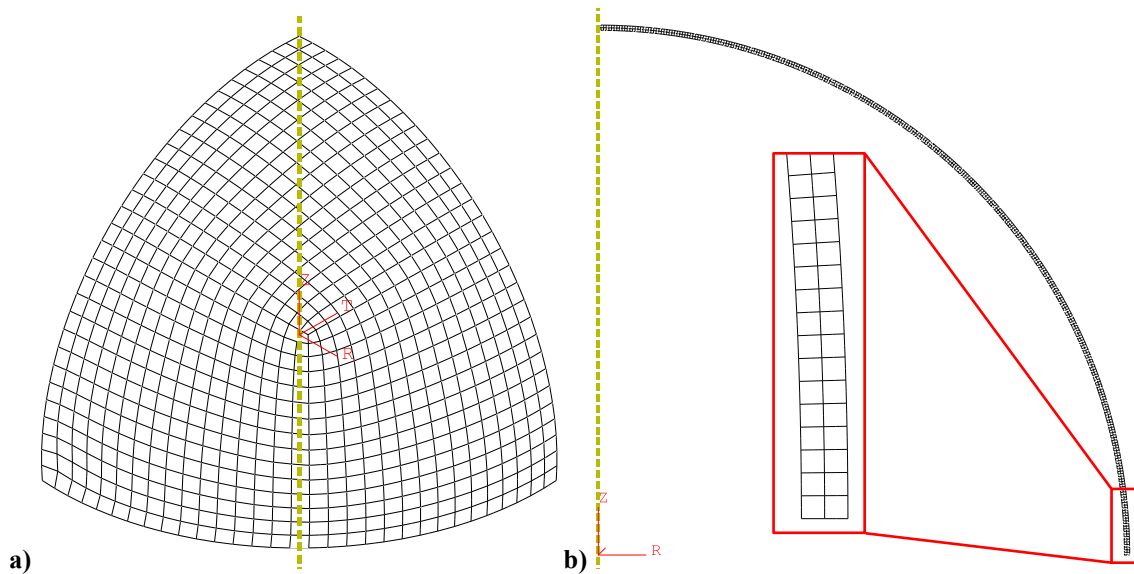


Slika 14.5. Usporedba analitičkog i numeričkih modela: *Abaqus* i *Marc*

<sup>54</sup> Isprobane su verzije programskog paketa *Abaqus* od 6.9 do 6.12 i sve daju identične rezultate.

Slika 14.5. prikazuje rezultate testiranja Ogden materijalnog modela gdje je sada vidljivo izvrsno poklapanje svih rezultata, no analitički model i *MSC Marc* koriste parametre koje prikazuje Tablica 14.3., dok *Abaqus* koristi parametre koje prikazuje Tablica 14.4.

Usprkos tome što je u konačnici moguće postići skoro besprijekorno poklapanje krivulja, valja obratiti posebnu pozornost na to da programski paket *Abaqus* koristi drugačije formuliran Ogden konstitutivni model<sup>55</sup> [261], u odnosu na referentnu literaturu [182] i [183].



Slika 14.6. *Abaqus* proračunski modeli: a) ljuskasti S4R, b) osnosimetrični CAX8RH

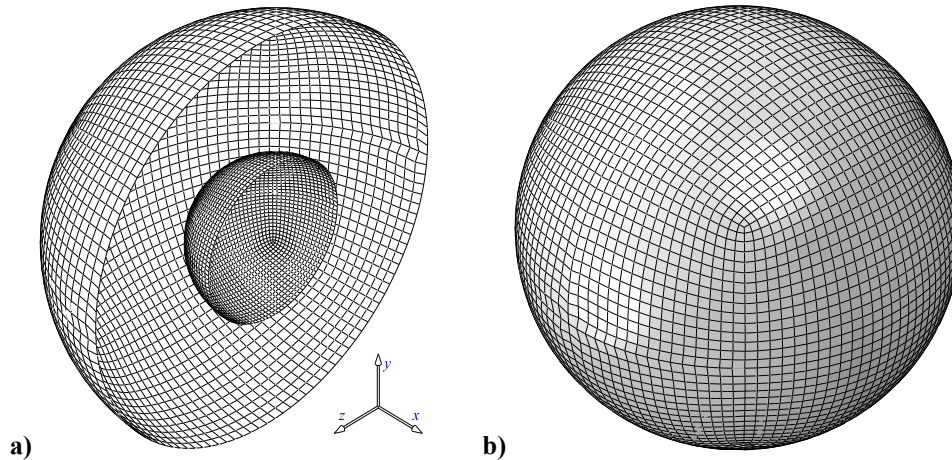
Numerički proračunski model u programskom paketu *Abaqus* definiran je na dva načina, koji po definiciji očekivano trebaju dati dovoljno *bliska* rješenja. Prvi proračunski model je ljuskasti model (osmina modela) te se sastoji od robusnih S4R KE prvog reda koji mogu opisati konačnu (eng. *finite*), tj. veliku deformaciju, dok je drugi proračunski model osnosimetričan (polovina modela) i sastoji se od CAX8RH KE drugog reda.

Budući da je proračunski model *periodičan*, moguće je i proizvoljno odabrati manji kut (Slika 14.1. b), kut  $0^\circ < \beta < 90^\circ$ ) te primjenom dodatnih rubnih uvjeta simetrije dobiti dovoljno točne rezultate na periodičnom *isječku*, no to u kontekstu ovog dijela rada nije razmatrano, radi smanjenja mogućnosti dodatne numeričke greške. Na oba modela su primijenjeni odgovarajući rubni uvjeti simetrije, kao što shematski prikazuje Slika 14.1. a).

<sup>55</sup> Sličan primjer problema moguće je pronaći i na internetskoj *www* adresi *imechanica.org*, web stranica: <http://imechanica.org/node/5116> ('09.), gdje je korisnik doživio iskustvo nesukladnosti rezultata korištenjem Ogden modela uz  $N = 2$  pokušavajući verificirati primjer deformiranja hiperelastične membrane s provrtom prema autorima: Basar, Y., Itskov, M., **Finite Element Formulation of the Ogden Material Model with Application to Rubber-Like Shells**, Int. J. for Numerical Methods in Engineering, Vol. 42, No. 7, pp. 1279-1305, 1998., a zadajući *referentne* predefinirane parametre. Problem je verificiran te je pri izradi ovog rada potvrđeno da programski paket *Abaqus* uz predefinirano zadane parametre Ogden  $N = 2$  materijala *ne konvergira* prema referentnom rješenju, dok uz Mooney-Rivlin parametre (dvoparametarski  $C_{10}$  i  $C_{01}$  model) *konvergira*.

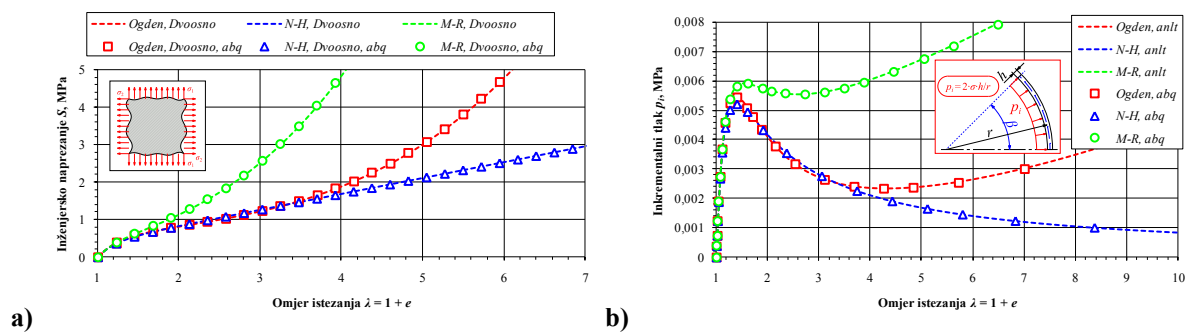


Kartezijev  $x$ - $y$ - $z$  koordinatni sustav moguće je odabrati proizvoljno, budući da je cilindrični, tj. sferni koordinatni sustav<sup>56</sup> znatno pogodniji za rješavanje ovog problema.



Slika 14.7. S4R deformirani oblik PM,  $p_i \approx 3,16$  kPa,  $e_n \approx 1,56$ : a) polovina modela, b) cijeli model

Slika 14.7. prikazuje stanje proračunskog modela *nakon* gubitka stabilnosti (eng. *Post-buckling*), tj. točke singularnosti iznosa omjera istezanja  $\lambda \approx 1,38$ , uz faktor uvećanja prikaza  $k = 1$ . Usporedbom nedeformiranog oblika (manja polusfera) i deformiranog oblika (veća polusfera) vidljivo je da su pomaci i deformacije veliki, no da je oblik i dalje *sferičan*.



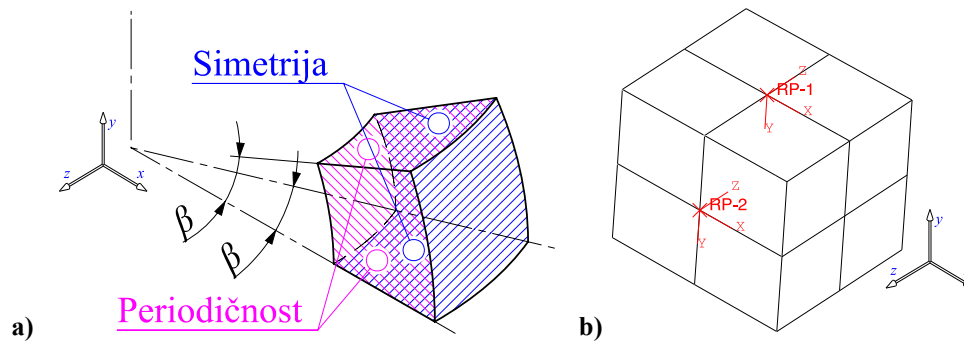
Slika 14.8. Usporedba rezultata: numerički i analitički modeli

Slika 14.8. pokazuje konačne usporedbe analitičkih i numeričkih modela gdje je vizualno vidljivo besprijekorno poklapanje. Slika 14.8. b) se izvrsno poklapa s referentnim rezultatima prema [70], str. 241 (Fig. 6.4) gdje je vidljiva nestabilnost manifestiranjem tzv. *snap-through* efekta<sup>57</sup>. Eksperiment pokazuje da Ogden model *najvjernije* prikazuje *stvarno* stanje [70], N-H model može vjerno reproducirati tek *malene* deformacije  $\lambda < \sim 3$ , dok M-R u ovom slučaju daje *potpuno pogrešne* rezultate nakon točke ekstrema tj. za  $\lambda > \lambda_{\text{Holz(max)}}$ .

<sup>56</sup> Razmatrani model balona ima *beskonačan* broj ravnina simetrije prema geometriji i opterećenju (uzevši u obzir pretpostavku da balon ostaje *sferičan*, makar prolazi kroz *nestabilno* područje), stoga je za verificiranje referentnih rezultata moguće odabrati *bilo koji čvor* bilo kojeg elementa proračunskog modela.

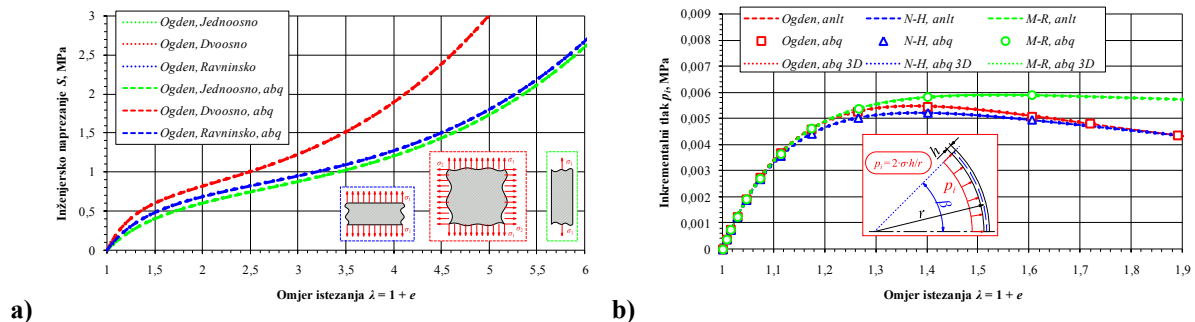
<sup>57</sup> Svatko tko je ikada napuhavao balon (eng. „Party Balloon“ prema Holzapfelu [70]), osjetio je sličan efekt prema vlastitom iskustvu gdje nakon početnog velikog otpora deformaciji kao posljedice upuhivanja zraka, balon doslovno „izleti“. Osnova tog efekta je *dinamička*, makar se u ovom kontekstu proračunava *kvazistatički*.

Problem napuhavanja je za dodatnu verifikaciju riješen i pomoću C3D8RH KE koristeći rubne uvjete simetrije, kao i periodičnost<sup>58</sup>, što prikazuje Slika 14.9. a) i b).



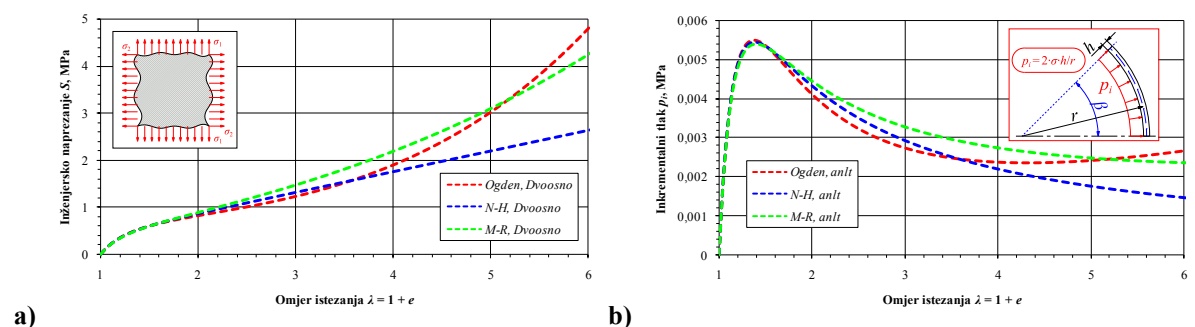
Slika 14.9. 3D model: a) rubni uvjeti i periodičnost, b) mreža elemenata

Slika 14.10. a) prikazuje usporedbu  $S$ - $\lambda$  dijagrama prema izrazima (5.59) i (9.6), gdje je vidljivo izvrsno poklapanje. Slika 14.10. b) prikazuje rezultate 3D modela (Slika 14.9.).



Slika 14.10. Usporedba proračunskih modela: a)  $S$ - $\lambda$ , b)  $p_r$ - $\lambda$

U slučaju da se krivulje neo-Hooke i Mooney-Rivlin konstitutivnih modela ponovno prilagode krivulji referentnog rješenja Ogden modela za dvoosno stanje naprezanja, moguće je dobiti točnija rješenja, što je pogotovo primjetno za Mooney-Rivlin model (Slika 14.11.).



Slika 14.11. Nove prilagođene krivulje N-H i M-R modela: a)  $S$ - $\lambda$ , b)  $p_r$ - $\lambda$

Novi parametri prilagođenih krivulja iznose  $C_{10(N-H)} = 0,22$  MPa te  $C_{10(M-R)} = 0,21$  MPa i  $C_{01(M-R)} = 0,004$  MPa, a Slika 14.11. prikazuje bolje poklapanje rješenja.

<sup>58</sup> Pritom simetrija implicira *globalni*, dok periodičnost implicira *lokalne* koordinatne sustave RP-1 i RP-2.

**Prilozi**

---

1. DVD-R disk s datotekama numeričkog proračuna, programskim kôdom i digitalnim referencama
2. Čakmak, D., Kontaktni problem, vježba iz kolegija Numerička analiza konstrukcija, FSB, Zagreb 2014.
3. Čakmak, D., Dinamička analiza ploče, vježba iz kolegija Numerička analiza konstrukcija, FSB, Zagreb 2014.
4. Čakmak, D., Simetrični gubitak stabilnosti cilindrične ljuske, vježba iz kolegija Nelinearna numerička analiza konstrukcija, FSB, Zagreb 2014.

## Literatura

### 1. Osnovna literatura

- [1] *Sorić, J., Metoda konačnih elemenata*, Golden marketing, Zagreb 2004.
- [2] *Alfićević, I., Nauka o čvrstoći I*, Tehnička knjiga, Zagreb 1995.
- [3] *Alfićević, I., Linearna analiza konstrukcija*, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb 1999.
- [4] *Pustaić, D., Wolf, H., Tonković, Z., Mehanika III, Uvod u analitičku mehaniku s osnovama teorije vibracija*, Golden marketing, Zagreb 2004.
- [5] *Tonković, Z., Marenić, E., Numerička analiza konstrukcija, Predavanja*, FSB, Zagreb 2014.
- [6] *Sorić, J., Skozrit, I., Nelinearna numerička analiza konstrukcija, Predavanja*, FSB, Zagreb 2014.
- [7] *Grupa autora, Inženjerski priručnik IP1*, Školska knjiga d.d., Zagreb 1996.
- [8] *Kraut, B., Strojarski priručnik, 10. izdanje*, Axiom d.o.o., Zagreb 1997.
- [9] *Decker, K. H., Elementi strojeva*, Tehnička knjiga, Zagreb 1987.
- [10] *Kabus, K., Rieg, F., Weidermann, F., Engelken, G., Hackenschmidt, R., Decker, Maschinenelemente: Funktion, Gestaltung und Berechnung, 18. Auflage*, Hanser, Munchen 2011., web stranica: [http://n.ethz.ch/~marcoh/basis/data/hanser\\_komplett.pdf](http://n.ethz.ch/~marcoh/basis/data/hanser_komplett.pdf), travanj 2014.
- [11] *Bower, A. F., Applied Mechanics of Solids*, CRC Press, Boca Raton 2010., web stranica: <http://solidmechanics.org/index.html>, <http://www.brown.edu/Departments/Engineering/Courses/En221/Notes/Elasticity/Elasticity.htm>, [http://solidmechanics.org/text/Chapter3\\_5/Chapter3\\_5.htm](http://solidmechanics.org/text/Chapter3_5/Chapter3_5.htm), studeni 2014.
- [12] *Hibbeler, R. C., Mechanics of Materials, 8th Edition*, Prentice Hall, Pearson Inc., New Jersey 2011.
- [13] *Harris, C. M., Piersol, A. G., Harris' Shock and Vibration Handbook, Fifth Edition*, McGraw-Hill Book Co., New York 2002.
- [14] *Piersol, A. G., Paez, T. L., Harris' Shock and Vibration Handbook, Sixth Edition*, McGraw-Hill Book Co., New York 2010.
- [15] *de Silva, C. W., Vibration and Shock Handbook*, Taylor & Francis, Boca Raton 2005.
- [16] *Den Hartog, J. P., Mechanical Vibrations*, McGraw-Hill Book Company INC., New York 1947.
- [17] *Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L., The Finite Element Method, Fifth edition, Volume 1: The Basis, Fifth edition*, Butterworth-Heinemann, Oxford, 2000.
- [18] *Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L., The Finite Element Method, Fifth edition, Volume 2: Solid Mechanics, Fifth edition*, Butterworth-Heinemann, Oxford, 2000.
- [19] *Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L., The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics, Sixth edition*, Elsevier, New York 2005.
- [20] *Adams V., Askenazi A., Building Better Products with Finite Element Analysis*, OnWord Press, Santa Fe, N.M., 1999.
- [21] *Hutton, D. V., Fundamentals Of Finite Element Analysis*, McGraw-Hill Book Co., New York 2004.
- [22] *Matsagar, V., Advances in Structural Engineering, Mechanics, Volume One*, Springer, New York 2015.

- [23] *Matsagar, V., Advances in Structural Engineering, Dynamics, Volume Two, Springer, New York 2015.*
- [24] *Matsagar, V., Advances in Structural Engineering, Materials, Volume Three, Springer, New York 2015.*
- [25] *Pilkey, W. D., Formulas for Stress, Strain, and Structural Matrices, Second Edition, John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey 2005.*
- [26] *Pilkey, W. D., Pilkey, D. F., Peterson's Stress Concentration Factors, Third Edition, John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey 2008.*
- [27] *Pilkey, W. D., Analysis and Design of Elastic Beams: Computational Methods, John Wiley & Sons, Inc., New York 2002.*
- [28] *Wunderlich, W., Pilkey, W. D., Mechanics of Structures: Variational and Computational Methods, Second Edition, CRC Press LLC, Boca Raton 2003.*
- [29] *Rivin, E. I., Stiffness and Damping in Mechanical Design, Marcel Dekker, New York 1999.*
- [30] *Rivin, E. I., Use of Stiffness/Damping/Natural Frequency Criteria in Vibration Control, IFToMM World Congress, Besanson 2007., web stranica: [http://www.iftomm.org/iftomm/proceedings/proceedings\\_WorldCongress/WorldCongress07/articles/essays/papers/A842.pdf](http://www.iftomm.org/iftomm/proceedings/proceedings_WorldCongress/WorldCongress07/articles/essays/papers/A842.pdf), studeni 2014.*
- [31] *Pierron, F., Grédiac, M., The Virtual Fields Method: Extracting Constitutive Mechanical Parameters from Full-field Deformation Measurements, Springer, New York, 2012.*
- [32] *Öchsner, A., da Silva, L. F. M., Altenbach, H., Materials with Complex Behaviour I: Modelling, Simulation, Testing, and Applications, Springer, New York 2010.*
- [33] *Öchsner, A., da Silva, L. F. M., Altenbach, H., Materials with Complex Behaviour II: Properties, Non-Classical Materials and New Technologies, Springer, New York 2012.*
- [34] *Cook, R. D., Finite Element Modeling For Stress Analysis, John Wiley & Sons, Inc., Chichester 1995.*
- [35] *Cook, R. D., Malkus, D. S., Plesha, M. E., Witt, R. J., Concepts and Applications of Finite Element Analysis, Fourth Edition, John Wiley & Sons, Inc., New York 2002.*
- [36] *Blevins, R. D., Flow-Induced Vibration, Second Edition, Van Nostrand Reinhold, Malabar 2001.*
- [37] *Budynas, R. G., Nisbett, J. K., Shigley's Mechanical Engineering Design, 10th Edition, McGraw-Hill, New York 2015.*
- [38] *Juvinall, R. C., Marshek, K. M., Fundamentals of Machine Component Design, Fifth Edition, John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey 2012.*
- [39] *von Kármán, T., Aerodynamics, McGraw-Hill Education, New York, 1963.*
- [40] *Young, W. C., Budynas, R. G., Roark's Formulas for Stress and Strain, Seventh Edition, McGraw-Hill, New York 2002.*
- [41] *Ugural, A. C., Fenster, S. K., Advanced Strength and Applied Elasticity, Fourth Edition, Prentice Hall, New Jersey 2003.*
- [42] *Beer, F. P., Johnston, E. R. Jr., DeWolf, J. T., Mazurek, D. F., Mechanics of Materials, Sixth Edition, McGraw-Hill, New York 2012.*

- [43] *Ghali, A., Neville, A. M., Brown, T. G., Structural Analysis, A Unified Classical and Matrix Approach*, Spon Press, New York 2009.
- [44] *Woodford, C., Phillips, C., Numerical Methods with Worked Examples: Matlab Edition, Second Edition*, Springer, New York 2012.

## 2. Dokumentacija, norma, radovi na temu

- [45] *Dalekovod d.d., Rastojnik-prigušivač, tehnička dokumentacija*, 2014.
- [46] *Wolf, H., Adum, B., Semenski, D., Pustaić, D., Using the Energy Balance Method in Estimation of Overhead Transmission Line Aeolian Vibrations*, *Strojarstvo*, Vol. 50, No. 5, pp. 269-276, 2008., web stranica:
- [47] *IEC International Standard, IEC 61854, Overhead lines – Requirements and tests for spacers, First Edition*, International Electrotechnical Commission, 1998.
- [48] *ASTM International, ASTM D412, Standard Test Methods for Vulcanized Rubber and Thermoplastic Elastomers—Tension*, ASTM, 1968, 1993, 2008., web stranica: <https://law.resource.org/pub/us/cfr/ibr/003/astm.d412.1968.pdf>, studeni 2014.
- [49] *International Organization for Standardization, ISO 37:2011, Rubber, vulcanized or thermoplastic - Determination of tensile stress-strain properties*, ISO, 2011.
- [50] *ASTM International, ASTM D2240, Standard Test Method for Rubber Property—Durometer Hardness*, ASTM, 2000., web stranica: <http://www.abqindustrial.net/store/images/products/dmt/RX-DD/d2240.pdf>, studeni 2014.
- [51] *ASTM International, ASTM D5992, Standard Guide for Dynamic Testing of Vulcanized Rubber and Rubber-Like Materials Using Vibratory Methods*, ASTM, 2001.
- [52] *Verma, H., Aerodynamic and structural modeling for vortex-excited vibrations in bundled conductors, Dissertation*, Technischen Universitat Darmstadt, 2008., web stranica: [http://tuprints.ulb.tu-darmstadt.de/1308/1/PhD\\_Thesis\\_Himanshu\\_2008\\_11\\_04.pdf](http://tuprints.ulb.tu-darmstadt.de/1308/1/PhD_Thesis_Himanshu_2008_11_04.pdf), <http://d-nb.info/994645570/34>, siječanj 2013.
- [53] *Cosmai, U., Tutorial Presentation on Spacers and Spacer Dampers*, CIGRE SC B2, 2011, web stranica: <http://www.aeolus.bz/Seminar%202011/Umberto%20-%20SPACER%20TUTORIAL%20CIGRE%202011.pdf>, studeni 2014.
- [54] *Čakmak, D., Dinamička analiza uređaja za određivanje mehaničke impedancije rastojnika-prigušivača, Završni rad*, FSB, Zagreb 2013., web stranica: <http://www.fsb.unizg.hr/library/fileopen.php?id=2489>, rujan 2013.
- [55] *Čakmak, D., Numerička analiza krutosti gumenog zgloba rastojnika-prigušivača, Projekt diplomskog studija*, FSB, Zagreb 2014., web stranica: <https://app.box.com/s/g025e3ml3odwbydpdcyte>, rujan 2014.
- [56] *Čakmak, D., Mikulčić, M., Numerička analiza vjetroagregata K80 Končar KET d.o.o., Industrijska praksa*, FSB, Zagreb 2014., web stranica: <https://app.box.com/s/ux42omagzj2eihepmyj7>, prosinac 2014.
- [57] *Čakmak, D., Seminarski rad iz kolegija Mehanika oštećenja i mehanika loma: Rainflow metoda*, FSB, Zagreb 2014., web stranica: <https://app.box.com/s/km48we9niyycid9o0i11>, travanj 2014.

- [58] Čakmak, D., **Kontaktni problem, vježba iz kolegija Numerička analiza konstrukcija**, FSB, Zagreb 2014., web stranica: <https://app.box.com/s/fmlrujsjt0vpeh8f48iz>, kolovoz 2014.
- [59] Čakmak, D., **Programski zadaci iz kolegija Numerička analiza konstrukcija**, FSB, Zagreb 2014., web stranica: <https://app.box.com/s/47m25di3ak1ismynuofx>, svibanj 2014.
- [60] Čakmak, D., **Dinamička analiza ploče, vježba iz kolegija Numerička analiza konstrukcija**, FSB, Zagreb 2014., web stranica: <https://app.box.com/s/ciqolcope16bpygl1wtb>, kolovoz 2014.
- [61] Čakmak, D., **Analiza zamora membrane, „rainflow, vježba iz kolegija Mehanika oštećenja i mehanika loma**, FSB, Zagreb 2014., web stranica: <https://app.box.com/s/gsuw7bbnv33u2jmppyb5>, studeni 2014.
- [62] Čakmak, D., **Simetrični gubitak stabilnosti cilindrične ljuske, vježba iz kolegija Nelinearna numerička analiza konstrukcija**, FSB, Zagreb 2014., web stranica: <https://app.box.com/s/buko2aso2zvjsqm8xuiexp3sr3ainjsi>, rujan 2014.
- [63] Čakmak, D., **Programski zadaci iz kolegija Nelinearna numerička analiza konstrukcija**, FSB, Zagreb 2014., web stranica: <https://app.box.com/s/mrju0us5h4djeczvuv7>, srpanj 2014.

---

### 3. Nelinearna analiza

---

- [64] *Antman, S. S.*, **Nonlinear Problems of Elasticity, Second Edition**, Springer, New York 2005.
- [65] *Bigoni, D.*, **Nonlinear Solid Mechanics: Bifurcation Theory and Material Instability**, Cambridge University Press, New York 2012.
- [66] *Dai, L., Jazar, R. N.*, **Nonlinear Approaches in Engineering Applications**, Springer, New York 2012.
- [67] *Crisfield, M.*, **Nonlinear Finite Element Analysis of Solids and Structures, Volume 1, Essentials**, John Wiley & Sons, Inc., Baffins Lane 2000.
- [68] *Crisfield, M.*, **Nonlinear Finite Element Analysis of Solids and Structures, Volume 2, Advanced Topics**, John Wiley & Sons, Inc., Baffins Lane 1997.
- [69] *De Borst, R., Crisfield, M. A., Remmers, J. J. C., Verhoosel, C. V.*, **Nonlinear Finite Element Analysis of Solids and Structures, Second edition**, John Wiley & Sons, Inc., United Kingdom 2012.
- [70] *Holzappel, G. A.*, **Nonlinear Solid Mechanics: A Continuum Approach for Engineering**, John Wiley & Sons, Inc., Chichester 2000.
- [71] *Ivančo, V.*, **Introduction To Nonlinear Finite Element Analysis**, HS Wismar, June 2009., June 2011., web stranica: [www.mb.hs-wismar.de/~heinze/subdir/Nonlinear\\_FE-analysis-2009.doc](http://www.mb.hs-wismar.de/~heinze/subdir/Nonlinear_FE-analysis-2009.doc), [http://www.mb.hs-wismar.de/~heinze/subdir/FEA\\_of\\_Nonlinear\\_Problems\\_2011\\_Ivanco.pdf](http://www.mb.hs-wismar.de/~heinze/subdir/FEA_of_Nonlinear_Problems_2011_Ivanco.pdf), studeni 2014.
- [72] *Kounadis, A. N., Krätzig, W. B.*, **Nonlinear Stability of Structures, Theory and Computational Techniques**, Springer, New York 2005.
- [73] *Krätzig, W. B., Onate, E.*, **Computational Mechanics of Nonlinear Response of Shells**, Springer, New York 1990.
- [74] *Sathyamoorthy, M.*, **Nonlinear Analysis of Structures**, CRC Press, Boca Raton 1998.
- [75] *Wriggers, P.*, **Nonlinear Finite Element Methods**, Springer, New York 2012.
- [76] *Bathe, K. J.*, **Finite Element Procedures**, Prentice Hall, New Jersey 1996.

- [77] *Bathe, K. J., Finite Element Procedures in Engineering Analysis*, Prentice Hall, New Jersey 1982.
- [78] *Bathe, K. J., Finite Element Procedures for Solids and Structures – Nonlinear Analysis*, MIT OpenCourseWare, MIT, 1986., web stranica: <http://ocw.mit.edu/resources/res-2-002-finite-element-procedures-for-solids-and-structures-spring-2010/nonlinear/>, prosinac 2014.
- [79] *Klepaczko, J. R., Lodygowski, T., Advances in Constitutive Relations Applied in Computer Codes*, Springer, New York 2009.
- [80] *Bonet, J., Gil, A. J., Wood, R. D., Worked Examples in Nonlinear Continuum Mechanics for Finite Element Analysis*, Cambridge University Press, New York 2012.
- [81] *Biot, M. A., Mechanics of Incremental Deformation, Theory of Elasticity and Viscoelasticity of Initially Stressed Solids and Fluids, Including Thermodynamic Foundations and Applications to Finite Strain*, John Wiley & Sons, Inc., New York 2008.
- [82] *Zahavi, E., Barlam, D., Nonlinear Problems in Machine Design*, CRC Press, Boca Raton 2001.

---

#### 4. Kontakt, trenje

---

- [83] *Blau, P. J., Friction Science and Technology, From Concepts to Applications, Second Edition*, CRC Press, Boca Raton 2009.
- [84] *Fischer-Cripps, A. C., Introduction to Contact Mechanics, Second Edition*, Springer, New York 2007.
- [85] *Goryacheva, I. G., Contact Mechanics in Tribology*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht 1998.
- [86] *Johnson, K., L., Contact Mechanics*, Cambridge University Press, New York 1985., web stranica: <http://www.ewp.rpi.edu/hartford/~ernesto/F2012/FWM/Papers/Johnson-CONTACT%20MECHANICS.pdf>, studeni 2014.
- [87] *Laursen, T. A., Computational Contact and Impact Mechanics, Fundamentals of Modeling Interfacial Phenomena in Nonlinear Finite Element Analysis*, Springer, New York 2003.
- [88] *Rončević, B., Analiza kontaktnog problema sa smanjenjem kontaktne površine, Doktorska disertacija*, Tehnički fakultet Sveučilišta u Rijeci, Rijeka 2012., web stranica: [http://www.riteh.uniri.hr/znanost/oglasna/PPSZ9\\_Ad\\_6\\_Doktorski\\_rad\\_Branimir\\_Roncevic.pdf](http://www.riteh.uniri.hr/znanost/oglasna/PPSZ9_Ad_6_Doktorski_rad_Branimir_Roncevic.pdf), studeni 2013.
- [89] *Smith, R. H., Analyzing Friction in the Design of Rubber Products and Their Paired Surfaces*, CRC Press LLC, Boca Raton 2008.
- [90] *Wriggers, P., Computational Contact Mechanics*, John Wiley & Sons, Inc., Chichester 2002.
- [91] *Wriggers, P., Nackenhorst, U., Analysis and Simulation of Contact Problems, Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics, Volume 27*, Springer, New York 2006.
- [92] *Zavarise, G., Wriggers, P., Trends in Computational Contact Mechanics (Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics)*, Springer-Verlag, Berlin 1981.
- [93] *Zhong, Z. H., Finite Element Procedures for Contact-Impact Problems*, Oxford University Press, Oxford 1993.
- [94] *Yastrebov, V. A., Numerical Methods in Contact Mechanics*, John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey 2013.



- [95] *Abu-Bakar, A. R.*, **Modelling and Simulation of Disc Brake Contact Analysis and Squeal**, University of Liverpool, 2005., web stranica: [http://www.fkm.utm.my/~arahim/thesis\\_new.html](http://www.fkm.utm.my/~arahim/thesis_new.html), prosinac 2014.
- [96] *Dimitri, R., De Lorenzis, L., Scott, M. A., Wriggers, P., Taylor, R. L., Zavarise, G.*, **Isogeometric large deformation frictionless contact using T-splines**, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 269, pp. 394–414, 1 February 2014., web stranica: [https://www.tu-braunschweig.de/Medien-DB/iam/publications/51\\_isogeometric\\_large\\_deformation.pdf](https://www.tu-braunschweig.de/Medien-DB/iam/publications/51_isogeometric_large_deformation.pdf), studeni 2014.
- [97] *Deladi, E. L.*, **Static Friction in Rubber-Metal Contacts with Application to Rubber Pad Forming Processes, Dissertation**, University of Twente, 2006., web stranica: [http://www.utwente.nl/ctw/tr/Research/Publications/PhDTheses/thesis\\_Deladi.pdf](http://www.utwente.nl/ctw/tr/Research/Publications/PhDTheses/thesis_Deladi.pdf), studeni 2014.

---

## 5. Guma, elastomeri

---

- [98] *Bauman, J. T.*, **Fatigue, Stress, and Strain of Rubber Components, A Guide for Design Engineers**, Hanser, München 2008.
- [99] *Brown, R. P.*, **Physical Testing of Rubber**, Third Edition, Springer Science & Business Media, Shawbury 1996.
- [100] *Brown, R. P.*, **Physical Testing of Rubbers**, Rapra Technology Limited, Shropshire 2001.
- [101] *Brown, R. P.*, **Handbook of Polymer Testing: Short-Term Mechanical Tests**, Rapra Technology Limited, Shropshire 2002.
- [102] *Brown, R. P.*, **Handbook of Polymer Testing, Physical Methods**, Marcel Dekker, New York 1999.
- [103] *Heinrich, G., Kaliske, M., Lion, A., Reese, S.*, **Constitutive Models for Rubber VI**, CRC Press, Boca Raton 2010.
- [104] *Jerrams, S., Murphy, N.*, **Constitutive Models for Rubber VII**, CRC Press, Boca Raton 2012.
- [105] *Gil-Negrete, N., Alonso, A.*, **Constitutive Models for Rubber VIII**, CRC Press, Boca Raton 2013.
- [106] *Das Gupta, S., et al.*, **Reverse Engineering of Rubber Products - Concepts, Tools, and Techniques**, CRC Press, Boca Raton 2014.
- [107] *Gent, A. N.*, **Engineering with Rubber, How to Design Rubber Components, 2nd Edition**, Hanser, München 2001.
- [108] *Gent, A. N.*, **Engineering with Rubber, How to Design Rubber Components, 3rd Edition**, Hanser, München 2012.
- [109] *Kelly, J. M., Konstantinidis, D. A.*, **Mechanics of Rubber Bearings for Seismic and Vibration Isolation**, John Wiley & Sons, Inc., Chichester 2011.
- [110] *Mark, J. E., et al.*, **The Science and Technology of Rubber, 3rd Edition**, Elsevier, New York 2005.
- [111] *Mark, J. E., Lal, J.*, **Advances in Elastomers and Rubber Elasticity**, Springer, New York 1986.
- [112] *Mark, J. E., Lal, J.*, **Elastomers and Rubber Elasticity**, American Chemical Society, New York 1981.
- [113] *Mark, J., et al.*, **Physical Properties of Polymers, 3rd edition**, Cambridge University Press, New York 2004.
- [114] *Simpson, R.*, **Rubber Basics**, Rapra Publishing, Shawbury 2002.

- [115] *Proulx, T., Mechanics of Biological Systems and Materials, Volume 2, Conference Proceedings of the Society for Experimental Mechanics Series*, Springer, New York 2011.
- [116] *Amin, A. F. M. S., Alam, M. S., Okui, Y., An improved hyperelasticity relation in modeling viscoelasticity response of natural and high damping rubbers in compression: experiments, parameter identification and numerical verification*, *Mechanics of Materials*, Vol. 34, pp. 75–95, 2002., web stranica: <http://saifulamin.info/publication/journals/j5.pdf>, studeni 2014.
- [117] *Amin, A. F. M. S., Alam, M. S., Okui, Y., Measurement of Lateral Deformation in Natural and High Damping Rubbers in Large Deformation Uniaxial Tests*, *Journal of Testing and Evaluation*, Vol. 31, No. 6, pp., 524-532, Nov. 2003., web stranica: <http://saifulamin.info/publication/journals/j4.pdf>, studeni 2014.
- [118] *Amin, A. F. M. S., Alam, M. S., Okui, Y., Nonlinear Viscoelastic Response of Elastomers: Experiments, Parameter Identification and Numerical Simulation*, *Journal of Structural Engineering* Vol. 47A, pp. 181-192, March 2001., web stranica: <http://saifulamin.info/publication/journals/j6.pdf>, studeni 2014.
- [119] *Amin, A. F. M. S., et al., Hyperelasticity Model for Finite Element Analysis of Natural and High Damping Rubbers in Compression and Shear*, *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 132, No. 1, pp. 54-64, January 2006., web stranica: <http://saifulamin.info/publication/journals/j3.pdf>, studeni 2014.
- [120] *Amin, A. F. M. S., Lion, A., Höfer, P., Effect of temperature history on the mechanical behaviour of a filler-reinforced NR/BR blend: literature review and critical experiments*, *Zamm-zeitschrift Fur Angewandte Mathematik Und Mechanik*, Vol. 90, No. 5, pp. 347-369, 2010., web stranica: <http://saifulamin.info/publication/journals/j1.pdf>, studeni 2014.
- [121] *Amin, A. F. M. S., Lion, A., Sekita, S., Okui, Y., Nonlinear dependence of viscosity in modeling the rate-dependent response of natural and high damping rubbers in compression and shear: Experimental identification and numerical verification*, *International Journal of Plasticity*, Vol. 22, No. 9, pp. 1610–1657, September 2006., web stranica: <http://saifulamin.info/publication/journals/j2.pdf>, studeni 2014.
- [122] *Carlescu, V., et al., Determining the stress-strain curve of PDMS-SiO<sub>2</sub>-TiO<sub>2</sub> electroactive polymers, Mechanical Testing and Diagnosis*, Vol. 2, pp. 54-61, 2012., web stranica: [http://www.om.ugal.ro/mtd/download/2012-2/8\\_MTD\\_Volume%202\\_2012\\_Carlescu.pdf](http://www.om.ugal.ro/mtd/download/2012-2/8_MTD_Volume%202_2012_Carlescu.pdf), studeni 2014.
- [123] *Carlescu, V., et al., FEM Simulation on Uniaxial Tension of Hyperelastic Elastomers*, *Applied Mechanics and Materials* Vol. 659, pp. 57-62, 2014., web stranica: [http://www.researchgate.net/profile/Carlescu\\_Vlad/publication/266082291\\_FEM\\_Simulation\\_on\\_Uniaxial\\_Tension\\_of\\_Hyperelastic\\_Elastomers/links/542512000cf26120b7ac512f.pdf](http://www.researchgate.net/profile/Carlescu_Vlad/publication/266082291_FEM_Simulation_on_Uniaxial_Tension_of_Hyperelastic_Elastomers/links/542512000cf26120b7ac512f.pdf), studeni 2014.
- [124] *Kozak, D., Lucić, M., Nomenklatura i terminologija iz područja polimera i polimernih materijala, VII., Definicije pojmova koji se odnose na mehanička svojstva polimera u području do loma, VII.4*, *Kemija u industriji* 58, Br. 11, str. 515-540, 2009., web stranica: <http://hrcak.srce.hr/file/67161>, <http://pierre.fkit.hr/hdki/kui/vol58/broj11/515.pdf>, [www.researchgate.net/profile/Drazan\\_Kozak/publication/38118122\\_Nomenklatura\\_i\\_terminologija\\_i](http://www.researchgate.net/profile/Drazan_Kozak/publication/38118122_Nomenklatura_i_terminologija_i)

- [z\\_podruja\\_polimera\\_i\\_polimernih\\_materijala\\_VII\\_Definicije\\_pojmova\\_koji\\_se\\_odnose\\_na\\_mehanik\\_a\\_svojstva\\_polimera\\_u\\_podruju\\_do\\_loma\\_VII.4/links/0c96052cae5dbbc97e000000.pdf](#), studeni 2014.
- [125] *Alexander, H.*, **A constitutive relation for rubber-like materials**, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 6, pp. 549-563, Pergamon Press, 1968.
- [126] *Ali, A., Hosseini, M., Sahari, B. B.*, **A review and comparison on some rubber elasticity models**, *Journal of Scientific & Industrial Research*, Vol. 69, pp. 495-500, July 2010.
- [127] *Ali, A., Hosseini, M., Sahari, B. B.*, **A Review of Constitutive Models for Rubber-Like Materials**, *American J. of Engineering and Applied Sciences*, Vol. 3, No. 1, pp. 232-239, 2010., web stranica: <http://thescipub.com/PDF/ajeassp.2010.232.239.pdf>, studeni 2014.
- [128] *Diehl, T.*, **Two-Dimensional and Three-Dimensional Analysis of Nonlinear Nip Mechanics with Hyperelastic Material Formulations**, University of Rochester, 2010., web stranica: [http://www.2kornucopia.com/pdfs/NipMechanics\\_Dissertation\\_Diehl\\_1995\\_revised.pdf](http://www.2kornucopia.com/pdfs/NipMechanics_Dissertation_Diehl_1995_revised.pdf), studeni 2014.
- [129] *Green, I., English, C.*, **Analysis of Elastomeric O-Ring Seals in Compression Using the Finite Element Method**, *Tribology Transactions*, Vol. 35, No. 1, pp. 83-88, 1992., web stranica: <http://www-old.me.gatech.edu/itzhak.green/rotordynamics/Analysis%20of%20Elastomeric%20O-Ring%20Seals%20in%20Compression%20Using%20the%20Finite%20Element%20Method.pdf>, studeni 2014.
- [130] *Guo, Z., Shuys, L. J.*, **Application of a new constitutive model for the description of rubber-like materials under monotonic loading**, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 43, Vol. 3, pp. 2799–2819, 2006., web stranica: [http://ac.els-cdn.com/S0020768305003434/1-s2.0-S0020768305003434-main.pdf?\\_tid=a0f2f058-b974-11e4-87ee-00000aacb360&acdnat=1424487309\\_bf7c618c6e0146f9f91aba38ab05aa24](http://ac.els-cdn.com/S0020768305003434/1-s2.0-S0020768305003434-main.pdf?_tid=a0f2f058-b974-11e4-87ee-00000aacb360&acdnat=1424487309_bf7c618c6e0146f9f91aba38ab05aa24), studeni 2014.
- [131] *Guo, Z., Shuys, L. J.*, **Constitutive modelling of hyperelastic rubber-like materials**, *Heron*, Vol. 53, No. 3, 2008., web stranica: <http://heronjournal.nl/53-3/1.pdf>, studeni 2014.
- [132] *Hart-Smith, L. J., Crisp, J. D. C.*, Large elastic deformations of thin rubber membranes, *International Journal of Engineering Science* Vol. 5, No. 1, pp. 1-24, 1967.
- [133] *Hoss, L., Marczak, R. J.*, **A New Constitutive Model for Rubber-like Materials**, *Mecánica Computacional*, Vol XXIX, pp. 2759-2773, 2010., web stranica: <http://www.cimec.org.ar/ojs/index.php/mc/article/viewFile/3194/3121>, studeni 2014.
- [134] *Mackerle, J.*, **Rubber and rubber-like materials, finite-element analyses and simulations: a bibliography (1976–1997)**, *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering*, Vol. 6, No. 2, pp. 171-198, September 1998.
- [135] *Mackerle, J.*, **Rubber and rubber-like materials, finite-element analyses and simulations, an addendum: a bibliography (1997–2003)**, *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering*, Vol. 12, No. 5, pp. 1031-1053(23), September 2004.
- [136] *Mesa-Múnera, E., et al.*, **Experimental Characterization of Material Properties to Simulate Needle Indentation Into Soft Tissues**, 6th Canadian Student Conference on Biomedical Computing and Engineering, CSCBCE'2011, pp. 55-59, May 26-28 2011, University of Western Ontario, 2011.,

- web stranica:  
[https://webdocs.cs.ualberta.ca/~wfb/ammi/publications/2011CSCBCE\\_ElizaVFinalSubmit.pdf](https://webdocs.cs.ualberta.ca/~wfb/ammi/publications/2011CSCBCE_ElizaVFinalSubmit.pdf),  
[http://www.imaging.robarts.ca/extra/CSCBCE2011/files/CSCBCE2011\\_Proceedings.pdf](http://www.imaging.robarts.ca/extra/CSCBCE2011/files/CSCBCE2011_Proceedings.pdf), studeni 2014.
- [137] *Mesa-Múnera, E., et al.*, **Inverse-FEM Characterization of a Brain Tissue Phantom to Simulate Compression and Indentation**, *Ingeniería y Ciencia*, Vol 8, No 16, pp. 11–36, 2012., web stranica: <http://www.scielo.org.co/pdf/ince/v8n16/v8n16a01.pdf>, studeni 2014.
- [138] *Nicholson, D. W., Nelson, N. W.*, **Finite-Element Analysis in Design with Rubber**, *Rubber Chemistry and Technology*, Vol. 63, No. 3, pp. 368-406., July 1990.
- [139] *Noor, S. N. A. M., Mahmud, J.*, **Skin Prestretch Evaluation Adapting Mooney-Rivlin Model**, *Journal of Medical and Bioengineering*, Vol. 4, No. 1, pp. 31-35, February 2015., web stranica: <http://www.jomb.org/uploadfile/2014/0320/20140320052728967.pdf>, studeni 2014.
- [140] *Razzaq, M. K., Okui, Y., Bhuiyan, A. R., Amin, A. F. M. S., Mitamura, H., Imai, T.*, **Application of Rheology Modeling to Natural Rubber and Lead Rubber Bearings: a Simplified Model and Low Temperature Behavior**, *Structural Eng./Earthquake Eng.*, Vol. 29, No. 2, 40-55, 2012., web stranica: <http://saifulamin.info/publication/journals/j8.pdf>, studeni 2014.
- [141] *Reppel, T., Dally, T., Weinberg, K.*, **On the Elastic Modeling of Highly Extensible Polyurea**, *Technische Mechanik*, Vol. 33, No. 1, pp. 19–33, 2013., web stranica: [http://www.uni-magdeburg.de/ifme/zeitschrift\\_tm/2013\\_Heft1/02\\_Reppel\\_Dally\\_Weinberg.pdf](http://www.uni-magdeburg.de/ifme/zeitschrift_tm/2013_Heft1/02_Reppel_Dally_Weinberg.pdf), studeni 2014.
- [142] *Schillinger, D., Ruess, M., Zander, N., Bazilevs, Y., Düster, A., Rank, E.*, **Small and large deformation analysis with the p- and B-spline versions of the Finite Cell Method**, *Comput Mech*, Vol. 50, pp. 445–478, 2012., web stranica: <http://users.ices.utexas.edu/~dominik/files/PDFs/Journals/Schillinger%20et%20al.%20Comp%20Mech%202012.pdf>, studeni 2014.
- [143] *Taber, L. A.*, **Nonlinear Theory of Elasticity**, *Applications in Biomechanics*, World Scientific, New Jersey 2004.
- [144] *Wadham-Gagnon, M., et al.*, **Hyperelastic Modeling of Rubber in Commercial Finite Element Software (ANSYS™)**, McGill University, Department of Mechanical engineering, 2006., web stranica: [http://people.mcgill.ca/files/pascal.hubert/2006\\_SAMPE\\_51\\_Wadham-Gagnon.pdf](http://people.mcgill.ca/files/pascal.hubert/2006_SAMPE_51_Wadham-Gagnon.pdf), studeni 2014.
- [145] *Wu, B., Du, X., Tan, H.*, **A three-dimensional FE nonlinear analysis of membranes**, *Computers & Structures* Vol. 59, No. 4, pp. 601-605, 1996.
- [146] *Hollenstein, M.*, **Mechanical Characterization of Soft Materials: Comparison between Different Experiments on Synthetic Specimens, Report on Diploma Thesis**, Center of Mechanics, ETH Zurich, 2005., web stranica: [http://www.zfm.ethz.ch/reports/eth\\_zfm\\_2008\\_01.pdf](http://www.zfm.ethz.ch/reports/eth_zfm_2008_01.pdf), studeni 2014.
- [147] *Yang, X.*, **Finite Element Analysis and Experimental Investigation of Tyre Characteristics for Developing Strain-Based Intelligent Tyre System**, University of Birmingham, 2011., web stranica: <http://etheses.bham.ac.uk/3072/1/Yang11PhD.pdf>, studeni 2014.
- [148] *Centeno, G. O. J.*, **Finite Element Modeling of Rubber Bushing for Crash Simulation, Experimental Tests and Validation, Master's Dissertation**, Lund University, Lund 2009.,

- <http://www.byggmek.lth.se/fileadmin/byggnadsmekanik/publications/tvsm5000/web5163.pdf>, studeni 2014.
- [149] *Karlsson, F., Persson, A., Modelling Non-linear Dynamics of Rubber Bushings - Parameter Identification and Validation, Master's Dissertation*, Lund University, Lund 2003., web stranica: <http://www.byggmek.lth.se/fileadmin/byggnadsmekanik/publications/tvsm5000/web5119.pdf>, studeni 2014.
- [150] *Olsson, A. K., Finite Element Procedures in Modelling the Dynamic Properties of Rubber, Doctoral Thesis*, Lund University, Lund 2007., web stranica: <http://www.byggmek.lth.se/fileadmin/byggnadsmekanik/publications/tvsm1000/web1021.pdf>, studeni 2014.
- [151] *Håkansson, P., Finite Element Modelling of a Rubber Block Exposed to Shock Loading, Master's Dissertation*, Lund University, Lund 2000., web stranica: <http://www.solid.lth.se/fileadmin/hallfasthetslara/utbildning/examensarbete/TFHF5087.pdf>, studeni 2014.
- [152] *Ramos, F. M. D., Vibration Analysis of an Engine Mount, Dissertation, Universidade Técnica de Lisboa*, Portugal 2008., web stranica: [https://fenix.tecnico.ulisboa.pt/downloadFile/395137851237/Vibration\\_Analysis\\_of\\_an\\_Engine\\_Mount.pdf](https://fenix.tecnico.ulisboa.pt/downloadFile/395137851237/Vibration_Analysis_of_an_Engine_Mount.pdf), [https://fenix.tecnico.ulisboa.pt/downloadFile/395137851239/Vibration\\_Analysis\\_of\\_an\\_Engine\\_Mount-Paper.pdf](https://fenix.tecnico.ulisboa.pt/downloadFile/395137851239/Vibration_Analysis_of_an_Engine_Mount-Paper.pdf), studeni 2014.

## 6. Mehanika kontinuum, teorija elastičnosti

- [153] *Dimitrienko, Y. I., Nonlinear Continuum Mechanics and Large Inelastic Deformations*, Springer, New York 2011.
- [154] *Itskov, M., Tensor Algebra and Tensor Analysis for Engineers, With Applications to Continuum Mechanics, Second Edition*, Springer, New York 2009.
- [155] *Lai, M., Krempl, E., Rubin, D., Introduction to Continuum Mechanics*, Elsevier, Burlington 2010.
- [156] *Sadd, M. H., Elasticity, Theory, Applications And Numerics*, Elsevier, Burlington 2005., web stranica: <http://iate.oac.uncor.edu/~manuel/libros/Mechanics/Elasticity/Elasticity%20%20Theory.%20applications.%20and%20numerics%20-%20M.Sadd.pdf>, [http://yunus.hacettepe.edu.tr/~boray/Elasticity.Martin\\_saad.pdf](http://yunus.hacettepe.edu.tr/~boray/Elasticity.Martin_saad.pdf), studeni 2014.
- [157] *Sadd, M. H., Elasticity, Theory, Applications And Numerics, 2E*, Elsevier, Burlington 2009., web stranica: [http://gnote.in/Branch/Civil/civil3/ebooks/Sadd\\_Elasticity\\_2e\\_Solutions\\_Manual.pdf](http://gnote.in/Branch/Civil/civil3/ebooks/Sadd_Elasticity_2e_Solutions_Manual.pdf), studeni 2014.
- [158] *Saouma, V. E., Introduction to Continuum Mechanics and Elements of Elasticity/Structural Mechanics, Lecture Notes Draft*, University of Colorado, Boulder 1998., web stranica: <https://ftp.kdis.edu.cn/211-xkkr-04/audio/EBooks/%5B%E7%89%A9%E7%90%86%E5%AD%A6%E5%8A%9B%E5%AD%A6%E7%B1%BB%E4%B9%A6%E7%B1%8D%5D.Continuum.Mechanics.and.Elements.of.Elasticity.Stru>

- [ctural.Mechanics.-Victor.E.Saouma.pdf](#),  
<http://iate.oac.uncor.edu/~manuel/libros/Mechanics/Elasticity/Continuum%20Mechanics%20and%20Elements%20of%20Elasticity%20Structural%20Mechanics%20-%20Victor%20E.Saouma.pdf>,  
 studeni 2014.
- [159] *Ward, I. M., Sweeney, J., Mechanical Properties of Solid Polymers, Third Edition*, John Wiley & Sons, Inc., Chichester 2013.
- [160] *Chen, W. F., Saleeb, A. F., Constitutive Equations for Engineering Materials, Volume 1: Elasticity and Modeling*, Elsevier, Amsterdam 1994.
- [161] *Holzappel, G. A., Ogden, R. W., Mechanics of Biological Tissue*, Springer, Berlin 2006.
- [162] *Holzappel, G. A., Ogden, R. W., Biomechanics of Soft Tissue in Cardiovascular Systems*, Springer, Wien 2003.
- [163] *Fung, Y. C., Biomechanics, Mechanical Properties of Living Tissues*, Springer, New York 1981.
- [164] *Fung, Y. C., Biomechanics, Mechanical Properties of Living Tissues, Second Edition*, Springer, New York 1993.
- [165] *Fung, Y. C., A First Course in Continuum Mechanics, for Physical and Biological Engineers and Scientists, Third Edition*, Prentice Hall, New Jersey 1994.
- [166] *Fung, Y. C., Foundations of Solid Mechanics*, Prentice Hall, Inc., New Jersey 1965.
- [167] *Fung, Y. C., Introduction to Bioengineering*, World Scientific, New Jersey 2001.
- [168] *Fung, Y. C., Tong, P., Classical and Computational Solid Mechanics*, World Scientific, New Jersey 2001.
- [169] *Truesdell, C. A., A First Course in Rational Continuum Mechanics, General Concepts. Vol 1, Second Edition*, Academic Press, Inc., New York 1991.
- [170] *Gonzalez, O., Stuart, A. M., A First Course in Continuum Mechanics*, Cambridge University Press, New York 2008.
- [171] *Wegner, J. L., Haddow, J. B., Elements of Continuum Mechanics and Thermodynamics*, Cambridge University Press, Cambridge 2009.
- [172] *Wu, H., Continuum Mechanics And Plasticity*, CRC Press, Boca Raton 2005.

## 7. Guma: konstitutivni modeli

- [173] *Arruda, E. M., Boyce, M. C., A Three-dimensional Constitutive Model for the Large Stretch Behavior of Rubber Elastic Materials*, J. Mech. Phys. Solids, Vol. 41, No. 2, pp. 389–412, 1993.
- [174] *Arruda, E. M., Boyce, M. C., Constitutive Models of Rubber Elasticity: A Review*, Rubber Chemistry and Technology: July 2000, Vol. 73, No. 3, pp. 504-523, 2000.
- [175] *Blatz, P. J., Ko, W. L., Application of Finite Elastic Theory to the Deformation of Rubbery Materials*, Transactions of the Society of Rheology, Vol. VI, pp. 223-251, 1962., web stranica: <http://core.kmi.open.ac.uk/download/pdf/10211290.pdf>, [http://authors.library.caltech.edu/34262/1/BLA\\_jor62.pdf?origin=publication\\_detail](http://authors.library.caltech.edu/34262/1/BLA_jor62.pdf?origin=publication_detail), studeni 2014.
- [176] *Ko, W. L., Application of Finite Elastic Theory to the Behavior of Rubber-like Materials, Dissertation (Ph.D.)*, California Institute of Technology, Pasadena 1963., web stranica: [http://thesis.library.caltech.edu/816/1/Ko\\_wl\\_1963.pdf](http://thesis.library.caltech.edu/816/1/Ko_wl_1963.pdf), studeni 2014.

- [177] *Dettmar, J.*, **A Finite Element Implementation of Mooney-Rivlin's Strain Energy Function In Abaqus, Theory, Coding and Application**, University of Calgary, 2000.
- [178] *Finney, R. H., Kumar, A.*, **Development of Material Constants for Nonlinear Finite Element Analysis**, 132nd Meeting, Rubber Division, American Chemical Society, Dallas 1987., web stranica: <http://www-gmap.mecanica.ufrgs.br/html/techrep/cetepo/Artigo2.pdf>, studeni 2014.
- [179] *Fu, Y. B., Ogden, R. W.*, **Nonlinear Elasticity: Theory and Applications**, Cambridge University Press, New York 2001.
- [180] *Martins, P. A. L. S., Natal Jorge, R. M., Ferreira, A. J. M.*, **A Comparative Study of Several Material Models for Prediction of Hyperelastic Properties: Application to Silicone-Rubber and Soft Tissues**, *Strain*, Vol. 42, pp. 132-147, 2006., web stranica: [http://www.researchgate.net/publication/233919200\\_A\\_comparative\\_study\\_of\\_several\\_material\\_models\\_for\\_prediction\\_of\\_hyperelastic\\_properties\\_Application\\_to\\_Silicone-Rubber\\_and\\_Soft\\_Tissues](http://www.researchgate.net/publication/233919200_A_comparative_study_of_several_material_models_for_prediction_of_hyperelastic_properties_Application_to_Silicone-Rubber_and_Soft_Tissues), studeni 2014.
- [181] *Mooney, M.*, **A Theory of Large Elastic Deformation**, *Journal of Applied Physics*, Vol. 11, No. 9, pp. 582-592, 1940.
- [182] *Ogden, R. W.*, **Non-Linear Elastic Deformations**, Dover Publications, New York 1997.
- [183] *Ogden, R. W.*, **Large Deformation Isotropic Elasticity - On the Correlation of Theory and Experiment for Incompressible Rubberlike Solids**, *Proceedings of the Royal Society of London, Series A, Mathematical and Physical Sciences (1934-1990)*, Vol. 328, No. 1575 (Jun. 27, 1972), pp. 567-583
- [184] *Rivlin, R. S.*, **Large Elastic Deformations of Isotropic Materials. IV. Further Developments of the General Theory**, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 241(835), pp. 379-397, 1948.
- [185] *Rivlin, R. S.*, **Non-Linear Continuum Theories in Mechanics and Physics and Their Applications**, Springer, New York 2010.
- [186] *Rivlin, R. S.*, **Collected Papers of R.S. Rivlin, Volume I and II**, Springer, New York 1997.
- [187] *Treloar, L. R. G.*, **The Physics of Rubber Elasticity, Third Edition**, Oxford University Press, Oxford 2005.
- [188] *Treloar, L. R. G.*, **The elasticity and related properties of rubbers**, *Reports on Progress in Physics* 36, Vol. 7, pp. 755-826, July 1973.
- [189] *Treloar, L. R. G.*, **Stress-strain data for vulcanised rubber under various types of deformation**, *Trans. Faraday Soc.*, Vol. 40, pp. 59-70, 1944.
- [190] *Yeoh, O. H.*, **Some Forms of the Strain Energy Function for Rubber**, *Rubber Chemistry and Technology*, Vol. 66, No. 5, pp. 754-771, 1993.
- [191] *Yeoh, O. H.*, **Relation between crack surface displacements and strain energy release rate in thin rubber sheets**, *Mech Mater*, Vol. 34, No. 8, pp. 459-474, 2002.

---

## 8. Verifikacija, validacija

---

- [192] *Konter, A.*, **Advanced Finite Element Contact Benchmarks**, FENET, 2005., web stranica: [http://www.nafems.org/downloads/FENet\\_Deliverables/Technology\\_Area\\_Reports/fenet\\_d3613\\_dle](http://www.nafems.org/downloads/FENet_Deliverables/Technology_Area_Reports/fenet_d3613_dle)

- [advanced\\_finite\\_element\\_contact\\_benchmarks.pdf/](#), [http://www.fe-net.org/downloads/FENet\\_Deliverables/Technology\\_Area\\_Reports/fenet\\_d3613\\_dle\\_advanced\\_finite\\_element\\_contact\\_benchmarks.pdf](http://www.fe-net.org/downloads/FENet_Deliverables/Technology_Area_Reports/fenet_d3613_dle_advanced_finite_element_contact_benchmarks.pdf), svibanj 2014.
- [193] *Konter, A.*, **How to Undertake a Contact and Friction Analysis**, Nafems, Glasgow 2000., web stranica: [http://www.nafems.org/publications/browse\\_buy/browse\\_by\\_topic/contact/ht15/](http://www.nafems.org/publications/browse_buy/browse_by_topic/contact/ht15/), studeni 2014.
- [194] *Ahmadi, H., Muhr, A.*, **Design of Elastomeric Engineering Components using FEA: current practice and future trends**, FENET, 2005., web stranica: [http://www.nafems.org/downloads/FENet\\_Meetings/Wiesbaden\\_Germany\\_Nov\\_2001/FENET\\_Wiesbaden\\_Nov2001\\_Tech\\_Issues\\_DLE\\_Ahmadi.pdf](http://www.nafems.org/downloads/FENet_Meetings/Wiesbaden_Germany_Nov_2001/FENET_Wiesbaden_Nov2001_Tech_Issues_DLE_Ahmadi.pdf), svibanj 2014.
- [195] *Harkness, H., Ang, G., Vijalapura, P., Cojocar, D.*, **Contact Stress Accuracy with Robust and Broadly Applicable Implicit Contact Algorithm**, Nafems, 2011., web stranica: <http://www.3ds.com/fileadmin/PRODUCTS/SIMULIA/PDF/conference-papers/NAFEMS-Cross-Contact-Stress-Accuracy-with-Robust-Broadly.pdf>, studeni 2014.
- [196] *Hertz, H.*, **Über die Berührung fester elastischer Körper**, J. Reine Angew, Journal für die reine und angewandte Mathematik Vol. 92, pp. 156-171, 1881., web stranica: <http://www.lajss.org/HistoricalArticles/Hertz.pdf>, studeni 2014.
- [197] *Franke, D., Düster, A., Nübel, V., Rank, E.*, **A comparison of the h-, p-, hp-, and rp-version of the FEM for the solution of the 2D Hertzian contact problem**, Computational Mechanics 45, Vol. 5, pp. 513–522, 2010.
- [198] *Radzimovsky, E. I.*, **Stress distribution and strength condition of two rolling cylinders pressed together**, University of Illinois, Engineering Experiment Station, Bulletin, No. 408, 1953., web stranica: <https://www.ideals.illinois.edu/bitstream/handle/2142/4380/engineeringexperv00000i00408.pdf?sequence=3>, travanj 2015.
- [199] *Schaeffler*, **Technical Pocket Guide STT**, Schaeffler Technologies AG & Co. KG, 2014.
- [200] *Boresi, A. P., Schmidt, R. J.*, **Advanced Mechanics of Materials, 6th Ed.**, Wiley, New York 2003.
- [201] *Horvat, L.*, **Numeričko modeliranje procesa deformiranja epruveta za lomno mehanička ispitivanja**, Rad za natječaj dodjele Rektorove nagrade u akademskoj godini 2011./2012., Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb, 2012.
- [202] *Timoshenko, S. P.*, **LXVI. On the Correction for Shear of the Differential Equation for Transverse Vibrations of Prismatic bars**, Philosophical Magazine, Series 6, Vol. 41, pp. 744–746, 1921.
- [203] *Timoshenko, S. P., Goodier, J. N.*, **Theory of elasticity**, McGraw-Hill Book Co., New York 1951., web stranica: [http://esfahanian.iut.ac.ir/sites/esfahanian.iut.ac.ir/files/files\\_course/theory\\_of\\_elasticity\\_-\\_timoshenko.pdf](http://esfahanian.iut.ac.ir/sites/esfahanian.iut.ac.ir/files/files_course/theory_of_elasticity_-_timoshenko.pdf), <http://iate.oac.uncor.edu/~manuel/libros/Mechanics/Elasticity/Theory%20of%20Elasticity%20-%20TIMOSHENKO.pdf>, studeni 2014.



- [204] Cowper, G. R., **The Shear Coefficients in Timoshenko's Beam Theory**, ASME Journal of Applied Mechanics 33, Vol. 2, pp. 335–340, 1966.
- [205] Pickhaver, J. A., **Numerical modelling of building response to tunnelling**, Dissertation, University of Oxford, 2006., <http://www.eng.ox.ac.uk/civil/publications/theses/pickhaver.pdf>, <http://ora.ouls.ox.ac.uk/objects/uuid:570ebfd5-ec3e-4a0a-a559-d1efdde9e20/datastreams/>, studeni 2013.
- [206] Oechsner, A., Merkel, M., **One-Dimensional Finite Elements: An Introduction to the FE Method**, Springer, New York 2013.
- [207] *The Engineering ToolBox*, **Friction and Coefficients of Friction**, web stranica: [http://www.engineeringtoolbox.com/friction-coefficients-d\\_778.html](http://www.engineeringtoolbox.com/friction-coefficients-d_778.html), prosinac 2013.
- [208] Van Paepegem, W., De Geyter, K., Vanhooymissen, P., Degrieck, J., **Effect of friction on the hysteresis loops from three-point bending fatigue tests of fibre-reinforced composites**, Composite Structures, 72(2), 212-217, 2006., web stranica: [http://www.composites.ugent.be/ftp/VanPaepegem\\_2006\\_Composite\\_Structures.pdf](http://www.composites.ugent.be/ftp/VanPaepegem_2006_Composite_Structures.pdf), prosinac 2013.
- [209] Belytschko, T., Liu, W. K., Moran, B., **Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures**, John Wiley & Sons, Inc., Chichester 2000.
- [210] Simo, J. C., Armero, F., **Geometrically Nonlinear Enhanced Strain Mixed Methods and the Method of Incompatible Modes**, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 33, pp. 1413–1449, 1992.
- [211] Brink, U., Stein, E., **On some Mixed Finite Element Methods for Incompressible and Nearly Incompressible Finite Elasticity**, Computational Mechanics, Vol. 19, pp. 105–119, 1996.
- [212] Betsch, P., Gruttmann, F., Stein, E., **A 4-node finite shell element for the implementation of general hyperelastic 3d-elasticity at finite strains**, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 130, pp. 75-79, 1995.
- [213] Kim, B., et al., **A Comparison Among Neo-Hookean Model, Mooney-Rivlin Model, and Ogden Model for Chloroprene Rubber**, Int. J. Precis. Eng. Man. Vol. 13, No. 5, pp. 759-764, 2012.
- [214] Korunović, N., Trajanović, M., Manić, D., Manić, M., **Modeliranje gume za potrebe analize pneumatika primenom metode konačnih elemenata**, Časopis Svet polimera, Vol. 7, No. 3, 73-108, pp. 85-94, 2004., web stranica: [https://www.academia.edu/1002518/Modeliranje\\_gume\\_za\\_analizu\\_pneumatika\\_primenom\\_metoda\\_kona%C4%8Dnih\\_elementa](https://www.academia.edu/1002518/Modeliranje_gume_za_analizu_pneumatika_primenom_metoda_kona%C4%8Dnih_elementa), studeni 2014.
- [215] Klinkel, S., Govindjee, S., **Using finite strain 3D-material models in beam and shell elements**, Engineering Computations, Vol. 19, No. 8, pp. 902-921, 2002.
- [216] Klinkel, S., Gruttmann, F., Wagner, W., **A robust non-linear solid shell element based on a mixed variational formulation**, Comput. Meth. Appl. M., Vol. 195, pp. 179–201, 2006.
- [217] Selvadurai, A. P. S., **Deflections of a rubber membrane**, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, Vol. 54, pp. 1093-1119, 2006.
- [218] Sussman, T., Bathe, K. J., **A finite element formulation for nonlinear incompressible elastic and inelastic analysis**, Computers & Structures, Vol. 26., No. 1/2, pp. 357-409, 1987., web stranica:

- [http://web.mit.edu/kjb/www/Publications\\_Prior\\_to\\_1998/A\\_Finite\\_Element\\_Formulation\\_for\\_Nonlinear\\_Incompressible\\_Elastic\\_and\\_Inelastic\\_Analysis.pdf](http://web.mit.edu/kjb/www/Publications_Prior_to_1998/A_Finite_Element_Formulation_for_Nonlinear_Incompressible_Elastic_and_Inelastic_Analysis.pdf), studeni 2014.
- [219] *Drucker, D. C.*, **A definition of stable inelastic material**, **Technical Report No. 2**, Brown University, Providence 1957., <http://www.dtic.mil/dtic/tr/fulltext/u2/143756.pdf>, <http://oai.dtic.mil/oai/oai?&verb=getRecord&metadataPrefix=html&identifier=AD0143756>, <http://www.dtic.mil/cgi-bin/GetTRDoc?Location=U2&doc=GetTRDoc.pdf&AD=AD0143756>, studeni 2014.
- [220] *Drucker, D. C., Prager, W.*, **Soil Mechanics and Plastic Analysis or Limit Design**, Quarterly of Applied Mathematics, Vol. 10, pp. 157-165, 1952.
- [221] *Chernyi, G. G., et al.*, **Advances in Applied Mechanics, Volume 9**, Academic Press, New York 1966.
- [222] *Gent, A. N.*, **On The Relation Between Indentation Hardness and Young's Modulus**, Rubber Chemistry and Technology, Vol. 31, No. 4, pp. 896-906, 1958.
- [223] *Meththananda, I. M., Parker, S., Patel, M. P., Braden, M.*, **The relationship between Shore hardness of elastomeric dental materials and Young's modulus**, Dental Materials, Vol. 25, No. 8, pp. 956-959, 2009.
- [224] *Shukul, A. K., Pandey, A. M.*, **Relation between Shore Hardness and Stress Induced in Engine Isolators**, International Review of Applied Engineering Research, ISSN 2248-9967 Vol. 4, No. 1, pp. 11-14, 2014., web stranica: [http://www.ripublication.com/iraer-spl/iraerv4n1spl\\_02.pdf](http://www.ripublication.com/iraer-spl/iraerv4n1spl_02.pdf), studeni 2014.
- [225] *Chevalier-Cléret-Eltec*, **Young Modulus for Rubber**, 29. 01. 2013., web stranica: <http://www.chevalier-cleret.com/event/young-modulus-for-rubber.html>, studeni 2014.
- [226] *Scott, S., Ko, J., Shiraiwa, S.*, **SE memo 101b: allowable thickness of Viton sheet**, November 25, 2008., web stranica: <http://www.psf.mit.edu/~sscott/MSEmemos/mse-memo-101b.pdf>, studeni 2014.
- [227] *Kunz, J., Studer, M.*, **Component Design: Determining the Modulus of Elasticity in Compression via the Shore A Hardness**, Kunststoffe international 2006/06, Verlag, Munich 2006., web stranica: [https://www.kunststoffe.de/en/\\_storage/asset/588536/storage/master/file/6112709/download/Component%20Design:%20Determining%20the%20Modulus%20of%20Elasticity%20in%20Compression%20via%20the%20Shore%20A%20Hardness.pdf](https://www.kunststoffe.de/en/_storage/asset/588536/storage/master/file/6112709/download/Component%20Design:%20Determining%20the%20Modulus%20of%20Elasticity%20in%20Compression%20via%20the%20Shore%20A%20Hardness.pdf), studeni 2014.
- [228] *Gaida, G.*, **Nichtlineare FEM – Berechnung zur Drehmomentoptimierung beim Betätigen von Absperklappen**, Dissertation, Universität GH Essen, 2001., web stranica: <http://duepublico.uni-duisburg-essen.de/servlets/DerivateServlet/Derivate-10373.xml?lang=en>, studeni 2014.
- [229] *Bathe, K. J.*, **Nonlinear Finite Element Analysis and Adina**, **Proceedings of the 4th ADINA Conference**, Pergamon Press, New York 1983.
- [230] *Zheng, H.*, **On the predictive capability and stability of rubber material models**, Massachusetts Institute of Technology, 2008., web stranica: <http://dspace.mit.edu/bitstream/handle/1721.1/45144/311854384.pdf?sequence=1>, prosinac 2014.
- [231] *Humphrey, J. D.*, **Cardiovascular Solid Mechanics: Cells, Tissues, and Organs**, Springer, New York 2002.
- [232] *Alexander, H.*, **Tensile instability of initially spherical balloons**, Int. J. Engng Sci., Vol. 9, No. 1, pp. 151-162, Pergamon Press, 1971.

- [233] *Ericksen, J. L.*, **Introduction to the Thermodynamics of Solids, Revised Edition**, Springer, New York 1998.
- [234] *Lund, H. M.*, **The impact and rupture of a water-filled balloon on a rigid surface, Dissertation**, University of Cambridge, Cambridge 2013., web stranica: <http://www.damtp.cam.ac.uk/lab/people/sd/papers/Theses/HughLund2013.pdf>, studeni 2014.
- [235] *Müller, I., Strehlow, P.*, **Rubber and Rubber Balloons, Paradigms of Thermodynamics**, Springer-Verlag, Berlin 2004.
- [236] *Needleman, A.*, **Inflation of Spherical Rubber Balloons**, Int. J. Solids Structures, Vol. 13, No. 5, pp. 409-421, Pergamon Press, 1977., web stranica: [http://www.researchgate.net/publication/223841118\\_Inflation\\_of\\_spherical\\_rubber\\_balloons](http://www.researchgate.net/publication/223841118_Inflation_of_spherical_rubber_balloons), studeni 2014.
- [237] *Rajagopal, K. R.*, **Conspectus of concepts of elasticity**, Mathematics and Mechanics of Solids, Vol. 16, No. 5, pp. 536–562, 2011.
- [238] *Shuib, S., et al.*, **Analysis of Stress on Inflation of Balloon Catheter using Finite Element Method**, 3rd Kuala Lumpur International Conference on Biomedical Engineering 2006, IFMBE Proceedings, Vol. 15, pp. 178-181, 2007.
- [239] *Pascon, J. P., Coda, H. B.*, **A shell finite element formulation to analyze highly deformable rubber-like materials**, Lat. Am. j. solids struct., Vol. 10, No. 6, pp. 1177-1209, 2013., web stranica: <http://www.scielo.br/pdf/lajss/v10n6/a06v10n6.pdf>, studeni 2014.
- [240] *Sansour, C., Kollmann, F. G.*, **Families of 4-node and 9-node finite elements for a finite deformation shell theory. An assesment of hybrid stress, hybrid strain and enhanced strain elements**, Computational Mechanics, Vol. 24, pp. 435-447, 2000.
- [241] *Sze, K. Y., Zheng, S. J., Lo, S. H.*, **A stabilized eighteen-node solid element for hyperelastic analysis of shells**, Finite Elements in Analysis and Design, Vol. 40, pp. 319-340, 2004.
- [242] *Korelc, J., Šolinc, U., Wriggers, P.*, **An improved EAS brick element for finite deformation**, Comput. Mech., Vol. 46, pp. 641-659, 2010.
- [243] *Basar, Y., Ding, Y.*, **Finite-rotation shell elements for the analysis of finite-rotation shell problems**, Int. Journal For Numerical Methods In Engineering, Vol. 34, No. 1, pp. 165- 169, 1992.
- [244] *Büchter, N., Ramm, E., Roehl, D.*, **Three-dimensional extension of non-linear shell formulation based on the enhanced assumed strain concept**, Int. J. Numer. Methods Eng., Vol. 37, No. 15, pp. 2251–2568, 1994.
- [245] *Büchter, N., Ramm, E.*, **Shell theory versus degeneration – a comparison in large rotation finite element analysis**, Int. J. Numer. Meth. Eng., Vol. 34, pp. 39–59, 1992.
- [246] *Campello, E. M. B., Pimenta, P. M., Wriggers, P.*, **A triangular finite shell element based on a fully nonlinear shell formulation**, Computational Mechanics, Springer-Verlag, Vol. 31, No. 6, 505-518, 2003.
- [247] *Coda, H. B., Paccola, R. R.*, **An Alternative Positional FEM Formulation for Geometrically Non-linear Analysis of Shells: Curved Triangular Isoparametric Elements**, Computational Mechanics, Springer-Verlag, Vol. 40, No. 1, 185-200, 2007.

- [248] *Petchsasithon, A., Gosling, P. D., A locking-free hexahedral element for the geometrically non-linear analysis of arbitrary shells*, Computational Mechanics, Springer-Verlag, Vol. 35, No. 2, pp. 94-114, 2005.
- [249] *Hauptmann, R., Schweizerhof, K., Doll, S., Extension of the 'solid-shell' concept for application to large elastic and large elastoplastic deformations*, Int. J. Numer. Methods Eng., Vol. 49, pp. 1121-1141, 2000.
- [250] *Wriggers, P., Gruttmann, F., Thin shells with finite rotations formulated in Biot stresses: theory and finite element formulation*, Int. J. Numer. Meth. Eng., Vol. 36, pp. 2049-2071, 1993., web stranica: <http://onlinelibrary.wiley.com/sci-hub.org/doi/10.1002/nme.1620361207/abstract>, <http://lib.gen.in/ocean/205cfdeaa64d4f27735da284686b5d86/wriggers1993.pdf>, studeni 2014.
- [251] *Torkamani, M. A. M., Shieh, J.-H., Higher-order stiffness matrices in nonlinear finite element analysis of plane truss structures*, Engineering Structures, Vol. 33, No. 12, pp. 3516-3526, 2011.
- [252] *Basar, Y., Ding, Y., Shear deformation models for large-strain shell analysis*, Int. J. Solids and Struct., Vol. 34, No. 14, pp. 1687-1708, 1997.
- [253] *Basar, Y., Itskov, M., Finite Element Formulation of the Ogden Material Model with Application to Rubber-Like Shells*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 42, No. 7, pp. 1279-1305, 1998.
- [254] *Gruttmann, F., Taylor, R. L., Theory and Finite element formulation of rubberlike membrane shells using principal stretches*, Int. J. Numer. Meth. Engng., Vol. 35, pp. 1111-1126, 1992.
- [255] *Mahmud, J., et al., A Parametric Study and Simulations in Quantifying Human Skin Hyperelastic Parameters*, Procedia Engineering, Vol. 41, No. 1, pp. 1580-1586, 2012.
- [256] *Mueller-Hoeppe, D., Loehnert, S., Reese, S., Recent Developments and Innovative Applications in Computational Mechanics*, Springer-Verlag, Berlin 2011.
- [257] *Riks, E., An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems*, International Journal of Solids and Structures, Vol. 15, No. 7, pp. 529-551, 1979.
- [258] *Wunderlich, W., Stein, E., Bathe, K. J., Nonlinear Finite Element Analysis in Structural Mechanics*, Proceedings of the Europe-U.S. Workshop, Springer-Verlag, Berlin 1981.

## 9. Programski paketi, aplikacije

- [259] *Dassault Systèmes, Abaqus 6.9-3*, web stranica: <http://www.3ds.com/products-services/simulia/portfolio/abaqus/overview/>, kolovoz 2012.
- [260] *Dassault Systèmes, Abaqus 6.9 User's guide and theoretical manual*, Hibbitt, Karlsson & Sorensen, Inc., 2009.
- [261] *Dassault Systèmes, Simulia Abaqus 6.9 Documentation*, web stranica: [http://www.tu-chemnitz.de/projekt/abq\\_hilfe/docs/v6.9/](http://www.tu-chemnitz.de/projekt/abq_hilfe/docs/v6.9/), <http://abaqusdoc.ucalgary.ca/v6.9/>, <http://130.149.89.49:2080/v6.9/>, listopad 2013.
- [262] *King, S., Richards, T., Solving Contact Problems with Abaqus*, DS UK Ltd, Coventry March 2013. web stranica: [http://marketing.intrinsys.co.uk/CONTACT\\_SEMINAR.pdf](http://marketing.intrinsys.co.uk/CONTACT_SEMINAR.pdf), [http://moodle.insa-toulouse.fr/pluginfile.php/42654/mod\\_resource/content/3/CONTACT\\_Imulia.pdf](http://moodle.insa-toulouse.fr/pluginfile.php/42654/mod_resource/content/3/CONTACT_Imulia.pdf), studeni 2014.

- [263] *Miller, K., Dalrymple, T., Rubber Material Curve Fitting with ABAQUS/CAE*, 2000 Michigan Regional ABAQUS Users' Meeting, 2000., web stranica: <http://www.axelproducts.com/downloads/CurveFitCAE.pdf>, studeni 2014.
- [264] *MSC.Software Corporation, MSC SimDesigner R4 WBE CATIA V5R18*, web stranica: <http://www.mscsoftware.com/Products/CAE-Tools/SimDesigner.aspx>, kolovoz 2012.
- [265] *Dassault Systèmes, Catia V5R18*, web stranica: <http://www.3ds.com/products/catia/>, kolovoz 2012.
- [266] *MSC.Software Corporation, Structural and Thermal Analysis using SimDesigner CATIA Edition, SMD101 Workbook*, December 2009., web stranica: <http://www.mscsoftware.com/training-materials>, studeni 2014.
- [267] *MSC.Software Corporation, CATIA V5 Structural Analysis for the Designer, CAT509 Workshops*, March 2002., web stranica: <https://www.scribd.com/doc/14583772/Catia-v5-Structural-Analysis-for-the-Designer>, studeni 2014.
- [268] *MSC.Software Corporation, Nonlinear Finite Element Analysis of Elastomers*, 2010., web stranica: [ftp://ftp.mscsoftware.com.tw/download/documentation/marc\\_fea\\_elastomers\\_2000.pdf](ftp://ftp.mscsoftware.com.tw/download/documentation/marc_fea_elastomers_2000.pdf), [http://www.mscsoftware.com/assets/103\\_elast\\_paper.pdf](http://www.mscsoftware.com/assets/103_elast_paper.pdf), <http://www.mathfem.it/MS/MSC-Marc-WP-Nonlinear-FEA-Elastomers.pdf>, studeni 2014.
- [269] *MSC.Software Corporation, Experimental Elastomer Analysis, Training material course MAR 103*, Santa Ana, CA, U.S.A. 2010., web stranica: <https://www.scribd.com/doc/220691172/MS-marc-training-mar103>, <ftp://ftp.mscsoftware.com.tw/download/training/mar103/mar103.pdf>, studeni 2014.
- [270] *MSC.Software Corporation, MSC.Marc Volume A, Theory and User Information, Version 2005*, Santa Ana, CA, U.S.A. 2004., web stranica: [http://www.geology.um.maine.edu/user/scott\\_johnson/share/MarcDocs/MarcDocs/docs/vola/vola.pdf](http://www.geology.um.maine.edu/user/scott_johnson/share/MarcDocs/MarcDocs/docs/vola/vola.pdf), studeni 2014.
- [271] *Papoulia, K. D., Fully Nonlinear Hyperelastic Analysis of Nearly Incompressible Solids: Elements and Material Models in MSC/Nastran*, The MacNeal-schwendler Corporation, Los Angeles, MSC 1995 World Users' Conference Proceedings, 1995., web stranica: <http://web.mscsoftware.com/support/library/conf/wuc95/p02995.pdf>, studeni 2014.
- [272] *Dassault Systèmes, SolidWorks 2012 SP1.0*, web stranica: <http://www.solidworks.com/>, <http://www.3ds.com/products-services/solidworks/>, ožujak 2014.
- [273] *Dassault Systèmes, SolidWorks 2012 SP1.0 Help*, 2008.
- [274] *Jakel, R., Analysis of Hyperelastic Materials with MECHANICA, Theory and Application Examples, Presentation for the 2nd SAXSIM*, PTC, Inc., 27. April 2010., web stranica: [http://www.qucosa.de/fileadmin/data/qucosa/documents/5995/data/Analysis\\_of\\_Hyperelastic\\_Materials\\_with\\_MECHANICA.pdf](http://www.qucosa.de/fileadmin/data/qucosa/documents/5995/data/Analysis_of_Hyperelastic_Materials_with_MECHANICA.pdf), studeni 2014.
- [275] *Altidis, P., Warner, B., Adams, V., Analyzing Hyperelastic Materials w/ Some Practical Considerations*, Midwest ANSYS Users Group, IMPACT, May 18, 2005., web stranica: [http://ansys.net/papers/ANSYS\\_Users\\_Group\\_Hyperelastic\\_Materials.pdf](http://ansys.net/papers/ANSYS_Users_Group_Hyperelastic_Materials.pdf), studeni 2014.
- [276] *Wolfram Research, Wolfram Mathematica 7.0 online dokumentacija*, web stranica: <http://reference.wolfram.com/mathematica/guide/Mathematica.html>, siječanj 2011.
- [277] *Microsoft Corporation, MS Excel 2007*, <http://office.microsoft.com/en-001/>, veljača 2014.

- [278] *Microsoft Corporation, MS Excel 2007 Documentation*, Microsoft Corporation, 2007.
- [279] *Minitab Inc., Minitab 17, Help*, Minitab Inc., USA, 2013., web stranica: <http://www.minitab.com/en-us/>, listopad 2014.
- [280] *Casio, fx-991ES-PLUS*, web stranica: <https://edu.casio.com/products/adves/fx991esplus/>, ožujak 2014.
- [281] *Cebon, D., Ashby, M. F., Bream, C., Lee-Shothaman, L., CES EduPack 2009. User's Manual*, Release 4, Granta Design Limited, 2009., web stranica: <http://www.grantadesign.com/download/pdf/EduPack-2009-Manual.pdf>, studeni 2014.
- [282] *Frantz, J., g3data 1.5.1*, web stranica: <http://www.frantz.fi/software/g3data.php>, studeni 2014.
- [283] *Vink System Design & Analysis, HertzWin*, web stranica: <http://en.vinksda.nl/toolkit-mechanical-calculations/hertz-contact-stress-calculations>, <http://www.vinksda.nl/jke4fbb3LJikjTrGb9dCb/HertzWin.zip>, ožujak 2015.
- [284] *Skacel, P., Hyperfit, A fitting utility for parameter identification of hyperelastic constitutive models*, web stranica: <http://www.hyperfit.wz.cz/>, studeni 2014.
- [285] *de Bortoli, D., et al., Hyperfit – Curve Fitting Software For Incompressible Hyperelastic Material Models*, Proceedings of COBEM, 2011., web stranica: [http://www.researchgate.net/profile/Eduardo\\_Moetke\\_Wrubleski/publication/264720953\\_HYPERFIT\\_CURVE\\_FITTING\\_SOFTWARE\\_FOR\\_INCOMPRESSIBLE\\_HYPERELASTIC\\_MATERIAL\\_MODEL/links/53ecaa410cf24f241f1596f8.pdf?origin=publication\\_detail](http://www.researchgate.net/profile/Eduardo_Moetke_Wrubleski/publication/264720953_HYPERFIT_CURVE_FITTING_SOFTWARE_FOR_INCOMPRESSIBLE_HYPERELASTIC_MATERIAL_MODEL/links/53ecaa410cf24f241f1596f8.pdf?origin=publication_detail), prosinac 2014.
- [286] *Bergström, J., MCalibration 2.4.1, Fast and Powerful Material Model Calibration Tool*, web stranica: <https://polymerfem.com/content.php?9-MCalibration>, studeni 2014.
- [287] *Mentor Graphics, FloEFD 12.1.0 2343 For Catia V5*, web stranica: <http://www.mentor.com/products/mechanical/floefd/>, lipanj 2013.