

# Analiza naprežanja u debelostijenim cilindričnim posudama i cijevima

---

**Kovačić, Luka**

**Undergraduate thesis / Završni rad**

**2015**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:235:743497>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-07-17**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# ZAVRŠNI RAD

**Luka Kovačić**

Zagreb, 2015.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# ZAVRŠNI RAD

Mentor:

Doc. dr. sc. Tomislav Jarak

Student:

Luka Kovačić

Zagreb, 2015.

Izjavljujem da sam ovaj završni rad izradio samostalno koristeći znanja stečena na Fakultetu strojarstva i brodogradnje te navedenu literaturu.

Zahvaljujem se svojem mentoru doc. dr. sc. Tomislavu Jarku na pomoći, prenesenom znanju i korisnim savjetima prilikom izrade završnog rada. Također se zahvaljujem doc. dr. sc. Igoru Karšaju i prof. dr. sc. Draganu Pustaiću.

Veliko hvala mojim roditeljima na podršci i potpori tokom školovanja.

Luka Kovačić



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE



Središnje povjerenstvo za završne i diplomske ispite  
Povjerenstvo za završne ispite studija strojarstva za smjerove:  
procesno-energetski, konstrukcijski, brodstrojarski i inženjersko modeliranje i računalne simulacije

Sveučilište u Zagrebu	
Fakultet strojarstva i brodogradnje	
Datum 25-02-2015	Prilog
Klasa: 602-04/15-6/3	
Ur.broj: 15-7703-15-54	

## ZAVRŠNI ZADATAK

Student: **Luka Kovačić** Mat. br.: 0035185835

Naslov rada na hrvatskom jeziku: **Analiza naprezanja u debelostijenim cilindričnim posudama i cijevima**

Naslov rada na engleskom jeziku: **Stress Analysis in Thick-Walled cylindrical vessels and tubes**

Opis zadatka:

Debelostijene cilindrične posude i cijevi su često korišteni konstrukcijski elementi u industriji, npr. kao dijelovi cjevovoda i posuda pod tlakom ili u steznim spojevima između strojnih dijelova. Takve konstrukcije su često izložene dugotrajnim opterećenjima koja mogu izazvati značajno puzanje materijala, dok se kod posuda opterećenih unutarnjim tlakom, odnosno pri njihovoj proizvodnji, dopušta pojava određenih plastičnih deformacija. Stoga je pravilna analiza naprezanja u debelostijenim posudama i ljuskama u neelastičnom području od velike važnosti za rješavanje niza inženjerskih problema.

U radu je potrebno provesti analizu naprezanja u debelostijenim cilindričnim posudama i cijevima u elastoplastičnom i viskoelastičnom području. Provesti analizu deformacija i naprezanja u elasto-plastičnom području za postupak izrade debelostijenih cilindričnih cijevi metodom autofretage (*autofrettage*). Analizu provesti za idealnoplastični materijal, a zaostala naprezanja odrediti uz pretpostavku o linearnom elastičnom ponašanju materijala pri rasterećenju. Za viskoelastični materijal provesti stacionarnu analizu deformacija i naprezanja uz pretpostavku o linearnom elastičnom ponašanju materijala pri dilataciji i linearnom viskoelastičnom ponašanju pri distorziji. Odrediti raspodjele naprezanja po debljini stijenke i vremensku promjenu radijalnih pomaka. Proračune je potrebno provesti numerički primjenom metode konačnih elemenata koristeći programski paket *Abaqus*. Rezultate prikazati konturno i pomoću dijagrama i usporediti s dostupnim analitičkim rješenjima.


U radu navesti korištenu literaturu i eventualno dobivenu pomoć.

Zadatak zadan:  
25. studenog 2014.


Rok predaje rada:  
1. rok: 26. veljače 2015.  
2. rok: 17. rujna 2015.

Predviđeni datumi obrane:  
1. rok: 2., 3., i 4. ožujka 2015.  
2. rok: 21., 22., i 23. rujna 2015.

Zadatak zadao:

  
Doc. dr. sc. Tomislav Jarak

Predsjednik Povjerenstva:

  
Prof. dr. sc. Igor Balen

**SADRŽAJ**

SADRŽAJ.....	I
POPIS SLIKA.....	III
POPIS TABLICA.....	V
POPIS OZNAKA.....	VI
SAŽETAK.....	VIII
SUMMARY.....	IX
1. UVOD.....	1
1.1. Primjena i proizvodnja debelostijenih posuda i cijevi.....	1
1.2. Geometrija debelostijenih cijevi.....	1
1.3. Opisivanje ponašanja materijala.....	2
1.3.1. Elasto-plastičnost.....	2
1.3.2. Viskoelastičnost.....	2
1.4. Autofretaža.....	2
2. O METODI KONAČNIH ELEMENATA.....	4
2.1. Programski paketi za proračun metodom konačnih elemenata.....	4
2.2. Tipovi konačnih elemenata.....	5
2.2.1. Dvodimenzijski konačni elementi.....	5
2.2.2. Osnosimetrični konačni elementi.....	6
2.2.3. Trodimenzijski konačni elementi.....	7
3. ELASTIČNO DEFORMIRANJE DEBELOSTIJENIH CIJEVI.....	9
3.1. Analitičko rješenje.....	9
3.1.1. Opterećenje unutarnjim tlakom.....	11
3.2. Konvergencija rješenja dobivenih metodom konačnih elemenata.....	14
3.2.1. 2D konačni elementi.....	14
3.2.1.1. Trokutni 2D konačni elementi 1. reda.....	15
3.2.1.2. Trokutni 2D konačni elementi 2. reda.....	18
3.2.1.3. Četverokutni 2D konačni elementi 1. reda.....	18
3.2.1.4. Četverokutni 2D konačni elementi 2. reda.....	19
3.2.2. Osnosimetrični konačni elementi.....	20
3.2.2.1. Trokutni osnosimetrični konačni elementi 1. reda.....	21
3.2.2.2. Trokutni osnosimetrični konačni elementi 2. reda.....	22

3.2.2.3.	Pravokutni osnosimetrični konačni elementi.....	24
3.2.3.	3D konačni elementi.....	24
3.2.3.1.	Tetraedarski konačni elementi 1. reda.....	26
3.2.3.2.	Tetraedarski konačni elementi 2. reda.....	27
3.2.3.3.	Heksaedarski konačni elementi.....	28
3.3.	Zaključak o odabiru konačnih elemenata .....	29
4.	ELASTO-PLASTIČNO DEFORMIRANJE DEBELOSTJENIH CIJEVI .....	30
4.1.	Elasto-plastični materijal .....	30
4.2.	Uvjet tečenja materijala .....	31
4.3.	Analitičko rješenje.....	32
4.3.1.	Pojava prvih plastičnih deformacija .....	32
4.3.2.	Granično stanje .....	35
4.3.3.	Zaostala naprezanja nakon rasterećenja .....	35
4.3.4.	Optimalna autofretaža .....	36
4.4.	Proračun sa zadanim podacima .....	38
4.5.	Proračun metodom konačnih elemenata.....	43
5.	VISKOELASTIČNO DEFORMIRANJE DEBELOSTIJENIH CIJEVI .....	49
5.1.	Ponašanje viskoelastičnih materijala .....	49
5.2.	Mehanički modeli viskoelastičnih materijala .....	50
5.3.	Konstitutivne jednadžbe .....	51
5.3.1.	Diferencijalna formulacija konstitutivnih jednadžbi.....	51
5.3.2.	Integralna formulacija konstitutivnih jednadžbi .....	52
5.3.3.	Pristup pomoću varijabli stanja.....	53
5.4.	Analitičko rješenje.....	54
5.5.	Proračun sa zadanim podacima .....	57
5.6.	Proračun metodom konačnih elemenata.....	59
6.	ZAKLJUČAK.....	63
	LITERATURA.....	65
	PRILOZI.....	66

**POPIS SLIKA**

Slika 1. Geometrija debelostijene cijevi u cilindričnom koordinatnom sustavu.....	1
Slika 2. Brizgaljka goriva podvrgnuta postupku autofretaže.....	3
Slika 3. Shematski prikaz računalnog programa.....	5
Slika 4. Shematski prikaz trokutnih elemenata a) CPS3 i b) CPS6 .....	6
Slika 5. Shematski prikaz četverokutnih elemenata a) CPS4 i b) CPS8 .....	6
Slika 6. Shematski prikaz tetraedarskih elemenata a) C3D4 i b) C3D10.....	7
Slika 7. Shematski prikaz prizmatičnih elemenata a) C3D8 i b) C3D20 .....	8
Slika 8. Diferencijalni element debelostijene cijevi.....	9
Slika 9. Raspodjela normalnih napreznja po presjeku cijevi .....	12
Slika 10. Zadana geometrija cijevi.....	13
Slika 11. Proračunski 2D model.....	15
Slika 12. Radijalni pomak pri diskretizaciji različitim brojem CPS3 elemenata / mm.....	17
Slika 13. Raspodjela radijalnog pomaka uz diskretizaciju s 60 CPS4 elemenata / mm.....	19
Slika 14. Konvergencija 2D konačnih elemenata .....	20
Slika 15. Proračunski osnosimetrični model u paketu Abaqus .....	21
Slika 16. Raspodjela radijalnog pomaka pri diskretizaciji s 4 CAX3 elemenata / mm.....	22
Slika 17. Konvergencija osnosimetričnih konačnih elemenata .....	23
Slika 18. Raspodjela radijalnog pomaka za model s 2 CAX4 konačna elementa / mm.....	24
Slika 19. Radijalni pomak za model cijevi diskretiziran s 768 konačnih elemenata / mm .....	26
Slika 20. Radijalni pomak za model dijela cijevi diskretiziran s 24 konačna elementa / mm..	26
Slika 21. Konvergencija 3D tetraedarskih konačnih elemenata .....	28
Slika 22. Radijalni pomak za model s 18 C3D8 elemenata / mm.....	29
Slika 23. Dijagram napreznje - istezanje elastično-idealno plastičnog materijala .....	30
Slika 24. Grafički prikaz ploha tečenja .....	32
Slika 25. Prikaz plastifikacije presjeka.....	33
Slika 26. Raspodjela normalnih napreznja pri različitim tlakovima autofretaže .....	42
Slika 27. Raspodjela zaostalih normalnih napreznja nakon optimalne autofretaže .....	43
Slika 28. Proračunski model u Abaqusu i prikaz diskretizacije s 1200 CAX8 elemenata .....	43
Slika 29. Raspodjela ekvivalentnog napreznja.....	44
Slika 30. Poprečni presjek za određivanje raspodjele napreznja.....	45



Slika 31. Raspodjela normalnih napreznja za postupak optimalne autofretaže (numerički proračun).....	45
Slika 32. Raspodjela normalnih zaostalih napreznja nakon postupka optimalne autofretaže (numerički proračun) .....	46
Slika 33. Usporedba ekvivalentnog napreznja pri radnom opterećenju za različite slučajeve autofretaže.....	47
Slika 34. Usporedba analitičkog i numeričkog rješenja raspodjele normalnog cirkularnog napreznja za slučaj optimalne autofretaže.....	47
Slika 35. Usporedba analitičkog i numeričkog rješenja raspodjele zaostalog normalnog cirkularnog napreznja nakon optimalne autofretaže.....	48
Slika 36. Promjena deformacije pri pokusu puzanja .....	49
Slika 37. Promjena napeznja pri pokusu relaksacije .....	50
Slika 38. Shematski prikaz: a) Maxwellov model, b) Voigt-Kelvinov model.....	51
Slika 39. Shematski prikaz Zener modela viskoelastičnog materijala .....	51
Slika 40. Proračunski model materijla.....	56
Slika 41. Diskretizirani model s 429 CPS4 konačnih elemenata .....	60
Slika 42. Usporedba analitičkog i numeričkog rješenja vremenske promjene radijalnog pomaka unutarnjeg ruba .....	61
Slika 43. Usporedba analitičkog i numeričkog rješenja vremenske promjene radijalnog pomaka vanjskog ruba .....	61
Slika 44. Raspodjela radijalnog pomaka po presjeku za različite vremenske trenutke.....	62

**POPIS TABLICA**

Tablica 1. Prikaz konvergencije konačnih elemenata CPS3.....	16
Tablica 2. Prikaz konvergencije konačnih elemenata CPS6.....	18
Tablica 3. Prikaz konvergencije konačnih elemenata CPS4.....	18
Tablica 4. Prikaz konvergencije konačnih elemenata CPS8.....	19
Tablica 5. Prikaz konvergencije konačnih elemenata CAX3 .....	22
Tablica 6. Prikaz konvergencije konačnih elemenata CAX6 .....	23
Tablica 7. Prikaz konvergencije konačnih elemenata C3D4 .....	27
Tablica 8. Prikaz konvergencije konačnih elemenata C3D10 .....	27

## POPIS OZNAKA

Oznaka	Jedinica	Opis
$D(t)$	$\text{mm}^2/\text{N}$	podatljivost puzanja
$E$	$\text{N}/\text{mm}^2$	Youngov modul elastičnosti
$e_{ij}$		devijatorski dio tenzora deformacije
$E(t)$	$\text{N}/\text{mm}^2$	relaksacijski modul
$G$	$\text{N}/\text{mm}^2$	modul smičnosti
$k$		omjer vanjskog i unutarnjeg radijusa cijevi
$K$	$\text{N}/\text{mm}^2$	volumenski modul elastičnosti
$L$	mm	duljina cijevi
$m$		omjer radijusa granice između elastičnog i plastificiranog područja i unutarnjeg radijusa
$p_{a,opt}$	$\text{N}/\text{mm}^2$	optimalni tlak autofretaže
$p_i$	$\text{N}/\text{mm}^2$	konstantni tlak na unutarnjem rubu cijevi
$p_{opr}$	$\text{N}/\text{mm}^2$	radni tlak
$p_{Y,i}$	$\text{N}/\text{mm}^2$	unutarnji tlak pri kojem se pojavljuju prve plastične deformacije
$p_{Y,o}$	$\text{N}/\text{mm}^2$	unutarnji tlak pri kojem dolazi do potpune plastifikacije
$q_i$		varijabla stanja
$r$		radijalna os cilindričnog koord. sustava
$r_{a,opt}$	mm	optimalni radijus autofretaže
$r_i$	mm	unutarnji radijus cijevi
$r_o$	mm	vanjski radijus cijevi
$r_Y$	mm	radijus granice između elastičnog i plastificiranog područja
$s_{ij}$	$\text{N}/\text{mm}^2$	devijatorski dio tenzora naprezanja
$u_r$	mm	radijalni pomak
$u_{r,i}$	mm	radijalni pomak unutarnjeg ruba cijevi
$z$		aksijalna os cilindričnog koord. sustava
$\delta$	mm	debljina stijenke cijevi
$\varepsilon_0$		deformacija u pokusu relaksacije
$\varepsilon_\varphi$		cirkularna komponenta deformacije
$\varepsilon_{kk}$		sferni dio tenzora deformacije

$\varepsilon_r$		radijalna komponenta deformacije
$\eta$	Pa·s	faktor viskoznog prigušenja
$\varepsilon_z$		aksijalna komponenta deformacije
$\varphi$		cirkularna os cilindričnog koord. sustava
$\nu$		Poissonov koeficijent
$\sigma_0$	N/mm <sup>2</sup>	naprezanje u pokusu puzanja
$\sigma_1$	N/mm <sup>2</sup>	najveće glavno naprezanje
$\sigma_3$	N/mm <sup>2</sup>	najmanje glavno naprezanje
$\sigma_\varphi$	N/mm <sup>2</sup>	cirkularna komponenta naprezanja
$\sigma_{kk}$	N/mm <sup>2</sup>	sferni dio tenzora naprezanja
$\sigma_r$	N/mm <sup>2</sup>	radijalna komponenta naprezanja
$\sigma_{Tr}$	N/mm <sup>2</sup>	ekvivalentno naprezanje prema teoriji najvećih posmičnih naprezanja (Tresca)
$\sigma_Y$	N/mm <sup>2</sup>	granica tečenja materijala
$\sigma_z$	N/mm <sup>2</sup>	aksijalna komponenta naprezanja

## SAŽETAK

U radu je provedena analiza naprezanja i deformacija u debelostijenim cijevima. Proračuni su provedeni analitički i numerički metodom konačnih elemenata u programskom paketu *Abaqus*. Proračun u elastičnom području proveden je kako bi se verificirala numerička rješenja, ispitala konvergencija te odabrao optimalan tip konačnih elemenata. Promatran je slučaj otvorene cijevi opterećene konstantnim unutarnjim tlakom. Uspoređeni su rezultati dobiveni korištenjem različitih konačnih elemenata. Korišteni su 2D elementi za analizu ravninskog stanja naprezanja i osnosimetrični elementi (trokutni i četverokutni) te trodimenzijski konačni elementi (tetraedarski i heksaedarski). Također je provedena usporedba rješenja dobivenih korištenjem elemenata prvog i drugog reda. Proračunom u elasto-plastičnom području analizirao se postupak autofretaže debelostijenih cijevi i odredili optimalni parametri. Autofretaža je postupak opterećivanja debelostijenih cijevi unutarnjim tlakom pri kojem nastaju plastične deformacije, a čiji je cilj smanjenje ekvivalentnih naprezanja prilikom ponovnog opterećenja cijevi u eksploataciji. Proračun je proveden za slučaj zatvorene cijevi korištenjem elastičnog – idealno plastičnog materijala, uz pretpostavku malih deformacija. Također je proveden proračun za linearni viskoelastični model materijala, pri kojem naprezanja i deformacije postaju funkcije vremena. U proračunu je korišten Zenerov model viskoelastičnog materijala, uz pretpostavku malih deformacija koja omogućuje korištenje principa podudarnosti elastičnog i viskoelastičnog modela. Promatrana je vremenska promjena radijalnog pomaka za slučaj otvorene cijevi opterećene konstantnim unutarnjim tlakom. U svim rješavanim problemima provedena je usporedba analitičkih i numeričkih rješenja i u svim slučajevima postignuto je dobro podudaranje rezultata.

Ključne riječi: debelostijena cijev, autofretaža, elasto-plastičnost, viskoelastičnost, metoda konačnih elemenata

## SUMMARY

This thesis deals with stress and strain analysis of thick-walled cylinders. Analysis is conducted both analytically and numerically using software package *Abaqus* for finite element method (FEM) analyses. Linear elastic analysis is used to verify FEM results, to test convergence and to choose optimal type of finite elements. Open thick-walled cylinder loaded with constant internal pressure is observed. Results obtained using different finite elements have been compared. 2D plane stress finite elements, axisymmetric finite elements and 3D elements have been used in the verification analyses. The comparison of result calculated with first order and second order finite elements has been also conducted. The calculation of elastic-plastic behaviour of material has been conducted to analyze autofrettage process and to determine optimal parameters of autofrettage process. The autofrettage is production process where thick-walled cylinders are loaded with internal pressure that causes plastic strains in the cylinder. As a result of autofrettage the maximum equivalent stress inside the cylinder is reduced when cylinder is loaded with an operational pressure. The elastic perfectly plastic material model has been used with the assumption of small displacements. A closed thick-walled cylinder has been observed. Analysis has been also conducted with a linear viscoelastic model of material, where the stress and strain depend on time. The Zener material model has been used. The correspondence principle can be used assuming small displacements. The change of radial displacement in time for an open thick-walled cylinder loaded with constant internal pressure has been observed. In all analyses analytical and numerical results have been compared and good correlation has been obtained.

Key words: thick-walled cylinder, autofrettage, elastic-plastic, viscoelastic, finite element method

## 1. UVOD

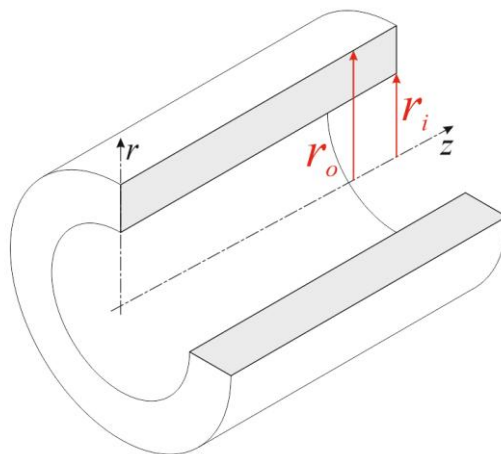
### 1.1. Primjena i proizvodnja debelostijenih posuda i cijevi

Debelostijene cijevi i posude imaju čestu primjenu u raznim područjima strojarstva. Primjenjuju se u nuklearnim elektranama kao reaktorske posude, u vojnoj tehnici za izradu cijevi vatrenog oružja, u procesnoj tehnici za transport fluida pri visokim tlakovima, u izradi podmornica te mnoštvu drugih primjena.

Proizvodnja debelostijenih cijevi izvodi se vrućim valjanjem te naknadnim zavarivanjem čime se dobivaju šavne cijevi. Drugi postupak je provlačenje čime se dobivaju bešavne cijevi boljih mehaničkih svojstava. Ovisno o zahtjevima moguća je dodatna obrada poput ravnjanja, rezanja ili kalibriranja.

### 1.2. Geometrija debelostijenih cijevi

Na početku analize potrebno je geometrijski definirati debelostijene cijevi. Kako se radi o osnosimetričnom tijelu, koje je najčešće i osnosimetrično opterećeno (npr. tlakom), prirodno se nameće korištenje cilindričnog koordinatnog sustava. Uzdužna os cilindričnog koordinatnog sustava označena je sa  $z$  i podudara se s uzdužnom osi simetrije cijevi. Oznaka za radijalnu os je  $r$ , dok je oznaka cirkularne osi  $\varphi$ . Geometrija cijevi prikazana je na Slici 1.



Slika 1. Geometrija debelostijene cijevi u cilindričnom koordinatnom sustavu

Da bi se neku cijev definiralo kao debelostijenu, potrebno je da zadovoljava određene geometrijske pretpostavke. Uvjet koji se navodi u literaturi [3] je

$$\delta = r_o - r_i \geq \frac{1}{10} \frac{r_o + r_i}{2}, \quad (1.1)$$

gdje  $\delta$  označava debljinu stijenke cijevi, dok  $r_i$  i  $r_o$  označavaju unutarnji odnosno vanjski radijus debelostijene cijevi.

### 1.3. Opisanje ponašanja materijala

#### 1.3.1. Elasto-plastičnost

Ponašanje realnih materijala moguće je opisati različitim fizikalnim, odnosno matematičkim modelima. Najčešće se u praksi metalni materijali modeliraju kao linearno elastični, što dobro opisuje ponašanje materijala do granice tečenja, tj. visine naprezanja pri kojem se počinju javljati trajne plastične deformacije. Ukoliko se naprezanje u materijalu povećava iznad te granice materijal ulazi u elasto-plastično područje i prestaje vrijediti linearna veza između deformacije i naprezanja te je potrebno uvesti novi, elasto-plastični model materijala.

#### 1.3.2. Viskoelastičnost

Model materijala koji će se također analizirati u ovom radu na primjeru debelostijenih cijevi je viskoelastični model. Viskoelastičnost je ponašanje materijala pri kojem veza između deformacija i naprezanja ovisi i o vremenu, tj. radi se o vremenskoj promjeni deformacije i naprezanja do koje dolazi uslijed promjene materijalnih svojstava tijekom vremena. Svojstvo viskoelastičnosti pokazuju polimerni materijali, ali i metali pri povišenim temperaturama.

### 1.4. Autofretaža

Za razliku od tankih cijevi, debelostijene cijevi sadrže veću količinu materijala, zbog čega im je i proizvodna cijena viša. Iz tog razloga zanimljivo je pokušati optimizirati debelostijene cijevi kako bi se povećala njihova nosivost. Postupak koji se često koristi u tu svrhu je autofretaža. U tom postupku cijev se opterećuje unutarnjim tlakom te se stvaraju plastične deformacije. Nakon rasterećenja se u materijalu javljaju zaostala naprezanja te su pri ponovnom opterećenju u eksploataciji naprezanja manja u cijevima podvrgnutima ovom postupku.



Primjena autofretaže najčešća je u proizvodnji dijelova sustava ubrizgavanja goriva u dizelskim motorima (Slika 2.), hidrauličkih cilindara, dijelova strojeva za proizvodnju polimernih proizvoda, mlaznica strojeva za vodeno rezanje metala i mnogih drugim.



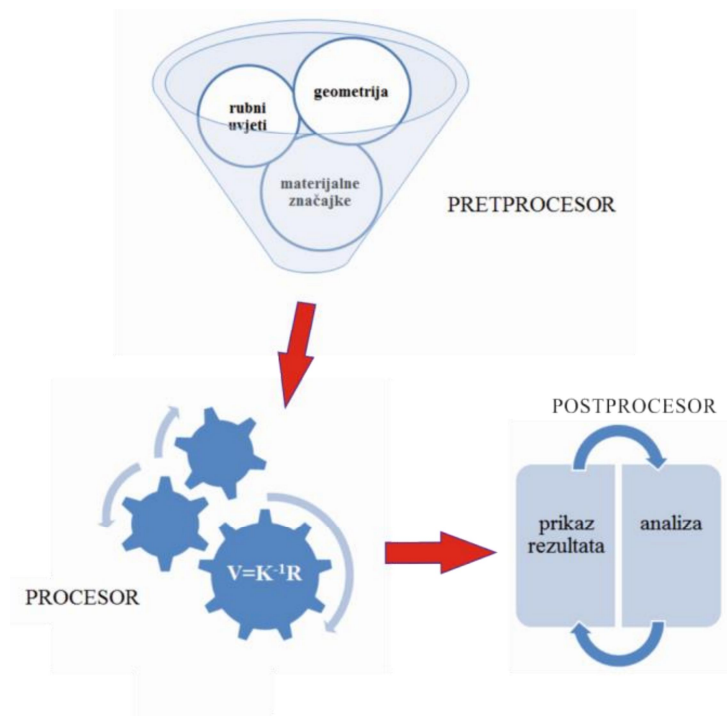
**Slika 2. Brizgaljka goriva podvrgnuta postupku autofretaže [8]**

## 2. O METODI KONAČNIH ELEMENATA

Metoda konačnih elemenata numerička je metoda za približno rješavanje diferencijalnih jednažbi, najčešće iz područja mehanike deformabilnih tijela. Klasične metode rješavanja polaze od diferencijalnih jednažbi čije je analitičko rješenje moguće izračunati samo za jednostavnije proračunske modele. U metodi konačnih elemenata diferencijalne jednažbe koje opisuju promatrani fizikalni problem zamjenjuju se sa sustavom algebarskih jednažbi. Metoda se temelji na diskretizaciji kontinuuma elementima konačne veličine. Konačni elementi međusobno su povezani u čvorovima koji imaju unaprijed definiran ograničen broj stupnjeva slobode. Na taj način promatrani kontinuum s beskonačno stupnjeva slobode postaje mreža konačnih elemenata s konačnim brojem stupnjeva slobode. Polja fizikalnih veličina (pomak, deformacija, naprezanje, ...) duž konačnog elementa opisuju se pomoću interpolacijskih funkcija. Jednažbe se izvode za svaki pojedini element te se kasnije transformiraju u globalni sustav jednažbi. Opisivanje složene geometrije i približavanje stvarnom rješenju zahtjeva diskretizaciju s velikim brojem konačnih elemenata pa globalni sustav sadrži velik broj nepoznanica. Iz tog razloga metoda konačnih elemenata zahtjeva primjenu nekog računalnog programskog paketa.

### 2.1. Programski paketi za proračun metodom konačnih elemenata

Postoji mnoštvo programskih paketa koji koriste metodu konačnih elemenata, no osnovna shema rada se ne razlikuje. Programski paket sastoji se od pretprocesora u kojem korisnik definira proračunski model na način da zadaje geometriju, materijalne značajke, rubne uvjete i definira mrežu konačnih elemenata. Procesor je središnji dio paketa i služi za postavljanje i rješavanje globalnog sustava jednažbi te naknadnog izračunavanja polja traženih fizikalnih veličina. Postprocesor je dio programskog paketa koji omogućava prikaz i analizu dobivenih rezultata. Metoda konačnih elemenata je približna metoda te je znanje o samoj metodi važno za pravilan opis proračunskog modela u paketu i približavanje točnom rješenju.



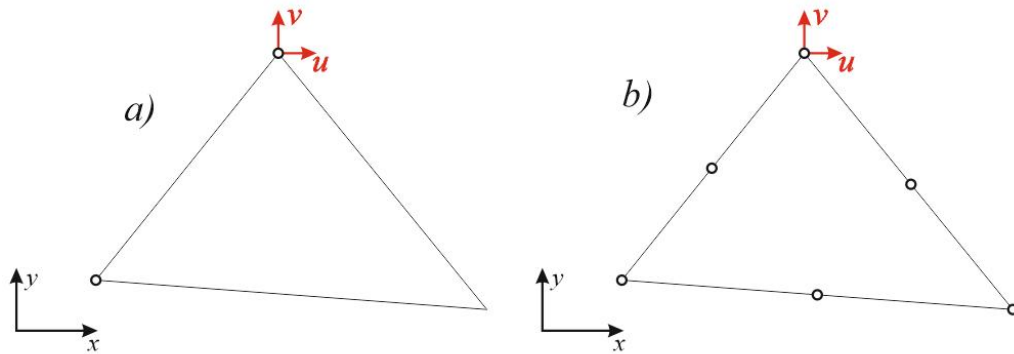
Slika 3. Shematski prikaz računalnog programa

## 2.2. Tipovi konačnih elemenata

Ovisno o geometriji i opterećenju izvedeni su različiti tipovi konačnih elemenata. Svaki tip elemenata primjenjiv je za specifične inženjerske probleme. U nastavku su ukratko opisani konačni elementi korišteni za izradu završnog rada i navedene njihove oznake u programskom paketu *Abaqus* [1]. Svi korišteni konačni elementi pripadaju skupini izoparametarskih konačnih elemenata. Definirani su u lokalnom prirodnom koordinatnom sustavu  $\eta, \xi, \zeta$  te se pomoću interpolacijskih funkcija opisuje njihova geometrija u globalnom koordinatnom sustavu. Interpolacijske funkcije koje opisuju geometriju jednake su interpolacijskim funkcijama koje opisuju raspodjelu pomaka duž elementa.

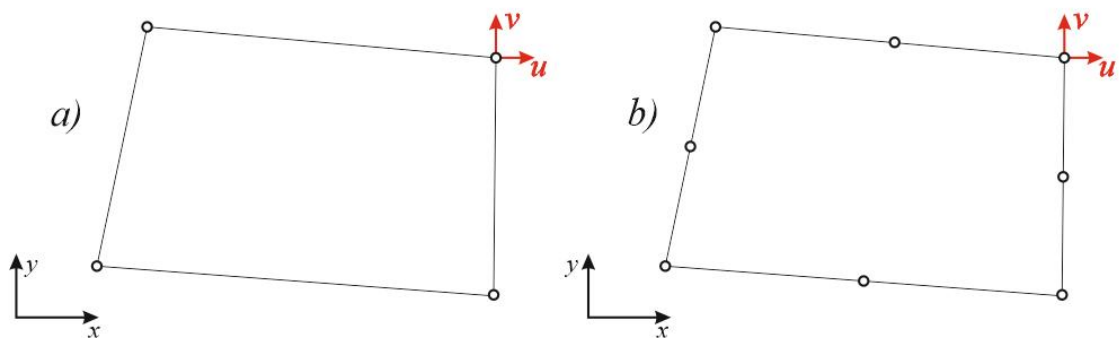
### 2.2.1. Dvodimenzijski konačni elementi

Dvodimenzijski trokutni konačni elementi prvog reda *Plane Stress* CPS3 (Slika 4.a) sastoje se od 3 čvora sa po 2 stupnja slobode. Stupnjevi slobode u svakom čvoru su pomaci u smjerovima koordinatnih osi  $x$  i  $y$ . Omogućuju opisivanje linearne raspodjele pomaka duž elementa, a koriste se za probleme ravninskog stanja naprezanja. Trokutni konačni elementi drugog reda *Plane Stress* CPS6 (Slika 4.b) imaju 6 čvorova te s ukupno 12 stupnjeva slobode mogu opisati raspodjelu pomaka potpunim polinomom drugog stupnja.



Slika 4. Shematski prikaz trokutnih elemenata a) CPS3 i b) CPS6

Četverokutni dvodimenzijski konačni elementi prvog reda *Plane Stress* CPS4 (Slika 5.a) sastoji se od 4 čvora sa po 2 stupnja slobode. Opisuju raspodjelu pomaka nepotpunim polinomom drugog stupnja. Četverokutni konačni elementi drugog reda *Plane Stress* CPS8 (Slika 5.b) imaju 8 čvorova i 16 stupnjeva slobode te polje pomaka opisuju potpunim polinomom drugog stupnja i pridodana 2 člana polinoma trećeg stupnja. Za sve elemente vrijedi da su polja naprezanja i deformacija opisana polinomom koji je za jedan stupanj niži od polinoma koji opisuje polje pomaka.



Slika 5. Shematski prikaz četverokutnih elemenata a) CPS4 i b) CPS8

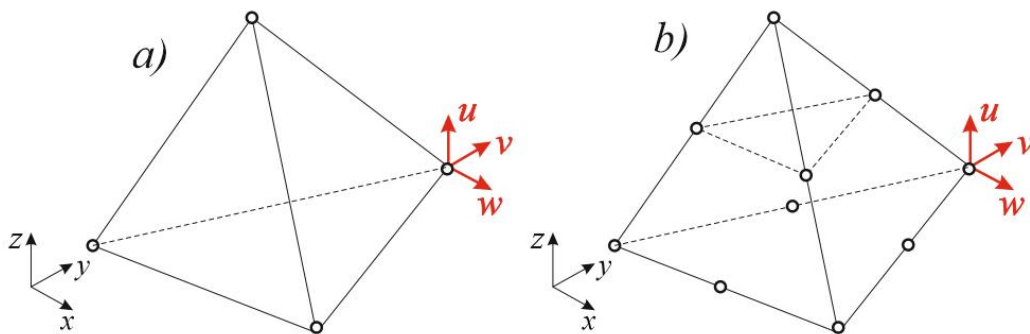
### 2.2.2. Osnosimetrični konačni elementi

Osnosimetrični ili prstenasti konačni elementi mogu se koristiti za 3D tijela koja imaju osnosimetričnu geometriju i opterećenje te se stoga promatrani problem rješava u jednoj ravnini koja sadržava os simetrije tijela. Oblikom su osnosimetrični elementi slični prethodno opisanim dvodimenzijskim elementima uz razliku što čvorovi kod 2D konačnih elemenata oni kod osnosimetričnih elemenata prelaze u čvorne kružnice. Prstenasti elementi opisuju 4

komponente deformacije i naprezanja, za razliku od 2D elemenata koji opisuju 3 komponente. Koriste se trokutni osnosimetrični elementi prvog reda CAX3 s 6 stupnjeva slobode, drugog reda CAX6 s 12 stupnjeva slobode i četverokutni osnosimetrični elementi prvog reda CAX4 s 8 stupnjeva slobode te drugog reda CAX8 s 16 stupnjeva slobode.

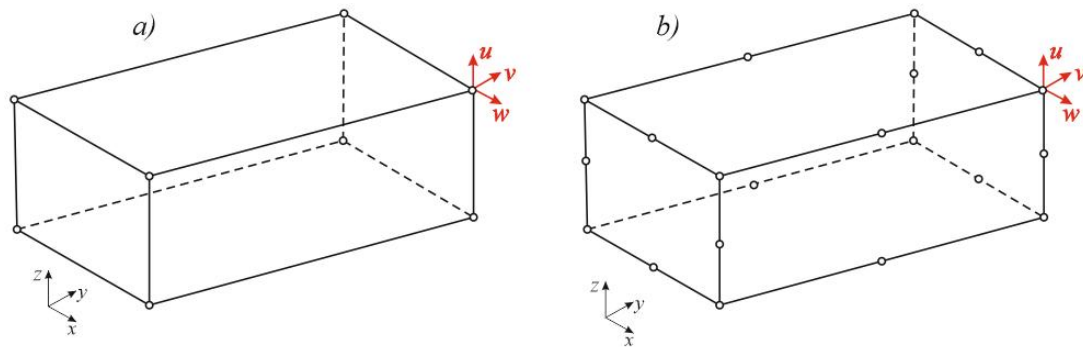
### 2.2.3. Trodimenzijski konačni elementi

Najjednostavniji elementi za trodimenzijsku analizu su tetraedarski elementi prvog reda C3D4 (Slika 6.a) sa 4 čvora i 12 stupnjeva slobode koji polje pomaka opisuju polje pomaka polinomom prvog reda. Tetraedarski elementi drugog reda C3D10 (Slika 6.b) imaju 10 čvorova, a polje pomaka duž elementa opisuju potpunim polinomom drugog stupnja.



Slika 6. Shematski prikaz tetraedarskih elemenata a) C3D4 i b) C3D10

Prizmatični ili heksaedarski konačni elementi prvog reda C3D8 (Slika 7.a) s 8 čvorova i 24 stupnja slobode kod kojih je polje pomaka opisano nepotpunim polinomom trećeg stupnja. Heksaedarski elementi drugog reda C3D20 (Slika 7.b) sadrže 20 čvorova i 60 stupnjeva slobode i pripadaju u skupinu serendipity elemenata jer se čvorovi nalaze u vrhovima i duž bridova elementa i za razliku od Lagrangeovih elemenata nemaju čvorove unutar elementa.



Slika 7. Shematski prikaz prizmatičnih elemenata a) C3D8 i b) C3D20

Prednost heksaedarskih konačnih elemenata u odnosu na tetraedarske jest viši stupanj polinoma polja pomaka, dok je prednost tetraedarskih elemenata lakše opisivanje složenijih geometrija.

### 3. ELASTIČNO DEFORMIRANJE DEBELOSTIJIENIH CIJEVI

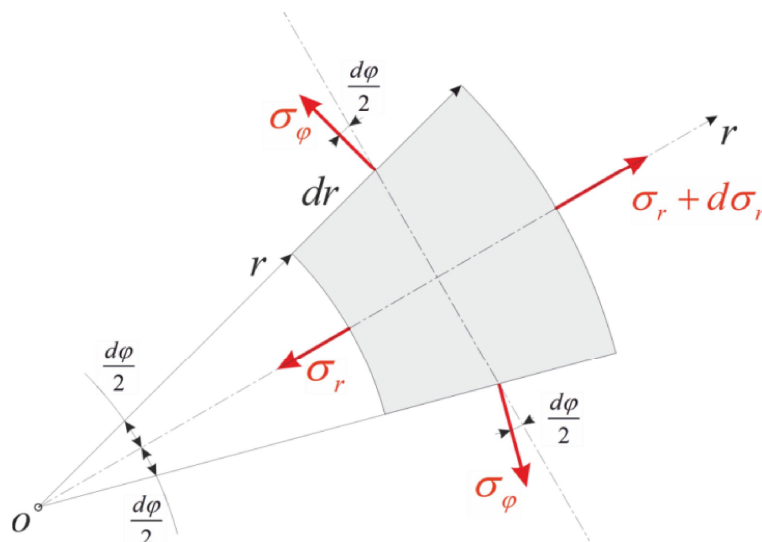
#### 3.1. Analitičko rješenje

Najprije će se razmatrati deformiranje cijevi u elastičnom području. Slijedi kratki prikaz pretpostavki i relacija korištenih za izvod analitičkog rješenja prema [3]. Analitičko rješenje će se kasnije koristiti za usporedbu s rješenjima dobivenim pomoću numeričke metode konačnih elemenata.

Pretpostavke koje vrijede pri izvođenju analitičkih izraza za raspodjelu naprezanja u debelostjenim cijevima za elastično područje:

- Cijevi su opterećene samo površinskim opterećenjem – tlakom  $p$  po unutarnjoj, odnosno vanjskoj stijenci cijevi, ne razmatra se utjecaj koncentriranih sila i spregova sila.
- Opterećenje, naprezanje i deformacija funkcija su radijalne koordinate  $r$  te ne ovise o cirkularnoj koordinati  $\varphi$  i uzdužnoj koordinati  $z$ .
- Prilikom deformiranja sve točke pomiču se isključivo u smjeru radijalne osi  $r$ .
- Kod zatvorenih posuda uzdužno naprezanje  $\sigma_z$  jednoliko je raspodijeljeno po presjeku.

Na Slici 8. prikazan je diferencijalni element u ravnini  $z=\text{konst.}$ :



Slika 8. Diferencijalni element debelostijene cijevi

Primjenom geometrijske analize dobivaju se izrazi za radijalnu deformaciju  $\varepsilon_r$  i cirkularnu deformaciju  $\varepsilon_\varphi$ , u cilindričnom koordinatnom sustavu prema Slici 8.:

$$\begin{aligned}\varepsilon_r &= \frac{du}{dr}, \\ \varepsilon_\varphi &= \frac{u}{r}.\end{aligned}\tag{3.1}$$

Konstitutivne jednadžbe koje daju vezu između naprezanja i deformacije, tj. Hookeov zakon za troosno stanje naprezanja su

$$\begin{aligned}\varepsilon_r &= \frac{1}{E} \left[ \sigma_r - \nu (\sigma_\varphi + \sigma_z) \right], \\ \varepsilon_\varphi &= \frac{1}{E} \left[ \sigma_\varphi - \nu (\sigma_z + \sigma_r) \right], \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} \left[ \sigma_z - \nu (\sigma_r + \sigma_\varphi) \right],\end{aligned}\tag{3.2}$$

gdje su  $\varepsilon_r$ ,  $\varepsilon_\varphi$  i  $\varepsilon_z$  komponente deformacije u smjerovima pojedinih koordinatnih osi  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\varphi$  i  $\sigma_z$  su komponente naprezanja, dok su materijalne značajke Youngov modul elastičnosti  $E$  i Poissonov faktor  $\nu$ .

Jednadžba ravnoteže diferencijalnog osnosimetričnog elementa u cilindričnom koordinatnom sustavu glasi

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} = 0.\tag{3.3}$$

Primjenom izraza (3.1), (3.2) i (3.3) te njihovim sređivanjem dobiva se diferencijalna jednadžba raspodjele radijalnog pomaka

$$\frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (ur) \right] = 0.\tag{3.4}$$

Integriranjem jednadžbe (3.4) dobiva se funkcija raspodjele radijalnog pomaka

$$u_r = C_1 r + \frac{C_2}{r}.\tag{3.5}$$



Izraz za raspodjelu radijalnog pomaka (3.5) uvrštava se u izraze za deformacije (3.1) te se dobivaju izrazi ovisnosti cirkularne i radijalne deformacije o radijalnom pomaku, čijim uvrštavanjem u Hookeov zakon (3.2) i sređivanjem slijedi raspodjela normalnog radijalnog i cirkularnog napreznja

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{E}{1-\nu^2} \left[ (1+\nu)C_1 - \frac{C_2}{r^2}(1-\nu) \right] + \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_z, \\ \sigma_\phi &= \frac{E}{1-\nu^2} \left[ (1+\nu)C_1 + \frac{C_2}{r^2}(1-\nu) \right] + \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_z.\end{aligned}\quad (3.6)$$

### 3.1.1. Opterećenje unutarnjim tlakom

Unutarnji tlak konstantnog iznosa najčešće je opterećenje u primjeni debelostijenih cijevi. Rubni uvjeti za takav slučaj opterećenja su

$$\begin{aligned}\sigma_r(r_i) &= -p_i, \\ \sigma_r(r_o) &= 0,\end{aligned}\quad (3.7)$$

gdje  $p_i$  označava konstantni tlak na unutarnjem rubu cijevi.

Uvrštavanjem rubnih uvjeta (3.7) u izraz (3.5) dobiva se sustav 2 jednadžbe s 2 nepoznate integracijske konstante  $C_1$  i  $C_2$ . Rješavanjem dobivenog sustava određuju se nepoznanice te se njihovim uvrštavanjem u (3.5) dobiva raspodjela radijalnog pomaka pri opterećenju unutarnjim tlakom

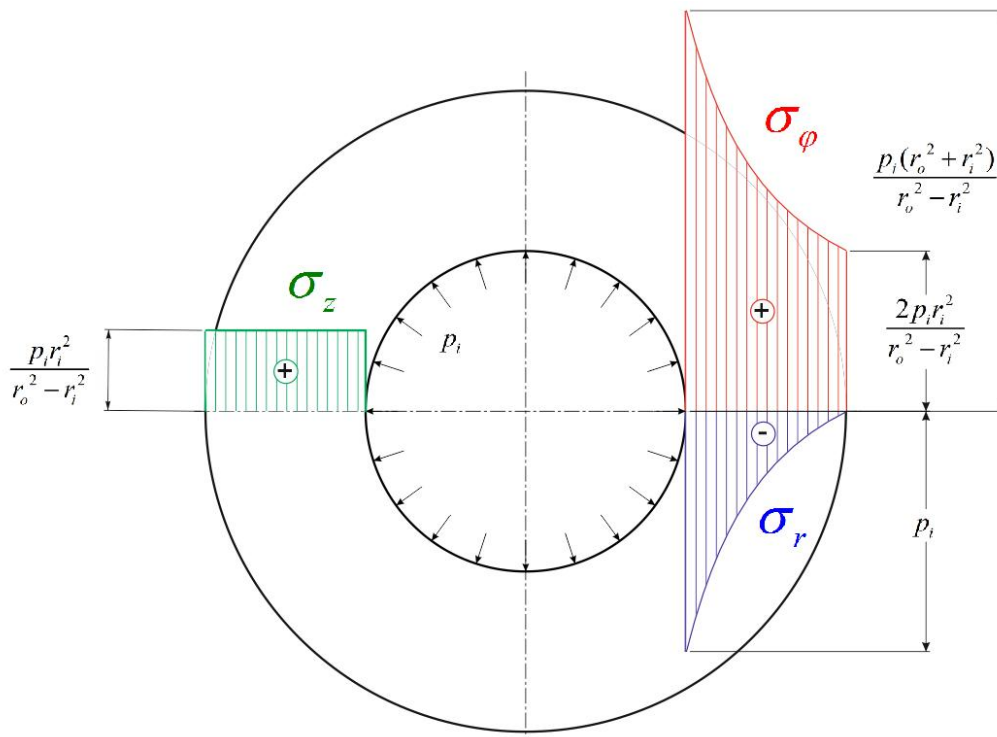
$$u_r = \frac{p_i r_i^2}{E(r_o^2 - r_i^2)} \left[ (1-\nu)r + (1+\nu)\frac{r_o^2}{r} \right] - \frac{\nu}{E} \sigma_z r. \quad (3.8)$$

Uvrštavanjem dobivenih integracijskih konstanti u izraz (3.6) slijedi raspodjela normalnih napreznja

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{p_i r_i^2}{r_o^2 - r_i^2} \left[ 1 - \left( \frac{r_o}{r} \right)^2 \right], \\ \sigma_\phi &= \frac{p_i r_i^2}{r_o^2 - r_i^2} \left[ 1 + \left( \frac{r_o}{r} \right)^2 \right].\end{aligned}\quad (3.9)$$

Za otvorene cijevi vrijedi da je aksijalno naprezanje  $\sigma_z = 0$ , dok za zatvorene posude vrijedi

$$\sigma_z = \frac{p_i r_i^2}{r_o^2 - r_i^2}. \quad (3.10)$$

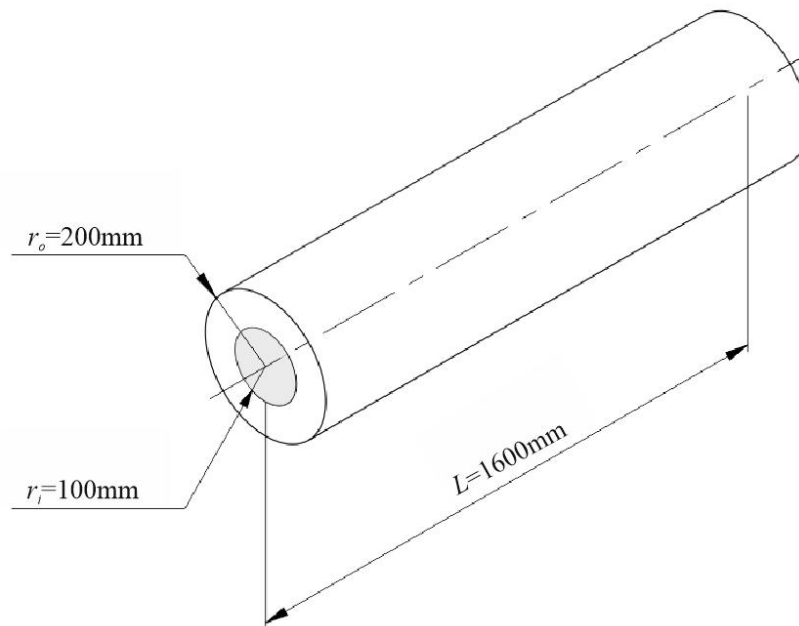


Slika 9. Raspodjela normalnih naprezanja po presjeku cijevi

Prethodno dobivena analitička rješenja koristit će se za usporedbu s rješenjima dobivenim pomoću metode konačnih elemenata u programskom paketu *Abaqus*. Kako bi mogli izračunati rješenje analitički i pomoću metode konačnih elemenata potrebno je zadati geometriju, materijalne značajke i opterećenje modela. Proračun provodimo sa sljedećim ulaznim podacima

$$\begin{aligned} r_i &= 100 \text{ mm}, \\ r_o &= 200 \text{ mm}, \\ L &= 1600 \text{ mm}, \\ E &= 203000 \text{ N/mm}^2, \\ \nu &= 0,33, \\ \sigma_Y &= 325 \text{ N/mm}^2, \\ p_i &= 50 \text{ N/mm}^2. \end{aligned} \quad (3.11)$$

gdje  $\sigma_y$  označava granicu tečenja materijala, tj. veličinu napreznja do kojeg se materijal ponaša elastično. Promatra se slučaj otvorene duge cijevi.



Slika 10. Zadana geometrija cijevi

Uvrštavanjem podataka (3.11) u izraz (3.8) izračunavamo pomak točke na unutarnjem radijusu cijevi ( $r = r_i = 100$  mm):

$$u_{r,i} = u_r(r = r_i) = 4,918 \cdot 10^{-2} \text{ mm.} \quad (3.12)$$

Za izračunavanje komponenata napreznja primjenjuje se izraz (3.9). Napreznja se također izračunavaju za kontrolnu točku na unutarnje radijusu cijevi ( $r = r_i = 100$  mm):

$$\begin{aligned} \sigma_r &= -50 \text{ N/mm}^2, \\ \sigma_\varphi &= 83,333 \text{ N/mm}^2, \\ \sigma_z &= 0. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Potrebno je pokazati da se za zadano opterećenje u cijevi javljaju samo elastične deformacije. Kako postoje 2 komponente napreznja različite od 0, potrebno je ekvivalentno napreznje izračunati primjenom neke od teorija čvrstoće. Ovdje se primjenjuje Trescina teorija čvrstoće, tj. teorija maksimalnih posmičnih napreznja za koju vrijedi

$$\sigma_{Tr} = \sigma_1 - \sigma_3. \quad (3.14)$$

Naprezanja  $\sigma_1$  i  $\sigma_3$  su maksimalno i minimalno glavno naprezanje, što u promatranom slučaju odgovara naprezanjima  $\sigma_\phi$  i  $\sigma_r$ . Iz analize naprezanja i raspodjele naprezanja (3.9) i (3.10) vidljivo je da se najveća naprezanja pojavljuju na unutarnjem radijusu cijevi te se provjerava uvjet tečenja na tom mjestu, tj. koriste se rezultati izračunati u (3.13). Nakon uvrštavanja u (3.14) slijedi

$$\sigma_{Tr} = 133,333 \text{ N/mm}^2 < \sigma_Y. \quad (3.15)$$

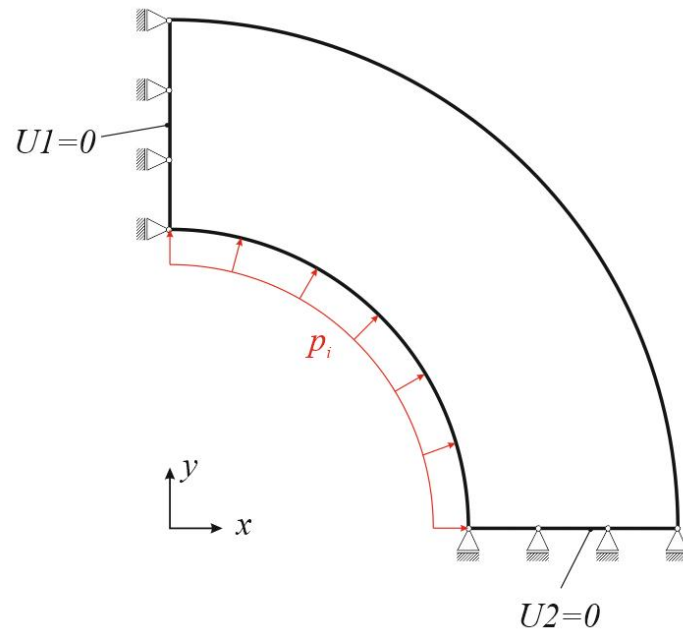
Iz dobivenog rezultata vidljivo je da je ekvivalentno naprezanje manje od granice tečenja, tj. materijal se nalazi u elastičnom stanju.

### 3.2. Konvergencija rješenja dobivenih metodom konačnih elemenata

Numerički proračun metodom konačnih elemenata vrši se pomoću programskog paketa Abaqus. Slijedi ispitivanje konvergencije rješenja, tj. približavanja numerički dobivenog rješenja prema analitičkom rješenju. Konvergencija će se provjeravati usporedbom radijalnog pomaka  $u_{r,i}$  točke na unutarnjem radijusu cijevi  $r_i$ . Približavanje analitičkom rješenju bit će ispitano za različite konačne elemente, a rezultati prikazani tablično i grafički.

#### 3.2.1. 2D konačni elementi

2D analiza provedena je pomoću trokutnih elemenata 1. reda CPS3, trokutnih elemenata 2. reda CPS6, pravokutnih elemenata 1. reda CPS4 i pravokutnih elemenata 2. reda CPS8. Proračunski model se sastoji od 1/4 poprečnog presjeka cijevi u ravnini  $z = konst.$



Slika 11. Proračunski 2D model

Korištenjem 1/4 poprečnog presjeka (Slika 11.) smanjuje se broj stupnjeva slobode modela te se ubrzava sam izračun, a olakšano je i definiranje rubnih uvjeta. Primijenjeni su rubni uvjeti simetrije. Na donjem rubu modela onemogućen je vertikalni pomak  $U_2$ , dok je na lijevom rubu modela onemogućen horizontalni pomak  $U_1$ . Definirana geometrija, materijalne značajke te rubni uvjeti i opterećenje ostaju nepromijenjeni u svim proračunima s 2D konačnim elementima, mijenja se samo vrsta elemenata i njihov broj, tj. veličina. Zbog jednostavnosti geometrije koriste se strukturirane mreže.

### 3.2.1.1. Trokutni 2D konačni elementi 1. reda

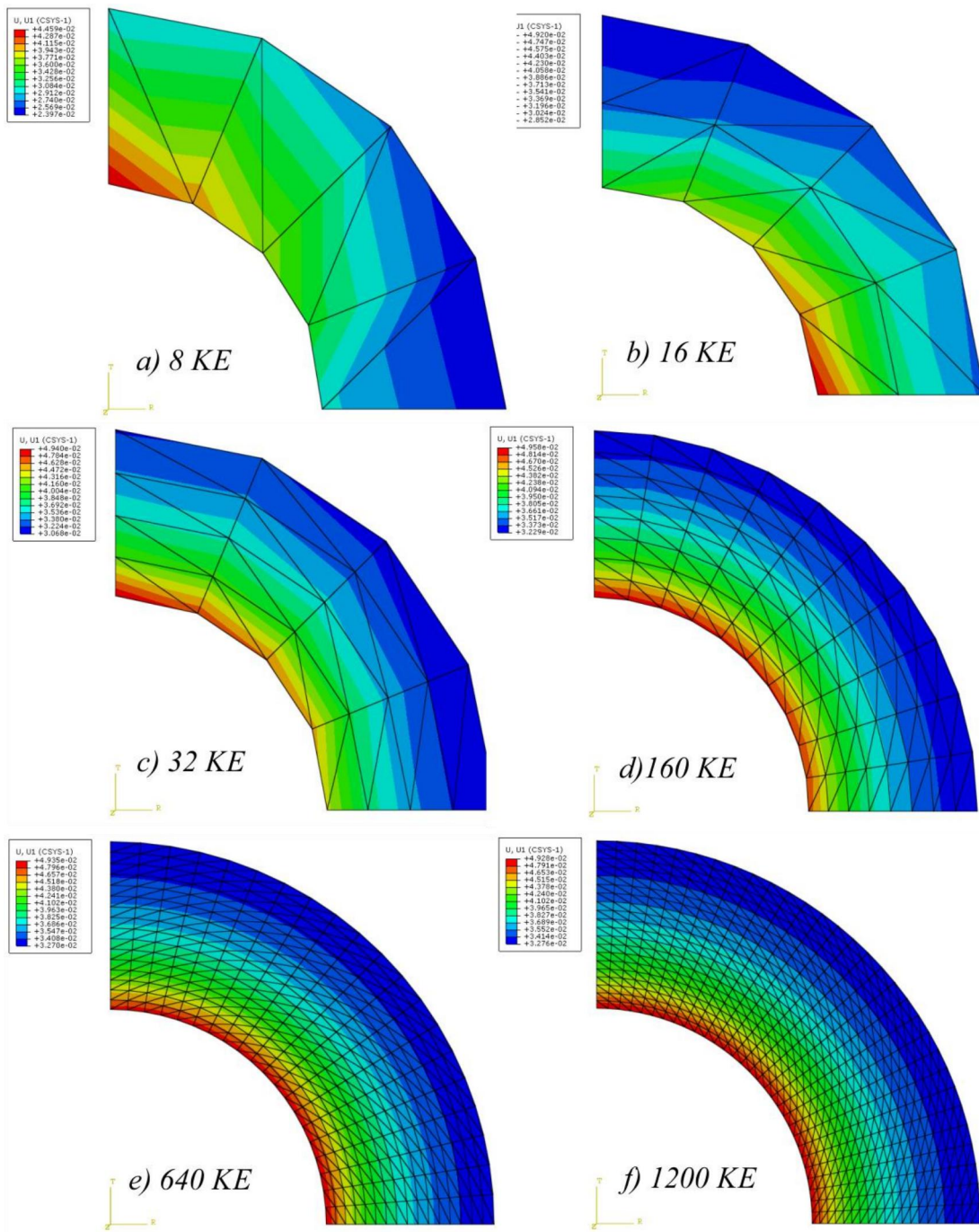
Najprije se proračun provodi s trokutnim elementima prvog reda. Programski paket Abaqus provodi proračun isključivo u Kartezijevim koordinatama te je moguće tijekom postprocesiranja rezultate automatski preračunati u cilindrični koordinatni sustav koji je prihvatljiviji za ovakav problem. Za kontrolu konvergencije uzima se srednja vrijednost dobivenih radijalnih pomaka u čvorovima koji se nalaze na unutarnjem rubu cijevi.

Slijedi tablični prikaz rezultata za različitu gustoću mreže u kojoj je prikazano i relativna razlika u odnosu na analitičko rješenje.

Tablica 1. Prikaz konvergencije konačnih elemenata CPS3

<b>broj konačnih elemenata</b>	<b>numeričko rješenje / mm</b>	<b>relativna razlika</b>
8	0,037225	24,31%
16	0,043978	10,58%
32	0,046531	5,39%
160	0,048609	1,16%
640	0,049033	0,30%
1200	0,049098	0,17%

Iz tablice je vidljivo monotono približavanje numeričkog rješenja prema analitičkom. Na Slici 12. prikazani su rezultati radijalnog pomaka za mreže s različitim brojem konačnih elemenata te izgled same mreže. Mreže su prikazane jednakim redoslijedom kao i u prethodnoj tablici.



Slika 12. Radijalni pomak pri diskretizaciji različitim brojem CPS3 elemenata / mm

### 3.2.1.2. Trokutni 2D konačni elementi 2. reda

Slijedi numerički proračun uz pomoć trokutnih elemenata CPS6. Rezultati za mreže s različitim brojem elemenata prikazani su tablično.

Tablica 2. Prikaz konvergencije konačnih elemenata CPS6

broj konačnih elemenata	numeričko rješenje	relativna razlika
8	0,048483	1,42%
16	0,049118	0,13%
32	0,049162	0,04%
160	0,049181	0,00%

Rezultati dobiveni trokutnim elementima drugog reda brže konvergiraju prema analitičkom rješenju od rezultata dobivenim pomoću trokutnih elemenata prvog reda, što je i očekivano. Dovoljna točnost postiže se pri manjem broju konačnih elemenata te nije potrebno daljnje usitnjavanje mreže i ponovni izračun.

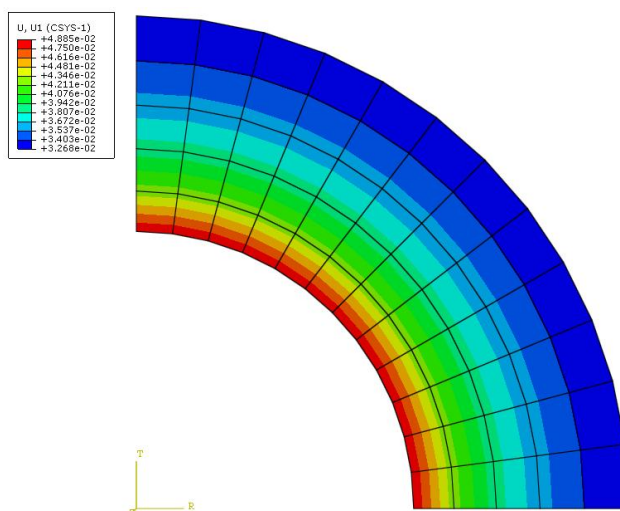
### 3.2.1.3. Četverokutni 2D konačni elementi 1. reda

U sljedećem proračunu se koristi četverokutni konačni element 1. reda CPS4. Provjera konvergencije provodi se na analogan način kao i s trokutnim konačnim elementima. Dobiveni rezultati prikazani su tablično.

Tablica 3. Prikaz konvergencije konačnih elemenata CPS4

broj konačnih elemenata	numeričko rješenje	relativna razlika
3	0,043826	10,89%
10	0,047354	3,71%
60	0,048852	0,67%
624	0,049147	0,07%





Slika 13. Raspodjela radijalnog pomaka uz diskretizaciju s 60 CPS4 elemenata / mm

#### 3.2.1.4. Četverokutni 2D konačni elementi 2. reda

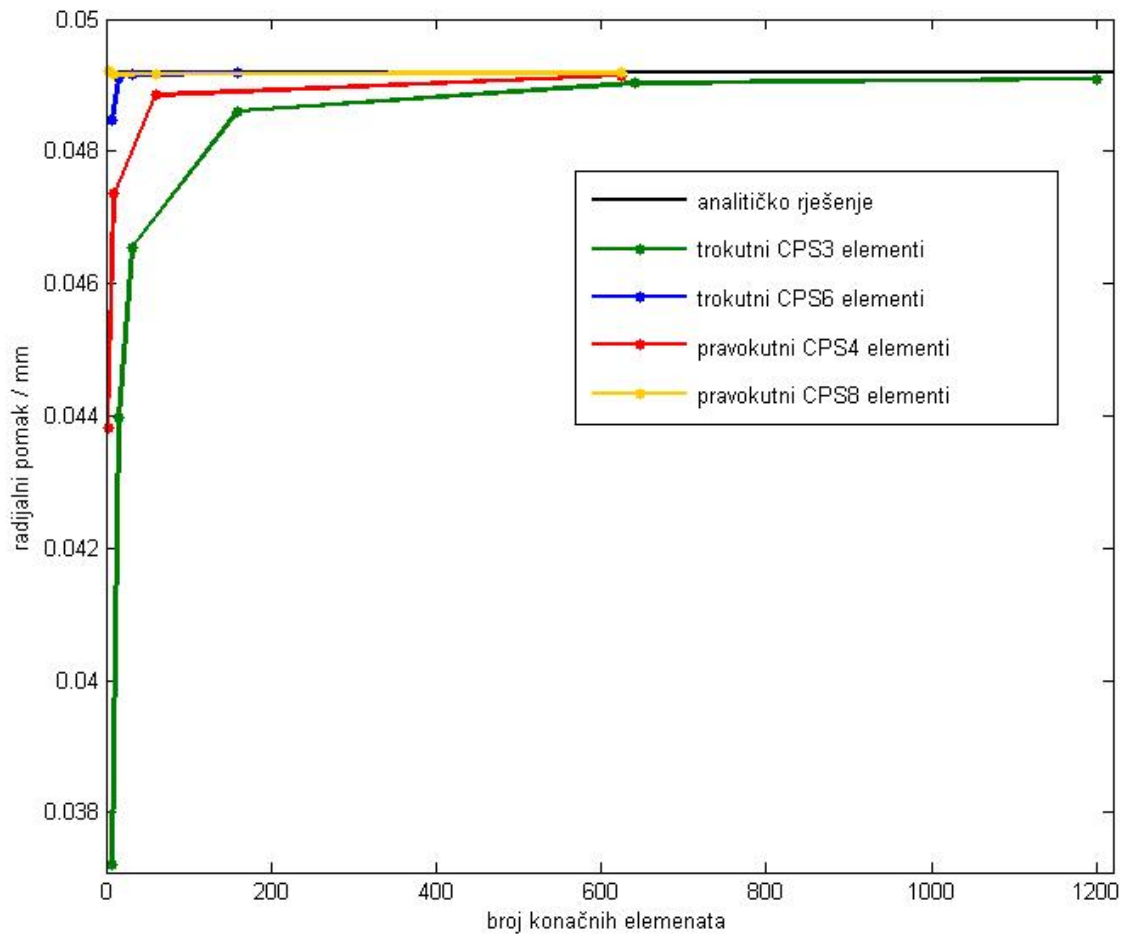
Slijedi numerički proračun s četverokutnim elementom 2. reda CPS8 s 8 stupnjeva slobode. Rezultati su prikazani tablično.

Tablica 4. Prikaz konvergencije konačnih elemenata CPS8

broj konačnih elemenata	numeričko rješenje	relativna razlika
3	0,049207	0,06%
10	0,049155	0,05%
60	0,049177	0,01%
624	0,049179	0,00%

Rezultati dobiveni pravokutnim konačnim elementima CPS8 očekivano pokazuju najbržu konvergenciju od svih korištenih 2D elemenata. Zanimljivo je primijetiti da konvergencija nije monotona, tj. za mrežu s najmanjim brojem elemenata dobiveno je rješenje za pomak veće od analitičkog rješenja, što je vjerojatno posljedica lošeg opisa geometrije zbog grube diskretizacije.

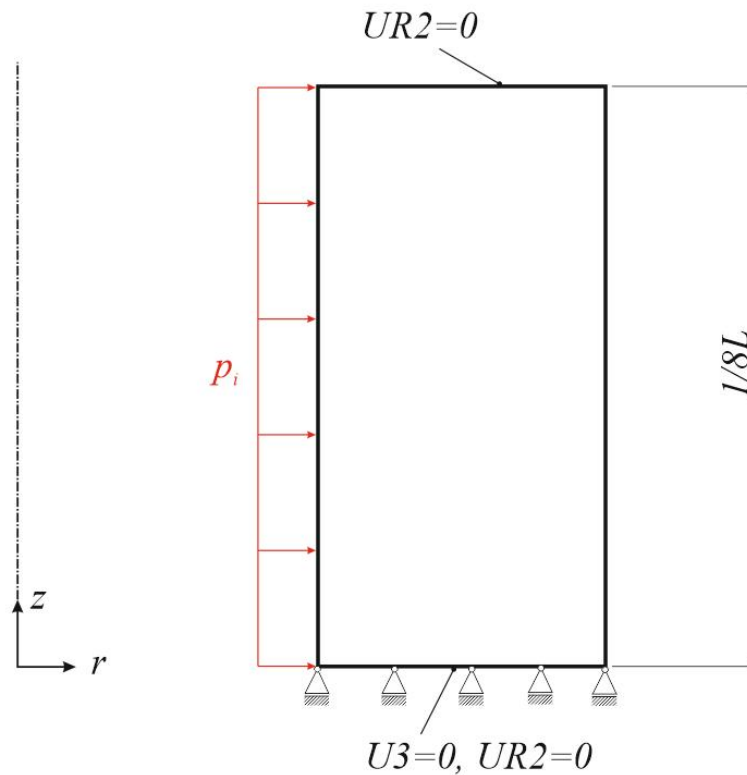
Na Slici 14. prikazana je konvergencija svih korištenih 2D konačnih elemenata iz čega je jasno vidljiva razlika u brzini konvergencije među elementima.



Slika 14. Konvergencija 2D konačnih elemenata

### 3.2.2. Osnosimetrični konačni elementi

Kao što je ranije spomenuto, promatrani problem zadovoljava osne uvjete simetrije geometrije i opterećenja te je pogodan za korištenje osnosimetričnih konačnih elemenata. U proračunu se promatra presjek modela u  $r, \varphi$  ravnini. Na Slici 15. prikazan je proračunski model u *Abaqusu*.



Slika 15. Proračunski osnosimetrični model u paketu Abaqus

Sve veličine u proračunu neovisne su o  $z$  koordinati, zbog čega se koristi  $1/8$  duljine cijevi. Implementirani su sljedeći rubni uvjeti: onemogućeni su vertikalni pomak  $U3$  i rotacija oko cirkularne osi  $UR2$  na donjem rubu modela te rotacija oko cirkularne osi  $UR2$  na gornjem rubu modela.

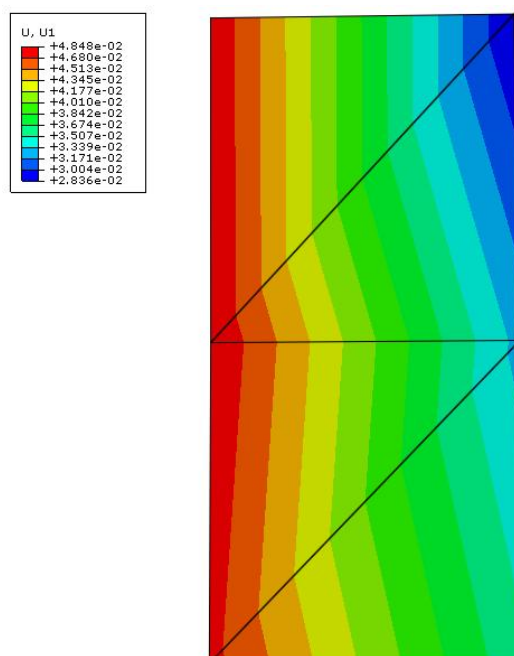
Slijedi diskretizacija modela. Model se diskretizira s trokutnim konačnim elementima za osnosimetričnu analizu 1. reda CAX3 i 2. reda CAX6, kao i pravokutnim trokutnim konačnim elementima za osnosimetričnu analizu 1. reda CAX4 i 2. reda CAX8 te se prati konvergencija radijalnog pomaka unutarnje stijenke kao i kod analize 2D konačnih elemenata.

### 3.2.2.1. Trokutni osnosimetrični konačni elementi 1. reda

Trokutni konačni element za analizu osnosimetričnih problema CAX3 ima 3 čvora sa po 2 stupnja slobode, a polje pomaka opisuje polinomom drugog reda. Dobiveni rezultati za radijalni pomak unutarnjeg ruba cijevi prikazani su tablično.

Tablica 5. Prikaz konvergencije konačnih elemenata CAX3

broj konačnih elemenata	numeričko rješenje	relativna razlika
4	0,048100	2,20%
16	0,048621	1,14%
64	0,048999	0,37%
400	0,049148	0,06%
1600	0,049171	0,02%



Slika 16. Raspodjela radijalnog pomaka pri diskretizaciji s 4 CAX3 elemenata / mm

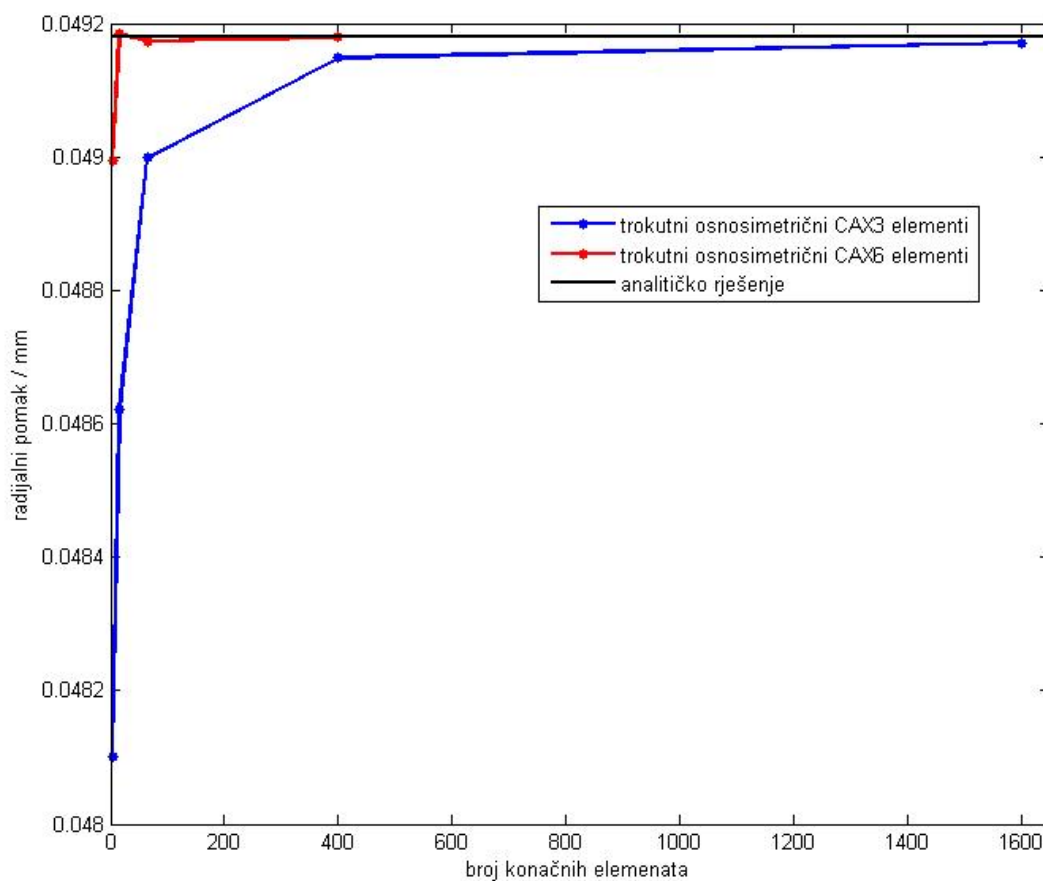
### 3.2.2.2. Trokutni osnosimetrični konačni elementi 2. reda

Nakon trokutnih elemenata prvog reda korišteni su trokutni elementi drugog reda za analizu osnosimetričnih problema CAX6 ima 6 čvorova sa po 2 stupnja slobode. Dobiveni rezultati također su prikazani tablično.

Tablica 6. Prikaz konvergencije konačnih elemenata CAX6

broj konačnih elemenata	numeričko rješenje	relativna razlika
4	0,048995	0,38%
16	0,049184	0,01%
64	0,049173	0,01%
400	0,049179	0,00%

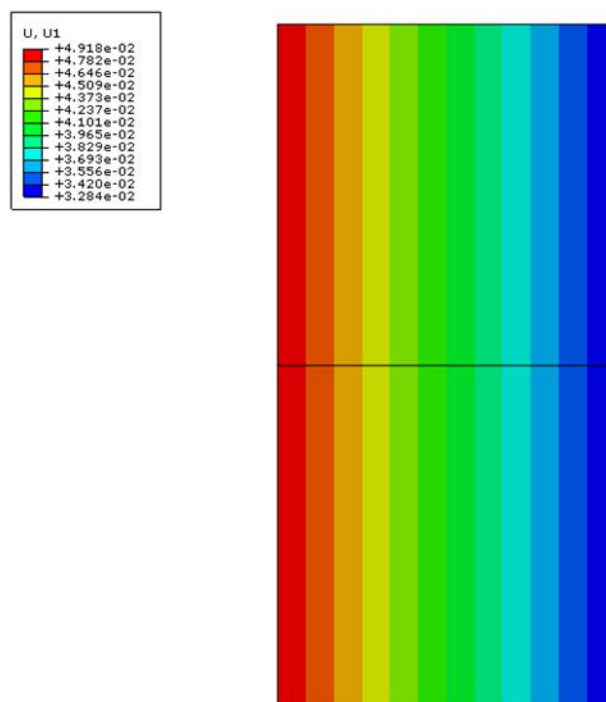
Na Slici 17. prikazana je usporedba konvergencije osnosimetričnih trokutnih konačnih elemenata.



Slika 17. Konvergencija osnosimetričnih konačnih elemenata

### 3.2.2.3. Pravokutni osnosimetrični konačni elementi

U daljnjem proračunu koriste se pravokutni konačni elementi za osnosimetrične probleme prvog reda CAX4 i drugog reda CAX8. Već pri najgrubljoj diskretizaciji modela s 2 konačna elementa oba tipa elemenata daju grešku za radijalni pomak unutarnjeg ruba manju od  $10^{-4}$  mm što je relativna greška manja od 0,01% u odnosu na analitičko rješenje. Iako je rješenje dovoljno točno u čvorovima, veća odstupanja javljaju se unutar konačnog elementa. Iz tog razloga potrebno je koristiti veći broj elemenata kako bi se postigla željena točnost pomaka duž cijelog presjeka kao i točnost naprezanja.



Slika 18. Raspodjela radijalnog pomaka za model s 2 CAX4 konačna elementa / mm

### 3.2.3. 3D konačni elementi

Nakon 2D i osnosimetričnih konačnih elemenata proračun će se provesti s elementima za trodimenzijsku analizu. Kako bi se provjerila valjanost rubnih uvjeta simetrije, najprije će se usporediti rješenja za jednaku veličinu elemenata na cijelom modelu i jednom dijelu modela. Primjena rubnih uvjeta simetrije omogućuje korištenje manjeg modela s manjim brojem konačnih elemenata.

Za usporedbu su korišteni heksaedarski konačni elementi prvog reda C3D8. Prvi model je jednak zadanoj geometriji cijevi, tj. korišten je pun poprečni presjek i puna duljina cijevi (Slika 19.), dok je u drugom modelu korištena 1/4 poprečnog presjeka i 1/8 duljine cijevi (Slika 20.). U oba modela korištena je strukturirana mreža pomoću opcije *Structured*, a jednaka veličina elemenata dobivena je korištenjem opcije *Local Seed* kojom se dodjeljuje željena veličina ili broj elemenata duž zadanog ruba. Na taj način dobivena mreža za puni model sastoji se od 768 konačnih elemenata, dok se manji model sastoji od 24 konačnih elemenata, tj. približno 3% od broja elemenata za puni model. Nakon provedenog proračuna izračunata je prosječna vrijednost radijalnog pomaka svih čvorova na unutarnjem radijusu cijevi. Dobivene vrijednosti su:

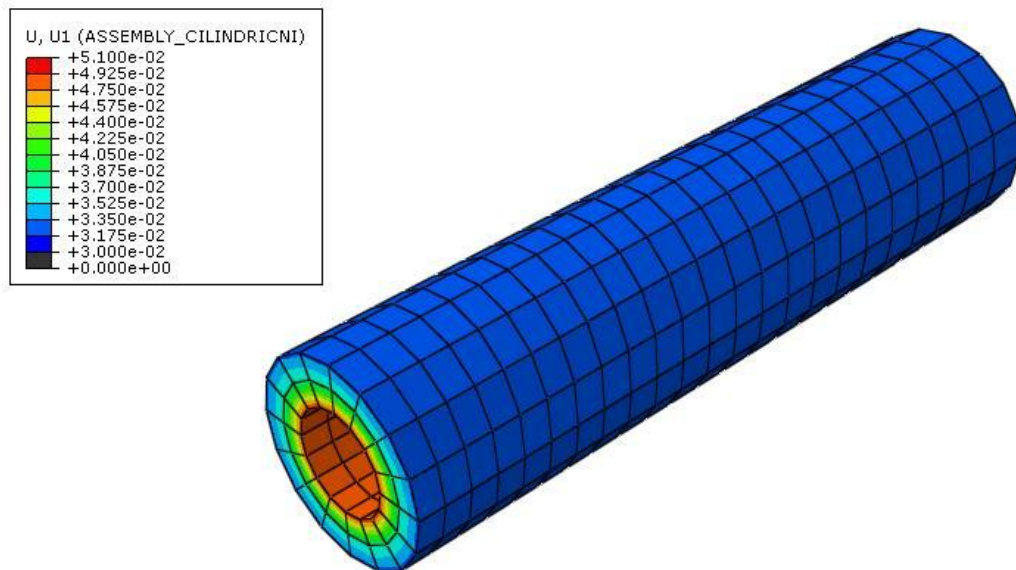
- Za puni model cijevi:

$$u_{r,i} = 0,0491624\text{mm.} \quad (3.16)$$

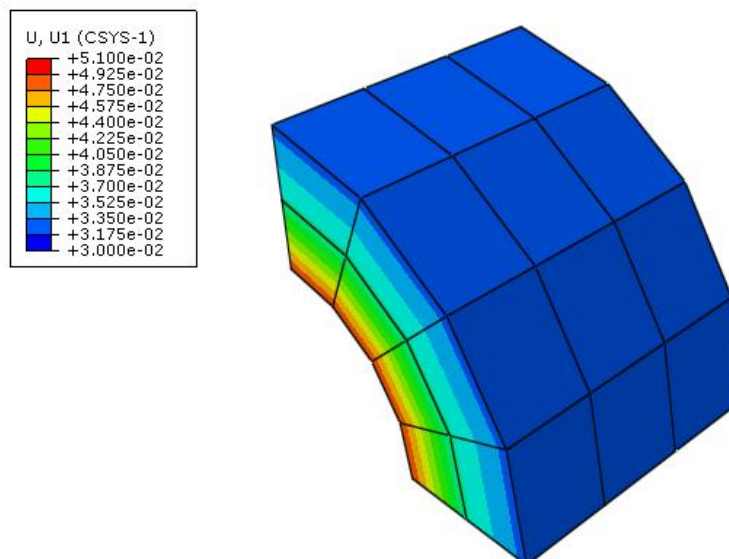
- Za dio cijevi:

$$u_{r,i} = 0,0491639\text{mm.} \quad (3.17)$$

Iz rezultata (3.16) i (3.17) vidljivo je da je relativna razlika između rezultata za puni model i dio cijevi reda veličine  $10^{-5}$ , što je zadovoljavajuća točnost s obzirom da se radi o numeričkom postupku. Iz tog razloga u daljnjim proračunima koristit će se dio cijevi umjesto punog modela. Na sljedećim slikama prikazani su rezultati za oba slučaja te su označeni čvorovi za koje se računala prosječna vrijednost radijalnog pomaka.



Slika 19. Radijalni pomak za puni model cijevi diskretiziran s 768 konačnih elemenata / mm



Slika 20. Radijalni pomak za model dijela cijevi diskretiziran s 24 konačna elementa / mm

Manjim modelom dobiveni su gotovo identični rezultati te će se ispitivanje konvergencije pokazati na dijelu geometrije cijevi uz primjenu odgovarajućih rubnih uvjeta simetrije.

### 3.2.3.1. Tetraedarski konačni elementi 1. reda

Tetraedarski konačni elementi C3D4 su konačni elementi za 3D analizu naprezanja i deformacija. Imaju 12 stupnjeva slobode, po 3 pomaka u svakom od 4 čvora. Tablično je prikazana vrijednost radijalnog pomaka unutarnjeg ruba cijevi:



Tablica 7. Prikaz konvergencije konačnih elemenata C3D4

broj konačnih elemenata	numeričko rješenje	relativna razlika
97	0,039499	19,68%
167	0,042368	13,85%
977	0,046759	4,92%
15023	0,048826	0,72%

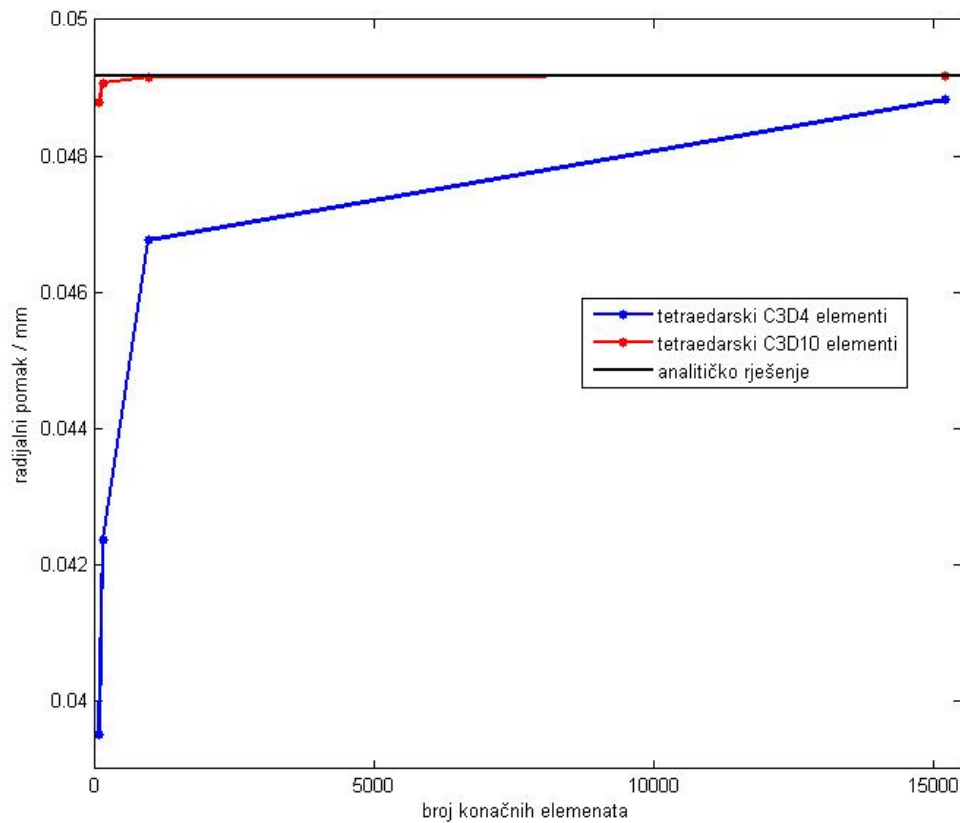
### 3.2.3.2. Tetraedarski konačni elementi 2. reda

Nakon elemenata prvog reda korišteni su tetraedarski konačni elementi drugog reda C3D10 sa 30 stupnjeva slobode. Dobiveni rezultati prikazani su tablično:

Tablica 8. Prikaz konvergencije konačnih elemenata C3D10

broj konačnih elemenata	numeričko rješenje	relativna razlika
97	0,04879	0,79%
167	0,049071	0,22%
977	0,049153	0,06%
15023	0,049178	0,00%

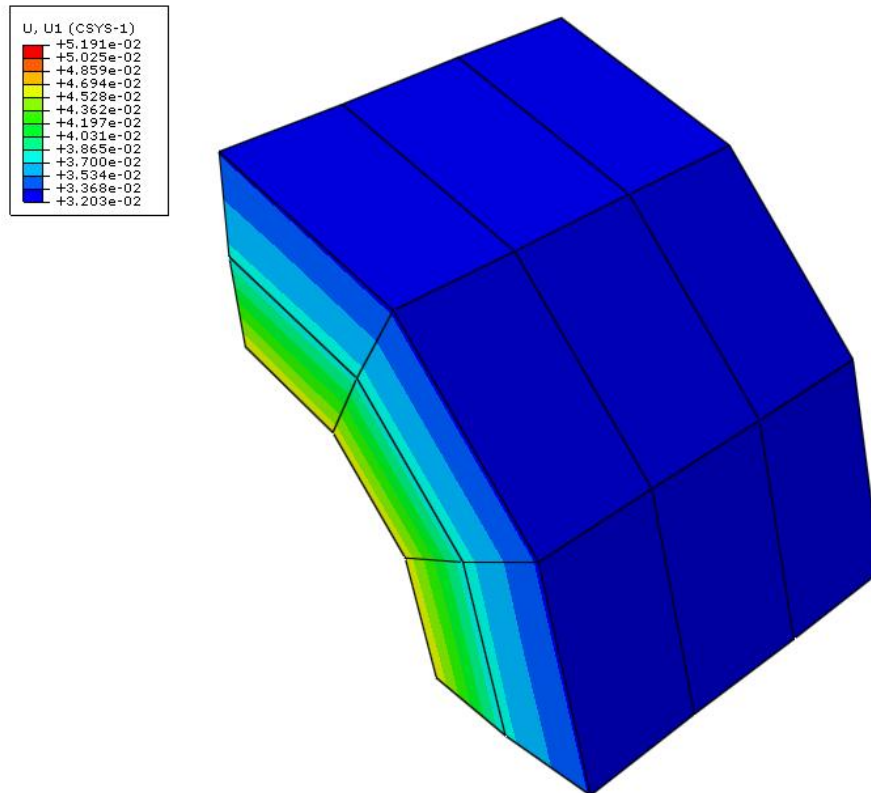
Usporedba konvergencije tetraedarskih konačnih elemenata prvog i drugog reda prikazana je na Slici 21.



Slika 21. Konvergencija 3D tetraedarskih konačnih elemenata

### 3.2.3.3. Heksaedarski konačni elementi

U analizi su korišteni heksaedarski elementi prvog reda C3D8 s 24 stupnja slobode i heksaedarski elementi drugog reda C3D20 s 60 stupnjeva slobode. Konvergencija radijalnog pomaka na unutarnjem rubu cijevi za oba konačna elementa pokazuje grešku manju od 0,01% već pri najgrubljoj diskretizaciji s 18 konačnih elemenata.



Slika 22. Radijalni pomak za model s 18 C3D8 elemenata / mm

Nakon provedene analize zaključuje se da se najbolju rezultati postižu korištenjem pravokutnih osnosimetričnih elemenata CAX4 i CAX8, kao i pomoću 3D heksaedarskih konačnih elemenata C3D8 i C3D20. Svi navedeni elementi već i pri diskretizaciji s minimalnim brojem konačnih elemenata daju rješenje gotovo identično analitičkom rješenju.

### 3.3. Zaključak o odabiru konačnih elemenata

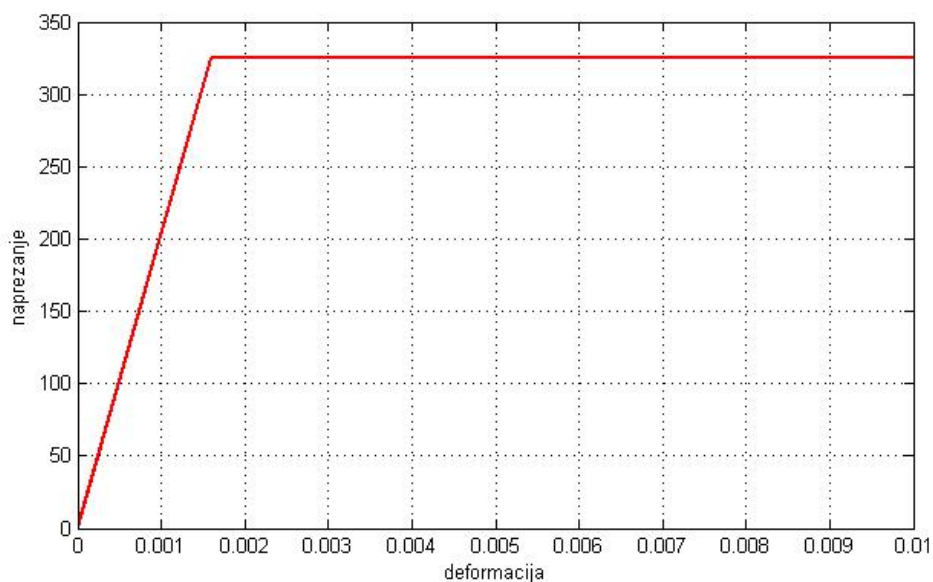
Zaključak je da je najbolje koristiti osnosimetrične elemente jer zbog simetrije problema mogu dati jednako dobre rezultate kao i 3D elementi, ali uz mnogo manji broj konačnih elemenata, što smanjuje veličinu globalnog sustava jednadžbi te na taj način ubrzava proračun.

## 4. ELASTO-PLASTIČNO DEFORMIRANJE DEBELOSTIJIENIH CIJEVI

Pri razmatranju elastičnog deformiranja debelostjenih cijevi koristi se izotropni linearno elastičan materijal čije je ponašanje moguće opisati sa 2 parametra: Youngov modul elastičnosti  $E$  i Poissonov koeficijent  $\nu$ . Pri elasto-plastičnom deformiranju najprije je potrebno definirati model materijala. Najjednostavniji je model elastično-idealno plastičnog materijala.

### 4.1. Elasto-plastični materijal

U proračunu se uzima model elastičnog – idealno plastičnog materijala. To je najjednostavniji model elasto-plastičnog materijala. Takav model približno odgovara karakteristikama općih konstrukcijskih čelika, a upotrebljiv je za male ukupne deformacije, tj. plastične deformacije moraju biti istog reda veličine kao i elastične. Materijal se ponaša elastično do granice tečenja  $\sigma_y$  nakon čega dolazi do tečenja materijala bez pojave očvršćivanja, tj. plastična deformacija raste bez povećanja napreznja. Model ponašanja materijala prikazan je na Slici 23.



Slika 23. Dijagram napreznja - istežanje elastičnog - idealno plastičnog materijala

## 4.2. Uvjet tečenja materijala

Dobivena ovisnost naprezanja i deformacije dobivena je eksperimentalno pokusom razvlačenja pri kojem je ispitni uzorak opterećen jednoosno. U općem slučaju debelostijene cijevi i posude opterećene su troosno te je potrebno dobiveni podatak za jednoosno stanje naprezanja primijeniti za određivanje granice tečenja pri troosnom stanju naprezanja. U mehanici kontinuuma uvodi se prostor naprezanja, imaginarni šestodimenzijski hiperprostor, kojem se na osi nanose komponente naprezanja. Ploha u tom hiperprostoru koja sadrži točke u kojima dolazi do tečenja materijala, tj. do pojave prvih plastičnih deformacija, naziva se ploha tečenja. Ne postoji jedinstveno rješenje koje opisuje plohu tečenja, već su razvijene različite teorije tečenja materijala. Najčešće korištene teorije su teorije prema Tresci i von Misesu. Trescin uvjet tečenja preuzet iz [2] glasi:

*Tečenje materijala nastupa kad najveće posmično naprezanje dostigne kritičnu vrijednost.*

Funkcija tečenja prema Trescinom uvjetu

$$\left[ (\sigma_1 - \sigma_2)^2 - 4k^2 \right] \left[ (\sigma_2 - \sigma_3)^2 - 4k^2 \right] \left[ (\sigma_3 - \sigma_1)^2 - 4k^2 \right] = 0, \quad (4.1)$$

gdje  $k$  označava svojstvo materijala koje se određuje pokusom čistog smicanja i vrijedi

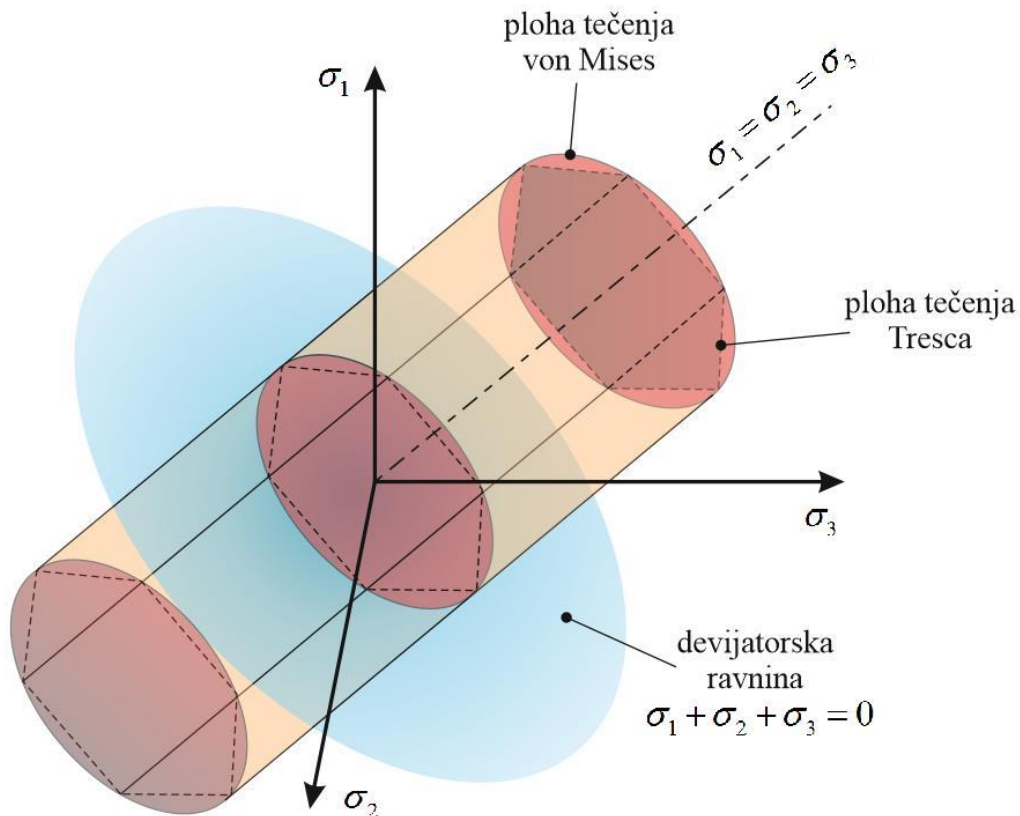
$$k = \frac{\sigma_Y}{2}. \quad (4.2)$$

Iz funkcije plohe tečenja (4.1) proizlazi uvjet tečenja prema Trescinoj teoriji

$$\sigma_{Tr} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_Y. \quad (4.3)$$

Osim Trescinog uvjeta često se koristi von Misesov uvjet tečenja. Detalji o von Misesovom uvjetu tečenja mogu se pronaći u literaturi [4].

Funkcija kojom se opisuje ploha tečenja (4.1) može se prikazati geometrijski (Slika 24.). Trescina ploha tečenja pravilna je šesterostrana prizma kojoj je os hidrostatički pravac ( $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ ). Misesova ploha tečenja jest kružni valjak opisan Trescinoj šesterostranoj prizmi.



Slika 24. Grafički prikaz ploha tečenja

U elasto-plastičnoj analizi razlikuju se 3 stanja deformiranosti prema literaturi [2]:

- Potpuno elastično stanje
- Elasto-plastično stanje
- Granično stanje – plastični kolaps konstrukcije.

### 4.3. Analitičko rješenje

U nastavku su navedene pretpostavke, rubni uvjeti i konačni izrazi za analitička rješenja. Detaljan izvod moguće je pronaći u literaturi [4].

#### 4.3.1. Pojava prvih plastičnih deformacija

U potpuno elastičnom stanju vrijede prethodno izvedeni izrazi za naprezanja i pomake. Pri pojavi prvih plastičnih deformacija debelostijena cijev ulazi u elasto-plastično stanje. Pojavu prvih plastičnih deformacija potrebno je odrediti primjenom neke od teorija čvrstoće.

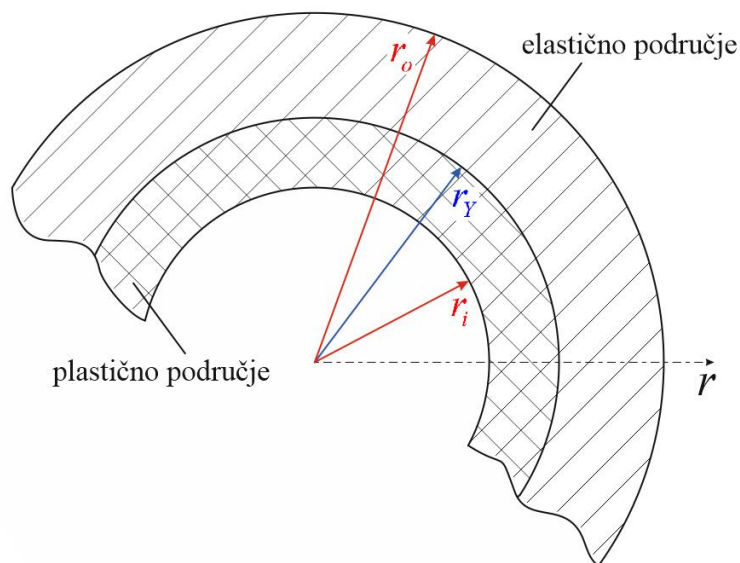
Prema Trescinom uvjetu tečenja (4.3) izraz za potrebni unutarnji tlak  $p_{Y,i}$  pri kojem nastaju prve plastične deformacije na unutarnjem radijusu  $r_i$  cijevi glasi

$$p_{Y,i} = \frac{\sigma_Y}{2} \left[ 1 - \left( \frac{r_i}{r_o} \right)^2 \right]. \quad (4.4)$$

Nakon pojave plastičnih deformacija više ne vrijede raspodjele naprezanja iz potpuno elastičnog područja, a plastificirano područje radialno se širi prema vanjskom radijusu cijevi. U daljnjem proračunu koristi se Trescin uvjet tečenja jer daje manji iznos unutarnjeg tlaka  $p_{Y,i}$  i na taj način je rješenje na strani sigurnosti u odnosu na von Misesov uvjet tečenja. Rubni uvjeti za integraciju su

$$\begin{aligned} \sigma_r^p(r_i) &= -p_i, \\ \sigma_r^e(r_o) &= 0, \\ \sigma_r^e(r_Y) &= \sigma_r^p(r_Y), \\ \sigma_\varphi^e(r_Y) &= \sigma_\varphi^p(r_Y). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Gornji indeksi  $e$  označuju elastično područje presjeka, dok gornji indeksi  $p$  označuju područje presjeka u kojem su se pojavile plastične deformacije. Radijus koji označava granicu između elastičnog i plastičnog područja označen je s  $r_Y$  (Slika 25.).



Slika 25. Prikaz plastifikacije presjeka

Primjenjuju se diferencijalna jednadžba ravnoteže elementa (3.3) i uvjet tečenja (4.3) te nakon integracije i implementacije rubnih uvjeta slijede raspodjele naprezanja [3]

- Elastično područje  $r_Y \leq r \leq r_o$  :

$$\begin{aligned}\sigma_{r,el} &= \frac{\sigma_Y}{2} \left( \frac{r_Y}{r_o} \right)^2 \left[ 1 - \left( \frac{r_o}{r} \right)^2 \right], \\ \sigma_{\varphi,el} &= \frac{\sigma_Y}{2} \left( \frac{r_Y}{r_o} \right)^2 \left[ 1 + \left( \frac{r_o}{r} \right)^2 \right], \\ \sigma_{z,el} &= \frac{\sigma_Y}{2} \left( \frac{r_Y}{r_o} \right)^2.\end{aligned}\tag{4.6}$$

- Plastično područje  $r_i \leq r \leq r_Y$  :

$$\begin{aligned}\sigma_{r,pl} &= \frac{\sigma_Y}{2} \left[ 2 \ln \frac{r}{r_Y} + \left( \frac{r_Y}{r_o} \right)^2 - 1 \right], \\ \sigma_{\varphi,pl} &= \frac{\sigma_Y}{2} \left[ 2 \ln \frac{r}{r_Y} + \left( \frac{r_Y}{r_o} \right)^2 + 1 \right], \\ \sigma_{z,pl} &= \frac{\sigma_Y}{2} \left[ 2 \ln \frac{r}{r_Y} + \left( \frac{r_Y}{r_o} \right)^2 \right].\end{aligned}\tag{4.7}$$

Izraz za raspodjelu pomaka vrijedi u elastičnom i plastičnom području

$$u_r = \frac{\sigma_Y r_Y^2}{E r}.\tag{4.8}$$

Izraz za iznos unutarnjeg tlaka pri kojem se cijev plastificira do radijusa  $r_Y$

$$p_Y = \frac{\sigma_Y}{2} \left( 2 \ln \frac{r_Y}{r_i} - \left( \frac{r_Y}{r_o} \right)^2 + 1 \right).\tag{4.9}$$



### 4.3.2. Granično stanje

Granično stanje jest stanje u kojem se plastificirano područje proširilo na cijeli presjek, tj. plastificiran je i vanjski rub cijevi na radijusu  $r_o$ . Iznos graničnog unutarnjeg tlaka  $p_{Y,o}$  pri kojem dolazi do potpune plastifikacije presjeka prema Trescinom uvjetu tečenja

$$p_{Y,o} = \sigma_Y \ln \frac{r_o}{r_i}. \quad (4.10)$$

Za granično stanje vrijedi sljedeća raspodjela naprezanja [3]

$$\begin{aligned} \sigma_{r,gr} &= \sigma_Y \ln \frac{r}{r_o}, \\ \sigma_{\varphi,gr} &= \sigma_Y \left( \ln \frac{r}{r_o} + 1 \right), \\ \sigma_{z,gr} &= \sigma_Y \left( \ln \frac{r}{r_o} + \frac{1}{2} \right). \end{aligned} \quad (4.11)$$

### 4.3.3. Zaostala naprezanja nakon rasterećenja

Potrebno je odrediti i zaostala naprezanja nakon rasterećenja. Pretpostavka je da se rasterećenje odvija elastično te se pritom ne javljaju nove plastične deformacije. Zbog složenosti izraza uvodi se supstitucija

$$\begin{aligned} k &= \frac{r_o}{r_i}, \\ m &= \frac{r_Y}{r_i}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Nakon supstitucije izrazi za zaostala naprezanja nakon rasterećenja glase [5]

- Plastificirano područje  $r_i \leq r \leq r_Y$ :

$$\begin{aligned}\sigma_{r,pl,R} &= \frac{\sigma_Y}{2} \left\{ \left[ 2 \ln \left( \frac{r}{r_Y} \right) + 1 + \left( \frac{m}{k} \right)^2 \right] - \left[ 2 \ln(m+1) - \left( \frac{m}{k} \right)^2 \right] \left( \frac{1}{k^2-1} \right) \left[ 1 - \left( \frac{r_o}{r} \right)^2 \right] \right\}, \\ \sigma_{\varphi,pl,R} &= \frac{\sigma_Y}{2} \left\{ \left[ 2 + 2 \ln \left( \frac{r}{r_Y} \right) - 1 + \left( \frac{m}{k} \right)^2 \right] - \left[ 2 \ln(m+1) - \left( \frac{m}{k} \right)^2 \right] \left( \frac{1}{k^2-1} \right) \left[ 1 + \left( \frac{r_o}{r} \right)^2 \right] \right\}, \\ \sigma_{z,pl,R} &= \frac{\sigma_Y}{2} \left\{ \left[ 1 + 2 \ln \left( \frac{r}{r_Y} \right) - 1 + \left( \frac{m}{k} \right)^2 \right] - \left[ 2 \ln(m+1) - \left( \frac{m}{k} \right)^2 \right] \left( \frac{1}{k^2-1} \right) \right\}.\end{aligned}\quad (4.13)$$

- Elastično područje  $r_Y \leq r \leq r_o$ :

$$\begin{aligned}\sigma_{r,el,R} &= \frac{\sigma_Y}{2} \left[ 1 - \frac{r_o^2}{r^2} \right] \left[ \left( \frac{m}{k} \right)^2 - \left( 1 - \left( \frac{m}{k} \right)^2 + 2 \ln(m) \right) \left( \frac{1}{k^2-1} \right) \right], \\ \sigma_{\varphi,el,R} &= \frac{\sigma_Y}{2} \left[ 1 + \frac{r_o^2}{r^2} \right] \left[ \left( \frac{m}{k} \right)^2 - \left( 1 - \left( \frac{m}{k} \right)^2 + 2 \ln(m) \right) \left( \frac{1}{k^2-1} \right) \right], \\ \sigma_{z,el,R} &= \frac{\sigma_Y}{2} \left[ \left( \frac{m}{k} \right)^2 - \left( 1 - \left( \frac{m}{k} \right)^2 + 2 \ln(m) \right) \left( \frac{1}{k^2-1} \right) \right],\end{aligned}\quad (4.14)$$

#### 4.3.4. Optimalna autofretaža

U procesu autofretaže dolazi do plastifikacije presjeka cijevi od unutarnjeg radijusa  $r_i$  do radijusa autofretaže  $r_a$ . Posljedica je manje ekvivalentno naprezanje pri ponovnom opterećivanju radnim tlakom  $p_{opr}$ . Najveće ekvivalentno naprezanje  $\sigma_{T_r}$  pojavljuje se na spoju plastificiranog i elastičnog dijela presjeka, tj. na radijusu  $r_a$ . Uz pretpostavku da pri ponovnom opterećivanju ne dolazi do novih plastičnih deformacija, ukupno naprezanje pri radnom opterećenju jest zbroj zaostalih naprezanja i naprezanja uslijed radnog tlaka

$$\begin{aligned}\sigma_{r,t} &= \sigma_r(p_{opr}) + \sigma_{r,R}, \\ \sigma_{\varphi,t} &= \sigma_{\varphi}(p_{opr}) + \sigma_{\varphi,R}, \\ \sigma_{z,t} &= \sigma_z(p_{opr}) + \sigma_{z,R}.\end{aligned}\quad (4.15)$$

Ekvivalentno naprezanje prema Tresci za promatrani slučaj je

$$\sigma_{Tr} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_\varphi - \sigma_r. \quad (4.16)$$

Ekvivalentno naprezanje na radijusu autofretaže  $r_a$  prema izrazu (4.16) dobiva se uvrštavanjem izraza (4.15) uz korištenje izraza (3.9), (4.12) i (4.14)

$$\sigma_{Tr} = \sigma_Y \frac{k^2}{m^2} \left[ \frac{m^2}{k^2} - \left( 1 - \frac{m^2}{k^2} + 2 \ln(m) \right) \frac{1}{k^2 - 1} \right] + \frac{2p_{opr}}{k^2 - 1} \frac{k^2}{m^2}. \quad (4.17)$$

Da bi se odredio optimalni tlak autofretaže  $p_a$ , tj. optimalni radijus autofretaže  $r_a$ , potrebno je pronaći minimum funkcije (4.17). Provodi se derivacija po parametru  $m$  koji u sebi sadrži varijablu  $r_a$ . Uvjet minimuma ekvivalentnog naprezanja je

$$\frac{\partial \sigma_{Tr}}{\partial m} = 0. \quad (4.18)$$

Nakon deriviranja i rješavanja sustava dobiva se

$$m = e^{\frac{p_{opr}}{\sigma_Y}}. \quad (4.19)$$

Iz izraza (4.19) uz uvjet (4.12) slijedi optimalni radijus autofretaže za zadani radni tlak

$$r_{a,opt} = r_i e^{\frac{p_{opr}}{\sigma_Y}}. \quad (4.20)$$

Uvrštavanjem (4.20) u izraz (4.9) dobiva se optimalni tlak autofretaže

$$p_{a,opt} = \frac{\sigma_Y}{2} \left( 1 - \frac{e^{\frac{p_{opr}}{\sigma_Y}}}{k^2} + 2 \frac{p_{opr}}{\sigma_Y} \right). \quad (4.21)$$

Iz izraza (4.21) vidljivo je da optimalni tlak autofretaže ovisi o radnom tlaku kojem će cijev kasnije biti podvrgnuta.

#### 4.4. Proračun sa zadanim podacima

Proračun u elasto-plastičnom području provodi se za jednaku geometriju i materijalne značajke kao i u elastičnom području (3.11). Pretpostavljen je radni tlak nakon provedenog postupka autofretaže

$$p_{opr} = 130 \text{ N/mm}^2. \quad (4.22)$$

Primjenom izraza (4.4) izračunava se potrebni unutarnji tlak za pojavu prvih plastičnih deformacija za Trescin uvjet tečenja

$$p_{Y,i} = \frac{325}{2} \left[ 1 - \left( \frac{100}{200} \right)^2 \right] = 121,875 \text{ N/mm}^2. \quad (4.23)$$

Pri tom stanju ( $r_Y = r_i = 100 \text{ mm}$ ) radijalni pomaci unutarnjeg i vanjskog ruba cijevi prema izrazu (4.8) jednaki su

$$\begin{aligned} u(r = r_i = 100 \text{ mm}) &= \frac{325}{203000} \frac{100^2}{100} = 0,1601 \text{ mm}, \\ u(r = r_i = 200 \text{ mm}) &= \frac{325}{203000} \frac{100^2}{200} = 0,08005 \text{ mm}. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Raspodjela normalnih naprezanja za taj slučaj glasi

$$\begin{aligned} \sigma_{r,Y} &= 40,625 \cdot (1 - 40000 \cdot r^{-2}) \text{ N/mm}^2, \\ \sigma_{\varphi,Y} &= 40,625 \cdot (1 + 40000 \cdot r^{-2}) \text{ N/mm}^2, \\ \sigma_{z,Y} &= 40,625 \text{ N/mm}^2. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Granično stanje postiže se kad se plastificira cijeli presjek ( $r_Y = r_o = 200 \text{ mm}$ ). Tlak potreban za postizanje takvog stanja izračunava se prema izrazu

$$p_{Y,o} = 325 \cdot \ln \frac{200}{100} = 225,273 \text{ N/mm}^2. \quad (4.26)$$

Raspodjela normalnih naprezanja za granično stanje

$$\begin{aligned}\sigma_{r,gr} &= 325 \cdot (\ln r - 5,2983) \text{ N/mm}^2, \\ \sigma_{\varphi,gr} &= 325 \cdot (\ln r - 4,2983) \text{ N/mm}^2, \\ \sigma_{z,gr} &= 325 \cdot (\ln r - 4,7983) \text{ N/mm}^2.\end{aligned}\quad (4.27)$$

Nakon što je debelostjena cijev dostigla granično stanje deformacije rastu dalje bez povećanja opterećenja zbog korištenja modela elastično-idealno plastičnog materijala koji nema svojstvo očvršćivanja. U numeričkom proračunu neće se promatrati granični slučaj.

Slijedi određivanje optimalnog radijusa autofretaže prema izrazu (4.20)

$$r_{a,opt} = 100 \cdot e^{\frac{130 \cdot 10^6}{325 \cdot 10^6}} = 149,18 \text{ mm.} \quad (4.28)$$

Iz izraza (4.21) slijedi potrebni tlak autofretaže

$$p_{a,opt} = \frac{325 \cdot 10^6}{2} \left( 1 - \frac{e^{\frac{2 \cdot 130 \cdot 10^6}{325 \cdot 10^6}}}{2^2} + 2 \cdot \frac{130 \cdot 10^6}{325 \cdot 10^6} \right) = 202,087 \text{ N/mm}^2. \quad (4.29)$$

Raspodjela naprezanja nakon opterećivanja tlakom autofretaže izračunava se prema izrazima (4.6) i (4.7)

- Plastificirano područje  $r_i \leq r \leq r_{a,opt}$ :

$$\begin{aligned}\sigma_{r,Y,pl} &= 162,5 \cdot (2 \ln r - 10,4541) \text{ N/mm}^2, \\ \sigma_{\varphi,Y,pl} &= 162,5 \cdot (2 \ln r - 8,4541) \text{ N/mm}^2, \\ \sigma_{z,Y,pl} &= 162,5 \cdot (2 \ln r - 9,4541) \text{ N/mm}^2.\end{aligned}\quad (4.30)$$

- Elastično područje  $r_{a,opt} \leq r \leq r_o$ :

$$\begin{aligned}\sigma_{r,Y,el} &= 90,4339 \cdot (1 - 40000r^{-2}) \text{ N/mm}^2, \\ \sigma_{\varphi,Y,el} &= 90,4339 \cdot (1 + 40000r^{-2}) \text{ N/mm}^2, \\ \sigma_{z,Y,el} &= 90,4339 \text{ N/mm}^2.\end{aligned}\quad (4.31)$$

Nakon opterećivanja tlakom autofretaže debelostijena cijev se rasterećuje. Zbog pojave plastičnih deformacija prilikom opterećivanja tlakom autofretaže, nakon potpunog rasterećenja pojavljuju se zaostala naprezanja. Njihova raspodjela izračunava se prema izrazima (4.13) i (4.14)

- Plastificirano područje  $r_i \leq r \leq r_{a,opt}$ :

$$\begin{aligned}\sigma_{r,pl,R} &= 162,5 \left[ 2 \ln r - 11,5671 - 0,42322 \left( 1 - 40000 \cdot r^{-2} \right) \right] \text{ N/mm}^2, \\ \sigma_{\varphi,pl,R} &= 162,5 \left[ 2 \ln r - 9,5671 - 0,42322 \left( 1 + 40000 \cdot r^{-2} \right) \right] \text{ N/mm}^2, \\ \sigma_{z,pl,R} &= 162,5 \left[ 2 \ln r - 10,5671 - 0,42322 \right] \text{ N/mm}^2.\end{aligned}\quad (4.32)$$

- Elastično područje  $r_{a,opt} \leq r \leq r_o$ :

$$\begin{aligned}\sigma_{r,pl,R} &= 23,0657 \left( 1 - 40000 \cdot r^{-2} \right) \text{ N/mm}^2, \\ \sigma_{\varphi,pl,R} &= 23,0657 \left( 1 + 40000 \cdot r^{-2} \right) \text{ N/mm}^2, \\ \sigma_{z,pl,R} &= 23,0657 \text{ N/mm}^2.\end{aligned}\quad (4.33)$$

Pri ponovnom opterećivanju radnim tlakom  $p_{opr}$  maksimalno ekvivalentno naprezanje javlja se na spoju plastificiranog i elastičnog dijela, tj. na radijusu autofretaže  $r_a$ . Ekvivalentno naprezanje na tom mjestu izračunava se pomoću izraza (4.17)

$$\begin{aligned}\sigma_{Tr,r_a} &= 325 \frac{2^2}{1,492^2} \left[ \frac{1,492^2}{2^2} - \left( 1 - \frac{1,492^2}{2^2} + 2 \ln(1,492) \right) \frac{1}{2^2 - 1} \right] + \frac{2 \cdot 130}{2^2 - 1} \frac{2^2}{1,492^2}, \\ \sigma_{Tr,r_a} &= 238,624 \text{ N/mm}^2.\end{aligned}\quad (4.34)$$

Kod cijevi kod koje se javljaju samo elastične deformacije maksimalno ekvivalentno naprezanje pojavljuje se na unutarnjem radijusu  $r_i$ . Ukoliko se cijev koja prethodno nije podvrgnuta postupku autofretaže optereti radnim tlakom  $p_{opr}$  primjećuje se da vrijedi

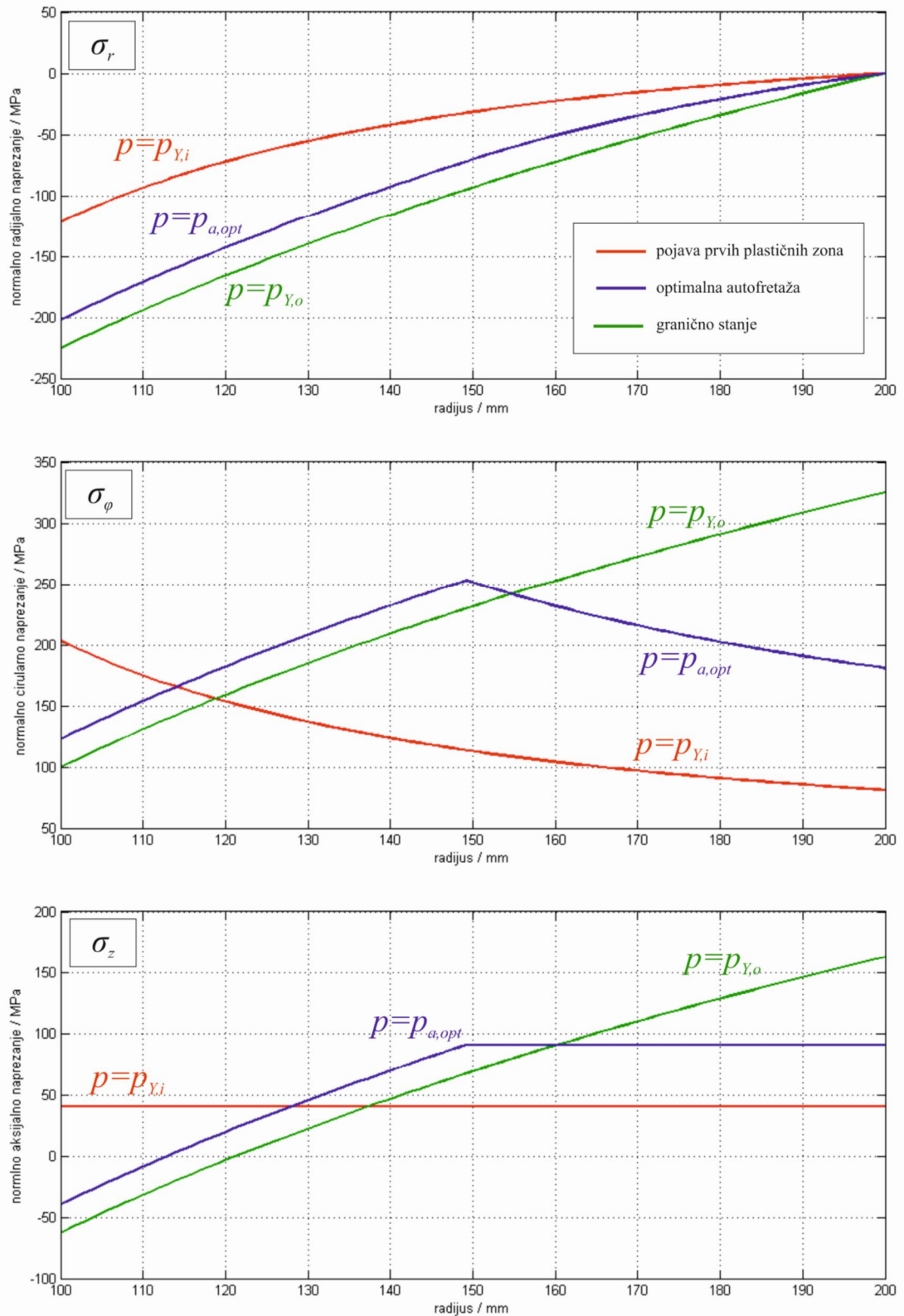
$$P_{opr} > P_{Y,i}, \quad (4.35)$$

odnosno radni tlak veći je od tlaka potrebnog za pojavu prvih plastičnih deformacija izračunatog u (4.23). Iz toga se zaključuje da pri opterećenju dolazi do plastifikacije unutarnjeg ruba cijevi pa ekvivalentno naprezanje u plastificiranom djelu poprima vrijednost granice tečenja  $\sigma_Y$ . Usporedbom maksimalnih ekvivalentnih naprezanja slijedi

$$\sigma_{Tr,ra} < \sigma_Y, \quad (4.36)$$

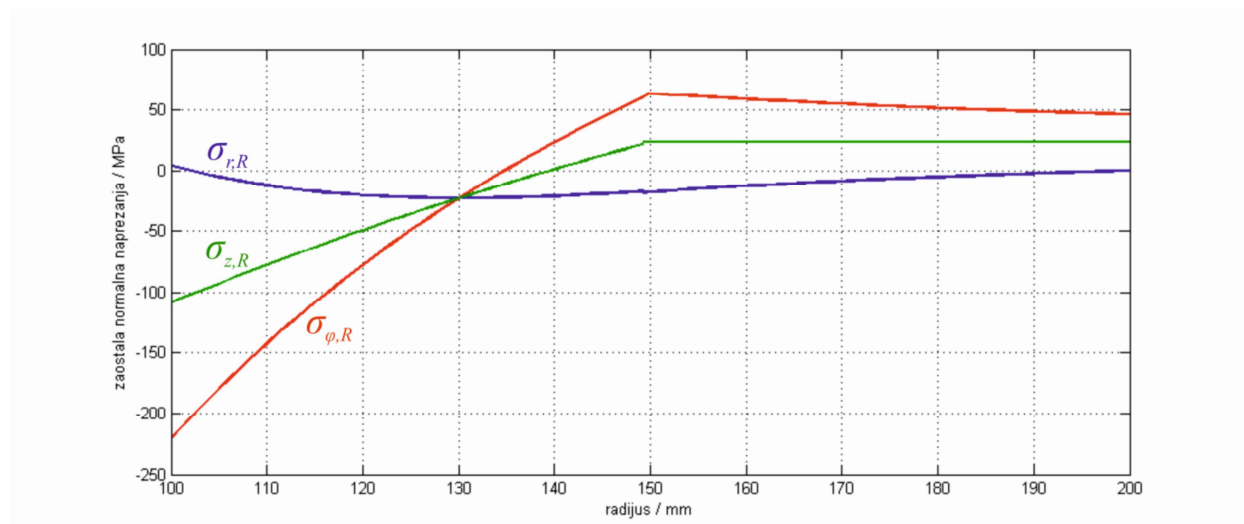
iz čega se zaključuje da u cijevi podvrgnutoj postupku autofretaže maksimalno ekvivalentno naprezanje postiže manju vrijednost nego naprezanje u cijevi koja nije podvrgnuta navedenom postupku.

Slijedi grafički prikaz izračunatih raspodjela normalnih naprezanja za slučajeve pojave prvih plastičnih deformacija, optimalne autofretaže, graničnog stanja te raspodjela zaostalih naprezanja nakon rasterećenja za slučaj optimalne autofretaže.



Slika 26. Raspodjela normalnih naprezanja pri različitim tlakovima autofretnaže

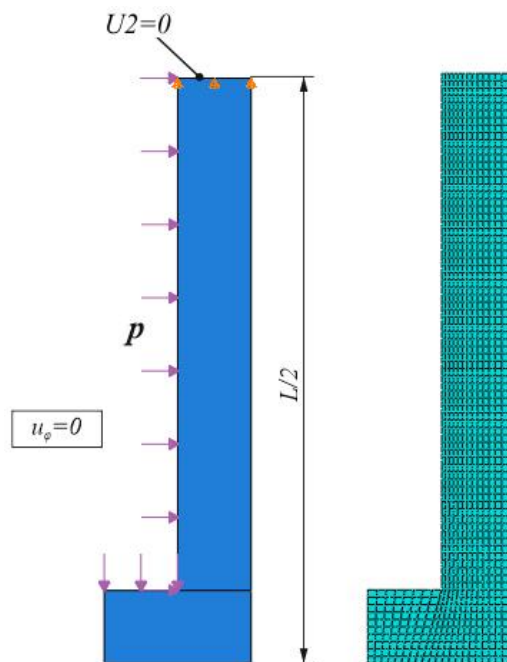




Slika 27. Raspodjela zaostalih normalnih naprezanja nakon optimalne autofretaže

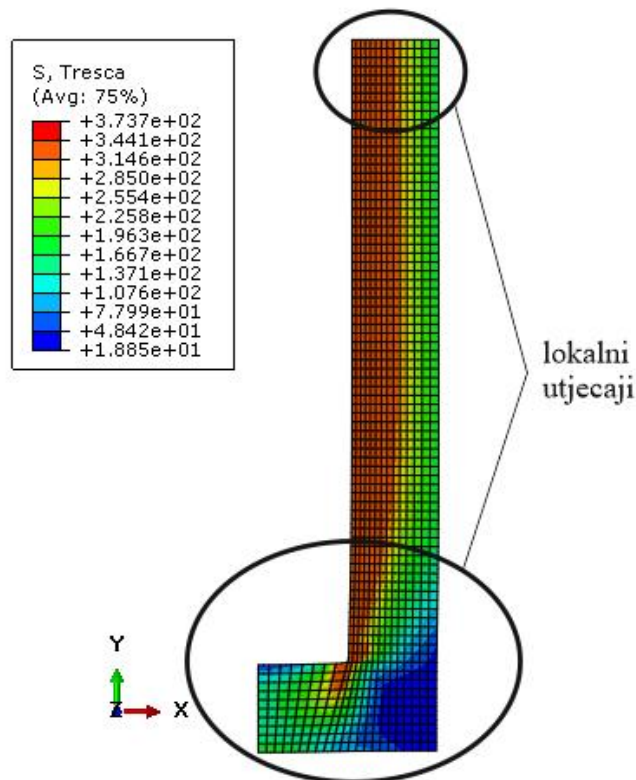
#### 4.5. Proračun metodom konačnih elemenata

Kao što je zaključeno u poglavlju 3, najpraktičniji izbor za rješavanje promatranog problema je upotreba osnosimetričnih konačnih elemenata. U numeričkom proračunu korišten je model zatvorene cijevi duljine  $L/2$  uz primjenu rubnih uvjeta simetrije na mjestu presjeka kao što je prikazano na Slici 28.



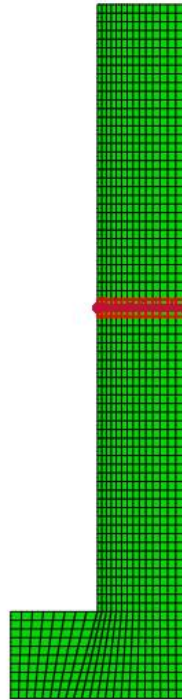
Slika 28. Proračunski model u Abaqusu i prikaz diskretizacije s 1200 CAX8 elemenata

Model je diskretiziran strukturiranom mrežom s 1200 četverokutnih osnosimetričnih konačnih elemenata drugog reda CAX8. Kontrolni proračun proveden je i sitnijom mrežom s većim brojem konačnih elemenata, no značajnije približavanje analitičkom rješenju nije uočeno. Na Slici 29. je vidljiv lokalni utjecaj savijanja na ekvivalentno naprezanje na spoju cijevi i kružne ploče koja zatvara cijev, kao i utjecaj rubnog uvjeta na gornjem rubu. Kako bi se izbjegli navedeni utjecaji, rezultate je potrebno očitavati na dovoljnoj udaljenosti od oba ruba modela.



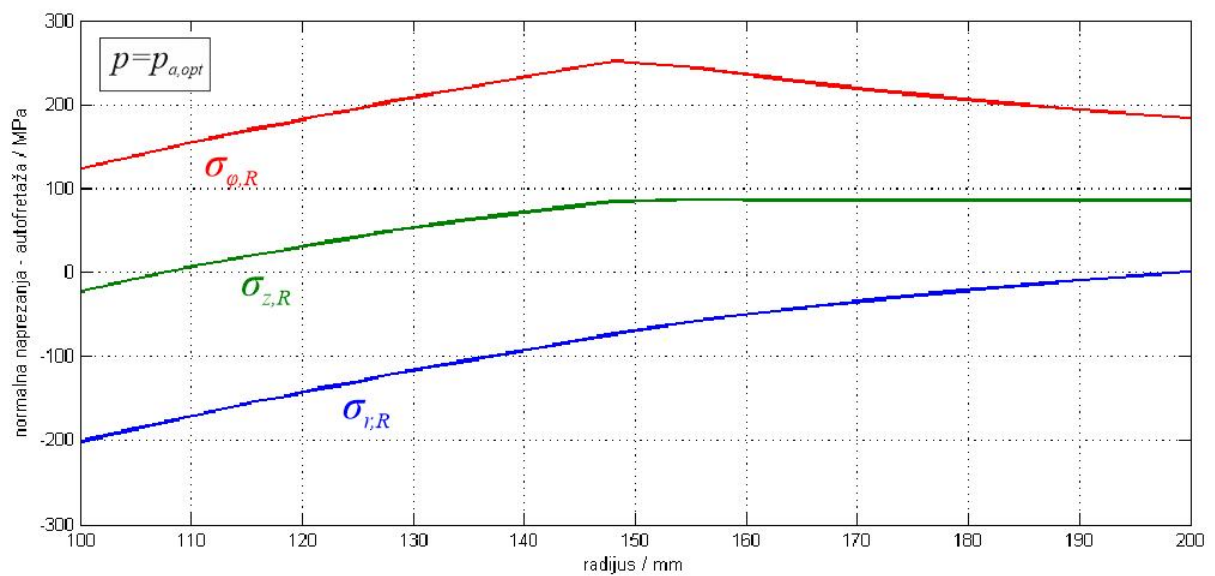
Slika 29. Raspodjela ekvivalentnog napreznja /  $\text{Nmm}^{-2}$

Pozicija presjeka na kojem su promatrani rezultati prikazana je na Slici 30. Raspodjele napreznja provjerene su i na presjecima koji prolaze elementima iznad i ispod promatranog presjeka kako bi se utvrdilo da nema značajne promjene raspodjele duž aksijalne osi, tj. ne postoji značajan utjecaj rubova modela.

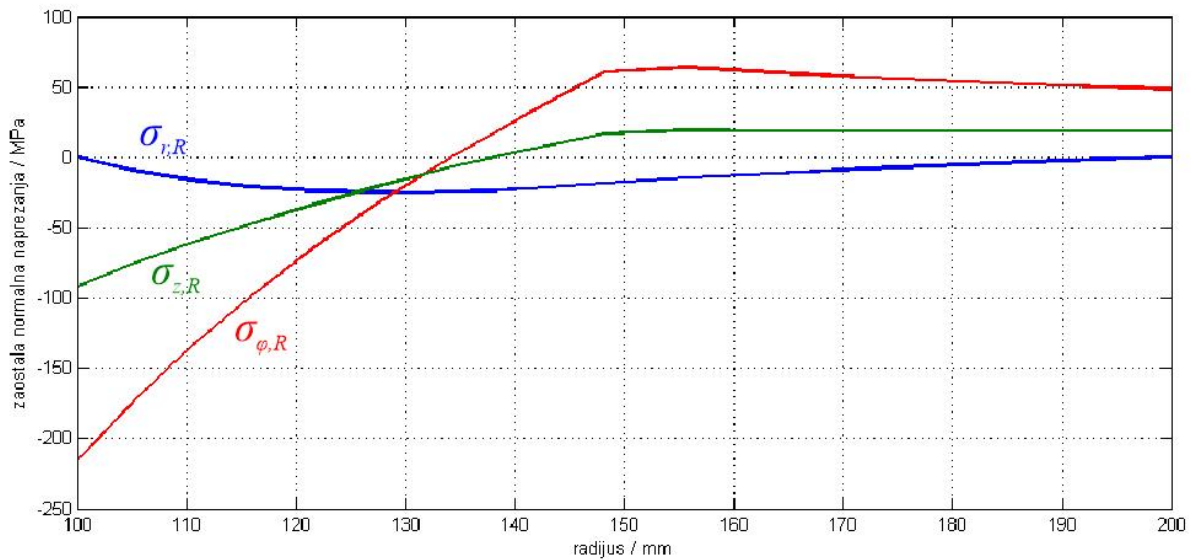


Slika 30. Poprečni presjek za određivanje raspodjele naprezanja

Dobivene raspodjele naprezanja za promatrani presjek prikazane su grafovima. Najprije je prikazana raspodjela pri opterećenju (Slika 31.), a zatim raspodjela zaostalih naprezanja nakon rasterećenja (Slika 32.).



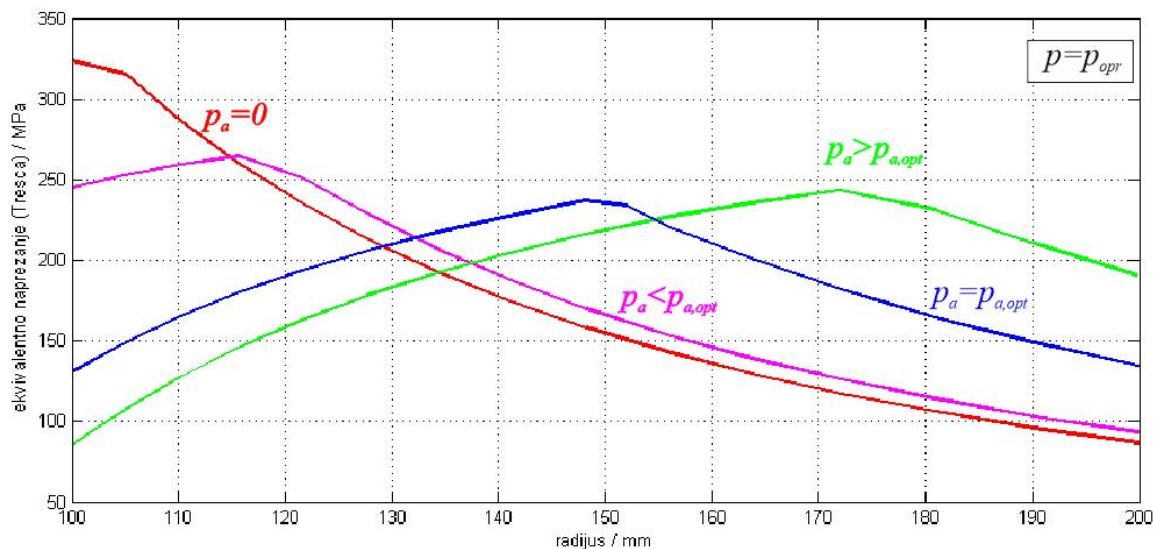
Slika 31. Raspodjela normalnih naprezanja za postupak optimalne autofrežaze (numerički proračun)



**Slika 32. Raspodjela normalnih zaostalih napreznja nakon postupka optimalne autofretaže (numerički proračun)**

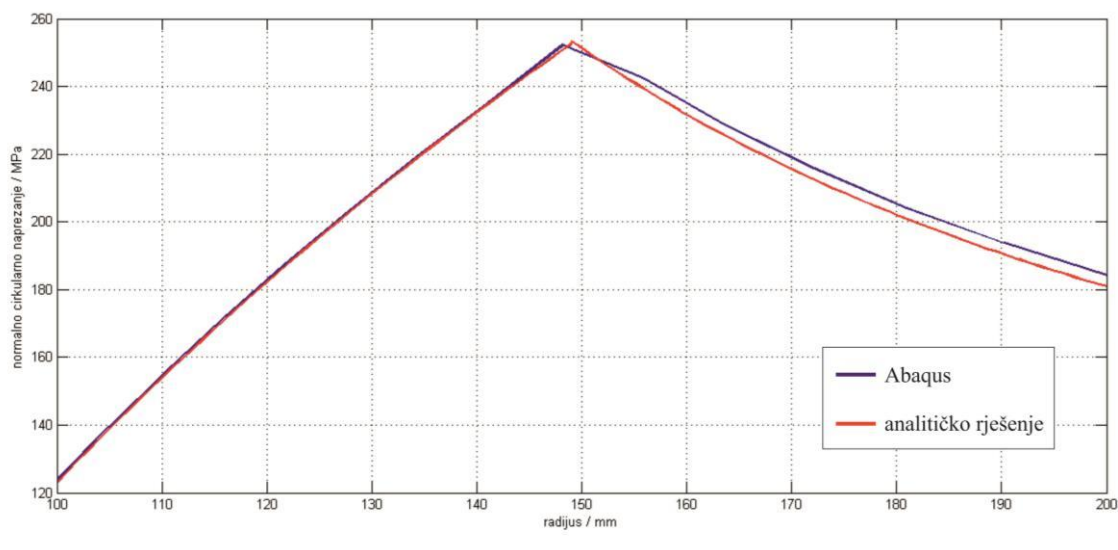
Slijedi usporedba raspodjele ekvivalentnog napreznja nakon opterećenja radnim tlakom  $p_{opr}$  za slijedeće slučajeve:

- bez prethodnog postupka autofretaže
- autofretaža pri tlaku  $p = 160 \text{ N/mm}^2$
- optimalna autofretaža pri tlaku  $p_{a,opt} = 202,87 \text{ N/mm}^2$
- autofretaža pri tlaku  $p = 220 \text{ N/mm}^2$

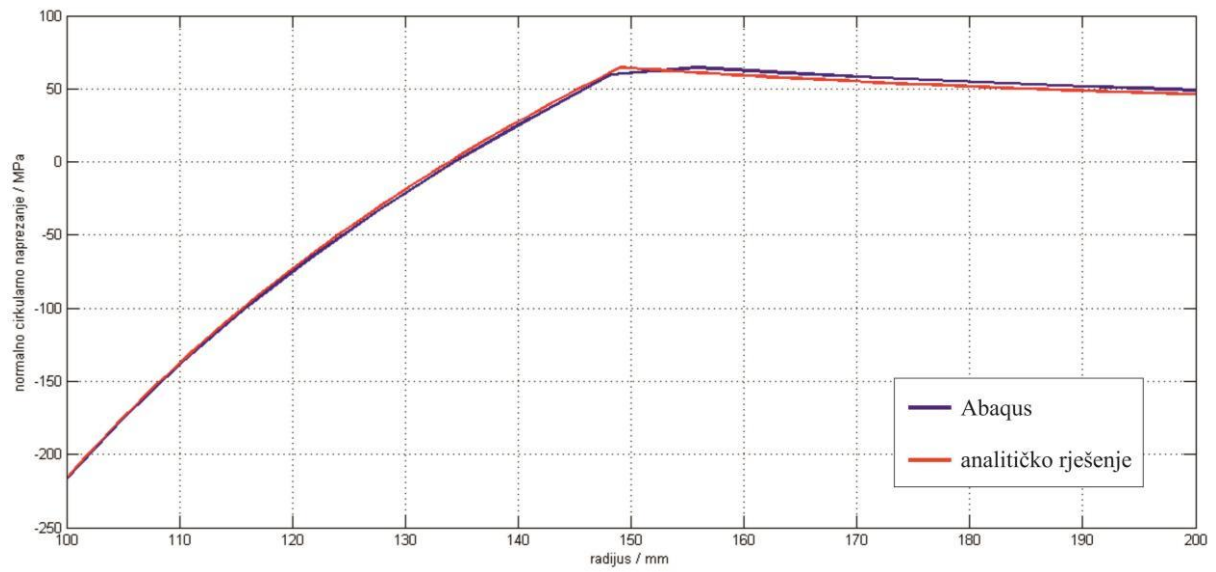


Slika 33. Usporedba ekvivalentnog napreznja pri radnom opterećenju za različite slučajeve autofretaže

Usporedbom rezultata uočava se da se najmanje ekvivalentno napreznje pri opterećenju radnim tlakom pojavljuje u slučaju optimalne autofretaže, dok se maksimalno ekvivalentno napreznje pojavljuje u cijevi koja prethodno nije podvrgnuta postupku autofretaže te kod te cijevi nastaju i plastične deformacije na unutarnjem dijelu. Raspodjele normalnog radijalnog i normalnog cirkularnog napreznja dobivene numeričkim proračunom pomoću paketa Abaqus odstupaju do 3%. Usporedni prikazi analitičkog i numeričkog rješenja raspodjele normalnog cirkularnog napreznja pri optimalnoj autofretaži nalaze se na Slici 34. i Slici 35.



Slika 34. Usporedba analitičkog i numeričkog rješenja raspodjele normalnog cirkularnog napreznja za slučaj optimalne autofretaže



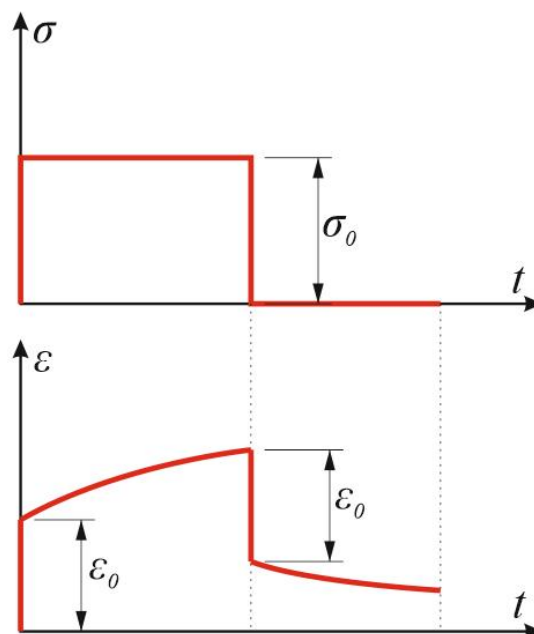
**Slika 35. Usporedba analitičkog i numeričkog rješenja raspodjele zaostalog normalnog cirkularnog naprezanja nakon optimalne autofretaže**

## 5. VISKOELASTIČNO DEFORMIRANJE DEBELOSTIJIENIH CIJEVI

U dosadašnjem razmatranju elastičnog i elasto-plastičnog deformiranja debelostijenih cijevi naprezanje je funkcija deformacije, a ne ovisi o vremenu ili brzini deformacije. U ovom poglavlju razmatrat će se viskoelastični materijali, kod kojih naprezanje ovisi i o vremenu, tj. brzini deformacije. Takva svojstva pri sobnoj temperaturi pokazuju polimerni materijali, npr. polietilen, epoksidne smole, poliester. Pri povišenim temperaturama viskoelastična svojstva pokazuju i metalni materijali, npr. čelik, aluminij, aluminijske legure.

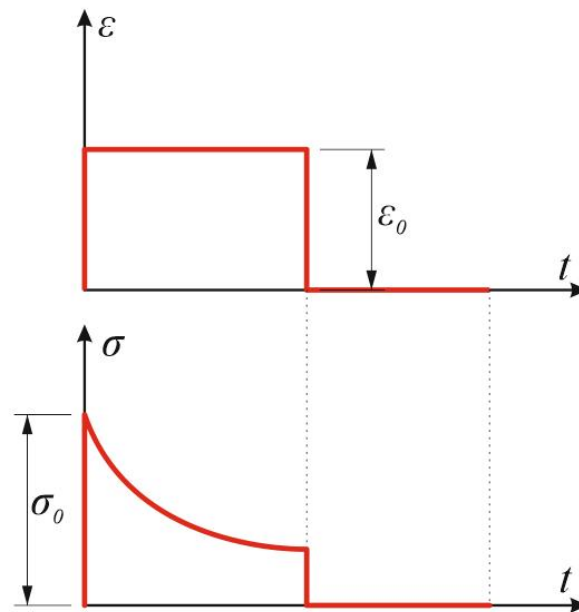
### 5.1. Ponašanje viskoelastičnih materijala

Ponašanje viskoelastičnih materijala najčešće se ispituje pomoću 2 pokusa. Prvi je pokus puzanja. Epruveta izrađena od viskoelastičnog materijala jednoosno se opterećuje konstantnim naprezanjem  $\sigma_0$ . U trenutku početka djelovanja opterećenja nastaje trenutna deformacija  $\varepsilon_0$  koja odgovara ponašanju linearno-elastičnih, odnosno elasto-plastičnih materijala. Deformacija tijekom vremena raste i taj se proces naziva puzanje materijala. Nakon rasterećenja deformacija se trenutno smanjuje za iznos početne elastične deformacije, nakon čega se nastavlja dodatno smanjivati tijekom vremena. Tijek pokusa puzanja prikazan je na Slika 36 36.



Slika 36. Promjena deformacije pri pokusu puzanja

U pokusu relaksacije ispitni uzorak se rasteže te se održava konstantna deformacija  $\varepsilon_0$ . U trenutku kad nastaje deformacija u viskoelastičnom materijalu javlja se trenutni skok napreznja  $\sigma_0$ , koje se tijekom vremena smanjuje. Takav proces se naziva relaksacija materijala. Tijek pokusa relaksacije prikazan je na Slici 37.



Slika 37. Promjena napreznja pri pokusu relaksacije

## 5.2. Mehanički modeli viskoelastičnih materijala

Viskoelastično ponašanje materijala moguće je prikazati pomoću mehaničkih modela. Različiti linearni viskoelastični modeli dobivaju se kombinacijama dvaju osnovnih članova, a to su linearno-elastična opruga i linearni viskozni prigušivač. Za linearno-elastični element vrijedi linearna veza napreznja i deformacije

$$\sigma = E \cdot \varepsilon, \quad (5.1)$$

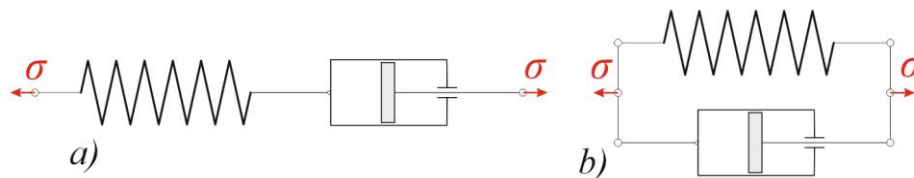
Linearni viskozni element daje linearnu vezu između napreznja i brzine deformacije

$$\sigma = \eta \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}, \quad (5.2)$$

gdje  $\eta$  označava faktor viskoznog prigušenja.

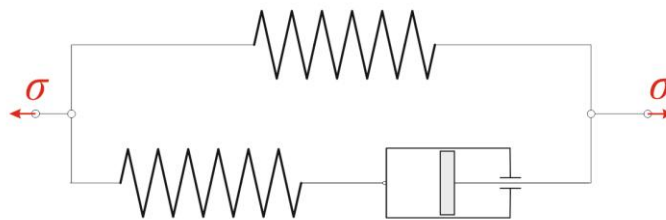


Dva osnovna viskoelastična modela materijala su Maxwellov i Voigt-Kelvinov model, shematski prikazani na Slici 38.



Slika 38. Shematski prikaz: a) Maxwellov model, b) Voigt-Kelvinov model

Maxwellov model dobro opisuje relaksaciju, dok pri konstantnom opterećenju pokazuje svojstvo tekućine, tj. deformacija se povećava linearno. Voigt-Kelvinov model ne može opisati relaksaciju materijala. Iz tog razloga potrebno je koristiti složenije mehaničke modele, kako bi se što točnije opisalo ponašanje realnog materijala. U ovom radu proračuni se provode korištenjem Zenerovog modela (Slika 39.).



Slika 39. Shematski prikaz Zenerovog modela viskoelastičnog materijala

Zenerov model pripada grupi poopćenog Maxwellovog modela u kojem su paralelno spojeni elastični element i osnovni Maxwellov model.

### 5.3. Konstitutivne jednadžbe

#### 5.3.1. Diferencijalna formulacija konstitutivnih jednadžbi

Kao što je navedeno na početku poglavlja, kod viskoelastičnih materijala veza napreznja i deformacija ovisi i o vremenu. Iz tog razloga potrebno je izvesti konstitutivne jednadžbe koje u sebi sadrže i vremensku ovisnost. Općeniti oblik konstitutivne diferencijalne jednadžbe za viskoelastična tijela je

$$\begin{aligned} P' \sigma_{kk} &= Q' \varepsilon_{kk}, \\ P'' s_{ij} &= Q'' e_{ij}, \end{aligned} \quad (5.3)$$

gdje su  $\sigma_{kk}$  i  $\varepsilon_{kk}$  sferni dio naprezanja, odnosno deformacije dok su  $s_{ij}$  i  $e_{ij}$  devijatorski dio naprezanja, odnosno deformacije. Parametri  $P'$ ,  $P''$ ,  $Q'$  i  $Q''$  su linearni diferencijalni operatori koji opisuju svojstva viskoelastičnog materijali i vrijedi

$$\begin{aligned} P' &= \sum_{k=0}^m p_k' \frac{d^k}{dt^k}, \\ Q' &= \sum_{k=0}^n q_k' \frac{d^k}{dt^k}, \\ P'' &= \sum_{k=0}^r p_k'' \frac{d^k}{dt^k}, \\ Q'' &= \sum_{k=0}^s q_k'' \frac{d^k}{dt^k}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Vrijednosti parametara  $p_k'$ ,  $p_k''$ ,  $q_k'$ ,  $q_k''$  u (5.4) ovise o izboru mehaničkog modela materijala. Razlaganje tenzora naprezanja na sferni i devijatorski dio koristi se jer se realni materijali često ponašaju kao elastični pri dilataciji, dok viskoelastično ponašanje pokazuju pri smicanju. Zbog diferencijalne formulacije konstitutivnih jednadžbi pri rješavanju se koristi Laplaceova transformacija kojom se jednadžbe iz fizikalne ravnine  $t$  prebacuju u Laplaceovu ravninu  $s$ , pri čemu diferencijalne jednadžbe prelaze u algebarske. Nakon rješavanja sustava algebarskih jednadžbi u Laplaceovoj ravnini provodi se inverzna transformacija, čime se dobivaju fizikalna rješenja u ovisnosti o vremenu  $t$ . Laplaceova transformacija definirana je izrazom

$$\bar{f}(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt. \quad (5.5)$$

### 5.3.2. Integralna formulacija konstitutivnih jednadžbi

Osim u diferencijalnom obliku (5.3), vezu između naprezanja i deformacija za viskoelastični materijal moguće je zapisati i u integralnom obliku pomoću nasljednih integrala [7]. Opći oblik integralne formulacije glasi

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= \int_{\tau_0}^t E(t-\tau) \dot{\varepsilon}(\tau) d\tau, \\ \varepsilon(t) &= \int_{\tau_0}^t D(t-\tau) \dot{\sigma}(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Parametri koji se koriste za opisivanje ponašanja materijala u integralnoj formulaciji su relaksacijski modul  $E(t)$  i podatljivost puzanja  $D(t)$ . Integralna formulacija može u potpunosti zamjeniti diferencijalnu formulaciju, a za određene probleme pogodnija je za izračunavanje rješenja.

### 5.3.3. Pristup pomoću varijabli stanja

Alternativni pristup, koji se najčešće koristi u programskim paketima za analizu metodom konačnih elemenata, je pristup pomoću varijabli stanja. Uvođenjem varijabli stanja umjesto diferencijalne jednadžbe  $n$ -tog reda (5.3) ponašanje materijala opisuje se pomoću  $n$  diferencijalnih jednadžbi prvog reda. Niži red vremenske derivacije zahtjeva manji broj podataka iz prošlih vremenskih trenutaka za shemu konačnih razlika te iz tog razloga numerički postupak zahtjeva manje radne memorije, a i vrijeme trajanja proračuna se smanjuje.

Polazi se od integralne formulacije (5.6), u kojoj se relaksacijski modul  $E(t)$  razvija u Pronjev red

$$E(t) = E_{\infty} + \sum_{i=1}^n E_i e^{\frac{-t}{T_i}}. \quad (5.7)$$

Varijable stanja definiraju se kao

$$q_i(t) = \int_{\tau_0}^t e^{\frac{-(t-\tau)}{T_i}} \dot{\varepsilon}(\tau) d\tau \quad i = 1, \dots, n \quad (5.8)$$

Deriviranjem izraza (5.8) po vremenu dobiva se sustav  $n$  linearnih diferencijalnih međusobno nezavisnih jednadžbi

$$\dot{q}_i(t) + \frac{q_i}{T_i} = \dot{\varepsilon}(t) \quad i = 1, \dots, n. \quad (5.9)$$

Primjenom početnih uvjeta u jednadžbama (5.9) izračunavaju se varijable stanja na kraju svakog vremenskog inkrementa. Uvrštavanjem (5.7) i (5.8) u izraz (5.6) dobiva se vremenska ovisnost naprežanja o varijablama stanja, odnosno o deformaciji

$$\sigma(t) = E_{\infty} \varepsilon(t) + \sum_{i=1}^n E_i q_i(t). \quad (5.10)$$

Analogni postupak provodi se za određivanje ovisnosti deformacije o naprezanju, detaljnije opisan u literaturi [7].

U numeričkom proračunu vrijednost varijabli stanja u vremenu određuje se po vremenskim inkrementima  $\Delta t$ . Najjednostavniji algoritam za primjenu je Eulerov postupak kod kojeg se vrijednost u slijedećem vremenskom koraku određuje pomoću vremenskih razlika

$$\begin{aligned} q_i(t + \Delta t) &= q_i(t) + \Delta q_i(t), \\ \Delta q_i(t) &= -\left(\frac{q_i(t)}{T_i} - \dot{\varepsilon}(t)\right). \end{aligned} \quad (5.11)$$

Programski paket Abaqus koristi složenije algoritme za vremensku integraciju, o čemu se detaljnije govori u literaturi [7].

#### 5.4. Analitičko rješenje

Analitičko rješenje izvest će se korištenjem diferencijalne formulacije konstitutivnih relacija. Također se primjenjuje princip podudarnosti elastičnog i viskoelastičnog rješenja. Laplaceove transformacije jednadžbi koje opisuju viskoelastični problem analogne su jednadžbama teorije elastičnosti za jednaku geometriju problema. Princip podudarnosti omogućuje korištenje izraza za linearno elastični materijal (3.8), koji za otvorenu cijev (ravninsko stanje naprezanja) glasi

$$u_r = \frac{p_i r_i^2}{E(r_o^2 - r_i^2)} \left[ (1 - \nu)r + (1 + \nu)\frac{r_o^2}{r} \right]. \quad (5.12)$$

Izraz (5.12) predstavlja rješenje problema u Laplaceovoj ravnini. Umjesto modula elastičnosti  $E$  i Poissonovg koeficijenta  $\nu$  koristit će se prostorni modul elastičnosti  $K$  i modul smičnosti  $G$ . Izrazi za vezu između elastičnih konstanti su

$$\begin{aligned} E &= \frac{9KG}{3K + G}, \\ \nu &= \frac{3K - 2G}{6K + 2G}. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Uvrštavanjem izraza (5.13) u izraz za radijalni pomak (5.12) dobiva se

$$u_r = \frac{p_i r_i^2}{2G(r_o^2 - r_i^2)} \left[ \frac{3K + 4G}{9K} r + \frac{r_o^2}{r} \right]. \quad (5.14)$$

Hookeov zakon zapisan u devijatorskom obliku glasi

$$\begin{aligned}\sigma_{kk} &= 3K\varepsilon_{kk}, \\ s_{ij} &= 2Ge_{ij}.\end{aligned}\tag{5.15}$$

Usporedbom izraza (5.15) i (5.3) slijedi

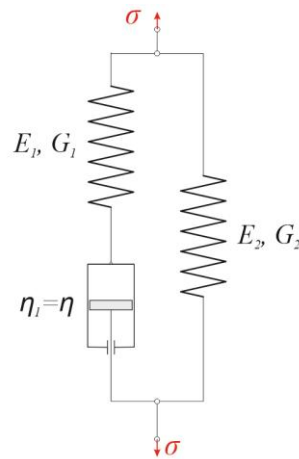
$$\begin{aligned}3K &= \frac{Q'}{P'}, \\ 2G &= \frac{Q''}{P''}.\end{aligned}\tag{5.16}$$

Kao što je ranije navedeno, parametri  $Q'$ ,  $Q''$ ,  $P'$  i  $P''$  ovise o svojstvima materijala. U proračunu će se koristiti model materijala koji pokazuje elastično ponašanje uslijed sfernog dijela napreznja, dok se uslijed devijatorskog dijela napreznja ponaša viskoelastično po modelu Zenerovog materijala. Za takav materijal vrijedi

$$\begin{aligned}P' &= 1, \\ Q' &= 3K, \\ P'' &= 1 + p_1s, \\ Q'' &= q_0 + q_1s.\end{aligned}\tag{5.17}$$

Parametri su prikazani u obliku Laplaceovih transformata jer će u tom obliku biti implementirani u izraze. Konstante  $p_1$ ,  $q_0$  i  $q_1$  su svojstva materijala koja proizlaze iz mehaničkog modela materijala (Slika 40.) i vrijedi [7]

$$\begin{aligned}p_1 &= \frac{\eta}{G_2}, \\ q_0 &= 2G_1, \\ q_1 &= \frac{2\eta}{G_2}(G_1 + G_2).\end{aligned}\tag{5.18}$$



Slika 40. Proračunski model materijla

Funkcija relaksacije  $E(t)$  razvijena u Pronyev red (5.7) uz korištenje samo jednog člana

$$E(t) = E_2 + E_1 e^{-t/\tau_1}. \quad (5.19)$$

Uvrštavanjem izraza (5.16) u (5.14) slijedi

$$u_r = \frac{p_i(t) r_i^2}{(r_o^2 - r_i^2)} \frac{P''(s)}{Q''(s)} \left[ \left( \frac{2P'(s)Q''(s)}{P''(s)Q'(s)} + 1 \right) \frac{r}{3} + \frac{r_o^2}{r} \right]. \quad (5.20)$$

Potrebno je još opterećenje unutarnjim tlakom izraziti pomoću Laplaceova transformata. Uz pretpostavku trenutnog početka djelovanja tlaka vrijedi

$$p_i(t) \rightarrow \frac{p_i(s)}{s}. \quad (5.21)$$

Uvrštavanjem (5.21) i (5.17) u (5.20) i sređivanjem izraza slijedi

$$u_r = \frac{p_i r_i^2}{(r_o^2 - r_i^2)} \left[ \left( \frac{1}{3q_1 \left( \frac{q_0}{q_1} + s \right) s} + \frac{p_1}{3q_1 \left( \frac{q_0}{q_1} + s \right)} + \frac{2q_0}{9Kq_1 \left( \frac{q_0}{q_1} + s \right) s} + \frac{2}{9K \left( \frac{q_0}{q_1} + s \right)} \right) r + \left( \frac{1}{q_1 \left( \frac{q_0}{q_1} + s \right) s} + \frac{p_1}{q_1 \left( \frac{q_0}{q_1} + s \right)} \right) \frac{r_o^2}{r} \right] \quad (5.22)$$

Dobiveni izraz (5.22) potrebno je inverznom Laplaceovom transformacijom prevesti u vremensku domenu  $t$ . Pri tome vrijede slijedeći izrazi

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha + s} &\rightarrow e^{-\alpha t}, \\ \frac{1}{(\alpha + s)s} &\rightarrow \frac{1}{\alpha}(1 - e^{-\alpha t}). \end{aligned} \quad (5.23)$$

Nakon inverzne transformacije (5.22) i sređivanja dobiva se konačni izraz za radijalni pomak

$$u_r = \frac{p_i r_1^2}{(r_o^2 - r_i^2)} \left[ \left( \frac{1}{3q_0} + \frac{2}{9K} + e^{-\frac{q_0 \cdot t}{q_1}} \left( -\frac{1}{3q_0} + \frac{p_1}{3q_1} - \frac{2}{9K} \right) \right) r + \left( \frac{1}{q_0} + e^{-\frac{q_0 \cdot t}{q_1}} \left( -\frac{1}{q_0} + \frac{p_1}{q_1} \right) \right) \frac{r_o^2}{r} \right]. \quad (5.24)$$

Iz izraza (5.24) vidljivo je da se radijalni pomak  $u_r$  asimptotski približava određenoj vrijednosti kad  $t \rightarrow \infty$ . Vrijednost kojoj teži radijalni pomak je

$$u_r(t \rightarrow \infty) = \frac{p_i r_1^2}{(r_o^2 - r_i^2)} \left[ \left( \frac{1}{3q_0} + \frac{2}{9K} \right) r + \frac{1}{q_0} \frac{r_o^2}{r} \right]. \quad (5.25)$$

Iz izraza (5.24) moguće je odrediti i trenutni pomak nakon početka djelovanja opterećenja

$$u_r(t = 0) = \frac{p_i r_1^2}{(r_o^2 - r_i^2)} \left[ \left( \frac{2}{9K} + \frac{p_1}{3q_1} \right) r + \frac{p_1}{q_1} \frac{r_o^2}{r} \right]. \quad (5.26)$$

Za određivanje parametara materijala (5.18) koriste se podaci dobiveni eksperimentalno u pokusu puzanja.

### 5.5. Proračun sa zadanim podacima

Vrijednosti materijalnih koeficijenata koji opisuju ponašanje materijala izrazom (5.19) su

$$\begin{aligned} E(t) &= k_1 + k_2 e^{-t/T}, \\ k_1 &= 1000, \\ k_2 &= 9000, \\ T &= 1. \end{aligned} \quad (5.27)$$

Zadan je i prostorni modul elastičnosti  $K$

$$K = 100000 \text{ N/mm}^2. \quad (5.28)$$

Iz izraza (5.19) usporedbom s podacima (5.27) slijedi

$$\begin{aligned} E_1 &= 9000 \text{ N/mm}^2, \\ E_2 &= 1000 \text{ N/mm}^2. \end{aligned} \quad (5.29)$$

Detaljan opis značenja koeficijenata  $E_1$  i  $E_2$  može se pronaći u literaturi [7].

Poissonov koeficijent  $\nu$  određuje se pomoću izraza preuzetog iz [7]

$$\nu = \frac{3K - k_1 - k_2}{6K} = 0,4833. \quad (5.30)$$

Veza između modula elastičnosti  $E$  i modula smičnosti  $G$  glasi

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}. \quad (5.31)$$

Pomoću izraza (5.31) izračunava se

$$\begin{aligned} G_1 &= \frac{E_1}{2(1 + \nu)} = 337,15 \text{ N/mm}^2, \\ G_2 &= \frac{E_2}{2(1 + \nu)} = 3034,39 \text{ N/mm}^2. \end{aligned} \quad (5.32)$$

Vrijednost koeficijenta prigušnog elementa  $\eta$  iz vremena relaksacije prema izrazu iz [7] je

$$\eta = E_1 T_1 = 9000 \text{ Pa} \cdot \text{s}. \quad (5.33)$$

Pomoću poznatih koeficijenata (5.32) i (5.33) izračunavaju se potrebni koeficijenti iz (5.18)

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{\eta}{G_2} = 2,996 \text{ s}, \\ q_0 &= 2G_1 = 674,30 \text{ N/mm}^2, \\ q_1 &= \frac{2\eta}{G_2}(G_1 + G_2) = 20000 \text{ Pa} \cdot \text{s}. \end{aligned} \quad (5.34)$$

Zadana geometrija cijevi i opterećenje su

$$\begin{aligned} r_i &= 10 \text{ mm}, \\ r_o &= 20 \text{ mm}, \\ p_i &= 10 \text{ N/mm}^2. \end{aligned} \quad (5.35)$$

Uvrštavanjem podataka (5.35) u izraz (5.24) dobiva se raspodjela radijalnog pomaka u ovisnosti o radijusu  $r$  i vremenu  $t$ . Promjena radijalnog pomaka u vremenu za unutarnji i



vanjski rub cijevi prikazana je usporedno s numeričkim rješenjem dobivenim metodom konačnih elemenata na Slici 42. i Slici 43.

Izračunate su vrijednosti radijalnog pomaka u trenutku početka djelovanja opterećenja i vrijednost kojoj se asimptotski približava kada  $t \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} u_r(r = r_i = 10 \text{ mm}, t = 0 \text{ s}) &= 0,02171 \text{ mm.} \\ u_r(r = r_i = 10 \text{ mm}, t \rightarrow \infty) &= 0,2143 \text{ mm.} \end{aligned} \quad (5.36)$$

$$\begin{aligned} u_r(r = r_o = 20 \text{ mm}, t = 0 \text{ s}) &= 0,01332 \text{ mm.} \\ u_r(r = r_o = 20 \text{ mm}, t \rightarrow \infty) &= 0,1319 \text{ mm.} \end{aligned} \quad (5.37)$$

### 5.6. Proračun metodom konačnih elemenata

Programski paket Abaqus pri rješavanju problema viskoelastičnosti koristi varijable stanja. Postupak i izrazi za određivanje varijabli stanja preuzeti su iz literature [7]. Analogno izrazu (5.7) definira se relaksacijska funkcija pri smicanju za Zenerov model materijala

$$G(t) = G_\infty + G_1 e^{\frac{-t}{T_1^G}}. \quad (5.38)$$

Ekvivalentni zapisa izraza (5.38) je

$$G(t) = G_0 \left( 1 - g_1 \left( 1 - e^{\frac{-t}{T_1^G}} \right) \right), \quad (5.39)$$

gdje vrijedi

$$\begin{aligned} G_1 &= G_0 - G_\infty, \\ g_1 &= \frac{G_1}{G_0}. \end{aligned} \quad (5.40)$$

Vrijednosti koeficijenata (5.40) određuju se pomoću izraza

$$\begin{aligned} G_0 &= \frac{3K(k_1 + k_2)}{9K - k_1 - k_2} = 337,078, \\ G_\infty &= \frac{3Kk_1}{9K - k_1} = 33,370, \\ G_1 &= G_0 - G_\infty = 303,707. \end{aligned} \quad (5.41)$$

Iz dobivenih rezultata dobiva se koeficijent  $g_1$

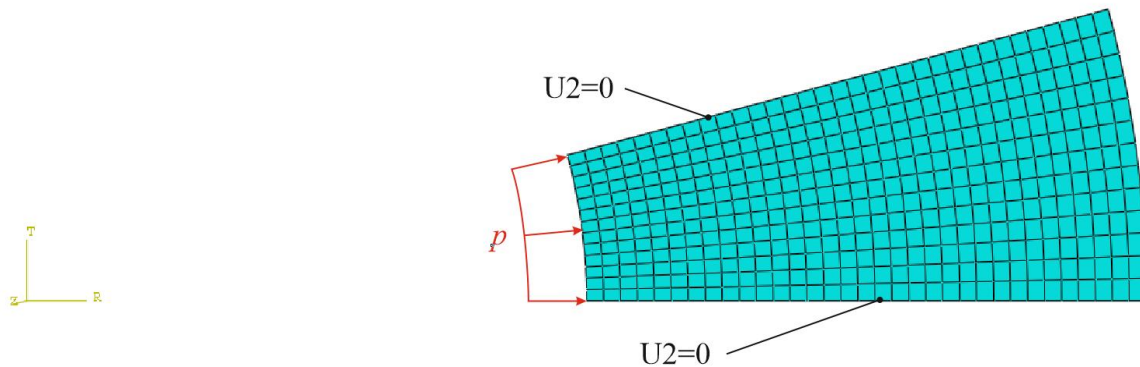
$$g_1 = \frac{G_1}{G_0} = 0,901. \quad (5.42)$$

Potrebno je još odrediti

$$T_1^G = \frac{9K - k_1 - k_2}{9K - k_1} = 98,99. \quad (5.43)$$

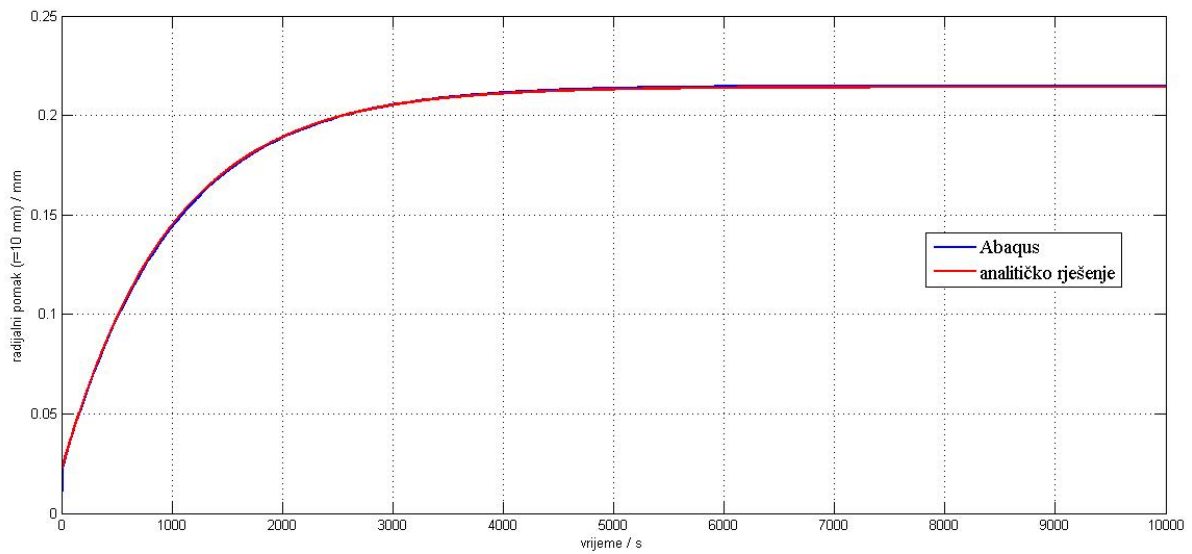
Koeficijenti određeni u izrazima (5.42) i (5.43) koriste se kao ulazni parametri pri definiranju materijalnih svojstava viskoelastičnog materijala u *Abaqusu*. Proračun se provodi do vremenskog trenutka  $t=10\,000$  s nakon kojeg je stanje deformacije ustaljeno.

U numeričkom proračunu korišteni su četverokutni konačni elementi *Plane Stress CPS4* i strukturirana mreža. Modeliran je dio presjeka cijevi (Slika 37.).

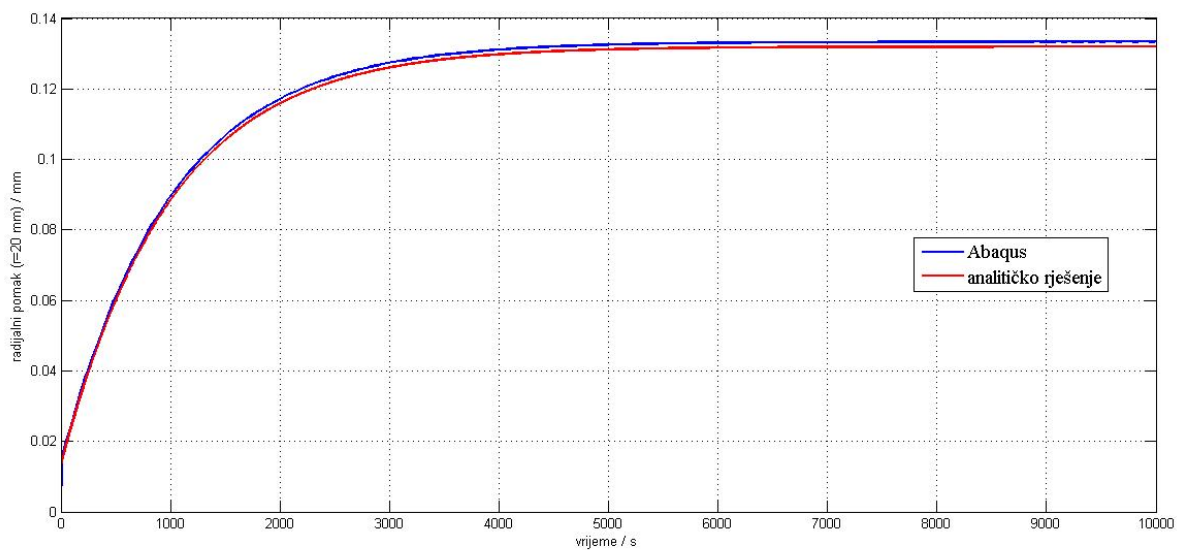


Slika 41. Diskretizirani model s 429 CPS4 konačnih elemenata

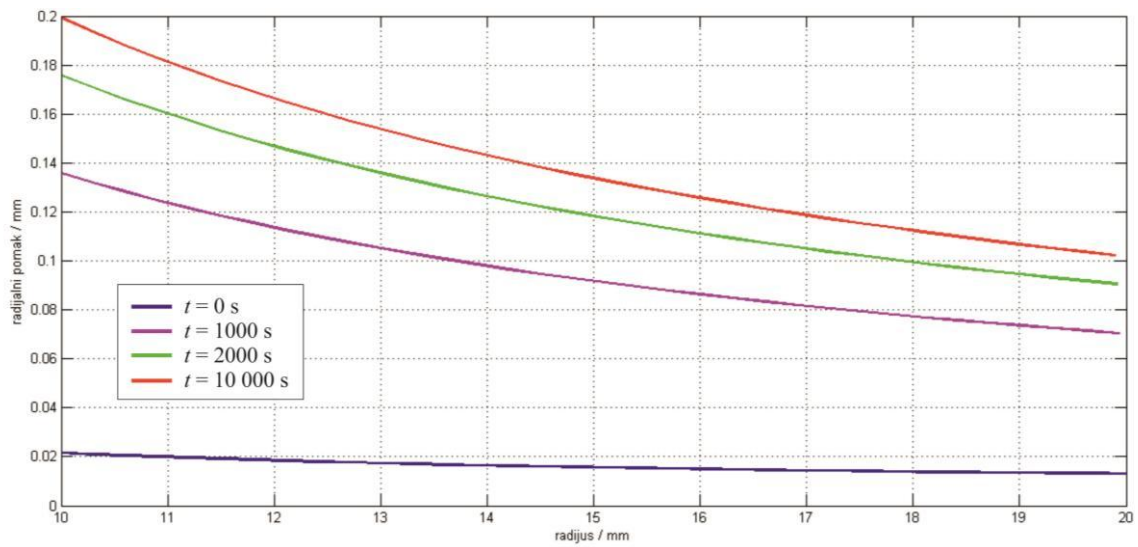
Relativna razlika analitičkog i numeričkog rješenja radijalnog pomaka unutarnjeg ruba cijevi je ispod 0,5%. Usporedba rješenja prikazana je na Slici 42. Relativna razlika za vanjski rub iznosi do 1,5%, a usporedba rješenja prikazana je na Slici 43.



Slika 42. Usporedba analitičkog i numeričkog rješenja vremenske promjene radijalnog pomaka unutarnjeg ruba



Slika 43. Usporedba analitičkog i numeričkog rješenja vremenske promjene radijalnog pomaka vanjskog ruba



Slika 44. Raspodjela radijalnog pomaka po presjeku za različite vremenske trenutke

Analitička i numerička rješenja pokazuju izrazito dobro poklapanje za promatrani slučaj otvorene cijevi, što je očekivano jer je u oba proračuna korišten jednaki model kojim se opisuje ponašanje viskoelastičnog materijala.

## 6. ZAKLJUČAK

Provedena je analiza deformacija i naprezanja debelostijenih cijevi za različite tipove materijala i različite rubne uvjete. Proračuni su provedeni analitički i numerički upotrebom programskog paketa *Abaqus* koji koristi metodu konačnih elemenata.

Numerički proračun u elastičnom području proveden je za problem otvorene cijevi korištenjem konačnih elemenata za dvodimenzijsku (2D) analizu, i to pomoću 2D konačnih elemenata za ravninsko stanje naprezanja i pomoću osnosimetričnih elemenata. U oba slučaja korišteni su trokutni i četverokutni elementi, prvog i drugog reda. Proračun je proveden i pomoću trodimenzijskih elemenata, pri čemu su korišteni su tetraedarski i heksaedarski konačni elementi, prvog i drugog reda. Analizom konvergencije rezultata radijalnog pomaka zaključeno je da je za promatrani problem optimalno korištenje osnosimetričnih četverokutnih elemenata drugog reda. Prednost u odnosu na trodimenzijske elemente je postizanje jednake točnosti rezultata uz značajno manji broj konačnih elemenata, dok za razliku od dvodimenzijskih elemenata osnosimetrični elementi mogu po definiciji opisati troosno stanje naprezanja i deformacije pa su prikladniji za ovakvu vrstu analiza. Elementi drugog reda pokazuju bržu konvergenciju, a u promatranom problemu nije uočeno značajnije produljenje trajanja numeričkog proračuna u odnosu na proračune s elementima prvog reda.

U nastavku je provedena elasto-plastična analiza deformacija i naprezanja za postupak izrade debelostijenih cijevi pomoću autofretaže. Korišten je model elastično – idealno plastičnog materijala. Iz dobivenih rezultata zaključeno je da postupak autofretaže rezultira smanjenjem maksimalnog ekvivalentnog naprezanja koje se pojavljuje pri opterećenju debelostijene cijevi radnim tlakom. Određeni su parametri optimalne autofretaže, pri kojoj se za zadani radni tlak postiže minimalno ekvivalentno naprezanje pod radnim opterećenjem. Usporedba dobivenih numeričkih i analitičkih rješenja pokazuje zadovoljavajuće poklapanje pri rješavanju ovog realnog problema.

U posljednjem poglavlju provedena je analiza ponašanja viskoelastičnog materijala. Prikazani su mehanički modeli materijala, a za proračun je odabran Zenerov model materijala. Materijal se ponaša linearno elastično pri dilataciji te linearno viskoelastično pri devijaciji. Analitičko rješenje dobiveno je uz pomoć Laplaceove transformacije, kojom se diferencijalne konstitutivne jednadžbe u realnoj ravnini pretvaraju u algebarske jednadžbe u Laplaceovoj ravnini. Nakon transformacije uočava se analogija sa linearno elastičnim rješenjem istog

problema što omogućava primjenu principa podudarnosti, tj. moguće je koristiti poznata rješenja za elastično ponašanje materijala. Konačno rješenje dobiva se inverznom Laplaceovom transformacijom. Pokazano je da viskoelastični materijal pokazuje trenutni odziv na opterećenje, kao i kod elastične i elasto-plastične analize, a javlja se i dodatna deformacija ovisna o vremenu. Za promatrani model materijala, opterećen konstantnim opterećenjem, izračunata je trenutna deformacija, kao i asimptotska vrijednost na kraju procesa puzanja. Programski paket Abaqus koristi integralni oblik konstitutivnih jednadžbi u kojem se pojavljuje relaksacijska funkcija, čiji se razvoj u Pronyev red koristi kao ulazni parametar. Usporedbom analitičkog i numeričkog rješenja uočeno je zadovoljavajuće poklapanje rezultata. Ukoliko se želi točnije opisati viskoelastično ponašanje materijala potrebno je koristiti složenije mehaničke modele koji rezultiraju s više članova Pronyeva reda.

## LITERATURA

- [1] Programski paket Abaqus 6.13-4, Dassault Systemes
- [2] Sorić, J.: Metoda konačnih elemenata, Golden Marketing - Tehnička knjiga, Zagreb, 2004.
- [3] Alfirević, I.: Nauka o čvrstoći II, Golden Marketing, Zagreb, 1999.
- [4] Alfirević, I.: Uvod u tenzore i mehaniku kontinuuma, Golden Marketing, Zagreb, 2003.
- [5] Ayob, A. B., Tamin, M. N., Kabashi Elbasheer, M.: Pressure Limits of Thick-Walled Cylinders, IMECS 2009, Hong Kong, 2009.
- [6] Findley, W. N.; Lai, J. S; Onaran, K.: Creep and relaxation of nonlinear viscoelastic materials, Dover Publications, Inc., New York, 1976.
- [7] Marques, S. P. C.; Creus, G. J.: Computational Viscoelasticity, Springer, 2012.
- [8] [http://www.dieselpowermag.com/tech/0904dp\\_diesel\\_fuel\\_injectors/photo\\_01.html](http://www.dieselpowermag.com/tech/0904dp_diesel_fuel_injectors/photo_01.html), Diesel Power, 2015.

## **PRILOZI**

CD-R disk