Procjena sposobnosti procesa

Flegar, Tomislav

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

DIPLOMSKI RAD

Tomislav Flegar

Zagreb, 2012.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

DIPLOMSKI RAD

Procjena sposobnosti procesa

Mentor:

Dr. sc. Biserka Runje

Student:

Tomislav Flegar

Zagreb, 2012.

Zahvala

kojom zahvaljujem cijenjenoj mentorici dr. sc. Biserki Runje na stručnom vodstvu tijekom izrade ovog diplomskog rada, kao i svim profesorima FSB-a na prenesenom znanju.

Hvala mojoj obiteljii i djevojci na podršci i razumjevanju tijekom cijelog studija.

Tomislav Flegar

Izjava

kojom izjavljujem da sam ovaj rad izradio samostalno koristeći znanje stečeno tijekom studija *i uz stručno vodstvo mentorice dr.sc. Biserke Runje.*

SADRŽAJ:

POPIS SLIKA:

POPIS TABLICA:

SAŽETAK:

U radu je opisan i razrađen postupak procjene sposobnosti procesa za kontinuirane i diskontinuirane podatke, te su definirani uvjeti koje je potrebno zadovoljiti prije postupka procjene. Sposobnost procesa se procjenjuje računanjem indeksa sposobnosti procesa. Kako bi mogli procjenjivati sposobnost procesa raspodjela podataka mora se aproksimirati normalnom raspodjelom, te proces mora biti stabilan i bez značajnih uzroka varijacija. Pouzdana procjena sposobnosti procesa može se donijeti samo temeljem praćenja procesa primjenom odgovarajuće kontrolne karte i nakon dovođenja procesa u stanje statističke kontrole.

Postupci procjene sposobnosti procesa za ne-normalno distribuirane podatke također su provedeni izračunom indeksa sposobnosti procesa. Procjena sposobnosti za ne-normalno distribuirane podatke svodi se na odabir nekog od već poznatih distribucijskih modela ili na transformaciju samih podataka.

Atributivni podaci spadaju u najnižu razinu podataka. Oni opisuju karakteristike opisno, riječima i imaju kvalitativna svojstva koja se koriste tzv. razna snimanja i analize. Matematička podloga za analizu ove vrste podataka su binomna i Poissonova raspodjela. Pod karakteristikom sposobnosti procesa, za atributivne podatke također se podrazumijeva brojčana vrijednost koja se dobija kao računski rezultat iz usporedbe učinka procesa u odnosu na prethodno zadanu toleranciju. Sposobnost procesa daje odnos postavljenih specifikacija i tolerancija, određenih zahtjevima kupaca i ponašanja, odnosno rasipanja procesa.

Uz svako poglavlje razrađeni su primjeri procjene sposobnosti procesa u programu Minitab.

1. UVOD

Razvojem novih tehnologija i metodologija, statistička kontrola postala je neizbježan dio proizvodnje. Aplikacija pojedinih statističkih metoda i procjena rezultata ovisi o fazi u kojoj se nalazi promatrani proces, stroj ili proizvodna linija. Prije puštanja procesa ili stroja u rad izrađuju se studije o njegovoj sposobnosti i kriterijima prihvatljivosti, na temelju kojih se kasnije donose odluke. Također, proces se kontinuirano prati i procjenjuje se njegova sposobnost, na temelju koje se vrši poboljšanje.

Potreba za što uspješnijom kontrolom procesa postaje neizbježna zbog neprestanog rasta kompleksnosti tehničkih sustava u industriji. U skladu s time, raste uporaba statističkih metoda i alata za procjenu sposobnosti procesa. Analizom sposobnosti procesa primarno se analizira rasipanje procesa.

Praksa je pokazala da treba uložiti ogromne napore da se smanji rasipanje i postigne poboljšanje određenog procesa. Da bi se postigli i mali pomaci ka poboljšanju procesa potrebno je stalno mjerenje i analiziranje podataka. Za račun se koriste odgovarajuće matematičke podloge i SPC računalna podrška.

Poboljšanje je jedino uspješno kada je zasnovano na činjenicama i kada je proizašlo iz analize podataka. Upravo u cilju kontinuiranog praćenja i poboljšavanja procesa u radu su razrađene metode procjene sposobnosti procesa.

2. PROCJENA SPOSOBNOSTI PROCESA

Sposobnost procesa se procjenjuje računanjem tzv. indeksa sposobnosti procesa. Računanje i pravilna interpretacija indeksa sposobnosti procesa temelji se na sljedećim pretpostavkama:

- raspodjela podataka se može aproksimirati normalnom raspodjelom;
- proces koji se razmatra je stabilan i bez značajnih uzroka varijacija;
- pouzdana procjena sposobnosti procesa može se donijeti samo temeljem praćenja procesa primjenom odgovarajuće kontrolne karte i nakon dovođenja procesa u stanje statističke kontrole.

Otklanjanjem značajnih uzroka varijacija u procesu i dovođenjem sredine procesa u okoliš ciljane vrijednosti ima smisla procjenjivati njegovu sposobnost. Za proces kažemo da je sposoban ako je raspon zahtjeva veći ili jednak rasponu procesa.

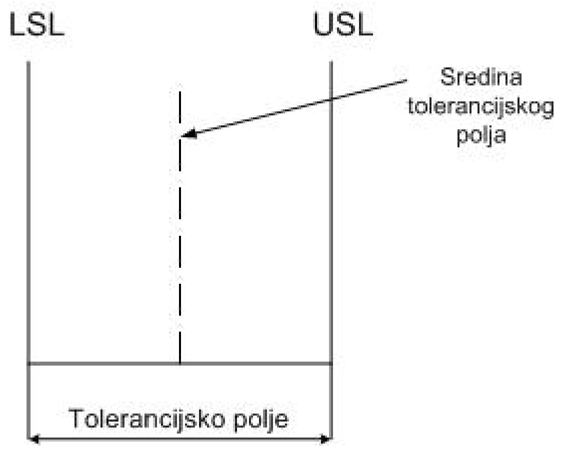
Raspon zahtjeva (tolerancijsko područje) **T** je područje izmedu gornje (Upper Specification Limit) i donje granice zahtjeva (Lower Specification Limit), odnosno

$$\text{T = USL - LSL.} \tag{1}$$

Raspon procesa podrazumijeva područje unutar ± 3 standardna odstupanja (6 · σ) u odnosu na sredinu procesa (99,73 % površine ispod krivulje normalne raspodjele kojom se aproksimira proces).

Temeljni uvjet sposobnosti procesa je:

$$T \geq 6 \times \sigma \tag{2}$$



Slika 1. Tolerancijsko polje zahtjeva

Uvažavajući vrijeme odvijanja procesa procjenjivanje sposobnosti može pripadati jednoj od sljedeće tri kategorije:

1. *Sposobnost procesa u dužem vremenskom razdoblju* (Long-Term Process Capability);

2. *Preliminarna sposobnost procesa* (Preliminary Process Capability);

3. *Sposobnost u kratkom vremenskom razdoblju* (Short-Term Capability).

2.1. Sposobnost u dužem vremenskom razdoblju (Long-Term Process Capability)

Indeksi sposobnosti procesa računaju se nakon odvijanja procesa tijekom dužeg vremenskog razdoblja u kojem su se mogli pojaviti svi mogući utjecaji varijacija procesa. Preporuka je 20 proizvodnih dana.

Indeksi su sljedeći:

Potencijalna sposobnost *Cp* (Potential Capability)

Dobiva se iz temeljnog uvjeta sposobnosti, odnosno:

$$Cp = \frac{T}{6 \times \sigma} = \frac{USL - LSL}{6\sigma} \tag{3}$$

Standardno odstupanje se procjenjuje analizom odgovarajuće kontrolne karte, odnosno iz izraza:

$$\hat{\sigma} = \frac{\bar{R}}{d_2} \tag{4}$$

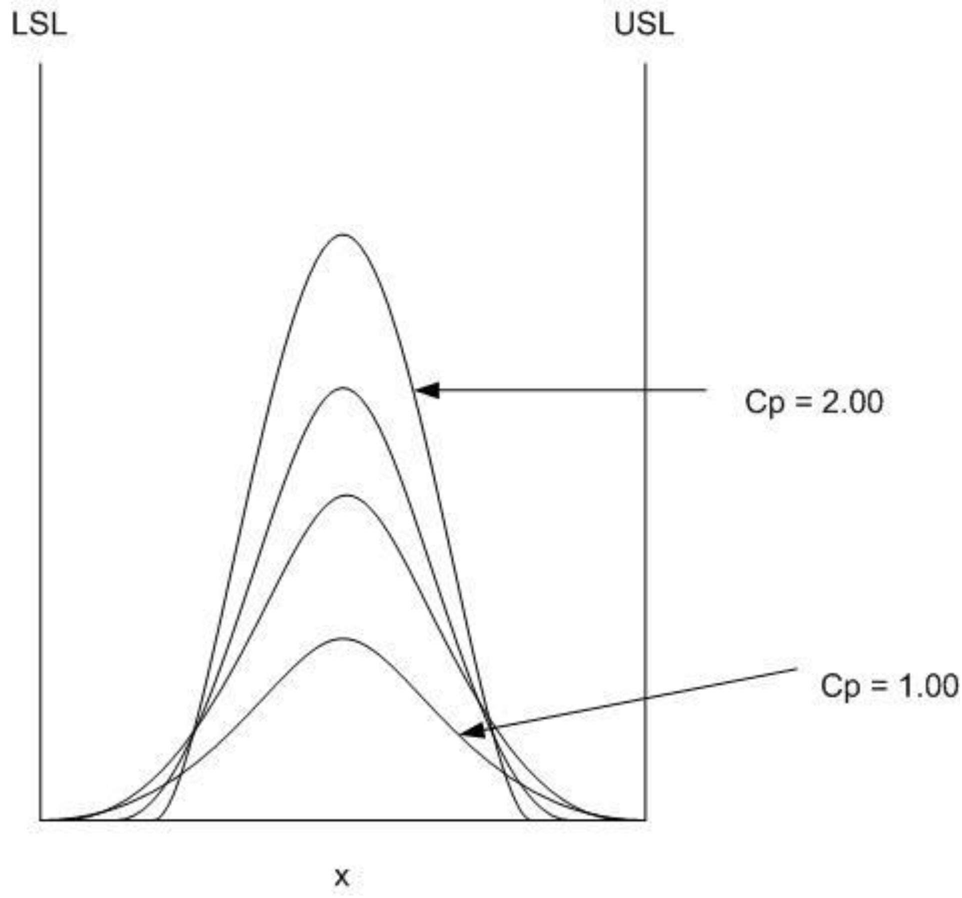
(R kontrolne karte)

$$\hat{\sigma} = \frac{\bar{s}}{d_2} \tag{5}$$

(S kontrolne karte)

Ovako procijenjeno standardno odstupanje naziva se standardno odstupanje iz uzoraka ili unutrašnje standardno odstupanje (within subgroups or internal standard deviation).

Iznos indeksa *Cp* neposredno pokazuje je li proces sposoban. Što je iznos indeksa Cp veći, to je rasipanje procesa manje. U razvijenim zemljama danas se zahtijeva da najmanja vrijednost indeksa *Cp* iznosi 1,33. Taj zahtjev neke kompanije podižu na 1,67, ili čak na 2, pa i više.



Slika 2. Primjeri različitih indeksa sposobnosti

Omjer sposobnosti *Cr* (Capability Ratio)

Iznos ovog indeksa je recipročna vrijednost indeksa *Cp* , odnosno:

$$Cr = \frac{1}{Cp} \tag{6}$$

Ako se iznos ovog indeksa prikaže u postocima (*Cr* × 100, %) dobiva se postotak tolerancijskog područja koji je iskorišten rasponom procesa. Za sposoban proces iznos indeksa *Cr* treba biti manji od 1.

Donja i gornja potencijalna sposobnost *CpL* i *CpU* (Lower and Upper potential capability)

Iznosi indeksa *CpL* i *CpU* računaju se korištenjem sljedećih izraza:

$$CpL = (\text{sredina procesa} - \text{L}) / 3\times\hat{\sigma} \tag{7}$$

$$CpU = (\text{U} - \text{sredina procesa}) / 3\times\hat{\sigma} \tag{8}$$

Sredina procesa je središnja linija primijenjene kontrolne karte. Indeksi *Cp* i *Cr* ne pokazuju kako je smješten proces u odnosu na granice specifikacija. To se može utvrditi usporedbom iznosa indeksa *CpL* i *CpU*:

- identični iznosi ukazuju na potpunu centriranost procesa (iznosi indeksa jednaki su iznosu indeksa *Cp*);
- iznos manji od 1 ukazuje na pojavu nesukladnosti;
- proces je pomaknut prema granici specifikacije manjeg iznosa indeksa.

Ovi indeksi se računaju u slučaju procjenjivanja sposobnosti procesa kada je dan jednostrani zahtjev na proces (samo jedna granica specifikacije).

Demonstrirana izvrsnost *Cpk* (Demonstrated excellence)

$$Cpk = \min(CpL, CpU)$$

Ako je proces idealno centriran tada je *Cpk = Cp*.

2.2. Preliminarna sposobnost procesa (Preliminary Process Capability)

U nazivlju indeksa se umjesto termina sposobnost (Capability) koristi termin značajka (Performance). U tom smislu se indeksi oznacavaju kao *Pp, PpL, PpU, Ppk*. Računaju se na isti način kao *Cp* , *CpL, CpU* , *Cpk* osim što se standardno odstupanje, koje se naziva **ukupno standardno odstupanje** (overall or total standard deviation), procjenjuje iz svih podataka temeljem izraza:

$$\hat{\sigma} = s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}} \tag{9}$$

Preliminarno procjenjivanje sposobnosti procesa provodi se na početku odvijanja procesa ili nakon relativno kratkog vremena praćenja procesa. Preporuka je da se razmatra uzorak od najmanje 100 jedinica. Zahtjevi na najmanje iznose indeksa *Pp i Ppk* su stroži nego za iznose indeksa *Cp i Cpk* (npr. ako je zahtjev za *Cp* ≥ 1,33 tada je ekvivalentni zahtjev za *Pp* ≥1,67).

2.3. Sposobnost u kratkom vremenskom razdoblju (Short-Term Capability)

Za analizu sposobnosti procesa u kratkom vremenskom razdoblju često se koristi termin analiza sposobnosti stroja (Machine Capability Analysis). Primjenjuje se, u pravilu, prilikom pred-preuzimanja ili preuzimanja stroja. Preporučuje se provodenje analize na uzorku od najmanje 50 jedinica. Temeljni interes je informacija o rasipanju podataka oko ciljane vrijednosti *D*.

$$D = (USL + LSL)/2 \tag{10}$$

Potencijalna sposbnost stroja *Cpm* (Potential Machine Capability)

Cpm se računa korištenjem alternativne procjene standardnog odstupanja koja sadrži efekt slučajne necentriranosti (rasipanja oko ciljane vrijednosti), odnosno:

$$\hat{\sigma} = \left\{\frac{\sum(x_i - D)^2}{(n-1)}\right\}^{\frac{1}{2}} \tag{11}$$

$$Cpm = (USL - LSL)/\ 6 \times \hat{\sigma} \tag{12}$$

3. PROCJENA SPOSOBNOSTI PROCESA S KONTINUIRANIM PODACIMA

3.1. Procjena sposobnosti procesa s podacima koji se rasipaju po normalnoj razdiobi

Kao što je već ranije naglašeno, sposobnost procesa procjenjuje se računanjem indeksa sposobnosti. Računanje i pravilna interpretacija spomenutih indeksa temelji se na sljedećim pretpostavkama:

1. Raspodjelu podataka nastalih iz promatranog procesa, moguće je aproksimirati normalnom razdiobom
2. Promatrani proces mora biti stabilan, odnosno „pod kontrolom“

Spomenute je zahtjeve moguće doseći tek nakon što se nad procesom primjeni odgovarajuća kontrolna karta, te se on nađe u stanju statističke kontrole.

3.1.1. Normalna razdioba

Normalna distribucija, poznata kao i Gaussova distribucija, važan je dio kontinuiranih distribucija vjerojatnosti, a koristi se u mnogim znanstvenim disciplinama. Najlakši način prikazivanja normalne razdiobe je pomoću funkcije gustoće vjerojatnosti. Krivulju prikazuje slika 3., a funkcija gustoće vjerojatnosti koja definira normalnu razdiobu glasi:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \tag{13}$$

gdje je :

σ – standardna devijacija

σ^2 – varijanca

μ – aritmetička sredina, očekivanje

Iz navedene formule moguće je zaključiti kako definicija normalne razdiobe ovisi samo o σ^2 i μ ili matematički točnije zapisano N{σ^2, μ}.

Varijanca osnovnog skupa definira se na sljedeći način :

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_\mathrm{i} - \mu)^2$$

(14)

gdje je :

N – ukupan broj podataka

x_i - slučajna varijabla

U stvarnoj primjeni, nelogično bi bilo raditi sa cijelim skupom podataka, stoga se koriste uzorci. Varijanca uzorka izgleda ovako :

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$$

(15)

gdje je :

n - broj uzoraka, u mjeriteljstvu broj ponovljenih mjerenja

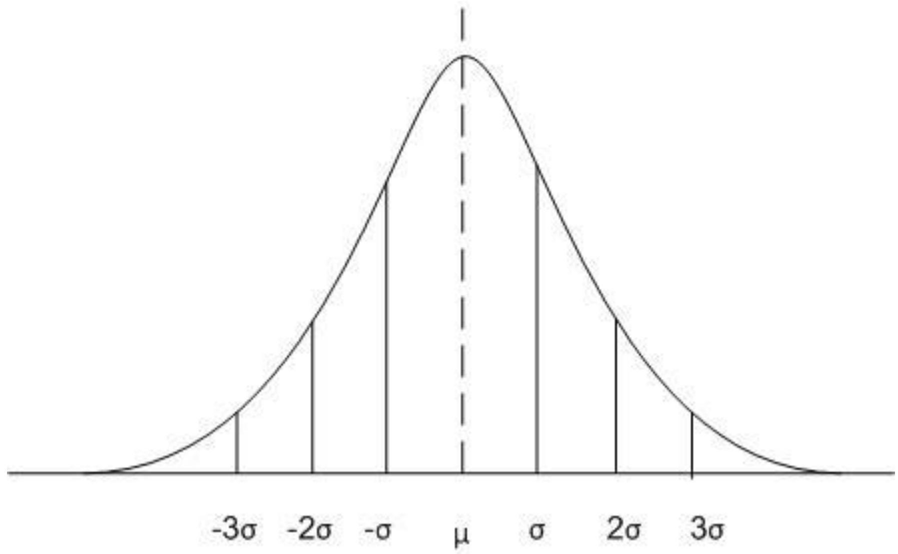
x_i - slučajna varijabla, neki i-ti rezultat mjerenja

$\overline{x}$ - aritmetička sredina uzorka

Standardno odstupanje se dobiva vađenjem drugog korijena iz navedene jednadžbe za izračun varijance. Na slici 3. su označeni intervali standardnog odstupanja. U intervalu $\pm 1\sigma$, površina ispod krivulje iznosi 68,27 %, kod $\pm 2\sigma$, 95,45%, dok je kod $\pm 3\sigma$ čak 99,73 %. Postotak koji se nalazi ispod krivulje u intervalu $\pm 6\sigma$ jest gotovo 99,99%, što se može zaokružiti na 100% ili čak reći da je površina ispod krivulje normalne razdiobe jednaka 1.

Vrh krivulje leži na samoj aritmetičkoj sredini μ. Krivulja je simetrična s obje strane, a krajevi padaju u zvonolik oblik i asimptotski se približavaju x osi. To znači da ju dodiruju u beskonačnosti. Normalna krivulja ima dvije točke infleksije, čija se udaljenost od aritmetičke sredine naziva standardnom devijacijom σ, tj. standardnim odstupanjem. Stoga je međusobna udaljenost ovih točaka 2σ. Za manje iznose standardnog odstupanja krivulja je strmija od primjerice krivulja sa većim iznosom odstupanja. Moguće je donijeti zaključak da se širina distribucije povećava kako se povećava i vrijednost σ.

Rasipanje procesa koje se koristi pri izračunu indeksa sposobnosti, definira se kao širina centralnog intervala, koji ograđuje 99,73 % ukupne populacije podataka. U slučaju normalne razdiobe, širina tog intervala lako se izražava pomoću standardnog odstupanja. Iz razloga što 99,73 % normalno distribuiranih uzoraka oko srednje vrijednosti, upada u interval od $\pm 3\sigma$, uzima se da je rasipanje procesa točno 6σ.



Slika 3. Normalna razdioba

Iz svega navedenog, lako je doći do zaključka zašto se sve analize sposobnosti tako jako vežu za normalnu razdiobu. To znači, da ako se promatrani proces može opisati dotičnim distribucijskim modelom, proračun indeksa sposobnosti iznimno je jasan i što je važnije, dobivene indekse moguće je međusobno uspoređivati i donositi logične zaključke. Dakle, ukoliko ne postoji distribucijski model kojim bi se bolje opisao proces, proračun indeksa sposobnosti trebao bi se bazirati na normalnoj distribuciji.

3.1.2. Procjena sposobnosti procesa u programu Minitab

Pri izradi izvješća procjene sposobnosti procesa u programu Minitab koristiti se *Capability Analysis (Normal)* za podatke koji se rasipaju po Normalnoj razdiobi. U slučaju da se podaci ne rasipaju po Normalnoj razdiobi, podaci se transformiraju pomoću Box-Cox ili Johnson transformacije.

Izvješće uključuje histogram sposobnosti procesa s dvije ucrtane krivulje Normalne razdiobe i potpune tablice ukupne sposobnosti (*overall*) i sposobnosti unutar uzorka (*within*). Procjena sposobnosti procesa može se podijeliti u dvije kategorije, potencijalna i ukupna sposobnost. Svaka predstavlja jedinstvenu mjeru sposobnosti procesa. Potencijalnu sposobnost se često naziva i „prava“ sposobnost procesa, a zapravo se zanemaruju razlike između pojedinih uzoraka i pokazuje kako bi se proces mogao izvoditi, ako su razlike između pojedinih uzoraka eliminirane. Ukupna sposobnost je ona sposobnost koju kupac očekuje, kod koje su u obzir uzete razlike uzoraka. Krivulje se generira očekivanjem i standardnim odstupanjem iz uzorka za potencijalnu,te očekivanjem i ukupnim standardnim odstupanjem za ukupnu sposobnost procesa.

Pokazatelji ukupne sposobnosti (*overall*):

PPM < LSL

PPM < LSL je očekivani broj komada od milijun (*parts per million*) čije vrijednosti su ispod donje granice zahtjeva (*lower specification limit*) , a računa se:

$$1{,}000{,}000 * \left[1 - f\left(\frac{\bar{x} - LSL}{\sigma_{ukupno}}\right)\right] \tag{16}$$

gdje je:

f(x) – funkcija normalne distribucije

$\bar{x}$ – srednja vrijednost podataka

PPM < USL

PPM < USL je očekivani broj komada od milijun (*parts per million*) čije vrijednosti su iznad gornje granice zahtjeva (*lower specification limit*) , a računa se:

$$1{,}000{,}000 * \left[1 - f\left(\frac{USL - \bar{x}}{\sigma_{ukupno}}\right)\right] \tag{17}$$

gdje je:

f(x) – funkcija normalne distribucije

$\bar{x}$ – srednja vrijednost podataka

PPM Ukupno (*Total*)

Očekivani broj komada od milijun (*parts per million*) čije vrijednosti su izvan obje granice zahtjeva.

$$\text{PPM Ukupno} = \text{PPM} < \text{LSL} + \text{PPM} > \text{USL} \tag{18}$$

Pokazatelji sposobnosti iz uzorka (*within*):

PPM < LSL

PPM < LSL je očekivani broj komada od milijun (*parts per million*) čije vrijednosti su ispod donje granice zahtjeva (*lower specification limit*) , a računa se:

$$1{,}000{,}000 * \left[1 - f\left(\frac{\bar{x} - LSL}{\sigma_{iz\ uzorka}}\right)\right] \tag{19}$$

gdje je:

f(x) – funkcija normalne distribucije

$\bar{x}$ – srednja vrijednost podataka

PPM < USL

PPM < USL je očekivani broj komada od milijun (*parts per million*) čije vrijednosti su iznad gornje granice zahtjeva (*lower specification limit*) , a računa se:

$$1{,}000{,}000 * \left[1 - f\left(\frac{USL - \bar{x}}{\sigma_{iz\ uzorka}}\right)\right] \tag{20}$$

gdje je:

f(x) – funkcija normalne distribucije

$\bar{x}$ – srednja vrijednost podataka

PPM Ukupno (*Total*)

Očekivani broj komada od milijun (*parts per million*) čije vrijednosti su izvan obje granice zahtjeva.

$$\text{PPM Ukupno} = \text{PPM} < \text{LSL} + \text{PPM} > \text{USL} \tag{21}$$

Izvještaj također uključuje statistčke podatke procesa, kao što je primjerice očekivanje, cilj (ukoliko se traži), ukupno standardno odstupanje i standardno odstupanje iz uzorka, specifikacije procesa, promatranu preliminarnu sposobnost procesa (observed performance), te očekivanu sposobnost procesa iz uzorka i ukupnu sposobnost procesa.

Pokazatelji preliminarne sposobnosti (*observed performance*):

PPM < LSL

PPM (parts per million) < LSL je broj komada od milijun, čije vrijednosti su ispod donje granice zahtjeva, a računa se:

$$1{,}000{,}000 * \left(\frac{broj\ vrijednosti < LSL}{N}\right) \tag{22}$$

PPM > USL

PPM (parts per million) > USL je broj komada od milijun, čije vrijednosti su iznad gornje granice zahtjeva, a računa se:

$$1{,}000{,}000 * \left(\frac{broj\ vrijednosti > USL}{N}\right) \tag{23}$$

PPM ukupno (*total*)

$$\text{PPM Ukupno} = \text{PPM} < \text{LSL} + \text{PPM} > \text{USL} \tag{24}$$

Ovakav izvještaj se može koristiti za vizualnu procjenu jesu li su podaci normalno distribuirani, je li proces centriran, te je li sposoban za dosljedno ispunjavanje procesnih specifikacija, tj. zahtjeva.

Specifikacije o procesu se unose u komunikacijskom prozoru pod Opcije. Određuje se cilj procesa koji nam predstavlja idealnu mjeru, zapravo sredinu tolerancijskog područja koju određuju kupci, inženjeri ili menadžeri. Nakon unosa cilja Minitab izračunava Cpm kao i standardne indekse sposobnosti procesa. Također, može se odabrati na koji način će se prikazati procjena sposobnosti procesa i koji indeksi sposobnosti procesa. Postavke za raspon procesa mogu se podesiti pod opcijom Tools u alatnoj traci programa Minitab odabirom Otions > Control Charts and Quality Tools > Capability analysis.

Ako su uzorci ili pojedinačni rezultati mjerenja u jednom stupcu, cijeli stupac se unosi u *Single column*. U *Subgroup size* unosi se veličina uzorka ili stupac sa indikatorima uzorka. Za veličinu uzorka pojedinačnih rezultata mjerenja unosi se vrijednost 1. Ako su uzorci u redovima potrebno je odabrati *Subgroup across rows of* i unijeti stupce koji sadrže redove u „kućicama“.

Nadalje, potrebno je unijeti *Lower specification* i/ili *Upper specification*, tj. donju i/ili gornju granicu zahtjeva. Mora se unijeti barem jedna granica. Po potrebi možemo koristiti *Options* u komunikacijskom prozoru.

3.1.3. Procjena standardnog odstupanja

Ukupno (overall) standardno odstupanje se računa:

$$\sigma_{ukupno} = \frac{S}{C_4(N)}$$

(25)

gdje je:

$C_4(N)$ - nezavisna konstanta,

pri čemu se S računa,

$$S = \sqrt{\frac{\sum_i \sum_j (x_{ij} - \overline{x})^2}{(\sum n_j) - 1}}$$

(26)

gdje su:

x_{ij} - j-ta vrijednost u i-tom uzorku

$\bar{x}$ – aretmetička sredina

n_i – broj mjerenja u i-tom uzorku

N *(ili* $\sum n_j$) – ukupan broj mjerenja.

Ukoliko ne koristimo nezavisnu konstantu $C_4(N)$, slijedi:

$$\sigma = S \tag{27}$$

Standardno odstupanje iz uzorka (within) se računa za veličine uzoraka veće ili jednake 1:

- **za veličine uzorka > od 1**

a) *Pooled standard deviation*:

$$\sigma = \frac{S_P}{C_4(d+1)} \tag{28}$$

Pri čemu se S_P računa:

$$S_P = \sqrt{\frac{\sum_i \sum_j (x_{ij} - \overline{x_i})^2}{(\sum n_j) - 1}} \tag{29}$$

gdje je:

$d = \sum(n_i - 1)$ – broj stupnjeva slobode za S_p

x_{ij} - j-ta vrijednost u i-tom uzorku

$\overline{x_i}$ - aretmetička sredina uzorka

n_i – broj mjerenja u i-tom uzorku

$C_4(d+1)$ - nezavisna konstanta.

Ukoliko ne koristimo nezavisnu konstantu, standardno odstupanje iz uzorka glasi:

$$\sigma = S_P \tag{30}$$

Kod *Pooled standard deviation* određuje se ukupno standardno odstupanje pretpostavljajući da svi uzorci bez obzira na veličinu imaju jednako standardno odstupanje.

b) Prosjek raspona uzoraka (Rbar):

Standardno odstupanje procjenjuje se prosjekom raspona više uzoraka, te jednadžba kojom se dobije standardno odstupanje glasi:

$$\sigma = S_R \tag{31}$$

pri čemu je S_R:

$$S_R = \frac{\sum_i \left(\frac{f_i r_i}{d_2(n_i)}\right)}{\sum_i f_i} \tag{32}$$

gdje je:

r_i – raspon i-tog uzorka

d_2 i d_3 – nezavisne konstante,

dok se f_i dobije pomoću jednadžbe:

$$f_i = \frac{[d_2(n_i)]^2}{[d_3(n_i)]^2} \tag{33}$$

Ukoliko je *n* jednak za save uzorke, tj. ako su uzorci jednakih veličina, S_R se računa:

$$S_R = \frac{Rbar}{d_2(n_i)} \tag{34}$$

c) Prosjek standardnog odstupanja uzoraka (Sbar):

Standardno odstupanje se dobiva prosjekom svih standardnih odstupanja uzoraka,

$$\hat{S} = \sigma = \frac{\sum \frac{h_i S_i}{C_4(n_i)}}{\sum(h_i)} \tag{35}$$

gdje je:

C_4 – nezavisna konstanta

S_i – standardno odstupanje i-tog uzorka

dok se h_i dobije iz jednadžbe

$$h_i = \frac{[C_4(n_i)]^2}{1 - [C_4(n_i)]^2} \tag{36}$$

Ukoliko ne koristimo nezavisnu konstantu, slijedi:

$$\sigma = \frac{\sum S_i}{broj\ uzoraka} \tag{37}$$

- **za veličine uzorka = 1**

Minitab općenito procjenjuje standardno odstupanje koristeći standardna odstupanja uzorka ili raspone svakog uzorka. Kada je uzorak veličine 1, ne može se izračunati standardno odstupanje ili rasponi. Minitab procjenjuje standardno odstupanje koristeći *moving range (pokretni raspon).* Raspon je promjena varijacija uzimajući u obzir vremena uzimanja pojedinačnih mjerenja.

a) Prosjek pokretnog raspona (*Average moving range*):

$$\sigma_{xbar} = \frac{Rbar}{d_2} \tag{38}$$

$$\text{Rbar} = (\text{Rw} + ... + \text{Rn}) / (\text{n} - \text{w} + 1) \tag{39}$$

gdje je:

d_2 – nezavisna konstanta

b) Medijan pokretnog raspona

$$\sigma_{xbar} = \frac{\overline{MR}}{d_4} \tag{40}$$

gdje je:

$\overline{MR}$ - medijan od MR_i

MR_i – i-ti pokretni raspon

d_4 – nezavisna konstanta.

c) Drugi korijen od MSSD (*Square root of MSSD*):

$$MSSD = \frac{\sqrt{\frac{1}{2} * \frac{(\sum d_i^2)}{(N-1)}}}{C_4(n_i)^{\mathrm{I}}} \tag{41}$$

gdje je:

d_i – uzastopne razlike

C_4 – nezavisna konstanta

N – ukupan broj mjerenja (vrijednosti)

Ukoliko ne koristimo nezavisnu konstantu, slijedi:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{2} * \frac{(\sum d_i^2)}{(N-1)}} \tag{42}$$

3.1.4. Zahtjevi za podatke

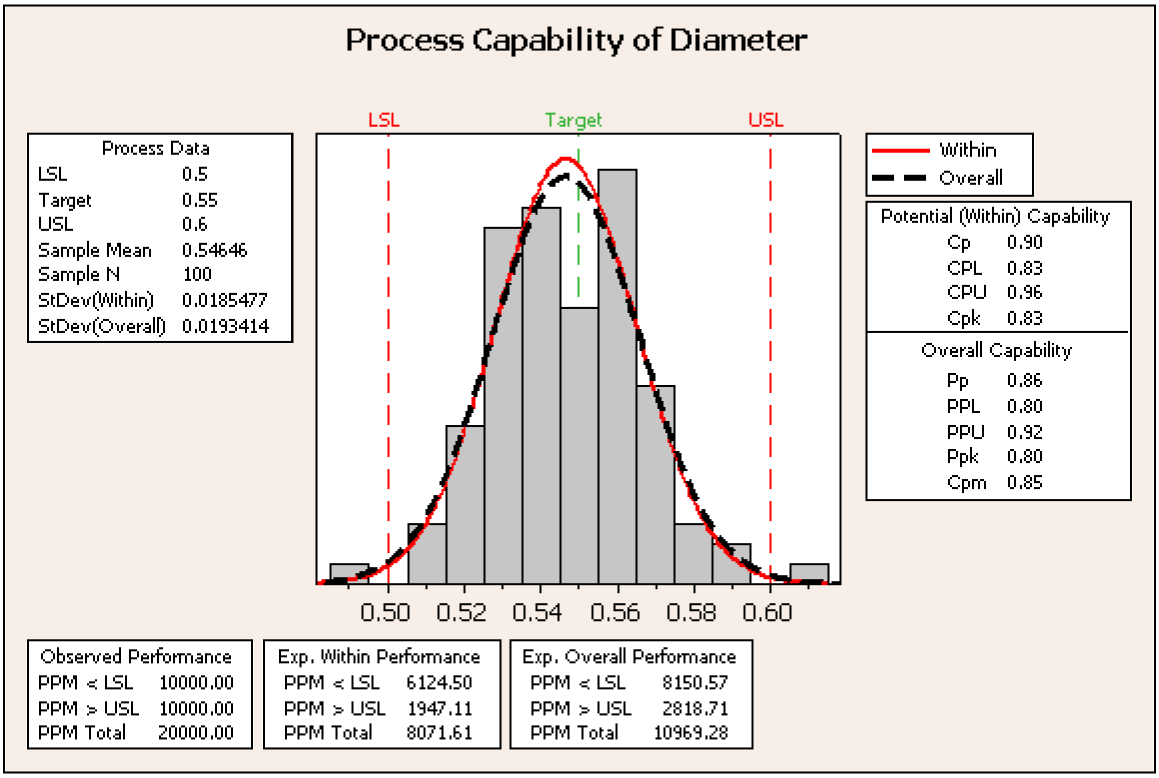
Moguće je koristiti pojedinačne rezultate mjerenja ili podatke u uzorcima. Uzorci su skupine jedinica proizvedene pod istim uvjetima, tj. podaci dobiveni u istim uvjetima. Predstavljaju nam „snimku“ procesa. Npr. uzimanje po pet nasumično odabranih dijelova na početku svakog sata. U tom slučaju svaka skupina od pet dijelova je uzorak.

Pojedinačni rezultati mjerenja trebaju biti strukturirani u jednom stupcu. Podaci iz uzoraka mogu biti strukturirani u jednom stupcu ili u redovima kroz nekoliko stupaca. Kada imamo uzorke različitih veličina podaci se unose u jedan stupac, a zatim se određuje drugi stupac sa indikatorima uzorka.

Ukoliko su podaci u uzorcima potrebno je imati dva ili više mjerenja u jednom uzorku kako bi se moglo procjeniti standardno odstupanje. Za korištenje Box-Cox transformacije podaci moraju biti pozitivnih vrijednosti. Ako promatranje nedostaje, Minitab ga izostavlja iz proračuna.

3.1.5. Primjer procjene sposobnosti procesa

Proizvođač žičanih kablova želi procijeniti da li promjer kablova zadovoljava specifikacije. Žica kabla mora biti 0,55 ± 0,05 cm promjer kako bi se zadovoljile specifikacije. Kontrolori ocjenjuju sposobnost procesa kako bi se osiguralo da ispunjava zahtjev kupca o *Ppk* od 1,33. Svaki sat kontrolori uzimaju uzorak od 5 uzastopnih žica kablova iz proizvodne linije i bilježe promjer.



Slika 4. Dijagram procjene sposobnosti procesa

Kako bi mogli interpretirati statističke podatke, mora biti zadovoljen uvjet rasipanja podataka po normalnoj razdiobi što je i vidljivo iz histograma.

Iz podataka vidimo da je očekivanje (0,54646) malo niže vrijednosti od ciljane (0,55) i da krajevi krivulje izlaze iz granica specifikacija.

Ppk indeks pokazuje proizvodi li proces unutar raspona procesa. U ovom slučaju *Ppk* indeks iznosi 0,80 iz čega se da zaključiti da proizvođač mora poboljšati proces smanjujući varijabilnost, te ga centrirati. Velike varijacije u procesu kod ove prizvodne linije su znatno veći problem nego činjenica da proces nije centriran.

PPM Ukupno je indeks koji pokazuje broj dobivenih nesukladnih dijelova na milijun proizvedenih dijelova (parts per milion). U ovome primjeru *PPM* iznosi 10 969,28 što znači da toliko kablova ne zadovoljava zahtjeve od milijun proizvedenih. Zaključujemo da proizvođač ne zadovoljava zahtjeve klijenta, te mora poboljšati proces smanjujući varijacije.

3.2. Procjena sposobnosti procesa s podacima koji se ne rasipaju po normalnoj razdiobi

3.2.1. Ne-normalni podaci

Termin ne-normalni podaci odnosi se na podatke koji se ne rasipaju po normalnoj razdiobi. Kada imamo ne–normalne podatke, možemo ih transformirati u „normalne“, tj. da se rasipaju po normalnoj razdiobi. Ukoliko ne koristimo transformaciju podataka, odabire se ne–normalni model vjerojatnosti. Za provjeru koja distribucija najbolje opisuje podatke, u programu Minitab koristimo *Individual distribution identification*.

Ne razumijevanje nenormalnosti najčešće komplicira vrlo jednostavne situacije, povećava broj loših proizvoda, smanjuje detekciju posebnih slučajeva i na koncu vodi ka donošenju krivih odluka i propuštanju vrlo unosnih šansi. Sve to rezultira gubljenjem vjere u analizu sposobnosti procesa, što pak narušava odnose izmenu proizvođača i njegova kupca. Na pitanje što učiniti s podacima koji ne slijede normalnu razdiobu, dva su odgovora. Najvažnije je identificirati i riješiti uzorke nenormalnosti ili pak koristiti alate kojima nenormalni podaci ne predstavljaju problem. Točno definiranje razloga i izvora nenormalnosti potrebno je kako bi se na vrijeme mogle poduzeti određene aktivnosti za korekciju, ako je to moguće.

Uzroci nepodvrgavanja podataka normalnoj razdiobi:

1) Ekstremne vrijednosti

Postoji li mnogo ekstremnih vrijednosti unutar skupa podataka, rezultat će biti neka ukošena ili strma distribucija. Normalnost se u tom slučaju postiže takozvanim čišćenjem podataka. To uključuje odrenivanje mjernih pogreški, pogreški nastalih tijekom samog mjerenja te onih nastali zbog nepodobne mjerne okoline. Ključ je u njihovom otklanjanju iz skupa zbog valjanih razloga. Ti valjali razlozi moraju se objasniti kao stvarno posebni slučajevi. Ne smije se smetnuti s uma, kako normalna razdioba dozvoljava mali postotak ekstremnih vrijednosti te da svaki ekstrem nije poseban slučaj. Ukloniti ih treba samo kada ih mnogo više od očekivanog.

2) Preklapanje dva ili više procesa

Moguće je da se podaci ne podvrgavaju normalnoj razdiobi zato što dolazi iz više procesa, operatera ili smjena ili čak iz procesa koji se konstantno mijenja. Preklope li se dva skupa, koja svaki zasebno slijede normalnu razdiobu, podaci mogu izgledati bimodalno, točnije rezultat su dvije ili više najfrekventnije vrijednosti. Popravak je moguć utvrđivanjem tih x – eva koji uzrokuju bimodalnost i raslojavanjem podataka. Nakon toga ponovno se vrši test normalnosti i tako raslojeni procesi spremni su za daljnje analize.

3) Diskriminacija zbog neodgovarajućih podataka

Konstantno ponavljanje pogrešaka pri mjerenju i mjerni urenaji sa slabom rezolucijom, mogu kontinuirane i normalno raspodijeljene podatke prikazati kao diskretne i nenormalne. Diskriminacija podataka zbog toga što se nedovoljno razlikuju ili što ih je premalo za analizu, moguće je riješiti korištenjem točnijih mjernih sustava te prikupljanjem većeg broja podataka mjerenja.

4) Sortiranje podataka

Prikupljeni podaci možda nisu normalno distribuirani zato što predstavljaju podskup cijelog izlaznog skupa podataka o procesu. Ova je situacija moguća ako se podaci skupljaju i analiziraju nakon sortiranja ili ako se određeni broj podataka, koji ne ulaze u tolerancijsko polje, eliminiraju iz daljnjih analiza. Važno je pripaziti koji podaci se uzimaju u istraživanje i pripaziti na njihovo grupiranje.

5) Vrijednosti blizu nule ili prirodne granice

Ima li proces mnogo vrijednosti koje se priklanjaju nuli ili nekoj drugoj prirodnoj granici, cijela će distribucija biti ukošena u lijevu ili desnu stranu. Rješenje ovoga slučaja je u transformaciji, kao što je primjerice Box-Cox transformacija. Bit je u prikupljanju svih podataka, koji se tada transformiraju do eksponenta odrenenog vrijednošću Lambda. Pri usporedbi transformiranih podataka, sve s čime se uspoređuje potrebno je transformirati na isti način. Važno je ne smetnuti s uma da niti jedna transformacija ne garantira normalne podatke, zato je nakon transformacije važno primijeniti testove normalnosti. Ova će metodologija biti pobliže objašnjena u narednim poglavljima.

6) Podaci slijede neku drugu poznatu distribuciju

Mnogi tipovi podataka po svojoj prirodi ne slijede normalnu razdiobu.

To su :

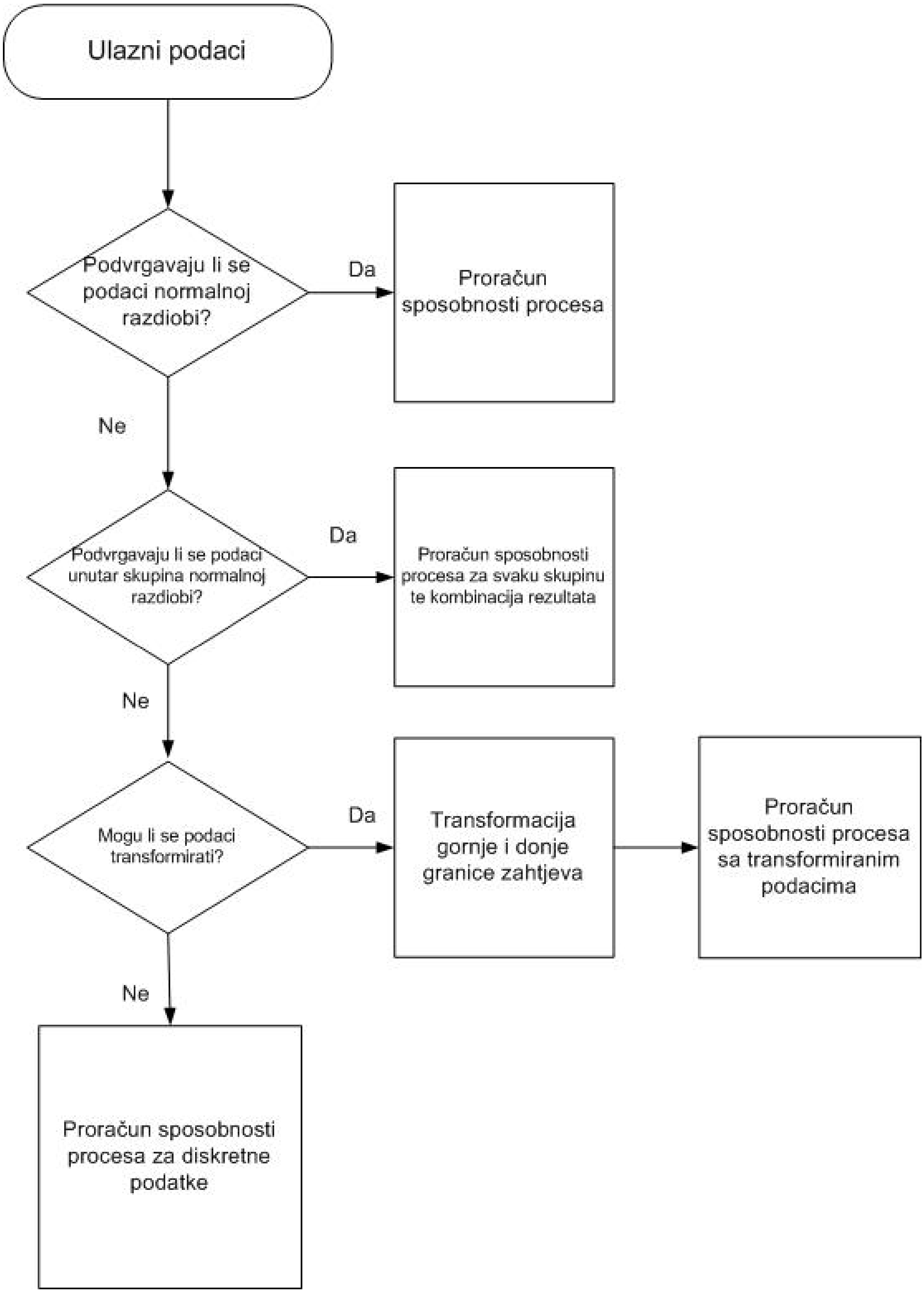
a) Weibullova distribucija – primjenjuje se primjerice kod vremena trajanja proizvoda
b) Log-normalna distribucija – visine i podaci povezani s duljinom
c) Distribucija najekstremnije vrijednosti – primjer su podaci o najduljem zastoju tijekom dana
d) Eksponencijalna distribucija – povezana je sa funkcijom rasta, kao što je na primjer rast i množenje bakterija
e) Poissonova distribucija – koristi se kod određivanja rijetkih događaja poput broja nesreća
f) Binomna razdioba – povezuje se sa podacima proporcije, kao što je i postotak defekata

3.2.2. Rješenja za rad s nenormalnim podacima

U situacijama u kojima je potreban distribucijski model, a Gaussov je očigledno pogrešan, postoji nekoliko solucija. Prva opcija je koristiti neki alat baziran na normalnoj razdiobi na podacima koji ju ne slijede. Tu nastaje problem, jer teško je znati kolike su pogreške nastale i kako će se one reflektirati na krajnji rezultat.

Druga solucija je korištenje alata za koje nisu potrebni određeni parametri distribucije. Treće rješenje je već spomenuta transformacija podataka pomoću Box-Cox i Johnsonovih familija transformacije, te njihovo daljnje korištenje u alatima baziranim na normalnoj razdiobi. Transformacija je danas izrazito dostupna jer je ugrađena u skoro sve statističke programe.

Zadnja solucija jest korištenje poznatog distribucijskog modela za koji je poznata i metoda odrenivanja sposobnosti. Tako, primjerice, za podatke koji se podvrgavaju Poissonovoj ili Binomnoj razdiobi, uobičajeno je koristiti np i c karte za procjenu sposobnosti procesa. Na slici 5. prikazani su detaljni koraci i sumirana sva navedena teorija oko rada sa nenormalnim podacima.



Slika 5. Proračun sposobnosti procesa

3.2.3. Procesi s jednom granicom zahtjeva

Iz teorije o analizi sposobnosti procesa, moguće je vidjeti kako se ona najčešće bavi slučajevima u kojima postoje dvije granice zahtjeva. No, vrlo čest slučaj u industriji su procesi koji su jednostrani, točnije imaju samo jednu granicu ili ciljanu vrijednost, te ne postoji tolerancijski interval. Primjer je proces čija je najmanja vrijednost promatrane karakteristike 0 i postoji samo gornja granica zahtjeva. Nerijetko, nula je i najbolja vrijednost za proces, kao što je to u slučaju udjela nečistoća u nekom materijalu ili nešto slično. Ovakvi su se problemi vrlo često rješavali korištenjem dvostranih intervala, gdje je donja granica zahtjeva bila 0. Iz toga je vidljivo da su vrijednosti promatrane karakteristike izrazito malene jer su blizu 0, što će indicirati kako su indeksi sposobnosti također male vrijednosti. Na taj će se način sposoban proces, proglasiti nesposobnim. Rješenje bi bilo pronaći strmu distribuciju, sa dugim repom u smjeru većih vrijednosti. Pogreške će nastati, ako se za takvu strmu distribuciju, koja je uz to nagnuta na jednu od strana, koriste alati koji pretpostavljaju normalnu razdiobu. Ni na koji način neće biti moguće odrediti pogrešku koja se unijela u analizu, ali i svaka odluka povezana sa performansama procesa biti će upitna.

Analiza sposobnosti za karakteristike koje su strme, naklonjene na jednu stranu ili pak imaju svoju ciljanu vrijednost u nuli, nije jednostavna. Do sada nije pronađen niti jedan indeks sposobnosti kojime bi se rješavali ovi česti slučajevi. U narednim poglavljima biti će više govora o ovome problemu.

3.2.4. Procjena sposobnosti procesa za nenormalne distribucije

3.2.4.1. Percentilna metoda

Za početak je važno naglasiti kako ne postoji generalno prihvaćen proračun indeksa za nenormalne distribucije. No, metoda koja je najčešće korištena bazirana je na želji da se održi, najviše što se može, analogija sa normalnom distribucijom. U njoj, 99,73 % interval, koji odgovara 6σ normalne razdiobe, uspoređuje se sa tolerancijskim intervalom promatrane karakteristike**.** Nakon ustanove da odabrani distribucijski model osigurava najbolji opis outputa procesa, definira se interval koji sadrži 99,73 % populacije, što predstavlja rasipanje kao i u slučajevima sa normalnom razdiobom. Granice ovog intervala su 0,135 percentil te 99,865 percentil distribucije. Tako definiran interval baziran na ovim percentilima sadrži 99,73 % ukupne populacije. To vodi do formule za izračun $\boldsymbol{C_P}$ indeksa, koja je direktno usporediva sa odgovarajućom formulom za normalnu razdiobu. Ona glasi :

$$Cp = \frac{USL - LSL}{99{,}865\, percentil - 0{,}135\, percentil} = \frac{USL - LSL}{u_p - l_p} \tag{43}$$

Na osnovi ispisane formule, dolazi se i do izraza za $\boldsymbol{C_{pk}}$ indeks**,** također usporediva sa izrazima primjenjivim za normalnu razdiobu.

$$C_{up} = \frac{USL - M}{99{,}865\ percentil - M} = \frac{USL - M}{u_p - M} \tag{44}$$

$$C_{lp} = \frac{M - LSL}{M - 0{,}135\ percentil} = \frac{M - LSL}{M - l_p} \tag{45}$$

gdje je:

M - 50-ti precentil promatrane karakteristike, odnosno medijan

Kao i u indeksima za normalnu distribuciju, manja vrijednost od dvije navedene, koristi se za opis ponašanja procesa i izražava se kao indeks sposobnosti procesaC_{pk}. Matematički zapisano :

$$C_{pk} = min\left(C_{up}, C_{lp}\right) \tag{46}$$

3.2.4.2. Distribucijski modeli i transformacije

Za situacije nenormalne razdiobe, preporuča se i korištenje drugih modela, kao što su :

1. Transformacija podatka
2. Poznati distribucijski modeli – Log-normalna distribucija, Weibullova, Rayleigh-ova
3. Pearson-ove funkcije
4. Johnson-ove transformacije

3.2.5. *Izvođenje procjene sposobnosti procesa u programu Minitab*

Minitab omogućuje procjenu sposobnosti procesa s podacima koji se ne rasipaju po normalnoj razdiobi. Izvještaj uključuje histogram sposobnosti procesa opisan krivuljom razdiobe i tablicu s prikazom indeksa sposobnosti procesa. U izvještaju se također nalaze i ostali statistički podaci o procesu, kao što su: očekivanje, parametri distribucije, cilj, zahtjevi procesa, ukupna sposobnost procesa, te promatrana i očekivana preliminarna sposobnost procesa (*Pp, Ppk, PPU, PPL*).

Minitab bazira proračun na maksimalnim vjerojatnostima parametara distribucije, za razliku od procjene očekivanja i varijance u slučaju podataka koji se rasipaju po normalnoj razdiobi.

Izvještaj se može koristiti za vizualnu procjenu distribucije podataka procesa u odnosu na cilj, bez obzira na to slijede li podaci određenu distribuciju, te da li je proces sposoban dosljedno zadovoljavati zahtjeve. Minitab nudi dvije mogućnosti za izračun indeksa ukupne sposobnosti procesa, ISO metodu i Minitab metodu. Standardno se koristi ISO metoda.

Podaci se unose u jedan stupac ili u više stupaca ako su uzorci organizirani kroz više redova. Minitab ne koristi uzorke u proračunu jer se ne procjenjuju indeksi sposobnosti procesa iz uzorka, tj. unutrašnje sposobnosti (*within capability statistics*). Ukoliko nedostaje neki pojedinačni podatak, Minitab ga izostavlja iz proračuna.

Kod transformacije podataka:

- Box-Cox transformacija koristi: *Individual distribution identification, Capability Analysis (Normal), Capability Analysis (Between/Within), Capability Sixpack (Normal), Capability Analysis Multiple Variables (Normal),* i *Capability Sixpack (Between/Within).*
- Johnson transformacija koristi: *Johnson transformation, Capability Analysis (Nonnormal), Capability Analysis Multiple Variables (Nonnormal),* i *Capability Sixpack (Nonnormal).*

Za primjenu ne – normalnog modela vjerojatnosti koristi se *Capability Analysis (Nonnormal), Capability Analysis Multiple Variables (Nonnormal),* i *Capability Sixpack (Nonnormal).*

Tablica 1. Razlike između modela

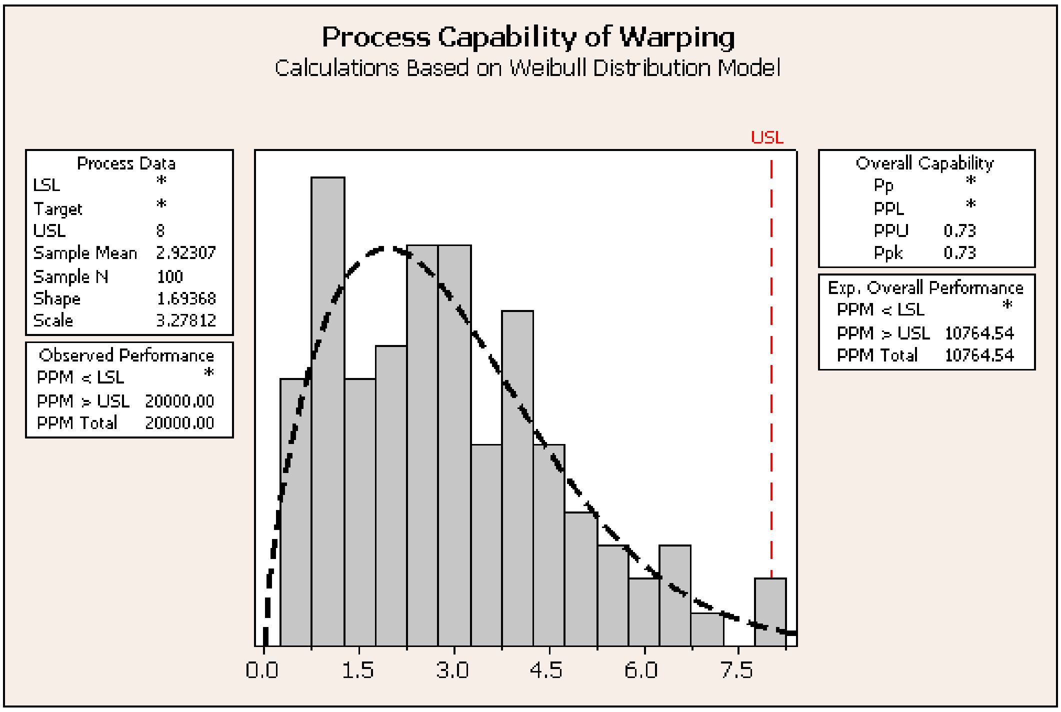
Model s normalnom razdiobom	Model s ne – normalnom razdiobom
Za izradu histograma se koriste stvarni ili transformirani podaci.	Za izradu histograma se koriste stvarni podaci.
Računa se ukupna sposobnost i sposobnost iz uzorka.	Računa se samo ukupna sposobnost.
Krivulja normalne razdiobe opisuje histogram i pokazuje rasipaju li se podaci po normalnoj razdiobi.	Histogram opisuje krivulja ne – normalne razdiobe i opisuje da li se podaci rasipaju po odabranoj razdiobi.

Pri odabiru modela potrebno je provjeriti koji model bolje odgovara podacima. U slučaju da su modeli podjednaki, odabire se model s normalnom razdiobom jer procjenjuje ukupnu sposobnost i sposobnost iz uzorka.

3.2.6. Primjer procjene sposobnosti procesa

Pretpostavimo da radimo za tvrtku koja proizvodi keramičke podne pločice. Problem koji se pojavljuje je deformacija (savijanje) u pločicama. Kako bi se osigurala kvaliteta proizvodnje, potrebno je provoditi mjerenja savijanja u deset pločica svaki radni dan i tako deset dana.

Iz histograma se zaključuje kako podaci ne slijede normalnu distribuciju, stoga se odlučujemo za procjenu sposobnosti procesa baziranu na Weibull-ovom modelu vjerojatnosti.



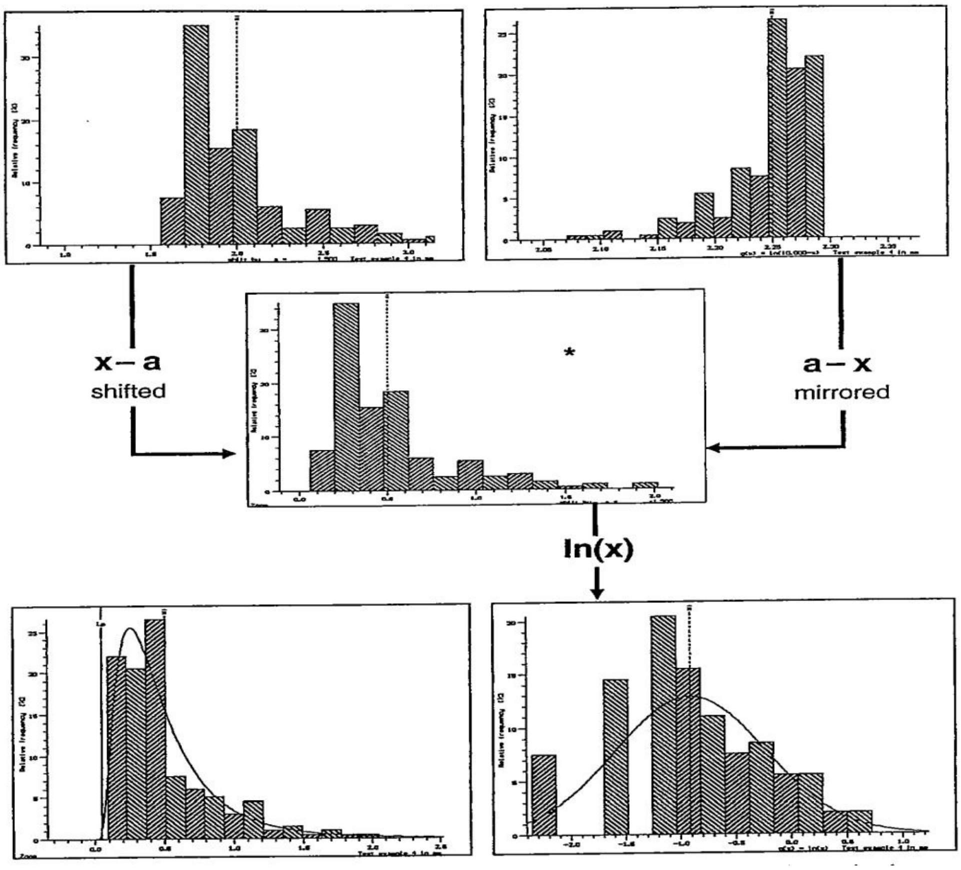
Slika 6. Dijagram procjene sposobnosti procesa bazirane na Weibull razdiobi

Histogram ne pokazuje odstupanja podataka od pretpostavljenog modela, ali se vidi da desni kraj krivulje prelazi preko gornje granice zahtjeva. Ovaj podatak nam predstavlja savijanje preko 8 mm kod nekih komada. Indeksi *Ppk* i *PPU* nam pokazuju da je raspon procesa veći od raspona zahtjeva jer oba iznose 0,73 što je manje od uvjeta 1,33. Također, PPM je veći od gornje granice zahtjeva i iznosi 20 000, što znači da 20 000 od milijun proizvedenih pločica prelazi gornju granicu zahtjeva savijanjem većim od 8 mm. Iz svega navedenog možemo zaključiti da proces nije sposoban.

3.2.7. Transformacija podataka

Moguće je generirati model uz pomoć transformacija. U tom slučaju, vrijednosti se transformiraju pomoću odgovarajuće funkcije, tako da transformirane vrijednosti odgovaraju poznatim distribucijskim modelima, najčešće normalnoj razdiobi.

Uz podatke, potrebno je transformirati i specifikacijske granice. Uobičajene transformacije su one nastale korjenovanjem te logaritamske pomicanjem *(log (x – a))* i/ili refleksijom *(log (a – x))*. Detaljni proces transformacije prikazuje slika 7.

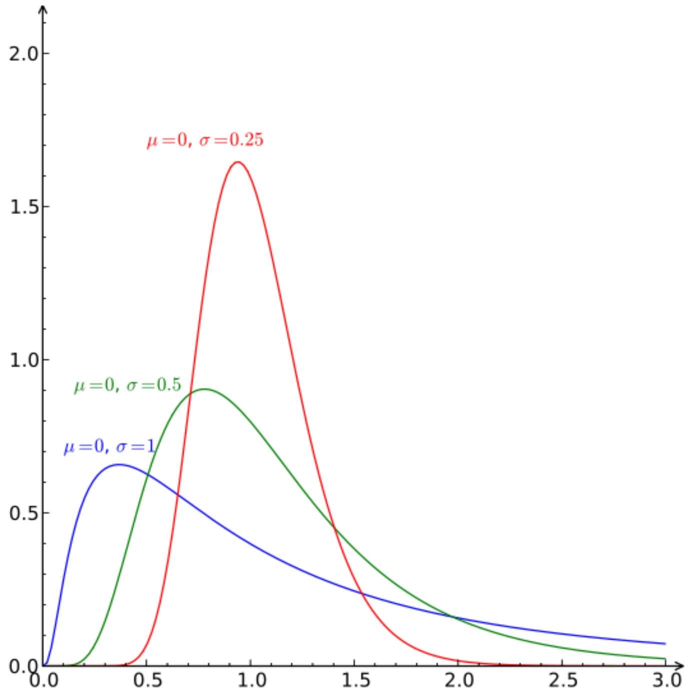


Slika 7. Transformacija podataka

Ovaj je postupak prihvatljiv jedino za procjenu podržanu računalom, budući da isprobavanje različitih varijacija transformacija troši mnogo vremena. Stoga se danas u informatizirano doba, čini razumnijim koristiti već poznate modele distribucija, nego primijeniti transformaciju da dođe do poklapanja.

3.2.7.1. Log-normalna distribucija

Iako je ovaj distribucijski model izgubio na svojem značaju, zbog nepoklapanja sa uobičajenim tehničkim karakteristikama, ali mnogi ju koriste i danas i to zbog jednostavne uporabe za ručne procjene. Kako se mjerni rezultati mogu premještati gore – dolje i/ili zrcalno reflektirati, log-normalna distribucija se koristi za distribucije ukošene lijevo ili desno.



Slika 8. Funkcija gustoće vjerojatnosti log-normalne distribucije

Drugim riječima, ovaj je model moguće primijeniti za opis distribucija sa minimalnom ili maksimalnom granicom. Uobičajeni primjeri korištenja su mjerenja oblika i pozicija, primjerice plosnatosti, ispadanja iz oblina te u nekim slučajevima, debljina prevlaka i tvrdoća. Utvrđivanje pripadanja podataka ovome modelu, jednostavno je i potrebno ih je nacrtati na papiru vjerojatnosti za log-normalnu distribuciju. Ako se vrijednosti na papiru poslažu u ravnu crtu, potvrđen je izbor modela.

Funkcija gustoće vjerojatnosti glasi:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \frac{1}{x-a} exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{ln(x-a)-\mu}{\sigma}\right)^2\right\} \tag{47}$$

gdje je:

a – mjera oblika, a < x < ∞

Iz distribucijskog modela, vidljivo je, da 0,135 % točaka leži iznad i ispod gornjeg i donjeg percentila. To znači da 99,73 % vrijednosti leži unutar intervala koji percentili zaokružuju. Upravo to odgovara intervalu kod normalne razdiobe.

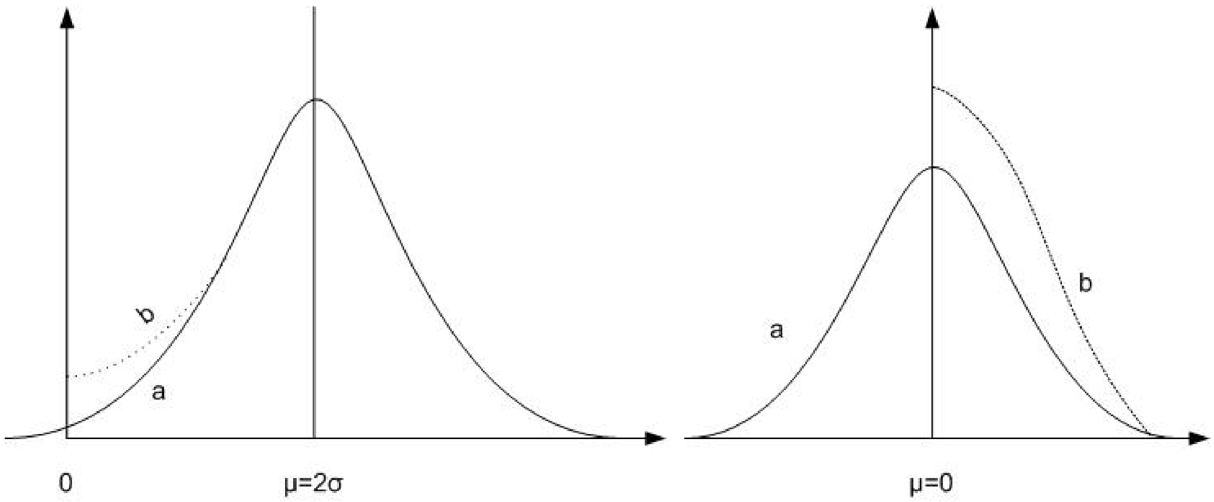
3.2.7.2. Savijena normalna razdioba

Savijena normalna razdioba je, kako i sam naziv govori, normalna razdioba savinuta u odrenenoj točci manjoj ili jednakoj μ. To savijanje zbraja vrijednosti lijevo od točke savijanja s vrijednostima desno od nje. Oblik distribucijske krivulje mijenja se sa oblika *a*, na oblik *b*. Slika 9. prikazuje savijanje normalne razdiobe u točci μ=2σ te njen izgled nakon savijanja, kada je μ=0.

Funkcija gustoće vjerojatnosti glasi:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\left[e^{\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}} + e^{\frac{1}{2}\frac{(x+\mu)^2}{\sigma^2}}\right] \tag{48}$$

za x ≥ 0



Slika 9. Savijena normalna razdioba

Papir vjerojatnosti ne formira ravnu crtu, već krivulju. Izgled krivulje ovisan je o poziciji na kojoj se distribucija savija. Poseban slučaj savijene normalne distribucije javlja se kada je točka savijanja jednaka aritmetičkoj sredini normalne distribucije. Izraz koji se koristi u tim slučajevima jest sljedeći :

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi\sigma}} exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{|x-\mu|}{\sigma}\right)^2\right\}$$

(49)

Ovu je distribuciju moguće udaljiti od točke 0, posebnim faktorom a. To pomicanje najčešće se primjenjuje zbog netočnog kalibriranja mjernog sustava.

3.2.7.3. Rayleigh-ova distribucija

Ova distribucija je dvodimenzionalna te nalazi svoju primjenu u promatranju karakteristika koje imaju dvije komponente. Važno je da obje komponente imaju jednaku disperziju. Dvodimenzionalna distribucija ima sljedeći izraz :

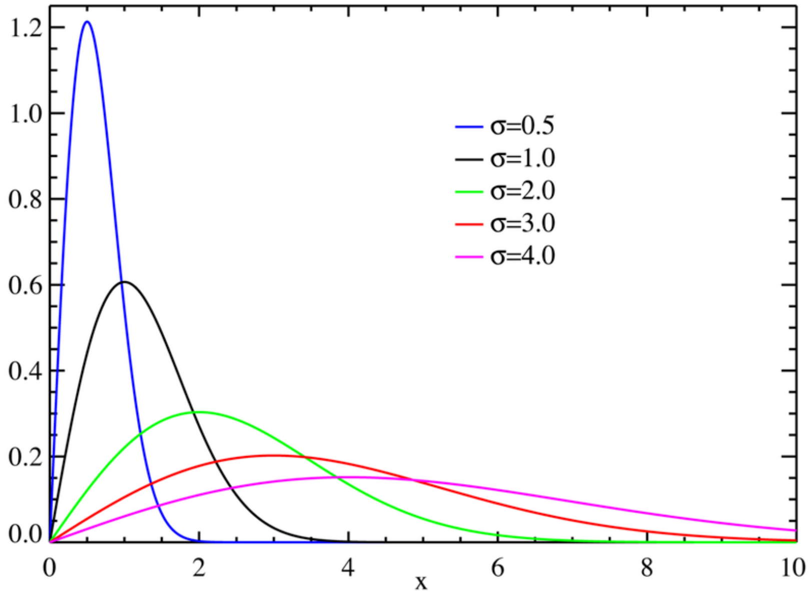
$$f_\gamma = \frac{\gamma}{\sigma^2} e^{-\frac{\gamma^2}{2\sigma^2}}$$

(50)

gdje je:

$\gamma^2 = x^2 + y^2$

Iz izraza je moguće primijetiti kako se koriste polarne koordinate i to zbog rotacijske simetrije ove distribucije. I ova distribucija može se prikazati histogramom te Rayleigh-ovim papirom vjerojatnosti, čineći ravnu liniju. Mogućnost pomicanja distribucije od 0, postoji i u ovom modelu i to za faktor pomaka a. Taj će se pomak, logično, odraziti na histogram i papir vjerojatnosti. Treća mogućnost koja se nudi u radu s ovim modelom, jest savijanje distribucije u nekoj željenoj točci. Promjene je moguće zamijetiti u oba prikaza, posebice u papiru vjerojatnosti, koji će u ovom slučaju prikazivati krivulju.



Slika 10. Funkcija gustoće vjerojatnosti Rayleigh-ove distribucije

3.2.7.4. Weibull-ova distribucija

Weibull–ova distribucija doista je univerzalni model sa širokom lepezom aplikacija i to zahvaljujući matematičkim karakteristikama, kojima se prilagođava svim distribucijskim funkcijama. Glavna uporaba je za procjenu pouzdanosti i probleme u procjeni vijeka trajanja.

$$f(x) = \frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{x-a}{\alpha}\right)^{\beta-1} exp\left\{-\left(\frac{x-a}{\alpha}\right)^{\beta}\right\} \tag{51}$$

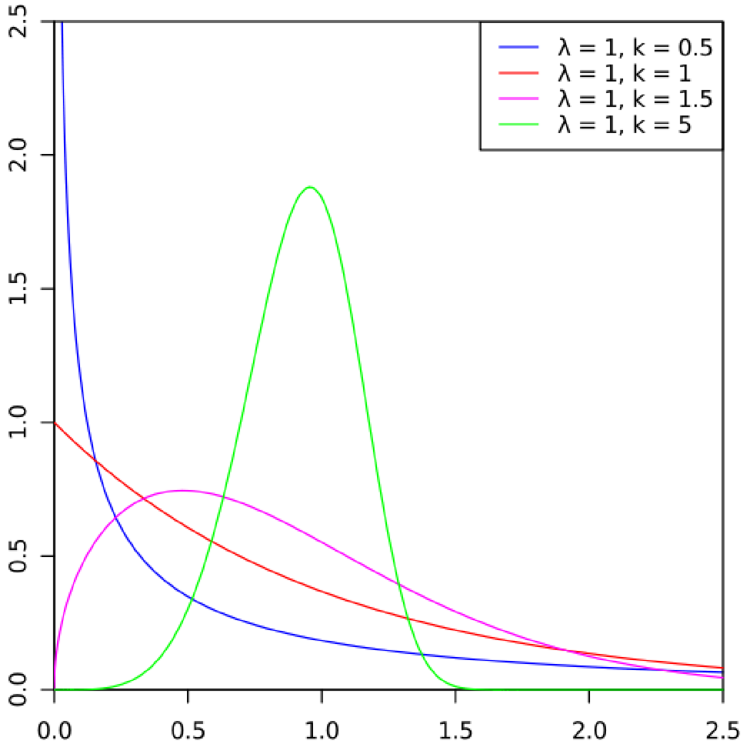
gdje je:

α – parametar veličine

β – parametar oblika

a – parametar položaja

Oblik Weibull – ove distribucije tako ovisi o tri parametra; α, β i a. Na primjeru vijeka trajanja, α je životni ciklus nekog proizvoda, β nagib koji prikazuje kvarove ili pogreške, a parametar a je vrijeme bez kvarova ili pogrešaka.



Slika 11. Funkcija gustoće vjerojatnosti Weibull-ove distribucije

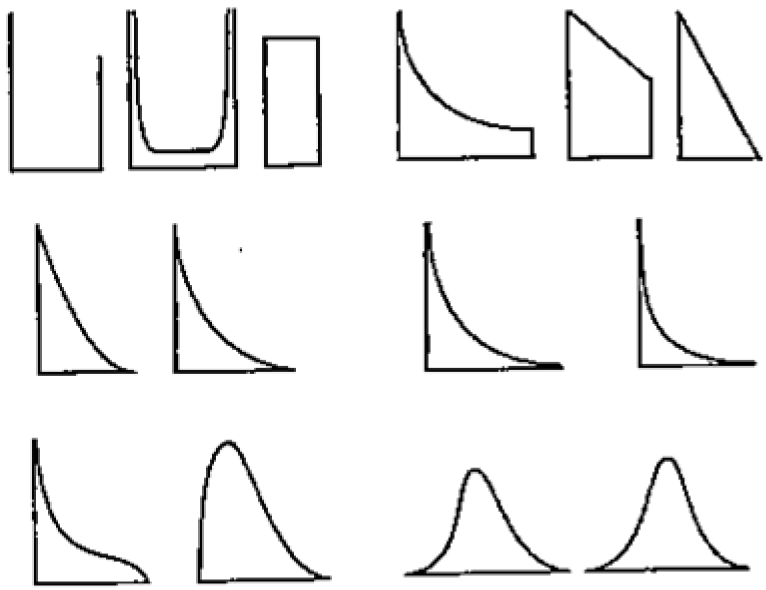
Do sada navedeni modeli mogu se shvatiti kao posebni slučajevi Weibull – ove distribucije. Značajka koja ih sve razlikuje, jest parametar oblika β.

Tablica 2. Parametri oblika β za distribucijske modele

Parametar oblika β	Distribucijski model
$\beta = 1$	Eksponencijalna distribucija
$1{,}5 \leq \beta \leq 3$	Lognormalna distribucija
$\beta = 2$	Rayleigh – ova distribucija
$3{,}1 \leq \beta \leq 3{,}6$	Lognormalna distribucija
$\beta = 3{,}6$	Normalna distribucija

3.2.7.5. Pearson-ove funkcije

Pearson – ove funkcije nude dodatne mogućnosti modeliranja distribucija. Funkcije obuhvaćaju familiju od 7 distribucija, sam Karl Pearson ih je naveo čak 12, a prikazane su na slici broj 11. Izbor odgovarajuće distribucije vođen je pomoću dvije statističke veličine, mjera asimetrije i zaobljenosti. Funkcije je moguće prikazati na papiru vjerojatnosti, kako bi se procijenio model. Budući da ne postoji poseban Pearson – ov papir, prikazuju se papirom vjerojatnosti za normalne razdiobe. Zbog toga njihov će prikaz biti krivulja, a njihove zaobljenosti ovisne o distribuciji.



Slika 12. Pearson-ove funkcije

3.2.7.6. Johnson-ove transformacije

Bazirajući se na mogućnosti transformiranja vrijednosti, američki matematičar Johnson razvio je transformacijski sustav. Pomoću tog sustava moguće je sve važne tipove kontinuiranih distribucija pretvoriti u normalnu.

Izbor transformacije bazira se na mjerama asimetrije q_1 i zaobljenosti q_2.

Jednadžba asimetrije:

$$q_1 = \frac{\mu_3^2}{\mu_2^2} \tag{52}$$

Jednadžba zaobljenosti:

$$q_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} - 3 \tag{53}$$

Slijedi:

$$\mu_k = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^k}{n} \tag{54}$$

gdje je:

q_1 - mjera asimetrije

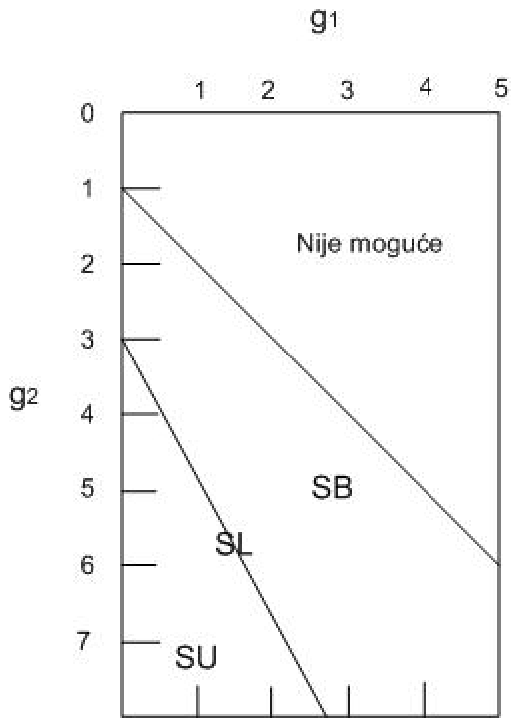
q_2 – mjera zaobljenosti

μ_3 – treći moment oko sredine

μ_4 – četvrti moment oko sredine

$\mu_2^2 = \sigma^4$, standardna devijacija na 4. potenciju ili varijanca na kvadrat

Teoretski gledano, postoji beskonačan broj kombinacija tih dviju vrijednosti. One zauzimaju cijelu ravninu koju Johnson dijeli u tri regije. Tri regije prikazuje slika 13.

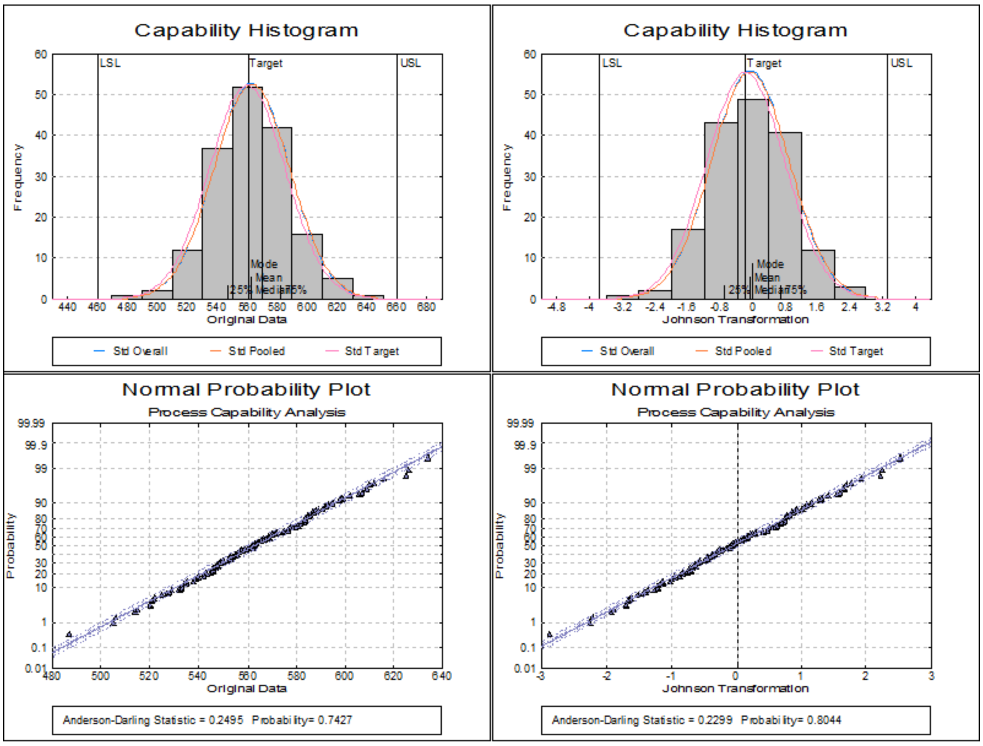


Slika 13. Sustav jednadžbi po Johnson-u

Postoji regija koja se matematički ne može opisati i ona se ne razmatra u praktičnim primjenama. Preostala površina dijeli se na dvije regije. Jedna sadrži kombinacije asimetrije i zaobljenosti koje je moguće opisati sustavom jednadžbi, čiji je raspon limitiran sa dvije strane. Johnson to naziva Ograničeni sustav (eng. *System Bounded*) ili SB. Ta površina se spaja u regiju gdje je pogodnije koristiti nelimitirane jednadžbe, što se naziva Neograničeni sustav (eng. *System Unbounded*) ili SU. Između dva sustava postoji prijelazni tip, sustav jednadžbi ograničenih samo na jednoj stani. Sustav uključuje logaritamske transformacije sa tri parametra i nosi skraćenicu SL.

Činjenica da je nejasna granica između spomenuta tri sustava jednadžbi, vodi ka zaključku da će se jedan te isti set podataka opisati sa sva tri sustava jednadžbi te da odabir najprihvatljivijeg, ovisi o poznavanju granica sustava.

I ovaj distribucijski model prikazuje se histrogramom i papirom vjerojatnosti, čineći krivulju, što prikazuje i Slika14.



Slika 14. Johnson-ove transformacije

3.2.7.7. Izvođenje transformacije podataka u programu Minitab

Za transformaciju podataka u izborniku odabrati Stat > Quality Tools > Capability Analysis > Normal > Transform. Ukoliko se neobrađeni podaci rasipaju po normalnoj razdiobi potrebno je odabrati *No transformation*.

Ako nismo sigurni po kojoj razdiobi se rasipaju podaci odabire se *Individual Distribution Identification*. U toj opciji može se pronaći optimalna razdioba od 14 ponuđenih, te se tada izvodi transformacija pomoću Box-Cox ili Johnson transformacije da bi se dobili podaci koji se rasipaju po normalnoj razdiobi.

Kao rezultat transformacije dobija se histogram izvornih i transformiranih podataka zajedno s ograničenjima za usporedbu. Transformirani podaci mogu se pohraniti za daljnju analizu. Ukoliko jedna transformacija ne transformira podatke na odgovarajući način, treba pokušati s drugom.

Za Box-Cox transformaciju moguće je odabrati metodu za određivanje lambde (λ). Uobičajene transformacije su prirodni logaritam log(λ=0) i drugi korijen (λ=0.5). Također, može se odabrati bilo koja vrijednost λ između -5 i 5. U većini slučajeva ne bi trebalo odabrati λ izvan raspona -2 i 2. Iz tog razloga se preporuča pokretanje Stat > Control Charts > Box-Cox Transformation kako bi se odredila optimalna vrijednost transformacije.

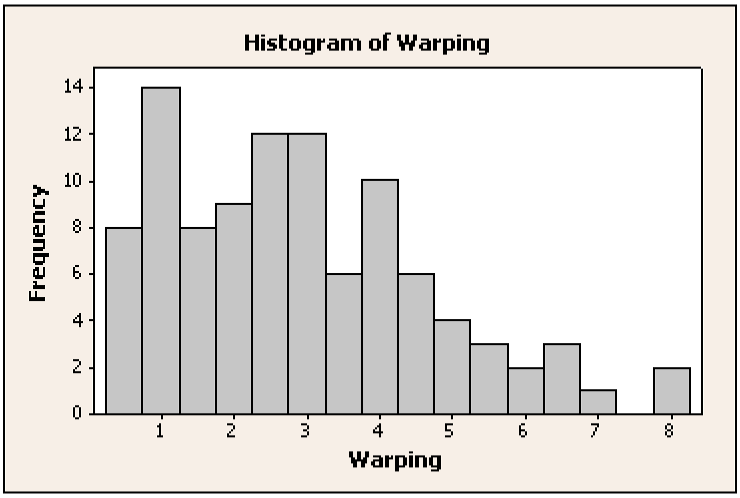
Box-Cox Transformacija može se koristiti samo sa ne-negativnim vrijednostima podataka. Kad god je moguće za Box-Cox transformaciju Minitab izvodi operacije sa zaokruženim vrijednostima. Ukoliko ne želimo koristiti zaokružene vrijednosti λ, pogledati u Tools > Options > Control Charts and Quality tools > Other.

Kod Johnson transformacije može se unijeti p-vrijednost za odabir najbolje transformacije. Minitab optimalno odabire funkciju iz tri obitelji distribucije varijabli, koje se lako može pretvoriti u standardnu normalnu distribuciju. Ove distribucije su označene kao S_B, S_L i S_U gdje se B, L i U indeksi odnose na ograničene, logaritamsko-normalne i neograničene varijable. Minitab ne može procijeniti varijacije unutar uzorka pri korištenju Johnson transformacije.

3.2.7.8. Primjer transformacije podataka (Box-Cox transformacija)

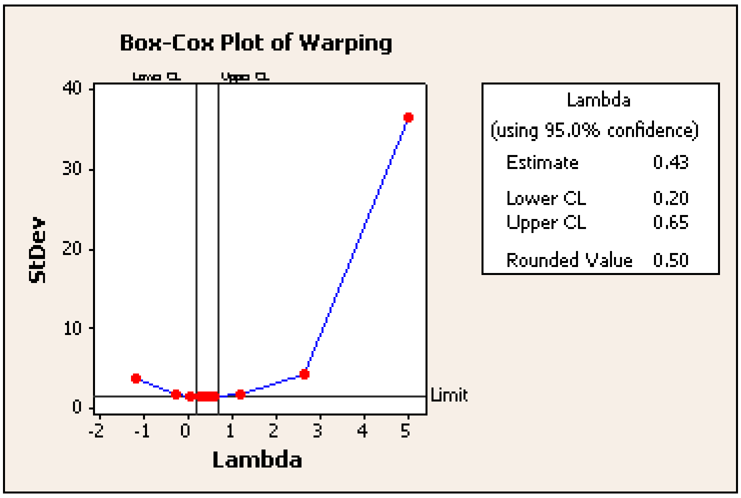
Pretpostavimo da radimo u tvrtci koja proizvodi keramičke podne pločice. Problem koji se pojavljuje je deformacija (savijanje) u pločicama. Kako bi se osigurala kvaliteta proizvodnje, potrebno je provoditi mjerenja savijanja u deset pločica svaki radni dan i tako deset dana.

Dobiveni histogram pokazuje da se podaci ne rasipaju po normalnoj razdiobi, stoga zaključujemo da je potrebno provesti Box-Cox transformaciju kako bi postigli normalnu distribuciju podataka.



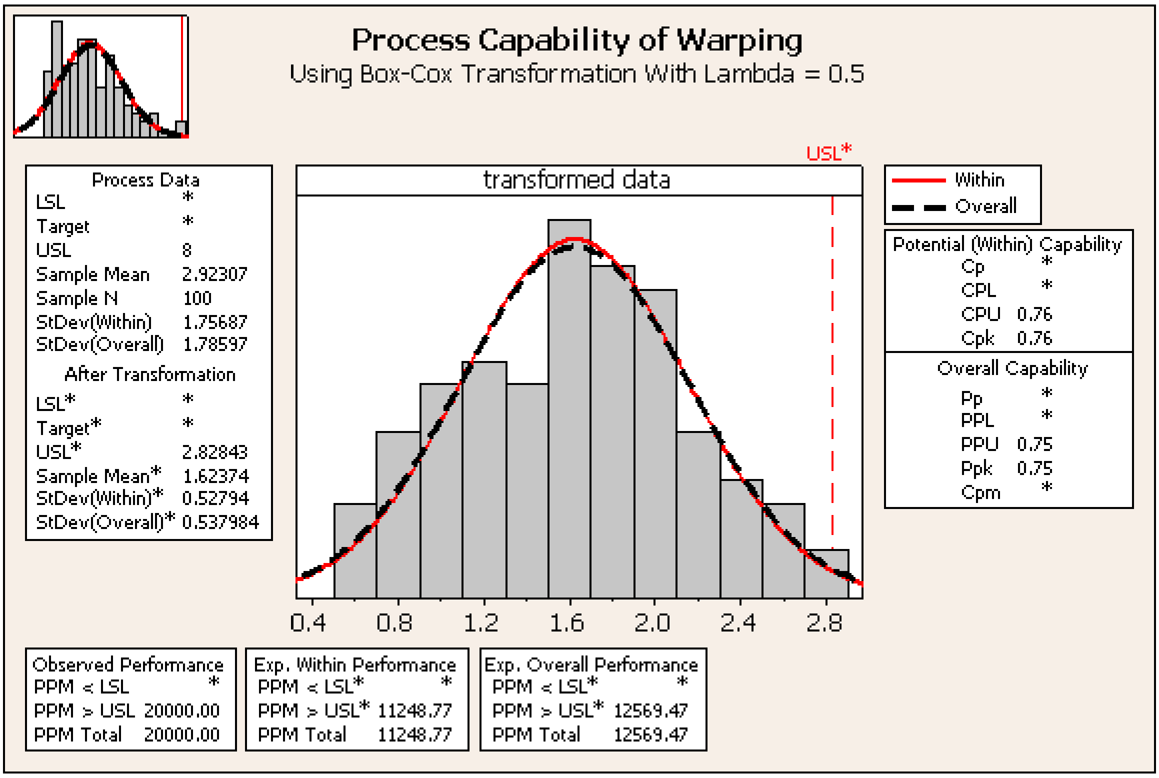
Slika 15. Histogram savijanja pločica

Prvi korak je određivanje optimalne vrijednosti λ. Nadalje, provodi se procjena sposobnosti procesa uz izvođenje Box-Cox transformacije.



Slika 16. Dijagram Box-Cox transformacije

Najbolja procjena λ je 0,43, no poželjno je zaokružiti λ na 0,5 (vrijednost drugog korijena). Zaokruživanje na 0,5 je razumno iz razloga što pada unutar intervala vjerojatnosti 95%, a vidi se u dijagramu označeno sa dvije vertikalne linije. Pokreće se procjena sposobnosti procesa s Box-Cox transformacijom koristeći λ=*0,5.*



Slika 17. Dijagram procjene sposobnosti procesa

Kao što se vidi iz krivulje normalne razdiobe koja opisuje histogram, Box-Cox transformacija je bila uspješna, te se podaci rasipaju po normalnoj razdiobi. Dobiveni indeksi sposobnosti mogu se komentirati s obzirom da je zadovoljen uvjet normalne distribucije.

Pošto smo unijeli samo gornju granicu zahtjeva (USL) dobiveni indeksi sposobnosti su *CPU* i *Cpk*. Oba iznose 0,76 što je manje od zahtjevanog iznosa 1,33, te zaključujemo da proces nije sposoban. Iz histograma se također može vidjeti da dio podataka pada izvan gornje granice zahtjeva.

4. PROCJENA SPOSOBNOSTI S DISKONTINUIRANIM PODACIMA

Atributivni podaci spadaju u najnižu razinu podataka. Oni opisuju karakteristike opisno, riječima i imaju kvalitativna svojstva koja se koriste tzv. razna snimanja i analize. Matematička podloga za analizu ove vrste podataka su binomna i Poissonova raspodjela.

Postupci koji se u praksi najčešće koriste za analizu ovih podataka su Paretova analiza i kontrolne karte za atributivne karakteristike, a to su p, np, c i u- kontrolna karta. Pareto analiza je tehnika za klasificiranje problema, odnosno problemskih područja prema stupnju njihove važnosti, a potom i usmjeravanje korektivnih aktivnosti na one najvažnije. Ona se koristi za određivanje ograničenog broja varijabli koje izazivaju najveći efekt. Služi za prikaz atributivnih serija i to tako što su atributi poredani po veličini s lijeva na desno, pa atributi sa najvećom frekvencijom zauzimaju krajnju lijevu poziciju, a atributi sa najmanjom frekvencijom krajnje desnu poziciju. Paretova anliza se najčešće koristi u kontroli kvalitete.

Atributivne kontrolne karte se koriste za praćenje procesa čiji se izlazi ne mjere, već se kvalitativno procenjuju. Ukoliko se za proizvod utvrđuje njegova usuglašenost, odnosno neusuglašenost i ako je broj primjeraka po uzorku promjenljiv, može računati udio neusuglašenih elemenata po uzorkovanju i koristit će se p-karta. Ukoliko se za proizvod utvrđuje usuglašenost, tj. neusuglašenost, te je broj elemenata po uzorku konstantan može se izračunati prosječan broj neusuglašenih elemenata. Tada treba koristiti np-kartu. Ako se za proizvod konstatira broj grešaka po primjerku i ako je broj primjeraka po uzorkovanju promjenljiv, tada se može računati udio defekata po uzorkovanju i tada treba koristiti u-kartu.

Ako se za proizvod utvrđuje broj defekata (grešaka) po primjerku i ako je broj elemenata konstantan od uzorka do uzorka, tada se može računati prosječan broj defekata po uzorku i tada treba koristiti c-kartu.

Stabilnost procesa predstavlja osobinu procesa da se ponaša u skladu sa određenim statističkim zakonitostima. Cilj statističke kontrole je da ispita ponašanje procesa i dovede proces u stanje stabilnosti, ukoliko on nije stabilan. Tek ukoliko je proces stabilan, može se promatrati njegova sposobnost. Pod karakteristikom sposobnosti procesa, za atributivne podatke također se podrazumijeva brojčana vrijednost koja se dobija kao računski rezultat iz usporedbe učinka procesa u odnosu na prethodno zadanu toleranciju. Sposobnost procesa daje odnos postavljenih specifikacija i tolerancija, određenih zahtjevima kupaca i ponašanja, odnosno rasipanja procesa.

Kod analize sposobnosti procesa za atributivne karakteristike važno je spomenuti normiranu (omjernu) varijablu Z. Minitab omjernu varijablu Z naziva *Z proces*. Na temelju vrijednosti Z ocjenjuje se sposobnost procesa. Vrijednosti omjerne varijable Z mogu se očitati iz statističkih tablica. Z proces predstavlja vrijednost na apscisi ispod krivulje normalne raspodjele, tako da površina ispod krivulje odgovara vrijednosti procesne proporcije p. Što je vrijednost Z procesa veća, time su bolje i karakteristike samog procesa.

Za stabilnost procesa za atributivne karakteristike postavlja se uvjet: Z ≥ 6σ**.** To znači da je proces sposoban samo onda ako je Z veće ili jednako od raspona procesa koji podrazumijeva područje unutar □± 3 standardna odstupanja (6σ) u odnosu na sredinu procesa (99,73% površine ispod krivulje normalne raspodjele kojom se aproksimira proces).

Z ≥ 2 proces je sposoban

Z < 2 proces nije sposoban

4.1. Binomna raspodjela

Binomna raspodjela podataka je u procjeni sposobnosti procesa obično povezana sa snimanjem broja neispravnih komada (proizvoda), tj. podataka od ukupnog broja proizvoda (podataka) iz uzorka. Na primjer, proizvođač može imati mjerač koji određuje je li predmet ispravan ili neispravan. Nakon toga bilježi se broj komada koji su utvrđeni kao neispravni i ukupan broj pregledanih komada. U montaži na primjer, može se snimiti i broj dijelova koji nisu montirani zbog loše proizvodnje u procesu prije montaže i ukupni broj ispravnih, tj. montiranih dijelova.

Binomnu raspodjelu definirao je Jacob Bernuolli 1700. godine. To je teorijska raspodjela za diskretne slučajne varijable kada imamo dva moguća ishoda, “uspjeh” i “neuspjeh”, u n mogućih događaja. Ako je vjerojatnost da se dogodi neki događaj poznata, unaprijed utvrđena i konstantna tijekom cijelog istraživanja (iznosi p) kaže se da se diskontinuirana slučajna varijabla x ravna prema tzv. binomnoj raspodjeli. Upotrebljava se pri zaključivanju o proporcijama. Binomna raspodjela aproksimira normalnu raspodjelu ako su joj vrijednosti i aritmetičke sredine i varijance veće od 5.

Funkcija raspodjele:

$$f(x) = \sum_{k \le x} pk = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \tag{55}$$

Rekurzivna formula:

$$p_k = \frac{n-k+1}{k}\frac{p}{q}p_{k-1} \tag{56}$$

Koeficijent asimetrije:

$$\alpha_3 = \frac{q-p}{\sqrt{npq}} \tag{57}$$

Koeficijent spljoštenosti:

$$\alpha_4 = 3 + \frac{1-6pq}{npq} \tag{58}$$

gdje je:

n - broj događaja (pokusa)

p - vjerojatnost realizacije slučajnog događaja

q - vjerojatnost da se slučajni događaj ne realizira

x - broj povoljnih ishoda u n događaja

n-x - broj nepovoljnih ishoda u n pokusu

$\alpha 3$ - koeficijent asimetrije

$\alpha 4$ - koeficijent spljoštenosti

k - broj uspješnih događaja

Kada je $p = q = 0{,}5$ binomna raspodjela je simetrična. Ako je $p < q$ raspodjela je pozitivno asimetrična. Ako je $p > q$ raspodjela je negativno asimetrična. Ako $n \to \infty$ koeficijent asimetrije $\beta 1 \to 0$. Znači, sa porastom n, binomna raspodjela smanjuje svoju asimetriju.

Uvjeti za postavljanje binomnog modela:

- svaki podatak mora biti dobiven pod jednakim uvjetima
- svaki podatak je rezultat jednog od dva moguća ishoda (ispravan/neispravan; prolazi/ne prolazi)
- vjerojatnost uspjeha ili neuspjeha je jednaka za svaki podatak
- dobiveni podaci ne ovise jedni o drugima

Pokazatelji sposobnosti:

Srednja vrijednost p:

$$\bar{p} = \frac{D}{N} \tag{59}$$

gdje je:

D – ukupan broj loših komada u svim uzorcima

N – ukupan broj komada u svim uzorcima

Postotak neispravnih komada:

$$\%\, Neispravnih = 100 * \bar{p} \tag{60}$$

PPM neispravnih:

$$PPM = 1{,}000{,}000 * \bar{p} \tag{61}$$

PPM neispravnih komada je broj koji pokazuje koliko imamo neispravnih komada od milijun proizvedenih.

Indeks sposobnosti *Process* Z:

$$Z = -1 * f^{-1}(\bar{p}) \tag{62}$$

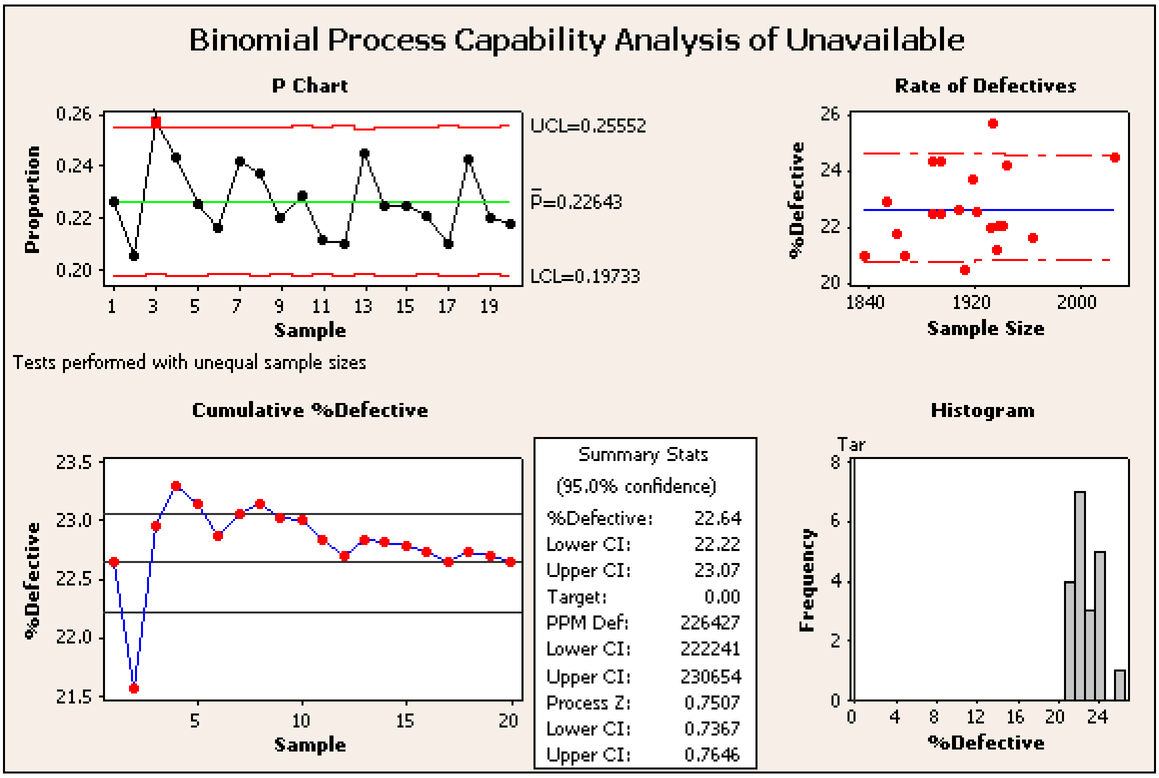
gdje je:

Z – indeks sposobnosti procesa

f^{-1} – inverzna funkcija standardne normalne razdiobe

4.1.1. Primjer Binomnog modela

Procjenjuje se brzina telefonskog prodajnog odjela, tj. sposobnost odgovaranja na dolazne pozive. Bilježi se broj poziva na koje se nije odgovorilo zbog zauzetosti, te će se takvi pozivi smatrati neispravnima. Također, bilježi se i ukupan broj dolaznih poziva. Trajanje ispitivanja je 20 dana.



Slika 18. Procjena sposobnosti procesa binomnog modela

Iz p-karte vidljivo je da je točka 3 izvan kontrole, tj. nalazi se izvan granice 3σ od sredine procesa. Grafikon Cumulative%Defective pokazuje da je procjena ukupnog postotka neispravnih oko 22%, ali potrebno je prikupiti više podataka kako bi bili sigurni u taj iznos. Veličina uzorka nije utjecala na udio neispravnih. Također, vidljivo je da iznos indeksa *Process Z* je vrlo nizak,a iznosi 0,75. Na kraju zaključujemo da je potrebno poboljšati ovaj proces i dovesti ga pod kontrolu. O sposobnosti procesa se ne donose zaključci dok se proces nalazi izvan kontrole iz razloga što se sposobnost procesa provodi samo nad procesima koji su pod kontrolom.

4.2. Poisson-ova raspodjela

Poissonova raspodjela podataka u slučaju procjene sposobnosti procesa je obično povezana s brojem nedostataka uočenih na proizvodu (komadu), gdje je proizvod zauzimao količinu određenog vremena ili određenog prostora. Zbog mogućih varijacija u veličini proizvoda, potrebno je bilježiti veličine proizvoda. Na primjer, pri proizvodnji električnih kablova želimo saznati broj mogućih prijeloma žice u kablu, s time da duljine kablova koje kontroliramo ne moraju biti iste, te ih je potrebno zabilježiti.

Opisao ju je Simeon Denis Poisson početkom XIX stoljeća. Ako je vjerojatnost da se dogodi neki događaj poznata, unaprijed utvrđena i konstantna tijekom cijelog istraživanja (iznosi p), te broj događaja teži u beskonačnost (n→∞), umjesto binomne raspodjele koristi se Poissonova raspodjela. U praksi vrijedi da ako je $n \geq 50$ i $p \leq 10$ koristi se Poissonova raspodjela. Ova raspodjela je definirana za rijetke događaje - kao zakon malih brojeva, odnosno događaje koji imaju veliki uzorak a malu vjerojatnost.

Funkcija razdiobe:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{x} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

(63)

Rekurzivna formula:

$$p_k = \frac{\lambda}{k} p_k - k$$

(64)

Koeficijent asimetrije:

$$\alpha_3 = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$$

(65)

Koeficijent spljoštenosti:

$$\alpha_4 = \frac{1}{\lambda}$$

(66)

gdje je:

n - broj događaja (pokusa)

p - vjerojatnost realizacije slučajnog događaja

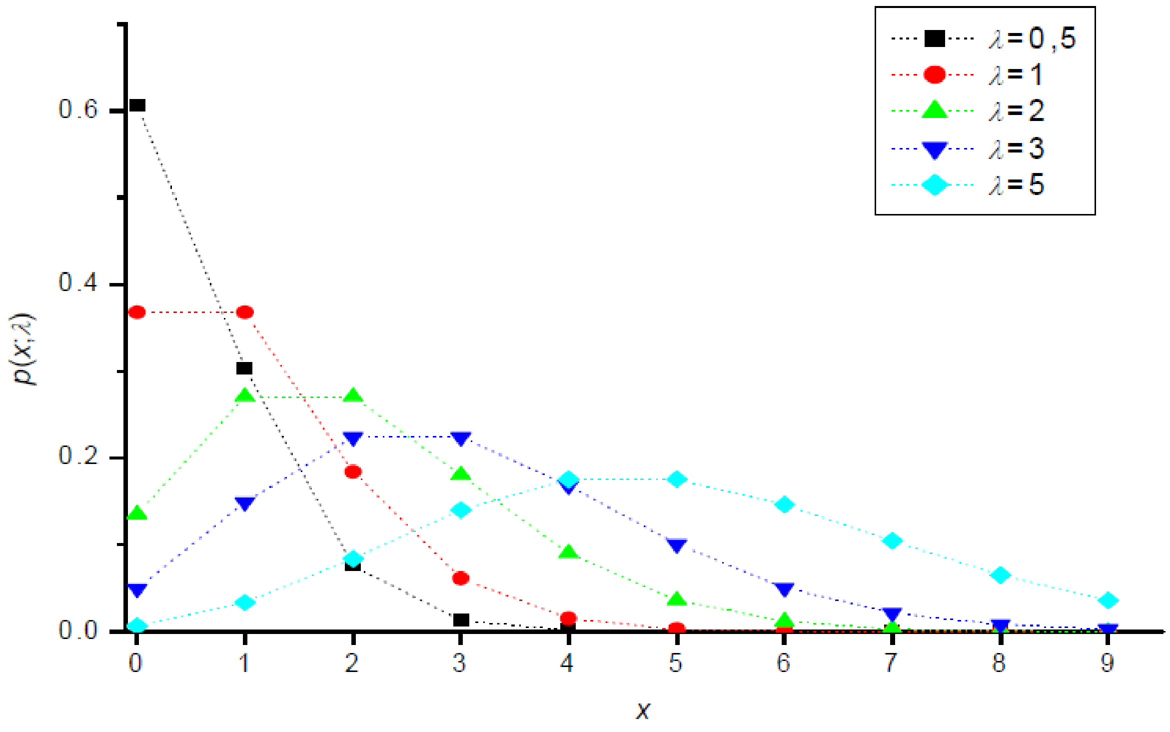
x - broj povoljnih ishoda u n događaja

e - baza prirodnih logaritama 2,71828

α3 - koeficijent asimetrije

α4 - koeficijent spljoštenosti

k - broj uspješnih događaja



Slika 19. Poisson-ova raspodjela za nekoliko različitih λ

Uvjeti za postavljanje modela:

- postotak nedostataka po jedinici prostora ili vremena je isti za svaki proizvod
- broj nedostataka uočenih u proizvodu ne ovise jedni o drugima

Srednja vrijednost DPU je broj nedostaka po jedinici (DPU). U Minitabu se označava *Mean DPU*, a računa se:

$$Mean\ DPU = \frac{D}{N} \tag{67}$$

gdje je:

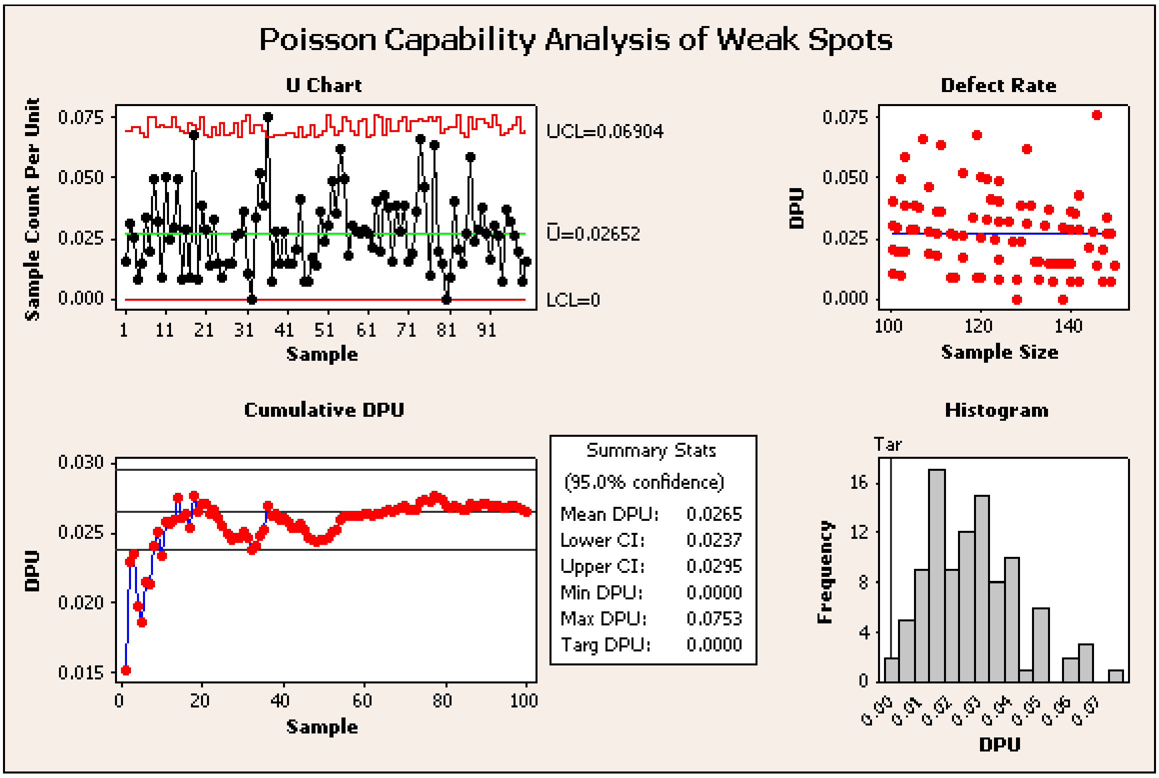
D – suma svih neispravnih

N – suma svih veličina uzoraka

Minitab također računa minimalni i maksimalni DPU, kao i srednju vrijednost svih neispravnosti (deffects) koja se dobije dijeljenjem broja svih neispravnosti sa brojem uzoraka.

4.2.1. Primjer Poisson modela

Proizvođač električnih kablova želi ispitati učinkovitost procesa izolacije žice. Uzimaju se proizvoljne duljine kablova i traže se slabe točke u izolaciji i to tako da ih se testira naponom. Bilježi se broj slabih točaka i duljina kabla.



Slika 20. Procjena sposobnosti procesa Poisson modela

Iz u-karte vidljivo je da su 3 točke izvan kontrole. Iz grafa *Cumulative DPU* vidi se tendencija rasipanja podataka oko vrijednosti 0,0265. Također, iz grafa se može zaključiti da je uzet dovoljan broj uzoraka, te da se može vjerodostojno procjeniti srednja vrijednost DPU. Vidljivo je i da duljina žice ne utječe na vrijednost DPU. Na kraju zaključujemo da je potrebno poboljšati ovaj proces i dovesti ga pod kontrolu. O sposobnosti procesa se ne donose zaključci dok se proces nalazi izvan kontrole iz razloga što se sposobnost procesa provodi samo nad procesima koji su pod kontrolom.

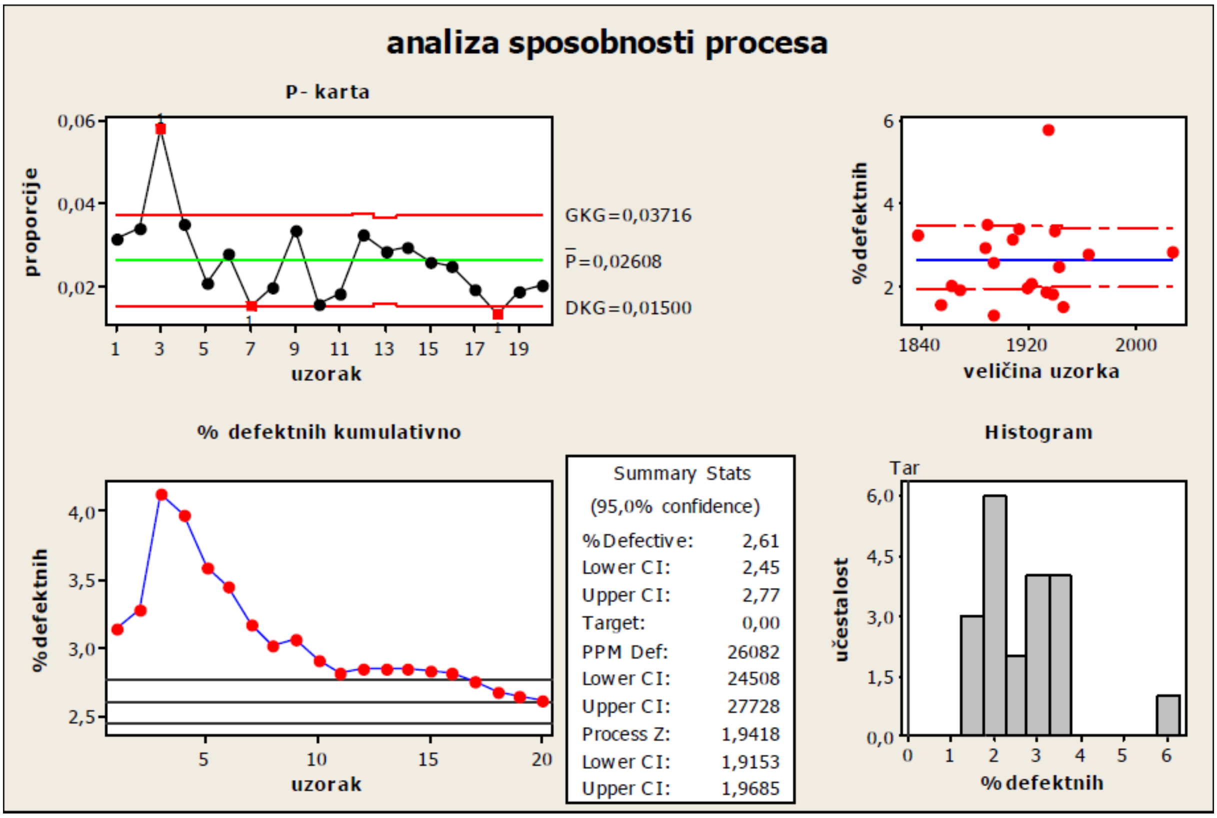
4.3. Primjer procjene sposobnosti procesa s atributivnim podacima

Neko poduzeće se bavi proizvodnjom valjkastih ležaja. Podaci o proizvedenim ležajevima po radnom danu u mjesecu prikazani su u tablici. Potrebno je analizirati sposobnost procesa pomoću kontrolne karte za atributivne karakteristike. Podaci su prikazani u Tablici 3.

Tablica 3. Podaci o proizvodnji valjkastih ležaja

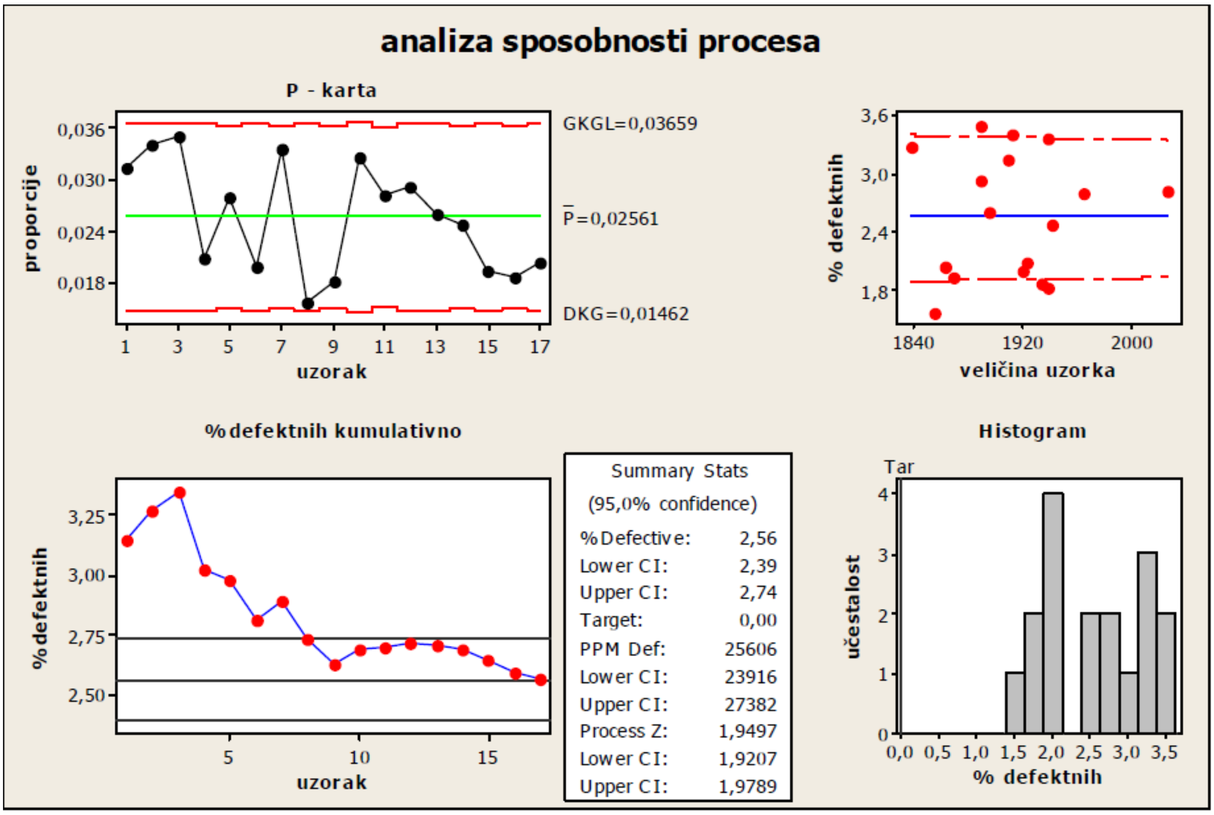
Radni dani	Proizvedeno ležaja	Broj neispravnih
1	1908	60
2	1912	65
3	1934	112
4	1889	66
5	1922	40
6	1964	55
7	1944	29
8	1919	38
9	1938	65
10	1854	29
11	1937	35
12	1838	60
13	2025	57
14	1888	55
15	1894	49
16	1941	48
17	1868	36
18	1894	25
19	1933	36
20	1862	38

Matematička podloga za analizu ovih podataka je binomna raspodjela. Podaci se analiziraju korištenjem p–karte za atributivne karakteristike. Ovaj primjer obrađen je u Minitabu.



Slika 21. Procjena sposobnosti procesa za atributivne podatke

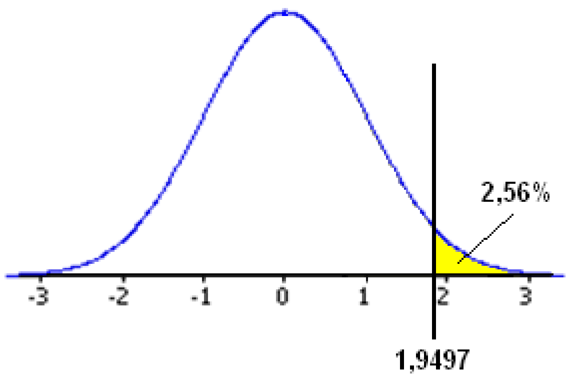
Iz p–karte vidljivo je da se uzorci 3, 7 i 18 nalaze izvan kontrolnih granica što upućuje na to da proces nije stabilan. Ako proces nije stabilan, o sposobnosti procesa nema smisla govoriti. Da bi proces bio stabilan potrebno ga je poboljšati. Jedan od načina poboljšavanja procesa je da se točke koje se nalaze izvan kontrolnih granica izbace iz analize kako bi se vidjelo koliki je njihov utjecaj na proces. Uzorci 3, 7 i 18 bit će eliminirani iz analize i postupak će se ponoviti na isti način. Rezultati analize bez navedena tri uzorka prikazani su na Slici 22.

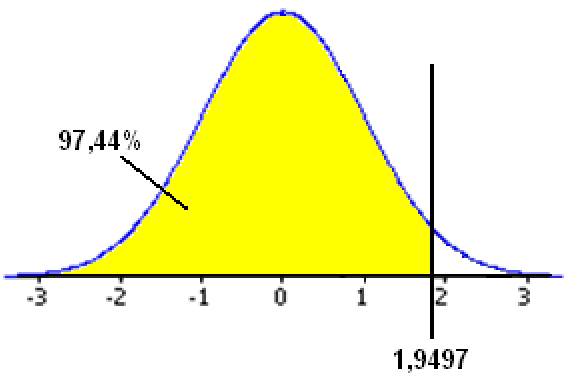


Slika 22. Procjena sposobnosti procesa nakon eliminacije

Eliminacijom 3, 7 i 18 dobio se stabilan proces što se može vidjeti na p-karti. Kada je proces stabilan, tek tada se može promatrati njegova sposobnost. Postupak kojim se utvrđuje sposobnost procesa za atributivne podatke, čija je matematička podloga binomna raspodjela i čiji se proizvodi (produkti) ocjenjuju na način ispravan-neispravan, Minitab naziva Z proces. U ovom primjeru vrijednost Z procesa iznosi 1,9497, a procesna proporcija 0,0256 (odnosno 2,56 % površine ispod krivulje normalne raspodjele). Budući je normalna raspodjela simetrična, vrijednost Z se može pisati kao ±1,9497.

Idealna vrijednost da bi proces bio sposoban bi bila 2 (99,73% površine ispod krivulje normalne raspodjele kojom se aproksimira proces) i više. U tom slučaju, proces bi bio sposoban. Ovaj proces je blizu vrijednosti 2, što ukazuje da bi proces trebalo dodatno poboljšati kako bi se postigla ta vrijednost. Time bi se postigla željena sposobnost procesa.





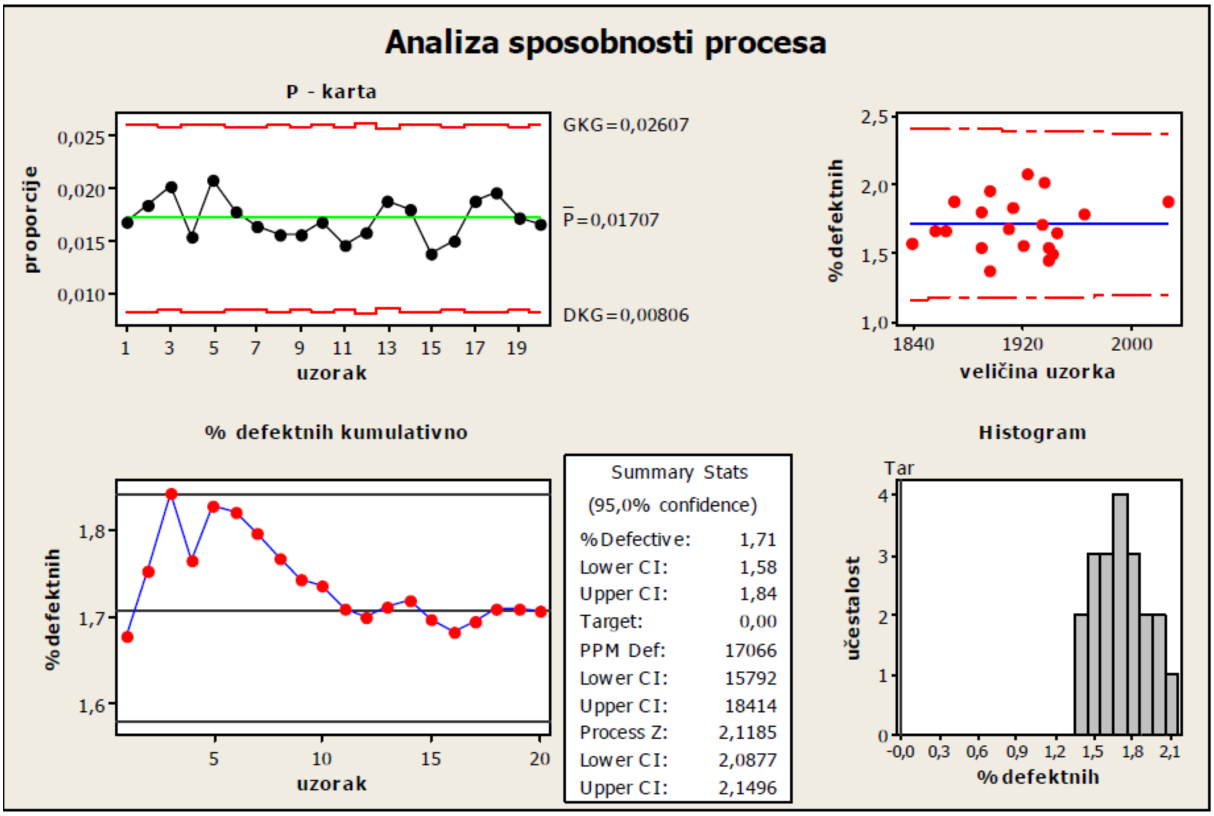
Slika 23. Vrijednost *Process Z*

Pretpostavimo da su se uočile greške u proizvodnom sustavu koje su bitno utjecale na kvalitetu proizvoda (npr. istrošenost reznog noža glodalice, nepodmazivanje kritičnih dijelova stroja, greške operatera...). Uklanjanjem tih grešaka, smanjio se broj neispravnih proizvoda. Podaci su navedeni u Tablici 4.

Tablica 4. Podaci o proizvodnji ležaja nakon uklanjanja grešaka

Radni dani	Proizvedeno ležaja	Broj neispravnih
1	1908	32
2	1912	35
3	1934	39
4	1889	29
5	1922	40
6	1964	35
7	1944	32
8	1919	30
9	1938	30
10	1854	31
11	1937	28
12	1838	29
13	2025	38
14	1888	34
15	1894	26
16	1941	29
17	1868	35
18	1894	37
19	1933	33
20	1862	31

Ovaj primjer bit će također obrađen u Minitab-u. Nakon analize podataka vidjet će se je li nakon uklanjanja grešaka, koje su utjecale na kvalitetu proizvoda proces poboljšan, odnosno je li statistički sposoban.



Slika 24. Procjena sposobnosti procesa

Iz ove slike, koja je rezultat analize unešenih podataka u Minitab jasno je vidljivo da je proces pod kontrolom (p-karta). Isto tako može se vidjeti da je vrijednost Z procesa veća od 2, što ukazuje na to da je proces sposoban. Proces Z iznosi 2,1185 što podrazumijeva područje 98,30% površine ispod krivulje normalne raspodjele kojom se aproksimira proces.

5. ZAKLJUČAK

U radu je opisan i razrađen postupak procjene sposobnosti procesa, te su definirani uvjeti koje je potrebno zadovoljiti prije postupka procjene. Razrađeni su postupci procjene sposobnosti procesa za kontinuirane i diskontinuirane podatke.

Preduvjeti za izračun indeksa sposobnosti su normalna razdioba i stabilnost procesa, to jest korištenje kontrolne karte. Naime, kako bi mogli procjenjivati sposobnost procesa, proces prije svega mora biti pod kontrolom. Sposobnost procesa daje odnos postavljenih specifikacija i tolerancija, određenih zahtjevima kupaca i ponašanja, odnosno rasipanja procesa.

Za analizu podataka danas se u širokoj mjeri primjenjuju specificirani softverski paketi koji uvelike pomažu da se procesi mogu pratiti kontinuirano i da se kontrola kvalitete dovede do najviše razine.

U radu su analizirani različiti primjeri kako bi svako poglavlje bilo što bolje opisano i razrađeno. Primjeri su izvedeni u programu Minitab – probna verzija. U svakom primjeru analizirani su izlazni podaci s pripadajućim dijagramima. Kod kontinuiranih podataka, dani su primjeri s ulaznim podacima koji se rasipaju po normalnoj razdiobi i podacima koji se ne rasipaju po normalnoj razdiobi. Također, prikazan je i primjer Box Cox transformacije podataka. Za diskontinuirane podatke dani su primjeri procjene sposobnosti procesa Poisson i binomno distribuiranih podataka.

6. LITERATURA

[1] V. Mudronja: „Predavanja iz kolegija Kontrola kvalitete“, FSB 2012.

[2] B. Runje: „Predavanja iz kolegija Osnove osiguranja kvalitete “, FSB 2008.

[3] J. Maršanić, Diplomski rad: „Procjena sposobnosti procesa nenormalno distribuiranih podataka“, FSB 2008.

[4] Minitab 16, Manual

[5] s Interneta, http://en.wikipedia.org/wiki/File:Some_log-normal_distributions.svg, 10.05.2012.

[6] s Interneta, http://en.wikipedia.org/wiki/File:Rayleigh_distributionPDF.png, 22.05.2012.

[7] s Interneta, http://en.wikipedia.org/wiki/File:Weibull_PDF.svg, 24.05.2012.

[8] s Interneta, http://www.unistat.com/quality-control, 02.06.2012.

[9] Z. Markešić, Diplomski rad: „Analiza atributivnih podataka“, FSB 2008.