

# Konstrukcija para čelnika s ravnim zubima s ujednačenim klizanjem

---

**Strniščak, Vedran**

**Undergraduate thesis / Završni rad**

**2025**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:235:392620>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-04-01**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# ZAVRŠNI RAD

**Vedran Strnišćak**

Zagreb, 2024.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

**ZAVRŠNI RAD**  
**KONSTRUKCIJA PARA ČELNIKA S**  
**UJEDNAČENIM KLIZANJEM**

Mentor:

dr. sc. Dragan Žeželj, dipl. ing.

Student:

Vedran Strniščak

Zagreb, 2025.

Izjavljujem da sam ovaj rad izradio samostalno koristeći znanja stečena tijekom studija i navedenu literaturu.

Zahvaljujem se mentoru prof. dr. sc.-u Draganu Žeželju za svu pruženu pomoć i savjete tokom izrade ovog rada.

Vedran Strnišćak



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE



Središnje povjerenstvo za završne i diplomске ispite  
Povjerenstvo za završne i diplomске ispite studija strojarstva za smjerove.

Procesno-energetski, konstrukcijski, inženjersko modeliranje i računalne simulacije i brodostrojarški

Sveučilište u Zagrebu	
Fakultet strojarstva i brodogradnje	
Datum	Prilog
Klasa: 602 – 04 / 25 – 06 / 1	
Ur.broj: 15 – 25 –	

## ZAVRŠNI ZADATAK

Student: **Vedran Strnišćak** JMBAG: **0035230879**

Naslov rada na hrvatskom jeziku: **Konstrukcija para čelnika s ravnim zubima s ujednačenim klizanjem**

Naslov rada na engleskom jeziku: **Design of a spur gear pair with straight teeth with uniform sliding**

Opis zadatka:

Bokovi zuba para zupčanika s evolventnim ozubljenjem tijekom rada klizu i kotrljaju se jedni po drugima. Brzina klizanja ima direktan utjecaj kako na stvaranje hidrodinamičkog uljnog filma, tako i na neka karakteristična oštećenja, a posebnu važnost ima na početku i kraju zahvata. Odgovarajućom podjelom pomaka profila mogu se brzine klizanja u tim točkama ujednačiti.

U okviru rada, za par čelnika s ravnim zubima i evolventnim ozubljenjem, potrebno je:

- odrediti analitički model brzina klizanja i specifičnih klizanja duž zahvatne crte, od početka do kraja zahvata
- za proizvoljno odabrane ulazne podatke dimenzionirati par bez zahtjeva za standardni osni razmak te kreirati dijagram faktora klizanja i specifičnog klizanja
- odrediti pomake profila tako da se ujednače brzine klizanja na početku i kraju zahvata, istovremeno ispunjavajući uvjete podrezanosti i zašiljenosti te uvjet da suma pomaka bude manja ili jednaka jedan
- rezultate brzina klizanja u prvj i zadnjoj točki zahvata usporediti s vrijednostima za nulti par zupčanika istog modula i broja zubi
- uporabom odgovarajućeg programskog paketa ispitati čvrstoću zupčanika jednog i drugog para te komentirati rezultat
- za dimenzionirani par zupčanika kreirati odgovarajuće radioničke crteže.

Vrijednosti potrebne za proračun i odabir pojedinih komponenti usvojiti iz postojećih rješenja sličnih sustava, iskustvenih vrijednosti te u dogovoru s mentorom.

U radu je potrebno navesti korištenu literaturu, norme kao i možebitno dobivenu pomoć.

Zadatak zadan:

30. 11. 2024.

Zadatak zadao:

Prof. dr. sc. Dragan Žeželj

Datum predaje rada:

1. rok: 20. i 21. 2. 2025.

2. rok: 10. i 11. 7. 2025.

3. rok: 18. i 19. 9. 2025.

Predviđeni datumi obrane:

1. rok: 24. 2. – 28. 2. 2025.

2. rok: 15. 7. – 18. 7. 2025.

3. rok: 22. 9. – 26. 9. 2025.

Predsjednik Povjerenstva:

Prof. dr. sc. Vladimir Soldo

**SADRŽAJ**

<b>POPIS SLIKA.....</b>	<b>III</b>
<b>POPIS TABLICA.....</b>	<b>IV</b>
<b>POPIS OZNAKA.....</b>	<b>V</b>
<b>SAŽETAK.....</b>	<b>VII</b>
<b>SUMMARY.....</b>	<b>VIII</b>
<b>1. Uvod.....</b>	<b>1</b>
<b>1.1 Osnove .....</b>	<b>1</b>
<b>1.2 Oštećenja zupčanika .....</b>	<b>3</b>
<b>2. Analiza brzine klizanja .....</b>	<b>6</b>
<b>2.1 Opći zakon ozubljenja .....</b>	<b>6</b>
<b>2.2 Proračun brzine klizanja za bilo koju točku na putu zahvata .....</b>	<b>8</b>
<b>2.3 Faktor klizanja i specifično klizanje.....</b>	<b>11</b>
<b>2.4 Izbor pomaka profila radi izravnavanja specifičnog klizanja na početku i na kraju zahvata.....</b>	<b>12</b>
<b>2.5 Izbor pomaka profila radi povećanja vijeka trajanja .....</b>	<b>13</b>
<b>3. Dimenzioniranje nultog para .....</b>	<b>16</b>
<b>3.1 Ulazni podatci .....</b>	<b>16</b>
<b>3.2 Podatci o materijalu .....</b>	<b>16</b>
<b>3.3 Izračun orijentacijskog modula zuba.....</b>	<b>17</b>
<b>3.3.1 Orijetacijski modul prema opteretivosti korijena zuba .....</b>	<b>17</b>
<b>3.3.2 Orijetacijski modul prema opteretivosti boka zuba .....</b>	<b>18</b>
<b>3.4 Određivanje dimenzija zupčanika .....</b>	<b>19</b>
<b>3.5 Izračunavanje specifičnih klizanja i faktora klizanja.....</b>	<b>21</b>
<b>3.6 Dijagrami specifičnih klizanja i faktora klizanja.....</b>	<b>24</b>
<b>4. Dimenzioniranje čelnika s ujednačenim brzinama klizanja .....</b>	<b>26</b>
<b>4.1 Određivanje potrebnih pomaka profila .....</b>	<b>26</b>
<b>4.2 Određivanje dimenzija zupčanika .....</b>	<b>29</b>
<b>4.3 Izračunavanje specifičnih klizanja i faktora klizanja.....</b>	<b>30</b>
<b>5. Analiza i usporedba rezultata .....</b>	<b>34</b>
<b>6. Proračun čvrstoće zupčanika .....</b>	<b>35</b>
<b>6.1 Proračun čvrstoće nultoga para.....</b>	<b>35</b>

<b>6.2 Proračun nosivosti para čelnika sa ujednačenim specifičnim brzinama klizanja .</b>	<b>37</b>
<b>6.3 Potrebna debljina uljnoga filma .....</b>	<b>40</b>
<b>6.3.1 Minimalna debljina uljnog filma V para .....</b>	<b>40</b>
<b>6.3.2 Minimalna debljina uljnog filma nultog para .....</b>	<b>42</b>
<b>7. Zaključak .....</b>	<b>43</b>
<b>8. Literatura .....</b>	<b>44</b>
<b>PRILOZI .....</b>	<b>45</b>

**POPIS SLIKA**

<b>Slika 1. Cilindrični zupčanik, pužni par, stožasti zupčanici [2], [3], [4].....</b>	<b>1</b>
<b>Slika 2. Oznake na čelnicima s ravnim zubima [1] .....</b>	<b>2</b>
<b>Slika 3. Mehaničko opterećenje zuba [1] .....</b>	<b>3</b>
<b>Slika 4. Opterećenje zuba zupčanika [1] .....</b>	<b>3</b>
<b>Slika 5. Opći zakon ozubljenja [1] .....</b>	<b>6</b>
<b>Slika 6. Oznake i geometrijski odnosi općeg zakona ozubljenja [1] .....</b>	<b>8</b>
<b>Slika 7. Relativna brzina klizanja [1] .....</b>	<b>9</b>
<b>Slika 8. Komponente brzine zuba za dodir u točki <math>P_y</math> [5].....</b>	<b>10</b>
<b>Slika 9. Faktor klizana <math>Kk</math> i specifično klizanje <math>\zeta</math> [1] .....</b>	<b>11</b>
<b>Slika 10. Dužine bokova na tjemenu i podnožju (<math>A1, E1, A2, E2</math>) gdje se javljaju maksimalne vrijednosti specifičnog klizanja [1] .....</b>	<b>14</b>
<b>Slika 11. Dijagram specifičnog klizanja <math>\zeta</math> po putu zahvata .....</b>	<b>24</b>
<b>Slika 12. Dijagram faktora klizanja <math>Kk</math> .....</b>	<b>25</b>
<b>Slika 13. Dijagram faktora pomaka profila i Fitness funkcije.....</b>	<b>27</b>
<b>Slika 14. Dijagram faktora pomaka profila i stvarnog omjera radijusa zakrivljenosti ..</b>	<b>27</b>
<b>Slika 15. Dijagram ovisnosti stupnja prekrivanja <math>\varepsilon\alpha</math> o pomacima profila <math>x_1</math> i <math>x_2</math> .....</b>	<b>28</b>
<b>Slika 16. Dijagram ujednačenih specifičnih klizanja .....</b>	<b>33</b>
<b>Slika 17. Dijagram faktora klizanja para čelnika s ujednačenim specifičnim klizanjem</b>	<b>33</b>
<b>Slika 18. Unošenje podataka nultoga para.....</b>	<b>35</b>
<b>Slika 19. Proračun nosivosti nultoga para .....</b>	<b>36</b>
<b>Slika 20. Pregled vrijednosti faktora .....</b>	<b>36</b>
<b>Slika 21. Unošenje podataka <math>V</math> para.....</b>	<b>38</b>
<b>Slika 22. Faktori <math>V</math> para .....</b>	<b>39</b>
<b>Slika 23. Proračun nosivosti <math>V</math> para .....</b>	<b>39</b>



**POPIS TABLICA**

<b>Tablica 1. Tangencijalne komponente brzina nultoga para.....</b>	<b>22</b>
<b>Tablica 2. Specifična klizanja nultoga para.....</b>	<b>22</b>
<b>Tablica 3. Faktori klizanja nultoga para .....</b>	<b>23</b>
<b>Tablica 4. Iznosi tangencijalnih komponenti brzina para čelnika sa ujednačenim specifičnim klizanjima .....</b>	<b>31</b>
<b>Tablica 5. Iznosi specifičnih klizanja za par čelnika sa izjednačenim specifičnim klizanjem na početku i na kraju zahvata .....</b>	<b>32</b>
<b>Tablica 6. Faktori klizanja za par čelnika sa izjednačenim specifičnim klizanjem na početku i na kraju zahvata .....</b>	<b>32</b>
<b>Tablica 7. Usporedba iznosa specifičnih klizanja.....</b>	<b>34</b>

## POPIS OZNAKA

Oznaka	Jedinica	Opis
$a$	mm	Osni razmak
$a_d$	mm	Proračunski osni razmak
$\alpha$	°	Kut zahvatne linije
$\alpha_w$	°	Pogonski kut zahvatne linije
$\alpha$	GPa <sup>-1</sup>	Tlačno viskozni koeficijent
$b$	mm	Širina zupčanika
$C_{ZR}$	-	Pomoćni faktor hrapavosti
$d$	mm	Diobeni promjer zupčanika
$d_a$	mm	Tjemeni promjer zupčanika
$d_b$	mm	Temeljni promjer zupčanika
$E$	GPa	Modul elastičnosti
$E'$	GPa	Ekvivalentni modul elastičnosti
$\varepsilon_\alpha$	-	Stupanj prekrivanja
$F_{bn}$	N	Normalna sila na bokove
$\varphi$	°	Tlačni kut
$G$	-	Pomoćni parametar pri izračunu potrebne debljine uljnog filma
$g_\alpha$	mm	Put zahvata
$h_{min}$	$\mu\text{m}$	Minimalan potrebna debljina uljnog filma
$i$	-	Prijenosni omjer
$K_k$	-	Faktor klizanja
$K_{F\alpha}$	-	Faktor raspodjele opterećenja po širini bokova
$K_{F\beta}$	-	Faktor raspodjele opterećenja na pojedine zube za opterećenje bokova
$L_h$	h	Vijek trajanja
$m$	mm	Modul
$n$	s <sup>-1</sup>	Broj okretaja po sekundi
$\omega$	rad <sup>-1</sup>	Kutna brzina
$P$	kW	Snaga
$p$	mm	Korak na diobenoj kružnici
$p_e$	mm	Korak na temeljnoj kružnici
$r$	mm	Radijus temeljne kružnice
$r_a$	mm	Radijus tjemene kružnice
$r_b$	mm	Radijus temeljne kružnice
$\rho_y$	mm	Radijus zakrivljenosti u pojedinim točkama zahvata
$\rho_{red}$	mm	Radijus relativne zakrivljenosti
$R$	mm	Ekvivalentni radijus zakrivljenosti

$R_z$	$\mu\text{m}$	Srednja visina hrapavosti
$R_{z10}$	$\mu\text{m}$	Srednja relativna visina hrapavosti
$S_H$	-	Faktor sigurnosti na opterećenje bokova
$S_F$	-	Faktor sigurnosti protiv savijanja korijena
$\sigma_{Hlim}$	MPa	Dopušteno naprezanje boka
$\sigma_{Flim}$	MPa	Dopušteno naprezanje korijena na savijanje
$T$	Nm	Okretni moment
$U$	-	Pomoćni parametar pri izračunu potrebne debljine uljnog filma
$u$	-	Stvarni prijenosni omjer
$v_n$	m/s	Brzina u smjeru normale na bok
$v_t$	m/s	Brzina u smjeru tangente na bok
$v_k$	m/s	Brzina klizanja
$v_w$	m/s	Obodna brzina na kinematskim kružnicama
$\nu$	-	Poissonov koeficijent
$z$	-	Broj zubi zupčanika
$W$	-	Pomoćni parametar pri izračunu potrebne debljine uljnog filma
$x$	-	Faktor pomaka profila
$Y_F$	-	Faktor oblika
$Y_\varepsilon$	-	Faktor stupnja prekrivanja
$Z_\varepsilon$	-	Faktor stupnja prekrivanja
$Z_H$	-	Faktor oblika
$Z_M$	-	Faktor materijala
$Z_R$	-	Faktor hrapavosti površine
$\zeta$	-	Specifično klizanje

## **SAŽETAK**

U ovom radu napravljeno je rješenje para čelnika s ujednačenim specifičnim klizanjem po cijelom putu zahvata s ciljem smanjenja trošenja i povećanja vijeka trajanja zupčanika. Određen je analitički model brzine klizanja duž zahvatne linije, specifičnog klizanja i faktora klizanja te za proizvoljno odabrane ulazne podatke dimenzioniran nulti par čelnika i zatim uspoređen s parom čelnika s ujednačenim klizanjem. Proračun sadrži iterativno određivanje faktora pomaka profila s pomoću funkcije Solver u programu Excel te proračun čvrstoće s pomoću programa Autodesk Inventor Professional 2025 koji u sebi ima ugrađen proračun nosivosti zupčanika prema ISO 6336:1996. Rezultati pokazuju da V par čelnika ima povoljnije karakteristike u pogledu smanjenja trošenja te povećanja nosivosti. Također je proveden proračun minimalne debljine uljnog filma za oba para čelnika čime je osiguran pouzdan rad zupčanika te učinkovito podmazivanje. Rezultati rada pokazuju da ujednačavanje specifičnog klizanja predstavlja bitan faktor u poboljšanju uvjeta rada, smanjenja oštećenja te pouzdanosti i efikasnosti sustava.

## **SUMMARY**

In this paper, a solution for a spur gear pair with uniform specific sliding along the entire path of contact was developed to reduce wear and increase gear lifespan. An analytical model was defined for the sliding velocity along the line of action, specific sliding, and sliding factor. For arbitrarily chosen input data, a standard spur gear pair was dimensioned and then compared with a pair featuring uniform sliding. The calculation includes an iterative determination of the profile shift factor using the Solver function in Excel, as well as a strength calculation using Autodesk Inventor Professional 2025, which has a built-in gear load capacity calculation according to ISO 6336:1996. The results show that the modified gear pair has more favorable characteristics in terms of wear reduction and increased load capacity. Additionally, the minimum oil film thickness was calculated for both gear pairs, ensuring reliable gear operation and effective lubrication. The results of the study indicate that uniform specific sliding is a key factor in improving operating conditions, reducing damage, and enhancing the reliability and efficiency of the system.

# 1. Uvod

## 1.1 Osnove

Zupčani par čine dva zupčanika u zahvatu te su jedni od najčešće korištenih strojnih elemenata. Zupčanici su rotacijski strojni elementi koji služe za prijenos okretnog momenta i snage s jednog vratila na drugo, a snaga i gibanje prenosi se oblikom, tj. ozubljenjem koje se nalazi na oba zupčanika u paru.

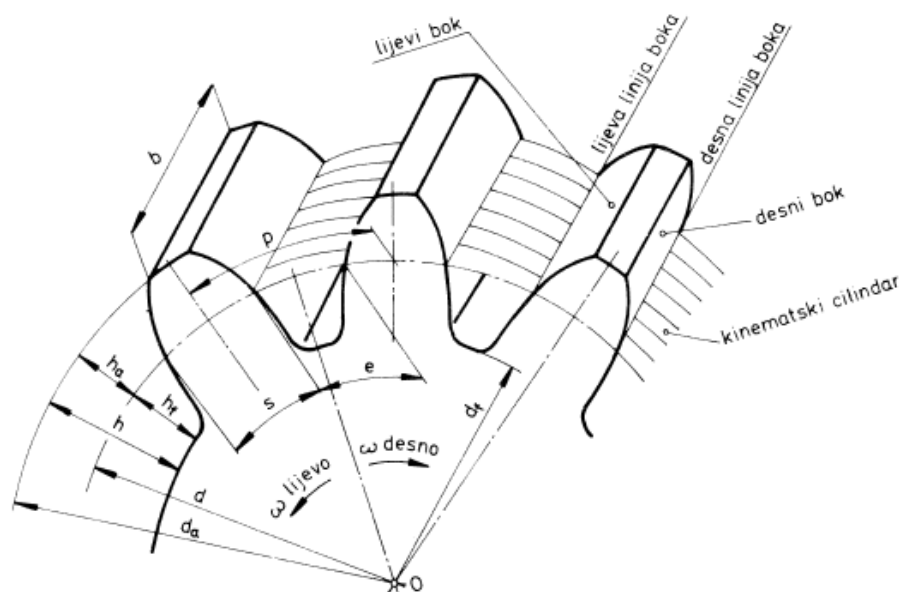
Zupčanici se općenito mogu podijeliti u više skupina prema njihovom obliku, međusobnom položaju vratila, vrsti ozubljenja i vrsti zubi na [1]:

- Cilindrični zupčanici
  - S ravnim zubima
  - S kosim zubima
  - Sa strelastim zubima
  - Sa zakrivljenim zubima
  - S unutrašnjim ozubljenjem
- Stožasti zupčanici:
  - S ravnim zubima
  - S kosim zubima
  - Sa zakrivljenim zubima
  - Sa strelastim zubima
- Pužni parovi



Slika 1. Cilindrični zupčanik, pužni par, stožasti zupčanici [2], [3], [4]

Na slici 2. prikazane su osnovne dimenzije i oznake za čelnike s ravnim zubima,



Slika 2. Oznake na čelnicima s ravnim zubima [1]

gdje je:

$b$  – debljina zupčanika

$h$  – visina zuba

$d$  – promjer diobene kružnice

$h_a$  – tjemena visina zuba

$d_a$  – promjer tjemene kružnice

$h_f$  – podnožna visina zuba

$d_b$  – promjer temeljne kružnice

$p$  – korak

$d_f$  – promjer podnožne kružnice

$s$  – debljina zuba

U praktičnoj primjeni su najrašireniji cilindrični zupčanici s ravnim zubima i evolventnim ozubljenjem, a razlozi tome se jednostavnost izrade, niža cijena proizvodnje u odnosu na ostale spomenute vrste zupčanika, mala osjetljivost na promjene osnovnog razmaka te činjenica da se u njihovom radu ne stvara aksijalna sila što im omogućuje lakšu montažu te su time široko primjenjivi u svim granama strojarstva. Naime, iz navedenih razloga im se postavljaju visoki zahtjevi u pogledu snage koju treba prenijeti, nosivosti te preciznosti u radu i njihovoj proizvodnji. [1]

## 1.2 Oštećenja zupčanika

Nosivost (opterećenje) zupčaničkih parova mora biti prilagođena tako da tijekom predviđenog vijeka trajanja ne dođe do oštećenja. Uzroci nastanka oštećenja mogu biti različiti, a među njih ubrajamo [1]:

### 1. Pogonska opterećenja zupčanika

- Uzrokuju smična naprezanja bokova, Hertzove kontaktne pritiske te naprezanja u korijenu i duž bokova zuba.

### 2. Pogonski uvjeti

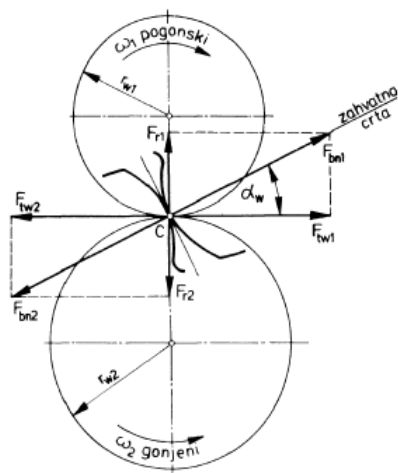
- Uključuju faktore poput maziva, prisutnosti lutajućih struja, korozije i stranih tijela u sustavu.

### 3. Stanje materijala

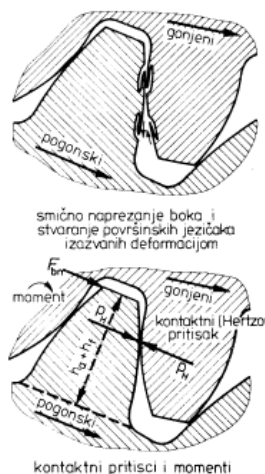
- Obuhvaća greške u materijalu, kvalitetu površinske obrade, odstupanja u dimenzijama te greške tijekom montaže

### 4. Promjene na zubima uzrokovane štetnim utjecaji

- Obuhvaćaju elastične deformacije bokova zuba i presjeka zuba, utjecaj vibracija, abrazivno trošenje bokova i koroziju trenja.



Slika 4. Opterećenje zuba zupčanika [1]



Slika 3. Mehaničko opterećenje zuba [1]

Sila koja djeluje između zuba dijeli se na obodnu i radijalnu komponentu te one skupa predstavljaju mehaničko opterećenje zupčanika (slika 3.). Obodna komponenta sile stvara savojno opterećenje u korijenu zuba, dok radijalna komponenta uzrokuje tlačna naprezanja na kontaktnoj površini. [1]



Prilikom zahvata zubi, svaki ima svoju brzinu koja se može rastaviti na normalnu i tangencijalnu komponentu. Normalne komponente brzina zubiju moraju biti jednake kako bi se bokovi neprestano dodirivali. Ako bi normalna komponenta brzine gonjenog zupčanika bila veća od pogonskog, tada bi došlo do odvajanja bokova, a ako bi normalna komponenta pogonskog bila veća, to bi značilo da je bok pogonskog zupčanika prodrijeo u gonjeni. Tangencijalne komponente brzina ovise o točki dodira na zahvatnoj liniji. Naime, jedino će u kinematskom polu, tj točki dodira kinematskih kružnica, tangencijalne komponente biti jednakih iznosa. U svakoj drugoj točki zahvata njihove će tangencijalne komponente biti različitih iznosa. Ako tangencijalna komponenta jednog boka poraste, drugoga boka će se smanjiti i obratno. Ta razlika tangencijalnih brzina je razlog pojave klizanja. [1]

Promjene brzine klizanja mogu dovesti do povećanja lokalnih naprezanja i trenja, posebno na početku i kraju zahvata, što povećava rizik od oštećenja zupčanika. [1]

Među najčešćim vrstama oštećenja su [1]:

- **Lom zuba zbog umora materijala**

- Do lomova zbog umora materijala dolazi kad su dinamička naprezanja izazvana opterećenjem većim od dinamičke izdržljivosti. Od male naprsline lom napreduje polako dok ne nastupi lom dijela zuba ili cijelog zuba
- Često se na mjestima nastanka loma, na početku prskotine, mogu opaziti uzroci nastale prskotine. Najčešće je to koncentracija naprezanja koju je izazvao bilo neki uključak bilo usahlina

- **Rupičenje (pitting)**

- To je oštećenje pri kojem se na površini bokova javljaju rupice velike od nekoliko desetinki milimetara do nekoliko milimetara (2 do 3), kao posljedica međusobnog valjanja i klizanja bokova te kontaktnih pritisaka i prisutnosti maziva
- Teorijski, rupice nastaju kao posljedica koncentracije naprezanja koju izazivaju kontaktni pritisci na mjestima najvećih smičnih naprezanja

- **Zaribavanje**

- Zaribavanje je oštećenje bokova izazvano istodobnim djelovanjem visokih površinskih pritisaka i brzina klizanja najčešće li blizini tjemena i podnožja boka zuba

- Do zaribavanja dolazi, kako se pretpostavlja, zbog prekida uljnog filma izazvanog visokim opterećenjem i velikim brzinama klizanja

- **Habanje (trošenje)**

- Habanje je oštećenje površine nastalo odnošenjem materijala sa cijele širine i visine zuba dugim radom
- Habanje može uzrokovati gubitak preciznosti zupčanika i povećano opterećenje na drugim komponentama sustava

- **Nasilni lomovi**

- Nasilne lomove izazivlju trenutna opterećenja pri kojim naprezanja prelaze čvrstoću loma. Do takvih preopterećenja dolazi najčešće zbog udara. Opterećenje koje dovodi do nasilnog loma nekoliko puta je veće od opterećenja koje izaziva lom zbog umornosti

Kombinacija visokog pogonskog opterećenja i velikih razlika u brzinama klizanja na početku i na kraju zahvata ima bitan utjecaj na stvaranje oštećenja čime se znatno smanjuje vijek trajanja zupčanika. Uspostavljanjem ujednačene brzine klizanja po cijelom zahvatu uz pravilno dimenzioniranje para predstavljalo bi rješenje za smanjenje oštećenja zupčanika te povećanja vijeka trajanja i pouzdanosti. Time bi se smanjili troškovi te osigurao stabilan i učinkovit rad sustava.

## 2. Analiza brzine klizanja

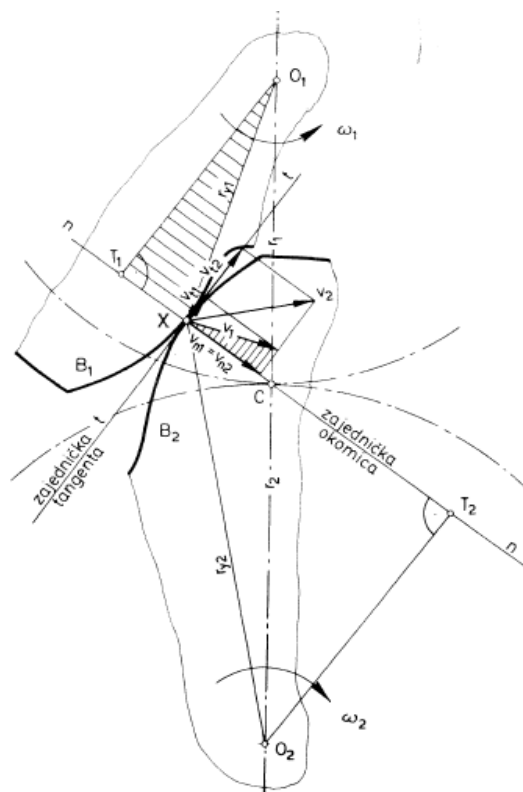
### 2.1 Opći zakon ozubljenja

Bokovi zuba moraju biti oblikovani tako da pri međusobnom valjanju kinematskih kružnica prijenos okretnog gibanja bude ravnomjeran i kontinuiran.

Na slici 5. prikazan je bok  $B_1$  koji se kutnom brzinom  $\omega_1$  okreće oko središta  $O_1$ , a u točki  $X$  dodiruje bok  $B_2$  koji se kutnom brzinom  $\omega_2$  okreće oko središta  $O_2$ . Točka  $X$  je trenutna točka dodira kroz koju prolazi zajednička tangenta ( $n - n$ ) i okomica ( $n - n$ ) oba boka [1]:

$$\overline{O_1X} = r_{y1}, \quad \overline{O_2X} = r_{y2} \quad (2.1)$$

Obodna brzina točke  $X$  u odnosu na  $O_1$  je  $v_1 = r_{y1} \cdot \omega_1$ , dok je obodna brzina točke  $X$  u odnosu na  $O_2$  jednaka  $v_2 = r_{y2} \cdot \omega_2$ . Rastavljanjem  $v_1$  i  $v_2$  na komponente u smjeru zajedničke okomice i zajedničke tangente dobivamo komponente  $v_{n1}$ ,  $v_{n2}$ ,  $v_{t1}$  i  $v_{t2}$ . Da bi se bokovi neprestano dodirivali, njihove normalne komponente  $v_{n1}$  i  $v_{n2}$  moraju biti međusobno jednake. Ako bi komponenta  $v_{n1}$  bila veća od  $v_{n2}$ , to bi značilo da se bok  $B_1$  odvojio od boka  $B_2$ . [1]



Slika 5. Opći zakon ozubljenja [1]

Povlačenjem iz središta  $O_1$  i  $O_2$  normala  $\overline{O_1T_1}$  i  $\overline{O_2T_2}$  na zajedničku okomicu  $\overline{T_1T_2}$ , dobivaju se trokuti  $O_1T_1X$  i  $O_2T_2X$ . U tim trokutima, koristeći dobivene vektore brzina, postavljaju se sljedeći odnosi [1]:

$$\frac{v_{n1}}{v_1} = \frac{\overline{O_1T_1}}{r_{y1}}, \quad v_{n1} = \frac{v_1}{r_{y1}} \cdot \overline{O_1T_1} = \frac{r_{y1} \cdot \omega_1}{r_{y1}} \cdot \overline{O_1T_1} = \omega_1 \cdot \overline{O_1T_1} \quad (2.2)$$

$$\frac{v_{n2}}{v_2} = \frac{\overline{O_2T_2}}{r_{y2}}, \quad v_{n2} = \frac{v_2}{r_{y2}} \cdot \overline{O_2T_2} = \frac{r_{y2} \cdot \omega_2}{r_{y2}} \cdot \overline{O_2T_2} = \omega_2 \cdot \overline{O_2T_2} \quad (2.3)$$

Iz uvjeta  $v_{n1} = v_{n2}$ , proizlazi sljedeće [1]:

$$\omega_1 \cdot \overline{O_1T_1} = \omega_2 \cdot \overline{O_2T_2} \quad \text{ili} \quad \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\overline{O_2T_2}}{\overline{O_1T_1}} = i \quad (2.4)$$

Iz sl. 5. se vidi da zajednička okomica  $\overline{T_1T_2}$  siječe spojnicu centara  $\overline{O_1O_2}$  u točki  $C$  i time se dobivaju dva slična trokuta  $O_1T_1C$  i  $O_2T_2C$ . Iz sličnosti trokuta proizlazi odnos [1]:

$$i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{d_{w2}}{d_{w1}} = \frac{r_{w2}}{r_{w1}} \quad (2.5)$$

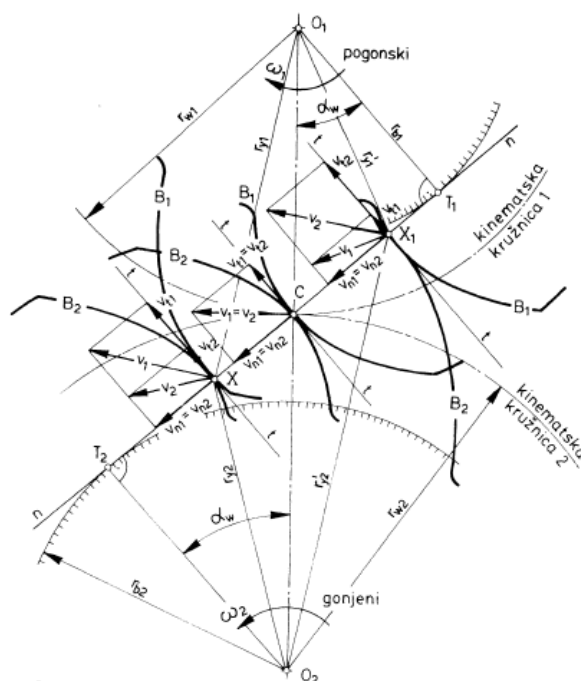
Točka  $C$  mora biti kinematska točka, a kako su  $\overline{O_1C} = r_{w1}$  i  $\overline{O_2C} = r_{w2}$ , radi se o kinematskim, odnosno diobenim kružnicama ( $r_1, r_2$ ). Prema tome, okomica kroz trenutačnu točku dodira dvaju bokova mora razmak osi  $\overline{O_1O_2}$  dijeliti u odnosu prijenosnog omjera. Ovaj zakon naziva se opći zakon ozubljenja i glasi [1]:

"Okomica na tangentu trenutačne točke dodira dvaju bokova mora prolaziti kinematskim polom  $C$ ."

Za ozubljenje su primjenjive sve krivulje čije okomice na tangente trenutačnih točaka dodira prolaze kroz kinematski pol. Drugim riječima, za ozubljenje se mogu koristiti sve krivulje čije okomice na bok sijeku odgovarajuću kinematsku kružnicu i točkama koje se uzastopno slijede u istom smjeru. [1]

Na sl. 8. prikazani su bokovi  $B_1$  i  $B_2$  u tri trenutačne točke dodira, zajedno s odgovarajućim vektorima brzina tih točaka. Iz slike je vidljivo da su u kinematskom polu brzine su  $v_1 = v_2$ ,  $v_{t1} = v_{t2}$  i  $v_{n1} = v_{n2}$ , dok u svakoj trenutačnoj točki dodira komponente  $v_{n1}$  i  $v_{n2}$  moraju biti međusobno jednake ( $v_{n1} = v_{n2} = v_n$ ). [1]

Međutim, u svim ostalim trenutačnim točkama dodira, osim u kinematskom polu, komponente brzina u smjeru tangente ( $v_{t1}$  i  $v_{t2}$ ) nisu međusobno jednake. [1]



Slika 6. Oznake i geometrijski odnosi općeg zakona ozubljenja [1]

## 2.2 Proračun brzine klizanja za bilo koju točku na putu zahvata

Iz sl. 6. vidi se da kod  $v_{n1} = v_{n2}$  komponente brzina u smjeru zajedničke tangente  $v_{t1}$  i  $v_{t2}$  nisu međusobno jednake. U nacrtanom položaju (prije kinematske točke  $C$ )  $v_{t2} > v_{t1}$ . To znači da u tom položaju ne dolazi između bokova samo do valjanja nego i do klizanja. Razlika komponenta brzina u smjeru zajedničke tangente  $v_{t1} - v_{t2}$  je relativna brzina gibanja ( $v_{rel}$ ) boka pogonskog zupčanika po boku gonjenog zupčanika. Za promatrača koji se nalazi na boku gonjenog zupčanika brzina gibanja (zapravo klizanja) boka pogonskog zupčanika jest [1]:

$$v_{rel} = v_{k1/2} = v_{t1} - v_{t2} \quad (2.6)$$

u smjeru prikazanom na sl. 6., a iz sličnosti šrafiranih površina trokuta na sl. 5. proizlazi sljedeće [1]:

$$\frac{v_{t1}}{v_1} = \frac{T_1 X}{r_{y1}}, \quad \frac{v_{t2}}{v_2} = \frac{T_2 X}{r_{y2}} \quad (2.7)$$

$$v_{t1} = v_1 \cdot \frac{T_1 X}{r_{y1}} = r_{y1} \cdot \omega_1 \cdot \frac{T_1 X}{r_{y1}} = \omega_1 \cdot T_1 X \quad (2.8)$$

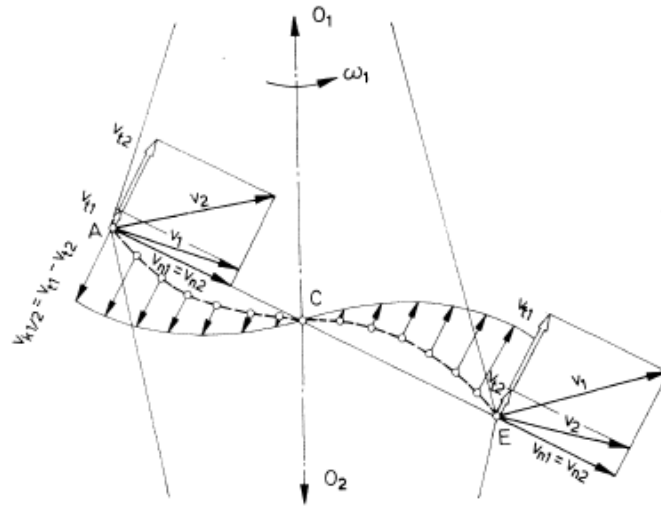
$$v_{t2} = \omega_2 \cdot T_2 X \quad (2.9)$$

Iz sličnosti trokuta  $O_1T_1C$  i  $O_2T_2C$  proizlazi [1]:

$$\frac{T_1X + XC}{T_2X - XC} = \frac{O_1C}{O_2C} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1}$$

$$\omega_1 \cdot T_1X + \omega_1 \cdot XC = \omega_2 \cdot T_2X - \omega_2 \cdot XC$$

$$\omega_1 \cdot T_1X - \omega_2 \cdot T_2X = v_1 - v_2 = -(\omega_1 + \omega_2) \cdot XC \quad (2.10)$$



Slika 7. Relativna brzina klizanja [1]

Tangencijalne komponente brzina se mogu zapisati i na sljedeći način [5]:

$$v_{ty1} = v_n \cdot \tan \alpha_{y1} \quad (2.11)$$

$$v_{ty2} = v_n \cdot \tan \alpha_{y2} \quad (2.12)$$

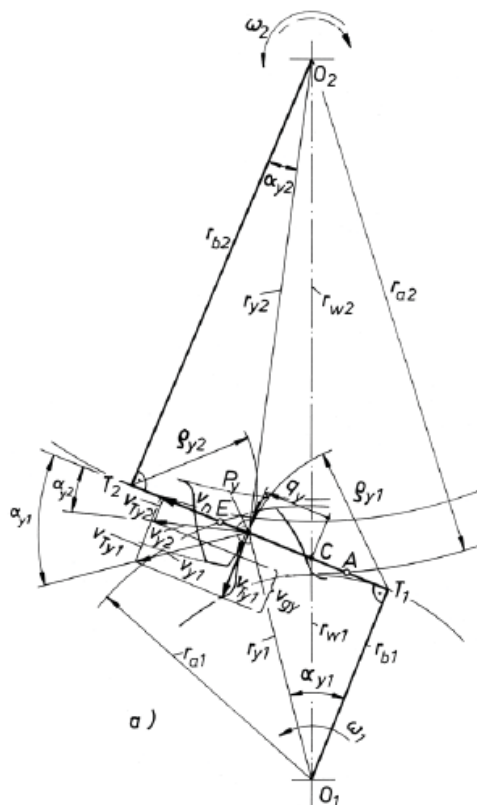
gdje  $y_1$  predstavlja bilo koju točku na zahvatnoj crti boka pogonskog zupčanika, a  $y_2$  istu tu točku samo boka gonjenog zupčanika. [5]

Nadalje, za  $v_n = \omega_1 r_{b1} = -\omega_2 r_{b2}$  i  $\tan \alpha_y = \frac{\rho_y}{r_b}$ , vrijedi sljedeće [5]:

$$v_{ty1} = \omega_1 \rho_{y1} \quad (2.13)$$

$$v_{ty2} = -\omega_2 \rho_{y2} \quad (2.14)$$

gdje  $\rho$  predstavlja radijus zaobljenja u pojedinačnim točkama zahvata. [5]



Slika 8. Komponente brzine zuba za dodir u točki  $P_y$  [5]

Iz navedenih jednadžbi te geometrije pogonskog i gonjenog zupčanika mogu se izvesti izrazi za radijuse zaobljenja u svakoj od glavnih točaka zahvata zubi, točke  $A, B, C, D, E$ , [5]:

$$\rho_{A1} = \overline{T_1A}, \quad \rho_{B1} = \overline{T_1B}, \quad \rho_{C1} = \overline{T_1C}, \quad \rho_{D1} = \overline{T_1D}, \quad \rho_{E1} = \overline{T_1E}, \quad \rho_2,$$

$$\rho_{A1} = a \sin \alpha_w - \sqrt{\left(\frac{d_{a2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{d_{b2}}{2}\right)^2}, \quad \rho_{A2} = a \sin \alpha_w - \rho_{A1}, \quad (2.15) \quad (2.16)$$

$$\rho_{B1} = \sqrt{\left(\frac{d_{a1}}{2}\right)^2 - \left(\frac{d_{b1}}{2}\right)^2} - p_{et}, \quad \rho_{B2} = a \sin \alpha_w - \rho_{B1}, \quad (2.17) \quad (2.18)$$

$$\rho_{C1} = \frac{a \sin \alpha_w}{1+z_2/z_1}, \quad \rho_{C2} = a \sin \alpha_w - \rho_{C1}, \quad (2.19) \quad (2.20)$$

$$\rho_{D1} = \rho_{A1} + p_{et}, \quad \rho_{D2} = a \sin \alpha_w - \rho_{D1}, \quad (2.21) \quad (2.22)$$

$$\rho_{E1} = \sqrt{\left(\frac{d_{a1}}{2}\right)^2 - \left(\frac{d_{b1}}{2}\right)^2}, \quad \rho_{E2} = a \sin \alpha_w - \rho_{E1} \quad (2.23) \quad (2.24)$$

## 2.3 Faktor klizanja i specifično klizanje

Osim poznavanja brzina klizanja za proračune gubitaka snage, učinkovitosti, zagrijavanja te zaribavanja, također su bitne i vrijednosti faktora klizanja  $K_k$  koji predstavlja odnos relativne brzine klizanja prema obodnim brzinama kinematske kružnice [1],

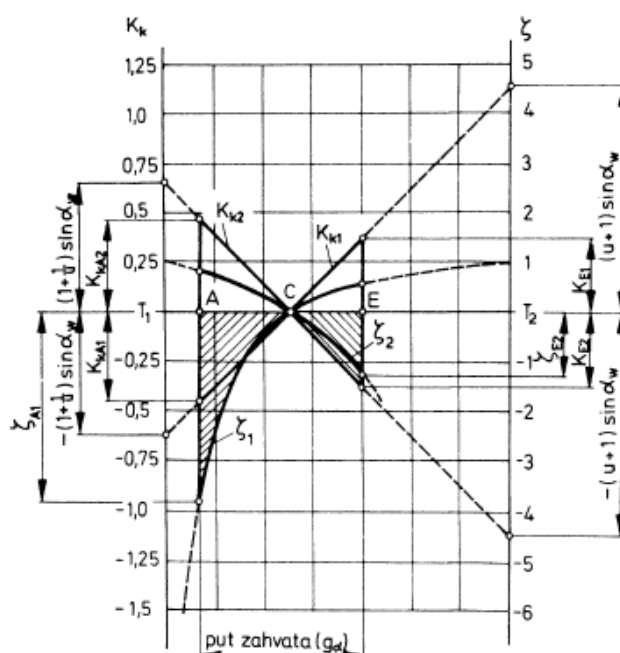
$$K_k = \frac{v_k}{v_w} \quad (2.25)$$

dok je za lokalno zagrijavanje zupčanika i mikro-pitting bitno specifično klizanje  $\zeta$  koje predstavlja omjer relativne brzine klizanja jednog boka prema odgovarajućoj komponenti brzine u smjeru zajedničke tangente [1]:

$$\zeta_1 = \frac{v_{k1}}{v_{t1}} = \frac{v_{t1} - v_{t2}}{v_{t1}} = \frac{\rho_1 \omega_1 - \rho_2 \omega_2}{\rho_1 \omega_1} = \frac{\rho_1 z_2 - \rho_2 z_1}{\rho_1 z_2} \quad (2.26)$$

$$\zeta_2 = \frac{v_{k2}}{v_{t2}} = \frac{v_{t2} - v_{t1}}{v_{t2}} = \frac{\rho_2 \omega_2 - \rho_1 \omega_1}{\rho_2 \omega_2} = \frac{\rho_2 z_1 - \rho_1 z_2}{\rho_2 z_1} \quad (2.27)$$

Na slici 9. prikazan je tok faktora  $K_k$  i specifičnog klizanja  $\zeta_{1,2}$  za par čelnika s vanjskim ozubljenjem. [1]



Slika 9. Faktor klizanja  $K_k$  i specifično klizanje  $\zeta$  [1]



## 2.4 Izbor pomaka profila radi izravnavanja specifičnog klizanja na početku i na kraju zahvata

Obzirom na činjenicu da je razlika tangencijalnih komponenti brzina u kinematskoj točki  $C$  diobenih ili kinematskih kružnica jednaka nuli, znači da je i specifično klizanje u toj točki jednako nula,

$$\zeta_{1C} = \zeta_{2C} = 0 \quad (2.28)$$

što znači da se u točki  $C$  dobiva čisto valjanje. [1]

Prema jednadžbama za specifično klizanje  $\zeta_1$  i  $\zeta_2$ , mogu se izračunati vrijednosti specifičnog klizanja na vršnim točkama tjemena zuba i na krajevima aktivnih dijelova evolventnih bokova na podnožju zuba. [1]

$$\zeta_{E1} = 1 - \frac{\rho_{E2}}{\rho_{E1}} \cdot \frac{1}{u} \quad (\text{tjeme pogonskog zupčanika}) \quad (2.29)$$

$$\zeta_{A2} = 1 - u \cdot \frac{\rho_{A1}}{\rho_{A2}} \quad (\text{tjeme gonjenog zupčanika}) \quad (2.30)$$

$$\zeta_{A1} = 1 - \frac{1}{u} \cdot \frac{\rho_{A2}}{\rho_{A1}} \quad (\text{podnožje pogonskog zupčanika}) \quad (2.31)$$

$$\zeta_{E2} = 1 - u \cdot \frac{\rho_{E1}}{\rho_{E2}} \quad (\text{podnožje gonjenog zupčanika}) \quad (2.32)$$

Da bi se izravnala specifična klizanja na vršnim točkama zupčanika, mora vrijediti jednadžba  $\zeta_{E1} = \zeta_{A2}$  te se uvrštavanjem gornjih vrijednosti dobiva izraz [1]:

$$\frac{\rho_{A2} \cdot \rho_{E2}}{\rho_{A1} \cdot \rho_{E1}} = i^2 = \left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2 = \left(\frac{z_2}{z_1}\right)^2 \quad (2.33)$$

Za izravnavanje specifičnog klizanja na aktivnim djelovima evolvente na podnožju zuba, vrijedi jednadžba  $\zeta_{A1} = \zeta_{E2}$ , što opet daje iste vrijednosti [1]:

$$\frac{\rho_{A2} \cdot \rho_{E2}}{\rho_{A1} \cdot \rho_{E1}} = i^2 = \left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2 = \left(\frac{z_2}{z_1}\right)^2 \quad (2.34)$$

Iz gornjega proizlazi da izravnavanje specifičnog klizanja na vrhu zuba dovodi i do izravnavanja na podnožju zuba. [1]

Ako se vrijednosti  $\rho_{A1}$ ,  $\rho_{A2}$ ,  $\rho_{E1}$ ,  $\rho_{E2}$  izraze pomoću promjera diobenih i temeljnih kružnica, dobiva se [1]:

$$\overline{T_1 T_2} = \rho_{A1} + \rho_{A2} = \rho_{E1} + \rho_{E2} = (r_{b1} + r_{b2}) \tan \alpha_w \quad (2.35)$$

$$\rho_{A1} = \overline{T_1 T_2} - \sqrt{r_{a2}^2 - r_{b2}^2}, \quad \rho_{A2} = \sqrt{r_{a2}^2 - r_{b2}^2} \quad (2.36) \quad (2.37)$$

$$\rho_{E1} = \sqrt{r_{a1}^2 - r_{b1}^2}, \quad \rho_{E2} = \overline{T_1 T_2} - \sqrt{r_{a1}^2 - r_{b1}^2} \quad (2.38) \quad (2.39)$$

Nadalje, vrijednosti polumjera tjemenih i temeljnih kružnica se mogu izraziti pomoću vrijednosti broja zubi, modula, kuta zahvatne crte i faktora pomaka profila [1]:

$$r_{b1} = \frac{m \cdot z_1 \cdot \cos \alpha}{2}, \quad r_{b2} = \frac{m \cdot z_2 \cdot \cos \alpha}{2} \quad (2.40) \quad (2.41)$$

$$r_{a1} = \left(\frac{z_1}{2} + 1 + x_1\right) m, \quad r_{a2} = \left(\frac{z_2}{2} + 1 + x_2\right) m \quad (2.42) \quad (2.43)$$

Uvrštavanjem spomenutih izraza u jednadžbu za izravnavanje specifičnog klizanja mogu se postupkom iteracije u nekom od primjerenih programskih paketa jednostavno dobiti vrijednosti faktora pomaka profila.

## 2.5 Izbor pomaka profila radi povećanja vijeka trajanja

Kako bi se donijeli zaključci o vijeku trajanja zupčanika, moraju se razmotriti veličine dobivene umnošcima brzina klizanja ( $v_k$ ) na raznim točkama zahvata boka zuba i odgovarajuće vrijednosti kontaktnih (Hertzovih) naprezanja boka ( $\sigma_H$ ):

$$L_h = v_k \cdot \sigma_H \quad (2.44)$$

$$v_k = v_{t1} - v_{t2} = \rho_1 \omega_1 - \rho_2 \omega_2 \quad (2.45)$$

$$\sigma_H = \sqrt{\frac{0.175 \cdot F_{bn} \cdot E}{b} \cdot \frac{\rho_1 + \rho_2}{\rho_1 \cdot \rho_2}} \quad (2.46)$$

$F_{bn}$  (N) je normalna sila na bokove,  $E$  (MPa) modul elastičnosti,  $b$  širina bokova,  $\rho_1, \rho_2$  su polumjeri zakrivljenja bokova u pojedinim točkama dodira. [1]

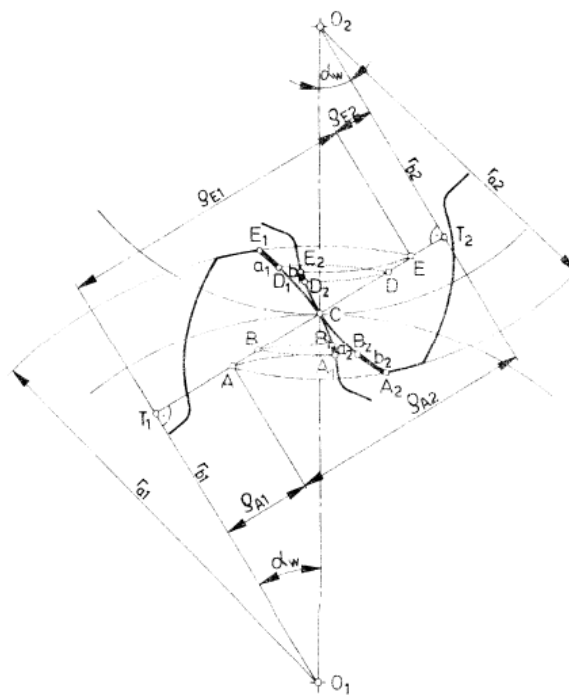
Normalna sila može se izraziti odnosom [1]:

$$F_{bn} = \frac{T}{r_b} = \frac{2T}{z \cdot m \cdot \cos \alpha} \quad (2.47)$$

$T$  je okretni moment koji prenosi zupčanik.

Kako bi vijek trajanja zupčanika bio jednak za početnu i krajnju točku zahvata bokova, potrebno je da umnošci brzine klizanja i kontaktnih naprežanja  $v_k \cdot \sigma_H$  za krajnju i početnu točku zahvata budu međusobno jednaki [1]:

$$v_{kA} \cdot \sigma_{HA} = v_{kE} \cdot \sigma_{HE} \quad (2.48)$$



**Slika 10. Dužine bokova na tjemenu i podnožju ( $A_1, E_1, A_2, E_2$ ) gdje se javljaju maksimalne vrijednosti specifičnog klizanja [1]**

Prema slici 10. [1]:

$$v_{kA} = \rho_{A2} \cdot \omega_2 - \rho_{A1} \cdot \omega_1, \quad v_{kE} = \rho_{E1} \cdot \omega_1 - \rho_{E2} \cdot \omega_2 \quad (2.49)$$

$$\sigma_{HA} = \sqrt{\frac{0.175 \cdot F_{bn} \cdot E}{b} \cdot \frac{\rho_{A1} + \rho_{A2}}{\rho_{A1} \cdot \rho_{A2}}} \quad (2.50)$$

$$\sigma_{HE} = \sqrt{\frac{0.175 \cdot F_{bn} \cdot E}{b} \cdot \frac{\rho_{E1} + \rho_{E2}}{\rho_{E1} \cdot \rho_{E2}}} \quad (2.51)$$

Uvrštavanjem u jednadžbu  $v_{kA} \cdot \sigma_{HA} = v_{kE} \cdot \sigma_{HE}$  i pojednostavljivanjem dolazi se do uvjeta za jednak vijek trajanja [1]:

$$\frac{\rho_{A2}\omega_2 - \rho_{A1}\omega_1}{\sqrt{\rho_{A1}\rho_{A2}}} = \frac{\rho_{E1}\omega_1 - \rho_{E2}\omega_2}{\sqrt{\rho_{E1}\rho_{E2}}} \quad (2.52)$$

Ova jednadžba se može zapisati i kao [1]:

$$\begin{aligned} \omega_2 \left( \frac{\sqrt{\rho_{A2}}}{\sqrt{\rho_{A1}}} + \frac{\sqrt{\rho_{E2}}}{\sqrt{\rho_{E1}}} \right) &= \omega_1 \left( \frac{\sqrt{\rho_{E1}}}{\sqrt{\rho_{E2}}} + \frac{\sqrt{\rho_{A1}}}{\sqrt{\rho_{A2}}} \right) \\ \frac{\omega_2 (\sqrt{\rho_{A2}\rho_{E1}} + \sqrt{\rho_{E2}\rho_{A1}})}{\sqrt{\rho_{A1}\rho_{E1}}} &= \frac{\omega_1 (\sqrt{\rho_{E1}\rho_{A2}} + \sqrt{\rho_{A1}\rho_{E2}})}{\sqrt{\rho_{E2}\rho_{A2}}} \\ \left( \frac{\omega_1}{\omega_2} \right)^2 &= \frac{\rho_{A2}\rho_{E2}}{\rho_{A1}\rho_{E1}} = \left( \frac{Z_2}{Z_1} \right)^2 = i^2 \end{aligned} \quad (2.53)$$

Iz izvedenih izraza, vidi se da je dobiveni izraz identičan već dobivenom izrazu za izjednačavanje specifičnih klizanja na početku i na kraju zahvata zubi. Po tome se dolazi do zaključka da se izravnavanjem specifičnih klizanja dolazi i do izjednačavanja vijeka trajanja zupčanika. [1]

Isti izrazi vrijede i za nulte i za V parove zupčanika. [1]

### 3. Dimenzioniranje nultog para

U ovom će se poglavlju prema ulaznim podacima dimenzionirati nulti par zupčanika bez zahtjeva za standardnim osnim razmakom i odrediti brzine klizanja, iznosi specifičnih klizanja po cijelom zahvatu te faktori klizanja zupčanika.

Ulazni podatci su određeni proizvoljno, tj po dogovoru prema slučaju  $z_1 \geq 14$  i  $z_2 > 14$ .

#### 3.1 Ulazni podatci

$$P = 20 \text{ kW}$$

- Snaga koja se prenosi

$$i = 2,9$$

- Prijenosni omjer

$$n_1 = 25 \text{ s}^{-1}$$

- frekvencija vrtnje pogonskog zupčanika, u  $\text{s}^{-1}$

$$\alpha = 20^\circ$$

- Kut zahvatne linije

$$\lambda = 25$$

- Faktor širine zupčanika

#### 3.2 Podatci o materijalu

Za materijale zupčanika odabran je Č1531 (C45), plameno kaljen.

$$\sigma_{\text{Flim}} = 270 \text{ MPa}$$

- Vrijednost trajne čvrstoće za istosmjerno promjenljivo opterećenje korijena prema [1]

$$\sigma_{\text{Hlim}} = 1100 \text{ MPa}$$

- Vrijednost trajne čvrstoće za Hertzov pritisak prema [1]

$$\nu = 0,3$$

- Poissonov faktor za čelik

$$E = 206000 \text{ MPa}$$

- Modul elastičnosti prema [1]

### 3.3 Izračun orijentacijskog modula zuba

$$z_2 = z_1 \cdot i$$

$$z_2 = 17 \cdot 2,9 = 49,3 \quad (3.1)$$

-  $z_2$  - broj zubi gonjenog zupčanika

Uobičajeno se za broj zubi bira onaj najbliži kako bi novi ostvareni prijenosni omjer bio što bliži zadanom, tako da je za  $z_2$  odabran broj zubi 49.

$$z_2 = 49 \quad (3.2)$$

Prema [1], proračun orijentacijskog modula zupčanika može se računati na opterećenje boka te korijena zuba. Kod zupčanika izrađenog od kaljenog materijala, smatra se da dobro podnose opterećenja na bok, tako da se izračun orijentacijskog modula provodi prvenstveno prema naprezanju u korijenu zuba. Pretpostavlja se da će zupčanik, izrađen od kaljenog materijala, koji je proračunat na naprezanju u korijenu isto tako i podnijeti odgovarajuće opterećenje boka. Naknadno se vrši provjera na oba naprezanja i najčešće je veći faktor sigurnosti na opterećenje u odnosu na savijanje u korijenu.

#### 3.3.1 Orijetacijski modul prema opteretivosti korijena zuba

$$m = \sqrt[3]{\frac{2 \cdot T_1}{z_1 \cdot \lambda \cdot \sigma_{FP}} \cdot Y_F \cdot Y_\epsilon \cdot Y_\beta \cdot K_{F\alpha} \cdot K_{F\beta}}$$

-  $m$  - Orijetacijski modul prema opteretivosti korijena prema [1]

-  $T_1$  - Moment na zupčanicu  $z_1$

$$T_1 = \frac{P}{2 \cdot \pi \cdot n_1} = \frac{20000}{2 \cdot \pi \cdot 25} = 127320 \text{ Nmm} \quad (3.3)$$

-  $Y_F$  - Faktor oblika, orijentacijski  $Y_F = 2,2$  prema [1]

-  $Y_\epsilon$  - Faktor stupnja prekrivanja, orijentacijski  $Y_\epsilon = 1$  prema [1]

- $K_{F\alpha}$  - Faktor raspodjele opterećenja, orijentacijski  $K_{F\alpha} = 1$  prema [1]
- $K_{F\beta}$  - Faktor raspodjele opterećenja po dužini ruba, orijentacijski  $K_{F\beta} = 1$  prema [1]

$$\sigma_{FP} = \frac{\sigma_{Flim}}{S_F} = \frac{270}{2} = 135 \text{ MPa} \quad (3.4)$$

- $\sigma_{FP}$  - dopušteno naprezanje korijena na savijanje, prema [1]
- $S_F$  - faktor sigurnosti na savijanje korijena, orijentacijski uzeto  $S_F = 2$

$$m = \sqrt[3]{\frac{2 \cdot 127320 \cdot 2,2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1}{17 \cdot 25 \cdot 135}} = 2,18 \text{ mm} \quad (3.5)$$

### 3.3.2 Orijetacijski modul prema opteretivosti boka zuba

$$m = \sqrt[3]{\frac{u + 1}{u} \frac{2 \cdot T_1}{z_1^2 \cdot \lambda \cdot \sigma_{HP}^2} \cdot K_{H\alpha} \cdot K_{H\beta} \cdot Z_M^2 \cdot Z_H^2 \cdot Z_\epsilon^2} \quad (3.6)$$

- $m$  - orijentacijski modul za opteretivost boka zuba prema [1]
- $u$  - stvarni prijenosni omjer

$$u = \frac{z_2}{z_1} = \frac{49}{17} = 2,882 \quad (3.7)$$

$$\sigma_{HP} = \frac{\sigma_{Hlim}}{S_H} = \frac{1100}{1,5} = 733,33 \text{ MPa}$$

- $\sigma_{Hlim}$  - dopušteno naprezanje boka prema [1]
- $S_H$  - faktor sigurnosti na opterećenje bokova, orijentacijski uzeto  $S_H = 1,5$  prema [1]
- $K_{H\alpha}$  - faktor raspodjele opterećenja na pojedine zube za opterećenje bokova, orijentacijski uzeto  $K_{H\alpha} = 1$  prema [1]
- $K_{H\beta}$  - faktor raspodjele opterećenja po širini zuba, orijentacijski  $K_{H\beta} = 1$  prema [1]
- $Z_M$  - faktor materijala, orijentacijski za dodir čelik/čelik  $Z_M = 190\sqrt{\text{MPa}}$  prema [1]
- $Z_H$  - faktor oblika, orijentacijski  $Z_H = 2,5$  prema [1]

- $Z_\varepsilon$  - faktor prekrivanja, orijentacijski  $Z_\varepsilon = 1$  prema [1]

$$m = \sqrt[3]{\frac{2,882 + 1}{2,882} \cdot \frac{2 \cdot 127320}{17^2 \cdot 25 \cdot 550^2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 190^2 \cdot 2,5^2 \cdot 1^2} \approx 3,28 \text{ mm} \quad (3.8)$$

Nakon što se odredio orijentacijski modul zubi, bira se standardni modul po kojemu se određuju dimenzije zupčanika. Iako je zadani materijal osjetljiviji na savijanje u korijenu, iteracijskim postupkom se utvrdilo da je za standardni modul potrebno uzeti:

$$m = 4 \text{ mm} \quad (3.9)$$

### 3.4 Određivanje dimenzija zupčanika

$$d_1 = m \cdot z_1 \quad (3.10)$$

$$d_2 = m \cdot z_2 \quad (3.11)$$

- $d_{1,2}$  - diobeni promjer zupčanika prema [1]

$$d_1 = 4 \cdot 17 = 68 \text{ mm}$$

$$d_2 = 4 \cdot 49 = 196 \text{ mm}$$

$$a_d = \frac{d_1 + d_2}{2} \quad (3.12)$$

- $a_d$  – proračunski osni razmak prema [1]

$$a_d = \frac{68 + 196}{2} = 132 \text{ mm}$$

$$h_f = 1,25 \cdot m \quad (3.13)$$

- $h_f$  - visina podnožja zupčanika prema [1]

$$h_f = 1,25 \cdot 4 = 5 \text{ mm}$$

$$d_{b1} = d_1 \cdot \cos(\alpha) \quad (3.14)$$

$$d_{b2} = d_2 \cdot \cos(\alpha) \quad (3.15)$$

- $d_{b1,2}$  – temeljni promjer zupčanika prema [1]

$$d_{b1} = 68 \cdot \cos(20^\circ) = 63,899 \text{ mm}$$

$$d_{b2} = 196 \cdot \cos(20^\circ) = 184,1798 \text{ mm}$$

$$d_{a1} = d_1 + 2 \cdot m \cdot (x_1 + 1) \quad (3.16)$$

$$d_{a2} = d_2 + 2 \cdot m \cdot (x_2 + 1) \quad (3.17)$$



-  $d_{a1,2}$  – tjemeni promjer zupčanika prema [1]

$$d_{a1} = 68 + (0 + 1) \cdot 4 \cdot 2 = 76 \text{ mm}$$

$$d_{a2} = 196 + (0 + 1) \cdot 4 \cdot 2 = 204 \text{ mm}$$

Za ovaj nulti par zupčanika su faktori pomaka profila  $x_1$  i  $x_2$  jednaki 0.

$$p = m \cdot \pi \quad (3.18)$$

-  $p$  - diobeni korak prema [1]

$$p = 4 \cdot \pi = 12,566 \text{ mm}$$

$$p_e = p \cdot \cos(\alpha) \quad (3.19)$$

-  $p_e$  – korak za zahvatnoj crti prema [1]

$$p_e = 4 \cdot \pi \cdot \cos(20) = 11,809 \text{ mm}$$

$$r_{a1,2} = d_{a1,2}/2 \quad (3.20)$$

-  $r_{a1,2}$  – tjemeni radijus

$$r_{b1,2} = d_{b1,2}/2 \quad (3.21)$$

-  $r_{b1,2}$  – temeljni radijus

$$r_{a1} = 76/2 = 38 \text{ mm}$$

$$r_{a2} = 204/2 = 102 \text{ mm}$$

$$r_{b1} = 63,899/2 = 31,9495 \text{ mm}$$

$$r_{b2} = 184,1798/2 = 92,0899 \text{ mm}$$

$$\varepsilon_\alpha = \frac{\sqrt{r_{a1}^2 - r_{b1}^2}}{p \cdot \cos \alpha} + \frac{\sqrt{r_{a2}^2 - r_{b2}^2}}{p \cdot \cos \alpha} - \frac{a \cdot \sin \alpha}{p \cdot \cos \alpha} \quad (3.22)$$

-  $\varepsilon_\alpha$  – stupanj prekrivanja, prema [1]

$$\varepsilon_\alpha = \frac{\sqrt{38^2 - 31,9495^2}}{4 \cdot \pi \cdot \cos(20)} + \frac{\sqrt{102^2 - 92,0899^2}}{4 \cdot \pi \cdot \cos(20)} - \frac{132 \cdot \sin(20)}{4 \cdot \pi \cdot \cos(20)} = 1,633$$

### 3.5 Izračunavanje specifičnih klizanja i faktora klizanja

Kako bi dobili iznose specifičnih klizanja, prvo se trebaju odrediti iznosi radijusa zaobljenja u svakoj točki zahvata.

$$\rho_{A1} = a \sin \alpha_{wt} - \sqrt{\left(\frac{d_{a2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{d_{b2}}{2}\right)^2} = 136 \sin(20) - \sqrt{102^2 - 92,0899^2} = 1,289 \text{ mm} \quad (3.23)$$

$$\rho_{A2} = \sqrt{r_{a2}^2 - r_{b2}^2} = \sqrt{102^2 - 92,0899^2} = 43,857 \text{ mm} \quad (3.24)$$

$$\rho_{B1} = \sqrt{\left(\frac{d_{a1}}{2}\right)^2 - \left(\frac{d_{b1}}{2}\right)^2} - p_{et} = \sqrt{38^2 - 31,9495^2} - 11,809 = 8,764 \text{ mm} \quad (3.25)$$

$$\rho_{B2} = a \sin \alpha_{wt} - \rho_{B1} = 132 \sin(20) - 8,764 = 36,383 \text{ mm} \quad (3.26)$$

$$\rho_{C1} = \frac{a \sin \alpha_{wt}}{1 + z_2/z_1} = \frac{132 \sin(20)}{1 + 2,882} = 11,629 \text{ mm} \quad (3.27)$$

$$\rho_{C2} = a \sin \alpha_{wt} - \rho_{C1} = 132 \sin(20) - 11,629 = 33,518 \text{ mm} \quad (3.28)$$

$$\rho_{D1} = \rho_{A1} + p_{et} = 1,289 + 11,809 = 13,098 \text{ mm} \quad (3.29)$$

$$\rho_{D2} = a \sin \alpha_{wt} - \rho_{D1} = 132 \sin(20) - 13,098 = 32,049 \text{ mm} \quad (3.30)$$

$$\rho_{E1} = \sqrt{\left(\frac{d_{a1}}{2}\right)^2 - \left(\frac{d_{b1}}{2}\right)^2} = \sqrt{38^2 - 31,9495^2} = 20,573 \text{ mm} \quad (3.31)$$

$$\rho_{E2} = a \sin \alpha_{wt} - \rho_{E1} = 132 \sin(20) - 20,573 = 24,574 \text{ mm} \quad (3.32)$$

Nadalje, mogu se izračunati iznosi tangencijalnih komponenti brzina u svakoj točki zahvata za oba zupčanika pomoću:

$$v_{ty1} = \omega_1 \rho_{y1} \quad (3.33)$$

$$v_{ty2} = \omega_2 \rho_{y2} \quad (3.34)$$

$$\omega_1 = 2\pi n_1 = 2 \cdot \pi \cdot 25 = 157,0797 \text{ rad/s} \quad (3.35)$$

$$\omega_2 = 2\pi n_2 = 2 \cdot \pi \cdot 8,3333 = 52,3578 \text{ rad/s} \quad (3.36)$$

$$v_{tA1} = \omega_1 \rho_{A1} = 157,0797 \cdot 1,289 = 202,476 \text{ mm/s}$$

Kada se iznos  $v_{tA1}$  prebaci u m/s, on iznosi 0,2025 m/s

Analogno se, po prethodnim jednadžbama, mogu izračunati i ostali iznosi tangencijalnih komponenti brzina te će njihovi iznosi biti prikazani u tablici 1.

**Tablica 1. Tangencijalne komponente brzina nultoga para**

Tangencijalne komponente brzina, $v_t$ , m/s			
$v_{tA1}$	0,2025	$v_{tA2}$	2,3901
$v_{tB1}$	1,3766	$v_{tB2}$	1,9827
$v_{tC1}$	1,8266	$v_{tC2}$	1,8266
$v_{tD1}$	2,0574	$v_{tD2}$	1,7466
$v_{tE1}$	3,2315	$v_{tE2}$	1,3392

Nakon što su izračunati iznosi tangencijalnih komponenti, mogu se po sljedećem izračunati iznosi specifičnih klizanja po cijelom zahvatu:

$$\zeta_{A1} = \frac{v_{kA1}}{v_{tA1}} = \frac{v_{tA1} - v_{tA2}}{v_{tA1}} = \frac{0,2025 - 2,3901}{0,2025} = -10,8002 \quad (3.37)$$

$$\zeta_{A2} = \frac{v_{kA2}}{v_{tA2}} = \frac{v_{tA2} - v_{tA1}}{v_{tA2}} = \frac{2,3901 - 0,2025}{2,3901} = 0,9153 \quad (3.38)$$

Analogno se po prethodnim jednadžbama mogu izračunati specifične brzine klizanja i za ostale točke zahvata, a iznosi su prikazani u tablici 2.:

**Tablica 2. Specifična klizanja nultoga para**

Specifična klizanja $\zeta$			
$\zeta_{A1}$	-10,8002	$\zeta_{A2}$	0,9153
$\zeta_{B1}$	-0,4403	$\zeta_{B2}$	0,3057
$\zeta_{C1}$	0	$\zeta_{C2}$	0
$\zeta_{D1}$	0,1511	$\zeta_{D2}$	-0,1780
$\zeta_{E1}$	0,5856	$\zeta_{E2}$	-1,4130

Poznavanje iznosa specifičnih klizanja bitno je za optimizaciju performansi zupčanika, kao i vijeka trajanja. Specifična klizanja imaju izravan utjecaj na efikasnost prijenosa snage, jer osim većih vrijednosti klizanja one povećavaju i iznose trenja na površini zuba.

Osim toga, ono omogućuje predviđanje područja najvećih trošenja i habanja zupčanika. Veće vrijednosti specifičnog klizanja dovode do povećanog mehaničkog trošenja, što može uzrokovati prijevremeni kvar sustava. [5]

Po iznosima u tablici 2., vidi se da su najveći iznosi specifičnih klizanja na početku i na kraju zahvata, tj. u točkama zahvata  $\zeta_{A1}$ ,  $\zeta_{E1}$ ,  $\zeta_{A2}$ ,  $\zeta_{E2}$

Kao dodatan faktor, za proračun podmazivanja te analizu efikasnosti i habanja, služi i faktor klizanja  $K_k$ .

On se računa prema sljedećem za točku A1:

$$K_{kA1} = \frac{v_{kA1}}{v_w} \quad (3.39)$$

gdje je  $v_w$  obodna brzina kinematskih kružnica

$$v_w = d_{w1} \cdot \pi \cdot n_1 = d_1 \frac{\cos(\alpha)}{\cos(\alpha_w)} \pi \cdot n_1 \quad (3.40)$$

$$v_w = 68 \frac{\cos(20)}{\cos(20)} \pi \cdot 25 = 5,3407 \text{ m/s} \quad (3.41)$$

$$K_{kA1} = \frac{0,2025 - 2,3901}{5,3407} = -0,4096 \quad (3.42)$$

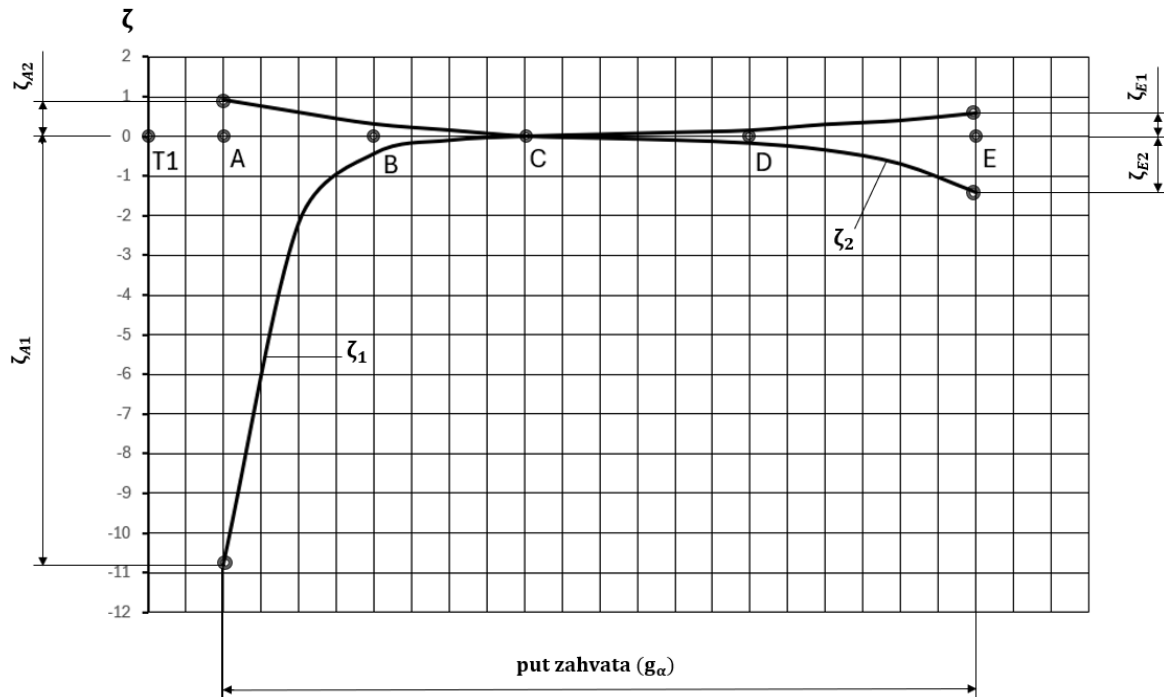
Analogno se mogu dobiti i ostali iznosa faktora te su iznosi prikazani u tablici 3.:

**Tablica 3. Faktori klizanja nultoga para**

Faktori klizanja $K_k$			
$K_{kA1}$	-0,4096	$K_{kA2}$	0,4096
$K_{kB1}$	-0,1135	$K_{kB2}$	0,1135
$K_{kC1}$	0	$K_{kC2}$	0
$K_{kD1}$	0,0582	$K_{kD2}$	-0,0582
$K_{kE1}$	0,3543	$K_{kE2}$	-0,3543

### 3.6 Dijagrami specifičnih klizanja i faktora klizanja

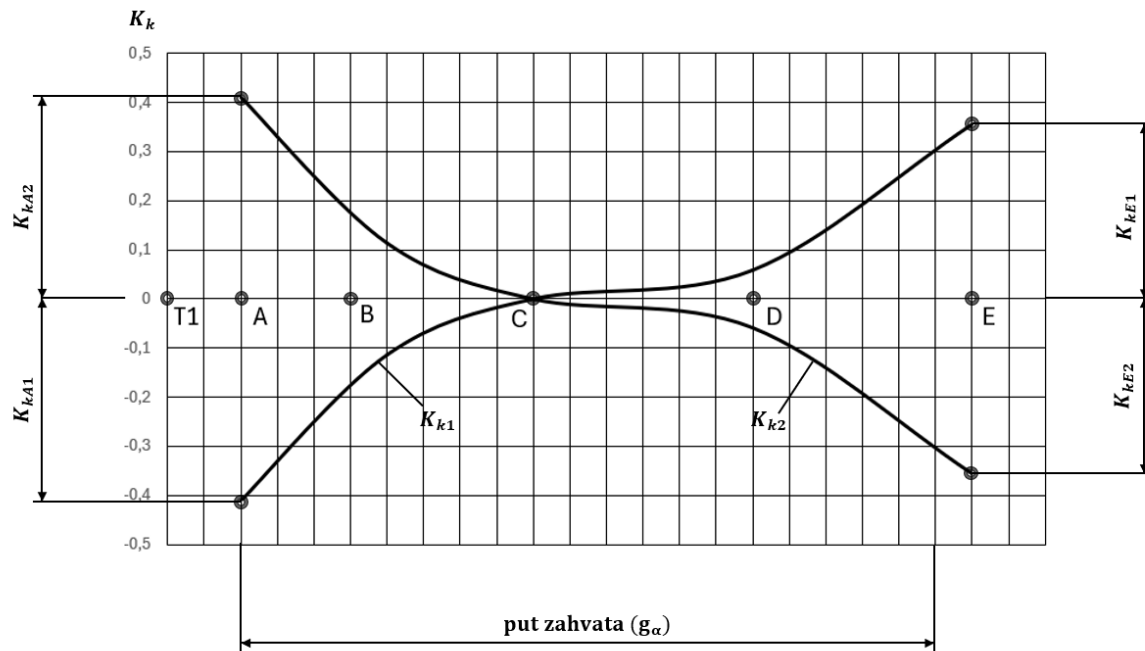
Iz vrijednosti dobivenih računanjem iznosa specifičnih klizanja, u programu Excel napravljeni su dijagrami specifičnog klizanja i faktora klizanja po cijelom zahvatnom putu.



**Slika 11. Dijagram specifičnog klizanja  $\zeta$  po putu zahvata**

Iz dijagrama je također vidljivo da su najveći iznosi specifičnih klizanja u početnoj točki zahvata. Iznosi specifičnog klizanja u točki zahvata A iznose  $\zeta_{A1} = -11,092$  i  $\zeta_{A2} = 0,9173$  dok u točki E iznose  $\zeta_{E1} = 0,5797$  i  $\zeta_{E2} = -1,397$ .

Iz toga proizlazi da će se zupčanici značajno više trošiti u točki A nego u ostatku zahvata, a radi znatno većeg iznosa specifičnog klizanja pogonskog zupčanika u točki zahvata A, može se zaključiti da će imati manji vijek trajanja od gonjenog.



Slika 12. Dijagram faktora klizanja  $K_k$

Što su iznosi faktora klizanja manji, to su zupčanici povoljnije konstruirani u pogledu zagrijavanja i zaribavanja.

## 4. Dimenzioniranje čelnika s ujednačenim brzinama klizanja

U ovom će se poglavlju odrediti faktori pomaka profila kako bi se izjednačile specifične brzine klizanja na početku i na kraju zahvata uz određene uvjete.

### 4.1 Određivanje potrebnih pomaka profila

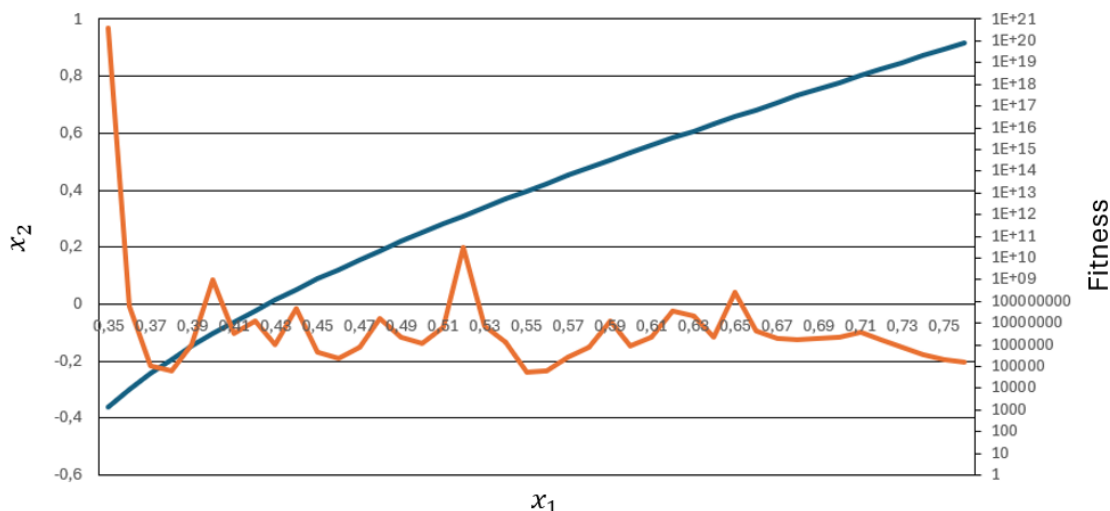
Kako je rečeno u 2. poglavlju (Analiza brzine klizanja), da bi se izjednačile specifične brzine klizanja, potrebno je ostvariti sljedeći uvjet:

$$\frac{\rho_{A2} \cdot \rho_{E2}}{\rho_{A1} \cdot \rho_{E1}} = i^2 = \left(\frac{z_2}{z_1}\right)^2 = \left(\frac{49}{17}\right)^2 = 8,3073 \quad (4.1)$$

Nadalje, ako se  $\rho_{A2}$ ,  $\rho_{E2}$ ,  $\rho_{A1}$ ,  $\rho_{E1}$  raspišu pomoću jednadžbi 2.35, 2.36, 2.37, 2.38, 2.39, 2.40 i 2.41, te se u njih ubace 2.42, 2.43, 2.44 i 2.45 u čijim izrazima imamo faktore pomaka profila  $x_1$  i  $x_2$ , dobije se jedna jednadžba sa dvije nepoznanice ( $x_1$  i  $x_2$ ) čiji iznos mora biti jednak  $i^2$ . Obzirom da postoje dvije nepoznanice, neće postojati samo jedno rješenje kojim će se zadovoljiti uvjet, nego će se iteracijskim postupkom doći to velikog iznosa broja mogućih rješenja.

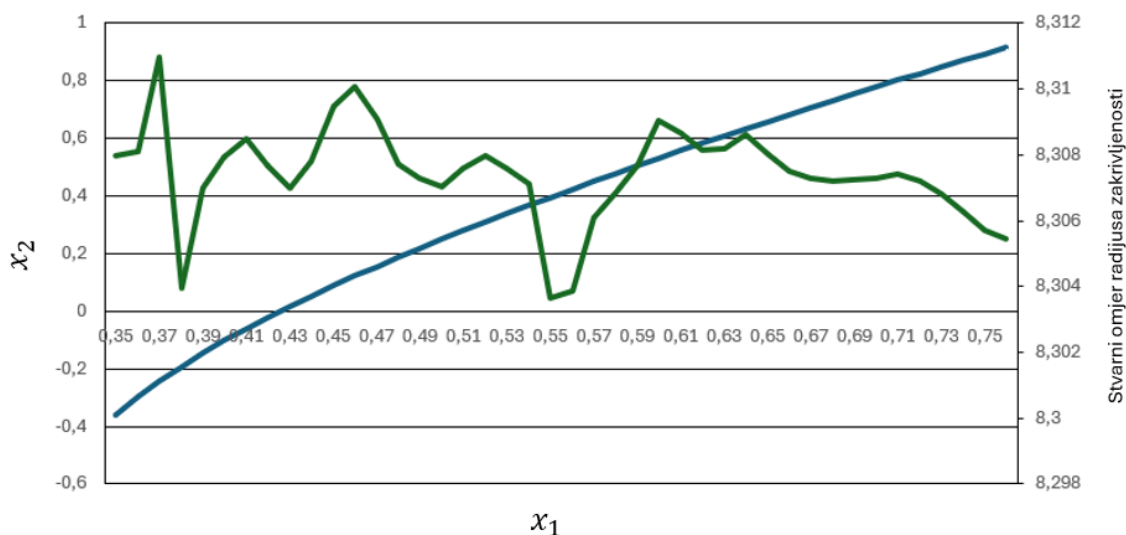
Proces iteracijskog određivanja faktora pomaka profila odrađen je u programu Excel korištenjem funkcije Solver. Solver je jedan od najčešće korištenih alata u programu Excel za rješavanje optimizacijskih problema i jednadžbi. Koristi iterativne metode i napredne algoritme optimizacije poput Simplex metode ili GRG nelinearne metode, što ga čini pouzdanim za rješavanje i linearnih i nelinearnih jednadžbi kako bi pronašao optimalno rješenje na temelju zadanog cilja i ograničenja te uz pravilno postavljene granice, uvjete i parametre daje visoko precizna rješenja.

Nakon provedbe iteracijskog postupka funkcijom Solver, dobiven je niz parova vrijednosti  $x_1$  i  $x_2$  koji zadovoljavaju uvjet ujednačenog klizanja, te su oni prikazani na dijagramu. U samoj primjeni se općenito preporuča korištenje samo pozitivnih vrijednosti za faktor pomaka  $x_1$  te će tako biti određivane i u ovom radu. Također se korištenjem Solvera te ručnim iteriranjem utvrdilo da se dobivaju loši rezultati za područje vrijednosti  $x_1 < 0,35$ , tj. ne može se ostvariti pravilan iznos omjera radijusa zakrivljenosti, što je glavni uvjet za izjednačavanje specifičnog klizanja. Iz toga se može zaključiti da je u području  $x_1 < 0,35$  ili jako malo dobrih rješenja ili ih uopće nema.



**Slika 13. Dijagram faktora pomaka profila i Fitness funkcije**

Gornji dijagram pokazuje iznose parova pomaka profila (plava krivulja) za koje će vrijediti uvjet izjednačenih specifičnih brzina klizanja na početku i na kraju zahvata uz određenu točnost koja se prikazuje pomoću Fitness funkcije (narančasta krivulja), čiji se iznosi mogu vidjeti na desnoj dopunskoj vertikalnoj osi, a ona zapravo predstavlja recipročnu vrijednost kvadratne razlike stvarnog trenutnog omjera  $\frac{\rho_{A2} \cdot \rho_{E2}}{\rho_{A1} \cdot \rho_{E1}}$  te idealnog  $i^2$ .



**Slika 14. Dijagram faktora pomaka profila i stvarnog omjera radijusa zakrivljenosti**

Stvarni omjeri radijusa zakrivljenosti za svaki par pomaka profila se može vidjeti na slici 14.

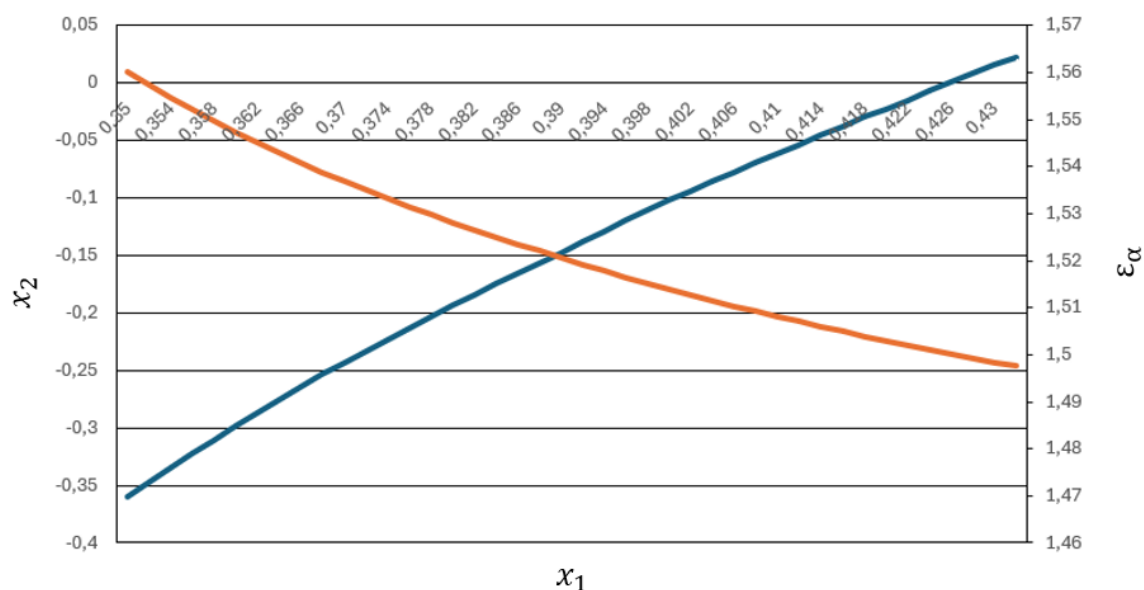


Obzirom da je jedan od uvjeta za odabir pomaka profila taj da suma pomaka profila  $x_1$  i  $x_2$  mora biti manja od 1, može se suziti područje odabira para na  $0,35 < x_1 < 0,565$ . Prema gornjem grafu, za par pomaka  $x_1 = 0,565$  i  $x_2 = 0,437$ , suma pomaka profila prelazi iznos 1.

Kako mogućih parova  $x_1$  i  $x_2$  ima mnogo te sve vrijednosti Fitness funkcije prelaze vrijednosti 100000, čime je svaki od njih zadovoljavajuć, potrebno je suziti njihov odabir uz dodatne uvjete:

- Uvjet da je  $x_1$  manji od granice za graničnu tjemenu debljinu kaljenih zupčanika od  $0,4m$ , granični  $x_1$  u tom slučaju za broj zubi  $z_1 = 17$  i modul  $m = 4$  mm iznosi  $0,5403$  prema [1]
- Uvjet da je stupanj prekrivanja  $\varepsilon_\alpha$  što veći
- Uvjet da se novi osni razmak nalazi od nekog cijelog broja unutar granica dopuštenog odstupanja osi vratila za pretpostavljenu kvalitetu ozubljenja

Sljedeći dijagram prikazuje iznos stupnja prekrivanja za svaki par  $x_1$  i  $x_2$ .



**Slika 15.** Dijagram ovisnosti stupnja prekrivanja  $\varepsilon_\alpha$  o pomacima profila  $x_1$  i  $x_2$

Na gornjem se dijagramu može uočiti da iznosi stupnja prekrivanja (narančasta krivulja) opadaju sa porastom  $x_1$  i  $x_2$ , tako da bi za odabir para  $x_1$  i  $x_2$  bila poželjna što niža vrijednost ako je cilj veći stupanj prekrivanja, odnosno što viša vrijednost ako je cilj povećana nosivost. U svrhu dimenzioniranja para, biti će odabran par  $x_1 = 0,392$  i  $x_2 = -0,138$  jer je za nju suma faktora pomaka veća od 0 te se za te pomake ostvaruje osni razmak iznosa 132,989 mm, što spada unutar granica dopuštenog odstupanja razmaka osi vratila za kvalitetu razmaka vratila 3.

Prema [1], za područje nazivne mjere razmaka vratila  $a$  od 120 do 180 mm i za kvalitetu razmaka vratila 3, odstupanja iznose  $\pm 20 \mu\text{m}$ .

Zaključno, odabrani par čelnika, mora imati faktore pomaka profila  $x_1 = 0,392$  i  $x_2 = -0,138$  kako bi imao izjednačene specifične brzine klizanja na početku i na kraju zahvata.

## 4.2 Određivanje dimenzija zupčanika

$$d_1 = 4 \cdot 17 = 68 \text{ mm} \quad (4.2)$$

$$d_2 = 4 \cdot 49 = 196 \text{ mm} \quad (4.3)$$

$$a_d = \frac{68+196}{2} = 132 \text{ mm} \quad (4.4)$$

$$d_{b1} = 68 \cdot \cos(20^\circ) = 63,899 \text{ mm} \quad (4.5)$$

$$d_{b2} = 196 \cdot \cos(20^\circ) = 184,1798 \text{ mm} \quad (4.6)$$

$$d_{a1} = d_1 + 2 \cdot m \cdot (x_1 + 1) = 68 + 2 \cdot 4 \cdot (0,392 + 1) = 79,136 \text{ mm} \quad (4.7)$$

$$d_{a2} = d_2 + 2 \cdot m \cdot (x_2 + 1) = 196 + 2 \cdot 4 \cdot (-0,138 + 1) = 202,896 \text{ mm} \quad (4.8)$$

$$p = m \cdot \pi = 4 \cdot \pi = 12,566 \text{ mm} \quad (4.9)$$

$$p_e = 4 \cdot \pi \cdot \cos(\alpha) = 11,809 \text{ mm} \quad (4.10)$$

$$ev\alpha_w = \frac{2 \cdot \tan\alpha \cdot (x_1 + x_2)}{z_1 + z_2} + ev\alpha = \frac{2 \cdot \tan(20) \cdot (0,392 - 0,138)}{17 + 49} + ev20 = 0,017706 \quad (4.11)$$

$$\alpha_w = 21,139^\circ \quad (4.12)$$

$$a_w = a_d \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha_w} = 132 \frac{\cos(20)}{\cos(21,139)} = 132,989 \text{ mm} \quad (4.13)$$

-  $a_w$  - kinematski osni razmak

$$r_{a1} = 79,136/2 = 39,568 \text{ mm} \quad (4.14)$$

$$r_{a2} = 202,896/2 = 101,448 \text{ mm} \quad (4.15)$$

$$r_{b1} = 63,899/2 = 31,9495 \text{ mm} \quad (4.16)$$

$$r_{b2} = 184,1798/2 = 92,0899 \text{ mm} \quad (4.17)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_\alpha &= \frac{\sqrt{r_{a1}^2 - r_{b1}^2}}{p \cdot \cos \alpha} + \frac{\sqrt{r_{a2}^2 - r_{b2}^2}}{p \cdot \cos \alpha} - \frac{a \cdot \sin \alpha_w}{p \cdot \cos \alpha} \quad (4.18) \\ &= \frac{\sqrt{39,568^2 - 31,9495^2}}{4 \cdot \pi \cdot \cos(20)} + \frac{\sqrt{101,448^2 - 92,0899^2}}{4 \cdot \pi \cdot \cos(20)} - \frac{132,99 \cdot \sin(21,1393)}{4 \cdot \pi \cdot \cos(20)} \\ &= 1,519 \end{aligned}$$

### 4.3 Izračunavanje specifičnih klizanja i faktora klizanja

Prvo se trebaju odrediti iznosi radijusa zakrivljenja:

$$\begin{aligned} \rho_{A1} &= a \sin \alpha_{wt} - \sqrt{\left(\frac{d_{a2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{d_{b2}}{2}\right)^2} \quad (4.19) \\ &= 132,99 \sin(21,1393) - \sqrt{101,448^2 - 92,0899^2} = 5,4035 \text{ mm} \end{aligned}$$

$$\rho_{A2} = \sqrt{r_{a2}^2 - r_{b2}^2} = \sqrt{101,448^2 - 92,0899^2} = 42,5576 \text{ mm} \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned} \rho_{B1} &= \sqrt{\left(\frac{d_{a1}}{2}\right)^2 - \left(\frac{d_{b1}}{2}\right)^2} - p_{et} = \sqrt{39,568^2 - 31,9495^2} - 11,809 \quad (4.21) \\ &= 11,534 \text{ mm} \end{aligned}$$

$$\rho_{B2} = a \sin \alpha_{wt} - \rho_{B1} = 132,99 \sin(21,1393) - 8,764 = 36,4276 \text{ mm} \quad (4.22)$$

$$\rho_{C1} = \frac{a \sin \alpha_{wt}}{1 + z_2/z_1} = \frac{132,99 \sin(21,1393)}{1 + 2,882} = 12,3536 \text{ mm} \quad (4.23)$$

$$\rho_{C2} = a \sin \alpha_{wt} - \rho_{C1} = 132,99 \sin(21,1393) - 11,629 = 35,6075 \text{ mm} \quad (4.24)$$

$$\rho_{D1} = \rho_{A1} + p_{et} = 1,248 + 11,809 = 17,2121 \text{ mm} \quad (4.25)$$

$$\rho_{D2} = a \sin \alpha_{wt} - \rho_{D1} = 132,99 \sin(21,1393) - 13,057 = 30,7490 \text{ mm} \quad (4.26)$$

$$\rho_{E1} = \sqrt{\left(\frac{d_{a1}}{2}\right)^2 - \left(\frac{d_{b1}}{2}\right)^2} = \sqrt{39,568^2 - 31,9495^2} = 23,3421 \text{ mm} \quad (4.27)$$

$$\rho_{E2} = a \sin \alpha_{wt} - \rho_{E1} = 132 \sin(21,1393) - 20,573 = 24,6190 \text{ mm} \quad (4.28)$$

Nadalje, mogu se izračunati iznosi tangencijalnih komponenti brzina u svakoj točki zahvata za oba zupčanika:

$$v_{tA1} = \omega_1 \rho_{A1} = 157,0797 \cdot 5,4035 = 0,8488 \text{ m/s} \quad (4.29)$$

Analogno se, po prethodnim jednadžbama, mogu izračunati i ostali iznosi tangencijalnih komponenti brzina te će njihovi iznosi biti prikazani u tablici 4.

**Tablica 4. Iznosi tangencijalnih komponenti brzina para čelnika sa ujednačenim specifičnim klizanjima**

Tangencijalne komponente brzina, $v_t$ , m/s			
$v_{tA1}$	0,8488	$v_{tA2}$	2,3193
$v_{tB1}$	1,8117	$v_{tB2}$	1,9852
$v_{tC1}$	1,9405	$v_{tC2}$	1,9405
$v_{tD1}$	2,7037	$v_{tD2}$	1,6757
$v_{tE1}$	3,6666	$v_{tE2}$	1,3417

Nakon što su izračunati iznosi tangencijalnih komponenti, mogu se izračunati iznosi specifičnih klizanja po cijelom zahvatu:

$$\zeta_{A1} = \frac{v_{kA1}}{v_{tA1}} = \frac{v_{tA1} - v_{tA2}}{v_{tA1}} = \frac{0,8488 - 2,3193}{0,8488} = -1,7324 \quad (4.30)$$

$$\zeta_{A2} = \frac{v_{kA2}}{v_{tA2}} = \frac{v_{tA2} - v_{tA1}}{v_{tA2}} = \frac{2,3193 - 0,8488}{2,3193} = 0,6340 \quad (4.31)$$

Analogno se mogu dobiti i ostali iznosi specifičnih klizanja te se njihovi iznosi smješteni u tablicu 5.

**Tablica 5. Iznosi specifičnih klizanja za par čelnika sa izjednačenim specifičnim klizanjem na početku i na kraju zahvata**

Specifična klizanja $\zeta$			
$\zeta_{A1}$	-1,7324	$\zeta_{A2}$	0,6340
$\zeta_{B1}$	-0,0958	$\zeta_{B2}$	0,0874
$\zeta_{C1}$	0	$\zeta_{C2}$	0
$\zeta_{D1}$	0,3802	$\zeta_{D2}$	-0,6134
$\zeta_{E1}$	0,6341	$\zeta_{E2}$	-1,7328

Prema gornjoj tablici, vidljivo je da su gotovo pa izjednačena specifična klizanja u točkama zahvata  $\zeta_{A1}$  i  $\zeta_{E2}$ , te u točkama  $\zeta_{E1}$  i  $\zeta_{A2}$ . Time je ispunjen uvjet za izjednačavanje klizanja na početku i na kraju zahvata, čime su također i izjednačeni vijekovi trajanja čelnika.

Za izračun faktora klizanja  $K_k$ , potrebno je izračunati sljedeće:

$$K_{kA1} = \frac{v_{kA1}}{v_w} \quad (4.32)$$

gdje je  $v_w$  obodna brzina kinematskih kružnica.

$$v_w = d_{w1} \cdot \pi \cdot n_1 = d_1 \frac{\cos(\alpha)}{\cos(\alpha_w)} \pi \cdot n_1 \quad (4.33)$$

$$v_w = 68 \frac{\cos(20)}{\cos(21,1393)} \pi \cdot 25 = 5,3807 \text{ m/s} \quad (4.34)$$

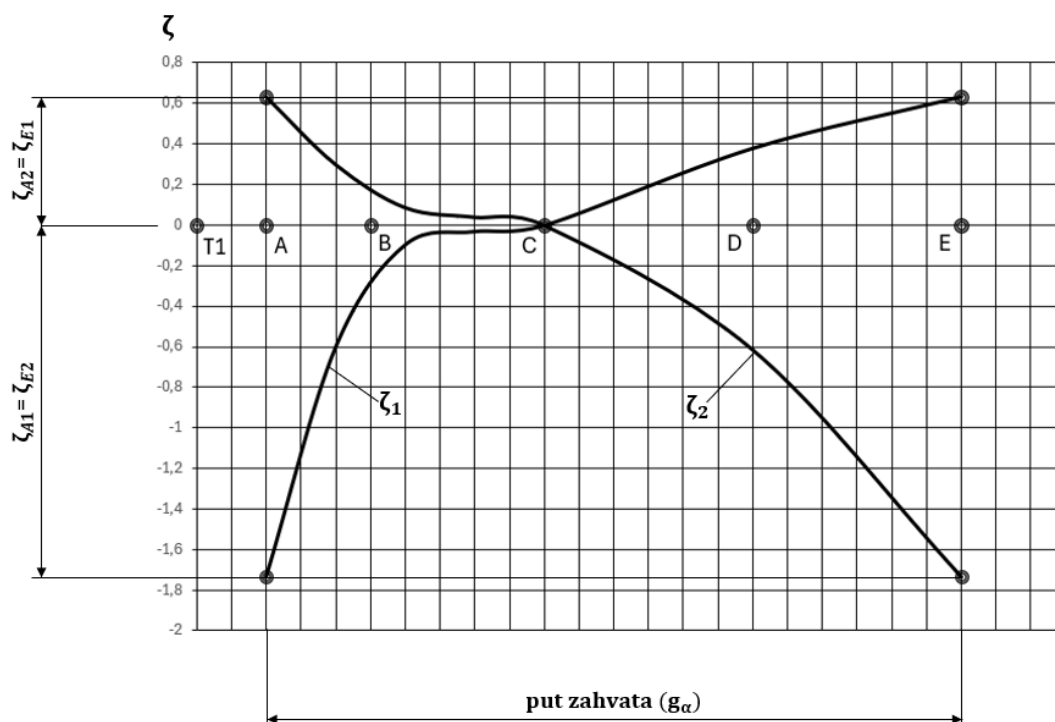
$$K_{kA1} = \frac{0,8488 - 2,3193}{5,3807} = -0,4096 \quad (4.35)$$

Analogno su dobiveni iznosi za svaku točku zahvata te prikazani u tablici 6.

**Tablica 6. Faktori klizanja za par čelnika sa izjednačenim specifičnim klizanjem na početku i na kraju zahvata**

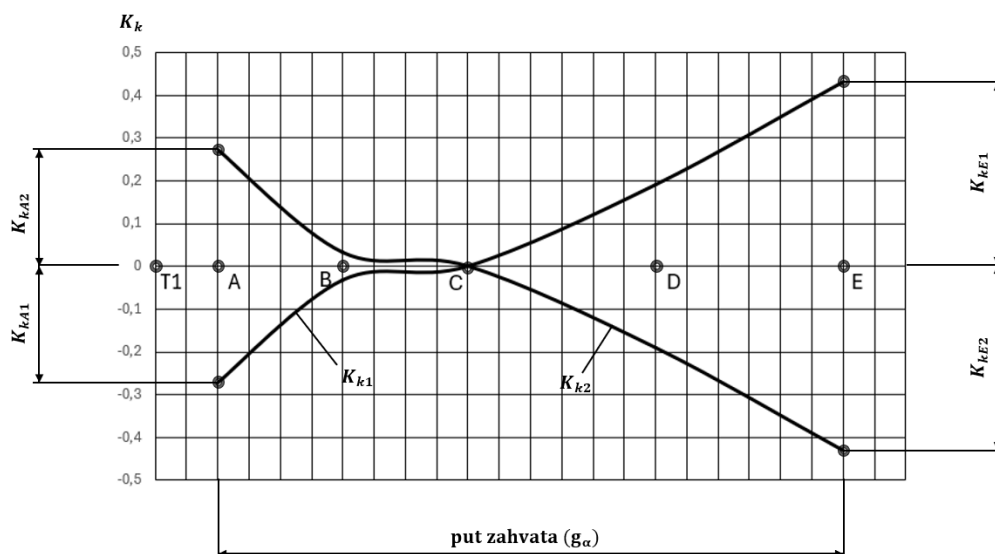
Faktori klizanja $K_k$			
$K_{kA1}$	-0,2733	$K_{kA2}$	0,2733
$K_{kB1}$	-0,0322	$K_{kB2}$	0,0322
$K_{kC1}$	0	$K_{kC2}$	0
$K_{kD1}$	0,1910	$K_{kD2}$	-0,1910
$K_{kE1}$	0,4321	$K_{kE2}$	-0,4321

Nove dobivene vrijednosti specifičnih klizanja i faktora klizanja po cijelom putu zahvata biti će prikazani pomoću dijagrama:



**Slika 16. Dijagram ujednačenih specifičnih klizanja**

Na dijagramu je vidljivo da su izjednačena specifična klizanja na početku i na kraju zahvata.



**Slika 17. Dijagram faktora klizanja para čelnika s ujednačenim specifičnim klizanjem**

## 5. Analiza i usporedba rezultata

Za usporedbu rezultata, iznosi specifičnih klizanja nultog i V para na početku i na kraju zahvata, biti će prikazani pomoću tablice:

**Tablica 7. Usporedba iznosa specifičnih klizanja**

Spefična klizanja nultog para				Specifična klizanja V para			
$\zeta_{A1}$	-10,8002	$\zeta_{A2}$	0,9153	$\zeta_{A1}$	-1,7324	$\zeta_{A2}$	0,6340
$\zeta_{E1}$	0,5856	$\zeta_{E2}$	-1,4130	$\zeta_{E1}$	0,6341	$\zeta_{E2}$	-1,7328

Kao što je vidljivo u gornjoj tablici, najveći iznos specifičnog klizanja nalazi se u točki zahvata **A** nultoga para i iznosi -10,8002.

Za par sa izjednačenim klizanjem, maksimalni iznosi klizanja su u točkama **A1** i **E1**, gdje su  $\zeta_{A1} \approx \zeta_{E2}$  i iznose -1,7328.

Obzirom na to da su iznosi specifičnih klizanja V para izjednačeni te manji na početku i na kraju zahvata od specifičnih klizanja nultoga para, može se zaključiti da će kod V para doći do smanjenja trošenja, poboljšane učinkovitosti, te smanjenja mikro-rupičenja i zaribavanja.

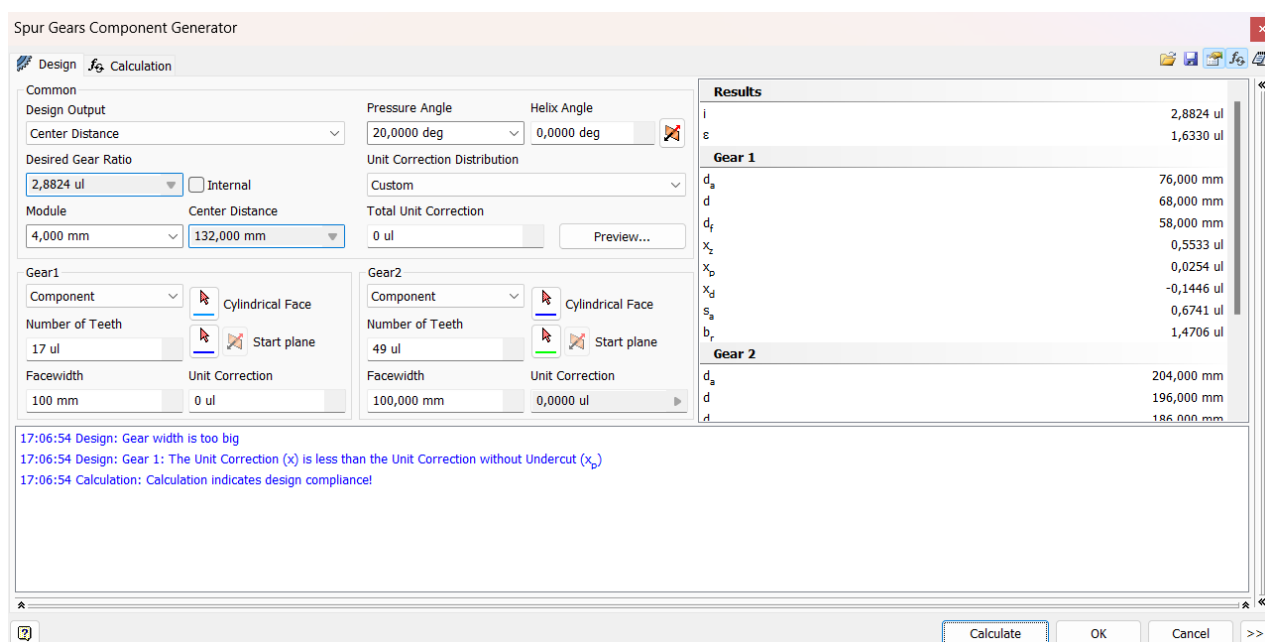
Nadalje, može se usporediti i stupanj prekrivanja, koji za nulti par iznosi  $\varepsilon_\alpha = 1,633$ , dok za par sa izjednačenim klizanjem on iznosi  $\varepsilon_\alpha = 1,519$ , iz čega se može zaključiti da će par čelnika sa izjednačenim klizanjem imati nešto bučniji rad te manju mirnoću hoda prema [1].

## 6. Proračun čvrstoće zupčanika

Proračun čvrstoće zupčanika biti će proveden pomoću programa Autodesk Inventor Professional 2025 koji u sebi ima ugrađen proračun nosivosti prema ISO 6336:1996.

### 6.1 Proračun čvrstoće nultoga para

Prvo će biti proračunat nulti zupčanik. Unošenjem početnih uvjeta u program, dolazi se do sljedećih rezultata:



Slika 18. Unošenje podataka nultoga para



Spur Gears Component Generator

Design Calculation

Method of Strength Calculation  
ISO 6336:1996

Loads

	Gear 1	Gear 2
Power	P 20 kW	19,600 kW
Speed	n 1500,00 rpm	520,41 rpm
Torque	T 127,324 N m	359,653 N m
Efficiency	$\eta$ 0,980 ul	

Material Values

Gear 1  User material

Gear 2  User material

	Gear 1	Gear 2
Bending Fatigue Limit	$\sigma_{Flim}$ 270,0 MPa	270,0 MPa
Contact Fatigue Limit	$\sigma_{Hlim}$ 1100,0 MPa	1100,0 MPa
Modulus of Elasticity	E 206000 MPa	206000 MPa
Poisson's Ratio	$\mu$ 0,300 ul	0,300 ul
Heat Treatment	2 ul	2 ul

Required Life  $L_h$  50000 hr

Factors Accuracy

17:06:54 Design: Gear width is too big  
17:06:54 Design: Gear 1: The Unit Correction (x) is less than the Unit Correction without Undercut  
17:06:54 Calculation: Calculation indicates design compliance!

Calculate OK Cancel <<

Type of Load Calculation  
 Power, Speed --> Torque  
 Torque, Speed --> Power  
 Power, Torque --> Speed

Type of Strength Calculation  
Check Calculation

Limit Values

	Contact	Bending
Minimal Factor of Safety	1,200 ul	1,300 ul

Results

$F_t$	3744,822 N
$F_r$	1363,004 N
$F_a$	0,000 N
$F_n$	3985,157 N
v	5,341 mps
$n_{Et}$	21237,916 rpm
<b>Gear 1</b>	
$S_H$	1,349 ul
$S_F$	3,199 ul
$S_{Hst}$	1,245 ul
$S_{Fst}$	7,015 ul
<b>Gear 2</b>	
$S_H$	1,491 ul
$S_F$	3,657 ul
$S_{Hst}$	1,376 ul
$S_{Fst}$	7,945 ul

Slika 19. Proračun nosivosti nultoga para

Factors

Factors of additional Load

	Contact	Bending
Application Factor	$K_A$ 1,200 ul	
Dynamic Factor	$K_{H\beta}$ 1,144 ul	1,144 ul
Face Load Factor	$K_{H\alpha}$ 2,452 ul	2,131 ul
Transverse Load Factor	$K_{H\alpha\alpha}$ 1,083 ul	1,083 ul
One-time Overloading Factor	$K_{AS}$ 1,000 ul	

Factors for Contact

	Gear 1	Gear 2
Zone Factor	$Z_H$ 2,495 ul	
Contact Ratio Factor	$Z_E$ 0,888 ul	
Single Pair Tooth Contact Factor	$Z_B$ 1,106 ul	1,000 ul
Life Factor	$Z_N$ 1,000 ul	1,000 ul
Lubricant Factor	$Z_L$ 0,958 ul	
Roughness Factor	$Z_R$ 1,000 ul	
Velocity Factor	$Z_V$ 0,978 ul	
Helix Angle Factor	$Z_\beta$ 1,000 ul	
Size Factor	$Z_X$ 1,000 ul	1,000 ul
Work Hardening Factor	$Z_W$ 1,000 ul	

Factors for Bending

Form Factor	$Y_{Fa}$ 2,986 ul	2,348 ul
Stress Correction Factor	$Y_{Sa}$ 1,532 ul	1,720 ul
Teeth with Grinding Notches Factor	$Y_{Sag}$ 1,000 ul	1,000 ul
Helix Angle Factor	$Y_\beta$ 1,000 ul	
Contact Ratio Factor	$Y_E$ 0,709 ul	
Alternating Load Factor	$Y_A$ 1,000 ul	1,000 ul
Production Technology Factor	$Y_T$ 1,000 ul	1,000 ul
Life Factor	$Y_N$ 1,000 ul	1,000 ul
Notch Sensitivity Factor	$Y_S$ 1,140 ul	1,151 ul
Size Factor	$Y_X$ 1,000 ul	1,000 ul
Tooth Root Surface Factor	$Y_R$ 1,000 ul	

Results

$Z_E$	189,812 ul
<b>Gear 1</b>	
$S_H$	1,349 ul
$S_F$	3,199 ul
$S_{Hst}$	1,245 ul
$S_{Fst}$	7,015 ul
<b>Gear 2</b>	
$S_H$	1,491 ul
$S_F$	3,657 ul
$S_{Hst}$	1,376 ul
$S_{Fst}$	7,945 ul

OK Cancel

Slika 20. Pregled vrijednosti faktora

Iz gornjih slika, za unaprijed određene ulazne podatke, vidljivo je da proračun čvrstoće nultoga para čelnika zadovoljava, te su za pogonski zupčanik dobiveni faktor sigurnosti na opterećenje bokova  $S_{H1} = 1,349$  te faktor sigurnosti na savijanje korijena  $S_{F1} = 3,199$ , a za gonjeni  $S_{H2} = 1,491$  i  $S_{F2} = 3,657$ .

## 6.2 Proračun nosivosti para čelnika sa ujednačenim specifičnim brzinama klizanja

Dinamička izdržljivost bokova ovisi direktno o njihovoj hrapavosti. Hrapavost bokova smanjuje površinu nalijeganja i time smanjuje površinu koja mora prenositi opterećenje, što dovodi do povećanja opterećenja bokova. [1]

Ako se smanji hrapavost površine zupčanika, time će se povećati i otpornost na zaribavanje te smanjiti gubitci u zahvatu. Iz toga razloga odabrana je kvaliteta obrade površine IT6, kojom se, prema [1], finim brušenjem postiže hrapavost od  $3,5 \mu m$ .

Nadalje, odabirom manje površinske hrapavosti, čime se povećala nosivost bokova, može se prema ISO 6336-2:2006 odrediti faktor utjecaja hrapavosti  $Z_R$ .

Faktor utjecaja hrapavosti se prema [6] može očitati kao funkcija hrapavosti površine bokova zubiju, radijusa relativne zakrivljenosti  $\rho_{red}$  i  $\sigma_{Hlim}$  vrijednosti mekšeg materijala para čelnika ( $\sigma_{Hlim} = 1100 \text{ N/mm}^2$  za materijal oba zupčanika)

$$R_z = \frac{R_{z1} + R_{z2}}{2} \quad (6.1)$$

-  $R_z$  – srednja visina hrapavosti za pogonski i gonjeni zupčanik,  $\mu m$  [6]

$$R_z = \frac{3,5+3,5}{2} = 3,5 \mu m \quad (6.2)$$

$$R_{z10} = R_z \cdot \sqrt[3]{\frac{10}{\rho_{red}}} \quad (6.3)$$

-  $R_{z10}$  - relativna srednja visina hrapavosti,  $\mu m$  [6]

-  $\rho_{red}$  – radijus relativne zakrivljenosti, mm [6]

$$\rho_{red} = \rho \cdot \frac{\rho_1 \cdot \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} \quad (6.4)$$

$$\rho_{1,2} = 0,5 \cdot d_{b1,2} \cdot \tan \alpha_w \quad (6.5)$$

$$\rho_1 = 0,5 \cdot 63,899 \cdot \tan(21,1393) = 12,353 \text{ mm}$$

$$\rho_2 = 0,5 \cdot 184,18 \cdot \tan(21,1393) = 35,607 \text{ mm}$$

$$\rho = \rho_{A1} = 5,403 \text{ mm}$$

$$\rho_{red} = \rho \cdot \frac{\rho_1 \cdot \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} = 5,403 \cdot \frac{12,353 \cdot 35,607}{12,353 + 35,607} = 49,552 \text{ mm}$$

$$R_{Z10} = R_z \cdot \sqrt[3]{\frac{10}{\rho_{red}}} = 3,5 \cdot \sqrt[3]{\frac{10}{49,552}} = 2,053 \text{ } \mu\text{m}$$

Nadalje, faktor  $Z_R$  se može izračunati po sljedećem [6]:

$$Z_R = \left( \frac{3}{R_{Z10}} \right)^{C_{ZR}} \quad (6.6)$$

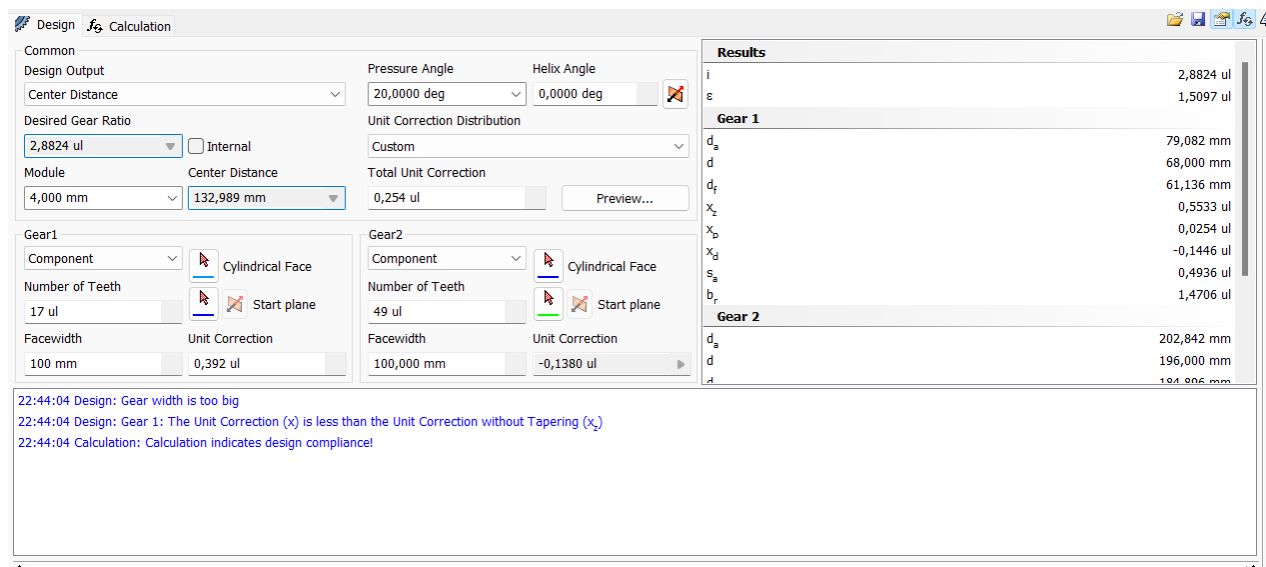
gdje je  $C_{ZR}$  za područje  $850 \text{ N/mm}^2 \leq \sigma_{Hlim} \leq 1200 \text{ N/mm}^2$  jednak:

$$C_{ZR} = 0,32 - 0,0002\sigma_{Hlim} \quad (6.7)$$

$$C_{ZR} = 0,32 - 0,0002 \cdot 1100 = 0,1 \quad (6.8)$$

$$Z_R = \left( \frac{3}{R_{Z10}} \right)^{C_{ZR}} = \left( \frac{3}{2,053} \right)^{0,1} = 1,0387 \quad (6.9)$$

Nadalje se sa dobivenim faktorom  $Z_R$  može pristupiti proračunu nosivosti  $V$  para.



Slika 21. Unošenje podataka  $V$  para

Factors of additional Load		Contact	Bending
Application Factor		$K_A$ 1,200 ul	
Dynamic Factor	$K_{Hv}$	1,144 ul	1,144 ul
Face Load Factor	$K_{H\beta}$	2,375 ul	2,075 ul
Transverse Load Factor	$K_{H\alpha}$	1,010 ul	1,010 ul
One-time Overloading Factor		$K_{AS}$ 1,000 ul	

Factors for Contact		Gear 1	Gear 2
Zone Factor		$Z_H$ 2,420 ul	
Contact Ratio Factor		$Z_e$ 0,911 ul	
Single Pair Tooth Contact Factor	$Z_B$	1,025 ul	1,000 ul
Life Factor	$Z_N$	1,000 ul	1,000 ul
Lubricant Factor		$Z_L$ 0,958 ul	
Roughness Factor		$Z_R$ 1,0387 ul	
Velocity Factor		$Z_V$ 0,978 ul	
Helix Angle Factor		$Z_\beta$ 1,000 ul	
Size Factor	$Z_X$	1,000 ul	1,000 ul
Work Hardening Factor		$Z_{WV}$ 1,000 ul	

Factors for Bending		Gear 1	Gear 2
Form Factor	$Y_{Fa}$	2,334 ul	2,434 ul
Stress Correction Factor	$Y_{Sa}$	1,745 ul	1,665 ul
Teeth with Grinding Notches Factor	$Y_{Ssg}$	1,000 ul	1,000 ul
Helix Angle Factor		$Y_\beta$ 1,000 ul	
Contact Ratio Factor		$Y_e$ 0,747 ul	
Alternating Load Factor	$Y_A$	1,000 ul	1,000 ul
Production Technology Factor	$Y_T$	1,000 ul	1,000 ul
Life Factor	$Y_N$	1,000 ul	1,000 ul
Notch Sensitivity Factor	$Y_S$	1,162 ul	1,144 ul
Size Factor	$Y_X$	1,000 ul	1,000 ul
Tooth Root Surface Factor		$Y_R$ 1,000 ul	

Results	
$Z_E$	189,812 ul
<b>Gear 1</b>	
$S_H$	1,604 ul
$S_F$	3,855 ul
$S_{Hst}$	1,425 ul
$S_{Fst}$	8,293 ul
<b>Gear 2</b>	
$S_H$	1,643 ul
$S_F$	3,816 ul
$S_{Hst}$	1,460 ul
$S_{Fst}$	8,337 ul

User Factors OK Cancel

Slika 22. Faktori V para

Design Calculation		Results	
Method of Strength Calculation		ISO 6336:1996	
Loads			
Power	P	20 kW	19,600 kW
Speed	n	1500,00 rpm	520,41 rpm
Torque	T	127,324 N m	359,653 N m
Efficiency	$\eta$	0,980 ul	
Material Values			
Gear 1	<input type="checkbox"/> User material		
Gear 2	<input type="checkbox"/> User material		
Bending Fatigue Limit	$\sigma_{Flim}$	270,0 MPa	270,0 MPa
Contact Fatigue Limit	$\sigma_{Hlim}$	1100,0 MPa	1100,0 MPa
Modulus of Elasticity	E	206000 MPa	206000 MPa
Poisson's Ratio	$\mu$	0,300 ul	0,300 ul
Heat Treatment		2 ul	2 ul
Required Life		$L_h$ 50000 hr	
		Factors Accuracy	
<p>0:48:36 Design: Gear width is too big            0:48:36 Design: Gear 1: The Unit Correction (<math>x</math>) is less than the Unit Correction without Tapering (<math>x_2</math>)            0:48:36 Calculation: Calculation indicates design compliance!</p>			

Slika 23. Proračun nosivosti V para

Iz gornjih slika je vidljivo da proračun čvrstoće  $V$  para čelnika zadovoljava, te su za pogonski zupčanik dobiveni faktor sigurnosti na opterećenje bokova  $S_{H1} = 1,604$  te faktor sigurnosti na savijanje korijena  $S_{F1} = 3,855$ , a za gonjeni  $S_{H1} = 1,643$  i  $S_{F1} = 3,816$ .

Iznosi faktora sigurnosti  $V$  para su veći od dobivenih vrijednosti nultog para, a razlog tome je što povećanju nosivosti zupčanika pogoduju što veći iznosi pomaka profila.

## 6.3 Potrebna debljina uljnoga filma

### 6.3.1 Minimalna debljina uljnog filma $V$ para

Određivanje potrebne debljine uljnog filma važno je za osiguranje učinkovitog podmazivanja te dugotrajnog rada sustava. Pravilnom debljinom filma smanjuje se trenje između kontaktnih površina, time se smanjuje trošenje i rizik od oštećenja što doprinosi povećavanju učinkovitosti sustava.

Potrebna debljina uljnog filma odrediti će se prema [7] za točku kinematskog pola  $C$ . Koristiti će se formula koju su razvili Pan i Hamrock, budući da omogućuje precizno proračunavanje minimalne debljine uljnog filma u linijskim dodirima zubiju koristeći parametre materijala, opterećenja i geometrije. [7]

Minimalna debljina uljnog filma se računa prema sljedećem:

$$H_{min} = \frac{h_{min}}{R} = 1.71G^{0.568}U^{0.694}W^{-0.128} \quad (6.10)$$

gdje su  $G, U, W$  bezdimenzijski parametri:

$$G = \alpha E', \quad W = \frac{w}{E'R}, \quad U = \frac{\mu_o u_o}{E'R} \quad (6.11), (6.12), (6.13)$$

- $\alpha$  - tlačno viskozni koeficijent,  $\text{GPa}^{-1}$
- $w$  - normalno opterećenje po jedinici širine,  $\text{N/m}$
- $\mu_o$  - viskoznost,  $\text{Pa} \cdot \text{s}$
- $u_o$  - srednja tangencijalna brzina,  $\text{m/s}$
- $E'$  - efektivni modul elastičnosti,  $\text{MPa}$
- $R$  - ekvivalentni radijus,  $\text{mm}$

Podatci za tlačno viskozni koeficijent te viskoznost će biti uzeti iz primjera u izvoru,  $\mu_o = 0.04 \text{ Pa} \cdot \text{s}$  i  $\alpha = 15 \text{ GPa}^{-1}$

$$\frac{1}{E'} = \frac{1}{2} \left[ \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \right] = \frac{1}{2} \left[ \frac{1 - 0,3^2}{206000} + \frac{1 - 0,3^2}{206000} \right] \quad (6.14)$$

$$E' = 226,3 \text{ GPa}$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{\rho_{C1}} + \frac{1}{\rho_{C2}} = \frac{1}{12,354} + \frac{1}{35,607} \quad (6.15)$$

$$R = 9,172 \text{ mm}$$

$$u_o = \frac{(u_1 + u_2)}{2} = \frac{1,9405 + 1,9405}{2} = 1,9405 \text{ m/s} \quad (6.16)$$

$$w = \frac{P}{r_{w1} \cdot \pi \cdot n_1 \cdot b \cdot \cos\varphi} \quad (6.17)$$

- $\varphi$  – tlačni kut, u kinematskom polu C tlačni kut je jednak kinematskom kutu zahvatne linije  $\alpha_w = 21,139^\circ$

$$w = \frac{P}{r_{w1} \cdot \pi \cdot n_1 \cdot b \cdot \cos\varphi} = \frac{20000}{0,06851 \cdot \pi \cdot 25 \cdot 0,1 \cdot \cos(21,139)} = 39851 \text{ N/m}$$

$$G = \alpha E' = 15 \cdot 10^{-9} \cdot 2,263 \cdot 10^{11} = 3394,5$$

$$W = \frac{w}{E'R} = \frac{39851}{226,3 \cdot 10^9 \cdot 0,009172} = 1,92 \cdot 10^{-5}$$

$$U = \frac{\mu_o u_o}{E'R} = \frac{0,04 \cdot 1,9405}{226,3 \cdot 10^9 \cdot 0,009172} = 3,7395 \cdot 10^{-11}$$

$$\begin{aligned} H_{min} &= \frac{h_{min}}{R} = 1,71 G^{0,568} U^{0,694} W^{-0,128} \\ &= 1,71 \cdot 3394,5^{0,568} \cdot (3,7395 \cdot 10^{-11})^{0,694} \cdot (1,92 \cdot 10^{-5})^{-0,128} \\ &= 4,0341 \cdot 10^{-5} \end{aligned}$$

$$h_{min} = H_{min} \cdot R = 4,0341 \cdot 10^{-5} \cdot 0,009172 = 0,37 \text{ } \mu\text{m} \quad (6.18)$$

Debljina uljnog filma V para koja će se uspostaviti u kinematskom polu C iznosi 0,37  $\mu\text{m}$ .

### 6.3.2 Minimalna debljina uljnog filma nultog para

Kako bi se izračunala minimalna debljina uljnog filma nultog para, potrebno je izračunati sljedeće [7]:

$$H_{min} = \frac{h_{min}}{R} = 1.71G^{0.568}U^{0.694}W^{-0.128} \quad (6.19)$$

Podatci za tlačno viskozni koeficijent te viskoznost će biti ponovno uzeti iz primjera u izvoru,  $\mu_o = 0.04 \text{ Pa}\cdot\text{s}$  i  $\alpha = 15 \text{ GPa}^{-1}$ .

$$\frac{1}{E'} = \frac{1}{2} \left[ \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \right] = \frac{1}{2} \left[ \frac{1 - 0,3^2}{206000} + \frac{1 - 0,3^2}{206000} \right]$$

$$E' = 226,3 \text{ GPa}$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{\rho_{C1}} + \frac{1}{\rho_{C2}} = \frac{1}{11,629} + \frac{1}{33,518} \quad (6.20)$$

$$R = 8,634 \text{ mm}$$

$$u_o = \frac{(u_1 + u_2)}{2} = \frac{1,827 + 1,827}{2} = 1,827 \text{ m/s} \quad (6.21)$$

$$w = \frac{P}{r_1 \cdot \pi \cdot n_1 \cdot b \cdot \cos\varphi} = \frac{20000}{0,068 \cdot \pi \cdot 25 \cdot 0,1 \cdot \cos(20)} = 39852 \text{ N/m} \quad (6.22)$$

$$G = \alpha E' = 15 \cdot 10^{-9} \cdot 2,263 \cdot 10^{11} = 3394,5 \quad (6.23)$$

$$W = \frac{w}{E'R} = \frac{39851}{226,3 \cdot 10^9 \cdot 0,008634} = 2,040 \cdot 10^{-5} \quad (6.24)$$

$$U = \frac{\mu_o u_o}{E'R} = \frac{0,04 \cdot 1,827}{226,3 \cdot 10^9 \cdot 0,008634} = 3,7403 \cdot 10^{-11} \quad (6.25)$$

$$H_{min} = \frac{h_{min}}{R} = 1.71G^{0.568}U^{0.694}W^{-0.128} \quad (6.26)$$

$$= 1.71 \cdot 3394,5^{0.568} \cdot (3,7403 \cdot 10^{-11})^{0.694} \cdot (2,04 \cdot 10^{-5})^{-0.128}$$

$$= 4,00351 \cdot 10^{-5}$$

$$h_{min} = H_{min} \cdot R = 4,0341 \cdot 10^{-5} \cdot 0,009172 = 0,347 \text{ }\mu\text{m} \quad (6.27)$$

Debljina uljnog filma nultog para koja će se uspostaviti u kinematskom polu  $C$  iznosi  $0,347 \text{ }\mu\text{m}$  te je manja od minimalne debljine uljnog filma  $V$  para koja iznosi  $0,37 \text{ }\mu\text{m}$ .

## 7. Zaključak

U ovom radu, na temelju provedenih proračuna i usporedba, može se zaključiti da izjednačavanje specifičnog klizanja na početku i na kraju zahvata uspostavlja značajna poboljšanja u pogledu trošenja zupčanika. Korištenjem funkcije Solver u programu Excel, omogućeno je određivanje faktora pomaka profila uz zadane uvjete kako bi se postiglo ravnomjernije klizanje, čime su smanjene vrijednosti maksimalnih specifičnih klizanja, pogotovo na početku i na kraju zahvata, zbog čega dolazi do smanjenja trošenja, manjeg rizika od mikro-rupičenja i zaribavanja te duljim i izjednačenim vijekom trajanja zupčanika.

Usporedba rezultata između nultog i V para, korištenjem programa Autodesk Inventor Professional 2025, pokazala je dodatna poboljšanja u nosivosti zupčanika, a razlog tome je što povećanju nosivosti pogoduju što veći faktori pomaka profila. Osim toga, proveden je i proračun minimalne debljine uljnog filma za oba para čelnika te proračun pokazuje da se na V paru uspostavlja veći minimalni iznos debljine uljnog filma, čime se osigurava stabilan rad i smanjuje mogućnost izravnog metalnog kontakta, što je također ključno za dugotrajan rad sustava.

Dobiveni rezultati pokazuju da pravilno dimenzioniranje i optimizacija pomaka profila značajno poboljšavaju performanse zupčanika, omogućujući veću efikasnost i pouzdanost sustava.

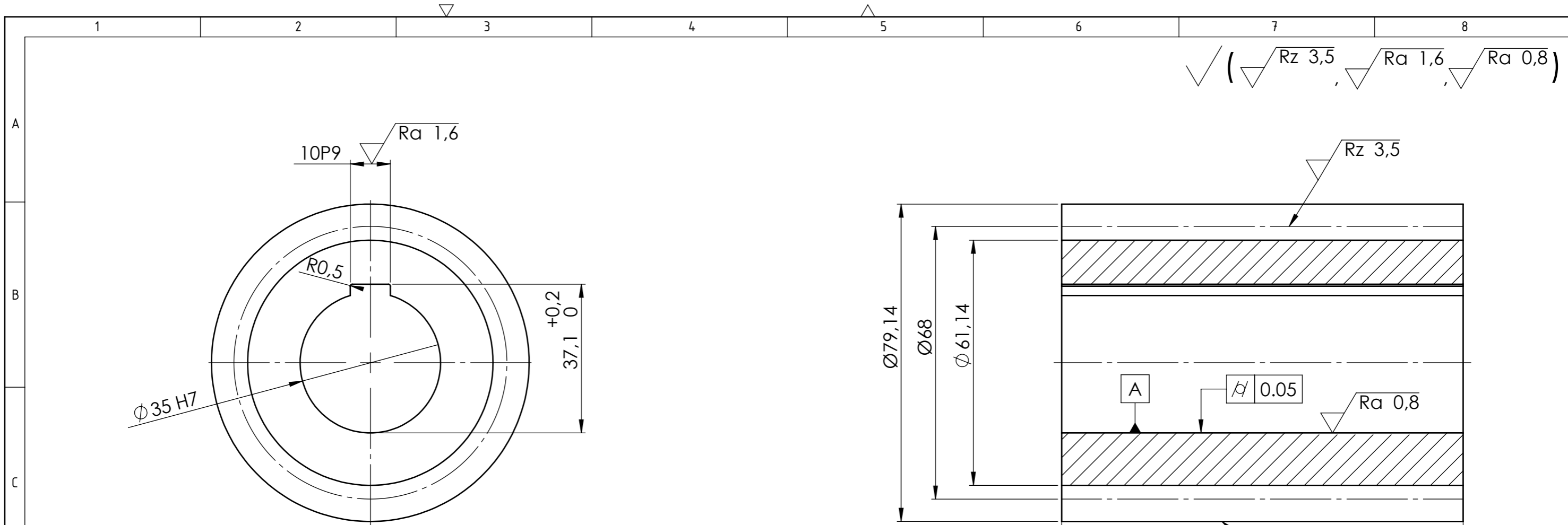


## 8. Literatura

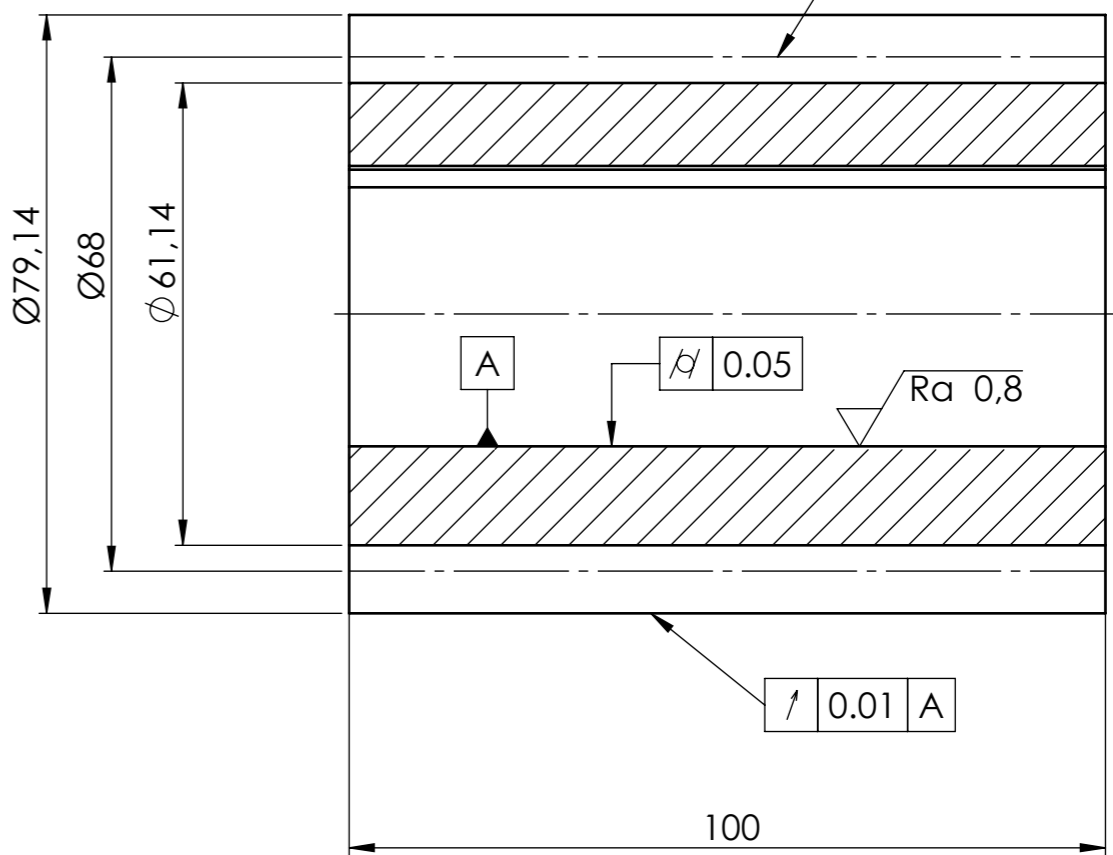
- [1] Oberšmit, E., Ozubljenja i zupčanici, SNL Zagreb 1982.
- [2] [www.indiamart.com](http://www.indiamart.com)
- [3] [www.khkgears.net](http://www.khkgears.net)
- [4] [www.mmintercom.com](http://www.mmintercom.com)
- [5] Linke, H., Börner, J. and Heß, R. (2016) Cylindrical gears: Calculation – materials – manufacturing. Munich, Germany: Carl Hanser Verlag. ISBN: 978-1-56990-490-9.  
<https://doi.org/10.3139/9781569904909>
- [6] ISO 6336, "Calculation of Load Capacity of Spur and Helical Gears", ISO, 2006
- [7] Kumar, P., Khonsari, M.M. (2013). Film Thickness Formulas: Line Contacts. In: Wang, Q.J., Chung, YW. (eds) Encyclopedia of Tribology. Springer, Boston, MA.  
[https://doi.org/10.1007/978-0-387-92897-5\\_641](https://doi.org/10.1007/978-0-387-92897-5_641)
- [8] Autodesk Inventor Professional 2025

## **PRILOZI**

### **I. Tehnička dokumentacija**

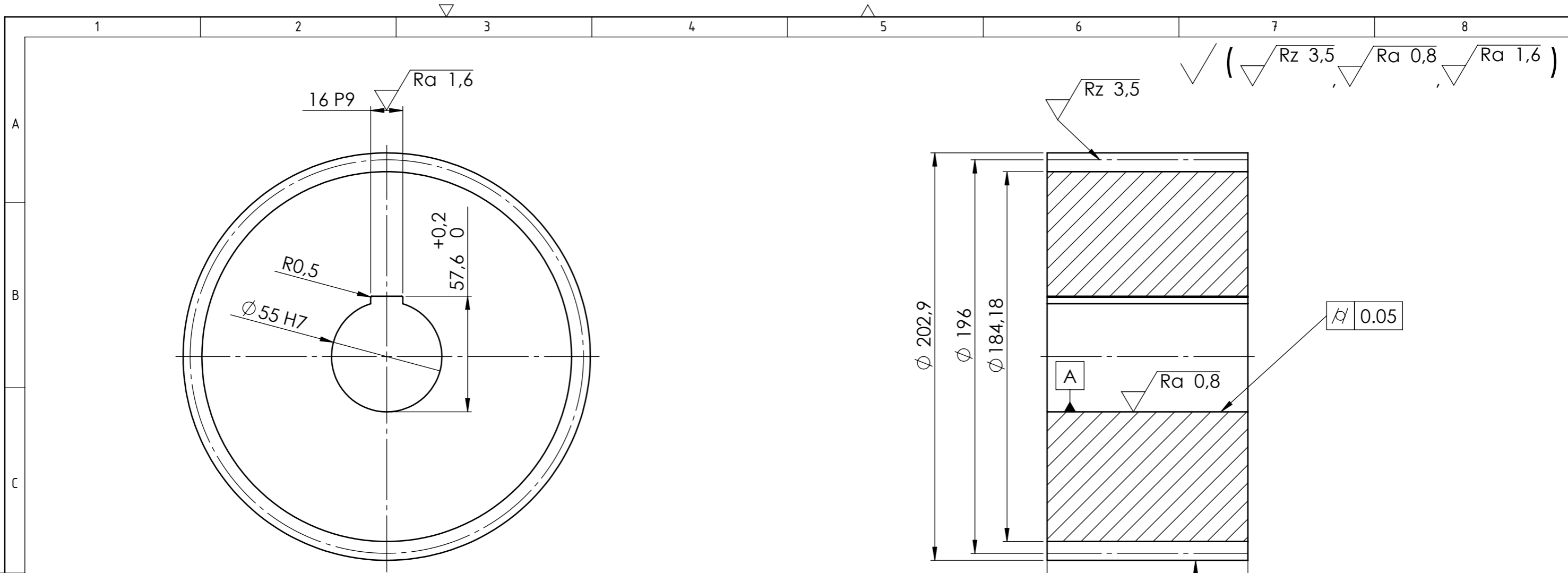


Broj zuba	$z_1$	17
Modul	$m$	4 mm
Standardni profil	-	HRN M.C1.015
Promjer diobene kružnice	$d_i$	68 mm
Pomak profila	$x, m$	1,568 mm
Promjer temeljne kružnice	$d_{b1}$	63,899 mm
Kontrola;kvaliteta	-	S" 7dc3 HRN M.C1.031
Mjerni broj zubi	$z_w$	3
Mjera preko nekoliko zubi	$W_{Aw,d}^{Aw,g}$	31,55 <sup>-0,128</sup> <sub>-0,160</sub> mm
Promjer kinematske kružnice	$d_{w1}$	68,509 mm
Broj kodeksa zupčanika u zahvatu	-	Napomena: radi ispravnog sparivanja nakon obrade i kontrole
Broj zubi zupčanika u zahvatu	$z_2$	49
Razmak osi vratila	$a \pm A_{a,g,d}$	133±0,02 mm
Kut zahvatne linije	$\alpha_w$	21,193 deg
Kružna zračnost	$j$	0,301...0,413 mm
Broj okretaja	$n_1$	1500 min <sup>-1</sup>



Projektirao	Datum	Ime i prezime	Potpis	
Razradio				
Crtao	10.02.2025.	Vedran Strnišćak		
Pregledao				

ISO-TOL	Objekt:	Objekt broj:	10-02
Ø35 H7		R. N. broj:	
10 P9	Napomena:		
	Materijal: C45	Masa:	
	Mjerilo originala	Naziv:	Zupčanik 1
	1:1	Crtež broj:	10-02-1
			Format: A3
			Listova: 1
			List: 1



Broj zuba	$Z_2$	497
Modul	$m$	4 mm
Standardni profil	-	HRN M.C1.015
Promjer diobene kružnice	$d_2$	196 mm
Pomak profila	$x_2m$	-0,552 mm
Promjer temeljne kružnice	$d_{b2}$	184,1796 mm
Kontrola;kvaliteta	-	S" 7cb3 HRN M.C1.031
Mjerni broj zubi	$Z_w$	5
Mjera preko nekoliko zubi	$W_{Aw,d}^{Aw,g}$	55,51 <sup>-0,170</sup> <sub>-0,204</sub> mm
Promjer kinematske kružnice	$d_{w2}$	197,468 mm
Broj kodeksa zupčanika u zahvatu	-	Napomena:radi ispravnog sparivanja nakon obrade i kontrole
Broj zubi zupčanika u zahvatu	$Z_1$	17
Razmak osi vratila	$a \pm A_{a,g,d}$	133±0,02 mm
Kut zahvatne linije	$\alpha_w$	21,193 deg
Kružna zračnost	$j$	0,301...0,413 mm
Broj okretaja	$n_2$	520,41 min <sup>-1</sup>

Projektirao	Datum	Ime i prezime	Potpis	
Razradio				
Crtao	10.02.2025.	Vedran Strnišćak		
Pregledao				
ISO-TOL	Objekt:		Objekt broj: 10-02	
Ø35 H7	+0,03			R. N. broj:
	0			
10 P9	-0,018	Napomena:		Kopija
	-0,061			
		Materijal: C45	Masa:	
		Naziv: Zupčanik 2		Pozicija: Format: A3
		Mjerilo originala		Listova: 1
		1:2		List: 1
		Crtež broj: 10-02-2		