

# Izrada funkcionalnog prototipa kvadrokoptera sa sustavom upravljanja temeljenog na mikrokontroleru Teensy 4.0

---

**Banić, Jakov**

**Undergraduate thesis / Završni rad**

**2025**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:235:615141>

*Rights / Prava:* [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom](#).

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-02-25**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# ZAVRŠNI RAD

**Jakov Banić**

Zagreb, 2025. godina.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# ZAVRŠNI RAD

Mentori:

Prof. dr. sc. Danijel Pavković, dipl. ing.

Student:

Jakov Banić

Zagreb, 2025. godina.

Izjavljujem da sam ovaj rad izradio samostalno koristeći znanja stečena tijekom studija i navedenu literaturu.

Zahvaljujem se mentoru prof. dr. sc. Danijel Pavković, dipl. ing. na pomoći oko idejnog i izvedbenog rješenja ovog rada, također obitelji i prijateljima na njihovoj podršci, te mojoj dragoj H.H. na vječnoj podršci i pomoći.

Jakov Banić



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE



Središnje povjerenstvo za završne i diplomске ispite  
Povjerenstvo za završne i diplomске ispite studija strojarstva za smjerove:  
proizvodno inženjerstvo, računalno inženjerstvo, industrijsko inženjerstvo i menadžment, inženjerstvo  
materijala i mehatronika i robotika

Sveučilište u Zagrebu Fakultet strojarstva i brodogradnje	
Datum	Prilog
Klasa: 602 – 04 / 25 – 06 / 1	
Ur.broj: 15 – 25 –	

## ZAVRŠNI ZADATAK

Student: **Jakov Banić**

JMBAG: 0035231701

Naslov rada na hrvatskom jeziku: **Izrada funkcionalnog prototipa kvadrokoptera sa sustavom upravljanja temeljenog na mikrokontroleru Teensy 4.0**

Naslov rada na engleskom jeziku: **Implementation of a functional prototype of a quadcopter with its control system based on the Teensy 4.0 microcontroller**

Opis zadatka:

Ovaj završni rad usmjeren je na dizajn, razvoj i implementaciju funkcionalnog prototipa kvadrokoptera kojim upravlja mikrokontroler Teensy 4.0. Cilj je demonstrirati mogućnosti ovog snažnog mikrokontrolera u upravljanju složenim zadacima potrebnim za stabilan let kvadrokoptera. U radu je potrebno:

1. Definirati sve potrebne sklopovske komponente za integraciju bespilotne letjelice tipa kvadrokoptera: mehaničku konstrukciju letjelice, elektromotore za propulzore, sustave energetske elektronike, senzorske sustave i sustave za akviziciju podataka (IMU jedinica) te upravljačke jedinice temeljene na Teensy 4.0 / ARM Cortex M7 mikrokontroleru.
2. Opisati pojedine podsustave kvadrokoptera i dati iscrpne tehničke karakteristike pojedinih komponenata koje se predviđaju koristiti u radu.
3. Dati matematičke modele kinematike i dinamike gibanja letjelice i na temelju tih modela izraditi simulacijski model letjelice.
4. Implementirati estimator dinamičkih varijabli letjelice u formi Kalmanovog filtra koji kao ulazne varijable prima signale sa akcelerometara i žiroskopa sa odabrane IMU jedinice.
5. Dizajnirati regulacijski sustav za letjelicu koji se zasniva na estimatoru dinamičkih varijabli letjelice i ispitati njegovu funkcionalnost simulacijama na računalu, te ukoliko za to budu stvoreni uvjeti i eksperimentalno u laboratorijskim uvjetima.

U radu je također potrebno navesti korištenu literaturu i eventualno dobivenu pomoć.

Zadatak zadan:

30. 11. 2024.

Datum predaje rada:

**1. rok:** 20. i 21. 2. 2025.  
**2. rok:** 10. i 11. 7. 2025.  
**3. rok:** 18. i 19. 9. 2025.

Predviđeni datumi obrane:

**1. rok:** 24. 2. – 28. 2. 2025.  
**2. rok:** 15. 7. – 18. 7. 2025.  
**3. rok:** 22. 9. – 26. 9. 2025.

Zadatak zadao:

Prof. dr. sc. Danijel Pavković

*Danijel Pavković*

Predsjednik Povjerenstva:

*Damir Godec*  
Prof. dr. sc. Damir Godec

**SADRŽAJ:**

SADRŽAJ: .....	I
POPIS SLIKA .....	III
POPIS TABLICA.....	V
POPIS TEHNIČKE DOKUMENTACIJE .....	VI
POPIS OZNAKA .....	VII
SAŽETAK.....	IX
SUMMARY .....	X
1. UVOD: bespilotne letjelice, funkcija i vrste.....	1
1.1 Višerotorske bespilotne letjelice .....	2
1.2 Fiksno krilne bespilotne letjelice .....	3
1.3 Hibridne (VTOL) bespilotne letjelice .....	4
2. OPIS SUSTAVA .....	5
2.1 Mehanička konstrukcija letjelice .....	5
2.2 Elektromotori za propulziju .....	5
2.3 Sustav energetske elektronike .....	6
2.4 Senzori sustava i IMU jedinica .....	6
2.5 Upravljačka jedinica (Teensy 4.0/ ARM Cortex M7).....	6
2.6 Funkcioniranje sustava.....	6
2.6.1 Početni podaci .....	6
2.6.2 Stabilnost.....	7
2.6.3 Zadržavanje visine .....	7
2.6.4 Izvođenje manevara .....	7
2.6.5 Upravljanje snagom .....	7
3. TEHNIČKE KARAKTERISTIKE .....	8
3.1 Mehanička konstrukcija .....	8
3.2 Pogonski sustav .....	9
3.3 Energetski sustav.....	11
3.4 Senzori i navigacija.....	13
3.4.1 IMU- Inercijska mjerna jedinica .....	14
3.4.2 BMP280 – Barometar za mjerenje visine .....	16
3.5 Upravljačka jedinica .....	17
4. MATEMATIČKI MODEL.....	20
4.1 Kordinatni sustavi i transformacije .....	21
4.2 Kinematika letjelice .....	22
4.3 Dinamika letjelice .....	26
4.3.1 Ukupni dinamički model kvadrokoptera .....	30
5. UPRAVLJAČKI SUSTAV LETJELICE .....	32
5.1 PID regulator.....	32
5.1.1 P regulator .....	33

---

5.1.2	PI regulator.....	35
5.1.3	PID regulator.....	36
5.2	Prijenos upravljačkog signala(PPM vs PWM).....	40
5.3	Manipulacija kretanja letjelice kroz snagu motora .....	42
6.	OBRADA PODATAKA SENZORA I KALMANOV FILTAR .....	46
6.1	Mjerenje kutova – MPU6050.....	46
6.1.1	Integracija brzine rotacije žiroskopa .....	46
6.1.2	Akcelerometar .....	47
6.2	Kalmanov filter jedna dimenzija.....	50
6.2.1	Opći oblik Kalmanovog filtra .....	51
6.2.2	Opis Kalmanovog korekcijskog faktora .....	52
6.3	Mjerenje visine i stabilizacija lebdjenja – BMP280 .....	54
6.4	Mjerenje vertikalne akceleracije .....	55
6.5	Kalmanov filter dvije dimenzije .....	57
7.	ZAKLJUČAK.....	63
	LITERATURA.....	64
	PRILOZI.....	66

**POPIS SLIKA**

Slika 1.	Kvadrokopter[1] .....	2
Slika 2.	Heksakopter (lijevo)[2] i oktokoopter (desno)[3] .....	3
Slika 3.	Fiksnokrilne bespilotne letjelice[4] .....	4
Slika 4.	Hibridna (VTOL) bespilotna letjelica[5].....	4
Slika 5.	Mehanička konstrukcija letjelice i njeni dijelovi[6].....	5
Slika 6.	Gornja (lijevo) i donja (desno) platforma konstrukcije kvadrokoptera.....	8
Slika 7.	Sastavljena konstrukcija kvadrokoptera.....	9
Slika 8.	Usporedba konstrukcije motora s četkicama i bez četkica[7] .....	9
Slika 9.	Različiti načini izvedbe BLDC motora[12].....	10
Slika 10.	BLDC motor tipičan za sportske kvadrokoptere[9] .....	11
Slika 11.	Baterija korištena u kvadrokopteru[10].....	12
Slika 12.	Elektronički regulator brzine (ESC)[11] .....	12
Slika 13.	BMP280 (lijevo)[13] i MPU6050 (desno)[14].....	14
Slika 14.	Coriolis-ova sila i IMU[16] .....	15
Slika 15.	MPU6050 shema[17] .....	15
Slika 16.	BPM280- shema spajanja[18] .....	16
Slika 17.	Flysky transmiter i prijemnik[18][19].....	17
Slika 18.	Prednja i stražnja strana Teensy 4.0 mikrokontrolera[20] .....	19
Slika 19.	Referentni koordinatni sustav letjelice .....	21
Slika 20.	Kutovi rotacije letjelice .....	22
Slika 21.	Rotacija oko osi Z (skretanje) .....	23
Slika 22.	Rotacija oko osi Y (propinjanje) .....	24
Slika 23.	Rotacija oko osi X (valjanje).....	24
Slika 24.	Generalni blok dijagram Upravljačkog sustava .....	33
Slika 25.	Odziv Proporcionalnog (P) regulatora .....	34
Slika 26.	Odziv Proporcionalno-Integralnog (PI) regulatora .....	35
Slika 27.	Odziv Proporcionalno-Integralno-Derivativnog (PID) regulatora .....	36
Slika 28.	Generalna shema sustava upravljanja kvadrokoptera .....	38
Slika 29.	PID regulator kuta valjanja.....	38
Slika 30.	PID regulator kuta posrtanja.....	38
Slika 31.	PID regulator kuta skretanja.....	39
Slika 32.	PPW i PPM u odnosu na snagu motora.....	40
Slika 33.	Usporedba PWM i PPM signala za dva ulazna kanala .....	41
Slika 34.	Manipulacija letjelice kroz regulaciju snage motora[25] .....	43
Slika 35.	Odnos brzine zakreta i $\mu s$ .....	44
Slika 36.	Generalna blok shema upravljačkog sustava.....	45
Slika 37.	Promjene akceleracije u x, y, z osi bez Kalmanovog filtra .....	48
Slika 38.	Promjena na kuta bez Kalmanovog filtra .....	48



---

Slika 39.	Smetnje akcelerometra uslijed vibracija motora .....	49
Slika 40.	Usporedba kuta žiroskopa i akcelerometra bez Kalmanovog filtra .....	49
Slika 41.	Vrijednost Kalmanovog pojačanja u ovisnosti o vremenu.....	53
Slika 42.	Promjene kutova sa Kalmanovim filtrom .....	53
Slika 43.	Odziv akcelerometra uslijed vibracija senzora.....	54
Slika 44.	Očitavanja s barometra bez Kalmanovog filtra.....	55
Slika 45.	Odziv akcelerometra bez Kalmanovog filtra.....	56
Slika 46.	Odziv s akcelerometra i barometra s dvodimenzionalnim Kalmanovim filtrom ..	59
Slika 47	Konačni regulacijski krug s dvodimenzionalnim Kalmanovim filtrom.....	60
Slika 48.	Električna shema upravljačkog sustava[7] .....	61
Slika 49.	Električna shema motora[7] .....	62

---

**POPIS TABLICA**

Tablica 1. Tehničke karakteristike energetske komponente i motora ..... 13

---

**POPIS TEHNIČKE DOKUMENTACIJE**

## POPIS OZNAKA

Oznaka	Jedinica	Opis
$f^E$		Koordinatni sustav zemlje
$f^B$		Koordinatni sustav letjelice
$m$		Masa letjelice
$X, Y, Z$		Prostorne osi/translacije po osima
$\xi$		Vektor položaj
$\phi, \theta, \psi$		Valjanje, posrtanje, skretanje
$\eta$		Vektor rotacije
$\mathbf{v}^B$		Vektor translacijskih brzina
$\boldsymbol{\omega}^B$		Vektor rotacijskih brzina
$\mathbf{F}$		Sile
$\mathbf{T}$		momenti
$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$		Generalizirani vektor brzine u $f^E$
$\mathbf{v}$		Generalizirani vektor brzine u $f^B$
$\mathbf{R}$		Rotacijska matrica
$\ddot{\boldsymbol{\xi}}$		Vektor ubrzanja
$\ddot{\boldsymbol{\eta}}$		Kutno ubrzanje letjelice
$\mathbf{F}^E$		Vektor sila u $f^E$
$\mathbf{I}$		Inercijska matrica
$\mathbf{M}^B$		Vektor vanjskih momenata
$\boldsymbol{\lambda}$		Generalizirani vektor sila
$\mathbf{C}_B(\mathbf{v})$		Vektor centripetalnih i Coriolisovih sila
$\mathbf{G}^B$		Vektor gravitacijskog utjecaja
$\mathbf{O}^B$		Vektor žiroskopa u letjelici
$\mathbf{U}^B$		Upravljačka matrica u $f^B$
$\boldsymbol{\Gamma}^B$		Matrica raspodjele kontrole
$\boldsymbol{\Omega}$		Upravljački vektor
$\mathbf{F}_T$		Vektor potisne sile
$M_\phi$		Moment oko x-osi
$M_\theta$		Moment oko y-osi
$M_\psi$		Moment oko z-osi
$P$		Pojačanje proporcionalnog regulatora
$I$		Pojačanje derivacijskog regulatora
$D$		Pojačanje integralnog regulatora
$T_i$		Vrijeme trajanja iteracije
$S$		Vektor stanja
$F$		matrica prelaza stanja
$G$		Upravljačka matrica

<i>U</i>	Ulazna vrijednost
<i>P</i>	Vektor predviđanja
<i>Q</i>	Nesigurnost procesa
<i>L</i>	Prijelazna matrica
<i>K</i>	Kalmanovo pojačanje
<i>H</i>	Matrica za promatranje
<i>R</i>	Mjerna nesigurnost

---

**SAŽETAK**

Ovaj završni rad bavi se dizajnom, razvojem i implementacijom funkcionalnog prototipa kvadrokoptera temeljenog na mikrokontroleru Teensy 4.0. Cilj rada bio je demonstrirati mogućnosti ovog snažnog mikrokontrolera u upravljanju složenim zadacima potrebnim za stabilan let kvadrokoptera. U radu su opisane sve ključne komponente letjelice, uključujući mehaničku konstrukciju, pogonski sustav, senzorske sustave i upravljačku jedinicu. Razvijen je matematički model kinematike i dinamike letjelice, koji je poslužio kao osnova za simulaciju i implementaciju regulatora. Poseban naglasak stavljen je na obradu podataka senzora s pomoću Kalmanovog filtra, koji je korišten za preciznu procjenu dinamičkih varijabli letjelice, poput kuta orijentacije, visine i vertikalne brzine. Implementirani sustav testiran je simulacijama i eksperimentalno, čime su potvrđene njegove funkcionalnosti i učinkovitost u stabilizaciji leta.

Ključne riječi: kvadrokopter, Teensy 4.0, Kalmanov filter, matematički model, upravljački sustav.

**SUMMARY**

This bachelor's thesis deals with the design, development and implementation of a functional prototype of a quadcopter based on the Teensy 4.0 microcontroller. The aim of the work was to demonstrate the capabilities of this powerful microcontroller in managing complex tasks required for stable quadcopter flight. The work describes all key components of the aircraft, including the mechanical structure, the propulsion system, different sensor systems and the quadrotor control unit. A mathematical model of the aircraft kinematics and dynamics was developed, which served as the basis for the simulation and implementation of the controller. Special emphasis was placed on the processing of sensor data using the Kalman filter, which was used to accurately estimate the dynamic variables of the aircraft, such as the orientation angle, altitude and vertical speed. The implemented system was tested by simulations and experimentally, confirming its functionality and effectiveness in flight stabilization.

Keywords: quadcopter, Teensy 4.0, Kalman filter, mathematical model, control system.

## 1. UVOD: bespilotne letjelice, funkcija i vrste

Bespilotne letjelice, poznate i pod nazivom kvadrokopter ili UAV (Unmanned Aerial Vehicles), predstavljaju jednu od najznačajnijih inovacija u suvremenoj zrakoplovnoj tehnologiji. Njihov razvoj omogućio je široku primjenu u raznim industrijama, od vojne i civilne upotrebe do komercijalnih i rekreativnih svrha. U osnovi, bespilotne letjelice su zračne platforme koje ne zahtijevaju prisustvo pilota unutar letjelice, već se upravljaju daljinski ili autonomno s pomoću unaprijed programiranih ruta i sustava umjetne inteligencije.

Razvoj kvadrokoptera uvelike je potaknut napretkom u elektronici, sensorima, računalnim sustavima i bežičnim komunikacijama. S vremenom su postali sve sofisticiraniji, nudeći poboljšanu preciznost, stabilnost i energetske učinkovitost. Današnje bespilotne letjelice mogu biti opremljene različitim sensorima, kamerama visoke rezolucije, termalnim i infracrvenim kamerama, LIDAR sustavima te naprednim navigacijskim modulima. Njihova primjena uključuje zračno snimanje, kartografiju, inspekciju infrastrukture, poljoprivredni nadzor, sigurnosne operacije, pa čak i dostavu paketa.

Jedan od ključnih čimbenika uspjeha bespilotnih letjelica jest njihova sposobnost vertikalnog uzlijetanja i slijetanja (VTOL - Vertical Take-Off and Landing), čime se eliminira potreba za dugim uzletno-sletnim stazama. Ovisno o specifičnim zahtjevima misije, bespilotne letjelice mogu imati različite konfiguracije – od klasičnih fiksno krilnih modela do multi rotorskih i hibridnih konstrukcija koje kombiniraju prednosti oba dizajna.

Osnovna svrha bespilotnih letjelica ovisi o njihovoj konstrukciji i opremi. U vojnim operacijama koriste se za izviđanje, prikupljanje obavještajnih podataka i precizne napade, dok se u civilnom sektoru primjenjuju za monitoring okoliša, potragu i spašavanje te nadzor prometa. Njihova sposobnost brzog prikupljanja podataka u realnom vremenu i fleksibilnost u različitim okruženjima čini ih neprocjenjivim alatom za mnoge sektore.

U nastavku ovog rada bit će detaljno obrađene glavne vrste bespilotnih letjelica, njihove specifične funkcije te tehničke karakteristike koje ih čine pogodnima za različite primjene.



## 1.1 Višerotorske bespilotne letjelice

Višerotorski kvadrokopteri su najčešće korištena vrsta bespilotnih letjelica zbog svoje jednostavnosti, stabilnosti i lakoće upravljanja. Dijele se na kvadrokoptere (četiri rotora), heksakoptere (šest rotora) i oktokoptere (osam rotora).

Kvadrokopteri su najpopularnija vrsta višerotorskih kvadrokoptera, sastoji se od četiri rotora raspoređena u simetričnom obliku. Omogućuju izuzetnu stabilnost i preciznost, što ih čini idealnima za snimanje iz zraka, rekreativne letove i sigurnosni nadzor. Međutim, zbog manjeg broja rotora, imaju ograničenu nosivost i osjetljiviji su na kvarove motora.

Heksakopteri imaju šest rotora, što im omogućuje veću nosivost i sigurnost u slučaju otkazivanja jednog motora. Stabilniji su pri jakom vjetru u usporedbi s kvadrokopterima, ali su skuplji i troše više energije.

Oktokopteri su opremljeni s osam rotora, ovi kvadrokopteri pružaju maksimalnu stabilnost i nosivost. Koriste se u profesionalnom snimanju, industrijskim inspekcijama i operacijama spašavanja. Njihova glavna mana je visoka cijena i potreba za snažnijim baterijama zbog povećane potrošnje energije.

Prednost višerotorskih kvadrokoptera očituje se u njihovoj jednostavnoj kontroli i sposobnost lebdenja u zraku, fleksibilnosti u kretanju i preciznom pozicioniranju te u mogućnosti opremanja raznim senzorima i kamerama.

Mane višerotorskih kvadrokoptera su: kraće vrijeme leta u odnosu na fiksno krilne kvadrokoptere, veća potrošnja energije zbog stalne potrebe za generiranjem uzgona i osjetljivost na jak vjetar kod manjih modela.



Slika 1. Kvadrokopter[1]



**Slika 2. Heksakopter (lijevo)[2] i oktokoopter (desno)[3]**

## 1.2 Fiksnokrilne bespilotne letjelice

Fiksnokrilne bespilotne letjelice dizajnirane su prema principu konvencionalnih zrakoplova, s nepomičnim krilima koja generiraju uzgon tijekom leta. Za razliku od višerotorskih letjelica, koje proizvode uzgon isključivo putem rotacije propelera, fiksnokrilne bespilotne letjelice koriste aerodinamički oblikovana krila kako bi se održali u zraku uz minimalnu potrošnju energije. Ovi kvadropteri obično imaju jedan ili više potisnih motora (električnih ili s unutarnjim izgaranjem), koji osiguravaju horizontalno kretanje naprijed.

Zbog svoje aerodinamičke učinkovitosti, fiksnokrilne bespilotne letjelice mogu letjeti znatno duže od višerotorskih letjelica, često prelazeći nekoliko sati autonomnog leta na jednoj bateriji ili spremniku goriva. Osim toga, postižu veće brzine i pokrivaju znatno veća područja, što ih čini idealnima za misije koje zahtijevaju obavljanje zadataka poput kartografije, poljoprivrednog nadzora, nadgledanja okoliša i vojnih operacija.

Imaju i svoje nedostatke – ne mogu lebdjeti u mjestu, što im otežava precizne zadatke, a često im je potrebna pista ili katapult za uzlijetanje.

Iako nisu toliko okretni kao višerotorski kvadropteri, njihova sposobnost dugotrajnog leta i pokrivanja velikih područja čini ih nezamjenjivima u mnogim industrijama. Bilo da se koriste za mapiranje, praćenje usjeva ili izviđanje, fiksnokrilne bespilotne letjelice ostaju jedan od najvažnijih alata u modernoj tehnologiji bespilotnih letjelica.



**Slika 3. Fiksnokrilne bespilotne letjelice[4]**

### **1.3 Hibridne (VTOL) bespilotne letjelice**

Hibridne bespilotne letjelice (vertical take-off and landing) kombiniraju karakteristike višerotorskih i fiksnokrilnih letjelica, omogućujući vertikalno polijetanje i slijetanje uz učinkovit horizontalni let. Imaju rotore za uzgon i fiksna krila za ekonomičan let na duže udaljenosti.

Koriste se u misijama koje zahtijevaju fleksibilnost, poput dostave medicinskih potrepština, vojnih izviđanja i nadzora infrastrukture. Njihova glavna prednost je kombinacija dugog trajanja leta i mogućnosti operiranja u ograničenim prostorima bez uzletno-sletnih staza.

Međutim, složeniji sustav upravljanja i veći troškovi održavanja predstavljaju izazov. Također, prijelaz iz vertikalnog u horizontalni let zahtijeva napredne algoritme upravljanja. Unatoč tome, VTOL letjelice nude optimalan spoj dometa, stabilnosti i energetske učinkovitosti.



**Slika 4. Hibridna (VTOL) bespilotna letjelica[5]**

## 2. OPIS SUSTAVA

Kvadrokoopter je bespilotna letjelica koja koristi četiri elektromotora za uzlijetanje i manevriranje. Svaki motor pokreće jedan od četiri propelera, a kontrola leta se ostvaruje promjenom brzina tih motora, čime se utječe na stabilnost, visinu i smjer kvadrokoopter. Kvadrokoopter se upravlja s pomoću odašiljača, a prijemnik na kvadrokoopteru omogućava da signal bude primljen i interpretiran od strane upravljačke jedinice, koja potom kontrolira motore i sustave letjelice.

### 2.1 Mehanička konstrukcija letjelice

Mehanička konstrukcija kvadkooptera obuhvaća okvir, propelere, i nosače za elektroničke komponente. Okvir je obično izrađen od laganih i čvrstih materijala poput karbonskih vlakana ili plastike, čime se postiže visoka čvrstoća i niska težina. Propeleri su povezani s elektromotorima, a nosači drže sve ostale komponente u stabilnoj poziciji.



**Slika 5. Mehanička konstrukcija letjelice i njeni dijelovi[6]**

### 2.2 Elektromotori za propulziju

Za podizanje kvadrokoopter i njegovo upravljanje koristi se četiri elektromotora. Ovi motori okreću propelere i omogućuju kvadrokoopteru da se podigne u zrak, održava stabilnost te upravlja smjerom kretanja. Brzina svakog motora se neprestano prilagođava kako bi kvadrokoopter održao ravnotežu, letio prema željenoj visini i smjeru, te izvodio okrete i druge manevre.

## 2.3 Sustav energetske elektronike

Sustav energetske elektronike uključuje bateriju koja opskrbljuje elektromotore energijom za pokretanje i letenje. Za upravljanje energijom i distribuciju koristi se ESC (Elektronski Regulator Brzine) koji je povezan s mikrokontrolerom. ESC-ovi omogućuju precizno podešavanje brzine motora i time kontroliraju brzinu leta kvadrokopter, kao i izvodljive manevre.

## 2.4 Senzori sustava i IMU jedinica

Senzori su ključni za stabilnost i precizno upravljanje kvadrokopterom. Glavna jedinica za akviziciju podataka je IMU (Inertial Measurement Unit), koja se sastoji od akcelerometra, žiroskopa i ponekad magnetometra, koji se ovdje neće koristiti. IMU prikuplja podatke o orijentaciji i kretanju kvadrokopter u prostoru, uključujući kutnu brzinu, ubrzanje i magnetske smjernice. Ovi podaci omogućuju mikrokontroleru da održava stabilnost kvadrokopter i precizno upravlja njegovim položajem tijekom leta.

Osim IMU jedinice, kvadrokopter koristi barometar BMP280 koji mjeri atmosferski tlak te omogućuje kvadrokopteru automatsko zadržavanje na određenoj visini. Mikrokontroler obrađuje podatke dobivene s barometra i prema njima prilagođava brzine motora kako bi kvadrokopter mogao stabilno lebdjeti na zadanoj visini.

## 2.5 Upravljačka jedinica (Teensy 4.0/ ARM Cortex M7)

Upravljačka jedinica kvadrokopter temelji se na mikrokontroleru **Teensy 4.0**, koji je zasnovan na **ARM Cortex M7** arhitekturi. Ovaj mikrokontroler je vrlo moćan i sposoban za obradu podataka u stvarnom vremenu, što je ključno za stabilno upravljanje kvadrokopterom. Upravljačka jedinica prima signale sa senzora, kao i komande od pilota, te na temelju tih podataka upravlja brzinama motora, održava stabilnost i poziciju kvadrokopter.

## 2.6 Funkcioniranje sustava

### 2.6.1 Početni podaci

Kada pilot pokrene kvadrokopter, upravljačka jedinica prima ulazne podatke od prijemnika koji je povezan s odašiljačem. Ovisno o naredbama koje dolaze od pilota (povećanje visine, skretanje udesno, itd.), upravljačka jedinica izračunava potrebne promjene u brzini svakog motora.

---

### **2.6.2 Stabilnost**

IMU jedinica kontinuirano prati orijentaciju i kretanje kvadrokopter. Ako dođe do naglih promjena smjera ili skretanja, npr. uslijed vjetrova, IMU šalje podatke mikrokontroleru, koji zatim prilagođava brzine motora kako bi vratio kvadrokopter u željenu stabilnu poziciju.

### **2.6.3 Zadržavanje visine**

Barometar BMP280 neprestano mjeri atmosferski tlak i time omogućava kvadrokopteru da precizno održava visinu. Kada sustav detektira promjenu visine, mikrokontroler regulira snagu motora kako bi kvadrokopter automatski zadržao zadanu visinu i omogućio stabilno lebdjenje.

### **2.6.4 Izvođenje manevara**

Za izvođenje specifičnih manevara, poput okreta ili letenja unazad, mikrokontroler prilagođava brzine motora kako bi kontrolirao smjer i kut kvadrokopter. Senzori omogućuju precizno praćenje orijentacije, što je ključno za izvođenje kompleksnih manevara.

### **2.6.5 Upravljanje snagom**

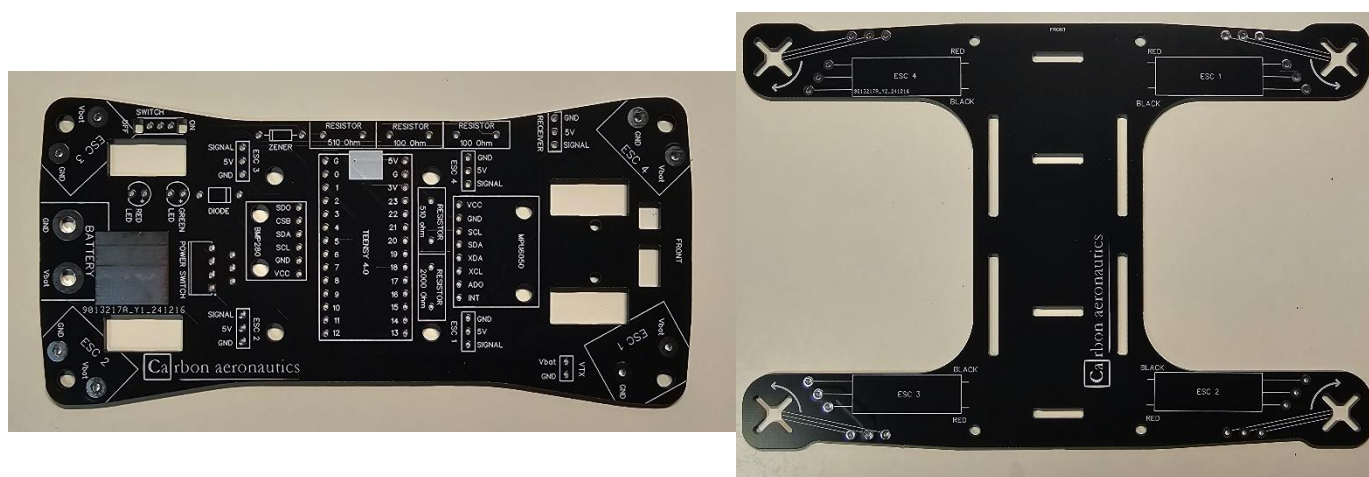
Baterija napaja sve elektroničke komponente, a ESC-ovi omogućuju učinkovitu distribuciju energije prema motorima. Energetska učinkovitost važna je za produženo vrijeme leta, a sistem energetske elektronike osigurava optimalnu potrošnju energije.

### 3. TEHNIČKE KARAKTERISTIKE

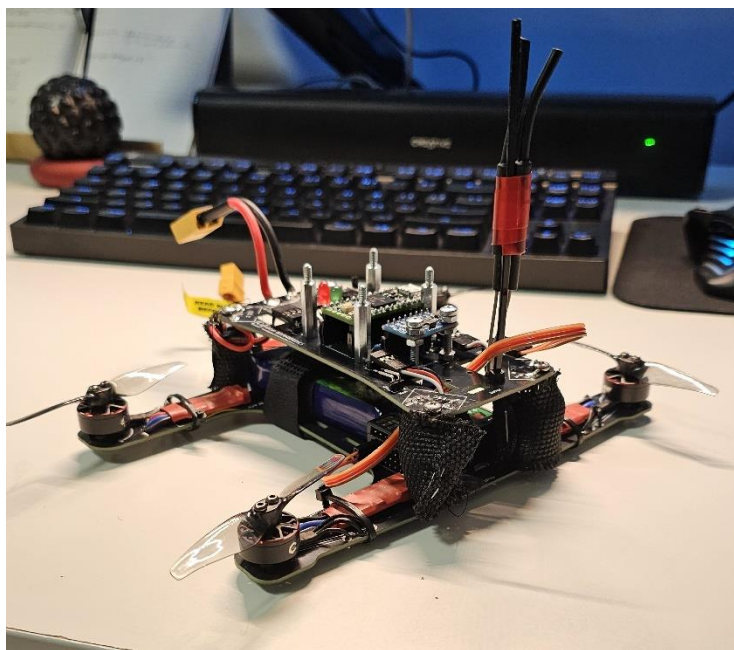
Ovo poglavlje će se baviti ekstenzivnim opisom svake komponente koja tvori ovaj sustav.

#### 3.1 Mehanička konstrukcija

Mehanička konstrukcija letjelice sastoji se od gornje i donje platforme, povezane preko duguljastih M3x30mm odstoynika, koji također određuju visinu između platformi. Na donjoj platformi nalaze se baterija, transmiter i četiri motora s pripadajućim ESC-ovima, dok su na gornjoj platformi smješteni Teensy 4.0 mikrokontroler, MPU6050 žiroskop i akcelerometar, te BMP280 barometar za mjerenje visine. Gornja platforma također sadrži odstoynik s muško-ženskim ulazom, gdje je ženska strana pričvršćena, dok muška stvara fizičko odvojenje i štiti mikrokontroler, senzore, motore i propelere u slučaju da se letjelica preokrene naopako i padne na tlo. Materijal konstrukcije je podebljana PCB pločica iz open-source platforme Carbon aeronautics [7], koja integrira sve vodove, čime se minimalizira potreba za vanjskim žicama. Ukupna težina letjelice sa svim komponentama iznosi oko 250 g.



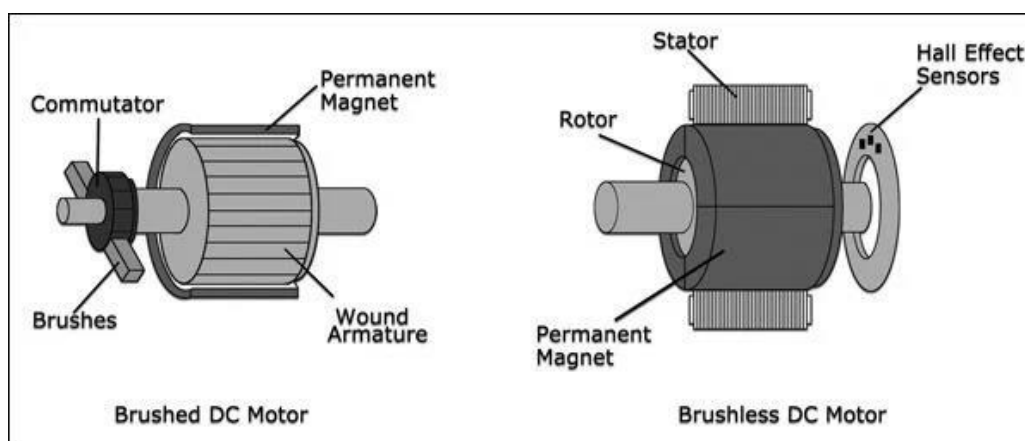
Slika 6. Gornja (lijevo) i donja (desno) platforma konstrukcije kvadrokoptera



Slika 7. Sastavljena konstrukcija kvadrokoptera

### 3.2 Pogonski sustav

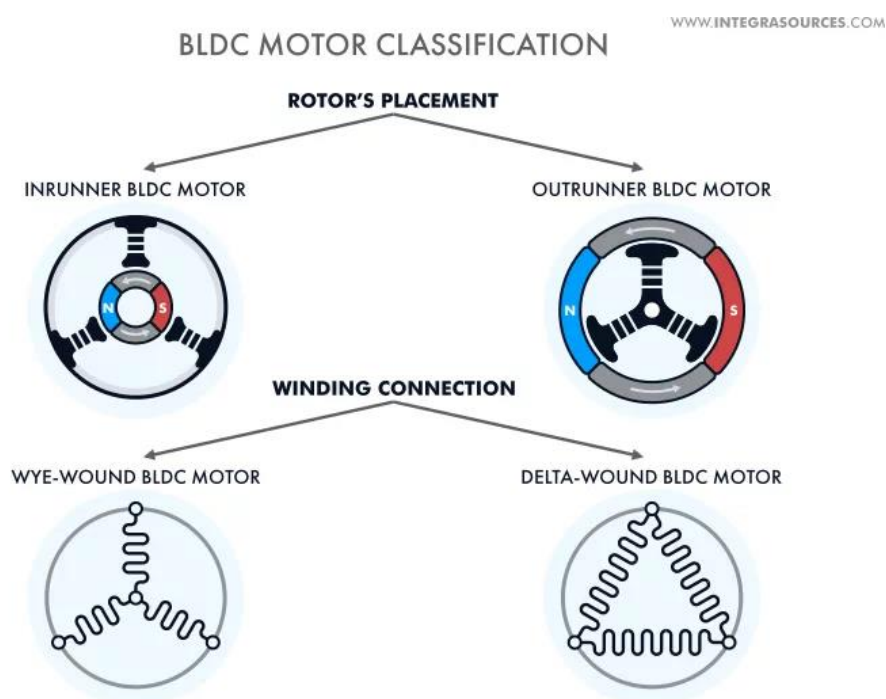
Brushless DC (BLDC) motori su električni motori koji rade na istosmjernu struju (DC), ali umjesto mehaničke komutacije koriste elektroničku, što im omogućuje veću učinkovitost, bolju regulaciju brzine i duži vijek trajanja u usporedbi s motorima s četkicama. Njihov princip rada temelji se na elektromagnetskoj indukciji i Lorentzovoj sili, pri čemu električna struja koja prolazi kroz statorske namote stvara magnetsko polje koje pokreće rotor s trajnim magnetima. Za razliku od klasičnih motora s četkicama, gdje komutaciju osigurava fizički kontakt četkica i komutatora, u BLDC motorima to obavlja elektronički regulator brzine (ESC), koji dinamički mijenja protok struje kroz namote kako bi održao neprekidnu vrtnju rotora.



Slika 8. Usporedba konstrukcije motora s četkicama i bez četkica[7]



BLDC motori se sastoje od statora, rotora i elektroničkog komutatora. Stator sadrži bakrene namote koji su raspoređeni u različite konfiguracije, poput Y-konfiguracije, koja omogućuje veći moment pri nižim brzinama, ili delta-konfiguracije, koja omogućuje veću brzinu vrtnje pri istoj ulaznoj struji. Rotor, koji se nalazi unutar ili oko statora, izrađen je od trajnih magneta, najčešće neodimijskih, zbog njihove visoke magnetske indukcije. Ovisno o konstrukciji, BLDC motori mogu imati unutarnji (inrunner) ili vanjski (outrunner) rotor. Inrunner konfiguracija, gdje se rotor nalazi unutar statora, koristi se u aplikacijama koje zahtijevaju visoku brzinu i malu masu, dok se kod kvadrokoptera češće koristi outrunner konfiguracija, gdje se rotor nalazi izvana i omogućuje veći okretni moment pri nižim brzinama, što je idealno za pokretanje propelera.



Slika 9. Različiti načini izvedbe BLDC motora[12]

Rad BLDC motora temelji se na elektroničkoj komutaciji, gdje ESC kontrolira uključivanje i isključivanje statorskih namota u preciznim vremenskim intervalima, čime stvara rotirajuće magnetsko polje koje povlači rotor u stalnu vrtnju. Ovisno o načinu detekcije položaja rotora, BLDC motori mogu koristiti Halleove senzore ili raditi u "sensorless" načinu, gdje se položaj rotora određuje pomoću povratne elektromotorne sile (Back EMF). Ovakav način rada omogućuje preciznu regulaciju brzine i momenta, što ih čini pogodnima za primjene gdje su potrebni brzi odzivi i visoka energetska učinkovitost.

Jedna od glavnih prednosti BLDC motora je njihova visoka učinkovitost jer nemaju trenja uslijed četkica, što smanjuje energetske gubitke i zagrijavanje. Također, omogućuju bolju

kontrolu brzine i momenta zahvaljujući preciznoj elektroničkoj regulaciji, a njihov dug vijek trajanja proizlazi iz činjenice da nemaju mehaničkih dijelova koji se troše. Međutim, njihova složenost zahtijeva dodatnu elektroniku, poput ESC-a, što povećava troškove i postavlja veće zahtjeve na upravljanje motorom.

U kvadrokopterima su BLDC motori nezaobilazni jer omogućuju visoku energetska učinkovitost i preciznu kontrolu rada svakog pojedinog motora. Kako bi kvadrokopter bio stabilan u letu, brzina svakog motora mora se stalno prilagođavati, a BLDC motori su idealni za ovu primjenu jer mogu trenutačno mijenjati broj okretaja i brzo reagirati na promjene u kontroli leta. Outrunner BLDC motori, koji se najčešće koriste u kvadrokopterima, osiguravaju veći okretni moment pri nižim brzinama, što omogućuje optimalno okretanje propelera bez potrebe za dodatnim prijenosnicima. Ova kombinacija visoke učinkovitosti, precizne regulacije i kompaktnog dizajna čini BLDC motore idealnim izborom za kvadrokoptere i mnoge druge napredne električne sustave.



**Slika 10.** BLDC motor tipičan za sportske kvadrokoptere[9]

### 3.3 Energetski sustav

Energetski sustav kvadrokopter ključan je za njegov rad jer omogućuje napajanje svih elektroničkih i mehaničkih komponenti, uključujući motore, mikrokontroler i prijemnik signala. Sustav se sastoji od litij-polimerske (LiPo) baterije, elektroničkog regulatora brzine (ESC) i povezanih električnih spojeva koji osiguravaju pravilnu raspodjelu energije.

Baterija koju koristimo je Turnigy Nano-Tech 1300mAh 2S 25C LiPo s XT60 konektorom. Ova baterija ima kapacitet od 1300mAh i radi na nominalnom naponu od 7.4V, dok je puni napon 8.4V. S obzirom na svoj C-rating od 25C, sposobna je kontinuirano isporučivati struju do 32.5A, što osigurava dovoljno snage za napajanje svih motora i elektroničkih modula kvadrokopterima. Litij-polimerske baterije su idealne za primjenu u kvadrokopterima zbog svoje visoke gustoće energije, male mase i sposobnosti isporuke velike struje u kratkom vremenskom razdoblju.



**Slika 11. Baterija korištena u kvadrokopteru[10]**

Elektronički regulator brzine (ESC) koji koristimo je HobbyKing 6A (2~3S) ESC s ugrađenim UBEC-om od 5V/0.5A (pojedan za svaki motor). ESC je ključna komponenta u pogonu kvadrokoptera jer regulira količinu električne energije koju motor prima te pretvara istosmjerni napon baterije u trofazni izmjenični signal potreban za rad BLDC motora. U ovom slučaju, ESC prima signal iz mikrokontrolera koji određuje željenu brzinu vrtnje motora te odgovarajuće prilagođava izlazne PWM signale.



**Slika 12. Elektronički regulator brzine (ESC)[11]**

Motor koji koristimo je GEPRC GR1105 5000KV, koji je BLDC (bez četkica) dizajniran za rad na naponu od 2S do 4S. Budući da naš ESC podržava 2S-3S baterije, električni sustav je kompatibilan, međutim vrijedi istaknuti da ESC ima stalnu strujnu sposobnost od samo 6A i struju kratkotrajnog maksimalnog trenutačnog udara od 8A, dok motor može povući više struje pri punom opterećenju. U situacijama visokog opterećenja, poput naglog ubrzanja ili oštih manevara, ESC bi mogao dosegnuti svoje maksimalne granice, što može dovesti do

privremenog smanjenja učinkovitosti ili većeg opterećenja, no sustav bi i dalje trebao raditi bez većih problema.

Ugrađeni UBEC (Battery Eliminator Circuit) osigurava stabilnih 5V za napajanje mikrokontrolera i prijemnika, eliminirajući potrebu za dodatnim regulatorima napona. ESC podržava rad s baterijama 2S do 3S, što znači da je kompatibilan s našom 2S baterijom, ali kako bi se osigurala dugoročna pouzdanost i stabilnost sustava, razmatranje ESC-a s većom strujnom sposobnošću (npr. 10A ili 12A) moglo bi biti korisno, ali i skuplje.

Cjelokupan energetska sustav osmišljen je tako da osigura stabilno i efikasno napajanje kvadrokoptera, s baterijom kao glavnim izvorom energije, ESC-om koji regulira pogon motora i ugrađenim UBEC-om koji osigurava napajanje elektronike. Ovaj sustav omogućuje preciznu kontrolu leta i manevriranje.

**Tablica 1. Tehničke karakteristike energetski komponenti i motora**

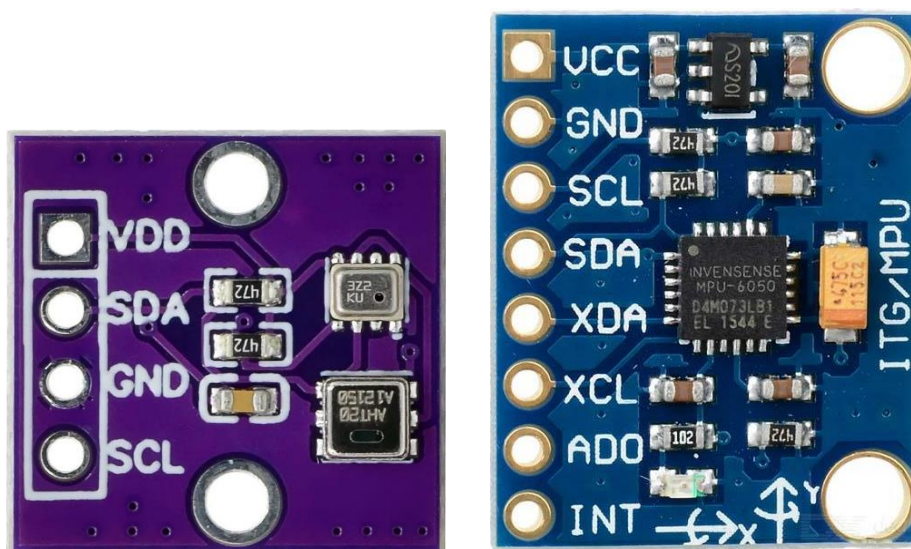
Komponenta	Model	Napon (V)	Struja (A)	Snaga(W)	Dodatne karakteristike
Baterija	Turnigy Nano-Tech 1300mAh 2S 25C LiPo	7.4V(nom.) 8.4V(puni.)	32.5A (maks.)	240W (pri 7.4)	Kapacitet 1300mAh, XT60 konektor, visoka strujna isporuka
ESC	HobbyKing 6A (2 ~3S) ESC s UBEC-om	7.4V-11.1V (3S-2S)	6A (stalna), 8A (burst)	59W(pri 7.4V,8A)	Ugrađeni UBEC 5V/0.5A, PWM upravljanje
Motor	GEPRC GR1105 5000KV	7.4V-14.8V (3S-4S)	~8-10A (ovisno o opterećenju)	74W(pri 7.4V, 10A)	Brushless, visoki KV za male propelere, lagana konstrukcija

### 3.4 Senzori i navigacija

U potpoglavlju Senzori analizirat će se ključne komponente koje omogućuju stabilan i kontroliran let kvadrokoptera. Dva osnovna senzora koja ćemo detaljno opisati su IMU (Inertial Measurement Unit) i barometar BMP280.

IMU je neizostavan dio navigacijskih sustava u zrakoplovima, autonomnim vozilima i, naravno, u kvadrokopterima. On omogućuje precizno praćenje položaja i kretanja letjelice u prostoru, pružajući podatke o ubrzanju i kutnoj brzini. Naš kvadrokopter koristi MPU6050, senzor koji u jednom čipu objedinjuje troosni akcelerometar i troosni žiroskop. Ovi podaci su ključni za održavanje stabilnosti letjelice, jer omogućuju mikrokontroleru da detektira odstupanja od željene orijentacije i promptno prilagodi brzine pojedinih motora kako bi ispravio položaj.

Osim IMU senzora, kvadrokopter koristi BMP280, barometar koji mjeri atmosferski tlak i omogućuje precizno određivanje visine. Ovaj senzor omogućuje funkciju automatskog održavanja visine, pri čemu mikrokontroler analizira podatke o tlaku i na temelju njih prilagođava rad motora kako bi kvadrokopter ostao stabilan na zadanoj visini.



Slika 13. BMP280 (lijevo)[13] i MPU6050 (desno)[14]

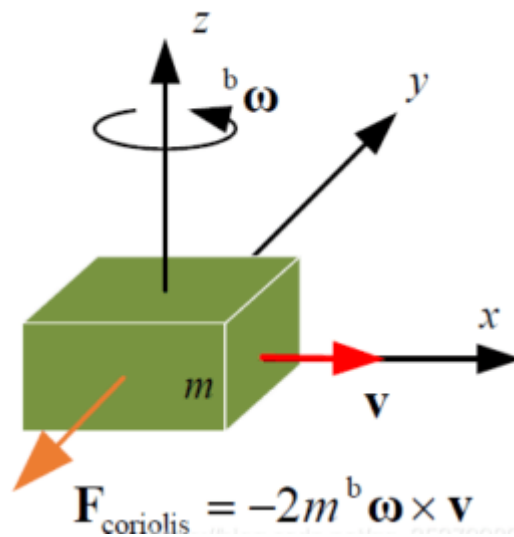
### 3.4.1 IMU- Inercijska mjerna jedinica

MPU6050 je jedan od najčešće korištenih IMU senzora u bespilotnim letjelicama zbog svoje integracije akcelerometra i žiroskopa u jednom čipu, što omogućuje jednostavnu obradu podataka i smanjenje latencije. Ovaj senzor koristi MEMS (Microelectromechanical Systems) tehnologiju za mjerenje ubrzanja i kutnih brzina.

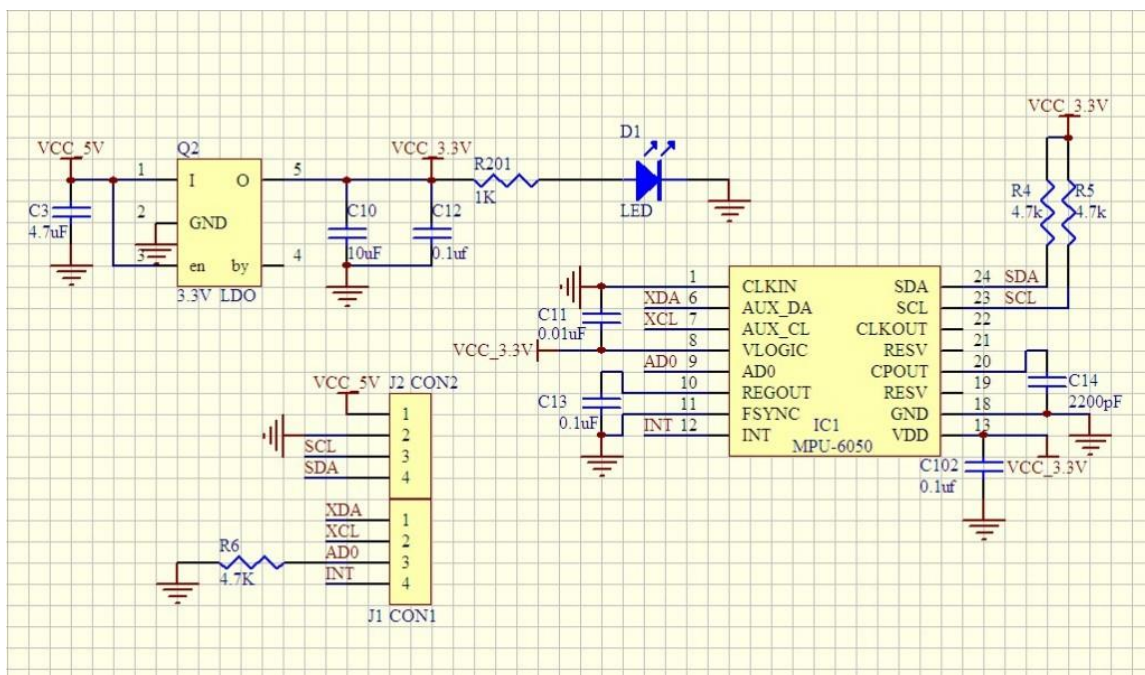
Akcelerometar u MPU6050 funkcionira s pomoću mikroskopski malih kapacitinih struktura koje reagiraju na sile ubrzanja. Kada se senzor pomakne, dolazi do mikroskopskih promjena u kapacitetu, koje se zatim pretvaraju u električne signale i obrađuju unutar senzora.

Žiroskop unutar MPU6050 koristi Coriolisov efekt za mjerenje kutne brzine. Unutar čipa nalaze se vibrirajuće mase koje pri rotaciji stvaraju tangencijalne sile proporcionalne brzini vrtnje. Te sile se potom pretvaraju u električne signale koji daju informaciju o kutnoj brzini kvadrokoptera.

Podaci iz MPU6050 šalju se na mikrokontroler putem I2C sučelja, što omogućuje brzu i učinkovitu razmjenu informacija s niskom potrošnjom energije. Ovi podaci se zatim koriste u PID regulatorima letjelice kako bi se osigurala stabilnost i precizno upravljanje.



Slika 14. Coriolis-ova sila i IMU[16]



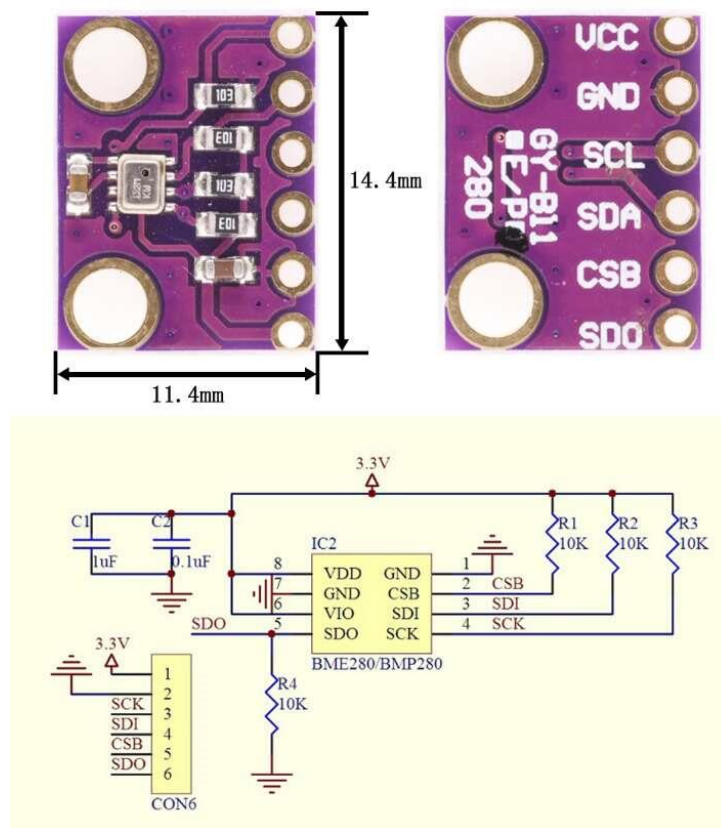
Slika 15. MPU6050 shema[17]

### 3.4.2 BMP280 – Barometar za mjerenje visine

BMP280 je senzor koji koristi piezorezistivne elemente za mjerenje atmosferskog tlaka, čime omogućuje određivanje visine kvadrokoptera. Princip rada temelji se na činjenici da se tlak zraka smanjuje s povećanjem nadmorske visine – što je letjelica više, to je tlak niži.

Senzor mjeri apsolutni tlak zraka i koristi ugrađene algoritme za kompenzaciju temperature kako bi osigurao precizna očitavanja. Na temelju poznatih atmosferskih modela, mikrokontroler može izračunati trenutnu visinu letjelice.

Podaci iz BMP280 također se prenose putem I2C sučelja, što omogućuje jednostavnu komunikaciju s mikrokontrolerom. Kada se kvadrokopter treba održati na zadanoj visini, kontrolni algoritam uspoređuje očitavanja iz barometra s referentnom vrijednošću i prema potrebi prilagođava brzinu motora kako bi se kompenzirale promjene tlaka uzrokovane, primjerice, naletima vjetra.



Slika 16. BPM280- shema spajanja[18]

### 3.5 Upravljačka jedinica

Upravljačka jedinica kvadrokoptera predstavlja srce sustava jer koordinira rad svih ostalih komponenti i osigurava stabilan let. Njezina glavna funkcija je prikupljanje i obrada podataka iz različitih senzora, interpretacija korisničkih komandi te dinamičko upravljanje brzinom motora kako bi letjelica ostala stabilna i reagirala na promjene u okruženju.

U ovom kvadrokopteru upravljačka jedinica je Teensy 4.0, moćan mikrokontroler baziran na ARM Cortex-M7 arhitekturi. Ova platforma omogućuje vrlo brzu obradu podataka i rad u stvarnom vremenu, što je ključno za precizno upravljanje letjelicom.

Upravljačka jedinica kontinuirano prikuplja podatke sa senzora, uključujući informacije s IMU senzora MPU6050 o ubrzanju i kutnoj brzini letjelice te očitavanja barometra BMP280 koji omogućuje mjerenje visine. Svi ovi podaci obrađuju se s pomoću filtracijskih algoritama kao što su komplementarni filter ili Kalmanov filter, čime se smanjuju pogreške senzora i osiguravaju što preciznije informacije o orijentaciji kvadrokoptera. Pored obrade podataka sa senzora, upravljačka jedinica interpretira i korisničke komande koje dolaze putem PPM signala iz prijemnika Flysky FS-iA6B. Nakon dekodiranja tih signala, pretvara ih u odgovarajuće naredbe za regulaciju motora.



Slika 17. Flysky transmitter i prijemnik[18][19]



Osim toga, unutar upravljačke jedinice implementirani su regulacijski algoritmi poput PID regulatora, koji osiguravaju stabilnost letjelice i precizno prilagođavaju brzine motora. Svaka prilagodba brzine temelji se na razlici između stvarnog i željenog položaja kvadrokoptera, što omogućuje preciznu kontrolu u letu. Ovisno o načinu rada, upravljačka jedinica omogućuje različite režime leta, poput stabiliziranog leta, akrobatskog načina rada ili automatskog zadržavanja visine. Nakon obrade svih podataka, Teensy 4.0 generira PWM signale koji se zatim šalju elektroničkim regulatorima brzine (ESC-ovima), čime se kontrolira brzina svakog od četiri motora. Brzine se kontinuirano prilagođavaju u stvarnom vremenu kako bi letjelica mogla stabilno lebdjeti ili izvoditi manevre. Osim osnovnih upravljačkih funkcija, upravljačka jedinica omogućuje i dodatne funkcije poput komunikacije s vanjskim uređajima putem I2C, SPI ili UART sučelja, pohrane podataka o letu na SD karticu te eventualnog slanja telemetrijskih podataka prema tlu.

Teensy 4.0 predstavlja moćan 32-bitni mikrokontroler razvijen od strane PJRC-a i ističe se izuzetno visokom brzinom rada i procesorskom snagom. To ga čini pogodnim za sustave koji zahtijevaju brzu obradu podataka u stvarnom vremenu, poput upravljanja kvadrokoptrom. Opremljen je NXP i.MX RT1062 čipom koji koristi ARM Cortex-M7 arhitekturu i radi na taktu od 600 MHz, što ga čini jednim od najbržih mikrokontrolera u svojoj klasi. Ima 1 MB RAM-a i 2 MB Flash memorije, a podržava širok raspon komunikacijskih sučelja poput I2C, SPI, UART i CAN busa. Posjeduje 32 PWM kanala, što omogućuje precizno upravljanje motorima i drugim komponentama. Njegova ključna prednost je podrška za floating-point operacije putem ugrađene FPU jedinice, što omogućuje vrlo brze matematičke izračune potrebne za upravljanje letjelicom.

Glavni čip koji pokreće Teensy 4.0, NXP i.MX RT1062, dizajniran je za ugrađene sustave s visokim performansama. Sadrži ARM Cortex-M7 jezgru s dvostrukim izvršnim jedinicama, što omogućuje paralelno izvršavanje više operacija i značajno povećava učinkovitost obrade podataka. Integrirani FlexPWM moduli omogućuju precizno generiranje PWM signala za kontrolu motora, dok ugrađeni Direct Memory Access (DMA) omogućuje brz prijenos podataka bez dodatnog opterećenja procesora. Čip također sadrži analogno-digitalne pretvarače za očitavanje analognih signala senzora, kao i napredne module za komunikaciju, uključujući I2C, SPI i UART. Zahvaljujući ovim karakteristikama, Teensy 4.0 može istovremeno obrađivati podatke sa senzora, računati regulacijske algoritme i generirati PWM signale za ESC-ove bez kašnjenja, čime osigurava stabilan rad kvadrokoptera čak i u dinamičnim uvjetima leta.

# Welcome to Teensy® 4.0

32 Bit Arduino-Compatible Microcontroller

To begin using Teensy, please visit the website & click [Getting Started](http://www.pjrc.com/teensy).  
[www.pjrc.com/teensy](http://www.pjrc.com/teensy)

**Digital Pins**  
digitalRead  
digitalWrite  
pinMode

**Analog Pins**  
analogRead

**PWM Pins**  
analogWrite

**Digital Audio**  
Audio Library

**Serial Ports**  
Serial1 - Serial7

**I<sup>2</sup>C Port**  
Wire Library

**SPI Port**  
SPI Library

**CAN Bus**  
FlexCAN\_14  
Library

**Pin Functions:**

- Digital:** 24-33 (PWM), 25-33 (A10-A13), 26-33 (MOSI1, RX7, CRX3, OUT1B), 27-33 (A11-A13), 28-33 (RX6, TX7, CTX3, MCLK2), 29-33 (SDA2, SCK1), 30-33 (PWM).
- Analog:** 23-33 (A9-A13), 24-33 (A10-A13), 25-33 (A11-A13), 26-33 (A12), 27-33 (A13), 28-33 (RX7), 29-33 (TX7), 30-33 (CRX3), 31-33 (MCLK2), 32-33 (PWM).
- Digital Audio:** 23-33 (A9-A13), 24-33 (A10-A13), 25-33 (A11-A13), 26-33 (A12), 27-33 (A13), 28-33 (RX7), 29-33 (TX7), 30-33 (CRX3), 31-33 (MCLK2), 32-33 (PWM).
- Serial:** 23-33 (A9-A13), 24-33 (A10-A13), 25-33 (A11-A13), 26-33 (A12), 27-33 (A13), 28-33 (RX7), 29-33 (TX7), 30-33 (CRX3), 31-33 (MCLK2), 32-33 (PWM).
- I<sup>2</sup>C:** 23-33 (A9-A13), 24-33 (A10-A13), 25-33 (A11-A13), 26-33 (A12), 27-33 (A13), 28-33 (RX7), 29-33 (TX7), 30-33 (CRX3), 31-33 (MCLK2), 32-33 (PWM).
- SPI:** 23-33 (A9-A13), 24-33 (A10-A13), 25-33 (A11-A13), 26-33 (A12), 27-33 (A13), 28-33 (RX7), 29-33 (TX7), 30-33 (CRX3), 31-33 (MCLK2), 32-33 (PWM).
- CAN:** 23-33 (A9-A13), 24-33 (A10-A13), 25-33 (A11-A13), 26-33 (A12), 27-33 (A13), 28-33 (RX7), 29-33 (TX7), 30-33 (CRX3), 31-33 (MCLK2), 32-33 (PWM).

**Power:** VIN (3.6 to 5.5 volts), GND, 3.3V (250 mA max), VBat.

**Other:** On/Off Program, GND, 3.3V, VBat.

**LEDs:** Bar LED, Loading Status (dim: Ready, bright: Writing, blink: No USB).

**Microcontroller:** MIMXRT1062, 512KB, CTFA1B4BH.

All digital pins have interrupt capability.

# Teensy® 4.0 Back Side

Additional pins and features available on the back side

**SD Card (4 bit SDIO)**  
SD Library  
SD.begin(BUILTIN\_SD\_CARD)

**USB Host**  
USBHost\_t36 Library

**Pin Functions:**

- SD Card:** 34 (DAT1), 35 (DAT0), 36 (CLK), 37 (CMD), 38 (DAT3), 39 (DAT2), 34 (MISO2), 35 (MOSI2), 36 (CS2), 37 (SCK2), 38 (RX5), 39 (TX5).
- USB Host:** 34 (MISO2), 35 (MOSI2), 36 (CS2), 37 (SCK2), 38 (RX5), 39 (TX5).
- Other:** 24-33 (PWM), 25-33 (A10-A13), 26-33 (MOSI1, RX7, CRX3, OUT1B), 27-33 (A11-A13), 28-33 (RX6, TX7, CTX3, MCLK2), 29-33 (SDA2, SCK1), 30-33 (PWM).

**Power:** On/Off Program, GND, 3.3V, VBat.

**Other:** VUSB, D-, D+, GND.

**Notes:** Use 3V coin cell for Date & Time and power management features. Teensy 4.0 signal pins are **not** 5V tolerant. Do not apply more than 3.3 volts to any pin, except VIN or VUSB.

**Warning:** Cut to separate VIN from VUSB, if using battery or external power.

For solutions to the most common issues and technical support, please visit:  
[www.pjrc.com/help](http://www.pjrc.com/help)

Teensy 4.0 System Requirements:  
 PC computer with Windows 7, 8, 10 or later  
 or Ubuntu Linux 14.04 or later  
 or Macintosh OS-X 10.8 or later  
 USB Micro-B Cable

7 14833 87948 0

Slika 18. Prednja i stražnja strana Teensy 4.0 mikrokontrolera[20]

## 4. MATEMATIČKI MODEL

Matematički model kvadrokoptera ključan je za analizu njegove dinamike i upravljanja. Ovaj model omogućuje predviđanje ponašanja letjelice u prostoru na temelju ulaznih veličina, poput brzina motora, i vanjskih utjecaja, poput gravitacije i aerodinamičkih sila. Kvadrokopter se može smatrati krutim tijelom sa šest stupnjeva slobode gibanja, čije kretanje u translaciji i rotaciji proizlazi iz kinematičkih i dinamičkih jednadžbi.

U ovom poglavlju razmatra se matematički opis kvadrokoptera kroz dva temeljna dijela: kinematički i dinamički model. Kinematički model definira odnos između koordinata položaja, brzine i orijentacije letjelice u različitim referentnim sustavima, dok dinamički model opisuje utjecaj sila i momenata na njegovo gibanje. Newton-Eulerove jednadžbe koriste se za izvođenje dinamičkog modela, uz pretpostavku da je kvadrokopter idealno kruto tijelo, a pojednostavljenja se uvode kako bi se olakšala implementacija u sustave upravljanja.

Razvoj i razumijevanje ovih jednadžbi neophodni su za modeliranje sustava, dizajn regulatora i simulaciju letjelice, čime se osigurava stabilnost i preciznost u letu.

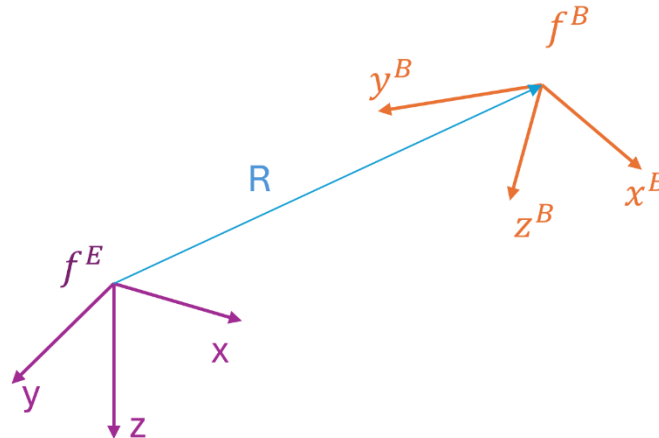
Kinematika i dinamika višerotorske letjelice mogu se opisati Newton-Eulerovim formalizmom uz sljedeće pretpostavke:

- Ishodište tijesno vezanog koordinatnog sustava poklapa se s centrom mase i centrom gravitacije letjelice.
- Osi koordinatnog sustava vezanog za tijelo letjelice odgovaraju glavnim osima inercije, pri čemu je matrica inercije dijagonalna i ne mijenja se tijekom vremena.
- Mjerenja sa senzora na letjelici najčešće su izražena u koordinatnom sustavu vezanom za tijelo letjelice.
- Upravljajuće sile i momenti definirani su u koordinatnom sustavu letjelice.
- Propeleri su potpuno krutima, bez efekta savijanja lopatica.
- Potisak i otpor propelera proporcionalni su kvadratu njegove kutne brzine.

## 4.1 Kordinatni sustavi i transformacije

Za potrebe kinematike i dinamike opisana su dva desnokretna koordinatna sustava:

- Koordinatni sustav fiksiran na Zemlji  $f^E$
- Koordinatni sustav fiksiran na tijelu letjelice  $f^B$



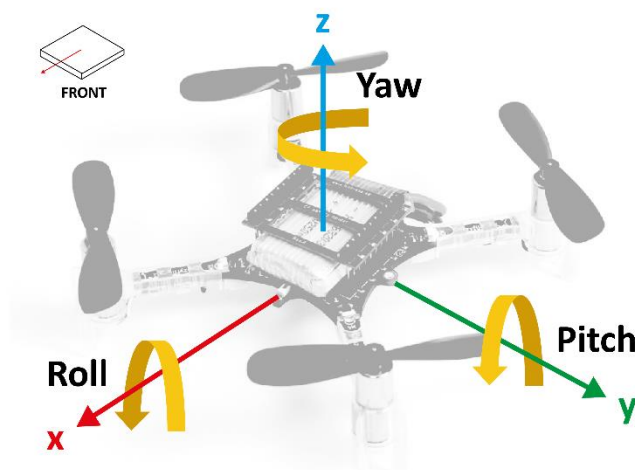
Slika 19. Referentni koordinatni sustav letjelice

Ishodište koordinatnog sustava  $f^E$  fiksirano je na površini Zemlje gdje je smjer z-osi usmjeren prema središtu Zemlje. U koordinatnom sustavu  $f^E$  definirani su pozicija i orijentacija letjelice. Pozicija je određena translatorskim koordinatama vektora koji povezuje ishodišta koordinatnih sustava  $f^E$  i  $f^B$ , a označava se  $\xi$ .

$$\xi = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

Višerotorske letjelice mogu se rotirati oko triju osnovnih osi, što znači da je njihova orijentacija definirana pomoću tri Eulerova kuta. Ovi kutovi opisuju položaj koordinatnog sustava letjelice u odnosu na Zemlju. Rotacija oko x osi, koja je uzdužna osa letjelice, označena je kao kut valjanja (roll angle)  $\phi$ , rotacija oko y osi, bočne ose, označena je kao kut propinjanja (pitch angle)  $\theta$ , dok rotacija oko z osi, vertikalne ose, odgovara kutu skretanja (yaw angle)  $\psi$ . Vektor rotacije označavati ćemo s  $\eta$ .

$$\eta = \begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix} \quad (4.2)$$



Slika 20. Kutovi rotacije letjelice

Pretpostavlja se da se težište letjelice i ishodište koordinatnog sustava  $f^B$  nalaze u istoj točki. Koordinatni sustav  $f^B$  također je desnokretni Kartezijev sustav, pri čemu se pretpostavlja da mu se ishodište nalazi u težištu letjelice (Center of Mass – COM). Budući da je  $f^B$  čvrsto povezan s konstrukcijom kvadroptera koji rotira, pri primjeni Newtonovih zakona gibanja potrebno je uzeti u obzir i inercijske (d’Alambertove) sile. U  $f^B$  koordinatnom sustavu, koordinatnom sustavu letjelice, definirane su translacijske (linearne) brzine  $\mathbf{v}^B = [u \quad v \quad w]^T$ , rotacijske (kutne) brzine  $\boldsymbol{\omega}^B = [p \quad q \quad r]^T$ , sile  $\mathbf{F}$  te momenti  $\mathbf{T}$ .

## 4.2 Kinematika letjelice

Kinematika je grana mehanike koja proučava gibanje tijela bez obzira na njegove uzroke. Kruto tijelo je idealizirano tijelo nepromjenljiva oblika i volumena u kojem se ne mijenja međusobni položaj čestica. Kretanje krutog tijela u translaciji može se opisati kao gibanje čestice smještene u njegovom težištu. Prema Eulerovom teorem, svaka složena rotacija može se prikazati kao niz rotacija oko osnovnih koordinatnih osi. Ove rotacije definirane su Eulerovim kutovima  $\phi, \theta, \psi$ , koji određuju međusobni položaj dvaju koordinatnih sustava pod uvjetom da dijele isto ishodište.

Kinematika krutog tijela sa šest stupnjeva slobode može se izraziti u matricnom obliku kao:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{J}\mathbf{v} \quad (4.3)$$

gdje  $\mathbf{\hat{\epsilon}}$  predstavlja generalizirani vektor brzine u koordinatnom sustavu Zemlje  $f^E$ , dok je  $\mathbf{v}$  generalizirani vektor brzine izražen u koordinatnom sustavu letjelice  $f^B$ .

$\mathbf{\epsilon}$  se sastoji od položaja kvadrokoptera  $\xi$  i stava kvadrokoptera  $\eta$ .

$$\mathbf{\epsilon} = [\xi \quad \eta]^T = [X \quad Y \quad Z \quad \phi \quad \theta \quad \psi]^T \quad (4.4)$$

Generalizirani vektor brzine letjelice u  $f^B$  definiran je na sličan način

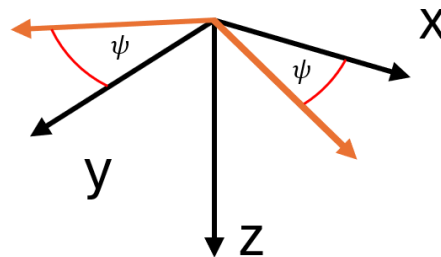
$$\mathbf{v} = [\mathbf{v}^B \quad \boldsymbol{\omega}^B]^T = [u \quad v \quad w \quad p \quad q \quad r]^T. \quad (4.5)$$

Matrica  $\mathbf{J}$  predstavlja ukupnu matricu transformacije, koja se sastoji od rotacijske i transformacijske matrice te ima simetrična svojstva. Ova matrica omogućuje prijenos ubrzanja iz sustava letjelice  $f^B$ , u sustav Zemlje  $f^E$ , čime se pojednostavljuje opis gibanja kvadrokoptera. Matrica  $\mathbf{J}$  sastavljena je od četiri podmatrice

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{T} \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

gdje je  $\mathbf{R}$  rotacijska matrica koja povezuje linearne brzine letjelice  $\mathbf{v}^B = [u \quad v \quad w]^T$  s linearnim brzinama izraženim u koordinatnom sustavu Zemlje  $\mathbf{v}^E = \dot{\boldsymbol{\xi}} = [\dot{X} \quad \dot{Y} \quad \dot{Z}]$ .

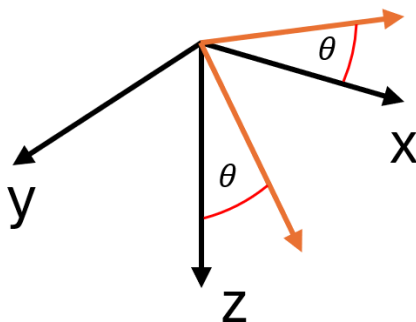
Razmatrati će se slijed rotacija prema shemi „skretanje – propinjanje – valjanje“ (eng. *yaw-pitch-roll*)



Slika 21. Rotacija oko osi Z (skretanje)

$$\mathbf{R}_1(\psi) = \begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

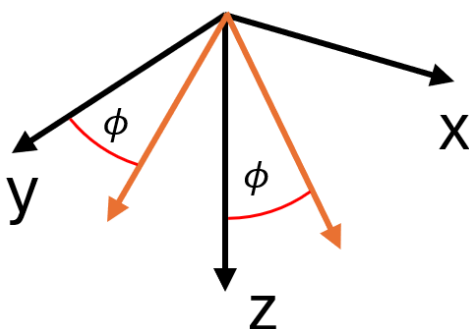
Matrica  $\mathbf{R}_1$  opisuje rotaciju oko osi Z [Slika 21. Rotacija oko osi Z (skretanje)Slika 21].



Slika 22. Rotacija oko osi Y (propinjanje)

$$\mathbf{R}_2(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

Matrica  $\mathbf{R}_2$  opisuje rotaciju oko osi Y [Slika 22].



Slika 23. Rotacija oko osi X (valjanje)

$$\mathbf{R}_3(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

Matrica  $\mathbf{R}_3$  opisuje rotaciju oko osi X [Slika 23].

Množenjem matrica  $\mathbf{R}_1$ ,  $\mathbf{R}_2$ ,  $\mathbf{R}_3$  dobiva se ukupna matrica transformacije  $\mathbf{R}$ .

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos\psi \cos\theta & \cos\psi \sin\theta \sin\phi - \sin\psi \cos\phi & \cos\psi \sin\theta \cos\phi + \sin\psi \sin\phi \\ \sin\psi \cos\theta & \sin\psi \sin\theta \sin\phi + \cos\psi \cos\phi & \sin\psi \sin\theta \cos\phi - \cos\psi \sin\phi \\ -\sin\theta & \cos\theta \sin\phi & \cos\theta \cos\phi \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

$\mathbf{T}$  je transformacijska matrica koja preslikava rotacijski vektor brzina  $\boldsymbol{\omega}^B$  iz koordinatnog sustava letjelice  $f^B$  i rotacijski vektor brzina  $\boldsymbol{\omega}^E$  koordinatnog sustava Zemlje  $f^E$

$$\boldsymbol{\omega}^B = [p \quad q \quad r]^T \quad (4.11)$$

$$\boldsymbol{\omega}^E = \dot{\boldsymbol{\eta}} = [\dot{\phi} \quad \dot{\theta} \quad \dot{\psi}]^T \quad (4.12)$$

Transformacijsku matricu moguće je izvesti određivanjem derivacija Eulerovih kutova pri prijelazu iz inercijalnog sustava u sustav letjelice, pri čemu se kao temelj koristi jednačba:

$$\boldsymbol{\omega}^B = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \mathbf{R}_3(\phi)\mathbf{R}_2(\theta)\mathbf{R}_1(\psi) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} + \mathbf{R}_3(\phi)\mathbf{R}_2(\theta) \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} + \mathbf{R}_3(\phi) \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.13)$$

Daljnijim izvođenjem dolazi se od:

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \mathbf{T} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin\theta \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi \cos\theta \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (4.14)$$



Inverzijom matrice transformacije  $\mathbf{T}^{-1}$  dolazi se do sljedećeg:

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \mathbf{T} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin\theta \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi/\cos\theta & \cos\phi/\cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

### 4.3 Dinamika letjelice

Newton-Eulerova metoda, koja se oslanja na Eulerove zakone gibanja krutog tijela, koristi se za formulaciju jednadžbi gibanja letjelice. Translacijsko, odnosno linearno gibanje krutog tijela, temelji se na Drugom Newtonovom zakonu ( $F = ma$ ) te se može definirati u inercijalnom i tjelesnom koordinatnom sustavu. Početna jednadžba gibanja postavlja se u inercijalnom sustavu  $f^E$ , iz kojeg se daljnjom analizom dobiva jednadžba u koordinatnom sustavu tijela  $f^B$  [21][23].

$$m\ddot{\xi} = F^E \quad (4.16)$$

$$m\dot{\mathbf{v}}^B + \boldsymbol{\omega}^B \times (m\mathbf{v}^B) = \mathbf{F}^B \quad (4.17)$$

U toj formulaciji,  $m$  označava masu letjelice,  $\ddot{\xi}$  predstavlja vektor ubrzanja u  $f^E$ , dok su  $F^E$  i  $F^B$  vektori sila izraženi u inercijalnom i tjelesnom sustavu.

Rotacijsko (kutno) gibanje krutog tijela opisuje se prema drugom Eulerovom zakonu, koji navodi da je promjena kutnog momenta u odnosu na fiksnu točku jednaka rezultanti svih vanjskih momenta koji djeluju na tijelo unutar zadanog koordinatnog sustava.

$$\mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}}^B + \boldsymbol{\omega}^B \times (\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}^B) = \mathbf{M}^B \quad (4.18)$$

U ovoj formulaciji  $\boldsymbol{\omega}^B$  je kutna brzina u odnosu na koordinatni sustav tijela odnosno letjelice,  $\mathbf{M}^B$  je vektor vanjskih momenta u odnosu na koordinatni sustav tijela  $f^B$ , a  $\mathbf{I}$  je matrica inercije. Pod pretpostavkom da višerotorska letjelica ima simetričnu konstrukciju, matrica inercije poprima dijagonalni oblik. Također, masa se može prikazati kao dijagonalna matrica s identičnim elementima  $I_x = I_y = I_z$ .

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

Matrica masa također će biti dijagonalna matrica sa elementima jednakih vrijednosti.

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

Dinamika kvadrokoptera opisana je sljedećom jednađbom:

$$\begin{bmatrix} m\mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{v}}^B \\ \dot{\boldsymbol{\omega}}^B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}^B \times (m\mathbf{v}^B) \\ \boldsymbol{\omega}^B \times (\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}^B) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}^B \\ \mathbf{M}^B \end{bmatrix}. \quad (4.21)$$

Sile  $F^B$  momenti  $M^B$  koji djeluju na višerotorsku letjelicu uključuju: učinke gravitacije, aerodinamičke sile otpora i momenta, silu uzgona propelera i torzijske sile, te žiroskopske učinke. Gravitacijska sila koja djeluje na središte mase letjelice u koordinatnom sustavu tijela može se dobiti množenjem matrice rotacije s vektorom gravitacijske sile u inercijskom koordinatnom sustavu.

Generalizirani vektor sila  $\boldsymbol{\lambda}$  prikazati će se sljedeći način:

$$\boldsymbol{\lambda} = [\mathbf{F}^B \quad \mathbf{M}^B] = [F_x \quad F_y \quad F_z \quad M_\phi \quad M_\theta \quad M_\psi]^T \quad (4.22)$$

Uvrštavanjem jednađbe (4.22) u jednađbu (4.21) dobivamo sljedeći izraz:

$$\mathbf{m}_B \dot{\mathbf{v}} + \mathbf{C}_B(\mathbf{v})\mathbf{v} = \boldsymbol{\lambda} \quad (4.23)$$

gdje je  $\dot{\mathbf{v}}$  generalizirani vektor akceleracije,  $\mathbf{m}_B$  matrica inercije sustava, a  $\mathbf{C}_B(\mathbf{v})$  je matrica Coriolisovih i centripetalnih sila definiranih naspram koordinatnog sustava letjelice  $f^B$ .

Vektor sile  $\boldsymbol{\lambda}$  može se podijeliti u tri komponente: gravitacijski vektor, vektor žiroskopskog momenta i vektor gibanja. Na temelju ovoga može se raspisati jednađba:

$$\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{G}^B + \mathbf{O}^B \boldsymbol{\omega} + \mathbf{U}^B \quad (4.24)$$

Gravitacijska komponenta vektora  $\boldsymbol{\lambda}$  odgovorna je za uvođenje gravitacijskog utjecaja u model. Ova komponenta samo utječe na translacijske (linearne) aspekte, dok ne mijenja kutne komponente gibanja. U koordinatnom sustavu  $f^E$ , gravitacijska sila uvijek ima smjer prema negativnoj  $Z^E$  osi, pod uvjetom da su osi  $f^E$  ostavljene kako je prethodno opisano. Kako se dinamičko ponašanje opisuje u sustavu  $f^B$ , potrebno je gravitacijski vektor prenijeti iz  $f^E$  u  $f^B$

korištenjem rotacijske matrice  $R$ . Zbog rotacija kvadrokoptera, osa  $Z^B$  nije uvijek paralelna s osi  $Z^E$ , pa samo određena komponenta gravitacijske sile djeluje u smjeru osi  $Z^B$ , što ovisi o kutovima valjanja i propinjanja ( $\phi$  i  $\theta$ ).

$$F_g^E = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

$$F_g^B = R \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin\theta mg \\ \sin\phi \cos\theta mg \\ \cos\phi \cos\theta mg \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

$$G^B = \begin{bmatrix} -\sin\theta mg \\ \sin\phi \cos\theta mg \\ \cos\phi \cos\theta mg \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

Kako su motori i propeleri čvrsto integrirani s okvirom letjelice, oni u potpunosti odražavaju njezino translacijsko i rotacijsko gibanje. Posljedično dolazi do precesije, pojave kod koje se orijentacija osi rotacije postepeno mijenja. Kada na tijelo djeluje vanjski zakretni moment koji pokušava promijeniti njegovu ravninu rotacije, os letjelice neće skrenuti direktno u smjeru te sile, već u ravnini koja je na taj smjer okomita.

$$\mathbf{O}^B = \boldsymbol{\omega}^B \times J_{TP} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ (-1)^i \omega_i \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

$\mathbf{O}^B$  predstavlja jednadžbu žiroskopske precesije,  $\boldsymbol{\omega}^B$  predstavlja brzinu i-tog propelera,  $J_{TP}$  predstavlja ukupni inercijski moment oko osi rotora te ovisi o geometriji rotora,  $(-1)^i$  označava predznak rotacije i-tog rotora, pri čemu rotacije u smjeru kazaljke na satu (CW) imaju pozitivan predznak, dok rotacije u suprotnom smjeru (CCW) imaju negativan predznak.

Ukupni žiroskopski moment za kvadrokopter može se izraziti kao:

$$O^B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -qJ_{TP}\omega_1 & qJ_{TP}\omega_2 & -qJ_{TP}\omega_3 & qJ_{TP}\omega_4 \\ pJ_{TP}\omega_1 & -pJ_{TP}\omega_2 & pJ_{TP}\omega_3 & -pJ_{TP}\omega_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.29)$$

Upravljački vektor predstavlja ulaz u dinamički model multirotora, a sastoji se od kombiniranog vektora potisnih sila i momenta. Ovaj vektor je rezultat izravnih naredbi s upravljačke konzole, koji kroz upravljačku matricu  $U^B$  omogućuju neposredan utjecaj na dinamiku sustava [21][23].

$$U^B = \Gamma^B \Omega \quad (4.30)$$

$\Gamma^B$  se definira kao matrica raspodjele kontrole koja povezuje kutne brzine rotora s upravljačkim vektorom, a  $\Omega = [\omega_1^2 \quad \omega_2^2 \quad \omega_3^2 \quad \omega_4^2]^T$  se definira kao vektor kvadratnih kutnih brzina rotora.

Ukupna potisna sila  $F_T$  definirana je kao zbroj svih svake potisne sile individualnog motora.

$$F_T = \sum F_{Ti} \quad (4.31)$$

Propeleri i motori, smješteni na krajevima ruku multirotora, generiraju potisak koji izaziva momente oko različitih osi rotacije. Korištenjem geometrijskih principa, izračunavaju se momenti za svaku os u odnosu na potisnu silu i udaljenost propelera od središta koordinatnog sustava.

Moment oko  $x$ -osi, moment valjanje, definiran je kao  $M_\phi$ .

$$M_\phi = -F_1 \frac{l\sqrt{2}}{2} - F_2 \frac{l\sqrt{2}}{2} + F_3 \frac{l\sqrt{2}}{2} + F_4 \frac{l\sqrt{2}}{2} \quad (4.32)$$

Moment oko  $y$ -osi, moment propinjanja, definiran je kao  $M_\theta$ .

$$M_\theta = F_1 \frac{l\sqrt{2}}{2} - F_2 \frac{l\sqrt{2}}{2} - F_3 \frac{l\sqrt{2}}{2} + F_4 \frac{l\sqrt{2}}{2} \quad (4.33)$$

Zbog primjene Trećeg Newtonovog zakona, skretni moment oko  $z$ -osi javlja se kao rezultat interakcije akcije i reakcije. Naime, moment koji generiraju motori pri okretanju propelera uzrokuje reakcijski moment iste jačine, ali u suprotnom smjeru, koji se prenosi na same motore.

Moment oko  $z$ -osi, moment zakretanja, definiran je kao  $M_\psi$ .

$$M_\psi = -F_1 + F_2 - F_3 + F_4 \quad (4.34)$$

Matrica raspodjele kontrole  $\Gamma^B$  za kvadrokopter u ravnini definirana je sljedećim izrazima (pri čemu su  $K_T$  i  $K_D$  koeficijenti potiska i otpora):

$$\Gamma^B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -K_T & -K_T & -K_T & -K_T \\ -K_T \frac{l\sqrt{2}}{2} & -K_T \frac{l\sqrt{2}}{2} & K_T \frac{l\sqrt{2}}{2} & K_T \frac{l\sqrt{2}}{2} \\ K_T \frac{l\sqrt{2}}{2} & -K_T \frac{l\sqrt{2}}{2} & -K_T \frac{l\sqrt{2}}{2} & K_T \frac{l\sqrt{2}}{2} \\ -K_D & K_D & -K_D & K_D \end{bmatrix}. \quad (4.35)$$

#### 4.3.1 Ukupni dinamički model kvadrokoptera

Ukupni dinamički model definiran u koordinatnom sustavu letjelice dobiven je izjednačavanjem jednadžbi (4.23) i (4.24):

$$m_B \dot{v} + C_B(v)v = G^B + O^B \omega + U^B. \quad (4.36)$$

Izlučivanjem vektora ubrzanja dobiva se:

$$\dot{v} = m_B^{-1}(G^B + O^B \omega + U^B - C_B(v)v) \quad (4.37)$$

Dinamički model sustava može se izraziti u obliku šest diferencijalnih jednadžbi prvog reda, svaka koja odgovara jednom stupnju slobode gibanja. U tom slučaju, translacijska dinamika je opisana sljedećim trima jednadžbama:

$$\dot{u} = (vr - wq) - g \sin \theta, \quad (4.38)$$

$$\dot{v} = (wp - ur) + g \cos \theta \sin \phi, \quad (4.39)$$

$$\dot{w} = (uq - vp) - g \cos \theta \sin \phi + \frac{U_1}{I_x}, \quad (4.40)$$

a rotacijsku dinamiku se može opisati sa također tri jednažbe:

$$\dot{w} = \frac{I_y - I_z}{I_x} qr + \frac{J_{TP}}{I_x} q(-\omega_1^2 + \omega_2^2 - \omega_3^2 + \omega_4^2) + \frac{U_2}{I_x} \quad (4.41)$$

$$\dot{q} = \frac{I_z - I_x}{I_y} pr + \frac{J_{TP}}{I_y} (\omega_1^2 - \omega_2^2 + \omega_3^2 - \omega_4^2) + \frac{U_3}{I_y} \quad (4.42)$$

$$\dot{r} = \frac{I_x - I_y}{I_z} pQ + \frac{U_4}{I_z} \quad (4.43)$$

---

## 5. UPRAVLJAČKI SUSTAV LETJELICE

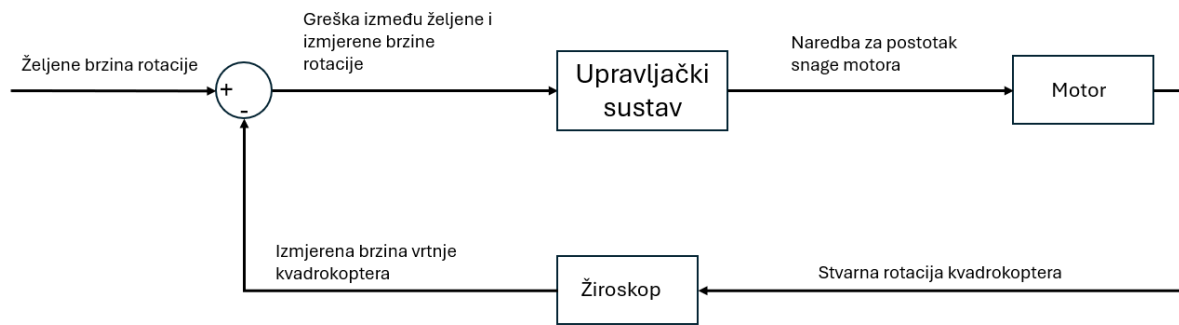
Upravljački sustav letjelice ključan je za osiguranje stabilnosti i preciznosti kretanja bespilotne letjelice. Ovaj sustav omogućuje interpretaciju i izvršavanje naredbi poslanih od strane pilota putem kontrola, kako bi letjelica obavila željeni manevar. Upravljanje višerotorskom letjelicom temelji se na preciznoj distribuciji snage i momenta među rotorima, što zahtijeva učinkovite algoritme za stabilizaciju i kontrolu dinamike. Upravljački sustav obuhvaća različite komponente, kao što su PID regulator, prijenos signala i filtriranje podataka sa senzora, koje omogućuju optimalno upravljanje u stvarnom vremenu. Razumijevanje i implementacija ovih elemenata od presudne su važnosti za postizanje točnosti i pouzdanosti letjelice tijekom različitih uvjeta letenja.

### 5.1 PID regulator

Zbog ljudskih reakcijskih vremena nije moguće stabilizirati kvadrokopter u zraku bez automatskog sustava upravljanja. U ovom projektu koristi se brza upravljačka petlja koja omogućuje automatsku stabilizaciju letjelice, uzimajući u obzir naredbe poslanih putem radio-prijamnika.

Za stabilizaciju kvadrokoptera primjenjuje se vrlo brza automatizirana kontrola koja nekoliko puta u sekundi šalje nove naredbe za svaki od četiri motora. Kontrolni sustav, temeljen na frekvenciji od 250 Hz, omogućuje da svakih 0,004 sekunde svi motori primaju nove naredbe. Naredbe se generiraju ne samo na temelju korisničkih ulaza putem prijamnika, već i automatski, uzimajući u obzir stvarnu brzinu rotacije kvadrokoptera, koja se mjeri žiroskopom.

Zatvoreni kontrolni sustav koristi se za regulaciju brzina rotacije na osima valjanja, posrtanja i skretanja. Korištenjem žiroskopa mjeri se stvarna brzina rotacije kvadrokoptera koja se uspoređuje s željenom brzinom rotacije poslanom iz prijamnika. Greška između izmjerene i željene brzine rotacije transformira se u naredbu za snagu motora koja se šalje svakom od četiri motora. Promjena snage motora utječe na brzinu rotacije kvadrokoptera, približavajući je željenoj vrijednosti. Ovaj proces ponavlja se svakih 0,004 sekunde tijekom leta.



Slika 24. Generalni blok dijagram Upravljačkog sustava

[Slika 24.] prikazuje generaliziranu shemu upravljanja dronom. Sustav upravljanja funkcionira tako da se sustavu zadaje željena brzina rotacije, ona se oduzima od stvarne brzine rotacije izmjerene na žiroskopu kako bi se dobila greška i kako bi upravljački sustav znao za koliko stvarna vrijednost odstupa od željene.

### 5.1.1 P regulator

Prvo će se pretpostaviti da se sustav regulacije sastoji samo o P regulatora, stoga će se gledati razlika između željene i izmjerene brzine rotacije pomnožene s konstantom P:

$$Input_{motor} = P \cdot (DesiredRate - Rate) \quad (5.1)$$

Gdje je željena odnosno zadana brzina vrtnje  $DesiredRate$ , mjerena brzina vrtnje  $Rate$ , te  $Input_{motor}$  označava upravljačku varijablu za motor.

Ova jednadžba može se pojednostaviti ako definiramo  $Err(k)$  kao grešku izmjerenu u svakoj iteraciji petlje:

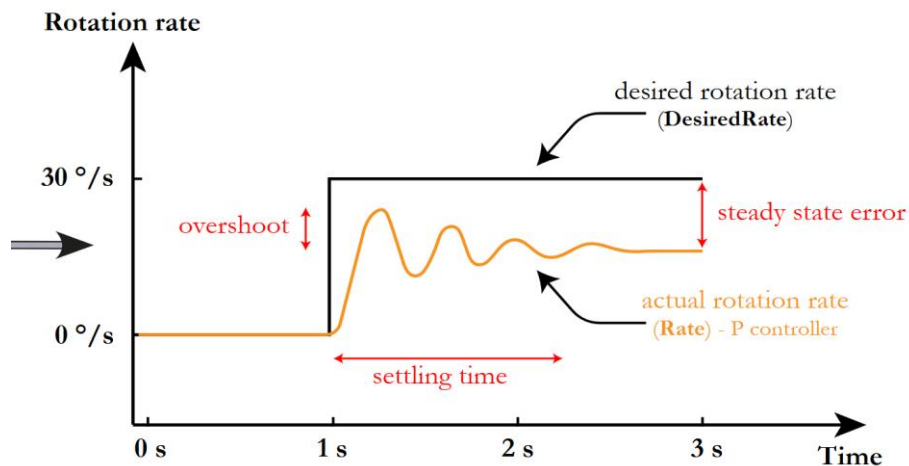
$$Err(k) = DesiredRate(k) - Rate, \quad (5.2)$$

te se (5.2) uvrštava u jednadžbu (5.1)

$$Input_{motor}(k) = P_{term}(k) = P \cdot Err(k), \quad (5.3)$$

gdje je  $P_{term}$  proporcionalni član regulatora.





Slika 25. Odziv Proporcionalnog (P) regulatora

Na [Slika 25] se vidi odziv P regulatora u odnosu na referentnu vrijednost. Bitno je uvidjeti da postoje tri parametra odziva regulatora prema kojima se mjeri dinamička učinkovitost i stabilnost upravljačkog sustava, a to su:

- **Vrijeme smirivanja** (*settling time*) – vrijeme potrebno da izlaz sustava ostane unutar određenog raspona oko željene vrijednosti.
- **Stacionarna pogreška** (*steady state error*) – razlika između željene i stvarne vrijednosti u stacionarnom stanju.
- **Prebačaj** (*overshoot*) – maksimalno prekoračenje izlaza iznad željene vrijednosti.

Veća vrijednost parametra P rezultira bržim približavanjem stvarne brzine rotacije željenoj, čime se smanjuje vrijeme smirivanja, što je poželjno. Međutim, povećanje P istovremeno uzrokuje veći prebačaj, što može dovesti do naglih i nekontroliranih oscilacija prilikom promjene željene brzine rotacije. Bez obzira na odabranu vrijednost P, može se pojaviti i stacionarna pogreška, pri čemu sustav nikada u potpunosti ne doseže željenu brzinu rotacije. Taj problem se rješava dodavanjem integralnog člana, koji sumira prethodne pogreške i time eliminira stacionarnu pogrešku.

### 5.1.2 PI regulator

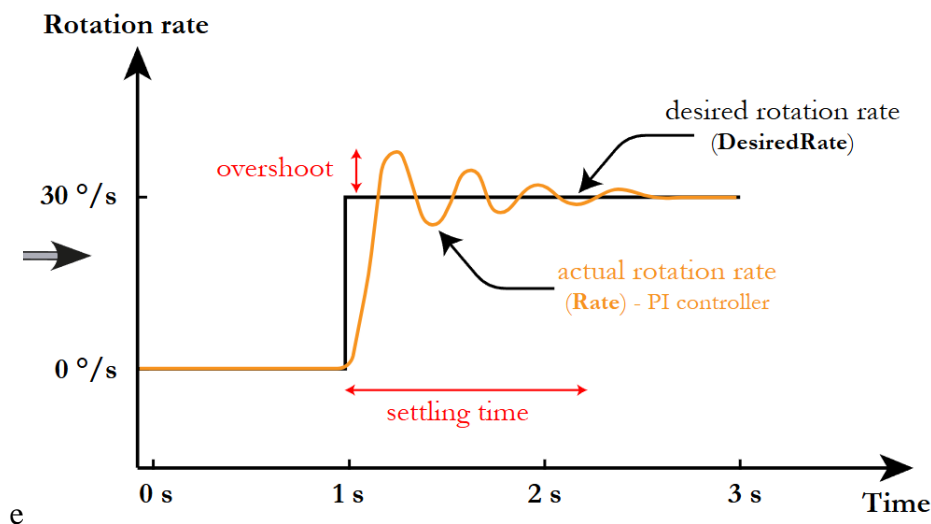
Integralni član dodaje se na sljedeći način:

$$Input_{motor}(k) = P_{term}(k) + I_{term}(k) = P \cdot Err(k) + I \cdot \int_0^{k \cdot T_i} Err(t) dt. \quad (5.4)$$

Gdje  $I_{term}$  integralni član, a  $T_i$  trajanje jedne iteracije, što iznosi 0.004 s za upravljačku petlju frekvencije 250 Hz. Diskretizacija integralnog člana može se jednostavno provesti pomoću:

$$Input_{motor}(k) = P \cdot Err(k) + I_{term}(k-1) + I \cdot \frac{(Err(k) + Err(k-1)) \cdot T_i}{2}, \quad (5.5)$$

dok (k) označava trenutačnu dok (k-1) označava iteraciju prije trenutačne.



Slika 26. Odziv Proporcionalno-Integralnog (PI) regulatora

[Slika 26.] prikazuje odziv Proporcionalno-Integralnog (PI) regulatora; iako je stacionarna pogreška uklonjena, sustav i dalje pokazuje značajan prebačaj i dugo vrijeme smirivanja. Konačno poboljšanje postiže se dodavanjem derivacijskog člana.

### 5.1.3 PID regulator

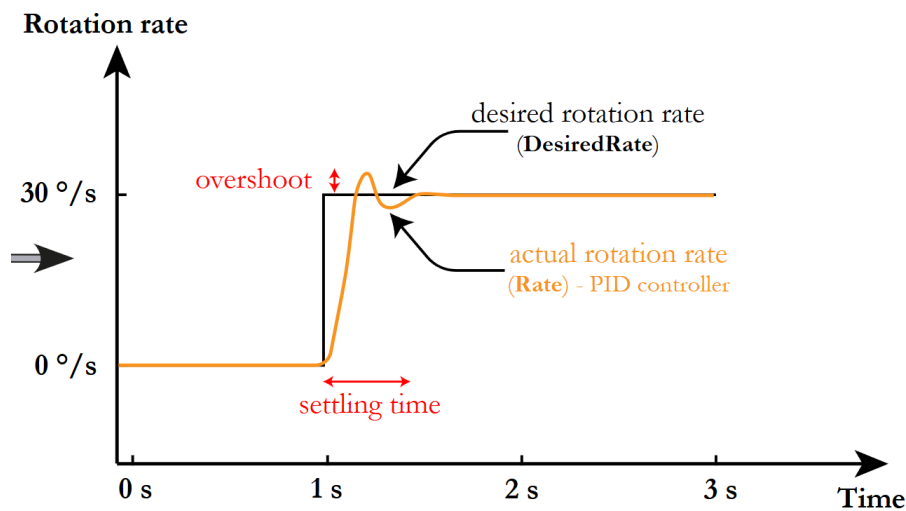
Budući da derivacija funkcije predviđa vlastitu buduću vrijednost, ovaj dodatni član doprinosi smanjenju prebačaja i skraćenju vremena smirivanja:

$$Input_{motor}(k) = P_{term}(k) + I_{term}(k) + D_{term}, \quad (5.6)$$

Gdje  $D_{term} = D \cdot \frac{d}{dt} Err(t)$  označava derivacijski član.

Derivacija će također biti diskretizirana, čime se dobiva konačna diskretna jednadžba za PID regulator:

$$Input_{motor}(k) = P \cdot Err(k) + I_{term}(k-1) + I \cdot \frac{(Err(k) + Err(k-1)) \cdot T_i}{2} + D \cdot \frac{(Err(k) - Err(k-1))}{T_i}. \quad (5.7)$$



Slika 27. Odziv Proporcionalno-Integralno-Derivativnog (PID) regulatora

Iz [Slika 27.] može se vidjeti da PID regulator omogućuje kvadrokopteru brzo postizanje željene vrijednosti brzine rotacije uz minimalan prebačaj i kratko vrijeme smirivanja

Kontroler prima odvojene signale za valjanje, posrtanje i skretanje. Svaka od ovih veličina predstavlja zasebnu komponentu upravljačkog signala i obrađuje se zasebno unutar PID regulatora, stoga će se za svaku od tri brzine rotacije: valjanje, posrtanje i skretanje koristiti zaseban PID kontroler.

Za valjanje (eng. *roll*) jednadžba će poprimiti oblik:

$$\begin{aligned} Input_{Roll}(k) = & P_{Roll} \cdot Err_{Roll}(k) + I_{term,Roll}(k-1) + I_{Roll} \cdot \frac{(Err_{Roll}(k) + Err_{Roll}(k-1)) \cdot T_i}{2} \\ & + D_{Roll} \cdot \frac{(Err_{Roll}(k) - Err_{Roll}(k-1))}{T_i}. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Jednadžbu (5.8) možemo pojednostaviti tako da unesemo sljedeća pojednostavljena:

$$PrevErr_{Roll} = Err_{Roll}(k-1) \quad (5.9)$$

$$PrevIterm_{Roll} = Iterm_{Roll}(k-1) \quad (5.10)$$

Uvrštavanjem (5.9) i (5.10) u (5.8) dobivamo sljedeći izraz za valjanje:

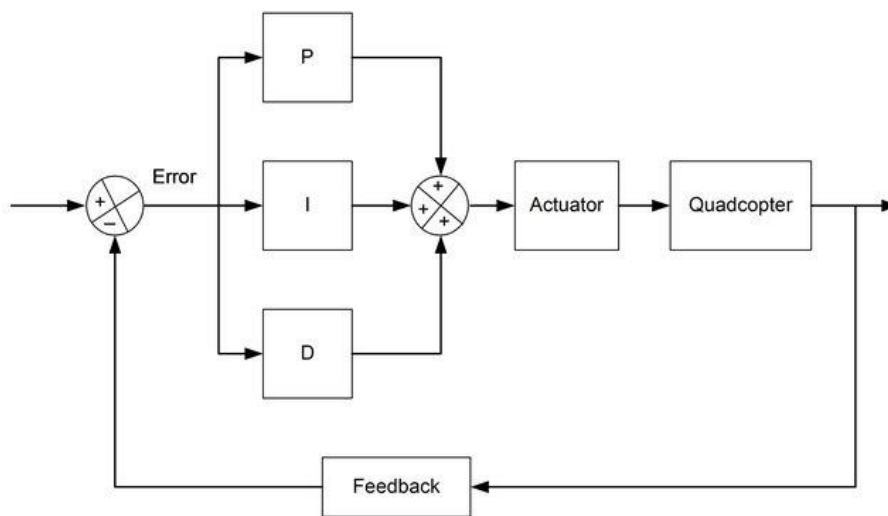
$$\begin{aligned} Input_{Roll}(k) = & P_{Roll} \cdot Err_{Roll} + PrevIterm_{Roll} + I_{Roll} \cdot \frac{(Err_{Roll} + PrevErr_{Roll}) \cdot T_i}{2} \\ & + D_{Roll} \cdot \frac{(Err_{Roll} - PrevErr_{Roll})}{T_i}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Ovime smo značajno pojednostavili jednadžbu.

Analogno se zapisuju jednadžbe za PID regulator posrtanja (eng. *pitch*) i PID regulator skretanja (eng. *yaw*):

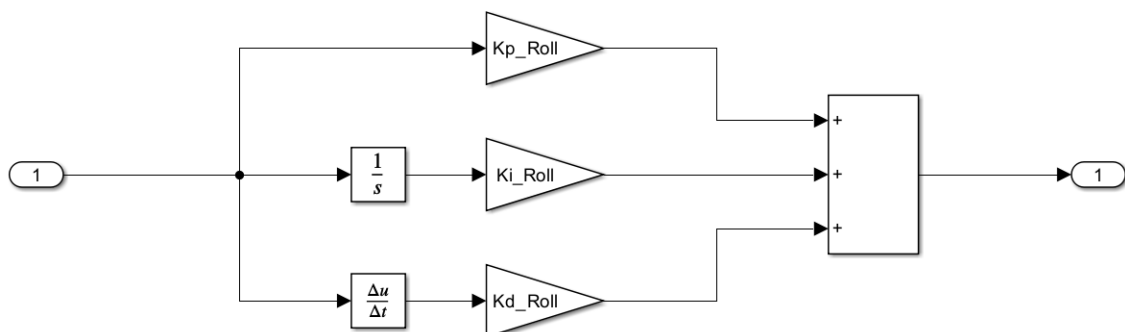
$$\begin{aligned} Input_{Pitch}(k) = & P_{Pitch} \cdot Err_{Pitch} + PrevIterm_{Pitch} + I_{Pitch} \cdot \frac{(Err_{Pitch} + PrevErr_{Pitch}) \cdot T_i}{2} \\ & + D_{Pitch} \cdot \frac{(Err_{Pitch} - PrevErr_{Pitch})}{T_i}. \end{aligned} \quad (5.12)$$

$$\begin{aligned} Input_{Yaw}(k) = & P_{Yaw} \cdot Err_{Yaw} + PrevIterm_{Yaw} + I_{Yaw} \cdot \frac{(Err_{Yaw} + PrevErr_{Yaw}) \cdot T_i}{2} \\ & + D_{Yaw} \cdot \frac{(Err_{Yaw} - PrevErr_{Yaw})}{T_i}. \end{aligned} \quad (5.13)$$

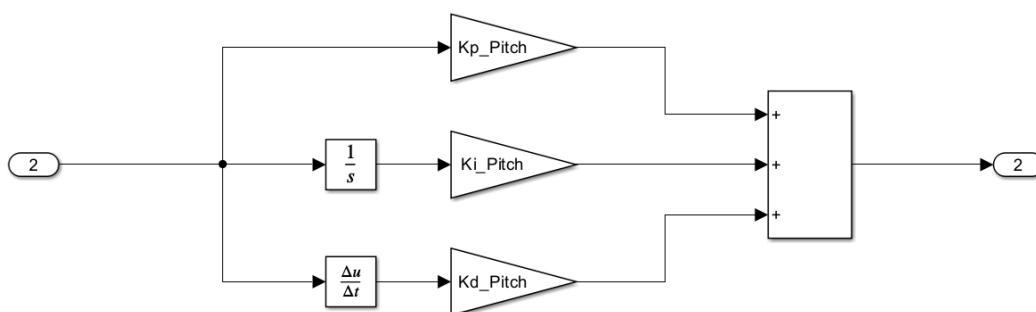


Slika 28. Generalna shema sustava upravljanja kvadrokoptera

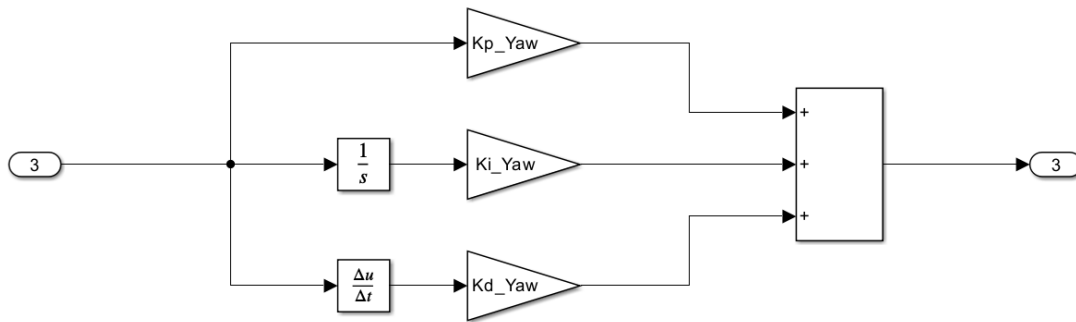
PID regulatori za svaki od Eulerovih kutova mogu se prikazati na sljedećim slikama.



Slika 29. PID regulator kuta valjanja



Slika 30. PID regulator kuta posrtanja



Slika 31. PID regulator kuta skretanja

Daljnje ćemo pojednostaviti izraze za PID regulaciju upravljačke varijable motora kako bi mogli izvesti pojednostavljenu blok shemu logike cijelog sustava.

Jednadžbe ćemo pojednostaviti tako da izrazimo ulazni signal motora kao funkciju različitih parametara:

$$Input_{Roll} = f(Err_{Roll}, P_{Roll}, I_{Roll}, D_{Roll}, PrevIterm_{Roll}, PrevErr_{Roll}) \quad (5.14)$$

$$Input_{Pitch} = f(Err_{Pitch}, P_{Pitch}, I_{Pitch}, D_{Pitch}, PrevIterm_{Pitch}, PrevErr_{Pitch}) \quad (5.15)$$

$$Input_{Yaw} = f(Err_{Yaw}, P_{Yaw}, I_{Yaw}, D_{Yaw}, PrevIterm_{Yaw}, PrevErr_{Yaw}) \quad (5.16)$$

Upravljačka logika biti će predstavljena kasnije u ovome poglavlju.

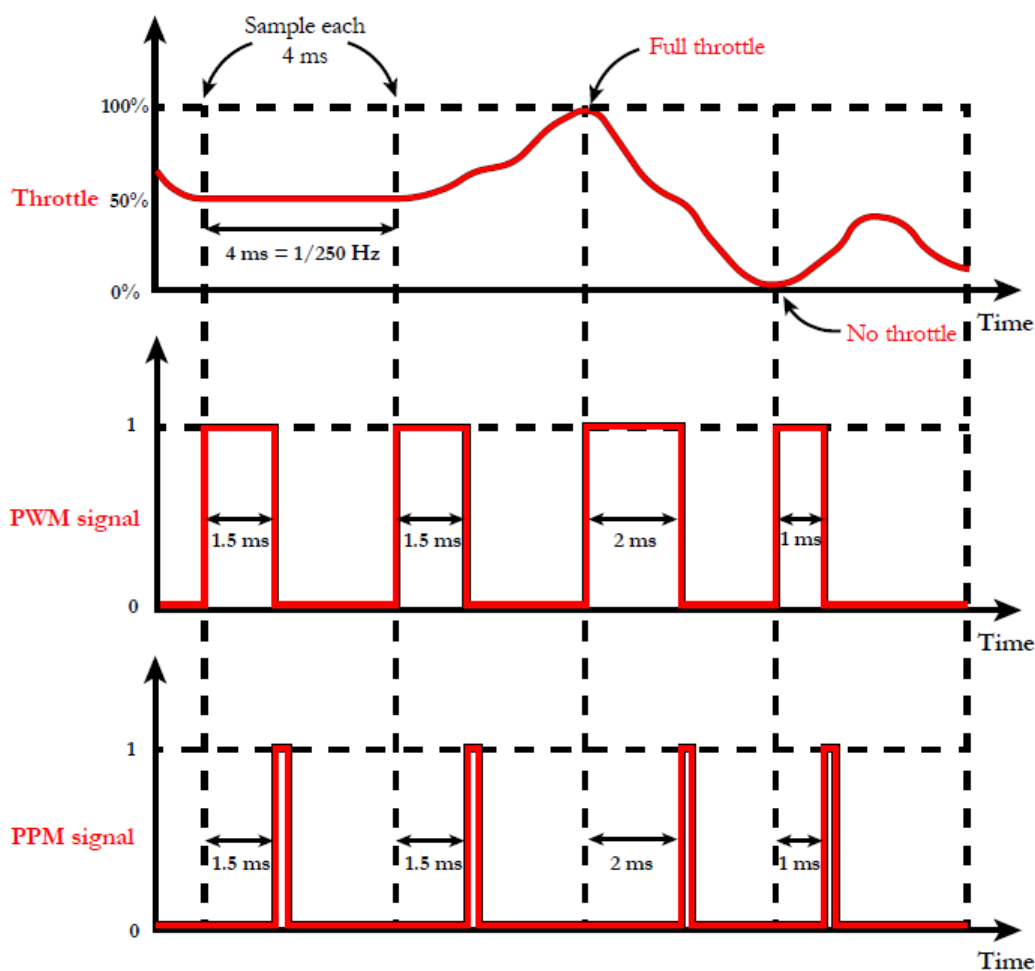
Valja još napomenuti kako točno utječu parametri P, I i D na sam kvadrokopter:

- Velika vrijednost P povećava brzinu odziva kvadrokoptera, no ako je P previsok, letjelica će pretjerano korigirati i doći će do visokofrekventnih oscilacija.
- Visoka vrijednost I sprječava neželjeno zanošenje kvadrokoptera, ali ako je I prevelik, sustav može postati trom i manje reagirati na promjene.
- D komponenta smanjuje oscilacije uzrokovane proporcionalnim dijelom regulatora, no previsoka vrijednost D može dovesti do vibracija motora.

## 5.2 Prijenos upravljačkog signala(PPM vs PWM)

Naredbe koje se šalju putem radio upravljača [Slika 17.] prenose se radio valovima, a prijemnik ih zatim prima. Nakon toga, prijemnik pretvara radio valove u signal koji mikroprocesor može obraditi. Sljedeći korak je konvertirati ove signale iz prijemnika u varijable koje će se kasnije koristiti u programskom kodu za upravljanje letjelicom.

Analogni signal koji dolazi s transmitera treba se pretvoriti u digitalni, to se odvija u prijemniku. Za prijenos podataka putem digitalnih signala koristi se nekoliko tehnika, među kojima je jedna od najpoznatijih Pulse Width Modulation (PWM), koja omogućava slanje informacija s jednog radio kanala prema mikroprocesoru. No, kada je potrebno primiti podatke s više kanala, svaka veza zahtijeva zaseban signalni kabel, što postaje nepraktično s povećanjem broja kanala. U takvim situacijama koristi se alternativa u obliku Pulse Position Modulation (PPM).

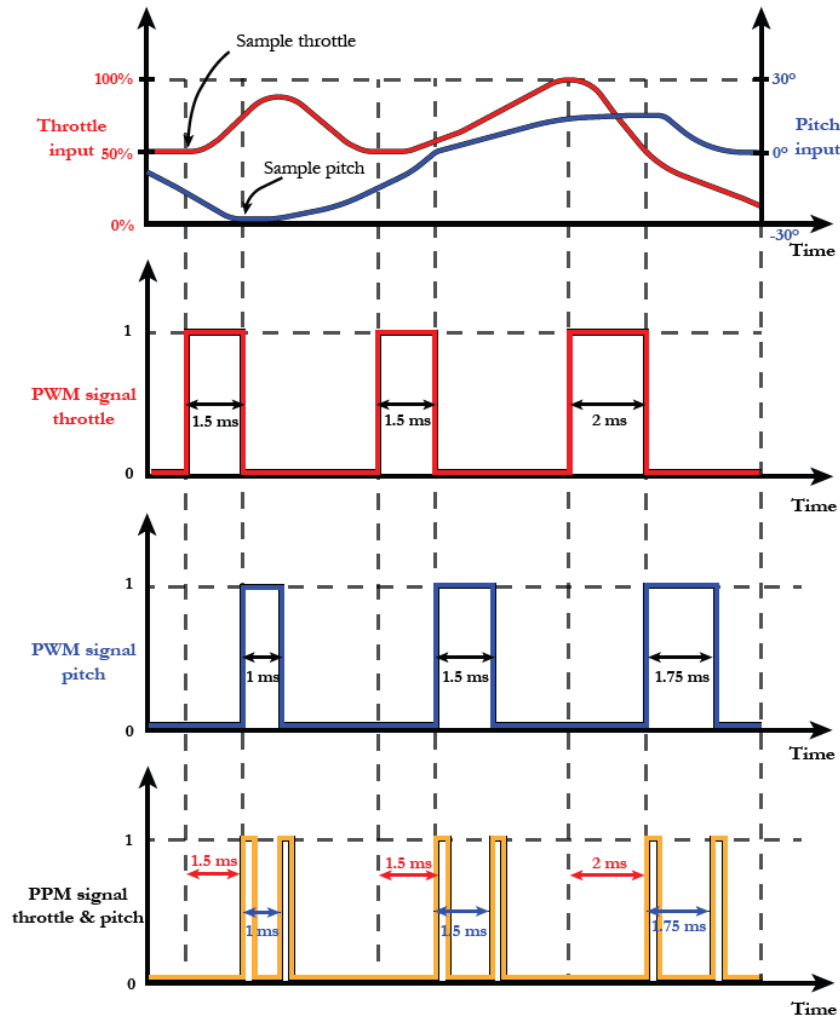


Slika 32. PPW i PPM u odnosu na snagu motora

Kod PWM-a, informacija se prenosi promjenom širine signala, na primjer, signal širine 1 ms (=1000 μs) može označavati minimalnu snagu motora(eng. *throttle*), dok širina od 2 ms (=2000 μs) označava punu snagu motora. U tehnici PPM, širina signala ostaje nepromijenjena, a podaci

se prenose pomicanjem pozicije signala unutar vremenske domene. Dakle, umjesto da širina signala varira, pozicija se mijenja prema vrijednostima radio kanala.

Na primjeru, kada je početna vrijednost gasa 50%, PWM signal će imati širinu od 1,5 ms (=1500  $\mu$ s). U slučaju PPM-a, signal će početi nakon 1,5 ms, a širina će ostati nepromijenjena svaki put. Nakon što prođe 4 ms, uzima se nova vrijednost gasa i cijeli ciklus se ponovo pokreće.



Slika 33. Usporedba PWM i PPM signala za dva ulazna kanala

Za prijenos podataka s više radio kanala, razmotrit ćemo primjer s dva kanala: potrebno je primiti podatke o snazi motora (kanal 2) i ulazu za posrtanje (kanal 1). Ovi ulazi su međusobno neovisni i zahtijevali bi dva odvojena signalna kabela u slučaju korištenja PWM-a, kako se signali ne bi preklapali. Kada se primaju dva PWM signala u mikroprocesoru, potrebno je izvršiti dva različita poziva za očitavanje analognog signala (*analogRead()*, jer se radio programski kod u Arduino IDE-u). Budući da mikroprocesor ne može istovremeno obraditi oba signala, prvo će se obraditi podaci o snazi motora, a zatim podaci o posrtanju. Osim što bi bilo



potrebno koristiti dva signalna kabela, ovo također znači da mikroprocesor mora više vremena posvetiti obradi podataka.

Prednost koju nudi PPM tehnika leži u činjenici da se u ovom slučaju ne mijenja širina signala, već samo njegova pozicija. Korištenjem ove metode, podaci o snazi motora i posrtanju mogu se uzeti jedan za drugim, pri čemu se njihova izvorna vrijednost prati mjerenjem vremena između svakog uzlaznog vala. Ovaj pristup omogućuje prijenos podataka s više signala koristeći samo jedan signalni kabel.

Ovisno o ovom pristupu, veza između prijammnika i Teensy-a može se jednostavno uspostaviti. Kanal 1 prijammnika označen je kao "PPM", što omogućuje slanje PPM signala mikroprocesoru. S pomoću kabela, drugi priključak prijammnika povezuje se s pinom 14 na Teensy-u. . Treći i četvrti priključak prijammnika povezuju se s 5V i GND pinovima na Teensy-u, čime se osigurava napajanje prijammnika putem mikroprocesora.

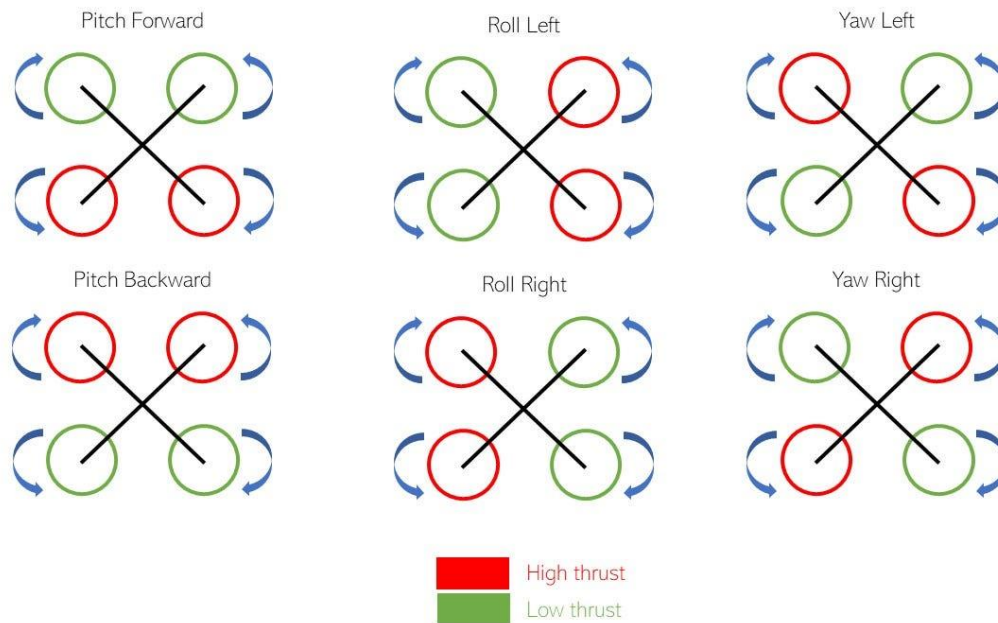
### 5.3 Manipulacija kretanja letjelice kroz snagu motora

Mora se definirati na koji način kvadrokopter reagira na upravljačke ulaze zadane putem radioodašiljača (transmitter).

Poznavanje upravljanja motorima putem Teensy-ja, mjerenja kutne brzine pomoću žiroskopa te primanja i obrade upravljačkih naredbi putem radioodašiljača i prijammnika predstavlja temelj sustava upravljanja letjelicom. Međutim, kako bi sustav ispravno funkcionirao, potrebno je razumjeti način na koji se navedene komponente integriraju u cjelovit proces upravljanja letjelicom.

Ključni aspekt upravljanja kvadrokopterom je regulacija snage i brzine vrtnje motora kako bi se postiglo kretanje u željenim smjerovima. U ovom razmatranju pretpostavit će se idealni uvjeti u kojima su vanjski poremećaji zanemarivi, odziv motora trenutačan, a raspodjela mase jednolična.

Za održavanje stabilnog lebdenja, svi motori moraju raditi na približno polovici svoje maksimalne snage. Povećanjem snage na svim motorima u jednakom omjeru omogućava se podizanje letjelice na veću visinu, dok se smanjenjem snage postiže spuštanje. Kako bi se osiguralo zadržavanje horizontalnog položaja tijekom promjene visine, nužno je da svi motori istovremeno mijenjaju snagu proporcionalno. Upravo se ovaj upravljački signal, kojim se regulira ukupna raspoloživa snaga motora, definira kao ulaz za snagu motora.



Slika 34. Manipulacija letjelice kroz regulaciju snage motora[25]

Kod promjene smjera kretanja letjelice, upravljanje postaje zahtjevnije. Primjerice, ako je cilj održati istu visinu, ali pomaknuti letjelicu bočno udesno, odnosno rotirati je oko X osi, snaga svih motora ostaje na 50% kako bi se zadržala visina. No, kako bi se omogućilo bočno gibanje, izlazna snaga motora 3 i 4 (smještenih na lijevoj strani) mora biti veća od snage motora 1 i 2 (desna strana). U tu svrhu dodaje se upravljački signal za valjanje, koji smanjuje snagu desnih motora za određeni postotak, primjerice 25%, dok se istovremeno povećava snaga lijevih motora za isti iznos.

Isti princip vrijedi i za kontrolu posrtanja i skretanja, uz prilagodbu kombinacije motora. Ovakav način definiranja ulaznih parametara omogućava da se svi pokreti letjelice izraze kao linearna kombinacija pojedinačnih upravljačkih signala.

Prednost ovog načina definiranja upravljačkih ulaza za snagu motora, valjanje, posrtanje i skretanje leži u činjenici da se svi manevri letjelice mogu opisati kao linearna kombinacija ovih parametara, čime se omogućuje jednostavno određivanje izlaznih vrijednosti za sve motore.

$$Input_{Motor1} = Input_{Throttle} - Input_{Pitch} - Input_{Roll} - Input_{Yaw} \quad (5.17)$$

$$Input_{Motor2} = Input_{Throttle} + Input_{Pitch} - Input_{Roll} + Input_{Yaw} \quad (5.18)$$

$$Input_{Motor3} = Input_{Throttle} + Input_{Pitch} + Input_{Roll} - Input_{Yaw} \quad (5.19)$$

$$Input_{Motor4} = Input_{Throttle} - Input_{Pitch} + Input_{Roll} + Input_{Yaw} \quad (5.20)$$

Kako je navedeno u prošleme poglavlju Teensy 4.0 dobiva signale preko samo jednog voda u PPM obliku, onda ih dekodira izdvaja u pojedinačne kanale i obrađuje s pomoću upravljačkog algoritma, PID regulatora, te ih šalje u PWM obliku kroz četiri različita voda. Zato se koriste četiri različita ESC-a za upravljanje motorima, po shemi jedan motor jedan ESC.

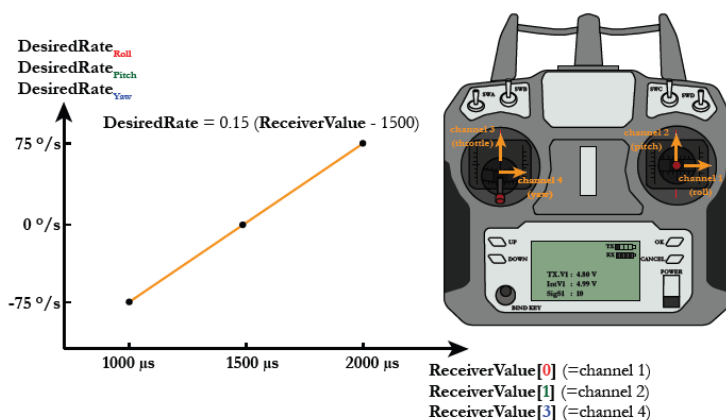
U stvarnoj primjeni, motoru se ne šalje postotak snage, već PWM vrijednost u rasponu od 1000 do 2000  $\mu\text{s}$ , pri čemu 1000  $\mu\text{s}$  predstavlja 0 % izlazne snage motora, a 2000  $\mu\text{s}$  100 % izlazne snage motora. U sustavu, ulaz za snagu motora (throttle) će se kretati između 1000 i 1800  $\mu\text{s}$ , ostavljajući 20 % snage motora uvijek dostupno za valjanje, posrtanje i skretanje.

Kao što je navedeno u prethodnom poglavlju, Teensy 4.0 prima upravljačke signale putem jednog voda u PPM formatu, dekodira ih, razdvaja u pojedinačne kanale te ih obrađuje s pomoću upravljačkog algoritma, PID regulatora. Nakon obrade, signali se šalju u PWM obliku kroz četiri odvojena voda, pri čemu svaki signal odgovara jednom od četiri motora. Zbog toga se koriste četiri zasebna ESC-a, prema principu "jedan motor – jedan ESC".

U stvarnoj primjeni, motorima se ne šalje izravno postotak snage, već PWM signal u rasponu od 1000 do 2000  $\mu\text{s}$ , pri čemu 1000  $\mu\text{s}$  odgovara 0 % izlazne snage, a 2000  $\mu\text{s}$  100 % izlazne snage motora. U ovom sustavu, ulaz za snagu motora (eng. throttle) ograničen je na raspon od 1000 do 1800  $\mu\text{s}$ , čime se osigurava 20 % rezerve snage za potrebe regulacije valjanja, posrtanja i skretanja letjelice.

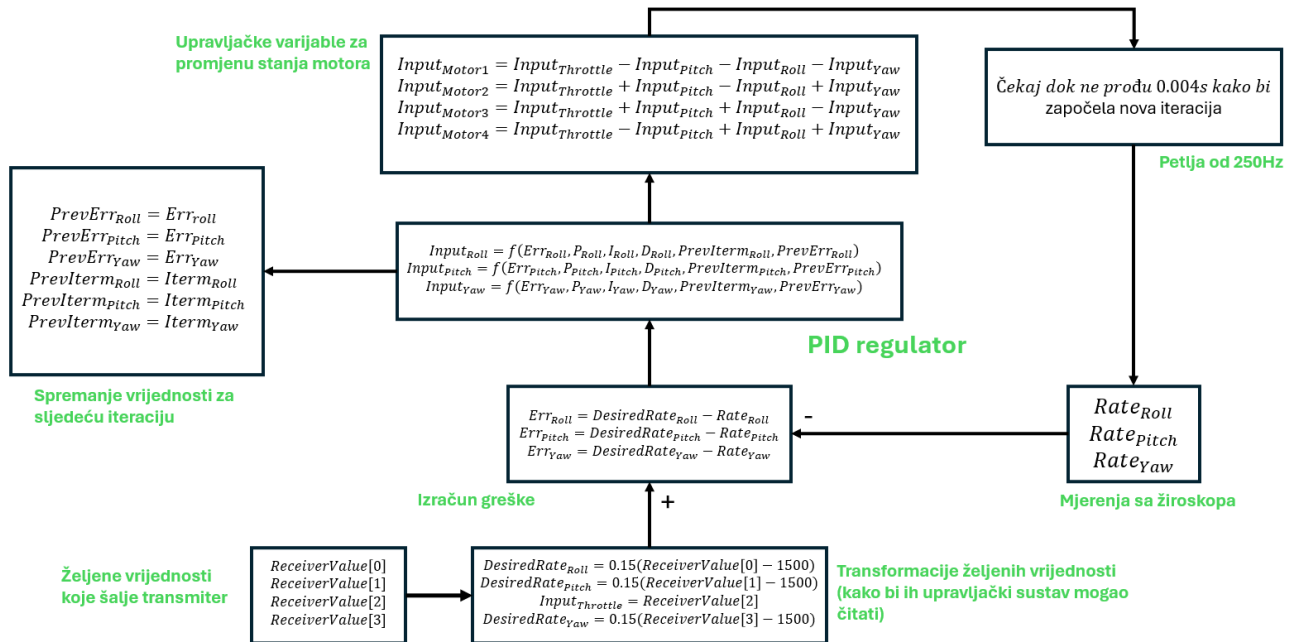
Prijemnik mikroprocesoru prosljeđuje upravljačke signale unutar raspona 1000 do 2000  $\mu\text{s}$ , pri čemu vrijednost ovisi o položaju upravljačkih palica na radioodašiljaču. Kada je riječ o snazi motora, ovaj raspon izravno odgovara 0 % do 100 % izlazne snage. S druge strane, za upravljanje valjanjem, posrtanjem i skretanjem, gdje se neutralni položaj palice nalazi na 1500  $\mu\text{s}$ , potrebno je izvršiti prilagodbu PWM vrijednosti u odgovarajuće kutne brzine rotacije letjelice.

Maksimalna i minimalna kutna brzina mogu se definirati prema zahtjevima sustava – veće vrijednosti omogućuju brže manevriranje, ali smanjuju preciznost upravljanja. U ovom slučaju, odabrane su granične vrijednosti od  $\pm 75^\circ/\text{s}$ . Proces pretvorbe PWM signala u kutne brzine temelji se na linearnoj relaciji, koja omogućuje točnu prilagodbu izlaznih vrijednosti sustava.



Slika 35. Odnos brzine zakreta i  $\mu\text{s}$

S prethodna tri podnaslova dobivena je generalna struktura upravljanja te se prema tome može izvesti upravljačka blok shemu prema kojoj će se programirati sustav.



Slika 36. Generalna blok shema upravljačkog sustava

## 6. OBRADA PODATAKA SENZORA I KALMANOV FILTAR

Nakon definiranja svih komponenti, izvedbe matematičkog modela i implementacije upravljačke logike, potrebno je obraditi senzorske podatke kako bi sustav bio optimiziran i omogućio precizno upravljanje letjelicom. Obrada senzorskih podataka ključna je za stabilizaciju letjelice i osiguravanje točnog praćenja njenog položaja u prostoru.

### 6.1 Mjerenje kutova – MPU6050

Precizno određivanje apsolutnih kutova valjanja i posrtanja letjelice ključno je za implementaciju upravljačkog sustava u načinu rada stabilizacije. Točno poznavanje ovih kutova omogućuje održavanje ravnoteže letjelice i uvelike pojednostavljuje upravljanje tijekom leta. Postavlja se pitanje na koji način je moguće izmjeriti te kutove? U okviru ovog projekta analizirat će se dvije različite metode, pri čemu svaka od njih ima određene prednosti i ograničenja.

#### 6.1.1 Integracija brzine rotacije žiroskopa

Jedno od prvih i najjednostavnijih rješenja za određivanje apsolutnih kutova uključuje integraciju brzina rotacije koje mjeri žiroskop. Za kut posrtanja, ovo se može izraziti sljedećom jednadžbom:

$$Angle_{Pitch} = \int_0^{k \cdot T_i} Rate_{Pitch} dt \quad (6.1)$$

S obzirom na to da je  $Rate_{Pitch}$  izražen u stupnjevima po sekundi ( $^{\circ}/s$ ),  $Angle_{Pitch}$  u stupnjevima ( $^{\circ}$ ),  $T_i$  predstavlja trajanje jedne iteracije (0.004 s), a k broj iteracija, diskretizacija ovog integrala za implementaciju u kodu dovodi do sljedeće jednadžbe:

$$Angle_{Pitch}(k) = Angle_{Pitch}(k - 1) + Rate_{Pitch}(k) \cdot T_i \quad (6.2)$$

Kada kvadrokopter izvodi okretanje (yaw) u lijevo (ili desno) oko Z osi bez rotacije u smjeru pitch-a oko Y osi, pitch kut će se ipak smanjivati (ili povećavati) jer se smjer Y osi mijenja. Tijekom tog yaw pomaka, roll kut će se također povećavati (ili smanjivati) jer se smjer X osi također mijenja. Dakle, čak i kada brzina rotacije u smjeru roll ili pitch kuta bude nula, ti kutevi se mogu mijenjati.

Promjena roll i pitch kuta u sklopu yaw pomaka može se integrirati u odgovarajuće jednadžbe. Međutim, za ovu primjenu nije potrebno implementirati takvu integraciju, jer kao što će biti

objašnjeno kasnije, ova pogreška nije jedini izazov prilikom integriranja mjerenja žiroskopa. Za sada, istražiti će se druga metoda za dobivanje kutova, a to je korištenje akcelerometra.

### 6.1.2 Akcelerometar

MPU-6050 senzor nije samo žiroskop, već uključuje i akcelerometar. Kao što naziv sugerira, akcelerometar mjeri ubrzanje u smjerovima X, Y i Z. Za razliku od njega, žiroskop bilježi brzine rotacije oko tih osi, a ne duž njih. Prema osnovnim zakonima fizike, poznato je da na Zemlji uvijek postoji gravitacijsko ubrzanje koje iznosi 1 g ili 9,81 m/s<sup>2</sup>. To znači da kada se MPU-6050 postavi na ravnu površinu, bez kretanja, mjerenje ubrzanja u smjeru Z (AccZ) iznositi će 1 g. Ubrzanje u smjeru X i Y bit će nula. Na sličan način, kada se senzor postavi tako da je neka od drugih osi okomita na površinu, odgovarajuće ubrzanje također će biti 1 g.

Svaka promjena smjera koja nije uz jednu od tri glavne osi rezultirat će nenultim vrijednostima ubrzanja za sve tri komponente: AccX, AccY,. Korištenjem odgovarajućih matematičkih jednadžbi, ova karakteristika akcelerometra omogućava izračun točnih kutova valjanja posrtanja kvadrokoptera. Pretpostavimo da se kvadrokopter rotira oko X osi dok ne dostigne kut  $\theta_{Roll}$ .

Osnovna trigonometrije prikazuje da je tangens kuta u trokutu jednak omjeru dužine nasuprotne stranice i dužine susjedne stranice trokuta. Za kut  $\theta_{Roll}$  nasuprotna stranica odgovara AccY, dok je susjedna stranica određena duljinom s:

$$\tan(\theta_{Roll}) = \frac{AccY}{s} \quad (6.3)$$

Primjenom Pitagorinog teorema na trokut sa stranicama s, AccX i AccZ, dolazi se do izraza  $s^2 = AccX^2 + AccZ^2$ , čime kut  $\theta_{Roll}$  može biti prikazan pomoću sljedeće jednadžbe:

$$\theta_{Roll} = \text{atan}\left(\frac{AccY}{\sqrt{AccX^2 + AccZ^2}}\right). \quad (6.4)$$

Na sličan način dolazi se i do kuta  $\theta_{Pitch}$ :

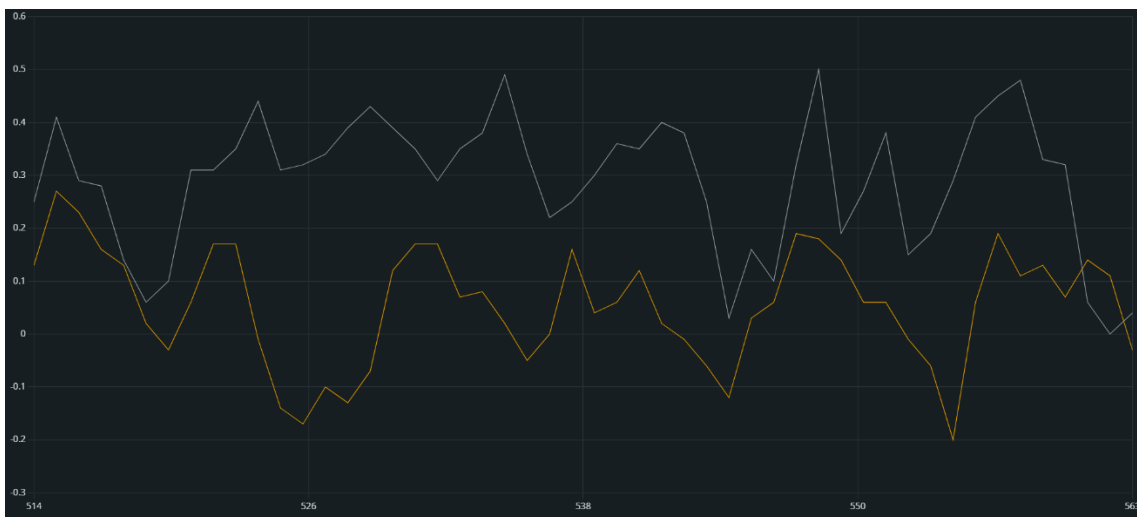
$$\theta_{Pitch} = \text{atan}\left(\frac{-AccX}{\sqrt{AccY^2 + AccZ^2}}\right). \quad (6.5)$$

Na ovaj način dolazimo do Eulerovih kutova valjanja i posrtaja iz vrijednosti akcelerometra.

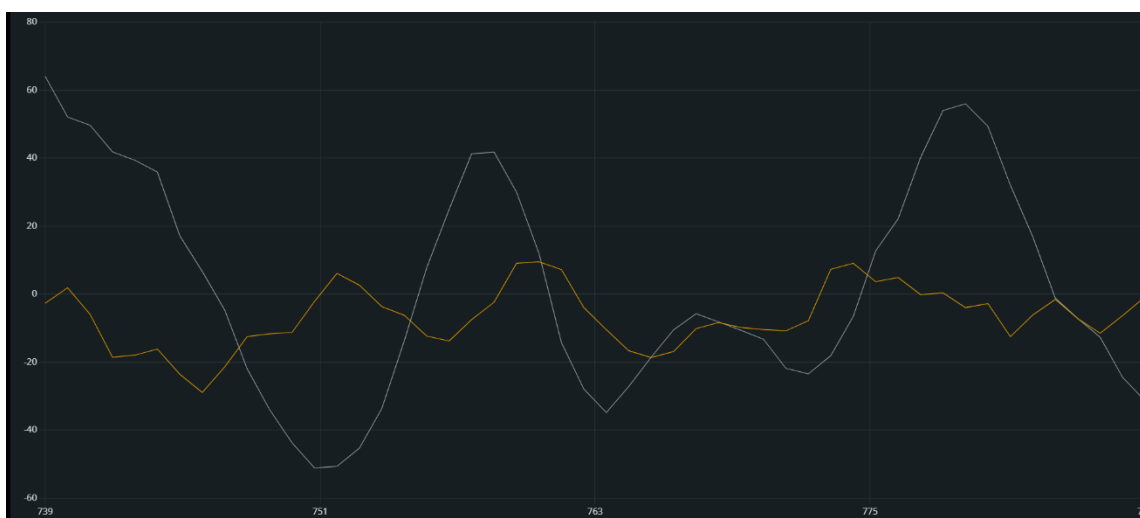
Istražene su dvije metode za izračunavanje kutova valjanja i posrtanja: integracija brzina rotacije iz žiroskopa i trigonometrija na temeljem mjerenja akcelerometra. Najveći nedostaci metode integracije žiroskopa uključuju:

- Neuzimanje u obzir promjena kutova prilikom skretanja, što dovodi do netočnosti tijekom leta.
- Nakupljanje pogrešaka zbog zbrajanja svakog novog mjerenja, što uzrokuje postupno povećanje pogreške.
- Početak integracije od nule, što izaziva pogreške ako površina nije ravna.

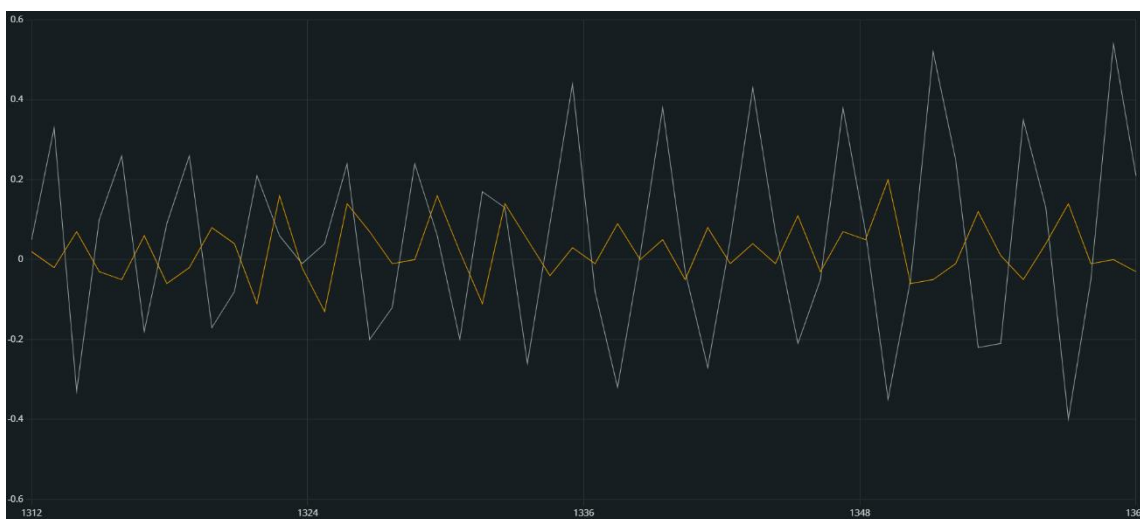
Akcelerometar ne pati od ovih problema, ali je osjetljiv na vibracije, što otežava stabilnost kutova za PID regulator. Iako metoda integracije žiroskopa daje kontinuirane rezultate, akcelerometar daje nestabilne kutove, osobito tijekom rada motora. Ovi problemi ukazuju na potrebu za Kalmanovim filtrom.



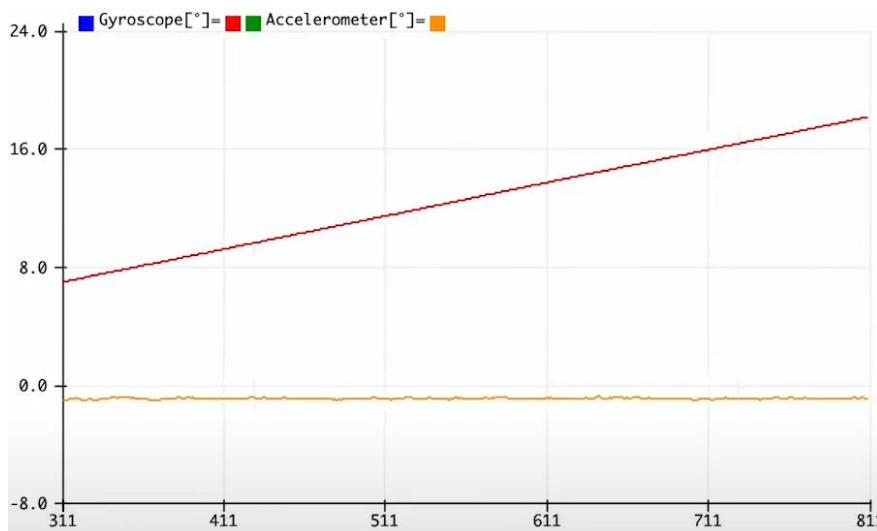
**Slika 37. Promjene akceleracije u x, y, z osi bez Kalmanovog filtra**



**Slika 38. Promjena na kuta bez Kalmanovog filtra**



**Slika 39. Smetnje akcelerometra uslijed vibracija motora**



**Slika 40. Usporedba kuta žiroskopa i akcelerometra bez Kalmanovog filtra**

S prikazanih slika može se uočiti da promjene u akceleraciji i kutu nisu glatke kao što bi trebale biti, a akcelerometar značajno pati od vibracija motora, što utječe na točnost mjerenja. Također, primjetna je rastuća pogreška u mjerenju kuta između akcelerometra i žiroskopa, koja se povećava do beskonačnosti, što stvara dodatne probleme.



## 6.2 Kalmanov filter jedna dimenzija

U prethodnom poglavlju istražene su dvije metode za mjerenje i izračunavanje kutova, pri čemu su utvrđene njihove mane koje ih čine neprikladnima za primjenu u sustavu za upravljanje letom. Kalmanov filter može ispraviti navedene mane i poboljšati kvalitetu mjerenja sustava.

Prvo će se prepraviti jednadžba za transformaciju brzine rotacije u kut rotacije:

$$Angle_{Kalman}(k) = Angle_{Kalman}(k - 1) + Rate(k) \cdot T_i \quad (6.6)$$

Pretpostavlja se da ovaj izračun daje procjenu kuta, ali ne i njegovu konačnu vrijednost, jer je podložan različitim izvorima pogrešaka. Nesigurnost u predviđanju kuta računa se kao zbroj nesigurnosti prethodne procjene kuta (iteracija k-1) i nesigurnosti koja proizlazi iz promjene kuta:

$$Uncertainty_{Angle}(k) = Uncertainty_{Angle}(k - 1) + T_i^2 \cdot 4^2 \quad (6.7)$$

$Uncertainty_{Angle}$  predstavlja nesigurnost.

Nesigurnost u evoluciji kuta procjenjuje se kao  $T_i^2 \cdot 4^2$ , iz sljedećih razloga:

- Standardna devijacija ( $\sigma$ ) pogreške mjerenja brzine rotacije iznosi 4°/s, što daje varijancu  $\sigma^2 = 4^2 = 16$ . Pogreška mjerenja brzine rotacije je procjena koja uključuje stvarnu nesavršenost samog senzora, ali i činjenicu da u izračunu kuta ne uzimamo u obzir brzinu rotacije u smjeru skretanja.
- Budući da se brzina rotacije množi s  $T_i^2$  (0,004 s) u jednadžbi, ovaj faktor također mora biti uključen u izračun varijance, koristeći faktor  $T_i^2$ .

Sada slijedi izračun faktora korekcije. Ovaj faktor služi za usklađivanje teoretski izračunate vrijednosti orijentacije ( $Angle_{Kalman}(k)$ ) s praktično izmjerenom vrijednošću  $Angle$  koju dobivamo od senzora gibanja. Rezultat ovog usklađivanja je preciznija procjena stvarne orijentacije objekta:

$$Angle_{Kalman}(k) = Angle_{Kalman}(k) + Gain_{Kalman} \cdot (Angle(k) - Angle_{Kalman}) \quad (6.8)$$

Izračun koeficijenta korekcije temelji se na komparativnoj analizi pouzdanosti procijenjenih i izmjerenih vrijednosti. Ovaj koeficijent definiran je kao funkcija relativnog odnosa između stupnja nepouzdanosti teoretski predviđene kutne pozicije i stupnja nepouzdanosti

eksperimentalno utvrđene kutne pozicije dobivene akcelerometrijskim mjerenjima. Matematički, ovaj odnos može se izraziti kao:

$$Gain_{Kalman} = \frac{Uncertainty_{Angle}(k)}{Uncertainty_{angle}(k) + 3^2} \quad (6.9)$$

U matematičkom modelu, standardna devijacija  $\sigma$  pogreške mjerenja akcelerometra pretpostavljena je kao  $3^\circ$ . Ova vrijednost reprezentira procijenjenu magnitudu mjerne nesigurnosti senzora i ključna je za kvantifikaciju pouzdanosti dobivenih podataka u procesu estimacije.

### 6.2.1 Opći oblik Kalmanovog filtra

Kalmanov filter razvijen u okviru ovog rad specifično je prilagođen za predviđanje kuta valjanja ili nagiba. Riječ je o jednodimenzionalnom Kalmanovom filteru, gdje se takozvano 'stanje' sustava sastoji od jedne vrijednosti: kuta valjanja (ili nagiba). Ovaj pristup moguće je proširiti na višedimenzionalna stanja primjenom vektora i matrica.

U nastavku je prikazan 'opći' oblik Kalmanovog filtra koji će se primjenjivati pri procjeni visine kvadrokoptera u kasnijim fazama projekta. Radi komparativne analize, navedene su i vrijednosti svih vektora i matrica u trenutačnom primjeru.

Prvo će se prikazati jednadžba predviđanja trenutačnog stanja:

$$S(k) = F \cdot S(k - 1) + G \cdot U(k), \quad (6.10)$$

Gdje su:

- $S$  = vektor stanja ( $Angle_{Kalman}$ )
- $F$  = matrica prelaza stanja (1)
- $G$  = upravljačka matrica (0.004)
- $U$  = ulazna vrijednost (Rate)

Zatim se treba definirati jednadžba predviđanja nesigurnosti:

$$P(k) = F \cdot P(k - 1) \cdot F^T + Q, \quad (6.11)$$

gdje su:

- $P$  = vektor predviđanja nesigurnosti ( $Uncertainty_{Angle}$ )
- $Q$  = nesigurnost procesa

Nakon toga mora se izračunati vrijednost Kalmanovog pojačanja iz nesigurnosti predviđanja i mjerenja:

$$L(k) = H \cdot P(k) \cdot H^T + R \quad (6.12)$$

$$K = P(k) \cdot \frac{H^T}{L(k)} = P(k) \cdot H^T \cdot L(k)^{-1} \quad (6.13)$$

gdje je:

- $L$  = prijelazna matrica
- $K$  = Kalmanovo pojačanje
- $H$  = matrica za promatranje (=1)
- $R$  = mjerna nesigurnost ( $T_i^2 \cdot 3^2$ )

Ažuriranje predviđenog stanje sustava pomoću mjerenja stanja kroz Kalmanovo pojačanje:

$$S(k) = S(k) + K \cdot (M(k) - H \cdot S(k)) \quad (6.14)$$

gdje je  $M$  vektor mjerenja (*Angle*).

Za kraj mora se ažurirati nesigurnost predviđenog stanja:

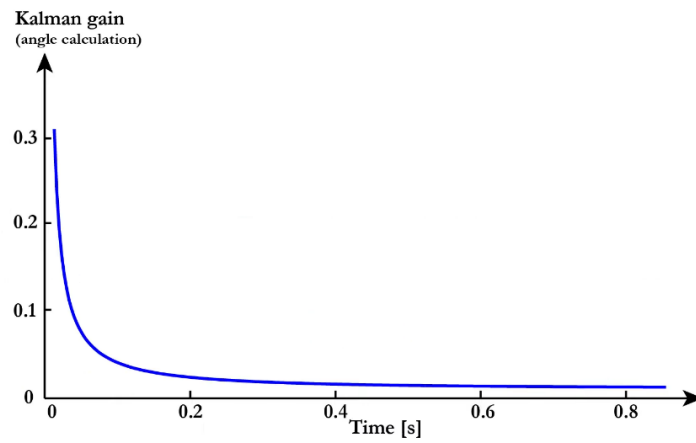
$$P(k) = (I - K \cdot F) \cdot P(k) \quad (6.15)$$

### 6.2.2 Opis Kalmanovog korekcijskog faktora

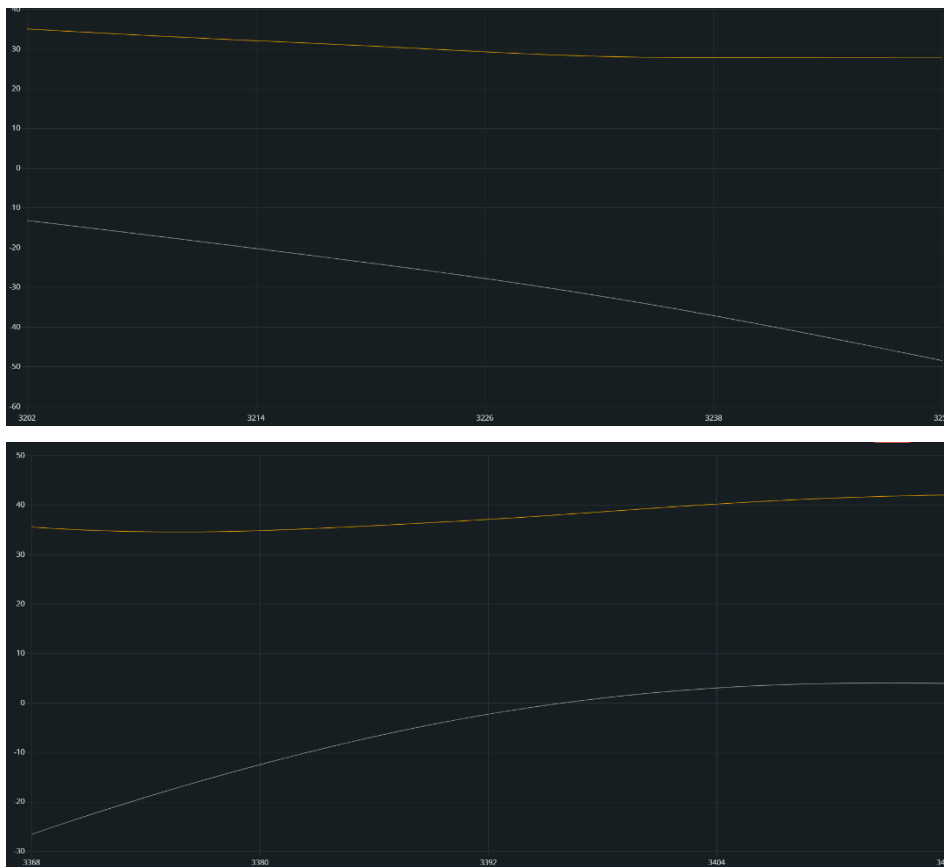
Kalmanovo pojačanje predstavlja ključnu komponentu Kalmanovog filtra. Njegova funkcija je balansiranje između predviđanja kuta, koje se dobiva integracijom žiroskopa, i izmjerenog kuta, koji proizlazi iz akcelerometra. Vrijednost ovog dobitka, koja se kreće u rasponu od nule do jedan, određuje relativni utjecaj ovih dvaju izvora podataka. Viša vrijednost dobitka ukazuje na veće oslanjanje na mjerenja akcelerometra, dok niža vrijednost favorizira predviđanja temeljena na integraciji brzine rotacije.

ilustrira promjenu Kalmanovog dobitka tijekom vremena za filter kuta. U početnoj fazi, pojačanje je visoko, što odražava inicijalnu važnost apsolutnih vrijednosti akcelerometra. Međutim, s protokom vremena, predviđanje kuta zasnovano na integraciji brzine rotacije postupno dobiva na značaju.

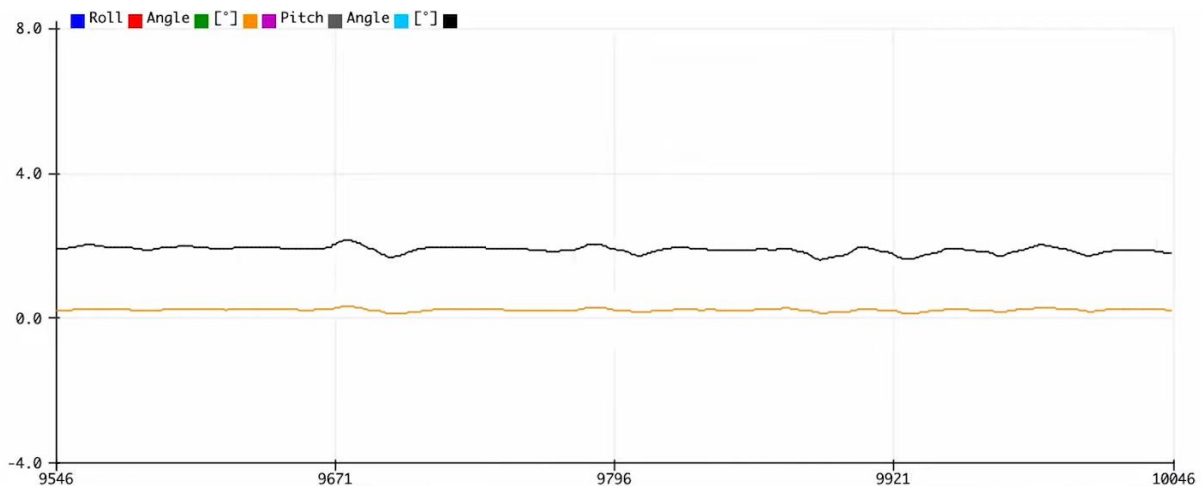
Tijekom većine trajanja leta, Kalmanov filter se primarno oslanja na integraciju podataka žiroskopa za predviđanje kuta. Uloga kutova nagiba izmjerenih akcelerometrom jest sprječavanje prekomjerne divergencije integracije žiroskopa, koja može nastati zbog fenomena kao što je „drift“, odnosno postupnog odstupanja od vrijednosti. Ovaj pristup rezultira metodologijom koja uspješno objedinjuje prednosti obaju mjernih tehnika.



Slika 41. Vrijednost Kalmanovog pojačanja u ovisnosti o vremenu



Slika 42. Promjene kutova sa Kalmanovim filtrom



Slika 43. Odziv akcelerometra uslijed vibracija senzora

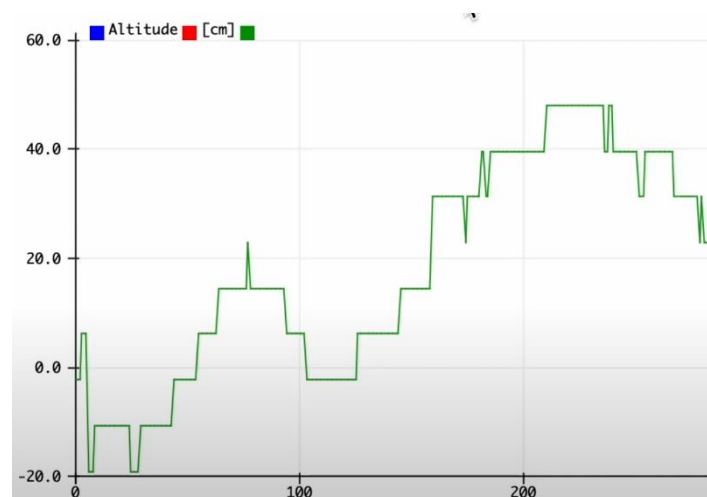
Iz danih dijagrama na slikama vidi se da je Kalmanov filter odstranio smetnje, zagladio promjene i učinio očitavanja senzora preciznijima

### 6.3 Mjerenje visine i stabilizacija lebdenja – BMP280

Barometarski senzori funkcioniraju na principu mjerenja atmosferskog tlaka, pri čemu se koristi činjenica da tlak opada s povećanjem visine. Ova povezanost omogućuje izračun visine na temelju tlaka. Jedna od glavnih prednosti ovog tipa senzora je njegova visoka osjetljivost na male promjene tlaka, što ga čini idealnim za primjenu u sustavima upravljanja letom. Odnos između atmosferskog tlaka i visine definiran je barometarskom formulom, koja u standardnom obliku pretpostavlja temperaturu od 15 °C i tlak na razini mora od 1013,25 hPa:

$$Altitude = 44330 \cdot \left[ 1 - \left( \frac{pressure}{1013.25} \right)^{\frac{1}{5.255}} \right] \quad (6.16)$$

U formuli se visina izražava u metrima, a tlak u hPa. Iako temperatura tijekom leta kvadrokoptera nije konstantna niti uvijek iznosi 15 °C, a tlak na razini mora može varirati ovisno o vremenskim uvjetima, te promjene nisu od značaja za sustav upravljanja letom. Budući da je važna samo relativna promjena visine između početne točke i određene pozicije, apsolutne vrijednosti temperature i tlaka ne utječu na funkcionalnost sustava.



Slika 44. Očitavanja s barometra bez Kalmanovog filtra

Barometarski senzor može se testirati pomicanjem eksperimentalne platforme ili letjelice duž vertikalne osi. Pri tome se može primijetiti da su očitavanja senzora spora u reakciji na promjene, pokazuju značajne varijacije tijekom vremena i nisu osobito precizna. Ove nepravilnosti uzrokovane su brzim promjenama tlaka u okolini, primjerice zbog strujanja zraka ili promjene uvjeta u zatvorenom prostoru.

Zbog nestabilnosti u očitanjima, oslanjanje isključivo na barometar za regulaciju vertikalne brzine moglo bi rezultirati slabom učinkovitošću upravljanja. Kao rješenje, primjenjuje se Kalmanov filter koji kombinira podatke barometra s dodatnim izvorom informacija. U ovom slučaju, vertikalna brzina procjenjuje se pomoću akcelerometra, čime se poboljšava pouzdanost mjerenja.

#### 6.4 Mjerenje vertikalne akceleracije

Barometarska mjerenja visine pokazuju se nedovoljno preciznima za optimalno upravljanje letjelicom. Međutim, stabilnost kvadrokoptera ne ovisi isključivo o održavanju konstantne visine, već i o nultoj vertikalnoj brzini. Ovu brzinu moguće je efikasno mjeriti integriranim akcelerometrom. Kombinacija barometarskih i akcelerometrijskog podataka omogućuje znatno precizniju regulaciju visine leta, iskorištavajući komplementarne karakteristike oba senzora.

Razmotrimo tri inercijalna smjera ubrzanja kvadrokoptera:  $AccX_i$ ,  $AccY_i$  te  $AccZ_i$ . Ovi vektori su uvijek poravnati horizontalno i vertikalno u odnosu na Zemljinu površinu, neovisno o orijentaciji same letjelice.

Ključno je napomenuti da ove inercijalne osi zadržavaju svoju orijentaciju bez obzira na rotaciju akcelerometra ili kvadrokoptera. Posebno je značajno da  $AccZ_i$  uvijek ostaje okomit na površinu Zemlje, što ga čini idealnim za mjerenje vertikalne brzine nakon integracije.

Ovakav sustav omogućuje precizno praćenje vertikalnog kretanja letjelice, neovisno o njezinoj trenutačnoj orijentaciji u prostoru. To je od iznimne važnosti za stabilizaciju leta i navigaciju u trodimenzionalnom prostoru.

$$AccZ_i = -AccX \cdot \sin(\theta) \quad (6.17)$$

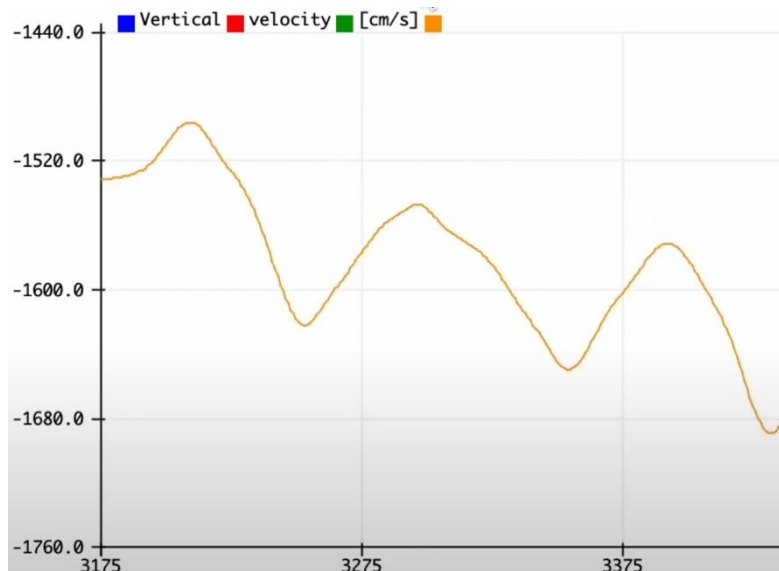
Akceleracija u Y i Z smjeru daje sljedeće jednadžbe:

$$AccZ_i = AccZ_i \cdot \cos(\theta) = AccY \cdot \sin(\phi) \cdot \cos(\theta) \quad (6.18)$$

$$AccZ_i = AccZ_i \cdot \cos(\theta) = AccZ \cdot \cos(\phi) \cdot \cos(\theta) \quad (6.19)$$

Zbrajanjem svih komponenata možemo doći do ukupne akceleracije u smjeru Z osi:

$$AccZ_i = -AccX \cdot \sin(\theta) + AccY \cdot \sin(\phi) \cdot \cos(\theta) + AccZ \cdot \cos(\phi) \cdot \cos(\theta) \quad (6.20)$$



Slika 45. Odziv akcelerometra bez Kalmanovog filtra

Ekperimentalna verifikacija algoritma opisanog u prethodnim sekcijama otkriva sistematsku devijaciju u procjeni vertikalne brzine. Ova devijacija manifestira se kao linearna promjena izračunate vertikalne brzine tijekom vremena, čak i u uvjetima stacionarnog stanja senzora ili letjelice [Slika 45]. Magnituda ove devijacije korelira s preciznošću kalibracije akcelerometra,

što ukazuje na kumulativni efekt minornih integracijskih pogrešaka. Ovaj problem bit će riješen s pomoću dvodimenzionalnog Kalmanovog filtra za barometar i akcelerometar.

## 6.5 Kalmanov filter dvije dimenzije

Pri estimaciji vertikalne brzine primjenjuje se metodologija analogna onoj korištenoj za mjerenje kutova valjanja i nagiba. Implementira se dodatni Kalmanov filter koji integrira podatke dobivene akcelerometrom i barometrom. S obzirom na to da stanje sustava obuhvaća dvije varijable - vertikalnu brzinu i visinu - ovaj Kalmanov filter je dvodimenzionalan.

Metodologija konstrukcije dvodimenzionalnog Kalmanovog filtra konceptualno je analogna jednodimenzionalnom slučaju. Stanje sustava u ovom kontekstu definirano je dvjema komponentama: vertikalnom brzinom ( $Velocity_{Kalman}$ ) i visinom ( $Altitude_{Kalman}$ ). Ove se varijable inkorporiraju u vektor stanja  $S$ , formirajući osnovu za daljnju analizu i estimaciju.

$$S = \begin{bmatrix} Altitude_{Kalman} \\ Velocity_{Kalman} \end{bmatrix} \quad (6.21)$$

Za estimaciju vertikalne brzine i **visine**, ključni ulazni parametar je akceleracija u inercijskom  $Z$  smjeru, označena kao  $AccZ_{inertial}$ . Proces dobivanja brzine u vertikalnom smjeru zahtijeva primjenu jednostruke integracije nad ovom akceleracijom. Ovaj matematički postupak omogućuje transformaciju podataka o ubrzanju u informaciju o brzini, što je **osnova** za preciznu analizu vertikalnog gibanja objekta.

$$Velocity_{Kalman}(k) = Velocity_{Kalman}(k - 1) + T_i \cdot AccZ_{inertial}(k) \quad (6.22)$$

Integriranjem jednadžbe (6.22) dobiva se jednadžba za visinu

$$Altitude_{Kalman}(k) = Altitude_{Kalman}(k - 1) + T_i \cdot Velocity_{Kalman} + 0.5 \cdot T_s^2 \cdot AccZ_{inertial}(k) \quad (6.23)$$

Ove dvije jednadžbe formuliraju se u prostor stanja:

$$\begin{bmatrix} Altitude_{Kalman}(k) \\ Velocity_{Kalman}(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & T_i \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Altitude_{Kalman}(k - 1) \\ Velocity_{Kalman}(k - 1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.5 \cdot T_s^2 \\ T_s \end{bmatrix} \cdot AccZ_{inertial}(k) \quad (6.24)$$



Navedena jednačba predstavlja generalizirani oblik predikcije stanja sustava, izražen kao  $S(k)=F \cdot S(k-1)+G \cdot U(k)$ . Procjena nesigurnosti ove predikcije definirana je izrazom  $P(k)=F \cdot P(k-1) \cdot F^T+Q$ .

Pri inicijalizaciji sustava, visina i brzina se postavljaju na nultu vrijednost. Stoga, inicijalna predikcija vektora stanja  $S$  za iteraciju  $k=0$  poprima oblik:

$$S(k = 0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.25)$$

S obzirom na to da je inicijalna predikcija vektora stanja  $S$  potpuno precizna, inicijalna matrica nesigurnosti predikcije  $P$  može se također postaviti na nulu. Ova pretpostavka o savršenoj početnoj točnosti omogućuje postavljanje početnih uvjeta za Kalmanov filter bez unošenja inicijalnih nesigurnosti u sustav. Matematički, to se može izraziti kao:

$$P(k = 0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.26)$$

gdje je  $P(0)$  inicijalna matrica kovarijance pogreške, a nulte vrijednosti indiciraju odsutnost nesigurnosti u početnoj estimaciji stanja sustava.

Za izračun nesigurnosti predikcije, neophodna je i procesna nesigurnost. Pretpostavimo standardnu devijaciju od  $10 \text{ cm/s}^2$  za vrijednosti akcelerometra. Uzimajući u obzir kontrolnu matricu  $G$  i činjenicu da  $Q$  suštinski predstavlja varijancu procesne nesigurnosti, dobiva se:

$$Q = G \cdot G^T \cdot 10^2 \quad (6.27)$$

Ova formulacija omogućuje kvantifikaciju nesigurnosti u procesu estimacije, integrirajući karakteristike senzora i dinamiku sustava u model Kalmanovog filtra.

Matrica opservacije  $H$  uspostavlja vezu između vektora stanja i mjerenja  $M$ . Razlika između ovih veličina množi se s Kalmanovim pojačanjem. U ovom slučaju,  $M$  predstavlja visinu izmjerenu barometrom, što omogućuje izražavanje pogreške između mjerenja i stanja na sljedeći način:

$$Altitude_{barometer(k)} - Altitude_{kalman(k)} \quad (6.28)$$

Općenitije zapisano u matričnom obliku, opservacijska matrica  $H$  iznosi  $[1 \ 0]$ , dok je vektor mjerenja  $M$  jednak  $Altitude_{kalman}$ :

$$Altitude_{kalman(k)} - [1 \ 0] * \begin{bmatrix} Altitude_{kalman(k)} \\ Velocity_{kalman(k)} \end{bmatrix} \quad (6.29)$$

Koristeći opservacijsku matricu  $H$ , izračunava se prijelazna matrica  $L(k)$  prema formuli:

$$L(k) = H \cdot P(k) \cdot H^T + R \quad (6.30)$$

gdje je  $R$  nesigurnost mjerenja visine barometrom. Pretpostavimo standardnu devijaciju od 30 cm, što rezultira vrijednošću  $R = 30^2 = 900 \text{ cm}^2$ .

Nadalje, Kalmanovo pojačanje  $K$  izračunava se prema formuli:

$$K = P(k) \cdot H^T \cdot L(k)^{-1} \quad (6.31)$$

Ažuriranje predikcije stanja provodi se prema:

$$S(k) = S(k) + K \cdot (M - H \cdot S) \quad (6.32)$$

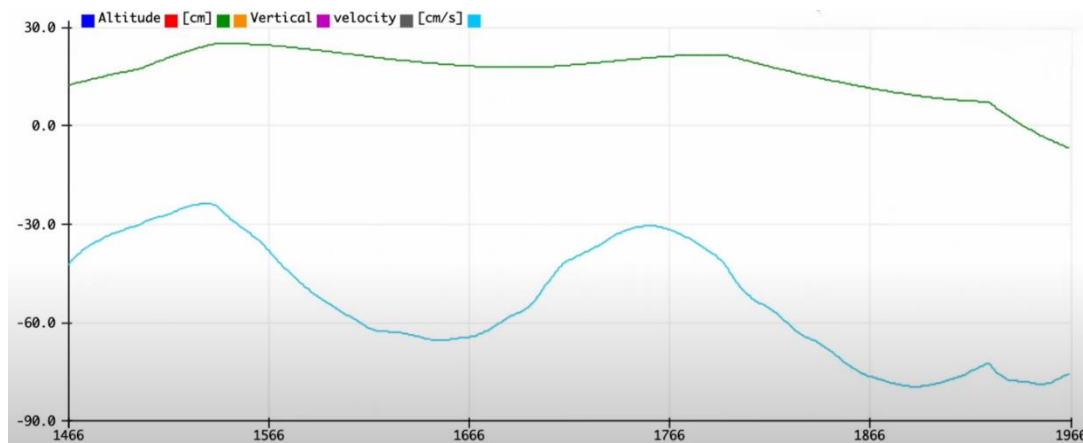
Konačno, nesigurnost predviđenog stanja ažurira se korištenjem jednadžbe:

$$P(k) = (I - K \cdot F) \cdot P(k) \quad (6.33)$$

gdje je  $I$  jedinična matrica dimenzija  $2 \times 2$ :

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.34)$$

Zaključno s ovime postignut dvodimenzionalni Kalmanov filter.

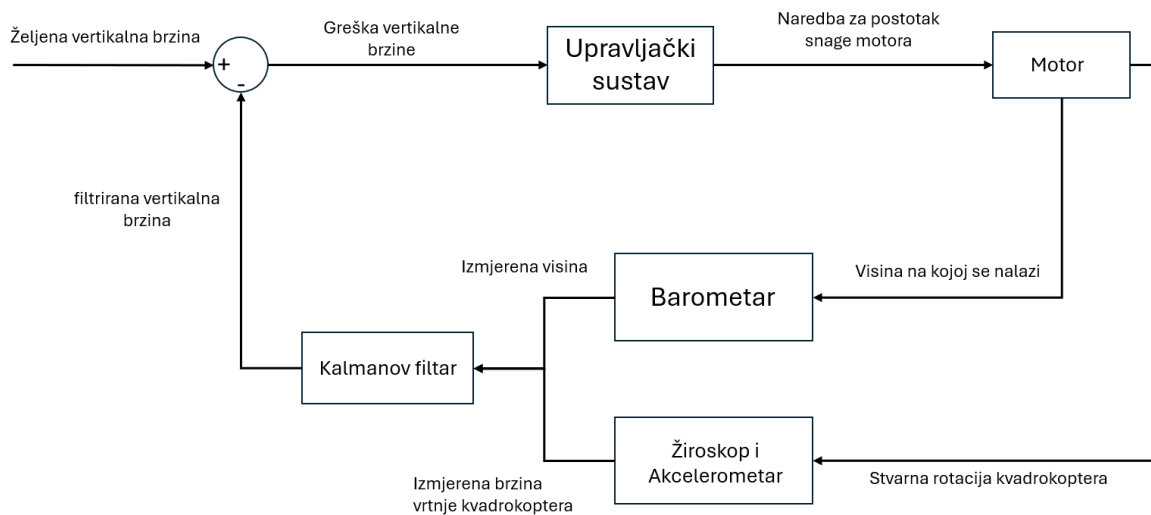


**Slika 46. Odziv s akcelerometra i barometra s dvodimenzionalnim Kalmanovim filtrom**

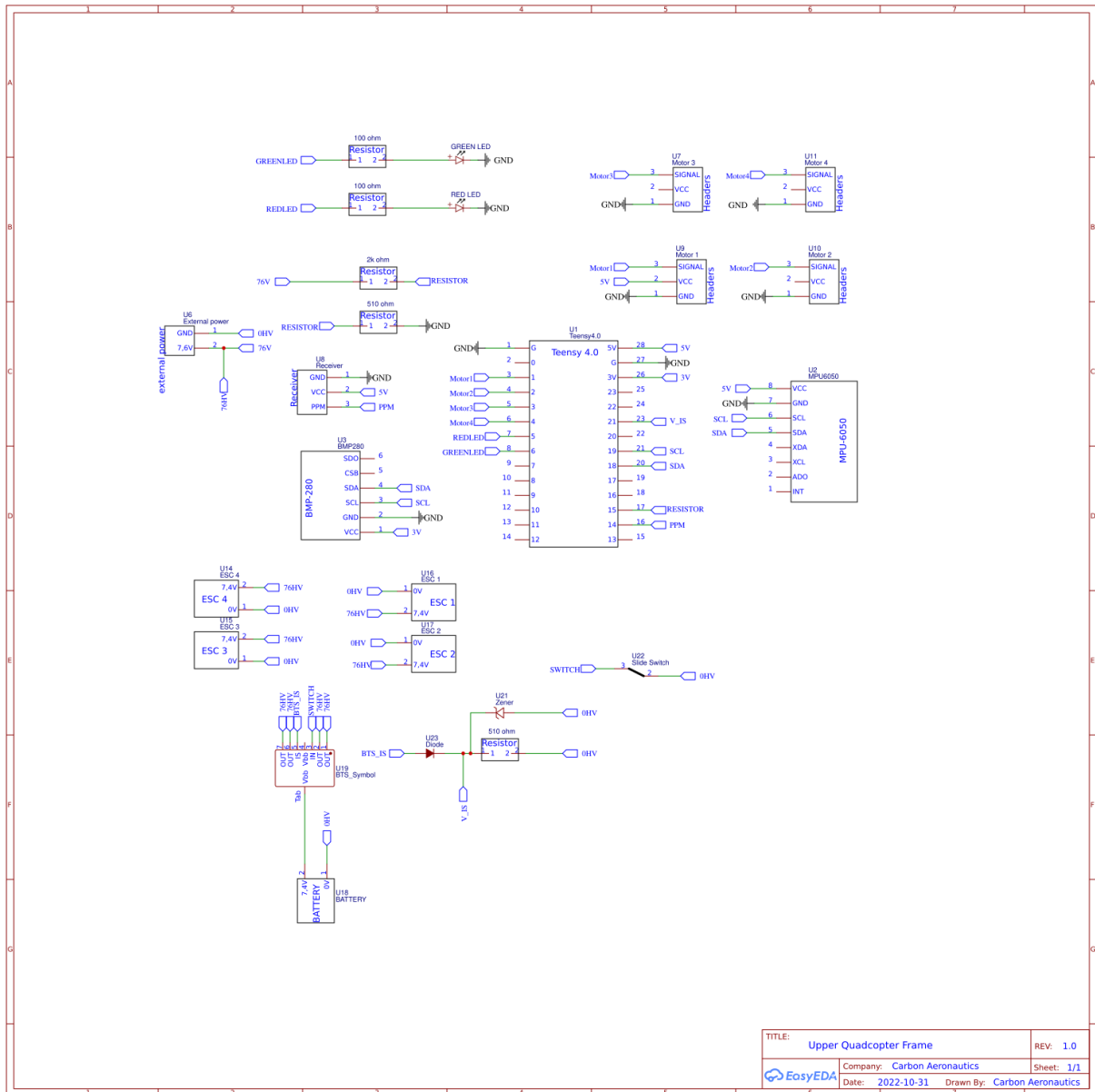
Na slici se može vidjeti da je napokon postignut stabilan i gladak odziv.

Evaluacija 2D Kalmanovog filtra otkriva povremene značajne devijacije u procjenama visine i vertikalne brzine, primarno uzrokovane fluktuacijama atmosferskog tlaka. Međutim, u praktičnoj primjeni na kvadrokopteru, ove devijacije imaju minimalan utjecaj na performanse leta zbog implementacije kontrole brzine umjesto visine. Pilot intuitivno kompenzira manje netočnosti u mjerenju brzine prilagodbom kontrole potiska.

Analiza dinamike Kalmanovog pojačanja pokazuje inicijalnu nultu vrijednost, koja nakon kratkog perioda konvergira ka stacionarnim vrijednostima od 0,0033 za visinu i 0,0013 za vertikalnu brzinu. Ove vrijednosti indiciraju da algoritam daje veći značaj podacima dobivenim integracijom akcelerometra, dok se barometarska mjerenja koriste primarno za korekciju dugoročnog odstupanja od željene vrijednosti u procjeni visine.

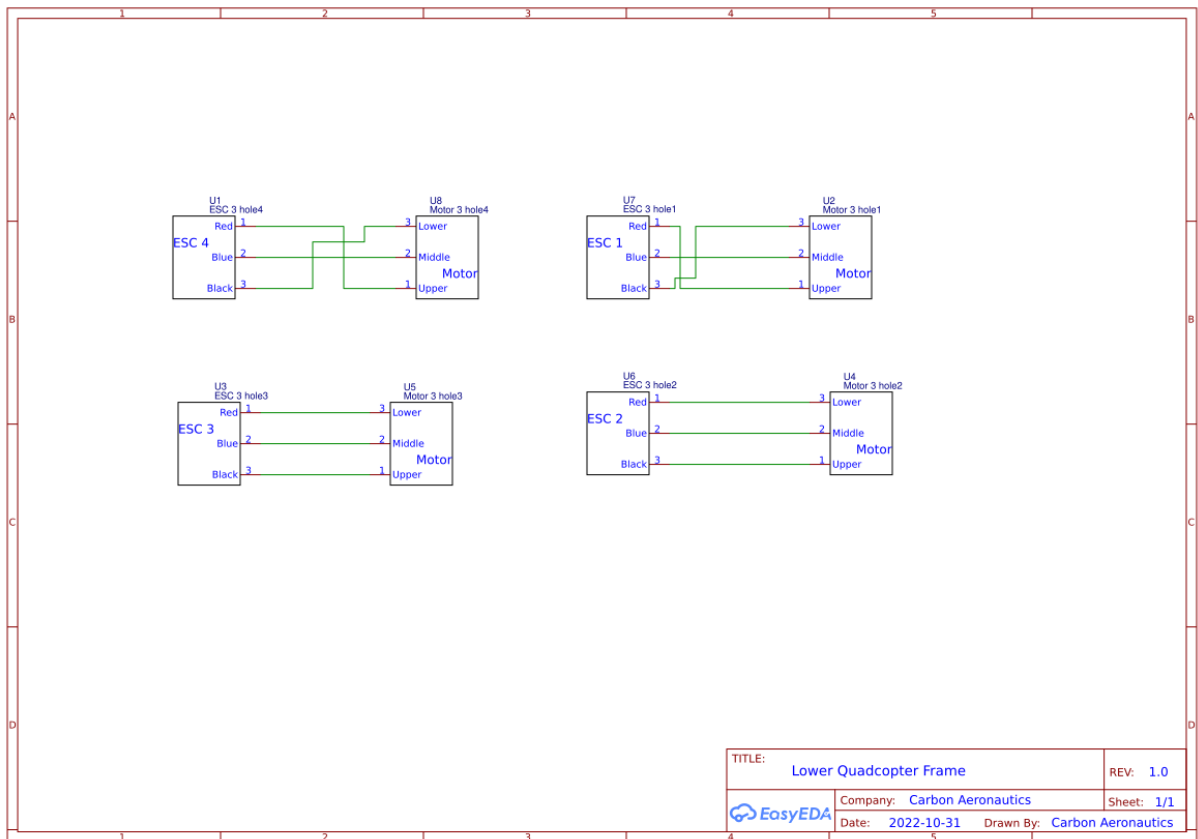


**Slika 47** Konačni regulacijski krug s dvodimenzionalnim Kalmanovim filtrom



TITLE: Upper Quadcopter Frame		REV: 1.0
Company: Carbon Aeronautics		Sheet: 1/1
Date: 2022-10-31	Drawn By: Carbon Aeronautics	

Slika 48. Električna shema upravljačkog sustava[7]



Slika 49. Električna shema motora[7]

---

## 7. ZAKLJUČAK

Provedeni rad pokazao je da je moguće razviti funkcionalan prototip kvadrokoptera koristeći mikrokontroler Teensy 4.0 kao centralnu upravljačku jedinicu. Kroz detaljnu analizu svih podsustava letjelice – od mehaničke konstrukcije do senzorskih sustava – osigurana je stabilnost i preciznost u letu. Matematički model kinematike i dinamike omogućio je razumijevanje ponašanja letjelice te je poslužio kao osnova za dizajn regulatora i simulaciju sustava.

Posebna pažnja posvećena je obradi podataka sa senzora s pomoću Kalmanovog filtra, koji se pokazao ključnim za smanjenje pogrešaka mjerenja i poboljšanje stabilnosti sustava. Jednodimenzionalni Kalmanov filter uspješno je korišten za procjenu kutova orijentacije, dok je dvodimenzionalni filter omogućio kombinaciju podataka barometra i akcelerometra za precizno određivanje visine i vertikalne brzine.

Eksperimentalni rezultati potvrdili su funkcionalnost razvijenog sustava, pri čemu su odstupanja mjerenja svedena na minimum zahvaljujući implementiranim algoritmima obrade podataka i regulacije. Iako su zabilježene određene pogreške uslijed atmosferskih promjena tlaka, one nisu značajno utjecale na performanse tijekom leta zahvaljujući intuitivnoj prilagodbi pilota.

Zaključno, ovaj rad uspješno demonstrira kako se napredni algoritmi poput Kalmanovog filtra mogu integrirati u sustave upravljanja bespilotnim letjelicama kako bi se postigla visoka razina preciznosti i stabilnosti. Daljnji razvoj mogao bi uključivati optimizaciju hardverskih komponenti te primjenu naprednijih metoda regulacije za još bolje performanse kvadrokoptera u različitim uvjetima leta.

---

**LITERATURA**

- [1] <https://www.aerotas.com/blog/mavic-air-2>
- [2] <https://www.aliexpress.com/item/1005007332489849.html>
- [3] <https://www.dji.com/newsroom/news/dji-spreading-wings-s900>
- [4] <https://www.uavos.com/products/fixed-wing-uavs/sitaria-e/>
- [5] <https://www.airmobi.com/product/airmobi-v25-full-electric-vtol-drone/>
- [6] <https://www.endoacustica.com/fpv-drone-tactics.php>
- [7] <https://github.com/CarbonAeronautics>
- [8] <https://www.kegumotor.com/en/news/difference-between-dc-brushless-and-dc-brushed-motor.html>
- [9] <https://www.aliexpress.com/i/1005004157934306.html>
- [10] [https://hobbyking.com/en\\_us/turnigy-nano-tech-1300mah-2s-25c-lipo-pack-wxt60.html](https://hobbyking.com/en_us/turnigy-nano-tech-1300mah-2s-25c-lipo-pack-wxt60.html)
- [11] [https://hobbyking.com/en\\_us/hobbyking-6a-2-3s-esc-0-5a-ubec.html](https://hobbyking.com/en_us/hobbyking-6a-2-3s-esc-0-5a-ubec.html)
- [12] <https://www.integrasources.com/blog/bldc-motor-controller-design-principles/>
- [13] <https://www.plexishop.it/en/aht20-bmp280-temperature-humidity-and-pressure-measurement-module.html>
- [14] <https://www.insidegadgets.com/2018/01/26/building-a-letterbox-detector-with-the-adxl345-accelerometer/>
- [15] <https://www.racer.lt/lt/catalog/item/flysky-fs-i6x-i6x-10ch-2-4ghz-afhds-2a-rc-transmitter-with-fs-ia10b-receiver-for-fpv-rc-drone-26447.html>
- [16] <https://www.ericcointernational.com/application/how-does-an-imu-work.html>
- [17] <https://forum.arduino.cc/t/nodemcu-gy-521-sensor-pull-up-and-pull-down-resistor-needed/679998>
- [18] [https://www.globalsources.com/product/bme280-3-3v-5v\\_1205559097f.htm](https://www.globalsources.com/product/bme280-3-3v-5v_1205559097f.htm)
- [19] <https://rc-wing.com/products/flysky-fs-ia6b-rc-recceiver-for-fs-i4-i6-i10-rc-transmitter>
- [20] <https://www.pjrc.com/store/teensy40.html>
- [21] Krznar, M.: Modeliranje i regulacija hibridnih pogonskih sustava višerotorskih bespilotnih letjelica. Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb, 2021.
- [22] Kotarski, D.: Modeliranje i robusno upravljanje višerotorskim bespilotnim letjelicama s potpuno upravljanim konfiguracijama, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb, 2020.
- [23] Prevarić M.: Projektiranje regulacijskog sustava orijentacije i pozicije višerotorske bespilotne letjelice u Matlab/Simulink programskom okruženju

- 
- [24] BeniĆ, Z., Piljek, P. and Kotarski, D., Mathematical modelling of unmanned aerial vehicles with four rotors. *Interdisciplinary Description of Complex Systems: INDECS*, 14(1), pp.88-100, 2016.
- [25] <https://timhanewich.medium.com/how-i-developed-the-scout-flight-controller-part-1-quadcopter-flight-dynamics-400af73d21db>
- [26] [Drone Simulation MathWorks](#)
- [27] Kose, O. and Oktay, T., Dynamic modeling and simulation of quadrotor for different flight conditions. *European Journal of Science and Technology*, 15, pp.132-142, 2019.
- [28] Gopalakrishnan, E., Quadcopter flight mechanics model and control algorithms. *Czech Technical University*, 69, pp.8-30, 2017.
- [29] Sulficar, A.B.I.D., Suresh, H., Varma, A. and Radhakrishnan, A., Modeling, simulation and complete control of a quadcopter. *National Institute of Technology Karnataka, Surathkal.*, 2017.
- [30] Sabatino F.: *Quadrotor control: modeling, nonlinear control design, and simulation*. KTH Royal Institute of Technology, 67, 2015.
- [31] <https://www.youtube.com/@CANEDUX>



**PRILOZI**