

# Računalne simulacije eliptičkih problema uz primjenu diskretizacije višeg reda točnosti

---

Lukovnjak, Noah

Undergraduate thesis / Završni rad

2025

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:235:260331>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-03-10**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# ZAVRŠNI RAD

Noah Lukovnjak

Zagreb, 2025.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# ZAVRŠNI RAD

Mentori:

Izv. prof. dr. sc. Severino Krizmanić

Dr. sc. Ivan Batistić

Student:

Noah Lukovnjak

Zagreb, 2025.

## Izjava

Izjavljujem da sam ovaj rad izradio samostalno koristeći znanja stečena tijekom studija i navedenu literaturu.

Noah Lukovnjak



*Zahvaljujem se prije svega svom mentoru i komentoru na strpljenju, stručnom vodstvu i nesebičnoj pomoći tijekom izrade ovog završnog rada. Njihova podrška i savjeti bili su od neizmjerne važnosti u svakom koraku istraživanja i pisanja.*

*Posebnu zahvalu upućujem svojoj obitelji na bezuvjetnoj podršci, motivaciji i razumijevanju tijekom dosadašnjeg studija. Njihova vjera u mene bila je neprocjenjiva snaga u trenucima izazova.*

*Također, želim izraziti zahvalnost svim prijateljima i kolegama koji su mi pomogli tijekom studija i učinili ovo akademsko putovanje ne samo uspješnijim, već i nezaboravnim.*



Sveučilište u Zagrebu	
Fakultet strojarstva i brodogradnje	
Datum	Prilog
Klasa: 602 – 04 / 25 – 06 / 1	
Ur.broj: 15 – 25 –	

## ZAVRŠNI ZADATAK

Student: **Noah Lukovnjak**

JMBAG: **0035236729**

Ńaslov rada na hrvatskom jeziku: **Računalne simulacije eliptičkih problema uz primjenu diskretizacije višeg reda točnosti**

Naslov rada na engleskom jeziku: **Numerical simulations of elliptical problems using high-order discretization scheme**

Opis zadatka:

Dosadašnji razvoj metode konačnih volumena uspješno se temeljio na rješavačima prvenstveno razvijenim za potrebe mehanike fluida. Takvi rješavači se temelje na semiimplicitnoj diskretizaciji drugog reda točnosti u kojoj se pretpostavlja linearna raspodjela polja, a dobiveni sustav jednadžbi se rješava segregatnim postupkom i iterativnim rješavačem. U novije vrijeme, metoda konačnih volumena se uspješno primjenjuje i za rješavanje problema iz područja mehanike čvrstih tijela, te interakcije sa strujanjem fluida. Ovime se otvara i potreba za primjenom diskretizacije višeg reda točnosti, te se i u znanstvenoj literaturi pojavljuju prijedlozi novih metoda diskretizacije.

U ovome radu potrebno je provesti računalne simulacije problema s dominantno eliptičkim svojstvima matematičkog modela uz primjenu nove metode prostorne diskretizacije višeg reda točnosti. Rezultate je potrebno usporediti s onima dobivenim diskretizacijom drugog reda točnosti, te eksperimentalnim i analitičkim (u slučajevima gdje je primjenjivo). Pri izradi rada se preporučuje primjena slobodno dostupnog programskog paketa OpenFOAM i programskog jezika Python.

U sklopu rada potrebno je:

- pronaći geometrijske modele problema s ciljem mogućnosti usporedbe rezultata s analitičkim rješenjima i rješenjima dobivenim primjenom diskretizacije drugog reda točnosti;
- obaviti sve postupke računalnog proračuna: prostorna diskretizacija geometrijskog modela, odabir i ugađanje numeričkog postupka, obrada i prikaz rezultata simulacija;
- usporediti rezultate s rezultatima iz drugih izvora (analitičkih i numeričkih proračuna te eksperimentalnih, ukoliko je dostupno).

U radu je potrebno navesti korištenu literaturu i eventualno dobivenu pomoć.

Zadatak zadan:

30. 11. 2024.

Datum predaje rada:

**1. rok:** 20. i 21. 2. 2025.

**2. rok:** 10. i 11. 7. 2025.

**3. rok:** 18. i 19. 9. 2025.

Predviđeni datumi obrane:

**1. rok:** 24. 2. – 28. 2. 2025.

**2. rok:** 15. 7. – 18. 7. 2025.

**3. rok:** 22. 9. – 26. 9. 2025.

Zadatak zadao:

Izv. prof. dr. sc. Severino Krizmanić

Dr. sc. Ivan Batistić

Prof. dr. sc. Vladimir Soldo

## Sadržaj

<b>Popis slika</b>	<b>III</b>
<b>Popis tablica</b>	<b>V</b>
<b>Popis oznaka</b>	<b>VI</b>
<b>Sažetak</b>	<b>VIII</b>
<b>Summary</b>	<b>IX</b>
<b>1. Uvod</b>	<b>1</b>
1.1. Metoda kontrolnih volumena . . . . .	1
1.2. Računalna dinamika fluida . . . . .	2
1.3. Klasifikacija parcijalnih diferencijalnih jednadžbi . . . . .	3
1.4. OpenFOAM . . . . .	6
<b>2. Opći oblik eliptičke jednadžbe</b>	<b>7</b>
<b>3. Diskretizacija metodom kontrolnih volumena</b>	<b>9</b>
3.1. Standardna diskretizacija drugog reda točnosti . . . . .	9
3.1.1. Diskretizacija prostora . . . . .	9
3.1.2. Diskretizacija jednadžbi . . . . .	10
3.2. Diskretizacija višeg reda točnosti . . . . .	18
3.2.1. Diskretizacija prostora . . . . .	18
3.2.2. Gaussova integracija . . . . .	19
3.2.3. Diskretizacija jednadžbi . . . . .	19
<b>4. Numerički primjeri i validacija</b>	<b>25</b>
4.1. 1D problem stacionarnog provođenja topline bez izvorskog člana . . . . .	25
4.1.1. Analitičko rješenje . . . . .	25
4.1.2. Standardna diskretizacija drugog reda točnosti . . . . .	25
4.1.3. Diskretizacija višeg reda točnosti . . . . .	27
4.1.4. Usporedba rješenja . . . . .	28
4.2. 1D problem stacionarnog provođenja topline uz izvorski član . . . . .	30
4.2.1. Standardna diskretizacija drugog reda točnosti . . . . .	30
4.2.2. Diskretizacija višeg reda točnosti . . . . .	32
4.2.3. Usporedba rješenja . . . . .	33
4.3. 2D problem stacionarnog provođenja topline kroz kvadratnu ploču uz izvorski član - Prva konfiguracija . . . . .	35
4.3.1. Analitičko rješenje . . . . .	35
4.3.2. Standardna diskretizacija drugog reda točnosti . . . . .	36
4.3.3. Diskretizacija višeg reda točnosti . . . . .	38
4.3.4. Usporedba rješenja . . . . .	40
4.4. 2D problem stacionarnog provođenja topline kroz kvadratnu ploču uz izvorski član - Druga konfiguracija . . . . .	43
4.4.1. Standardna diskretizacija drugog reda točnosti . . . . .	43
4.4.2. Diskretizacija višeg reda točnosti . . . . .	45
4.4.3. Usporedba rješenja . . . . .	47

---

4.5. Problem stacionarnog provođenja topline kroz stijenku cijevi uz izvorski član	49
4.5.1. Standardna diskretizacija drugog reda točnosti . . . . .	50
4.5.2. Diskretizacija višeg reda točnosti . . . . .	51
4.5.3. Usporedba rješenja . . . . .	53
<b>5. Zaključak</b>	<b>54</b>
<b>Literatura</b>	<b>55</b>

## Popis slika

1	Primjena RDF-a: a) turbostroj [1], b) aerodinamika bolida F1 [2], c) aerodinamika biciklista [3], d) biomedicinsko inženjerstvo [4] . . . . .	2
2	Eliptička jednadžba . . . . .	4
3	Hiperbolička jednadžba . . . . .	4
4	Parabolička jednadžba . . . . .	5
5	Proizvoljni trodimenzijski kontrolni volumen - standardna diskretizacija . . . . .	9
6	Proizvoljni dvodimenzijski kontrolni volumen - standardna diskretizacija . . . . .	10
7	Neortogonalna stranica na dodiru dva kontrolna volumena . . . . .	11
8	Neortogonalnost - Pristup minimalne korekcije . . . . .	12
9	Neortogonalnost - Pristup ortogonalne korekcije . . . . .	13
10	Neortogonalnost - Pristup nadrelaksacije . . . . .	14
11	Proizvoljni trodimenzijski kontrolni volumen - diskretizacija višeg reda . . . . .	18
12	Proizvoljni dvodimenzijski kontrolni volumen - diskretizacija višeg reda . . . . .	18
13	Ovisnost težinskog faktora o udaljenosti za različite vrijednosti parametra oblika . . . . .	21
14	Određivanje proračunske molekule $N_n = 11$ preko središta stranice . . . . .	22
15	Određivanje proračunske molekule $N_n = 11$ za svaku Gaussovu točku pojedinačno . . . . .	22
16	1D problem stacionarnog provođenja topline - diskretizirani štap . . . . .	25
17	Usporedba rješenja za 1D problem stacionarnog provođenja topline bez izvora . . . . .	28
18	Usporedba rješenja za 1D problem stacionarnog provođenja topline s izvorom . . . . .	33
19	Konvergencija $L_2$ norme . . . . .	34
20	Konvergencija $L_\infty$ norme . . . . .	34
21	Geometrija i rubni uvjeti prve konfiguracije . . . . .	35
22	Nestrukturirane mreže . . . . .	36
23	Raspodjela temperature po ploči - Prva konfiguracija . . . . .	37
24	Raspodjela temperature na $y = 0,5$ m - Prva konfiguracija . . . . .	37
25	Raspodjela temperature na najgrubljoj mreži (14 KV) za različite redove interpolacije - Prva konfiguracija . . . . .	38
26	Raspodjela temperature na najfinijoj mreži (5116 KV) za različite redove interpolacije - Prva konfiguracija . . . . .	38
27	Raspodjela temperature na $y = 0,5$ m za različite redove interpolacije - Prva konfiguracija . . . . .	39
28	Usporedba raspodjela temperature na $y = 0,5$ m na najfinijim mrežama - Prva konfiguracija . . . . .	40
29	Dijagrami $L_2$ norme konvergencije . . . . .	42
30	Geometrija i rubni uvjeti druge konfiguracije . . . . .	43
31	Raspodjela temperature po ploči - Druga konfiguracija . . . . .	44
32	Raspodjela temperature na presjecima - Druga konfiguracija . . . . .	44
33	Raspodjela temperature na najgrubljoj mreži za različite redove interpolacije - Druga konfiguracija . . . . .	45
34	Raspodjela temperature na najfinijoj mreži za različite redove interpolacije - Druga konfiguracija . . . . .	45
35	Raspodjela temperature na nestrukturiranim mrežama - Druga konfiguracija: (a), (c), (e) $y = 0,5$ m ; (b), (d), (f) $x = 0,5$ m . . . . .	46
36	Raspodjela temperature na mreži s 14 KV - Druga konfiguracija . . . . .	47

---

37	Usporedba raspodjela temperature na najfinijim mrežama - Druga konfiguracija . . . . .	47
38	Usporedba raspodjela temperature na mrežama s $\approx 100$ KV - Druga konfiguracija . . . . .	48
39	Geometrija cijevi i rubni uvjeti . . . . .	49
40	Prostorna diskretizacija cijevi . . . . .	49
41	Raspodjela temperature po cijevi - Standardna diskretizacija . . . . .	50
42	Raspodjela temperature po presjeku cijevi - Standardna diskretizacija . . . . .	50
43	Raspodjela temperature po cijevi na najgrubljoj mreži . . . . .	51
44	Raspodjela temperature po cijevi na najfinijoj mreži . . . . .	51
45	Raspodjela temperature po presjeku cijevi za različite redove interpolacije . . . . .	52
46	Usporedba raspodjele temperature za različite finoće mreže . . . . .	53

## Popis tablica

1	Nagibi $L_2$ i $L_\infty$ normi za različite metode diskretizacije . . . . .	34
2	Vrijeme izvršavanja koda za različite redove interpolacije i gustoće mreže . .	40
3	Minimalne temperature za različite metode i gustoće mreže . . . . .	41
4	Vrijeme izvršavanja koda za različite redove interpolacije i gustoće mreže - Cijev . . . . .	53

## Popis oznaka

Oznaka	Jedinica	Opis
<b>A</b>	-	matrica koeficijenata sustava
$A$	$m^2$	površina
$A_f$	-	stranica kontrolnog volumena
$\bar{\mathbf{a}}$	-	vektor parametara s parcijalnim derivacijama
$a$	$m^2/s$	temperaturna difuzivnost
<b>B</b>	-	vektorsko polje
<b>b</b>	-	vektor poznatice desne strane
<b>C</b>	-	vektorsko polje
$c_p$	J/kgK	specifični toplinski kapacitet pri konstantnom tlaku
$c_{x,n}, c_{y,n}, c_{z,n}$	-	koeficijenti interpolacije
$c_0$	m/s	brzina širenja poremećaja
$\mathbf{d}_f$	m	vektor udaljenosti kontrolnih volumena
$f$	-	težište stranice
$f'$	-	točka presjecišta vektora udaljenosti i stranice kontrolnog volumena
$f_x$	-	faktor linearne interpolacije
$g$	-	Gaussova točka integracije
$k$	W/mK	koeficijent toplinske provodnosti
$k$	-	parametar oblika
$\mathbf{k}_f$	m	neortogonalni vektor
$\bar{\mathbf{M}}$	-	matrica težinskih proizvoda
$L_2, L_\infty$	-	norme konvergencije
$l$	m	duljina
$N$	-	susjedni proračunski čvor
$N_f$	-	broj stranica kontrolnog volumena
$N_g$	-	broj Gaussovih točaka integracije
$N_k$	-	broj čvorova na stranici kontrolnog volumena
$N_n$	-	broj kontrolnih volumena u proračunskog molekuli
$N_q$	-	broj članova u Taylorovoj ekspanziji
<b>n</b>	-	vektor vanjske normale
$\mathbf{n}_f$	-	vektor vanjske normale na stranicu kontrolnog volumena
$P$	-	razmatrani proračunski čvor
$p$	Pa	tlak
$p$	-	red polinoma
<b>Q</b>	-	matrica baza
<b>q</b>	-	vektor polinomnih baza
<b>r</b>	-	vektor položaja
$\mathbf{r}_P$	m	vektor položaja kontrolnog volumena $V_P$
$\mathbf{r}_{f,g}$	m	vektor položaja Gaussove točke integracije
$\mathbf{r}_n$	m	vektor položaja susjednog kontrolnog volumena
$\tilde{\mathbf{r}}$	m	vektor položaja točke u domeni
$r_s$	m	maksimalna udaljenost točke interpolacije od čvora
$S$	-	izvor/ponor
<b>T</b>	K	vektor temperatura
$T$	K	temperatura



---

$t$	s	vremenska koordinata
$\mathbf{U}$	m/s	vektor brzine
$U$	m/s	brzina
$V$	m <sup>3</sup>	volumen (obujam)
$V_P$	-	kontrolni volumen s proračunskim čvorom $P$
$\mathbf{W}$	-	matrica težinskih koeficijenata
$x$	m	prostorna koordinata
$y$	m	prostorna koordinata
$z$	m	prostorna koordinata
$\Delta$	-	diskriminanta jednadžbe
$\Delta_f$	m	ortogonalni vektor
$\Gamma$	m <sup>2</sup> /s	koeficijent difuzije
$\varphi$	-	zavisna skalarna varijabla
$\rho$	kg/m <sup>3</sup>	gustoća
$\omega$	-	težinski faktor
$\nabla$	-	Hamiltonov (nabla) operator

## Sažetak

U ovom radu razmatra se metoda kontrolnih volumena koja se temelji na diskretizaciji proizvoljnog reda točnosti. Navedena metoda primijenjena je na eliptičke probleme, točnije probleme stacionarnog provođenja topline kroz krutine. Diskretizacija višeg reda točnosti temelji se na aproksimaciji površinskih integrala koristeći Gaussovu integraciju te na interpolaciji metodom lokalne regresije. Kod takvog pristupa diskretizaciji, proizvoljni su red interpolacije, broj točaka integracije te veličina proračunske molekule. U radu su dobiveni rezultati uspoređeni s analitičkim rješenjima i sa standardnom diskretizacijom drugog reda točnosti. Za rješenja diskretizacijom drugog reda točnosti koristio se OpenFOAM paket, dok je za diskretizaciju višim redom točnosti korišten kod pisan u Python programskom jeziku pod nazivom HoPyFOAM. Numerički primjeri obuhvaćaju jedno- i dvodimenzijske probleme provođenja topline, uključujući provođenje topline kroz štap, kvadratnu ploču i stijenku eliptične cijevi. Analiza sadrži usporedbu točnosti i brzine konvergencije za različite mreže, a poseban naglasak stavljen je na utjecaj redova interpolacije i izbora proračunske molekule na točnost rješenja. Rezultati pokazuju da diskretizacija višeg reda može značajno poboljšati točnost u odnosu na standardne metode, uz što naravno ide i povećana računalna složenost i vrijeme izvođenja proračuna.

Ključne riječi: metoda kontrolnih volumena, računalna dinamika fluida, diskretizacija višeg reda točnosti, lokalna regresija, HoPyFOAM.

## Summary

This work analyses the high-order control volume method which allows for arbitrary order of accuracy. The method is applied to elliptic problems, specifically stationary heat conduction problems through solids. Higher-order discretization is based on the approximation of surface integrals using Gauss integration and interpolation by the local regression method. In such discretization, the order of interpolation, the number of Gauss integration points, and the size of the computational molecule are arbitrary. The results obtained in the work are compared with standard second-order discretization and analytical solutions. For second-order accuracy discretization, the OpenFOAM package was used, while for higher-order accuracy discretization, a code written in the Python programming language called HoPyFOAM was used. Numerical examples include one-dimensional and two-dimensional heat conduction problems, including heat conduction through a rod, a square plate, and the wall of an elliptical tube. Accuracy and convergence are analysed using different mesh densities, with special emphasis given to the influence of interpolation order and the choice of the computational molecule on the accuracy of the solution. The results show that higher-order discretization can significantly improve accuracy compared to standard methods, which, of course, comes with increased computational complexity and calculation time.

Keywords: Finite Volume Method, Computational Fluid Dynamics, high-order discretization, local regression, HoPyFOAM.

# 1. Uvod

## 1.1. Metoda kontrolnih volumena

Metoda kontrolnih volumena - MKV (engl. *Finite Volume Method* - FVM) danas se najčešće koristi za numeričko rješavanje problema iz područja mehanike fluida, kao i različitih problema polja poput temperaturnih i elektromagnetskih polja. Osim toga, ova metoda pronalazi primjenu i u mehanici deformabilnih tijela te u rješavanju brojnih drugih inženjerskih problema.

Jedna od ključnih prednosti metode kontrolnih volumena jest njezina konzervativna priroda. Osnove relacije koje opisuju problem (npr. zakon očuvanja mase, energije, količine gibanja) zadovoljene su u integralnom obliku u svakom pojedinom volumenu. Ovaj pristup osigurava očuvanje fizikalnih veličina i na diskretiziranoj razini, čime se postiže visoka točnost i pouzdanost numeričkih simulacija. Diskretizacija se temelji na podjeli razmatranog područja na odgovarajući broj potpodručja koji se nazivaju kontrolni volumeni, pri čemu se fizikalne veličine najčešće računaju u njihovim središtima (težištima), dok se protoci interpoliraju na granicama, odnosno stranicama kontrolnog volumena. Ovaj pristup omogućava fleksibilno rješavanje problema s različitim vrstama rubnih i početnih uvjeta.

Postupak metode kontrolnih volumena uključuje nekoliko glavnih koraka [5]:

### 1. Integriranje po proizvoljnom volumenu:

Diferencijalni oblik jednadžbi koje opisuju problem integrira se po svakom proizvoljnom kontrolnom volumenu. Ovaj korak pretvara lokalne diferencijalne jednadžbe u integralne jednadžbe koje opisuju očuvanje mase, energije ili drugih fizikalnih veličina unutar volumena.

### 2. Primjena teorema divergencije:

Teorem divergencije (Gauss-Ostrogradsky teorem [6]) primjenjuje se na integralne jednadžbe kako bi se volumenski integrali protoka zamijenili površinskim integralima. Time se analiza fokusira na interpolaciju protoka kroz granice volumena, čime se smanjuje složenost problema i omogućuje diskretizacija rubnih uvjeta.

### 3. Aproksimacija integrala:

Volumenski integrali i površinski integrali protoka aproksimiraju se koristeći interpolacijske sheme. Ove sheme omogućuju procjenu vrijednosti fizikalnih veličina unutar i na stranicama volumena. Sheme višeg reda omogućuju preciznije rješenje problema, smanjujući numeričke pogreške.

### 4. Diskretizacija:

Nakon aproksimacije integrala, dobivene se jednadžbe diskretiziraju na konačan broj volumena unutar domene proračuna. Ovaj korak pretvara kontinuirani matematički model u sustav algebarskih jednadžbi, koji se zatim rješava numeričkim tehnikama i algoritmima.

## 1.2. Računalna dinamika fluida

Računalna dinamika fluida - RDF (engl. *Computational Fluid Dynamics* - CFD) počela se razvijati, kao treća grana mehanike fluida uz teorijski i eksperimentalni pristup, napretkom i razvojem računala čime su se stvorili uvjeti za numeričko rješavanje matematičkih modela koji opisuju strujanje fluida. Iako se ova grana mehanike fluida temelji na teorijskom pristupu (rješavanje parcijalnih diferencijalnih jednačbi koje su često nelinearne i nema općeg analitičkog rješenja), ima puno sličnosti i s eksperimentalnim pristupom, jer se iz jednog numeričkog rješenja nekog problema također ne može zaključivati o utjecaju pojedinih parametara.

Proces rješavanja problema računalnom dinamikom fluida, odnosno tijekom numeričke simulacije podijeljen je na tri glavne faze [7]:

### 1. Predprocesor:

U ovoj se fazi definira problem, odabire matematički model koji ga najbolje opisuje te se diskretizira razmatrana domena (geometrijska mreža). Matematički se model sastoji najčešće od parcijalnih diferencijalnih jednačbi te početnih i rubnih uvjeta.

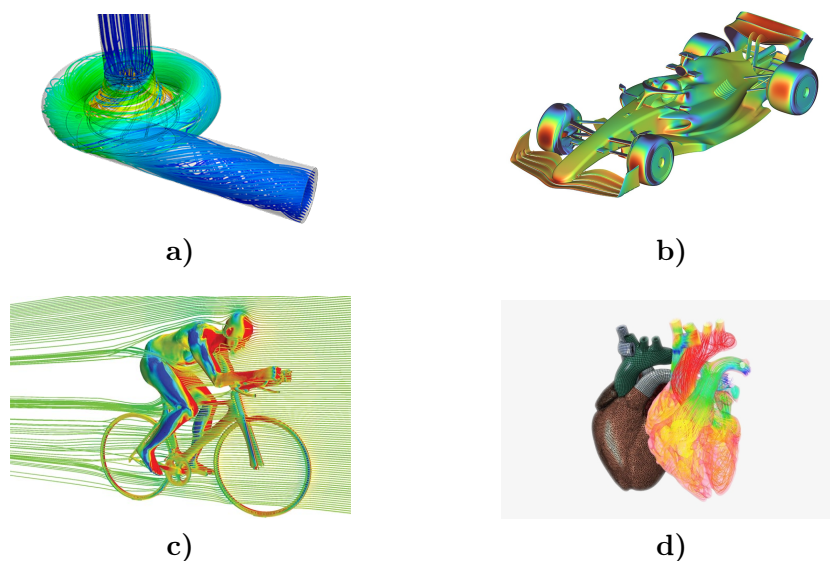
### 2. Procesor:

Proces numeričkog rješavanja matematičkog modela uključuje diskretizaciju jednačbi (numeričke sheme) i rješavanje sustava diskretiziranih jednačbi. U ovom koraku ključnu ulogu ima metoda kontrolnih volumena.

### 3. Postprocesor:

Nakon dobivanja numeričkog rješenja, podaci se vizualiziraju i analiziraju. Rezultati se često prikazuju grafički kako bi se dobila jasnija slika raspodjele fizikalnih veličina.

Primjere primjene računalne dinamike fluida u raznim inženjerskim granama moguće je vidjeti na slici 1.



Slika 1. Primjena RDF-a: a) turbostroj [1], b) aerodinamika bolida F1 [2], c) aerodinamika biciklista [3], d) biomedicinsko inženjerstvo [4]

### 1.3. Klasifikacija parcijalnih diferencijalnih jednadžbi

Klasifikacija parcijalnih diferencijalnih jednadžbi temelji se na analizi njihovih koeficijenata, posebno onih koji prate derivacije drugog reda, a općenito se dijele na eliptičke, hiperboličke i parabolike, što nam daje teorija klasifikacije realnih parcijalnih diferencijalnih jednadžbi drugog reda funkcije skalarne varijable  $\varphi = \varphi(x, t)$  zavisne od dvije varijable. Jednadžba u općem obliku glasi [8]:

$$A \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + B \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial x} + C \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + D \frac{\partial \varphi}{\partial t} + E \frac{\partial \varphi}{\partial x} + F \varphi = G, \quad (1.1)$$

gdje najviše derivacije, u ovom slučaju druge derivacije, predstavljaju principijelni dio parcijalne diferencijalne jednadžbe. Glavna karakteristika koja određuje tip parcijalne diferencijalne jednadžbe (1.1) jest njezina diskriminanta:

$$\Delta = B^2 - 4AC, \quad (1.2)$$

koja može biti:

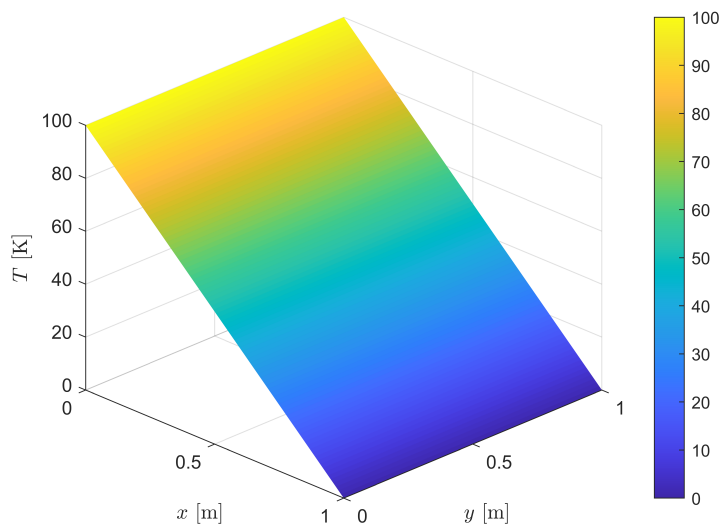
- a)  $\Delta < 0 \rightarrow$  nema realnih karakteristika  $\rightarrow$  eliptički tip jednadžbe,
- b)  $\Delta > 0 \rightarrow$  dvije realne i različite karakteristike  $\rightarrow$  hiperbolički tip jednadžbe,
- c)  $\Delta = 0 \rightarrow$  jedna realna karakteristika  $\rightarrow$  paraboliki tip jednadžbe.

U nastavku će biti objašnjeni navedeni tipovi jednadžbi zajedno s njihovom primjenom i primjerima:

- **Eliptičke jednadžbe**

Eliptičke jednadžbe opisuju stacionarna stanja sustava, tj. sustave koji ne ovise o vremenskoj koordinati. Karakteristike eliptičkih jednadžbi su da koeficijenti uz druge derivacije imaju iste predznake po svim koordinatama, zone utjecaja i zavisnosti su čitavo područje te je rubne uvjete potrebno zadati po svim rubovima domene. Primjer eliptičke jednadžbe je Laplaceova jednadžba stacionarnog provođenja topline, slika 2:

$$\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0. \quad (1.3)$$



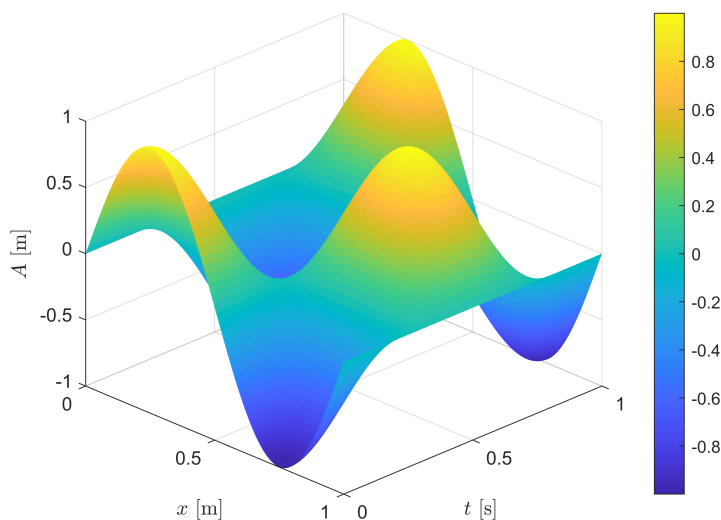
Slika 2. Eliptička jednadžba

- **Hiperboličke jednadžbe**

Hiperboličke jednadžbe opisuju valne pojave, tj. gibanje valova u prostoru i vremenu. Karakteristike hiperboličkih jednadžbi su da je jedan koeficijent uz drugu derivaciju različitog predznaka od preostalih te je za nju moguće primijeniti numeričku metodu karakteristika. Rubne uvjete je potrebno zadati tamo gdje izvire karakteristike. Primjer hiperboličke jednadžbe je valna jednadžba [9], slika 3:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0, \quad (1.4)$$

gdje je  $c_0$  brzina širenja valnog poremećaja.



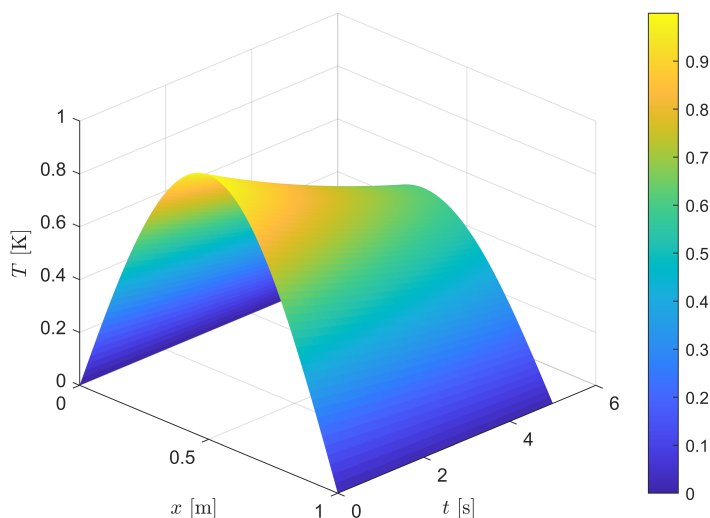
Slika 3. Hiperbolička jednadžba

- **Paraboličke jednažbe**

Paraboličke jednažbe modeliraju procese koji ovise o vremenu i uključuju difuzijske efekte. Karakteristike paraboličkih jednažbi jesu da izostaje druga derivacija po nekoj od koordinata, koja se naziva parabolička koordinata te numerički postupak ima marširajući karakter po toj koordinati. Najčešće je vremenska koordinata parabolička. Primjer paraboličke jednažbe je jednažba nestacionarnog provođenja topline, slika 4:

$$\frac{\partial T}{\partial t} - a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0, \quad (1.5)$$

gdje je  $a$  temperaturna difuzivnost.



**Slika 4. Parabolička jednažba**

U kontekstu ovog rada razmatrat će se eliptičke jednažbe, odnosno problem stacionarnog provođenja topline koji pripada ovoj klasi. Stacionarna jednažba provođenja topline opisana je Poissonovom jednažbom u slučaju postojanja toplinskih izvora ili Laplaceovom jednažbom kada nema toplinskih izvora, koje se rješavaju metodom kontrolnih volumena. Razlikovanje između različitih klasa parcijalnih diferencijalnih jednažbi ključno je za odabir odgovarajućih numeričkih metoda rješavanja.



## 1.4. OpenFOAM

OpenFOAM [10] (engl. *Open Field Operation and Manipulation*) je programski paket otvorenog koda za računalnu dinamiku fluida. Razvijen je prvenstveno u programskom jeziku C++ i koristi se za numeričko rješavanje i simulaciju raznih problema strujanja fluida, prijenosa topline, kemijskih reakcija, interakcije fluida i čvrstih tijela te mnogih drugih fizikalnih pojava. Vrlo je popularan u akademskoj zajednici. OpenFOAM se sastoji od velikog broja biblioteka i tutorijala koji korisnicima omogućuje prilagodbu, proširenje i razumijevanje raznih modela i metoda ovisno o njihovom razmatranom problemu.

OpenFOAM nema grafičko sučelje te se rad s njim temelji na tekstualnim datotekama u kojima se nalaze ulazne vrijednosti i parametri simulacije. Tekstualne datoteke nalaze se u tri glavne mape koje definiraju strukturu OpenFOAM simulacije:

### 1. Mapa 0/:

U ovoj se mapi nalaze datoteke koje specificiraju početne vrijednosti i rubne uvjete za simulaciju, u obliku tekstualnih datoteka za razne fizikalne veličine (temperatura  $T$ , brzina  $U$ , tlak  $p$ ,...).

### 2. Mapa constant/:

Ova mapa sadrži sve podatke o fizikalnim svojstvima sustava (tekstualne datoteke `transportProperties`, `turbulenceProperties`,...) i korištenoj geometrijskoj mreži (mapa `polyMesh` s tekstualnim datotekama koje opisuju mrežu: `boundary`, `owner`, `faces`,...).

### 3. Mapa system/:

U ovoj mapi se nalaze datoteke koje specificiraju metodologiju numeričkog rješavanja i upravljanje iterativnim rješavačima, uključujući metode za diskretizaciju, postavke za rješavanje sustava jednadžbi, vremenske korake i trajanje simulacije i drugo. Navedene su informacije zapisane u obliku tekstualnih datoteka od kojih su bitnije `controlDict`, `fvSchemes` i `fvSolution`.

## 2. Opći oblik eliptičke jednadžbe

Polazna jednadžba je opća konvekcijsko-difuzijska jednadžba, odnosno skalarna transportna jednadžba za specifičnu fizikalnu veličinu  $\varphi$  koja za opći trodimenzijski nestacionarni slučaj u diferencijalnom obliku glasi:

$$\frac{\partial(\rho\varphi)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{U}\varphi) - \nabla \cdot (\Gamma\nabla\varphi) = S, \quad (2.1)$$

gdje je  $\rho$  gustoća,  $\varphi$  specifična veličina, odnosno masena gustoća ekstenzivne fizikalne veličine,  $\mathbf{U}$  vektor brzine,  $\Gamma$  koeficijent difuzije,  $S$  izvor/ponor, a  $\nabla$  Hamiltonov (nabla) operator.

Prvi član jednadžbe,  $\frac{\partial(\rho\varphi)}{\partial t}$  označava tranzijentnost pojave, odnosno ovisnost o vremenu. Drugi član,  $\nabla \cdot (\rho\mathbf{U}\varphi)$  označava konvekcijski transport, a treći,  $\nabla \cdot (\Gamma\nabla\varphi)$  difuzijski transport. Na desnoj se strani jednadžbe nalazi izvorski član  $S$ .

U ovom će se radu razmatrati problem stacionarnog provođenja topline kroz krutine. Najprije će se napisati energetska jednadžba, odnosno skalarna transportna jednadžba za temperaturu analogno izrazu (2.1), a ona glasi:

$$\frac{\partial(\rho c_p T)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho c_p \mathbf{U}T) - \nabla \cdot (k\nabla T) = S, \quad (2.2)$$

gdje je  $T$  temperatura,  $c_p$  specifični toplinski kapacitet pri konstantnom tlaku,  $k$  koeficijent toplinske provodnosti, dok  $S$  označava toplinski izvor, odnosno ponor. Kao što je prethodno navedeno, razmatrat će se stacionarno provođenje topline kroz krutine pa vrijedi sljedeće:  $\frac{\partial}{\partial t} = 0$  i  $\mathbf{U} = \mathbf{0}$ , odnosno otpadaju prva dva člana jednadžbe (2.2) te ona sada glasi :

$$-\nabla \cdot (k\nabla T) = S. \quad (2.3)$$

Hamiltonov operator može se raspisati po tri prostorne koordinate pa puni (raspisani) oblik jednadžbe glasi:

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial T}{\partial z} \right) = S. \quad (2.4)$$

Daljnji će se postupak provoditi jednadžbom (2.3). Prvi korak rješavanja metodom kontrolnih volumena prema potpoglavlju 1.1. jest integriranje po proizvoljnom volumenu, odnosno ćeliji  $V$  kako slijedi:

$$-\int_V \nabla \cdot (k\nabla T) dV = \int_V S dV. \quad (2.5)$$

Nakon primjene idućeg koraka metode kontrolnih volumena, odnosno teorema Gauss-Ostrogradsky, volumenski integral s lijeve strane jednadžbe prelazi u površinski po straničama kontrolnog volumena  $A$  pa izraz (2.5) sada glasi:

$$-\int_A (k\nabla T \cdot \mathbf{n}) dA = \int_V S dV, \quad (2.6)$$

gdje je  $\mathbf{n}$  vektor vanjske normale na stranice kontrolnog volumena. Ova jednadžba predstavlja integralni oblik zakona očuvanja toplinske energije. Član s lijeve strane jednadžbe

označava difuzijski protok, odnosno ukupni toplinski tok koji prolazi kroz granicu volumena  $A$ , dok član s desne strane jednadžbe predstavlja unutarnji izvor topline unutar kontrolnog volumena  $V$ , odnosno ukupnu količinu topline proizvedenu unutar volumena. U kontekstu metode kontrolnih volumena, ova integralna jednadžba koristi se kao početna osnova. Površinski integral po granici  $A$  diskretizira se kao zbroj toplinskih tokova za svaki kontrolni volumen, dok se volumenski integral po  $V$  diskretizira kao zbroj volumenskih izvora topline. To omogućava pretvorbu ove jednadžbe u sustav algebarskih jednadžbi za numeričko rješavanje.

U nastavku će biti predstavljena diskretizacija jednadžbe (2.6) primjenom dva pristupa:

1. Standardna diskretizacija (drugi red točnosti),
2. Diskretizacija višeg reda točnosti.

Diskretizacija drugog reda točnosti ima pretpostavku linearne promjene zavisne varijable, a integracija se vrši korištenjem pravila srednje točke. Kod diskretizacija višeg reda promjena je varijable višeg (kvadratnog, kubnog) ili istog reda (linearna), a integracija po stranicama se vrši korištenjem više Gaussovih točaka integracije.

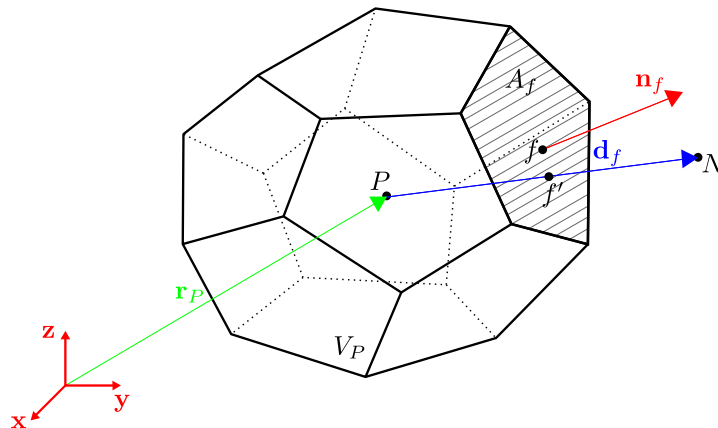
### 3. Diskretizacija metodom kontrolnih volumena

Domena proračuna diskretizira se njenim dijeljenjem na konačan broj kontrolnih volumena s proračunskim čvorovima u njihovim težištima. Kontrolni volumeni su konveksni i ne preklapaju se. Diskretizacija jednačbi neovisna je o obliku kontrolnih volumena i strukturi mreže. Najprije će se prikazati diskretizacija drugog reda točnosti, a kasnije višeg, proizvoljnog reda točnosti.

#### 3.1. Standardna diskretizacija drugog reda točnosti

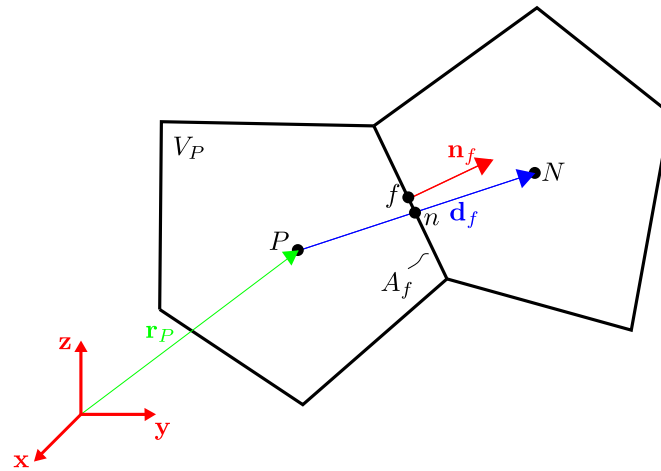
##### 3.1.1. Diskretizacija prostora

Na slici 5. je prikazan proizvoljan poliedarski kontrolni volumen  $V_P$  s proračunskim čvorom  $P$  u težištu koji je definiran vektorom položaja  $\mathbf{r}_P$  u odnosu na nepomični, Kartezijski koordinatni sustav. Proračunski čvor  $N$  susjednog kontrolnog volumena povezan je s čvorom  $P$  preko vektora  $\mathbf{d}_f$ . Kontrolni volumeni imaju jednu zajedničku stranicu  $A_f$  čije je težište točka  $f$ , a koja se ne mora nužno poklapati s točkom presjecišta vektora  $\mathbf{d}_f$  i stranice  $A_f$  označene s  $f'$ . Normala na zajedničku stranicu označena je s  $\mathbf{n}_f$  te je u odnosu na volumen  $V_P$  ona vanjska normala.



Slika 5. Proizvoljni trodimenzijski kontrolni volumen - standardna diskretizacija

Na slici 6. prikazan je proizvoljan kontrolni volumen u dvodimenzijskoj situaciji. Vidljivo je da se na stranici kontrolnog volumena nalazi jedna točka integracije.



Slika 6. Proizvoljni dvodimenzijski kontrolni volumen - standardna diskretizacija

### 3.1.2. Diskretizacija jednadžbi

#### Diskretizacija difuzijskog člana

Difuzijski će se član najprije diskretizirati za opću skalarnu transportnu jednadžbu pa kasnije za potrebe ovog rada za problem provođenja topline.

Diskretizacija drugog reda točnosti temelji se na pretpostavci linearne raspodjele zavisne varijable  $\varphi$  po unutrašnjosti kontrolnog volumena i stranicama kontrolnog volumena [11]:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \varphi_P + (\mathbf{r} - \mathbf{r}_P) \cdot (\nabla\varphi)_P, \quad (3.1)$$

$$\varphi_f(\mathbf{r}) = \varphi_f + (\mathbf{r} - \mathbf{r}_f) \cdot (\nabla\varphi)_f. \quad (3.2)$$

Primjenom izraza (3.1) volumenski integral fizikalne veličine po kontrolnom volumenu  $V_P$  može se raspisati:

$$\int_{V_P} \varphi(\mathbf{r}) dV = \int_{V_P} [\varphi_P + (\mathbf{r} - \mathbf{r}_P) \cdot (\nabla\varphi)_P] dV = \varphi_P \int_{V_P} dV + \left[ \int_{V_P} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_P) dV \right] \cdot (\nabla\varphi)_P, \quad (3.3)$$

dok je zbog pretpostavke da je proračunski čvor  $P$  u težištu kontrolnog volumena drugi integral u izrazu (3.3) jednak nuli pa prelazi u:

$$\int_{V_P} \varphi(\mathbf{r}) dV \approx \varphi_P V_P, \quad (3.4)$$

što se u literaturi naziva formula srednje točke (engl. *midpoint integration formula*) [5].

Analogno se može napisati i konačni izraz aproksimacije za površinski integral po stranici kontrolnog volumena uz pretpostavku da je točka  $f$  u težištu stranice:

$$\int_{A_f} \varphi_f(\mathbf{r}) dA \approx \varphi_f A_f. \quad (3.5)$$

U općoj skalarnoj transportnoj jednadžbi, nakon primjene teorema divergencije na volumenski integral, površinski se integral može zapisati kao zbroj integrala po svim stranicama kontrolnog volumena:

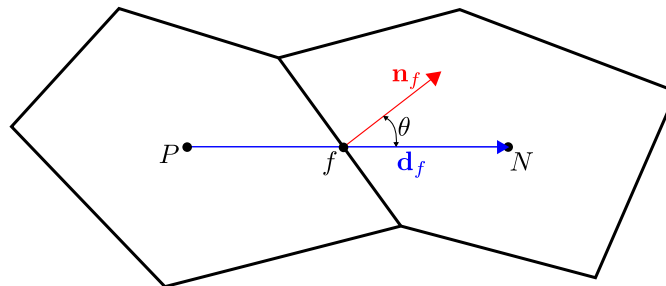
$$\int_A (\Gamma \nabla \varphi \cdot \mathbf{n}) dA = \sum_{f=1}^{N_f} \int_{A_f} [\Gamma \nabla \varphi \cdot \mathbf{n}_f] dA_f, \quad (3.6)$$

pri čemu je  $\Gamma$  koeficijent difuzije, a  $A_f$  površina stranice kontrolnog volumena. Ukupan broj stranica kontrolnog volumena označen je s  $N_f$ .

Uz pretpostavku linearne raspodjele zavisne varijable izraz (3.6) prema (3.5) prelazi u:

$$\sum_{f=1}^{N_f} \int_{A_f} [\Gamma \nabla \varphi \cdot \mathbf{n}_f] dA_f \approx \sum_{f=1}^{N_f} [\Gamma_f (\nabla \varphi)_f \cdot \mathbf{n}_f] A_f. \quad (3.7)$$

Na slici 7. prikazan je slučaj neortogonalne mreže između kontrolnih volumena čije su proračunske točke  $P$  i  $N$ . Neortogonalnost se definira kutem između vektora spojnice proračunskih točaka i vektora normale na zajedničku stranicu.



Slika 7. Neortogonalna stranica na dodiru dva kontrolna volumena

Ako je mreža ortogonalna, odnosno vektori  $\mathbf{d}_f$  i  $\mathbf{n}_f$  su paralelni, moguće je koristiti shemu centralne diferencije za izračunavanje gradijenta u smjeru vanjske normale u središtu stranice:

$$(\nabla \varphi)_f \cdot \mathbf{n}_f = \frac{\varphi_N - \varphi_P}{\|\mathbf{d}_f\|} \cdot \|\mathbf{n}_f\|. \quad (3.8)$$

Gradijent u središtu stranice može se izračunati i interpolacijom gradijenata iz centara ćelija koji dijele stranicu [7]:

$$(\nabla \varphi)_f = f_x \cdot (\nabla \varphi)_P + (1 - f_x) \cdot (\nabla \varphi)_N, \quad (3.9)$$

gdje je  $f_x$  faktor linearne interpolacije. Ovime se dobije trenutnu vrijednost na spojnici kontrolnih volumena  $\overline{PN}$ , a ne srednju vrijednost na stranici. Takav izračun je eksplicitan jer se ne koristi vrijednost zavisne varijable u centrima ćelija već njezin gradijent.

U praksi je nažalost ortogonalna mreža rijetkost, pa kako bi se zadržala točnost diskretizacije prema jednadžbi (3.8) umnožak gradijenta i vektora normale se prema [12] razdvaja na dva dijela:

$$(\nabla\varphi)_f \cdot \mathbf{n}_f = (\nabla\varphi)_f \cdot \Delta_f + (\nabla\varphi)_f \cdot \mathbf{k}_f, \quad (3.10)$$

gdje prvi član označava ortogonalni doprinos, a drugi neortogonalnu korekciju.

Vektori predstavljeni u prethodnom izrazu moraju zadovoljavati sljedeći uvjet:

$$\mathbf{n}_f = \Delta_f + \mathbf{k}_f. \quad (3.11)$$

Vektor  $\Delta_f$  se bira takav da je paralelan s vektorom  $\mathbf{d}_f$  pa je moguće ortogonalni dio računati analogno izrazu (3.8):

$$(\nabla\varphi)_f \cdot \Delta_f = \frac{\varphi_N - \varphi_P}{\|\mathbf{d}_f\|} \cdot \|\Delta_f\|. \quad (3.12)$$

Ortogonalni se dio tretira implicitno jer su vrijednosti zavisne varijable u proračunskim čvorovima nepoznanice, odnosno ortogonalni dio odlazi u matricu koeficijenata sustava u sustavu linearnih algebarskih jednadžbi čime se povećava stabilnost i konvergencija numeričkog postupka.

Neortogonalni dio se tretira eksplicitno i računa se jednadžbom (3.9), odnosno koriste se vrijednosti iz prethodne iteracije ili početne pretpostavke unutarnjeg polja ako se radi o prvoj iteraciji te odlazi u vektor desne strane u sustavu algebarskih jednadžbi što povećava nestabilnost numeričkog postupka i mogućnost divergencije rješenja.

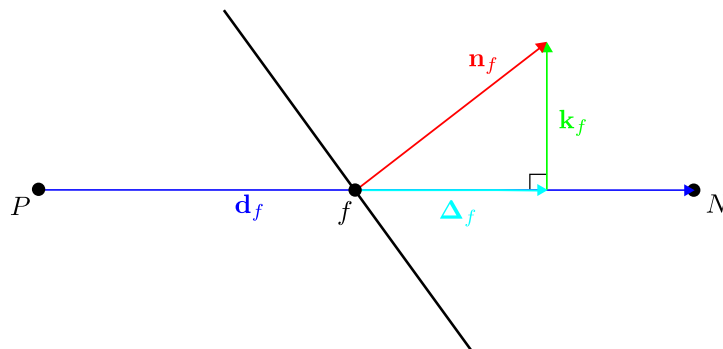
Cilj je što više smanjiti neortogonalnu korekciju kako bi numerički postupak bio što stabilniji, odnosno implicitniji i na neortogonalnoj mreži te tako postoji više pristupa dekompozicije vektora normale  $\mathbf{n}_f$  od kojih će se razmotriti tri kao u [12]:

- **Pristup minimalne korekcije** (engl. *Minimum correction approach*)

Dekompozicija vektora, slika 8., provodi se na takav način da neortogonalna korekcija bude što manja, tako da vektori  $\Delta_f$  i  $\mathbf{k}_f$  zatvaraju pravi kut, odnosno ortogonalni su:

$$\Delta_f = \frac{\mathbf{d}_f \cdot \mathbf{n}_f}{\mathbf{d}_f \cdot \mathbf{d}_f} \cdot \mathbf{d}_f \quad (3.13)$$

Kako neortogonalnost raste (kut između vektora  $\Delta_f$  i  $\mathbf{n}_f$  raste), doprinos članova  $\varphi_P$  i  $\varphi_N$  pada.

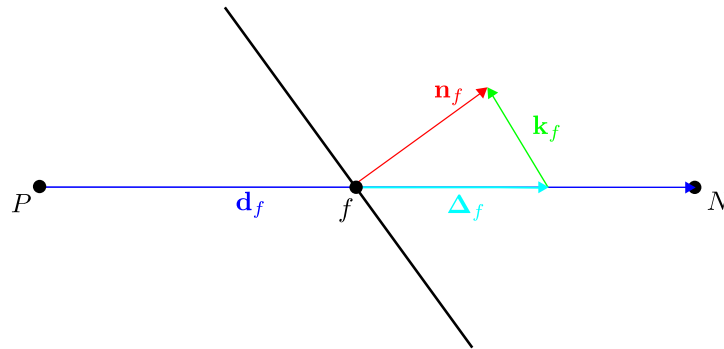


Slika 8. Neortogonalnost - Pristup minimalne korekcije

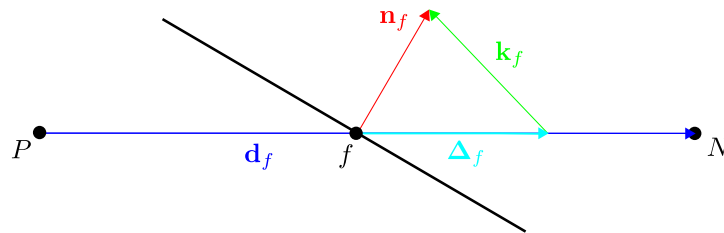
- **Pristup ortogonalne korekcije** (engl. *Orthogonal correction approach*)

Značajka je ovog pristupa da je doprinos implicitnih članova  $\varphi_P$  i  $\varphi_N$  isti kao i kod ortogonalne mreže, neovisno o neortogonalnosti, odnosno ortogonalni vektor ostaje iste duljine, slika 9. Ortogonalni vektor se računa kao:

$$\Delta_f = \frac{\mathbf{d}_f}{\|\mathbf{d}_f\|} \|\mathbf{n}_f\|. \quad (3.14)$$



(a) manji kut neortogonalnosti



(b) veći kut neortogonalnosti

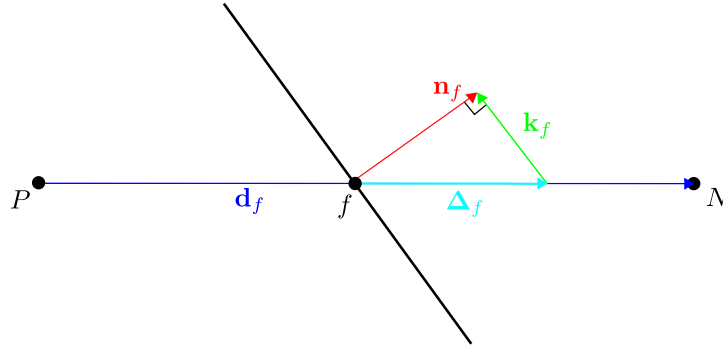
Slika 9. Neortogonalnost - Pristup ortogonalne korekcije

- **Pristup nadrelaksacije** (engl. *Over-relaxed approach*)

Temelji se na povećanju implicitnog doprinosa, slika 10., gdje doprinos članova  $\varphi_P$  i  $\varphi_N$  raste s porastom neortogonalnosti. Vektori  $\mathbf{n}_f$  i  $\mathbf{k}_f$  zatvaraju pravi kut pa se s porastom kuta neortogonalnosti povećava iznos vektora  $\Delta_f$ , koji se računa prema formuli:

$$\Delta_f = \frac{\mathbf{d}_f}{\mathbf{d}_f \cdot \mathbf{n}_f} \|\mathbf{n}_f\|^2. \quad (3.15)$$





Slika 10. Neortogonalnost - Pristup nadrelaksacije

Razlaganjem vektora normale na dvije komponente izraz (3.7) se može napisati kao:

$$\sum_{f=1}^{N_f} [\Gamma_f (\nabla \varphi)_f \cdot \mathbf{n}_f] A_f = \sum_{f=1}^{N_f} [\Gamma_f (\nabla \varphi)_f \cdot \Delta_f] A_f + \sum_{f=1}^{N_f} [\Gamma_f (\nabla \varphi)_f \cdot \mathbf{k}_f] A_f. \quad (3.16)$$

Prvi član s lijeve strane računa se pomoću izraza (3.12) pa vrijedi:

$$\sum_{f=1}^{N_f} [\Gamma_f (\nabla \varphi)_f \cdot \mathbf{n}_f] A_f = \sum_{f=1}^{N_f} \left[ \Gamma_f \frac{\varphi_N - \varphi_P}{\|\mathbf{d}_f\|} \cdot \|\Delta_f\| \right] A_f + \sum_{f=1}^{N_f} [\Gamma_f (\nabla \varphi)_f \cdot \mathbf{k}_f] A_f. \quad (3.17)$$

Prethodni je izraz radi kompaktnosti moguće zapisati pod jednim znakom sume pa on sada glasi:

$$\sum_{f=1}^{N_f} [\Gamma_f (\nabla \varphi)_f \cdot \mathbf{n}_f] A_f = \sum_{f=1}^{N_f} \Gamma_f A_f \left[ \frac{\varphi_N - \varphi_P}{\|\mathbf{d}_f\|} \cdot \|\Delta_f\| + (\nabla \varphi)_f \cdot \mathbf{k}_f \right]. \quad (3.18)$$

Naposljetku se radi pregleda svih operacija nad difuzijskim članom od volumenskog integrala do diskretizacije može izraziti relacija:

$$\begin{aligned} \int_V (\nabla \cdot (\Gamma \nabla \varphi)) dV &= \int_A (\Gamma \nabla \varphi \cdot \mathbf{n}) dA \\ &= \sum_{f=1}^{N_f} \int_{A_f} [\Gamma \nabla \varphi \cdot \mathbf{n}_f] dA_f \\ &\approx \sum_{f=1}^{N_f} [\Gamma_f (\nabla \varphi)_f \cdot \mathbf{n}_f] A_f \\ &\approx \sum_{f=1}^{N_f} \Gamma_f A_f \left[ \frac{\varphi_N - \varphi_P}{\|\mathbf{d}_f\|} \cdot \|\Delta_f\| + (\nabla \varphi)_f \cdot \mathbf{k}_f \right] \end{aligned} \quad (3.19)$$

Koeficijent difuzije, koji se pojavljuje u prethodnim izrazima, fizikalno je svojstvo i funkcija termodinamičkih veličina koje su definirane u proračunskim čvorovima te je u skladu s time i koeficijent difuzije definiran u proračunskim čvorovima. Koeficijent difuzije nam je

u jednadžbama potreban na stranicama kontrolnog volumena pa je potrebna interpolacija. Interpolacija koeficijenta difuzije vrši se na način da se provodi harmonijska interpolacija, tj. interpoliraju se otpori difuziji, odnosno recipročne vrijednosti koeficijenta difuzije [7]:

$$\frac{1}{\Gamma_f} = f_x \cdot \frac{1}{\Gamma_P} + (1 - f_x) \cdot \frac{1}{\Gamma_N}, \quad (3.20)$$

odnosno ukupni otpor difuziji od čvora  $P$  do čvora  $N$  sastoji se od zbroja otpora od čvora  $P$  do točke  $f$  uz koeficijent difuzije  $\Gamma_P$  te otpora od točke  $f$  do čvora  $N$  uz koeficijent difuzije  $\Gamma_N$  (otpori u seriji se zbrajaju).

### Metode za računanje gradijenata

Računanje gradijenata fizikalnih veličina ključni je korak u numeričkim metodama za rješavanje diferencijalnih jednadžbi. U kontekstu metode kontrolnih volumena gradijenti se često računaju pomoću Green-Gaussove metode ili metode najmanjih kvadrata [13]. U programskom paketu `OpenFOAM` način računanja gradijenata fizikalnih veličina moguće je podesiti u tekstualnoj datoteci `system/fvSchemes` pod `gradSchemes`. Ovdje će se detaljno opisati jedna od Green-Gaussovih metoda - metoda temeljena na ćelijama (engl. *Green-Gauss Cell-Based Gradient Scheme*). Ostale metode koje su uključene u većini programskih paketa su Green-Gaussova metoda temeljena na čvorovima (engl. *Green-Gauss Node-Based Gradient Scheme*) i metoda najmanjih kvadrata (engl. *Least-Squares Gradient Scheme*).

Green-Gaussova metoda računanja gradijenta temelji se na teoremu divergencije, koji za proizvoljno vektorsko polje  $\mathbf{B}$  glasi:

$$\int_V (\nabla \cdot \mathbf{B}) dV = \int_A (\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}) dA. \quad (3.21)$$

Ukoliko se vektorsko polje  $\mathbf{B}$  zapiše kao produkt skalarnog polja  $\varphi$  i vektorskog polja  $\mathbf{C}$ , manipulacijom nad izrazom (3.21) dolazi se do:

$$\int_V \nabla \varphi dV = \int_A \varphi \mathbf{n} dA. \quad (3.22)$$

Površinski se integral može zapisati kao suma integrala po svim stranicama kontrolnog volumena, dok se taj integral može aproksimirati vrijednošću u težištu stranice:

$$\int_V \nabla \varphi dV = \sum_{f=1}^{N_f} \varphi_f \mathbf{n}_f A_f. \quad (3.23)$$

Uz pretpostavku da je proračunska točka  $P$  u težištu promatranog kontrolnog volumena, nakon sređivanja prethodni izraz prelazi u:

$$(\nabla \varphi)_P = \frac{1}{V_P} \sum_{f=1}^{N_f} \varphi_f \mathbf{n}_f A_f. \quad (3.24)$$

Ovaj izraz predstavlja konačnu jednadžbu za Green-Gaussovu metodu računanja gradijenta fizikalne veličine. Kao što prije navedeno, postoje dvije vrste ove metode koje se razlikuju u računanju vrijednosti fizikalne veličine u težištu stranice.

Green-Gaussova metoda temeljena na ćelijama koristi linearnu interpolaciju za izračunavanje vrijednosti u težištu stranice:

$$\varphi_f = f_x \cdot \varphi_P + (1 - f_x) \cdot \varphi_N, \quad (3.25)$$

gdje je  $f_x$  faktor linearne interpolacije. Ovim se proračunom dobije trenutnu vrijednost na spojnici kontrolnih volumena, a ne srednju vrijednost na stranici, odnosno Green-Gaussova metoda temeljena na ćelijama računa vrijednost fizikalne veličine na presjecištu vektora spojnice između kontrolnih volumena i zajedničke stranice, što kod iskrivljene mreže dovodi do greške (engl. *skewness error*).

### Diskretizacija izvorskog člana

Diskretizacija volumenskog integrala izvorskog člana, u slučaju konstantnog iznosa izvora, vrši se analogno izrazu (3.4), odnosno formulom srednje točke:

$$\int_{V_P} S \, dV \approx S_V V_P. \quad (3.26)$$

### Diskretizirana jednadžba

Diskretizirana jednadžba opće skalarne transportne jednadžbe (2.1) za stacionarno stanje bez konvektivnog člana glasi:

$$-\sum_{f=1}^{N_f} \Gamma_f A_f \left[ \frac{\varphi_N - \varphi_P}{\|\mathbf{d}_f\|} \cdot \|\Delta_f\| + (\nabla\varphi)_f \cdot \mathbf{k}_f \right] = S_V V_P \quad (3.27)$$

### Diskretizirana jednadžba provođenja topline

Na temelju jednadžbe (3.27), jednadžba stacionarnog provođenja topline kroz krutinu izražava se tako da se kao koeficijent difuzije stavi koeficijent toplinske provodnosti  $k$  te temperatura  $T$  kao zavisna skalarna varijabla analogno jednadžbi (2.2):

$$-\sum_{f=1}^{N_f} k_f A_f \left[ \frac{T_N - T_P}{\|\mathbf{d}_f\|} \cdot \|\Delta_f\| + (\nabla T)_f \cdot \mathbf{k}_f \right] = S_V V_P. \quad (3.28)$$

Kao što je prije navedeno, diskretizacija difuzijskog člana daje ortogonalni dio koji se tretira implicitno i odlazi u matricu koeficijenata sustava u sustavu linearnih algebarskih jednadžbi te dio neortogonalne korekcije koji se tretira eksplicitno (koriste se stare vrijednosti gradijenta u centrima ćelija) i odlazi u vektor poznatih veličina na desnoj strani. U vektor desne strane odlazi i izvorski član, ako je konstantnog iznosa. Ukoliko linearno ovisi o zavisnoj varijabli tretira se ovisno o predznaku: eksplicitno ako je veći od nula, implicitno ako je manji od nula kako bi se povećava dijagonalna dominantnost matrice sustava. U slučaju nelinearnog izvorskog člana potrebno ga je linearizirati.

Matrica koeficijenata sustava koja se dobije standardnom diskretizacijom je:

- **dijagonalno dominantna** - apsolutne vrijednosti elemenata na glavnoj dijagonali matrice su veće ili jednake sumi apsolutnih vrijednosti ostalih elemenata u istom retku ili stupcu,

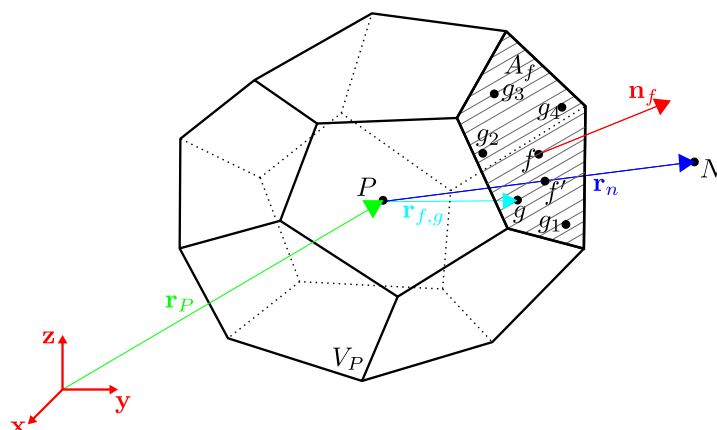
- **pozitivno definitna** - sve vlastite vrijednosti su pozitivne, determinante glavnih podmatrica su pozitivne, kvadratna forma je pozitivna,
- **simetrična** - prilikom formiranja koeficijenata u jednažbama dvaju susjednih volumena pojavljuju se ista ploština pripadne stranice i udaljenost između težišta,

što će se i vidjeti u numeričkim primjerima u poglavlju Numerički primjeri i validacija.

### 3.2. Diskretizacija višeg reda točnosti

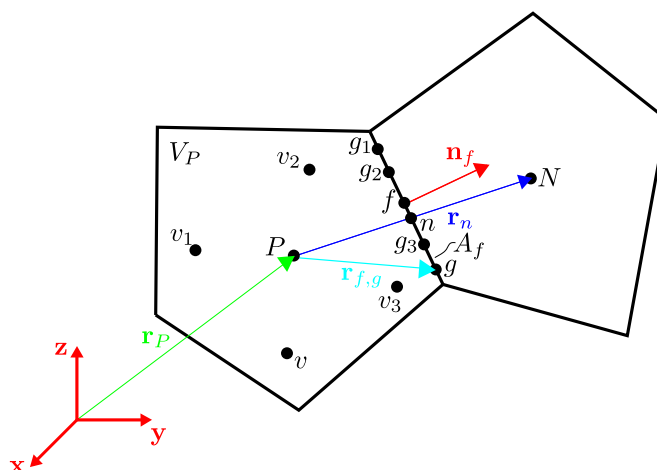
#### 3.2.1. Diskretizacija prostora

Kao i kod standardne diskretizacije, najprije će se prikazati proizvoljan poliedarski kontrolni volumen  $V_P$  s čvorom  $P$  u težištu koji je definiran vektorom položaja  $\mathbf{r}_P$  u odnosu na nepomični, Kartezijski koordinatni sustav, slika 11. Susjedni kontrolni volumen definiran je vektorom  $\mathbf{r}_n$ . Za razliku od standardne diskretizacije, zajednička stranica  $A_f$  volumena  $P$  i susjednog kontrolnog volumena ima više točaka integracije označenih s  $g$ . Lokacija  $g$ -te točke na  $f$ -toj stranici kontrolnog volumena označena je vektorom položaja  $\mathbf{r}_{f,g}$ . Vanjska normala na stranicu označena je s  $\mathbf{n}_f$ .



Slika 11. Proizvoljni trodimenzijski kontrolni volumen - diskretizacija višeg reda

Na slici 12. prikazan je proizvoljan dvodimenzijski kontrolni volumen. Također je na stranici kontrolnog volumena, koja je za dvodimenzijski slučaj linija, moguće uočiti više Gaussovih točaka integracije, dok su po unutrašnjosti kontrolnog volumena točke  $v$  koje se koriste za računanje integrala po volumenu, odnosno izvorskog člana.



Slika 12. Proizvoljni dvodimenzijski kontrolni volumen - diskretizacija višeg reda

### 3.2.2. Gaussova integracija

Gaussova integracija jedna je od ključnih metoda za numeričko integriranje, osobito u kontekstu numeričkih metoda poput metode kontrolnih volumena. Za razliku od metoda kao što su trapezno pravilo ili Simpsonova formula u kojima se pomoću  $n$  zadanih čvorova točno računa vrijednost integrala polinoma najviše  $n$ -tog stupnja (trapezno pravilo - površina ispod pravca, Simpsonova formula - površina ispod polinoma 2. stupnja), pomoću Gaussove kvadrature formule moguće je točno računati integrale polinoma stupnja višeg od interpolacijskog polinoma.

U jednodimenzijском slučaju linijski integral funkcije  $f(x)$  na intervalu  $[a, b]$  Gaussova kvadratura aproksimira integral kao:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{g=1}^{N_g} \omega_g f(x_g), \quad (3.29)$$

gdje su  $\omega_i$  težinski koeficijenti,  $x_g$  točke (čvorovi) integracije, a  $N_g$  ukupan broj Gaussovih točaka integracije. Za  $N_g$  Gaussovih točaka integracije točno je moguće računati integral polinoma reda  $p = 2N_g - 1$  i manjih redova.

U višedimenzijским problemima, poput površinskih ili volumenskih integrala, Gaussova integracija se primjenjuje korištenjem višestrukih čvorova na svakoj stranici ili volumenu. Zahvaljujući svojoj točnosti i fleksibilnosti, Gaussova integracija predstavlja ključnu komponentu u numeričkoj aproksimaciji integralnih članova u problemima višeg reda točnosti.

### 3.2.3. Diskretizacija jednadžbi

#### Diskretizacija difuzijskog člana

Diskretizacija difuzijskog člana iz izraza (2.6) provodi se na način da se površinski integral aproksimira sumom vrijednosti podintegralne funkcije po stranicama kontrolnog volumena, a podintegralna funkcija računa pomoću Gaussove integracije:

$$\int_A (\Gamma \nabla \varphi \cdot \mathbf{n}) dA = \sum_{f=1}^{N_f} \int_{A_f} [\Gamma \nabla \varphi \cdot \mathbf{n}_f] dA_f \approx \sum_{f=1}^{N_f} \left[ \sum_{g=1}^{N_g} \omega_g [\Gamma_{f,g} \nabla \varphi(\mathbf{r}_{f,g}) \cdot \mathbf{n}_f] \right] A_f, \quad (3.30)$$

gdje je  $N_f$  broj stranica kontrolnog volumena,  $N_g$  broj Gaussovih točaka integracije na stranici kontrolnog volumena,  $\omega_g$  težinski koeficijent točke integracije, a  $\mathbf{r}_{f,g}$  vektor položaja Gaussove točke na stranici kontrolnog volumena.

Potrebno je odrediti vrijednost gradijenta zavisne varijable u Gaussovoj točki integracije. Neka je  $\tilde{\mathbf{r}} = [\tilde{x} \ \tilde{y} \ \tilde{z}]^T$  točka u domeni u kojoj želimo izračunati vrijednost fizikalne veličine, što su u ovom slučaju Gaussove točke integracije. Vrijednost gradijenta određena je vrijednostima iz centara susjednih ćelija na sljedeći način:

$$\nabla \varphi(\tilde{\mathbf{r}}) = \left[ \sum_{n=1}^{N_n} c_{x,n}(\tilde{\mathbf{r}}) \cdot \varphi_n, \sum_{n=1}^{N_n} c_{y,n}(\tilde{\mathbf{r}}) \cdot \varphi_n, \sum_{n=1}^{N_n} c_{z,n}(\tilde{\mathbf{r}}) \cdot \varphi_n \right]^T, \quad (3.31)$$

gdje je  $N_n$  ukupan broj kontrolnih volumena u proračunskoj molekuli (engl. *computational stencil*),  $c_{x,n}$ ,  $c_{y,n}$  i  $c_{z,n}$  koeficijenti interpolacije, a  $\varphi_n$  vrijednost zavisne varijable

u susjednom čvoru  $n$ . Daljnji postupak interpolacije, odnosno određivanja koeficijenata interpolacije može se provesti pomoću dvije metode [14]:

- Metoda pomičnih najmanjih kvadrata (engl. *Moving Least Squares - MLS*)
- Metoda lokalne regresije (engl. *Local Regression Estimators - LRE*),

dok će se u ovom radu razmatrati metoda lokalne regresije.

### Metoda lokalne regresije

Metoda lokalne regresije koristi lokalni skup podataka (obično susjedne čvorove oko točke interesa) kako bi procijenila ponašanje funkcije u toj točki. Ideja je da se za svaki lokalni skup podataka odredi funkcija koja najbolje odgovara tim podacima. Za aproksimaciju interpolacijske funkcije koristi se razvoj u Taylorov red:

$$\begin{aligned} \varphi(\tilde{\mathbf{r}}) + \frac{\partial\varphi}{\partial x}(\tilde{\mathbf{r}}) \cdot (x - \tilde{x}) + \frac{\partial\varphi}{\partial y}(\tilde{\mathbf{r}}) \cdot (y - \tilde{y}) + \frac{\partial\varphi}{\partial z}(\tilde{\mathbf{r}}) \cdot (z - \tilde{z}) \\ + \frac{1}{2} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(\tilde{\mathbf{r}}) \cdot (x - \tilde{x})^2 + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}(\tilde{\mathbf{r}}) \cdot (x - \tilde{x})(y - \tilde{y}) \\ + \frac{1}{2} \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}(\tilde{\mathbf{r}}) \cdot (y - \tilde{y})^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}(\tilde{\mathbf{r}}) \cdot (z - \tilde{z})^2 \dots \end{aligned} \quad (3.32)$$

Neka je  $\bar{\varphi}$  skraćena Taylorova ekspanzija za  $\varphi$  koristeći  $N_q$  članova. Tada se  $\bar{\varphi}$  može zapisati u matričnom zapisu kao:

$$\bar{\varphi}(\mathbf{r}) = \mathbf{q}^T(\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}) \cdot \bar{\mathbf{a}}(\tilde{\mathbf{r}}), \quad (3.33)$$

gdje je  $\mathbf{q}^T$  vektor polinomnih baznih funkcija, a  $\bar{\mathbf{a}}(\tilde{\mathbf{r}})$  vektor parametara koji sadrži parcijalne derivacije zavisne varijable:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}^T(\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}) &= [1, x - \tilde{x}, y - \tilde{y}, z - \tilde{z}, \dots], \\ \bar{\mathbf{a}}^T(\tilde{\mathbf{r}}) &= \left[ \varphi(\tilde{\mathbf{r}}), \frac{\partial\varphi}{\partial x}(\tilde{\mathbf{r}}), \frac{\partial\varphi}{\partial y}(\tilde{\mathbf{r}}), \frac{\partial\varphi}{\partial z}(\tilde{\mathbf{r}}), \dots \right]. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Umjesto računanja točnih derivacija zavisne varijable, metoda lokalne regresije traži približan vektor  $\bar{\mathbf{a}}(\tilde{\mathbf{r}})$  minimiziranjem težinske sume kvadrata greške:

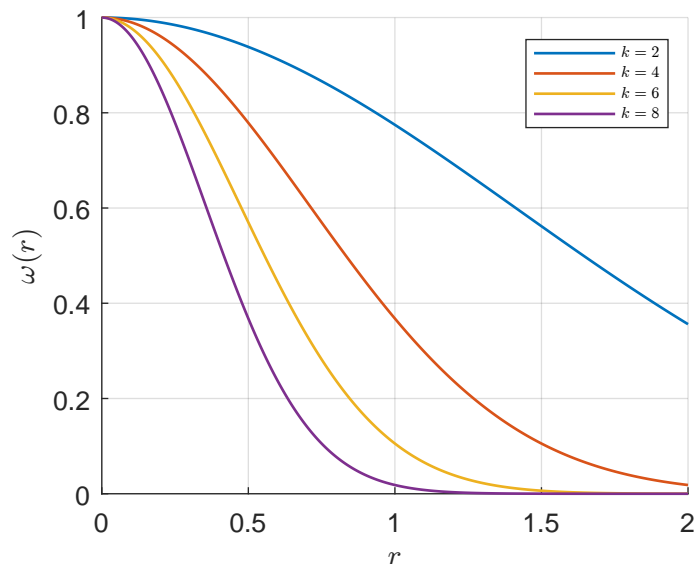
$$\mathcal{R} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N_n} \omega(\mathbf{r}_n - \tilde{\mathbf{r}}) \cdot [\bar{\varphi}(\mathbf{r}_n) - \varphi_n]^2 = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N_n} \omega(\mathbf{r}_n - \tilde{\mathbf{r}}) \cdot [\mathbf{q}^T(\mathbf{r}_n - \tilde{\mathbf{r}}) \cdot \bar{\mathbf{a}}(\tilde{\mathbf{r}}) - \varphi_n]^2, \quad (3.35)$$

gdje je  $\omega$  težinska funkcija koja može biti raznih oblika, no za potrebe ovog rada ona je uzeta kao radijalno simetrična eksponencijalna funkcija [14]:

$$\omega(\mathbf{r}, \mathbf{r}_n, k) = \frac{e^{-\left(\frac{r}{r_m}\right)^2 k^2} - e^{-k^2}}{1 - e^{-k^2}}, \quad (3.36)$$

gdje je  $r = \|\mathbf{r} - \mathbf{r}_n\|$  udaljenost točke interpolacije od čvora sadržanog u proračunskoj molekuli,  $r_m = 2 \max\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_n\| = 2r_s$  ( $r_s$  je maksimalna udaljenost točke interpolacije od čvora sadržanog u proračunskoj molekuli, odnosno ona određuje domet utjecaja točaka), a  $k$  parametar oblika. Na slici 13. prikazan je dijagram ovisnosti težinskog faktora o

udaljenosti za različite vrijednosti parametra oblika  $k$ . Prema dijagramu je vidljivo da manja udaljenost odgovara većem utjecaju, odnosno većoj vrijednosti težinskog faktora, i obratno. Za potrebe ovog rada uzeta je vrijednost parametra oblika  $k = 6$ , što je i preporučeno u [14].



**Slika 13. Ovisnost težinskog faktora o udaljenosti za različite vrijednosti parametra oblika**

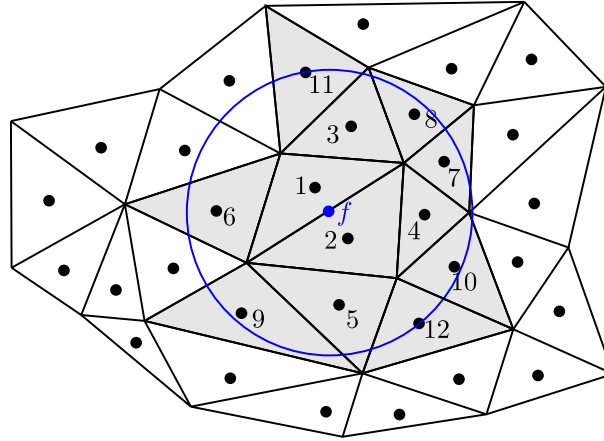
Proračunska molekula je skup čvorova koji se koristi za interpolaciju. Moguće ju je definirati na mnogo načina. Može se odrediti tako da se postavi broj  $N_n$  i u obzir uzima samo  $N_n$  najbližih čvorova interpolacijskoj točki  $\mathbf{r}$ . Zatim se izračuna maksimalna udaljenost, odnosno prije navedeni  $r_s$  te se svi čvorovi koji su unutar tog područja maksimalne udaljenosti od točke  $\mathbf{r}$  uključuju u proračunsku molekulu (u dvodimenzijском slučaju navedeno područje čini kružnicu, dok je u trodimenzijском to sfera). Proračunska molekula može sadržavati više od  $N_n$  čvorova, što je češće u strukturiranim mrežama, no postoji minimalni broj čvorova koje proračunska molekula obuhvaća. Za 2D je to  $N_{n,min} = (i + 1)(i + 2)/2$ , a za 3D  $N_{n,min} = (i + 1)(i + 2)(i + 3)/6$ , gdje je  $i$  red interpolacije.

Za računanje integrala potrebno je odrediti koeficijente interpolacije za svaku Gaussovu točku integracije na svakoj stranici kontrolnog volumena, odnosno proračunsku molekulu koja sadrži  $N_n$  čvorova za svaku Gaussovu točku, što je računalno skupo. Dva načina za određivanje proračunske molekule za svaku Gaussovu točku:

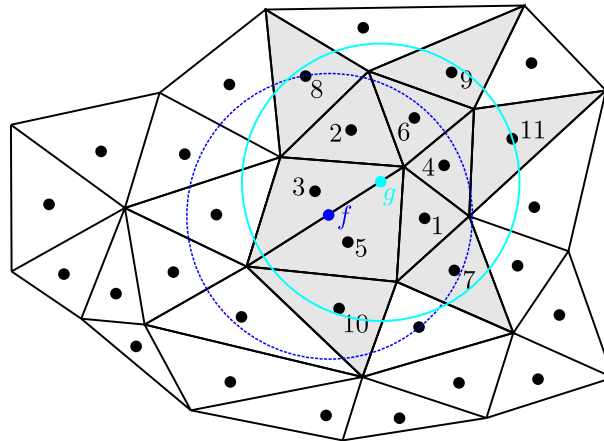
- odredi se proračunska molekula za središte stranice te se ona koristi za sve Gaussove točke na toj stranici, slika 14.,
- za svaku Gaussovu točku integraciju određuje se nova proračunska molekula, slika 15.

Na slikama 14. i 15. za primjer je uzeto  $N_n = 11$ , odnosno 11 težišta kontrolnih volumena najbližih čvoru  $f$  na slici 14. te čvoru  $g$  na slici 15, tj. korišten je pristup u kojem sve točke imaju istu molekulu. Moguće je uočiti da prvi način za ovaj slučaj rezultira većim brojem čvorova u proračunskoj molekuli jer je udaljenost od  $f$  do čvora 11 ujedno jednaka udaljenosti od  $f$  do čvora 12, odnosno čvor 12 pada u kružnicu najveće udaljenosti.





Slika 14. Određivanje proračunske molekule  $N_n = 11$  preko središta stranice



Slika 15. Određivanje proračunske molekule  $N_n = 11$  za svaku Gaussovu točku pojedinačno

Kako bi se pronašao minimum težinske sume (3.35), potrebno je funkciju derivirati s obzirom na nepoznate parametre parcijalnih derivacija zavisne varijable, odnosno vektor  $\bar{\mathbf{a}}$  i izjednačiti je s nula. Navedenim postupkom dobije se skup linearnih (normalnih) jednadžbi:

$$\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \bar{a}_k} = \sum_{n=1}^{N_n} \omega(\mathbf{r}_n - \tilde{\mathbf{r}}) \cdot q_k(\mathbf{r}_n - \tilde{\mathbf{r}}) \cdot [\mathbf{q}^T(\mathbf{r}_n - \tilde{\mathbf{r}}) \cdot \bar{\mathbf{a}}(\tilde{\mathbf{r}}) - \varphi_n] = 0, \quad (3.37)$$

za svaki  $k = 1, 2, \dots, N_q$ . Normalne jednadžbe predstavljaju sustav linearnih jednadžbi koje se mogu riješiti za  $\bar{\mathbf{a}}$ . Prethodni se izraz može preformulirati u:

$$\sum_{n=1}^{N_n} \omega(\mathbf{r}_n - \tilde{\mathbf{r}}) \cdot q_k(\mathbf{r}_n - \tilde{\mathbf{r}}) \cdot \mathbf{q}^T(\mathbf{r}_n - \tilde{\mathbf{r}}) \cdot \bar{\mathbf{a}} = \sum_{n=1}^{N_n} \omega(\mathbf{r}_n - \tilde{\mathbf{r}}) \cdot q_k(\mathbf{r}_n - \tilde{\mathbf{r}}) \cdot \varphi_n. \quad (3.38)$$

Matrično se jednadžba zapisuje na sljedeći način:

$$\bar{\mathbf{M}}(\tilde{\mathbf{r}}) \bar{\mathbf{a}}(\tilde{\mathbf{r}}) = \mathbf{Q}(\tilde{\mathbf{r}}) \mathbf{W}(\tilde{\mathbf{r}}) \boldsymbol{\varphi}, \quad (3.39)$$

gdje je  $\bar{\mathbf{M}}(\tilde{\mathbf{r}}) = \mathbf{Q}(\tilde{\mathbf{r}}) \mathbf{W}(\tilde{\mathbf{r}}) \mathbf{Q}^T(\tilde{\mathbf{r}})$  matrica težinskih proizvoda (Gramova matrica) veličine  $N_q \times N_q$ ,  $\mathbf{Q}(\tilde{\mathbf{r}})$  matrica baza veličine  $N_q \times N_n$  čiji je  $n$ -ti stupac  $\mathbf{q}(\mathbf{r}_n - \tilde{\mathbf{r}})$ ,  $\mathbf{W}(\tilde{\mathbf{r}})$

dijagonalna matrica težinskih koeficijenata veličine  $N_n \times N_n$  čiji su elementi  $\omega(\mathbf{r}_n - \tilde{\mathbf{r}})$ , a  $\boldsymbol{\varphi}^T = [\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{N_n}]$  vektor zavisne varijable u čvorovima veličine  $N_n \times 1$ .

Ako matrica  $\overline{\mathbf{M}}(\tilde{\mathbf{r}})$  nije singularna, odnosno ako se može invertirati, rješenje (3.39) glasi:

$$\bar{\mathbf{a}}(\tilde{\mathbf{r}}) = \overline{\mathbf{M}}(\tilde{\mathbf{r}})^{-1} \mathbf{Q}(\tilde{\mathbf{r}}) \mathbf{W}(\tilde{\mathbf{r}}) \boldsymbol{\varphi}, \quad (3.40)$$

pri čemu se može definirati matrica  $\overline{\mathbf{A}}(\tilde{\mathbf{r}}) = \overline{\mathbf{M}}(\tilde{\mathbf{r}})^{-1} \mathbf{Q}(\tilde{\mathbf{r}}) \mathbf{W}(\tilde{\mathbf{r}})$  veličine  $N_q \times N_n$  pa rješenje sustava sada glasi:

$$\bar{\mathbf{a}}(\tilde{\mathbf{r}}) = \overline{\mathbf{A}}(\tilde{\mathbf{r}}) \boldsymbol{\varphi}, \quad (3.41)$$

odnosno:

$$\begin{bmatrix} \varphi(\tilde{\mathbf{r}}) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x}(\tilde{\mathbf{r}}) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y}(\tilde{\mathbf{r}}) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z}(\tilde{\mathbf{r}}) \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(\tilde{\mathbf{r}}) \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}(\tilde{\mathbf{r}}) \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}(\tilde{\mathbf{r}}) \\ \vdots \end{bmatrix} = \overline{\mathbf{A}}(\tilde{\mathbf{r}}) \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \\ \vdots \end{bmatrix}. \quad (3.42)$$

Usporedbom izraza (3.31) i (3.42) moguće je uočiti da matrica  $\overline{\mathbf{A}}(\tilde{\mathbf{r}})$  sadrži koeficijente interpolacije  $c_{x,n}$ ,  $c_{y,n}$  i  $c_{z,n}$ . Za potrebe diskretizacije nužna su samo prva četiri retka, odnosno koeficijenti za interpolaciju vrijednosti zavisne varijable te prvih derivacija zavisne varijable.

Još će se za potrebe ovog rada prikazati ključne jednadžbe diskretizacije višeg reda točnosti za probleme provođenja topline. Difuzijski se član diskretizira prema jednadžbi (3.30) na sljedeći način:

$$\int_A (k \nabla T \cdot \mathbf{n}) \, dA = \sum_{f=1}^{N_f} \int_{A_f} [k \nabla T \cdot \mathbf{n}_f] \, dA_f \approx \sum_{f=1}^{N_f} \left[ \sum_{g=1}^{N_g} \omega_g [k_{f,g} \nabla T(\mathbf{r}_{f,g}) \cdot \mathbf{n}_f] \right] A_f. \quad (3.43)$$

Prema (3.31) vrijednost gradijenta temperature određena je vrijednostima iz centara susjednih ćelija na sljedeći način:

$$\nabla T(\tilde{\mathbf{r}}) = \left[ \sum_{n=1}^{N_n} c_{x,n}(\tilde{\mathbf{r}}) \cdot T_n, \sum_{n=1}^{N_n} c_{y,n}(\tilde{\mathbf{r}}) \cdot T_n, \sum_{n=1}^{N_n} c_{z,n}(\tilde{\mathbf{r}}) \cdot T_n \right]^T, \quad (3.44)$$

Krajnja jednažba nakon provedbe metode lokalne regresije analogno (3.42) glasi:

$$\bar{\mathbf{a}}(\tilde{\mathbf{r}}) = \bar{\mathbf{A}}(\tilde{\mathbf{r}}) \mathbf{T}, \quad (3.45)$$

odnosno:

$$\begin{bmatrix} T(\tilde{\mathbf{r}}) \\ \frac{\partial T}{\partial x}(\tilde{\mathbf{r}}) \\ \frac{\partial T}{\partial y}(\tilde{\mathbf{r}}) \\ \frac{\partial T}{\partial z}(\tilde{\mathbf{r}}) \\ \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(\tilde{\mathbf{r}}) \\ \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}(\tilde{\mathbf{r}}) \\ \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}(\tilde{\mathbf{r}}) \\ \vdots \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{A}}(\tilde{\mathbf{r}}) \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ \vdots \end{bmatrix}. \quad (3.46)$$

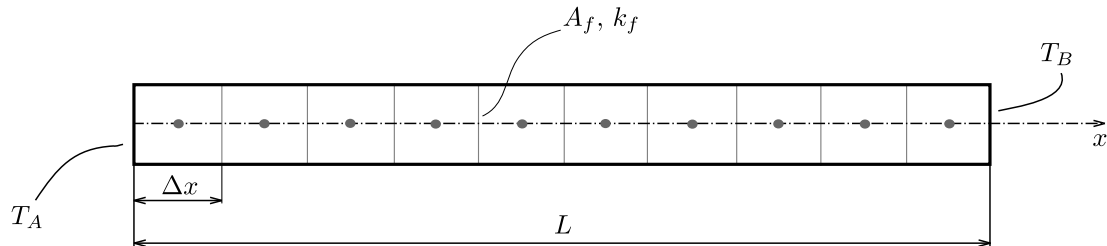
Neka od svojstava prikazanog postupka diskretizacije jesu [15]:

- Broj ćelija u proračunskoj molekuli  $N_n$  je proizvoljan, no veći broj ne mora nužno značiti i bolju točnost.
- Broj Gaussovih točaka integracije  $N_g$  je proizvoljan. Pravilan odabir ovisi o traženoj točnosti metode, a nepravilan odabir dovodi do uvećane greške ili vremena računanja.
- Odabir težinske funkcije i njezinih konstanti (u ovom radu odabrana je težinska funkcija prikazana jednažbom (3.36) i  $k = 6$ ) utječe na ponderiranje utjecaja pojedine ćelije u proračunskoj molekuli.
- Prikazana diskretizacija je implicitna, a za slučaj vektorskog polja zavisne varijable koeficijenti sustava jednažbi su tenzori drugog reda.
- Standardna diskretizacija drugog reda točnosti podrazumijeva linearan oblik Taylorove ekspanzije, jednu točku integracije po stranici te dvije ćelije u proračunskoj molekuli. Na strukturiranoj mreži prikazana diskretizacija rezultira istim sustavom jednažbi.

## 4. Numerički primjeri i validacija

### 4.1. 1D problem stacionarnog provođenja topline bez izvorskog člana

Prvi primjer na kojem će biti uspoređene prije navedene metode diskretizacije je jednodimenzijски problem stacionarnog provođenja topline bez izvorskog člana. Na slici 16. je prikazan štap diskretiziran s deset kontrolnih volumena jednakih veličina sa zadanim rubnim uvjetima u kojem se toplina provodi samo u smjeru uzdužne osi štapa  $x$ .



Slika 16. 1D problem stacionarnog provođenja topline - diskretizirani štap

Zadane su sljedeće vrijednosti:  $L = 10$  m,  $A_f = 10$  m<sup>2</sup>,  $k_f = 1$  W/mK,  $T_A = 0$  K,  $T_B = 10$  K.

#### 4.1.1. Analitičko rješenje

Analitičko je rješenje trivijalno i moguće ga je dobiti rješavanjem diferencijalne jednadžbe (2.3) koja za jednodimenzijски slučaj s konstantnim koeficijentom toplinske provodnosti i bez izvorskog člana glasi:

$$k \frac{d^2 T}{dx^2} = 0. \quad (4.1)$$

Dvostrukom integracijom i uvrštavanjem rubnih uvjeta dobije se funkcija temperaturnog polja u ovisnosti o uzdužnoj koordinati štapa u sljedećem obliku:

$$T(x) = x, \quad (4.2)$$

odnosno dobivena je linearna raspodjela temperature po duljini štapa.

#### 4.1.2. Standardna diskretizacija drugog reda točnosti

Polazna jednadžba za standardnu diskretizaciju je jednadžba (3.28) koja glasi:

$$-\sum_{f=1}^{N_f} k_f A_f \left[ \frac{T_N - T_P}{\|\mathbf{d}_f\|} \cdot \|\Delta_f\| + (\nabla T)_f \cdot \mathbf{k}_f \right] = S_V V_P, \quad (4.3)$$

a koja se za potrebe ovog primjera može značajno pojednostaviti:

- nema izvorskog člana, odnosno  $S_V = 0$ ,
- mreža je ortogonalna, odnosno nema potrebe za neortogonalnom korekcijom:  $\mathbf{k}_f = \mathbf{0}$   
 $\rightarrow$  vektor normale i ortogonalni vektor se poklapaju:  $\mathbf{n}_f = \Delta_f$ ,

- koeficijent toplinske provodnosti i površina poprečnog presjeka štapa su konstantni,

pa prethodna jednadžba sređivanjem prelazi u:

$$-\sum_{f=1}^{N_f} \frac{T_N - T_P}{\|\mathbf{d}_f\|} \cdot \|\mathbf{n}_f\| = 0. \quad (4.4)$$

Pomoću ove jednadžbe moguće je dobiti jednadžbe za rubni lijevi, rubni desni te sve unutarnje kontrolne volumene.

Konačna jednadžba za sve unutarnje kontrolne volumene glasi:

$$2T_P - T_E - T_W = 0. \quad (4.5)$$

Koeficijent uz temperaturu u razmatranom kontrolnom volumenu  $T_P$  označuje se s  $a_P$  i odlazi u glavnu dijagonalu matrice koeficijenata sustava u sustavu linearnih algebarskih jednadžbi. Koeficijent uz temperaturu u susjednim kontrolnim volumenima  $T_E$  i  $T_W$  označuju se s  $a_E$  i  $a_W$  te odlaze van glavne dijagonale u matrici koeficijenata sustava. Na desnoj strani jednadžbe (4.5) nalazi se nula što znači da u vektoru poznatih veličina, odnosno vektoru desne strane u sustavu linearnih algebarskih jednadžbi za sve unutarnje kontrolne volumene ide nula.

Konačna jednadžba za rubni lijevi kontrolni volumen glasi:

$$3T_P - T_E = 2T_A. \quad (4.6)$$

Razmatrani kontrolni volumen  $P$  je u ovom slučaju kontrolni volumen 1, dok mu je istočni (desni) susjed kontrolni volumen 2:

$$3T_1 - T_2 = 2T_A. \quad (4.7)$$

Koeficijent uz temperaturu u kontrolnom volumenu 1 označuje se s  $a_{P1}$  i odlazi na mjesto  $A_{1,1}$  u matrici koeficijenata sustava (glavna dijagonala), dok se koeficijent uz temperaturu u kontrolnom volumenu 2 označuje s  $a_{E1}$  i odlazi na mjesto  $A_{1,2}$ . Na desnoj strani jednadžbe nalazi se poznata temperatura iz Dirichletova rubnog uvjeta i taj se član označuje sa  $S_1$  te odlazi u vektor desne strane u sustavu linearnih algebarskih jednadžbi.

Konačna jednadžba za rubni desni kontrolni volumen glasi:

$$3T_P - T_W = 2T_B. \quad (4.8)$$

Razmatrani kontrolni volumen  $P$  je u ovom slučaju kontrolni volumen 10, dok mu je zapadni (lijevi) susjed kontrolni volumen 9:

$$3T_{10} - T_9 = 2T_B. \quad (4.9)$$

Koeficijent uz temperaturu u kontrolnom volumenu 10 označuje se s  $a_{P10}$  i odlazi na mjesto  $A_{10,10}$  u matrici koeficijenata sustava (glavna dijagonala), dok se koeficijent uz temperaturu u kontrolnom volumenu 9 označuje s  $a_{W10}$  i odlazi na mjesto  $A_{10,9}$ . Na desnoj strani jednadžbe nalazi se poznata temperatura iz Dirichletova rubnog uvjeta i taj se član označuje sa  $S_{10}$  te odlazi u vektor desne strane u sustavu linearnih algebarskih jednadžbi.

Pomoću izraza (4.5), (4.7) i (4.9), odnosno izračunatih koeficijenata u sustavu linearnih algebarskih jednadžbi moguće je postaviti sustav  $\mathbf{AT} = \mathbf{b}$  na sljedeći način:

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \\ T_7 \\ T_8 \\ T_9 \\ T_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 20 \end{bmatrix}, \quad (4.10)$$

iz čega je moguće zaključiti da je matrica koeficijenata sustava  $\mathbf{A}$  dijagonalno dominantno, pozitivno definitna i simetrična.

#### 4.1.3. Diskretizacija višeg reda točnosti

Zadani problem riješit će se diskretizacijom višeg reda točnosti na više načina proračuna, odnosno uz različite veličine proračunske molekule ( $N_n$ ) i različiti broj članova u Taylorovoj ekspanziji ( $N_q$ ).

Najprije će se postaviti da je broj susjeda jednak dva ( $N_n = 2$ ) te linearna interpolacija ( $N_q = 2$ ), odnosno skraćena Taylorova ekspanzija glasi:

$$\bar{T}(\mathbf{r}) = T(\tilde{\mathbf{r}}) + \frac{\partial T}{\partial x}(\tilde{\mathbf{r}}) \cdot (x - \tilde{x}). \quad (4.11)$$

Matrice  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{W}$ ,  $\bar{\mathbf{M}}$  i  $\bar{\mathbf{A}}$  iz metode lokalne regresije sve su veličine  $2 \times 2$ . Nakon što se dobije matrica  $\bar{\mathbf{A}}$ , odnosno koeficijenti interpolacije za stranice, moguće se postaviti sustav linearnih algebarskih jednadžbi  $\mathbf{AT} = \mathbf{b}$  na sljedeći način:

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \\ T_7 \\ T_8 \\ T_9 \\ T_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 20 \end{bmatrix}, \quad (4.12)$$

odnosno dobivena matrica jednaka je onoj iz standardne diskretizacije za slučaj kada se postavi broj susjeda jednak dva i linearna interpolacija.

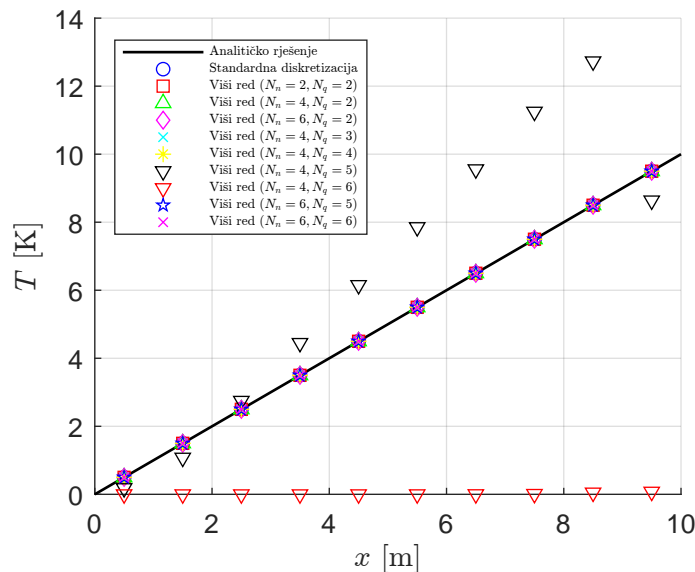
Kada se uzme veći broj susjeda u proračunskoj molekuli (npr.  $N_n = 4$ ), uz isti broj članova iz Taylorove ekspanzije ( $N_q = 2$ ) rezultirajući sustav jednadžbi sada glasi:

$$\begin{bmatrix} 2,9915024 & -0,995493 & -0,0010047 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -0,9979919 & 1,9949805 & -0,9959852 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -0,0010034 & -0,9959866 & 1,9939798 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1,9939798 & -0,9959866 & -0,0010034 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -0,9959852 & 1,9949805 & -0,9979919 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -0,0010047 & -0,995493 & 2,9915024 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ \vdots \\ T_8 \\ T_9 \\ T_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 19,9500472 \end{bmatrix}. \quad (4.13)$$

Matrica  $\mathbf{A}$  je punija nego u prethodnom slučaju jer je za izračunavanje gradijenta temperature, odnosno koeficijenata interpolacije za svaku stranicu korištena veća proračunska molekula te je simetrična do na neku decimalu zbog ograničene numeričke preciznosti (programski jezik Python koristi 64-bitne `float` brojeve, što uvodi male pogreške kod operacija poput množenja, dijeljenja i zbrajanja). Nadalje, dijagonalna dominantnost matrice nije zadržana samo za jedan redak, ponovno zbog numeričke preciznosti, odnosno strojne točnosti.

#### 4.1.4. Usporedba rješenja

Na slici 17. prikazan je dijagram usporedbe rješenja navedenog problema za analitičko rješenje, standardnu diskretizaciju drugog reda točnosti i diskretizaciju višeg reda točnosti. Za diskretizaciju višeg reda prikazana su rješenja za različite proračunske molekule ( $N_n$ ) i redove interpolacija ( $N_q$ ).



Slika 17. Usporedba rješenja za 1D problem stacionarnog provođenja topline bez izvora

Iz dijagrama je vidljivo da se sva rješenja gotovo pa poklapaju s analitičkim, osim za slučajeve  $N_n < N_q$ . Broj članova Taylorove ekspanzije određuje razinu aproksimacije. Veći  $N_q$  omogućuje uključivanje viših derivacija, što teoretski poboljšava točnost. Broj susjeda definira koliko informacija imamo za aproksimaciju. Svaki susjed pridonosi jednoj jednadžbi u sustavu. Kada je  $N_q > N_n$ , broj nepoznanica (članovi Taylorove ekspanzije) premašuje broj dostupnih jednadžbi. To čini sustav neodređenim, odnosno matrica  $\overline{\mathbf{M}}$

dimenzija  $N_q \times N_q$  nema dovoljno informacija za invertiranje jer je rang matrice ograničen na  $N_n$  (maksimalni broj informacija koje  $N_n$  susjeda može pružiti). Neke od kombinacija kojima se dobiva singularna matrica  $\bar{\mathbf{M}}$  i koje nisu prikazane na dijagramu su:  $N_n = 2$ ,  $N_q = 4$  i  $N_n = 2$ ,  $N_q = 5$ . Za kombinacije prikazane obrnutim trokutima na dijagramu ( $N_n = 4$ ,  $N_q = 5$  i  $N_n = 4$ ,  $N_q = 6$ ) matrica je blizu singularnosti, odnosno loše je uvjetovana te numeričke pogreške eksponencijalno rastu. S obzirom na to da je analitičko rješenje linearna funkcija, standardna diskretizacija te diskretizacija višeg reda točnosti uz  $N_q = 2$  daju egzaktne rješenja.



## 4.2. 1D problem stacionarnog provođenja topline uz izvorski član

Drugi je primjer problem jednodimenzijskog stacionarnog provođenja topline uz izvorski član kroz štap konstantnog poprečnog presjeka sa zadanim multim temperaturama na rubovima. Skica zadatka jednaka je onoj iz prethodnog primjera - Slika 16.

Zadane su sljedeće vrijednosti:  $L = 10$  m,  $A_f = 10$  m<sup>2</sup>,  $k_f = 10$  W/mK,  $T_A = 0$  K,  $T_B = 0$  K.

Izvorski član nije zadan, već se izračunava pomoću metode proizvedenih rješenja (engl. *Method of Manufactured Solutions* - MMS [16]). Ova se metoda koristi za validaciju numeričkih metoda i provjeru točnosti numeričkih rješenja parcijalnih diferencijalnih jednadžbi. Temelji se na odabiru proizvoljnog, očekivanog analitičkog rješenja i njegovom stvaranju odgovarajućeg izvorskog člana koji osigurava da to rješenje zadovoljava jednadžbu. Naposljetku se dobiveno numeričko rješenje uspoređuje s analitičkim rješenjem.

### 4.2.1. Standardna diskretizacija drugog reda točnosti

Jednadžba koju je potrebno riješiti jest difuzijska jednadžba stacionarnog provođenja topline uz izvorski član:

$$-\frac{d}{dx} \left( k \frac{dT}{dx} \right) = S, \quad (4.14)$$

čijom se diskretizacijom pomoću metode kontrolnih volumena prikazanom u prethodnom poglavlju dobiva:

$$-\sum_{f=1}^{N_f} k_f A_f \left[ \frac{T_N - T_P}{\|\mathbf{d}_f\|} \cdot \|\Delta_f\| + (\nabla T)_f \cdot \mathbf{k}_f \right] = \int_{V_P} S dV, \quad (4.15)$$

pri čemu se može uočiti da je izvorski član ostao u integralnom obliku, odnosno nije aproksimiran formulom srednje točke. Kako se opet radi o savršeno ortogonalnoj mreži, nema potrebe za neortogonalnom korekcijom, a ortogonalni vektor se poklapa s vektorom normale:

$$-\sum_{f=1}^{N_f} k_f A_f \frac{T_N - T_P}{\|\mathbf{d}_f\|} \cdot \|\mathbf{n}_f\| = \int_{V_P} S dV, \quad (4.16)$$

Zadani je problem jednodimenzijski pa postoji ovisnost samo o jednoj varijabli, a to je uzdužna os štapa  $x$ . Diferencijalni volumen na desnoj strani jednadžbi može se napisati kao umnožak površine poprečnog presjeka i diferencijalne duljine:

$$\int_{V_P} S dV = \int_l S A_f dx, \quad (4.17)$$

pa izraz (4.16) prelazi u:

$$-\sum_{f=1}^{N_f} k_f \frac{T_N - T_P}{\|\mathbf{d}_f\|} \cdot \|\mathbf{n}_f\| = \int_a^b S(x) dx, \quad (4.18)$$

gdje  $a$  predstavlja  $x$ -koordinatu lijeve, a  $b$  desne granice kontrolnog volumena.

Funkcija  $S(x)$  izračunava se pomoću metode MMS. Kao što je prije navedeno, metoda proizvedenih rješenja temelji se na odabiru očekivanog analitičkog rješenja koje je za ovaj primjer uzeto kao:

$$T(x) = \sin\left(2\pi \frac{x^2}{100}\right). \quad (4.19)$$

U jednadžbi stacionarnog provođenja topline (4.14) nalazi se druga derivacija temperature pa je i očekivano analitičko rješenje potrebno derivirati dva puta po  $x$ -koordinati. Nakon što se dobivena druga derivacija supstituira u osnovni izraz (4.14) te provede analitička integracija za svaki kontrolni volumen i sredi, dobivamo konačnu jednadžbu za svaki kontrolni volumen koja glasi:

$$\sum_{f=1}^{N_f} \frac{T_N - T_P}{\|\mathbf{d}_f\|} \cdot \|\mathbf{n}_f\| = \frac{\pi}{25} \left( b \cos\left(\frac{\pi b^2}{50}\right) - a \cos\left(\frac{\pi a^2}{50}\right) \right). \quad (4.20)$$

Pojedinačne jednadžbe za rubni lijevi, rubni desni te sve unutarnje kontrolne volumene jednake su kao i u prošlom primjeru, uz dodatni izvorski član na desnoj strani jednadžbe te redom glase:

$$\begin{aligned} 3T_1 - T_2 &= S_1 + 2T_A, \\ 3T_{10} - T_9 &= S_{10} + 2T_B, \\ 2T_P - T_E - T_W &= S. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Pomoću navedenih izraza, odnosno izračunatih koeficijenata u sustavu linearnih algebarskih jednadžbi moguće je formirati sustav  $\mathbf{AT} = \mathbf{b}$ :

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \\ T_7 \\ T_8 \\ T_9 \\ T_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,125416 \\ -0,118016 \\ -0,0748726 \\ 0,0489682 \\ 0,269336 \\ 0,480606 \\ 0,397304 \\ -0,237102 \\ -1,05715 \\ -0,840298 \end{bmatrix}. \quad (4.22)$$

#### 4.2.2. Diskretizacija višeg reda točnosti

Kao i u prethodnom primjeru, najprije će se analizirati slučaj kada se postavi da je broj susjeda jednak dva ( $N_n = 2$ ) i linearna interpolacija ( $N_q = 2$ ). Takvom diskretizacijom dobiva se sljedeći sustav linearnih algebarskih jednačbi u obliku  $\mathbf{AT} = \mathbf{b}$ :

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \\ T_7 \\ T_8 \\ T_9 \\ T_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,125416 \\ -0,118016 \\ -0,0748726 \\ 0,0489682 \\ 0,269336 \\ 0,480606 \\ 0,397304 \\ -0,237102 \\ -1,05715 \\ -0,840298 \end{bmatrix}, \quad (4.23)$$

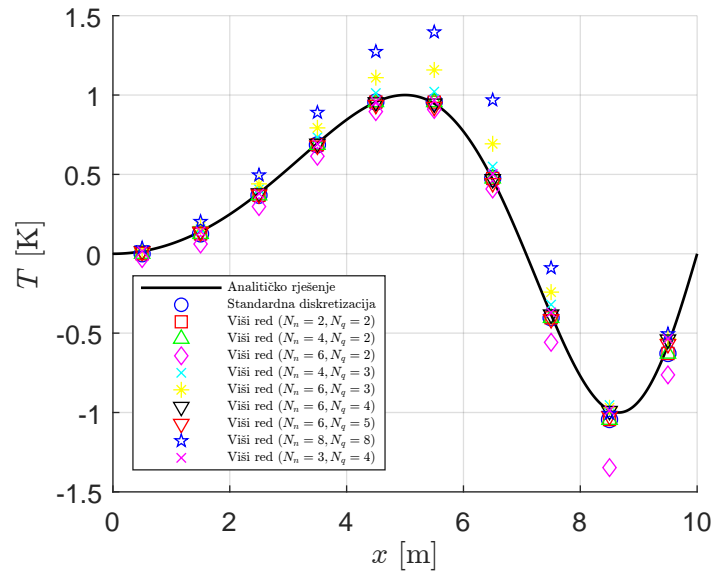
odnosno dobivena je matrica ista kao i kod standardne diskretizacije. Također je moguće pogledati slučaj kada se uzme više susjeda za interpolaciju gradijenta (npr.  $N_n = 4$ ) čime sustav jednačbi sada glasi:

$$\begin{bmatrix} 2,9915024 & -0,995493 & -0,0010047 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -0,9979919 & 1,9949805 & -0,9959852 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -0,0010034 & -0,9959866 & 1,9939798 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1,9939798 & -0,9959866 & -0,0010034 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -0,9959852 & 1,9949805 & -0,9979919 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -0,0010047 & -0,995493 & 2,9915024 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ \vdots \\ T_8 \\ T_9 \\ T_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,125416 \\ -0,118016 \\ -0,0748726 \\ \vdots \\ 0,397304 \\ -0,237102 \\ -1,05715 \end{bmatrix}. \quad (4.24)$$

Dobivena je matrica koeficijenata sustava ponovno simetrična do na neku decimalu i dijagonalno dominantna za sve osim jednog retka. S obzirom na to da se koristi više susjeda matrica je punija.

### 4.2.3. Usporedba rješenja

Na slici 18. prikazan je dijagram usporedbe rješenja navedenog problema za analitičko rješenje, standardnu diskretizaciju drugog reda točnosti i diskretizaciju višeg reda točnosti. Za diskretizaciju višeg reda prikazana su rješenja za različite proračunske molekule ( $N_n$ ) i redove interpolacija ( $N_q$ ).



**Slika 18. Usporedba rješenja za 1D problem stacionarnog provođenja topline s izvorom**

Za procjenu pogrešaka numeričkih rješenja često se koriste  $L_2$  i  $L_\infty$  norme jer omogućuju kvantitativnu usporedbu numeričkog i analitičkog rješenja.  $L_2$  norma predstavlja prosječnu kvadratnu pogrešku između numeričkog i analitičkog rješenja u svim točkama domene. Za diskretni slučaj s  $N$  točaka,  $L_2$  norma definira se kao:

$$L_2 = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (T_i - T_i^{\text{analitičko}})^2}. \quad (4.25)$$

$L_\infty$  norma (maksimum norma) predstavlja maksimalnu apsolutnu pogrešku između numeričkog i analitičkog rješenja, a definira se kao:

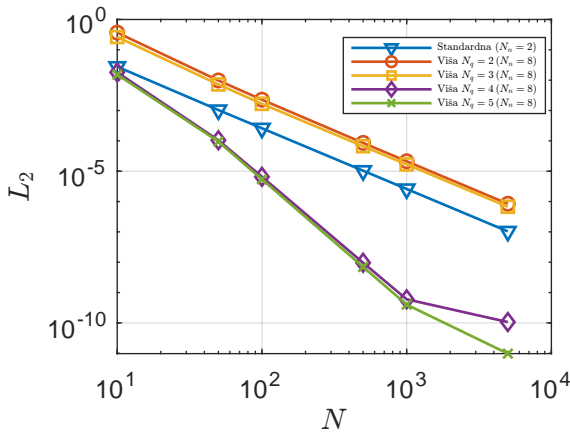
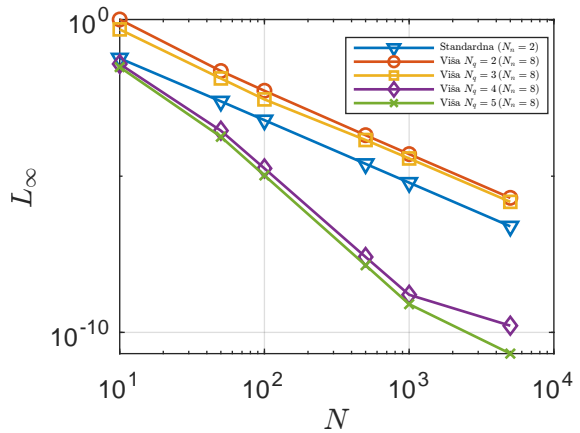
$$L_\infty = \max_{i \in \{1, 2, \dots, N\}} |T_i - T_i^{\text{analitičko}}|. \quad (4.26)$$

U ovom će se primjeru analizirati konvergencija numeričkog rješenja pri čemu su pogreške izračunate za različite parametre:

- broj kontrolnih volumena ( $N = 10, 50, 100, 500, 1000, 5000$ ),
- broj članova Taylorove ekspanzije ( $N_q = 2, 3, 4, 5$ ),
- standardna diskretizacija.

Broj ćelija u proračunskoj molekuli uzet je kao  $N_n = 8$ , osim za standardnu diskretizaciju drugog reda točnosti gdje je  $N_n = 2$ . Za svaku kombinaciju  $N$  i  $N_p$  izračunate su norme

prema gore definiranim formulama te prikazane na log-log dijagramima, slika 19. i slika 20.

Slika 19. Konvergencija  $L_2$  normeSlika 20. Konvergencija  $L_\infty$  norme

Prema slikama je vidljivo da se s povećanjem broja kontrolnih volumena norme smanjuju, što ukazuje na konvergenciju numeričkog rješenja prema analitičkom. Brzina smanjenja norme ukazuje na red točnosti metode. U tablici 1. su prikazani nagibi  $L_2$  i  $L_\infty$  normi za različite metode diskretizacije, izračunati metodom najmanjih kvadrata. Za standardnu diskretizaciju drugog reda točnosti nagibi su vrlo blizu teorijskoj vrijednosti od -2, što ukazuje na očekivanu kvadratnu konvergenciju, odnosno greška opada proporcionalno kvadratu broja volumena  $N$ . Za metodu s  $N_q = 2$  (i  $N_n = 8$ ) vidljivo je blago poboljšanje stope konvergencije u odnosu na standardnu metodu, dok su za  $N_q = 3$  vrlo slični onoj za  $N_q = 2$ . Kod metode s  $N_q = 4$  dolazi do značajnog povećanja stope konvergencije, dok je za  $N_q = 5$  ona slična redu niže.

Tablica 1. Nagibi  $L_2$  i  $L_\infty$  normi za različite metode diskretizacije

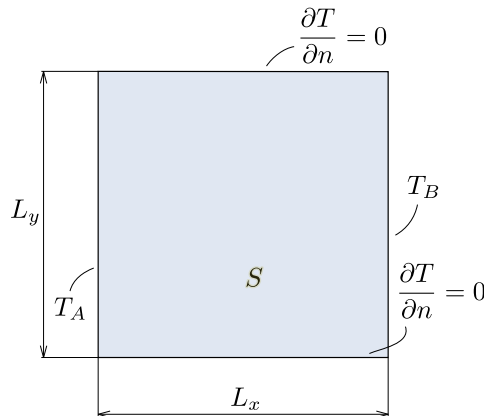
Metoda diskretizacije	Nagib $L_2$ norme	Nagib $L_\infty$ norme
Standardna ( $N_n = 2$ )	-2,0087	-1,9942
Viša $N_q = 2$ ( $N_n = 8$ )	-2,0793	-2,0986
Viša $N_q = 3$ ( $N_n = 8$ )	-2,0611	-2,0222
Viša $N_q = 4$ ( $N_n = 8$ )	-3,7860	-3,7481
Viša $N_q = 5$ ( $N_n = 8$ )	-3,8429	-3,8423

Za veći red interpolacije, odnosno veći  $N_q$ , pogreške su manje, što ukazuje na poboljšanje preciznosti metode diskretizacije. Međutim, povećanje  $N_q$  može dovesti do nestabilnosti ako broj susjeda nije dovoljan. Također, vidljivo je da neparni redovi interpolacije imaju slični red točnosti kao i prvi niži parni red (npr. za  $N_q = 3$  i  $N_q = 2$ ). Isto ponašanje potvrđeno je i u [14].

### 4.3. 2D problem stacionarnog provođenja topline kroz kvadratnu ploču uz izvorski član - Prva konfiguracija

U klasi dvodimenzijskih problema provođenja topline uz izvorski član bit će provedene dvije konfiguracije uz istu geometrije, ali primijenjene drugačije rubne uvjete.

Prva konfiguracija prikazana je na slici 21., s geometrijom problema i rubnim uvjetima.



Slika 21. Geometrija i rubni uvjeti prve konfiguracije

Zadane su sljedeće vrijednosti:  $L_x = 1$  m,  $L_y = 1$  m,  $k = 1$  W/mK,  $T_A = 273$  K,  $T_B = 373$  K,  $S = -1000$  W/m<sup>3</sup>.

Usljed adijabatskih rubnih uvjeta na gornjoj i donjoj stranici, odnosno nultog gradijenta temperature u smjeru normale, ovaj problem ima rješenje koje ovisi samo o jednoj prostornoj koordinati, odnosno rješenje ovisi o jednoj prostornoj koordinati.

#### 4.3.1. Analitičko rješenje

Analitičko je rješenje moguće dobiti rješavanjem jednadžbe (2.4) koja za dvodimenzijski slučaj glasi:

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) = S. \quad (4.27)$$

Kao što je ranije navedeno, problem se može promatrati kao jednodimenzijski u smjeru osi  $x$  pa derivacije po  $y$  iščezavaju, a također je i koeficijent toplinske provodnosti konstantan pa izraz prelazi u:

$$-k \frac{d^2 T}{dx^2} = S. \quad (4.28)$$

Dvostrukom integracijom i uvrštavanjem rubnih uvjeta dobije se funkcija temperaturnog polja u ovisnosti o uzdužnoj koordinati u sljedećem obliku:

$$T(x) = -\frac{S}{2k} x^2 + \left( \frac{T_B - T_A}{L_x} + \frac{S L_x}{2k} \right) x + T_A, \quad (4.29)$$

odnosno dobivena je raspodjela temperature u obliku kvadratne parabole. Uvrštavanjem poznatih numeričkih vrijednosti prethodni izraz glasi:

$$T(x) = 500x^2 - 400x + 273. \quad (4.30)$$

Moguće je izračunati i iznos i mjesto postizanja ekstrema u temperaturnoj raspodjeli izjednačavanjem derivacije funkcije s nulom:

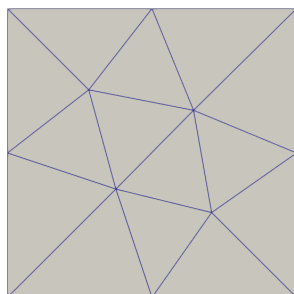
$$x_{\min} = 0,4 \text{ m} \implies T_{\min} = 193 \text{ K}. \quad (4.31)$$

#### 4.3.2. Standardna diskretizacija drugog reda točnosti

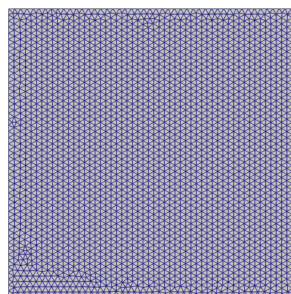
Proračun standardnom diskretizacijom drugog reda točnosti provodi se u programskom paketu `OpenFOAM`. Za diskretizaciju računalne domene korištena je trokutna mreža u dvodimenzijском prostoru ekstrudirana za malu vrijednosti u smjeru treće ( $z$ ) osi. Broj je kontrolnih volumena variran kako bi se analizirao utjecaj gustoće mreže na rezultate. Računalne simulacije će se provesti na nestrukturiranim trokutnim mrežama. Korištene numeričke sheme definirane su u datoteci `system/fvSchemes` na sljedeći način:

- `ddtSchemes`  $\implies$  `steadyState` (stacionarni problem),
- `gradSchemes`  $\implies$  `Gauss linear` (račun gradijenata pomoću Gaussovog teorema i linearne interpolacije - Green-Gauss metoda temeljena na ćelijama),
- `divSchemes`  $\implies$  `none` (nema konvektivnog člana),
- `laplacianSchemes`  $\implies$  `Gauss linear corrected` (s korekcijom za neortogonalne mreže),
- `interpolationSchemes`  $\implies$  `linear` (linearna interpolacija vrijednosti između čvorova),
- `snGradSchemes`  $\implies$  `corrected` (korekcija gradijenta u slučaju neortogonalnosti na rubu).

U provedbi analize na nestrukturiranim mrežama generirane su mreže različitih gustoća, počevši od grube mreže s 14 volumena, preko mreža s 26, 90, 944 i 3046, do vrlo fine mreže s 5116 volumena, čime je omogućeno detaljno ispitivanje konvergencije rješenja. Mreže su generirane u alatu `Gmsh`, što je omogućilo fleksibilnu kontrolu nad gustoćom i kvalitetom mreže. Na idućoj su slici prikazane dvije od generiranih nestrukturiranih mreža, najgrublja i najfinija, odnosno mreže s 14 i 5116 kontrolnih volumena.



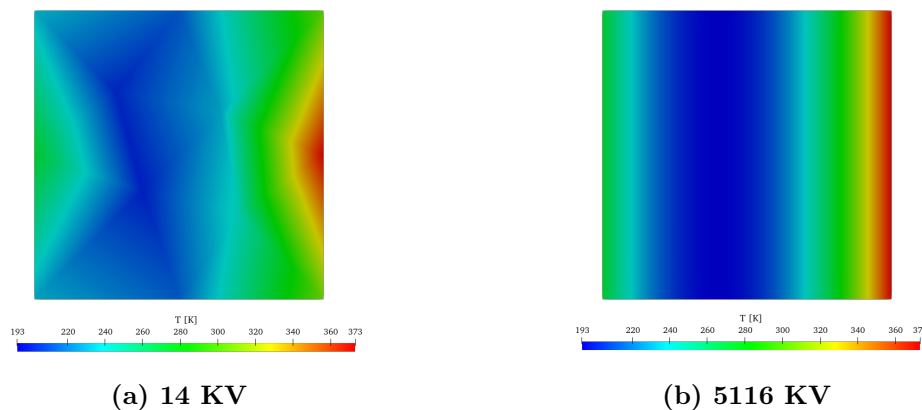
(a) 14 KV



(b) 5116 KV

Slika 22. Nestrukturirane mreže

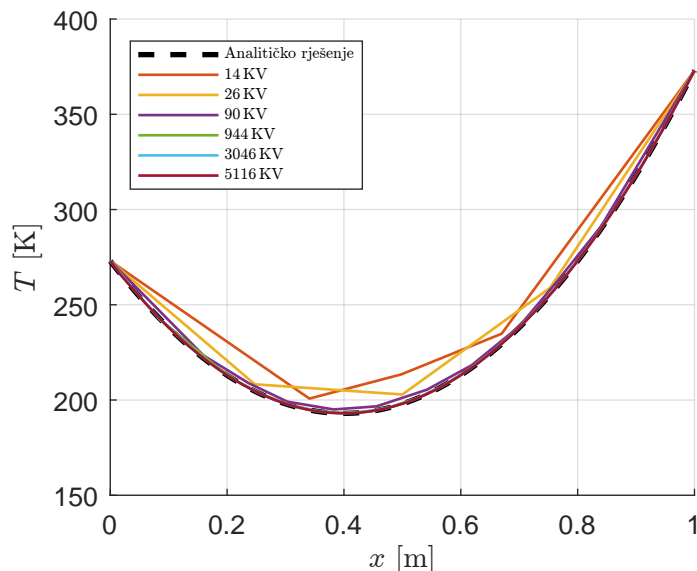
Budući da različite gustoće mreže mogu utjecati na točnost numeričkog rješenja, bit će analizirana raspodjela temperature na najgrubljoj i najfinijoj mreži, prikazana na slici 23.



**Slika 23. Raspodjela temperature po ploči - Prva konfiguracija**

Uočava se da gruba mreža s 14 kontrolnih volumena daje grubo i nisko razlučeno rješenje s izraženim numeričkim greškama, dok fina mreža s 5116 KV omogućuje glatku raspodjelu temperature koja odgovara očekivanom analitičkom rješenju. Ovim se potvrđuje konvergencija rješenja s povećanjem broja kontrolnih volumena.

Na slici 24. prikazan je dijagram usporedbe raspodjele temperature na  $y = 0,5$  m za analitičko rješenje i numeričke rezultate dobivene različitim gustoćama nestrukturiranih mreža. Analitičko rješenje služi kao referenca za procjenu točnosti numeričkih rezultata dobivenih različitim gustoćama mreže.



**Slika 24. Raspodjela temperature na  $y = 0,5$  m - Prva konfiguracija**

Moguće je uočiti da već mreža sa srednjom gustoćom (reda veličine 1000 kontrolnih volumena) vrlo dobro prati analitičko rješenje, što potvrđuje očekivanu konvergenciju. Na grubljim mrežama odstupanja su izraženija jer mali broj kontrolnih volumena nije dovoljan



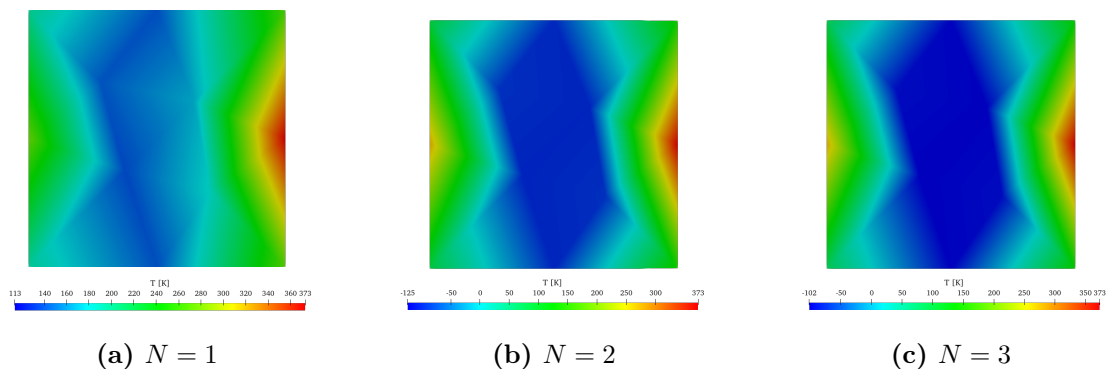
za preciznu aproksimaciju kvadratnog profila temperaturnog polja.

### 4.3.3. Diskretizacija višeg reda točnosti

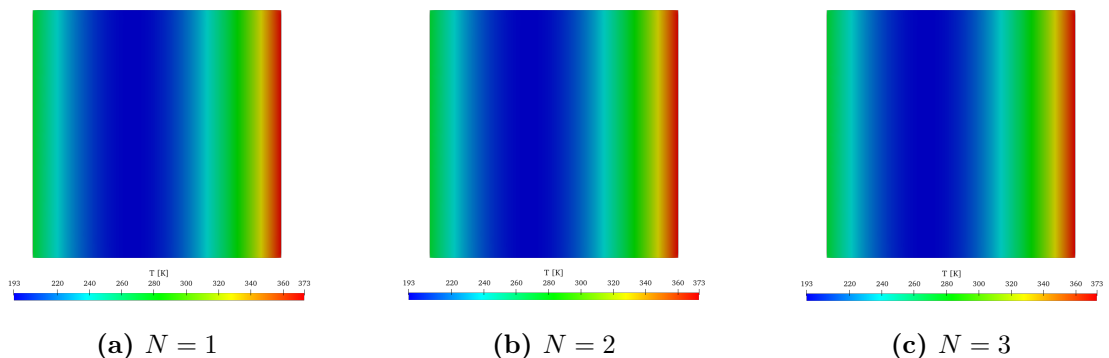
Diskretizacija višeg reda točnosti provodi se koristeći programski paket HoPyFOAM (engl. *High-order Python FOAM*) [17], čiji je stil koda i način rada sličan onom u OpenFOAM paketu. Analize će se provesti na nestrukturiranim mrežama (slika 22.) uz variranje reda interpolacije  $N$ , odnosno broja članova iz Taylorove ekspanzije  $N_q$  te veličine proračunske molekule  $N_n$ . Broj Gaussovih točaka integracije po stranici za sve simulacije uzet će se kao  $N_g = 7$ . Korišteni su sljedeći redovi interpolacije:

- $N = 1$  (linearna interpolacija)  $\Rightarrow N_q = 3, N_n = 14, N_g = 7$ ,
- $N = 2$  (kvadratna interpolacija)  $\Rightarrow N_q = 6, N_n = 16, N_g = 7$ ,
- $N = 3$  (kubična interpolacija)  $\Rightarrow N_q = 10, N_n = 20, N_g = 7$ .

Kako bi se analizirala točnost različitih redova interpolacije, na slikama 25. i 26. prikazane su temperaturne raspodjele dobivene na gruboj i finoj mreži. Očekuje se da će veći red interpolacije dati rješenje bliže analitičkom modelu, uz smanjene numeričke pogreške.

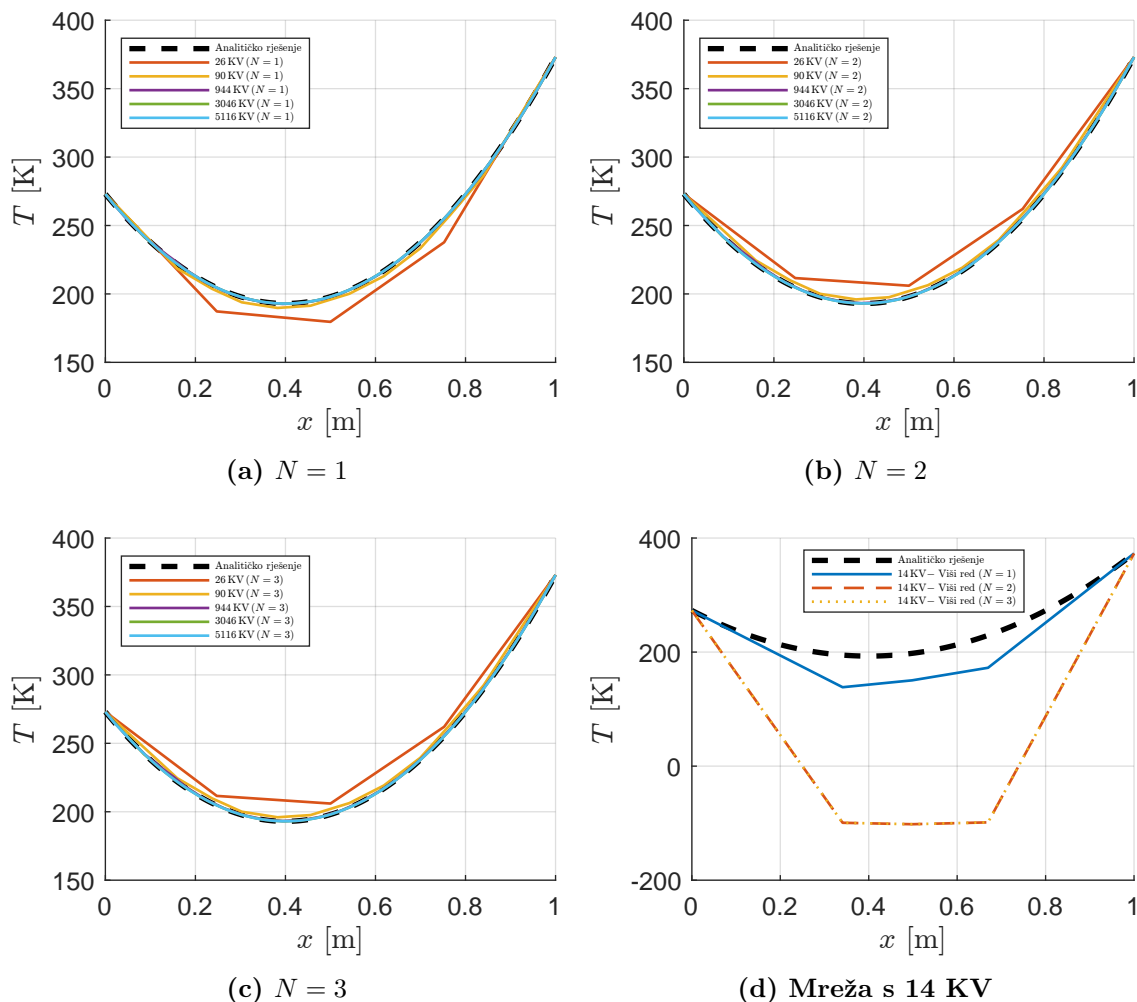


Slika 25. Raspodjela temperature na najgrubljoj mreži (14 KV) za različite redove interpolacije - Prva konfiguracija



Slika 26. Raspodjela temperature na najfinijoj mreži (5116 KV) za različite redove interpolacije - Prva konfiguracija

Na dijagramima (slika 27a.–27c.) prikazane su usporedbe temperaturnih raspodjela na presjeku  $y = 0,5$  m za različite redove interpolacija i gustoće mreža u odnosu na analitičko rješenje. Važno je napomenuti da su svi dijagrami generirani u vizualizacijskom programu ParaView, koji primjenjuje linearnu interpolaciju pri prikazu rezultata. Zbog toga viši redovi polinoma možda nisu u potpunosti vizualno prikazani, ali razlike u preciznosti metode i dalje su jasno uočljive.



**Slika 27. Raspodjela temperature na  $y = 0,5$  m za različite redove interpolacije - Prva konfiguracija**

Moguće je uočiti da se za sva tri reda interpolacije numeričko rješenje gotovo pa poklapa s analitičkim već kod mreže s 944 kontrolnih volumena. Iako kvadratna i kubična interpolacija na finijim mrežama daju gotovo identične rezultate, na vrlo gruboj mreži (14 KV) dolazi do numeričke nestabilnosti, pri čemu se pojavljuju negativne, nefizikalne vrijednosti temperature u središtu ploče (slika 27d.). Ova pojava je rezultat činjenice da metoda višeg reda zahtijeva određeni minimalni broj kontrolnih volumena za stabilno rješenje. Za ovaj slučaj geometrije i rubnih uvjeta, analiza je pokazala da broj kontrolnih volumena mora biti najmanje približno 25 KV kako bi se osigurala numerička stabilnost diskretizacije višeg reda, zbog ograničenja broja čvorova u proračunskoj molekuli ( $N_n$ ).

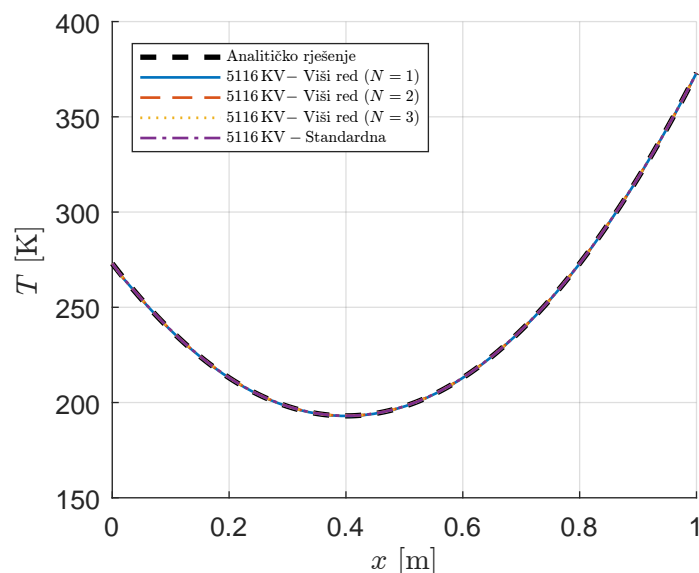
Još će se analizirati vrijeme izvršavanja koda za sve simulacije. Simulacije su izvođene na prijenosnom računaru s procesorom Intel Core i7-10875H, 2.3 GHz, uz 16 GB RAM-a. Vrijeme izvođenja može varirati ovisno o specifikacijama sustava i opterećenju procesora tijekom izvođenja. Očekivano, vrijeme izvršavanja raste s povećanjem broja kontrolnih volumena. Dok se kod manjih mreža vrijeme izvođenja mjeri u sekundama, kod većih mreža dolazi do značajnog povećanja, gdje se simulacija na mreži s 5116 kontrolnih volumena izvodi gotovo 10 minuta. Iako metode višeg reda zahtijevaju veće vrijeme izvođenja, rezultati pokazuju da već s umjerenim brojem kontrolnih volumena (944 KV) dolazi do značajnog poboljšanja preciznosti, što opravdava korištenje više razine interpolacije u primjenama gdje je potrebna visoka točnost.

**Tablica 2.** Vrijeme izvršavanja koda za različite redove interpolacije i gustoće mreže

Broj KV	N=1 [s]	N=2 [s]	N=3 [s]
14	0,17	0,20	0,24
26	0,32	0,36	0,49
90	1,05	1,25	1,70
944	25,56	28,59	32,22
3046	205,22	221,94	226,82
5116	575,77	579,21	589,44

#### 4.3.4. Usporedba rješenja

Na slici 28. prikazana je usporedba raspodjele temperature duž presjeka  $y = 0,5$  m za sve metode na najfinijim mrežama, uz analitičko rješenje.



**Slika 28.** Usporedba raspodjele temperature na  $y = 0,5$  m na najfinijim mrežama - Prva konfiguracija

Vidi se da sve metode dobro prate analitičko rješenje na najfinijim mrežama.

S obzirom na to da je poznata analitička vrijednost minimalne temperature u ploči ( $T_{\min} = 193 \text{ K}$ ), tablično će se usporediti dobivene vrijednosti svim metodama na svim gustoćama mreža, tablica 3.

**Tablica 3. Minimalne temperature za različite metode i gustoće mreže**

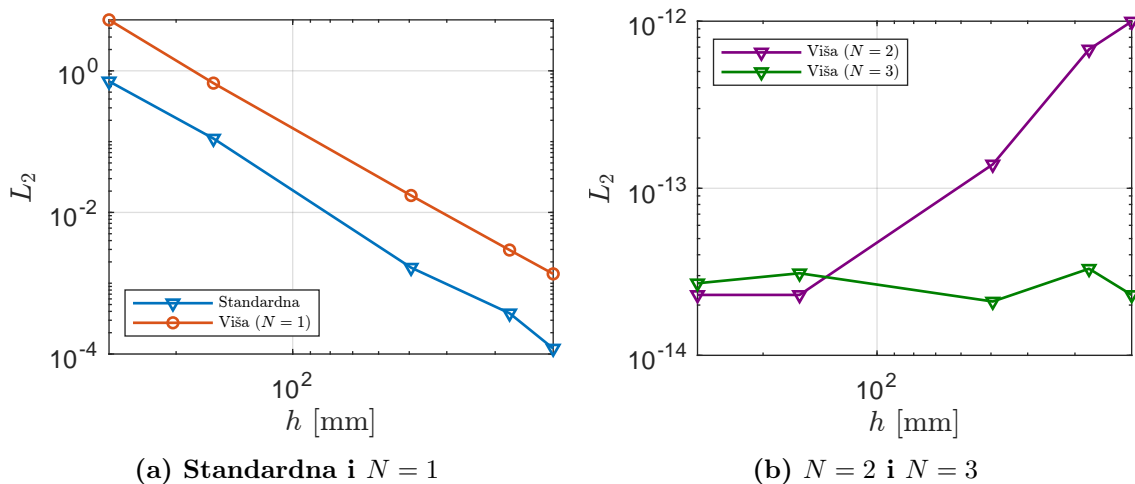
Broj KV	Standardna [K]	Viši red [K]		
		$N = 1$	$N = 2$	$N = 3$
14	200,158	136,868	-102,172	-101,849
26	201,787	173,267	206,003	206,003
90	194,076	188,516	195,066	195,066
944	193,240	192,703	193,226	193,226
3046	193,031	192,884	193,049	193,049
5116	193,044	192,944	193,040	193,040

Može se primijetiti da sve metode već za srednji broj volumena (reda veličine 1000) daju dosta dobra rješenja u usporedbi s analitičkim. Standardna diskretizacija pokazuje dobru konvergenciju prema analitičkoj minimalnoj temperaturi te za 3046 kontrolnih volumena postiže najmanju apsolutnu razliku od svih metoda. Za kvadratnu i kubičnu interpolaciju višeg reda točnosti rješenja gotovo savršeno prate analitičku minimalnu temperaturu već pri mreži s 944 kontrolnih volumena, dok se kod linearne interpolacije točnost poboljšava s povećanjem gustoće mreže. Ovo potvrđuje da metode višeg reda interpolacije omogućuju bržu konvergenciju i veću preciznost pri manjem broju kontrolnih volumena u usporedbi sa standardnom metodom. Međutim, primjetna je i nestabilnost metoda višeg reda kod vrlo grubih mreža, gdje dolazi do značajnih odstupanja, uključujući i fizikalno neprihvatljive negativne temperature. Nestabilnost metoda višeg reda kod vrlo grubih mreža rezultat je ograničenog broja susjednih čvorova u proračunskoj molekuli, što uzrokuje oscilacije i fizikalno neprihvatljive vrijednosti. Rezultati pokazuju da se metode višeg reda interpolacije mogu koristiti za postizanje visoke preciznosti uz manji broj kontrolnih volumena, ali je potrebno osigurati odgovarajuću gustoću mreže ili broj susjeda kako bi se izbjegle numeričke greške.

Nadalje će se prikazati dijagram norme konvergencije  $L_2$  koja se računa volumenskim ponderiranjem jer ćelije nisu jednakih volumena:

$$L_2 = \sqrt{\frac{1}{N \cdot V_{\text{uk}}} \sum_{i=1}^N (T_i - T_i^{\text{analitičko}})^2 V_i}, \quad (4.32)$$

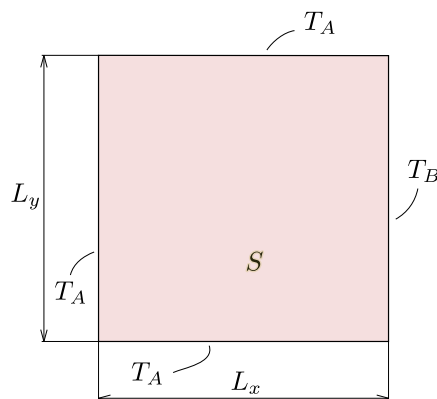
gdje je  $V_{\text{uk}}$  volumen cijele domene, a  $V_i$  volumen pojedinog kontrolnog volumena. Na osi apscise nalazi se srednja duljina trokuta.

Slika 29. Dijagrami  $L_2$  norme konvergencije

Iz grafova normi konvergencija vidljivo je da norme postižu ekstremno male vrijednosti (do na strojnu točnost) kod kvadratne i kubične interpolacije jer je analitičko rješenje kvadratna funkcija, a navedenim interpolacijama pretpostavljena je kvadratna, odnosno kubična raspodjela pa se dobiva točno analitičko rješenje. Kod linearne interpolacije ( $N = 1$ ) norme s povećanjem kontrolnih volumena očekivano padaju. Standardna diskretizacija drugog reda daje isti nagib pravca norme kao i linearna interpolacija metode višeg reda, što je očekivano jer obje metode koriste istu pretpostavku o linearnosti raspodjele zavisne varijable unutar kontrolnog volumena.

#### 4.4. 2D problem stacionarnog provođenja topline kroz kvadratnu ploču uz izvorski član - Druga konfiguracija

Na slici 30. prikazana je druga konfiguracija problema dvodimenzijskog provođenja topline kroz kvadratnu ploču. Za razliku od prve konfiguracije, gdje je problem imao jednodimenzijsko rješenje zbog adijabatskih rubnih uvjeta, u ovoj konfiguraciji očekuje se dvodimenzijska raspodjela temperature zbog postavljenih Dirichletovih rubnih uvjeta na gornjoj i donjoj stranici.



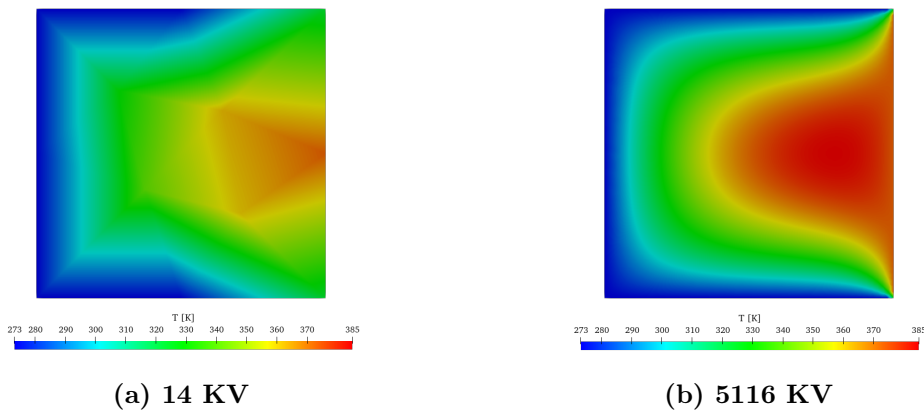
Slika 30. Geometrija i rubni uvjeti druge konfiguracije

Zadane su sljedeće vrijednosti:  $L_x = 1$  m,  $L_y = 1$  m,  $k = 1$  W/mK,  $T_A = 273$  K,  $T_B = 373$  K,  $S = 1000$  W/m<sup>3</sup>.

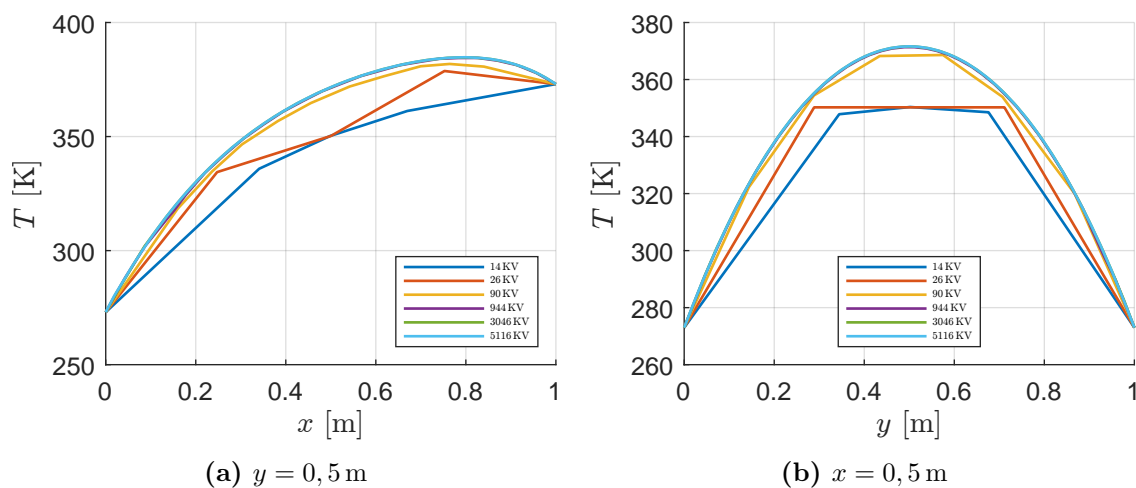
##### 4.4.1. Standardna diskretizacija drugog reda točnosti

Slično kao u prethodnoj konfiguraciji, standardna diskretizacija drugog reda točnosti provest će se u programskom paketu `OpenFOAM` koristeći nestrukturirane trokutne mreže prikazane na slici 22.

Analiza će se provesti na sličan način kao i u prethodnoj konfiguraciji, gdje će se najprije prikazati temperaturna raspodjela po cijeloj ploči (slika 31.), čime će se vizualno potvrditi dvodimenzijska priroda rješenja, a zatim će se analizirati raspodjele temperature na karakterističnim presjecima ploče – duž središnje linije u smjeru  $x$ -osi i  $y$ -osi (slike 32a. i 32b.). Budući da se sada očekuje dvodimenzijska raspodjela temperature, analiza će uključivati usporedbu rješenja duž različitih presjeka kako bi se bolje uočile karakteristike temperaturnog polja.



Slika 31. Raspodjela temperature po ploči - Druga konfiguracija



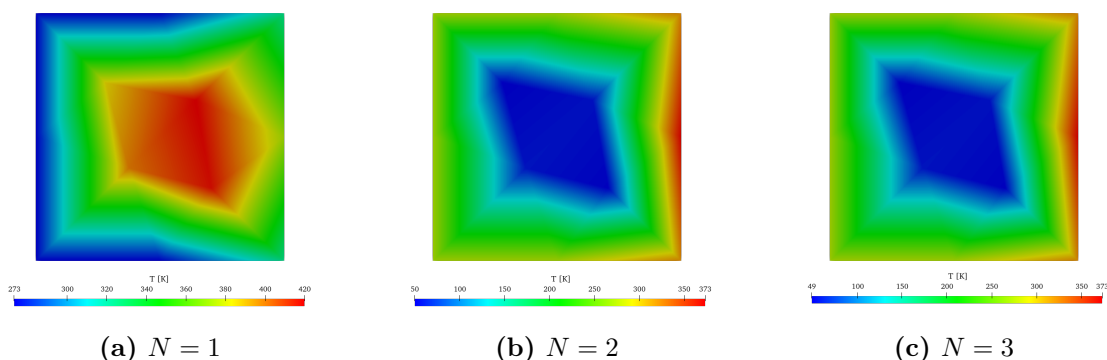
Slika 32. Raspodjela temperature na presjecima - Druga konfiguracija

Numerička rješenja već za mrežu s 944 kontrolnih volumena pokazuju vrlo dobru preciznost, gotovo u potpunosti prateći rješenje dobiveno na najfinijoj mreži (5116 KV). Ova analiza potvrđuje da metoda konvergira prema točnom rješenju s povećanjem broja kontrolnih volumena. Na grubljim mrežama, posebno onima s 14 i 26 KV, vidljiva su veća odstupanja i manje glatka temperaturna polja, što je očekivano zbog ograničene rezolucije mreže i veće numeričke pogreške.

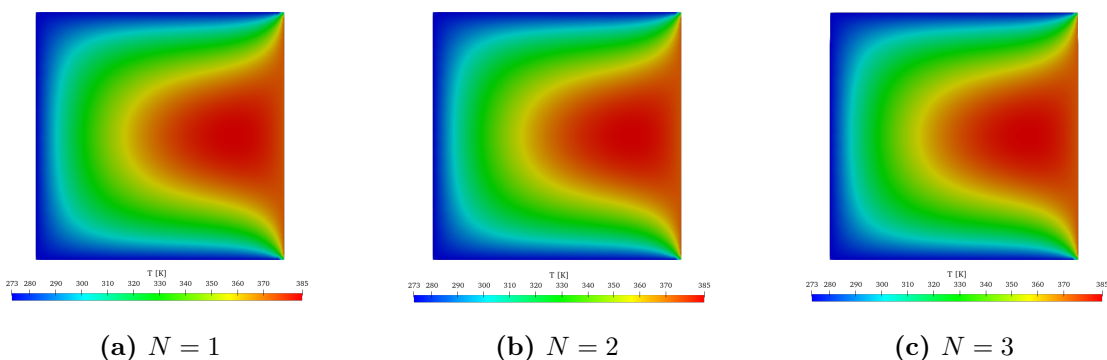
#### 4.4.2. Diskretizacija višeg reda točnosti

Diskretizacija višeg reda provodi se korištenjem programskog paketa HoPyFOAM, kao i u prethodnoj konfiguraciji. Također, analize su provedene na nestrukturiranim mrežama uz primjenu različitih redova interpolacije - linearna, kvadratna i kubična.

Na slikama 33. i 34. prikazane su temperaturne raspodjele po kvadratnoj ploči za različite redove interpolacije na najgrubljoj i najfinijoj mreži. Očekuje se da će rješenja dobivena metodama višeg reda na finoj mreži pokazati bolju preciznost i veću glatkoću u odnosu na rješenja standardnih metoda.



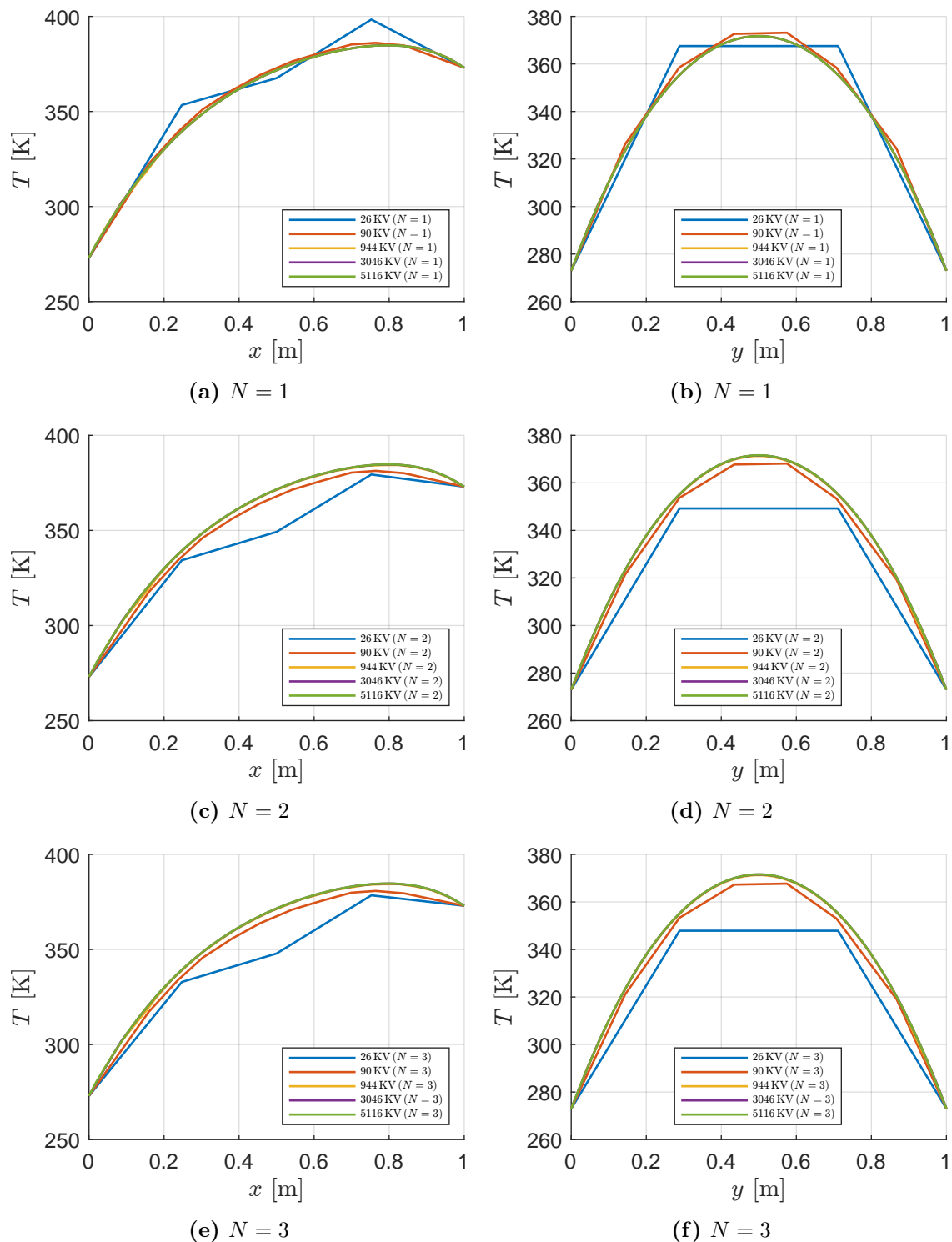
Slika 33. Raspodjela temperature na najgrubljoj mreži za različite redove interpolacije - Druga konfiguracija



Slika 34. Raspodjela temperature na najfinijoj mreži za različite redove interpolacije - Druga konfiguracija

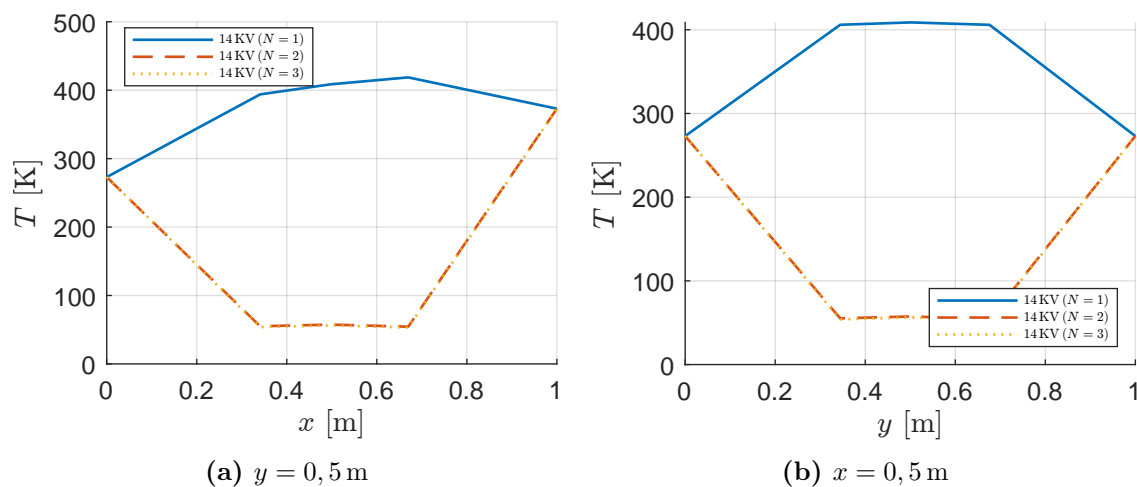


Sljedeći dijagrami prikazuju temperaturne raspodjele duž linija  $y = 0,5$  m i  $x = 0,5$  m, omogućujući kasniju direktnu usporedbu s rezultatima standardnih metoda diskretizacije.



Slika 35. Raspodjela temperature na nestrukturiranim mrežama - Druga konfiguracija: (a), (c), (e)  $y = 0,5$  m ; (b), (d), (f)  $x = 0,5$  m

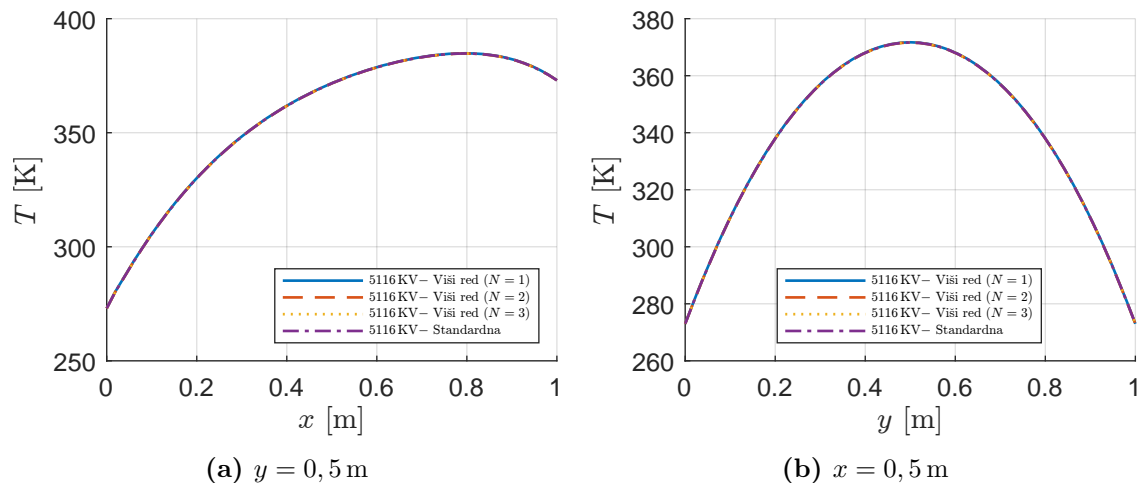
Kao i u prethodnoj konfiguraciji, uočeno je da se kod kvadratne i kubične interpolacije na najgrubljoj mreži pojavljuju nefizikalna rješenja, pri čemu temperature padaju ispod minimalne rubne temperature, iako je u ploči prisutan pozitivan toplinski izvor, slika 36.



Slika 36. Raspodjela temperature na mreži s 14 KV - Druga konfiguracija

#### 4.4.3. Usporedba rješenja

Na sljedećim su dijagramima prikazane raspodjele temperature po presjecima  $y = 0,5$  m i  $x = 0,5$  m na najfinijim mrežama za sve metode diskretizacije.

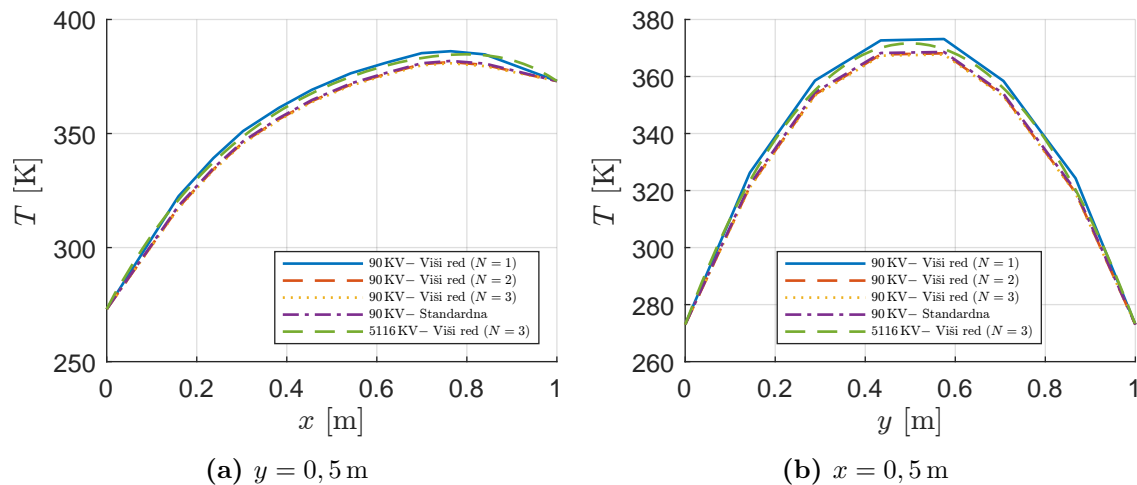


Slika 37. Usporedba raspodjela temperature na najfinijim mrežama - Druga konfiguracija

Vidljivo je da rezultati dobiveni metodama standardne diskretizacije i metodama višeg reda točnosti konvergiraju prema istoj vrijednosti, što potvrđuje točnost i konzistentnost numeričkih metoda korištenih u proračunu.

Još će se usporediti temperaturne raspodjele na manjoj finoći mreže (reda veličine 100 KV), pri čemu će se kao referentna krivulja uzeti teorijski najtočnije rješenje – kubična interpolacija i najfinija mreža (5116 KV). Cilj ove analize je ispitati koliko se rezultati na mreži srednje finoće razlikuju od visoko preciznog rješenja, čime će se procijeniti koliko je

mreža srednje gustoće dovoljna za kvalitetno numeričko rješenje.

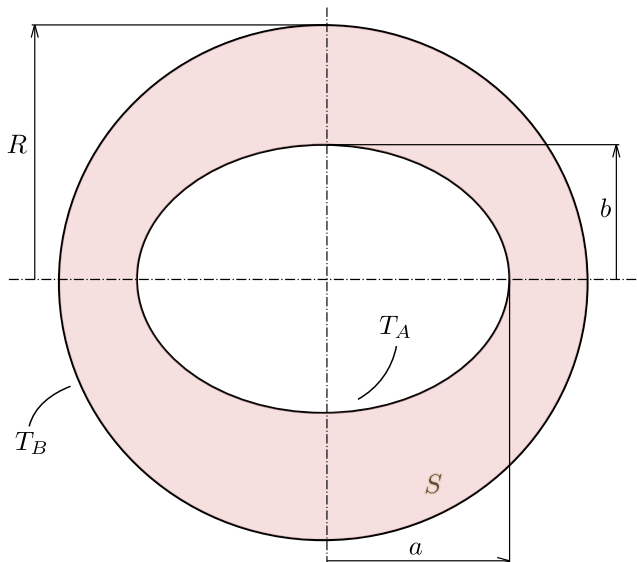


**Slika 38. Usporedba raspodjela temperature na mrežama s  $\approx 100 \text{ KV}$  - Druga konfiguracija**

Uočeno je da linearna interpolacija kod višeg reda točnosti za umjerenu finoću mreže daje najbolje poklapanje s konvergiranim rješenjem, dok ostale metode daju slična rješenja. Ovo je suprotno očekivanjima, budući da se metode višeg reda teoretski trebaju bolje slagati s rješenjem pri istoj gustoći mreže. Za ovaj broj kontrolnih volumena greška standardne diskretizacije i diskretizacije za  $N = 2$  i  $N = 3$  istog su reda veličine, no očekuje se da će viši red na finijim mrežama imati znatno manju grešku zbog bolje stope konvergencije.

#### 4.5. Problem stacionarnog provođenja topline kroz stijenku cijevi uz izvorski član

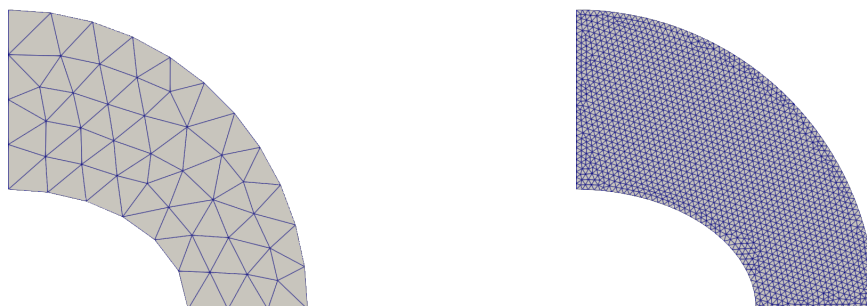
Posljednji primjer na kojem će se usporediti standardna diskretizacija i diskretizacija višeg reda točnosti je problem stacionarnog provođenja topline kroz stijenku cijevi uz postojanje toplinskog izvora. Vanjska površina cijevi je kružnica radijusa  $R$ , dok je unutarnja elipsa s poluosima  $a$  i  $b$ , slika 39.



Slika 39. Geometrija cijevi i rubni uvjeti

Zadane su sljedeće vrijednosti:  $R = 0,5$  m,  $a = 0,3$  m,  $b = 0,2$  m,  $k = 1$  W/mK,  $T_A = 100$  K,  $T_B = 200$  K,  $S = 7500$  W/m<sup>3</sup>.

Budući da je geometrija problema dvostruko simetrična, analiza se može provesti samo na četvrtini domene. Ovim pristupom značajno se smanjuje potreban broj kontrolnih volumena, čime se optimizira računanje bez gubitka točnosti u rezultatima. Kreirane su nestrukturirane trokutne mreže s različitim brojem kontrolnih volumena - 80, 243, 1022 i 3559. Na slici 40. prikazane su najgrublja i najfinija mreža.



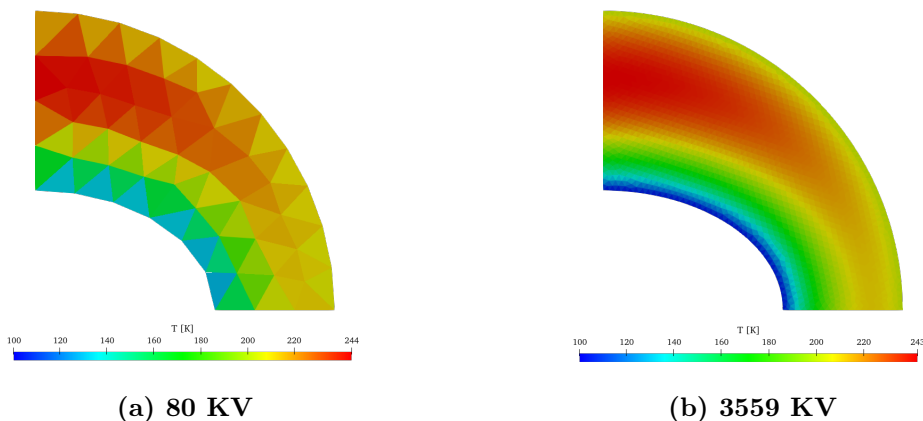
(a) 80 KV

(b) 3559 KV

Slika 40. Prostorna diskretizacija cijevi

#### 4.5.1. Standardna diskretizacija drugog reda točnosti

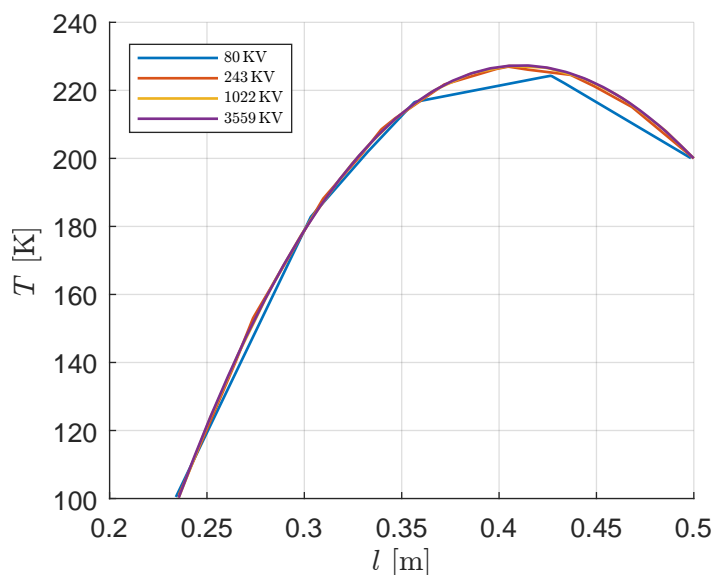
Kao i u dosadašnjim primjerima, proračun standardnom diskretizacijom proveden je pomoću programskom paketa `OpenFOAM`. Na sljedećoj je slici prikazano dobiveno polje temperature po cijevi na najfinijoj i najgrubljoj mreži.



Slika 41. Raspodjela temperature po cijevi - Standardna diskretizacija

Vidljivo je da temperatura raste od unutarnje prema vanjskoj stijenci cijevi, što je očekivano zbog postavljenih rubnih uvjeta i prisutnog izvorskog člana. Na gruboj mreži primjećuju se veće oscilacije u temperaturnom polju, dok fina mreža daje stabilnije i konzistentnije rješenje.

Dijagram 42. prikazuje raspodjelu temperature po stijenci cijevi na presjeku koji je zarotiran u odnosu na  $x$ -os za  $45^\circ$ .

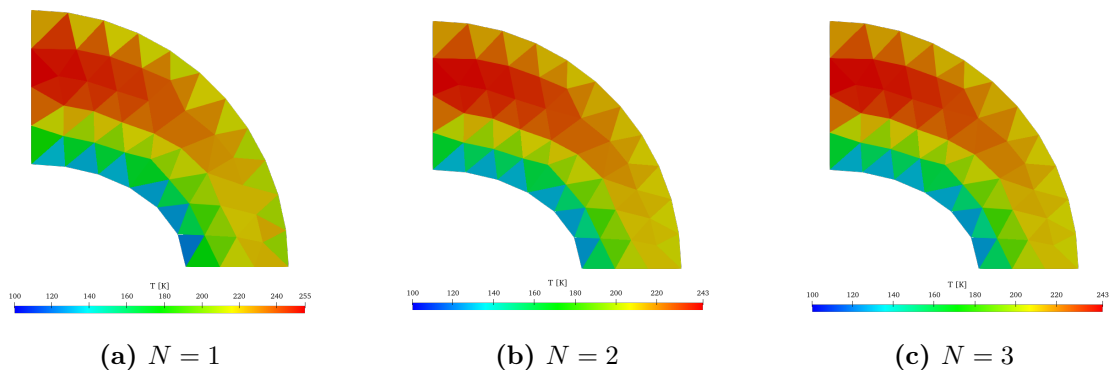


Slika 42. Raspodjela temperature po presjeku cijevi - Standardna diskretizacija

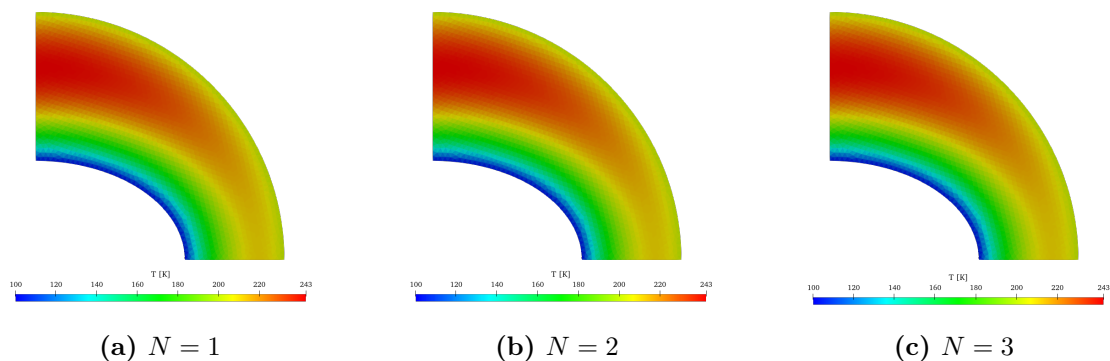
#### 4.5.2. Diskretizacija višeg reda točnosti

Diskretizacija višeg reda provodi se kao i ranije u programskom paketu HoPyFOAM s linearnom, kvadratnom i kubičnom interpolacijom uz u prethodnim primjerima navedene odgovarajuće veličine proračunske molekule i broj članova u Taylorovoj ekspanziji.

Na slikama 43. i 44. prikazane su dobivene raspodjele temperature po cijevi za najgrublje i najfinije mreže te različite redove interpolacije.

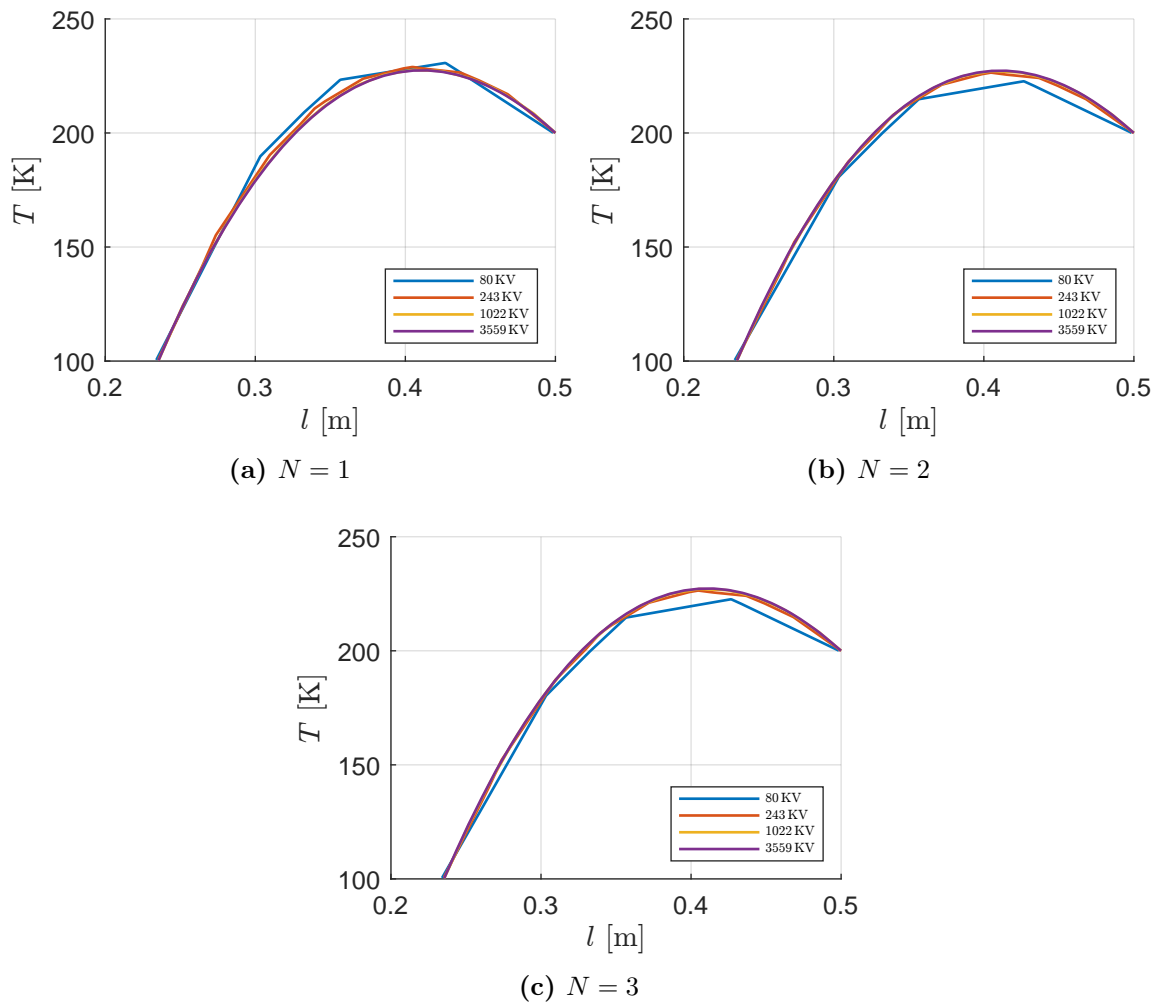


Slika 43. Raspodjela temperature po cijevi na najgrubljoj mreži



Slika 44. Raspodjela temperature po cijevi na najfinijoj mreži

Sljedeći dijagrami prikazuju temperaturne raspodjele po presjeku cijevi za sve redove interpolacije. Ova usporedba omogućit će analizu utjecaja reda interpolacije na preciznost rješenja, stabilnost numeričke metode i eventualna odstupanja u odnosu na očekivano fizičko ponašanje sustava.



**Slika 45.** Raspodjela temperature po presjeku cijevi za različite redove interpolacije

Vidljivo je da kod kvadratne i kubične interpolacije rješenje već za 234 KV vrlo dobro prati konvergirano rješenje, dok su kod linearne interpolacije odstupanja malo veća.

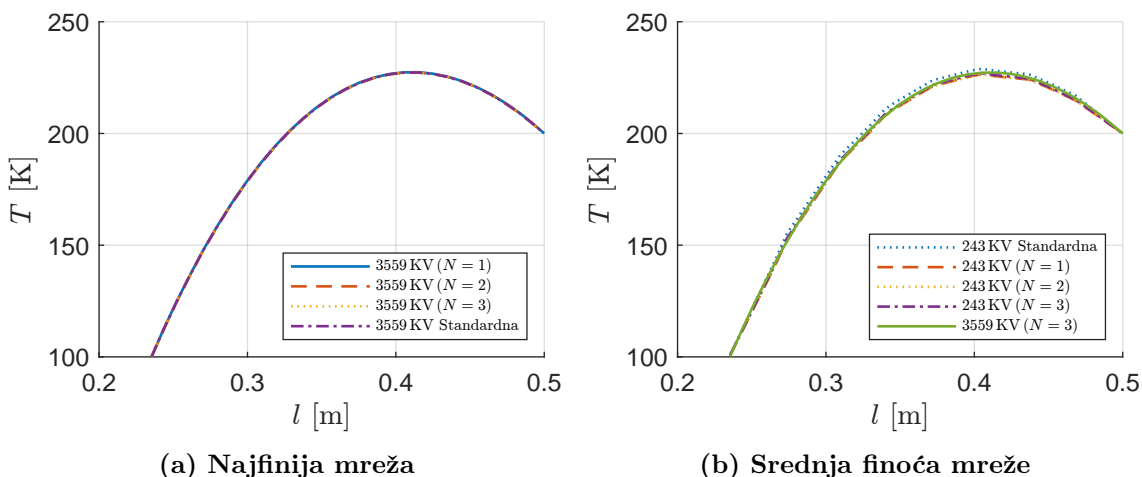
Još će se za viši red točnosti usporediti vrijeme izvršavanja koda za sve redove interpolacije i gustoće mreže, tablica 4. Vidljivo je da s povećanjem broja kontrolnih volumena i reda interpolacije vrijeme izvođenja očekivano raste.

**Tablica 4. Vrijeme izvršavanja koda za različite redove interpolacije i gustoće mreže - Cijev**

Broj KV	N=1 [s]	N=2 [s]	N=3 [s]
80	0,92	1,11	1,45
243	3,40	3,99	5,06
1022	30,48	32,67	35,73
3559	276,63	297,27	304,93

#### 4.5.3. Usporedba rješenja

Iz dijagrama na slici 46a. uočava se da sve metode diskretizacije konvergiraju u istu vrijednost. Na dijagramu 46b. prikazane su krivulje dobivene na presjeku na mreži s 243 kontrolna volumena za različite metode. Kao ekvivalentna i teorijski najtočnija vrijednost stavljena je krivulja temperature dobivena kubičnom interpolacijom na najfinijoj mreži.



**Slika 46. Usporedba raspodjele temperature za različite finoće mreže**

Vidljivo je da kubična interpolacija na srednjoj finoći mreže već jako dobro prati konvergirano rješenje na većini domene. Rješenje dobiveno standardnom diskretizacijom pokazuje veća odstupanja po cijeloj domeni. Krivulje dobivene linearnom i kvadratnom interpolacijom pokazuju bolju podudarnost u odnosu na standardnu diskretizaciju.



## 5. Zaključak

U ovom radu analizirana je primjena metode kontrolnih volumena koja se temelji na diskretizaciji proizvoljnim redom točnosti. Metoda je primjenjena na jednodimenzijske i dvodimenzijske eliptičke probleme provođenja topline. Dobivena rješenja su uspoređena sa standardnom diskretizacijom drugog reda i s analitičkim rješenjima. Rezultati jasno pokazuju prednosti diskretizacijom višim redom točnosti u pogledu točnosti i brzine konvergencije, ali i izazove vezane uz povećane računalne zahtjeve.

U jednodimenzijskim problemima provođenja topline, uključujući slučajeve bez izvorskog člana i s izvorskim članom, diskretizacija višeg reda je na istoj mreži pokazala bolju točnost u odnosu na standardnu diskretizaciju. Pokazano je da za istu razinu točnosti diskretizacija višim redom zahtjeva red veličine rjeđu mrežu. Nadalje, pokazano je da je diskretizacijom drugim redom točnosti dobiveni sustav jednadžbi rjeđi s obzirom na to standardna diskretizacija koristi kompaktnu proračunsku molekulu.

Kod dvodimenzijskih problema, razmatrani su slučajevi provođenja topline kroz kvadratnu ploču s izvorskim članom, pri čemu su ispitane različite konfiguracije rubnih uvjeta. Analiza je provedena na trokutastim nestrukturiranim mrežama različite gustoće. Rezultati pokazuju da diskretizacija višeg reda zadržava svoju prednost i u dvodimenzijском prostoru. Analiza konvergencije pokazala je da linearna interpolacija u diskretizaciji višeg reda daje slične trendove konvergencije kao standardna metoda, dok kvadratna i kubična interpolacija omogućuju točno podudaranje s analitičkim rješenjem jer je ono polinom drugog reda.

Problem provođenja topline kroz stijenku cijevi dodatno je potvrdio prednosti višeg reda diskretizacije u situacijama gdje je prisutna geometrijska složenost. Diskretizacija višeg reda pokazala je da se mogu postići rezultati visoke točnosti na rijetkim mrežama. Također, analiza vremena izvođenja pokazala je da se s povećanjem broja Gaussovih točaka integracije značajno povećava računalna zahtjevnost metode višeg reda, ali u većini slučajeva povećanje točnosti može opravdati dodatni trošak u pogledu vremena izvođenja.

Jedan od ključnih uvida ovog rada jest da odabir parametara diskretizacije višeg reda, poput veličine proračunske molekule i broja točaka interpolacije, ima značajan utjecaj na konačnu točnost i efikasnost metode. Pokazalo se da povećanje reda interpolacije ne vodi uvijek proporcionalnom poboljšanju rezultata, osobito kod jako finih mreža gdje se učinak višeg reda smanjuje. Stoga, za optimalne rezultate potrebno je pronaći ravnotežu između gustoće mreže i točnosti diskretizacije. Dodatno, pokazano je da u jedno- i dvodimenzijskim slučajevima norme konvergencije neparnih redova interpolacije imaju isto ili slično ponašanje kao i prvi niži parni red.

Zaključno, rad potvrđuje da primjena diskretizacije višeg reda donosi značajne prednosti u pogledu točnosti. Međutim, uz veću točnost idu i povećani računalni zahtjevi te osjetljivost na izbor parametara integracije. Mogući budući smjerovi istraživanja uključuju daljnju analizu osjetljivosti rezultata na odabrane parametre integracije, kao i primjenu metoda višeg reda na nestacionarne probleme provođenja topline.

## Literatura

- [1] SimScale, “Turbomachinery CFD Simulation,” <https://www.simscale.com/simulations/turbomachinery-cfd/>, pristupljeno: 27.12.2024.
- [2] Cadence, “McLaren Formula 1 Car Aerodynamics Simulation with Cadence Fidelity CFD Software Success Story,” [https://www.cadence.com/en\\_US/home.html](https://www.cadence.com/en_US/home.html), pristupljeno: 27.12.2024.
- [3] insideHPC, “Supercomputing the Future of Cycling,” <https://insidehpc.com/2018/12/supercomputing-future-cycling/>, pristupljeno: 27.12.2024.
- [4] FlowVision, “Cardiovascular CFD & FSI Simulations,” <https://fv-tech.com/en/flowvision-applications/cardiac-simulations>, pristupljeno: 27.12.2024.
- [5] J. Sorić, *Uvod u numeričke metode u strojarstvu*. Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb, 2009.
- [6] Wolfram MathWorld, “Divergence theorem,” <https://mathworld.wolfram.com/DivergenceTheorem.html>, pristupljeno: 19.12.2024.
- [7] Z. Virag, I. Džijan, *Računalna dinamika fluida*. Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb, 2014.
- [8] P. J. Olver, *Introduction to Partial Differential Equations*. Springer, vol. 1, 2014.
- [9] Z. Virag, S. Krizmanić, *Dinamika plinova*. Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb, 2020.
- [10] OpenFOAM Foundation, “Openfoam: Open-source CFD toolbox,” <https://www.openfoam.com/>, pristupljeno: 19.12.2024.
- [11] I. Batistić, “Segment-to-segment algorithm for finite volume mechanical contact simulations,” 2022., Disertacija.
- [12] I. Demirdžić, “On the discretization of the diffusion term in finite-volume continuum mechanics,” *Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals*, vol. 68, no. 1, pp. 1–10, 2015.
- [13] A. Syrakos, S. Varchanis, Y. Dimakopoulos, A. Goulas, and J. Tsamopoulos, “A critical analysis of some popular methods for the discretisation of the gradient operator in finite volume methods,” *Physics of Fluids*, vol. 29, no. 12, 2017.
- [14] P. C. Green, “High-order finite volume method for solid dynamics in fluid-structure interaction applications,” 2023., Disertacija.
- [15] I. Batistić, S. Krizmanić, “Primjena metode kontrolnih volumena višeg reda na probleme čvrstoće,” 13. susret Hrvatskog društva za mehaniku, 2024.
- [16] K. I. Aycock, N. Rebelo, and B. A. Craven, “Method of manufactured solutions code verification of elastostatic solid mechanics problems in a commercial finite element solver,” *Computers & Structures*, vol. 229, p. 106175, 2020.
- [17] I. Batistić, P. Cardiff, “HoPyFOAM repozitorij,” <https://github.com/iBatistic/HoPyFoam>, pristupljeno: 19.12.2024.