

# Usporedba metoda za neinvazivno određivanje svojstava arterija

---

**Pintarić, Nino**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2024**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:235:915874>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-04-02**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb](#)



Sveučilište u Zagrebu  
Fakultet strojarstva i brodogradnje

# DIPLOMSKI RAD

Nino Pintarić

Zagreb, 2024.

Sveučilište u Zagrebu  
Fakultet strojarstva i brodogradnje

# DIPLOMSKI RAD

Mentorica:  
Dr. sc. Lana Virag, mag.ing.

Nino Pintarić

Zagreb, 2024.

Izjavljujem da sam ovaj rad izradio samostalno koristeći znanja stečena tijekom studija i navedenu literaturu.

Najprije zahvaljujem mentorici dr. sc. Lani Virag na pruženoj pomoći, uloženom trudu i vremenu te korisnim savjetima tijekom izrade ovog rada.

Zahvaljujem asistentnu Toniju Škugoru na savjetima i izdvojenom vremenu tijekom izrade ovog rada.

Na kraju, zahvaljujem svojim roditeljima te svojoj sestri, Heleni i svojem bratu, Toniju na pruženoj podršci tijekom studiranja.

Nino Pintarić



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE



Središnje povjerenstvo za završne i diplomske ispite  
Povjerenstvo za diplomske ispite studija strojarstva za smjerove:

Procesno-energetski, konstrukcijski, inženjersko modeliranje i računalne simulacije i brodstrojarski

Sveučilište u Zagrebu Fakultet strojarstva i brodogradnje	
Datum	Prilog
Klasa: 602 - 04 / 24 - 06 / 1	
Ur.broj: 15 - 24 -	

## DIPLOMSKI ZADATAK

Student: **Nino Pintarić** JMBAG: 0035203988

Naslov rada na hrvatskom jeziku: **Usporedba metoda za neinvazivno određivanje mehaničkih svojstava arterija**

Naslov rada na engleskom jeziku: **Comparison of methods for non-invasive determination of mechanical properties of arteries**

Opis zadatka:

Za razliku od industrijskih materijala koji imaju mala odstupanja u mehaničkim svojstvima, biološka tkiva imaju znatne razlike u ponašanju u ovisnosti o nizu faktora, poput dobi, spola, prisutnosti bolesti i slično. S obzirom na velik raspon parametara, ali i na težnju u medicini prema personaliziranom liječenju, neinvazivno određivanje mehaničkih parametara postaje sve potrebnije. Međutim, iz slikovnih metoda je poznat vrlo mali broj podataka te je u procesu određivanja parametara potrebno uvesti niz pretpostavki.

U okviru rada je potrebno:

- Proučiti literaturu vezanu za do sada razvijene metode određivanja mehaničkih parametara iz slikovnih metoda i pretpostavke koje svaka uvodi.
- Razviti i verificirati numerički postupak za određivanje parametara iz eksperimenta istezanje-tlak napravljenog metodom konačnih elemenata za Neo-Hooke i Holzapfel-Gasser-Ogden hiperelastične materijalne modele. Ispitati točnost postupka sa smanjivanjem broja ulaznih podataka.
- Razviti numeričke postupke za metode i pretpostavke predložene u literaturi te pomoću njih odrediti parametre iz virtualnog eksperimenta.
- Odrediti relativnu grešku između izračunatog i ciljanog mehaničkog ponašanja te komentirati točnost odabranih metoda.

U radu je potrebno navesti korištenu literaturu i eventualno dobivenu pomoć.

Zadatak zadan:

Datum predaje rada:

Predvideni datumi obrane:

9. svibnja 2024.

11. srpnja 2024.

15. – 19. srpnja 2024.

Zadatak zadao:

Predsjednik Povjerenstva:

Doc.dr.sc. Lana Virag

Prof. dr. sc.  Tanja Jurčević Lulić



# SADRŽAJ

SADRŽAJ.....	I
POPIS SLIKA.....	II
POPIS TABLICA.....	V
POPIS OZNAKA.....	VI
SAŽETAK.....	VIII
SUMMARY.....	IX
1. Uvod.....	1
2. Razmatranja o arterijama.....	3
3. Neinvazivne <i>in vivo</i> metode mjerenja tlaka i promjera žile.....	6
4. Materijalni modeli.....	7
4.1. <i>Neo-Hookeov</i> materijalni model.....	10
4.2. <i>Holzapfel-Gasser-Ogden</i> materijalni model.....	10
5. Postupak određivanja materijalnih parametara.....	12
5.1. Definiranje geometrije razmatrane arterije.....	12
5.2. Određivanje funkcije cilja.....	13
5.3. Određivanje tlaka modela za NH materijalni model.....	14
5.4. Određivanje reducirane sile modela za NH materijalni model.....	14
5.5. Određivanje tlaka modela za HGO materijalni model.....	15
5.6. Određivanje reducirane sile modela za HGO materijalni model.....	15
6. Virtualni eksperiment.....	17
6.1. Definiranje geometrije i mreže konačnih elemenata.....	17
6.2. Zadavanje svojstva materijala.....	19
6.3. Rubni uvjeti.....	19
6.4. Opterećenje.....	20
6.5. Rezultati simulacija.....	21
6.5.1. Rezultati simulacija NH.....	21
6.5.2. Rezultati simulacija HGO.....	23
7. Određivanje parametara materijala.....	28
7.1. Utjecaj poznatih ulaznih parametara.....	28
7.1.1. Neo Hooke.....	28
7.1.2. Holzapfel-Gasser-Ogden.....	29
7.1.2.1. Provjera utjecaja početnih pretpostavki.....	29
7.1.2.2. Utjecaj određivanja parametara o inicijalnim pretpostavkama.....	35
7.1.2.3. Određivanje parametara materijala s tri inicijalne pretpostavke.....	40
8. Usporedba metoda.....	46
8.1. Prema Smoljkić.....	46
8.2. Prema van der Horstu.....	47
8.3. Usporedba.....	47
9. Zaključak.....	53
Literatura.....	54

## POPIS SLIKA

Slika 1. Primjer jednoosnog (lijevo) i dvoosnog (desno) ispitivanja uzorka arterije [2].....	2
Slika 2. Grafovi ovisnosti naprezanja o deformaciji za abdominalnu aortu (gore) i aneurizmu abdominalne aorte (dolje), preuzeto iz [5].....	3
Slika 3. Kutevi otvaranja za cijelu aortu i pojedinačne slojeve za cirkularni uzorak (prsten) i longitudinalni uzorak (aksijalna traka), preuzeto iz [4].....	4
Slika 4. Zaostalo glavno istežanj (a), te zaostala radijalna (b), cirkularna (c) i aksijalna (d) naprezanja u arterijskoj stijenci, preuzeto iz [4].....	5
Slika 5. Arterija u referentnoj (lijevo) i trenutnoj (desno) konfiguraciji, preuzeto iz [9].....	12
Slika 6. Modelirani isječak poprečnog presjeka arterije.....	17
Slika 7. Modelirani isječak arterije.....	18
Slika 8. C3D8, odnosno C3D8H konačni element.....	18
Slika 9. Korištena mreža konačnih elemenata.....	19
Slika 10. Zadavanje rubnih uvjeta.....	20
Slika 11. Zadavanje opterećenja.....	21
Slika 12. Raspodjela aksijalnih pomaka za NH.....	22
Slika 13. Raspodjela radijalnih pomaka za NH.....	22
Slika 14. Raspodjela cirkularnog naprezanja za NH.....	23
Slika 15. Raspodjela radijalnog naprezanja za NH.....	23
Slika 16. Raspodjela aksijalnih pomaka za HGO – svi materijali.....	24
Slika 17. Raspodjela radijalnih pomaka za HGO – 1. materijal.....	25
Slika 18. Raspodjela cirkularnog naprezanja za HGO – 1. materijal.....	25
Slika 19. Raspodjela radijalnog naprezanja za HGO – 1. materijal.....	26
Slika 20. Raspodjela radijalnih pomaka za HGO – 4. materijal.....	26
Slika 21. Raspodjela cirkularnog naprezanja za HGO – 4. materijal.....	27
Slika 22. Raspodjela radijalnog naprezanja za HGO – 4. materijal.....	27
Slika 23. Veza tlaka (lijevo) i reducirane aksijalne sile (desno) o promjeni unutarnjeg radijusa za parametre određene na način 1, varijabilan pretpostavljeni C1.....	30
Slika 24. Veza tlaka (lijevo) i reducirane aksijalne sile (desno) o promjeni unutarnjeg radijusa za parametre određene na način 2, varijabilan pretpostavljeni C1.....	30
Slika 25. Veza tlaka (lijevo) i reducirane aksijalne sile (desno) o promjeni unutarnjeg radijusa za parametre određene na način 2, varijabilan pretpostavljeni C1.....	30
Slika 26. Veza tlaka (lijevo) i reducirane aksijalne sile (desno) o promjeni unutarnjeg radijusa za parametre određene na način 4, varijabilan pretpostavljeni C1.....	30
Slika 27. Veza tlaka (lijevo) i reducirane aksijalne sile (desno) o promjeni unutarnjeg radijusa za parametre određene na način 1, varijabilan pretpostavljeni k1.....	31
Slika 28. Veza tlaka (lijevo) i reducirane aksijalne sile (desno) o promjeni unutarnjeg radijusa za parametre određene na način 2, varijabilan pretpostavljeni k1.....	31
Slika 29. Veza tlaka (lijevo) i reducirane aksijalne sile (desno) o promjeni unutarnjeg radijusa za parametre određene na način 3, varijabilan pretpostavljeni k1.....	31
Slika 30. Veza tlaka (lijevo) i reducirane aksijalne sile (desno) o promjeni unutarnjeg radijusa za parametre određene na način 4, varijabilan pretpostavljeni k1.....	31
Slika 31. Veza tlaka (lijevo) i reducirane aksijalne sile (desno) o promjeni unutarnjeg radijusa za parametre određene na način 1, varijabilan pretpostavljeni k2.....	32
Slika 32. Veza tlaka (lijevo) i reducirane aksijalne sile (desno) o promjeni unutarnjeg radijusa za parametre određene na način 2, varijabilan pretpostavljeni k2.....	32
Slika 33. Veza tlaka (lijevo) i reducirane aksijalne sile (desno) o promjeni unutarnjeg radijusa za parametre određene na način 3, varijabilan pretpostavljeni k2.....	32

Slika 34. Veza tlaka (lijevo) i reducirane aksijalne sile (desno) o promjeni unutarnjeg radijusa za parametre određene na način 4, varijabilan pretpostavljeni $k_2$ .....	32
Slika 35. Veza tlaka (lijevo) i reducirane aksijalne sile (desno) o promjeni unutarnjeg radijusa za parametre određene na način 1, varijabilan pretpostavljeni $\alpha$ .....	33
Slika 36. Veza tlaka (lijevo) i reducirane aksijalne sile (desno) o promjeni unutarnjeg radijusa za parametre određene na način 2, varijabilan pretpostavljeni $\alpha$ .....	33
Slika 37. Veza tlaka (lijevo) i reducirane aksijalne sile (desno) o promjeni unutarnjeg radijusa za parametre određene na način 3, varijabilan pretpostavljeni $\alpha$ .....	33
Slika 38. Veza tlaka (lijevo) i reducirane aksijalne sile (desno) o promjeni unutarnjeg radijusa za parametre određene na način 4, varijabilan pretpostavljeni $\alpha$ .....	33
Slika 39. Veza tlaka (lijevo) i reducirane aksijalne sile (desno) o promjeni unutarnjeg radijusa za parametre određene na način 1, varijabilan pretpostavljeni A.....	34
Slika 40. Veza tlaka (lijevo) i reducirane aksijalne sile (desno) o promjeni unutarnjeg radijusa za parametre određene na način 2, varijabilan pretpostavljeni A.....	34
Slika 41. Veza tlaka (lijevo) i reducirane aksijalne sile (desno) o promjeni unutarnjeg radijusa za parametre određene na način 3, varijabilan pretpostavljeni A.....	34
Slika 42. Veza tlaka (lijevo) i reducirane aksijalne sile (desno) o promjeni unutarnjeg radijusa za parametre određene na način 4, varijabilan pretpostavljeni A.....	34
Slika 43. 1. materijal, načini određivanja parametara 1-4, tlakovi od 0,000 MPa od 0,016 MPa.....	37
Slika 44. 2. materijal, načini određivanja parametara 1-4, tlakovi od 0,000 MPa od 0,016 MPa.....	37
Slika 45. 3. materijal, načini određivanja parametara 1-4, tlakovi od 0,000 MPa od 0,016 MPa.....	37
Slika 46. 4. materijal, načini određivanja parametara 1-4, tlakovi od 0,000 MPa od 0,016 MPa.....	37
Slika 47. 1. materijal, načini određivanja parametara 1-4, tlakovi od 0,008 MPa od 0,016 MPa.....	39
Slika 48. 2. materijal, načini određivanja parametara 1-4, tlakovi od 0,008 MPa od 0,016 MPa.....	39
Slika 49. 3. materijal, načini određivanja parametara 1-4, tlakovi od 0,008 MPa od 0,016 MPa.....	39
Slika 50. 4. materijal, načini određivanja parametara 1-4, tlakovi od 0,008 MPa od 0,016 MPa.....	39
Slika 51. 1. materijal, načini određivanja parametara 1-6, 3 različite pretpostavke.....	42
Slika 52. 2. materijal, načini određivanja parametara 1-6, 3 različite pretpostavke.....	42
Slika 53. 3. materijal, načini određivanja parametara 1-6, 3 različite pretpostavke.....	42
Slika 54. 4. materijal, načini određivanja parametara 1-6, 3 različite pretpostavke.....	42
Slika 55. 1. materijal, načini određivanja parametara 1-6, 3 različite pretpostavke, 0,008-0,016 MPa.....	44
Slika 56. 2. materijal, načini određivanja parametara 1-6, 3 različite pretpostavke, 0,008-0,016 MPa.....	44
Slika 57. 3. materijal, načini određivanja parametara 1-6, 3 različite pretpostavke, 0,008-0,016 MPa.....	44
Slika 58. 4. materijal, načini određivanja parametara 1-6, 3 različite pretpostavke, 0,008-0,016 MPa.....	44
Slika 59. Usporedba metoda prema Smoljkić i prema van der Horstu, 1. materijal.....	49
Slika 60. Usporedba metoda prema Smoljkić i prema van der Horstu, 2. materijal.....	49
Slika 61. Usporedba metoda prema Smoljkić i prema van der Horstu, 3. materijal.....	49



---

Slika 62. Usporedba metoda prema Smoljkić i prema van der Horstu, 4. materijal.....	49
Slika 63. Usporedba metoda prema Smoljkić i prema van der Horstu, 1. materijal, od sistole do dijastole.....	51
Slika 64. Usporedba metoda prema Smoljkić i prema van der Horstu, 2. materijal, od sistole do dijastole.....	51
Slika 65. Usporedba metoda prema Smoljkić i prema van der Horstu, 3. materijal, od sistole do dijastole.....	51
Slika 66. Usporedba metoda prema Smoljkić i prema van der Horstu, 4. materijal, od sistole do dijastole.....	51

## POPIS TABLICA

Tablica 1: Materijalni parametri korišteni za simulaciju HGO materijalnog modela.....	19
Tablica 2: Izračunati parametri za 1 inicijalnu pretpostavku i tlakove od 0,000-0,016 MPa...36	36
Tablica 3: Izračunati parametri za 1 inicijalnu pretpostavku i tlakove od 0,008-0,016 MPa...38	38
Tablica 4: Izračunati parametri za 3 inicijalne pretpostavku i tlakove od 0,000-0,016 MPa...41	41
Tablica 5: Izračunati parametri za 3 inicijalne pretpostavku i tlakove od 0,008-0,016 MPa...43	43
Tablica 6: Inicijalne pretpostavke.....	45
Tablica 7: Izračunati parametri za 3 inicijalne pretpostavku i tlakove od 0,000-0,016 MPa, usporedba neinvazivnih metoda.....	48
Tablica 8: Izračunati parametri za 3 inicijalne pretpostavku i tlakove od 0,008-0,016 MPa, usporedba neinvazivnih metoda.....	50

## POPIS OZNAKA

Oznaka	Jedinica	Opis
$A$	mm	- unutarnji polumjer u referentnoj konfiguraciji
$A_j^{\text{mod}}$	mm <sup>2</sup>	- površina u $j$ -tom koraku
$a$	mm	- unutarnji polumjer u trenutnoj konfiguraciji
$B$	mm	- vanjski polumjer u referentnoj konfiguraciji
$b$	mm	- vanjski polumjer u trenutnoj konfiguraciji
$\mathbf{b}$		- lijevi Cauchy-Greenov tenzor deformiranosti
$C_1$	MPa	- materijalna značajka NH i HGO modela
$D$		- materijalna značajka NH i HGO modela
$\mathbf{F}$		- gradijent deformiranja
$F_{\text{aniso}}$	N	- anizotropni dio reducirane sile
$F_{\text{HGO}}$	N	- reducirana sila HGO modela
$F_{\text{iso}}$	N	- izotropni dio reducirane sile
$F_j^{\text{mod}}$	N	- reducirana sila modela $j$ -tog koraka
$F_j^{\text{sim}}$	N	- reducirana sila simulacije $j$ -tog koraka
$I_1, I_4, I_6$		- invarijante desnog Cauchy-Greenovog tenzora deformiranosti
$I_{1b}, I_{2b}$		- invarijante lijevog Cauchy-Greenovog tenzora deformiranosti
$k_1, k_2$		- materijalne značajke HGO modela
$N$	N	- aksijalna sila
$p$		- Lagrangeov multiplikator
$P_j^{\text{mod}}$	MPa	- tlak modela $j$ -tog koraka
$P_j^{\text{sim}}$	MPa	- tlak simulacije $j$ -tog koraka
$R$	mm	- koordinata cilindričnog koordinatnog sustava u referentnoj konfiguraciji
$r$	mm	- koordinata cilindričnog koordinatnog sustava u trenutnoj konfiguraciji
$t$	s	- vrijeme
$\mathbf{u}$		- vektor pomaka
$W$	J	- funkcija energije deformiranja
$W_{\text{aniso}}$	J	- anizotropni dio funkcije energije deformiranja
$W_{\text{HGO}}$	J	- funkcija energije deformiranja HGO modela
$W_{\text{HGO}}$	J	- izotropni dio funkcije energije deformiranja
$W_{\text{NH}}$	J	- funkcija energije deformiranja NH modela
$w_p, w_f, w_{\psi_1}$		- težinski faktori
$w_{\psi_2}, w_F$		

$\mathbf{X}$		-vektor položaja u referentnoj konfiguraciji
$\mathbf{x}$		-vektor položaja u trenutnoj konfiguraciji
$X_1, X_2, X_3$	mm	- komponente vektora položaja u referentnoj konfiguraciji
$x_1, x_2, x_3$	mm	- komponente vektora položaja u trenutnoj konfiguraciji
$Z$	mm	- koordinata cilindričnog koordinatnog sustava u referentnoj konfiguraciji
$z$	mm	- koordinata cilindričnog koordinatnog sustava u trenutnoj konfiguraciji
$\alpha$	°	- kut
$\Theta$	°	- koordinata cilindričnog koordinatnog sustava u referentnoj konfiguraciji
$\vartheta$	°	- koordinata cilindričnog koordinatnog sustava u trenutnoj konfiguraciji
$\kappa$		- materijalna značajka HGO modela
$\lambda_r, \lambda_\vartheta, \lambda_z$		- istežanje u smjerovima osi cilindričnog koordinatnog sustava
$\sigma$		- Cauchyjev tenzor naprežanja

## SAŽETAK

Cilj ovog rada je razviti numeričke te usporediti točnost neinvazivnih metoda računanja parametara materijala arterijske stijenke na temelju rezultata virtualnog eksperimenta. Metodom konačnih elemenata pomoću programskog paketa *Abaqus* simulirano je napuhivanje arterije tlakom uz konstantno aksijalno predistezanje. Na temelju rezultata simulacije zatim su nelinearnom metodom najmanjih kvadrata pomoću računalnog alata *Octave* izračunati parametri materijala. Verifikacijski, izveden je virtualni eksperiment te su određeni parametri materijala za *Neo Hookeov* materijalni model, uz provjeru utjecaja nepoznavanja pojedinih parametara te uz provjeru utjecaja razmatranog raspona tlaka. Zatim je izveden virtualni eksperiment za *Holzappel-Gasser-Ogden* materijalni model, utvrđen je utjecaj početnih pretpostavki na točnost rezultata te je utvrđen utjecaj nepoznavanja pojedinih parametara na točnost rezultata. Uspoređene su dvije predložene neinvazivne metode koje koriste dodatne fiziološke uvjete sa referentnom neinvazivnom metodom koja koristi samo ovisnost tlaka o trenutnom unutarnjem promjeru.

Ključne riječi: anizotropnost, hiperelastičnost, *neo-Hooke*, *Holzappel-Gasser-Ogden*, metoda konačnih elemenata, arterijska stijenka, parametri materijala

## SUMMARY

The aim of this paper is to develop numerical procedure and compare non-invasive methods of calculating the parameters of the arterial wall material based on the results of a virtual *in silico* experiment. Using the finite element method using the *Abaqus* software package, the inflation of the artery with internal pressure with constant axial prestretching was simulated. Based on the results of the simulation, the parameters of the material were then calculated using the nonlinear least squares method using *Octave* computer program. For verification, a virtual experiment was performed and the material parameters for *Neo Hooke* material model were determined, while determining the influence of ignorance of certain parameters and the influence of the considered pressure range.

Then a virtual experiment was performed for the *Holzappel-Gasser-Ogden* material model. The influence of the initial assumptions on the accuracy of the results and the influence of ignorance of certain parameters on the accuracy of the results were determined. The two proposed non-invasive methods that use additional physiological conditions were compared with the reference non-invasive method that only uses the pressure dependence on the current internal diameter.

Keywords: anisotropy, hyperelasticity, *neo-Hooke*, *Holzappel-Gasser-Ogden*, finite element method, arterial wall, material parameters

## 1. Uvod

U strojarstvu, poznavanje svojstava materijala od ključne je važnosti, kako u procesima konstruiranja i izrade dijelova, tako i u analizi oštećenja na gotovim dijelovima. Mnogi tipični tehnički materijali, primjerice metali, keramika i neki polimeri (npr. smole), generalno pokazuju linearno elastično ponašanje otprilike do loma ili do pojave plastičnih deformacija, što znači da kod takvih materijala deformacije rastu linearno s naprezanjima. S druge strane, neki materijali, poput većine polimera (npr. gume) pokazuju nelinearno ponašanje već u elastičnom području.

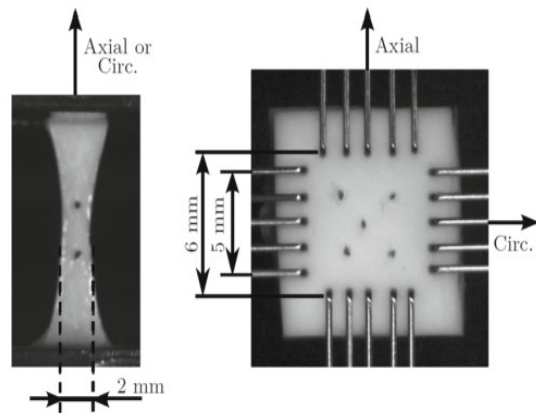
Navedeni materijali tipično pokazuju ista svojstva u svim smjerovima, odnosno, izotropni su. No neki materijali, primjerice drvo ili vlaknima ojačani kompoziti, pokazuju različite krutosti ovisno o smjeru opterećivanja. Takve materijale nazivamo anizotropnima.

Arterije i vene u ljudskom tijelu pokazuju istovremeno nelinearno (hiperelastično) ponašanje i anizotropnost. Dok se linearno elastično ponašanje materijala može opisati sa dva parametra, za složeno ponašanje arterija, je fenomenološki (odnosno temeljem histološke analize strukture tkiva) razvijen Holzapfel-Gasser-Ogden materijalni model, koji iziskuje šest parametara [1].

Mehanička svojstva krvnih žila razlikuju se od osobe do osobe, promatrane lokacije, a ovise i o raznim faktorima. Očekivano ponašanje ovisi o dobi i spolu osobe, a veliki utjecaj mogu imati razne bolesti ili patološka stanja krvnih žila (primjerice ateroskleroza). Upravo iz tog razloga, precizno određivanje parametara materijala krvnih žila može biti koristan alat pri dijagnosticiranju bolesti krvnih žila. Također, poznavanje materijalnih parametara krvnih žila važno je kod izvođenja određenih medicinskih zahvata [2].

Precizno određivanje svojstava krvnih žila moguće je (i tipično se radi) invazivnim ispitivanjima, koja zahtijevaju operativni zahvat i uzimanje dijela tkiva iz pacijenta. Iz izrezanog tkiva se mogu izraditi ispitni uzorci za *in vitro* ispitivanje mehaničkih svojstava arterije, prikazani na slici 1. Ovakvo ispitivanje međutim nije uvijek moguće i nije pogodno za planiranje liječenja. S druge strane, problem neinvazivnih metoda je relativno velik broj nepoznanica koje se ne mogu izmjeriti, npr. nepoznavanje točne neopterećene geometrije žile te nepoznavanje točnih opterećenja i polja pomaka. Neinvazivne metode stoga bi bile bolje kad bi davale točne rezultate.

U ovom radu, napravljene su usporedbe pojedinih neinvazivnih metoda određivanja svojstava krvnih žila te njihova verifikacija virtualnim *in silico* eksperimentima, u kojim se numerički pomoću konačnih elemenata simulira dvoosno ekseperimentalno ispitivanje.



Slika 1. Primjer jednoosnog (lijevo) i dvoosnog (desno) ispitivanja uzorka arterije [2]



## 2. Razmatranja o arterijama

Arterije u ljudskom tijelu građene su od tri sloja. Unutarnji sloj, ili intima, vanjski sloj, ili adventicia, a između njih nalazi se medija.

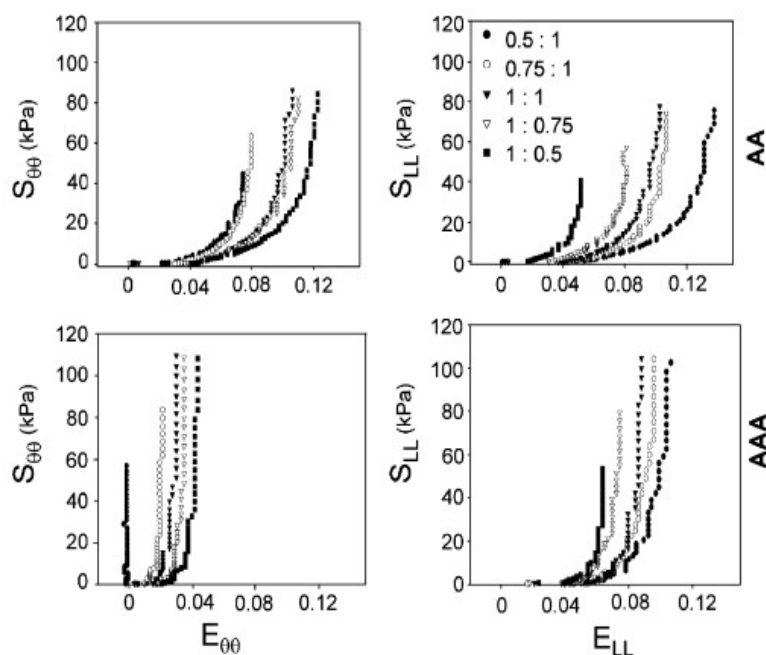
Intima je glatki sloj na unutrašnjosti arterije, a njezina relativna debljina u odnosu na ostale dimenzije žile značajno varira sa starosti. Ima važnu ulogu u strujanju krvi, a njen doprinos krutosti žile ovisi uvelike o relativnoj debljini.

Medija je građena od glatkih mišića, kolagena i elastina. Njezini konstituenti posloženi su u spiralu malog nagiba, što mediji osigurava veliku nosivost u cirkularnom smjeru.

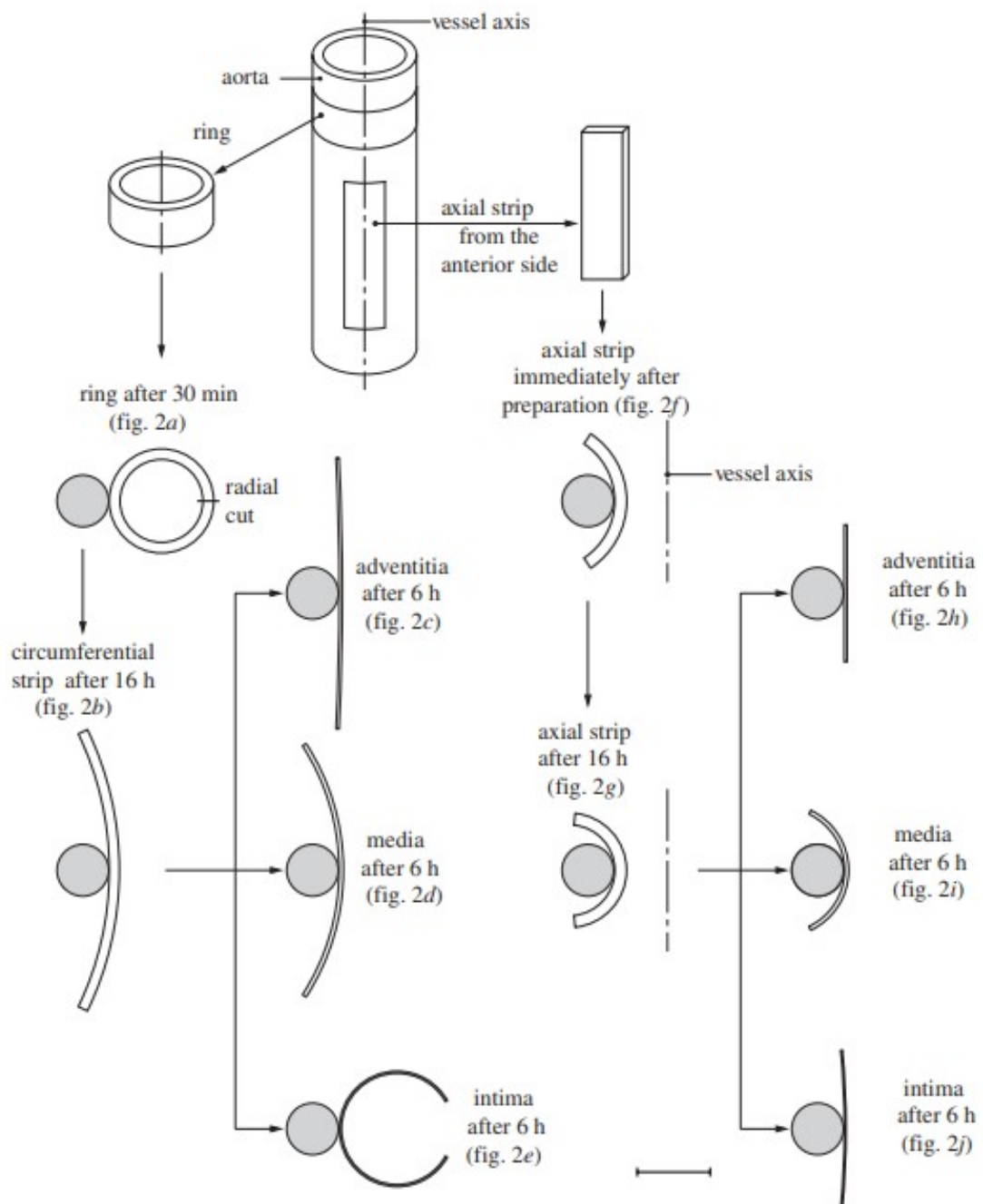
Adventicija se sastoji od elastične matrice kompozitnog materijala, i krutih kolagenih vlakana. Kolagena vlakna adventicije posložena su u dvije familije spiralno orijentiranih vlakana [3].

U neopterećenom stanju arterije, unutar tri sloja postoje rezidualna naprezanja. Dosadašnja eksperimentalna i numerička istraživanja i matematičke analize pokazali su da ta naprezanja značajno utječu na ponašanje arterija. Zaostala naprezanja očituju se u činjenici da se segmenti arterije „otvaraju” nakon izrezivanja, kao što je prikazano je na slici 3. Samo otvaranje segmenta ne govori o iznosu unutarnjeg naprezanja, no moguće ga je računski odrediti iz podataka dobivenih *in vitro* eksperimentima (poznatih kuteva otvaranja i mehaničkih svojstava) [4]. Tako izračunata zaostala naprezanja te deformacije uslijed istih po debljini arterije prikazana su grafički na slici 4.

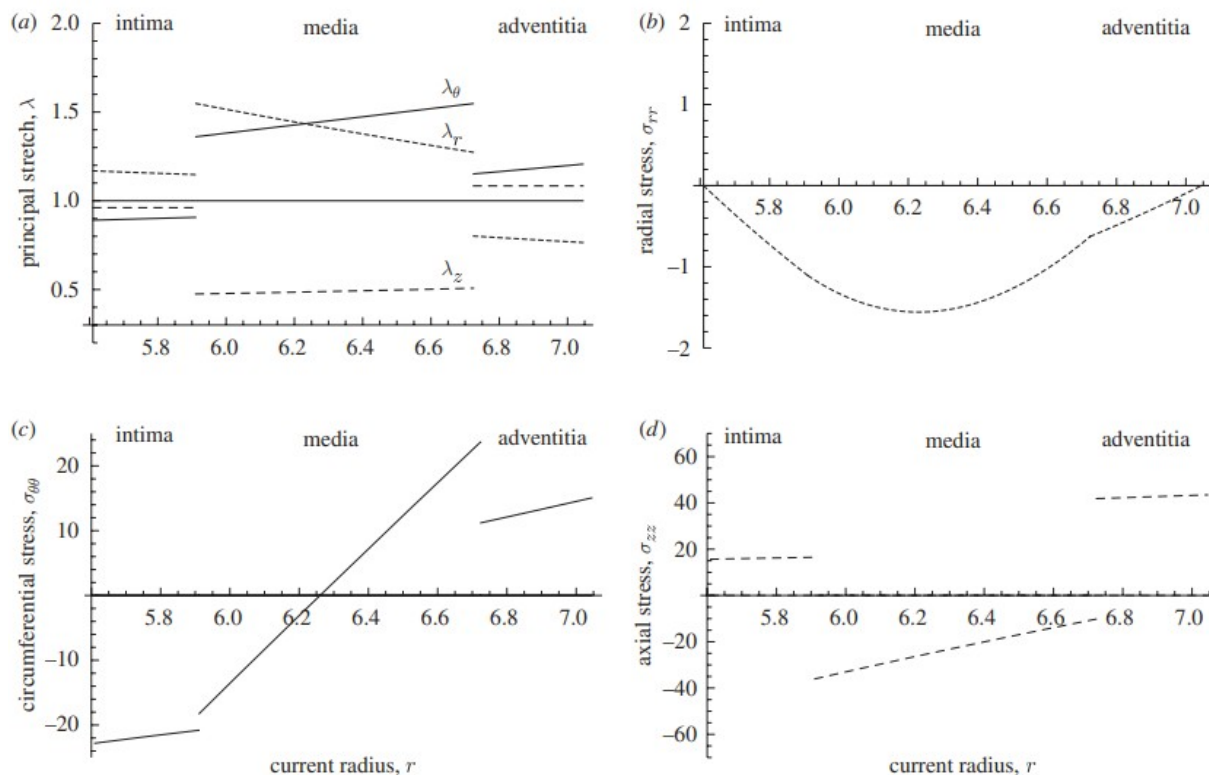
Ukupna elastičnost arterije, osim što ovisi od osobe do osobe, generalno pada s životnom dobi, a pojedine bolesti (npr. ateroskleroza) dodatno povećavaju krutost. Na slici 2. prikazani su grafovi ovisnosti naprezanja o deformaciji za abdominalnu aortu (AA) i aneurizmu abdominalne aorte (AAA).



Slika 2. Grafovi ovisnosti naprezanja o deformaciji za abdominalnu aortu (gore) i aneurizmu abdominalne aorte (dolje), preuzeto iz [5]



Slika 3. Kutevi otvaranja za cijelu aortu i pojedinačne slojeve za cirkularni uzorak (prsten) i longitudinalni uzorak (aksijalna traka), preuzeto iz [4]



Slika 4. Zaostalo glavno istezanj (a), te zaostala radijalna (b), cirkularna (c) i aksijalna (d) naprezanja u arterijskoj stijenci, preuzeto iz [4]

### 3. Neinvazivne *in vivo* metode mjerenja tlaka i promjera žile

Neinvazivna medicinska radiološka mjerenja se mogu osigurati ultrazvukom, magnetskom rezonancom (MR) ili kompjuteriziranom tomografijom (CT). Za određivanje mehaničkih svojstava je potrebno imati 4D snimanja (3D+vrijeme) kroz srčani ciklus. U slučaju ultrazvuka, pomaci su određuju „speckle tracking“ algoritmima, odnosno tehnike koja određuje kretanje tkiva korištenjem prirodnog uzorka mrlja u tkivu. Kod CT slika se pomaci tijekom srčanog ciklusa određuju pomoću algoritma praćenja površine. Za sve tri radiološke dijagnostičke metode postoje metode određivanja heterogene debljine žile [6].

Standardno mjerenje krvnog tlaka na zapešću ili nadlaktici ne daje nužno točne podatke o tlaku unutar promatrane krvne žile. Također, takvo mjerenje daje podatke samo o sistoli i dijastoli, a ne o cijelom ciklusu. Za točnije podatke o sistoli i dijastoli unutar srca se može koristiti elektrokardiogram (EKG). Međutim, za minimalno invazivna mjerenja tlaka unutar arterija potrebno je koristiti kardiološki kateter opremljenim senzorom tlaka.

Potrebno je uočiti da su metode mjerenja promjera (odnosno geometrije) i krvnog tlaka tijekom srčanog ciklusa ne zavisne te je potrebna ručna sinkronizacija *in vivo* tlakova i promjera kao dio naknadne obrade podataka [7].

## 4. Materijalni modeli

Prije definiranja materijalnih modela, potrebno je objasniti korištene osnovne principe i pojmove mehanike kontinuuma. Kontinuum je idealizacija materije u kojoj se ne uzima u obzir njezina građa od atoma, odnosno pojedinačnih čestica, već se pretpostavlja kontinuirana raspodjela materije unutar određenog volumena. Ta pretpostavka ne može opisati ponašanje atoma ili molekula, no na makroskopskoj razini predstavlja vrlo korisno matematičko pojednostavljenje materije jer omogućava korištenje infinitezimalnog računa na način na koji to inače ne bi bilo moguće. Mehanika kontinuuma stoga je grana mehanike koja proučava pomake i deformacije deformabilnih tijela (čvrstih, tekućih ili plinovitih) pod pretpostavkom da su ona građena od kontinuuma [8].

Budući da u općem slučaju pojedina točka kontinuuma može uslijed deformiranja ili pomaka krutog tijela poprimiti različite položaje u globalnom koordinatnom sustavu, uvodi se pojam referentne konfiguracije, kako bi se svaka točka kontinuuma mogla jednoznačno definirati prostornim koordinatama. Referentna konfiguracija obično se uzima u neopterećenom stanju, a koordinate u referentnoj konfiguraciji, u Kartezijevom koordinatnom sustavu dane su vektorom položaja  $\mathbf{X}$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}. \quad (4.1)$$

U općem slučaju, vektor položaja u trenutnoj konfiguraciji  $\mathbf{x}$  funkcija je vektora položaja u referentnoj konfiguraciji i vremena  $t$

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t). \quad (4.2)$$

Vektor pomaka definira se kao razlika vektora položaja u trenutnoj konfiguraciji i vektora položaja u referentnoj konfiguraciji

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X}. \quad (4.3)$$

Veza elementarnih duljina u referentnoj i trenutnoj konfiguraciji dana je preko diferencijala pomaka izrazom

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} d\mathbf{X}, \quad (4.4)$$

gdje je  $\mathbf{F}$  gradijent deformiranja u Kartezijevim koordinatama, definiran kao

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

Budući da je u sklopu ovog rada arterija modelirana kao cirkularno simetrična cijev koja je cirkularno simetrično opterećena, gradijent deformiranja prikazan je i u cilindričnim koordinatama izrazom

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial R} & \frac{\partial r}{R \partial \Theta} & \frac{\partial r}{\partial Z} \\ r \frac{\partial \vartheta}{\partial R} & r \frac{\partial \vartheta}{R \partial \Theta} & r \frac{\partial \vartheta}{\partial Z} \\ \frac{\partial z}{\partial R} & \frac{\partial z}{R \partial \Theta} & \frac{\partial z}{\partial Z} \end{bmatrix}. \quad (4.6)$$

U izrazu (4.6)  $R$ ,  $\Theta$  i  $Z$  predstavljaju referentne osi, dok su  $r$ ,  $\vartheta$  i  $z$  osi u trenutnoj konfiguraciji. Izrazi (4.5) i (4.6) ujedno predstavljaju i *Jacobijeve* matrice u Kartezijevim, odnosno cilindričnim koordinatama.

Za hiperelastične materijale, budući da ne vrijedi pretpostavka o malim deformacijama, naprezanje je uputno izraziti preko *Cauchyjevog* tenzora naprezanja, koji se potpuno odnosi na trenutnu konfiguraciju. *Cauchyjev* tenzor naprezanja za hiperelastične materijale dan je izrazom

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{2}{\det \mathbf{F}} \mathbf{F} \cdot \frac{\partial W}{\partial \mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^T, \quad (4.7)$$

gdje  $W$  predstavlja unutarnju energiju deformiranja, koja je za neviskozne materijale funkcija polja deformacije ovisna o samom materijalu.

U korištenim modelima pretpostavljena je nestlačivost materijala arterije, a za nestlačive kontinuumne, kod kojih nema promjene volumena, vrijedi da je determinanta gradijenta deformiranja jednaka jedinici

$$\det \mathbf{F} = 1. \quad (4.8)$$

*Cauchyjev* tenzor naprezanja za nestlačive hiperelastične materijale može se izraziti kao

$$\boldsymbol{\sigma} = 2 \left( \frac{\partial W}{\partial I_{1b}} \mathbf{b} - \frac{\partial W}{\partial I_{2b}} \mathbf{b}^{-1} \right) - p \mathbf{I}, \quad (4.9)$$

gdje je  $p$  Lagrangeov multiplikator,  $\mathbf{b}$  lijevi *Cauchy – Greenov* tenzor deformiranosti definiran kao

$$\mathbf{b} = \mathbf{F} \mathbf{F}^T, \quad (4.10)$$

a  $I_{1b}$  i  $I_{2b}$  prva i druga invarijanta lijevog *Cauchy – Greenovog* tenzora deformiranosti, dani izrazima

$$I_{1b} = \text{tr}(\mathbf{b}) \quad \text{i} \quad (4.11)$$

$$I_{2b} = \frac{1}{2} [\text{tr}^2(\mathbf{b}) - \text{tr}(\mathbf{b}^2)],$$

a  $\mathbf{I}$  je jedinična matrica.

U izrazima (4.11), funkcija  $\text{tr}(\cdot)$  predstavlja trag matrice, odnosno, zbroj članova glavne dijagonale.

Geometrijska analiza deformiranja cilindra aksijalnom silom i tlakom daje opis deformiranja sljedećim funkcijama:

$$\begin{aligned} r &= f(R), \\ \vartheta &= \Theta \text{ i} \\ z &= \lambda_z Z. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Uvrštavanjem u (4.6) se dobije

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial Z} &= \frac{z}{Z} \\ \frac{\partial \vartheta}{\partial \Theta} &= 1, \\ \frac{\partial r}{\partial \Theta} &= 0, \\ \frac{\partial z}{\partial \Theta} &= 0, \\ \frac{\partial \vartheta}{\partial Z} &= 0, \\ \frac{\partial \vartheta}{\partial R} &= 0, \\ \frac{\partial r}{\partial Z} &= 0 \text{ i} \\ \frac{\partial z}{\partial R} &= 0. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Prema tome, gradijent deformiranja ostaje dijagonalna matrica s 3 glavna istežanja. Iz uvjeta nekompresibilnosti slijedi

$$\lambda_r \cdot \lambda_\vartheta \cdot \lambda_z = 1, \quad (4.14)$$

odnosno

$$\lambda_r = \frac{1}{\lambda_\vartheta \cdot \lambda_z}. \quad (4.15)$$

Za cilindar koji predstavlja krvnu žilu koji će biti opterećen aksijalnom silom i tlakom, neće doći do kutnih deformacija i gradijent deformiranja će biti predstavljen dijagonalnom matricom. Dijagonalni članovi će predstavljati glavna istežanja koja su u cilindričnom koordinatnom sustavu definirana kao

$$\begin{aligned} \lambda_r &= \frac{\partial r}{\partial R}, \\ \lambda_\vartheta &= \frac{r \partial \vartheta}{R \partial \Theta} \text{ i} \\ \lambda_z &= \frac{\partial z}{\partial Z}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Uvrštavanjem (4.16), (4.13) i (4.15) u (4.6), može se izvesti

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \lambda_r & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_\theta & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R} & 0 & 0 \\ \frac{r}{R} \cdot \frac{z}{Z} & & \\ 0 & \frac{r}{R} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{z}{Z} \end{bmatrix}. \quad (4.17)$$

U sklopu ovog rada, arterije su modelirane *Neo-Hookeovim* i *Holzappel-Gasser-Ogden* materijalnim modelima.

## 4.1. *Neo-Hookeov* materijalni model

*Neo-Hookeov* (u nastavku NH) materijalni model definiran je kao hiperelastični izotropni materijalni model kojem energija deformiranja zadovoljava funkciju

$$W_{\text{NH}} = C_1(I_1 - 3), \quad (4.18)$$

gdje je  $C_1$  parametar materijala, a  $I_1$  predstavlja prvu invarijantu desnog *Cauchy-Greenovog* tenzora deformiranosti, definiranog izrazom

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}. \quad (4.19)$$

Budući da je iz (4.17) vidljivo da je matrica gradijenta deformiranja za razmatrani slučaj simetrična, iz (4.10) i (4.19) jasno je da su lijevi i desni *Cauchy-Greenov* tenzor jednaki te stoga imaju i jednake invarijante. Imajući to na umu, deriviranjem izraza (4.18) po prvoj i drugoj invarijanti desnog *Cauchy-Greenovog* tenzora deformiranosti, dobivaju se izrazi

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_{\text{NH}}}{\partial I_1} &= C_1 \quad \text{i} \\ \frac{\partial W_{\text{NH}}}{\partial I_2} &= 0. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Uvrštavanjem (4.20) u (4.9) i sređivanjem, dobija se konačni izraz za *Cauchyjev* tenzor naprezanja NH materijalnog modela

$$\boldsymbol{\sigma} = 2C_1 \mathbf{b} - p\mathbf{I}. \quad (4.21)$$

NH materijalni model nije u stanju opisati anizotropno ponašanje te stoga nije podoban za modeliranje ponašanja arterije, no s obzirom da je dio *Holzappel-Gasser-Ogden* materijalnog modela, odabran je za verifikacijski primjer postupka određivanja parametara materijala.

## 4.2. *Holzappel-Gasser-Ogden* materijalni model

*Holzappel-Gasser-Ogden* (u nastavku HGO) materijalni model također je hiperelastičan materijalni model, no za razliku od NH materijalnog modela, u stanju je opisati anizotropno ponašanje. Energija deformiranja HGO modela dana je izrazom

$$W_{\text{HGO}} = W_{\text{iso}} + W_{\text{aniso}}, \quad (4.22)$$



gdje je  $W_{\text{iso}}$  odgovara izrazu za energiju deformiranja NH materijalnog modela i opisuje ponašanje izotropne matrice od elastina

$$W_{\text{iso}} = C_1(I_1 - 3), \quad (4.23)$$

a  $W_{\text{aniso}}$  predstavlja anizotropan dio izraza za koji opisuje doprinos kolagenih vlakana, a za nestlačiv slučaj je dan izrazom

$$W_{\text{aniso}} = \frac{k_1}{2k_2} \sum_{i=4,6} \{ \exp[k_2(I_i - 1)^2] - 1 \}, \quad (4.24)$$

gdje su  $k_1$  i  $k_2$  parametri materijala, a  $I_4$  i  $I_6$  invarijante desnog *Cauchy-Greenovog* tenzora deformiranosti (projekcija tenzora na smjer vlakana)

$$I_i = \lambda_\vartheta^2 \cos^2 \alpha_i + \lambda_z^2 \sin^2 \alpha_i. \quad (4.25)$$

Ovako definiran materijal predstavlja kompozitni materijal čiju matricu čini materijal koji se ponaša prema NH materijalnom modelu (elastin), a ojačanja su dvije familije vlakana postavljene pod kutem  $\pm\alpha$  u odnosu na uzdužnu os arterije.

U HGO materijalnom modelu  $C_1$  predstavlja krutost matrice,  $k_1$  krutost vlakana, a  $k_2$  predstavlja mjeru očvršćenja vlakana pri povećanju naprezanja i nema mjernu jedinicu. Osim spomenutih parametara, u modelu se pojavljuju još i  $\kappa$  i  $D$ .  $\kappa$  je parametar kojim se uzima u obzir disperzija vlakana. Za minimalnu vrijednost parametra  $\kappa=0$  (koji je u ovom radu usvojen) nema uopće disperzije vlakana, a za maksimalnu vrijednost parametra  $\kappa=1/3$ , radi se o potpunoj disperziji vlakana.  $D$  je parametar kojim se uzima u obzir stlačivost materijala, a za vrijednost koja je usvojena u ovom radu  $D=0$ , materijal se ponaša idealno nestlačivo.

Prema tome,  $C_1$ ,  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $\pm\alpha$ ,  $\kappa$  i  $D$  predstavljaju šest parametara kojima je definirano ponašanje materijala prema HGO modelu.

Uvrštavanjem (4.23) i (4.24) u (4.22) izvodi se konačni izraz za energiju deformiranja HGO materijalnog modela

$$W_{\text{HGO}} = C_1(I_1 - 3) + \frac{k_1}{2k_2} \sum_{i=4,6} \{ \exp[k_2(I_i - 1)^2] - 1 \}, \quad (4.26)$$

$$I_i = \lambda_\vartheta^2 \cos^2 \alpha_i + \lambda_z^2 \sin^2 \alpha_i.$$

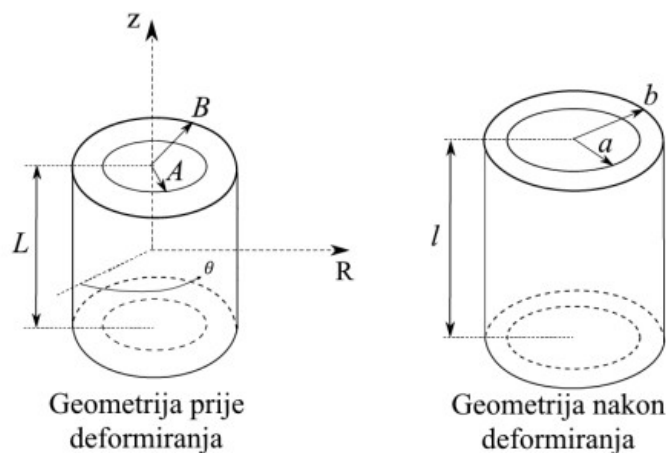
## 5. Postupak određivanja materijalnih parametara

### 5.1. Definiranje geometrije razmatrane arterije

Materijalna karakterizacija se temelji na minimiziranju greške između mjerenih podataka i modela. Za jednoosna i dvoosna ispitivanja se iz mjerenih pomaka jednostavno mogu izračunati istežanja u Kartezijevom koordinatnom sustavu, a iz sila i istežanja se mogu procijeniti eksperimentalna naprezanja. Usporedbom mjerenih i modeliranih naprezanja se, najčešće metodom najmanjih kvadrata, vrlo jednostavno odrede materijalni parametri.

Za neinvanzivna ispitivanja na arterijama, kao i za ispitivanje istežanje-tlak, kod kojih se cijev opterećuje tlakom uz konstantno aksijalno istežanje, cirkularno (a posljedično i radijalno) istežanje nije trivijalno izračunati. Također, za razliku od dvoosnih ispitivanja, istežanja nisu konstantna po debljini cijevi. Da bi se moglo izračunati cirkularno istežanje ( $\lambda_\theta = r/R$ ), potrebno je znati referentni i trenutni radijus u svakoj točki.

Arterija je u referentnoj (neopterećenoj) konfiguraciji modelirana kao cijev duljine  $L$ , vanjskog polumjera  $B$  i unutarnjeg polumjera  $A$ . U trenutnoj (deformiranoj) konfiguraciji, duljina cijevi iznosi  $l$ , vanjski promjer je  $b$ , a unutarnji promjer je iznosa  $a$ . Cijev u referentnoj i trenutnoj konfiguraciji prikazana je na slici 5.



Slika 5. Arterija u referentnoj (lijevo) i trenutnoj (desno) konfiguraciji, preuzeto iz [9]

Zbog nestlačivosti materijala, radijalnu koordinatu u trenutnoj konfiguraciji moguće je izračunati pomoću izraza

$$r^2 = a^2 + \frac{R^2 - A^2}{\lambda_z}. \quad (5.1)$$

Uvrštavanjem vrijednosti vanjskog promjera u referentnoj konfiguraciji u izraz (5.1) i korjenovanjem, izvodi se izraz za vanjski promjer u trenutnoj konfiguraciji

$$b = \sqrt{a^2 + \frac{R^2 - A^2}{\lambda_z}}. \quad (5.2)$$

Usvaja se pretpostavka da je duž promatranog segmenta arterije u pojedinom trenutku aksijalna sila konstantna, a na arteriju ne djeluju momenti torzije. Stoga, i zbog pretpostavke o dvije familije vlakana pod kutevima  $\pm\alpha$ , vrijede izrazi

$$\vartheta = \Theta \text{ i} \quad (5.3)$$

$$z = \lambda_z Z . \quad (5.4)$$

Uvrštavanjem vrijednosti duljine cijevi u referentnoj konfiguraciji u izraz (5.4) izvodi se i

$$l = \lambda_z L . \quad (5.5)$$

## 5.2. Određivanje funkcije cilja

Kako bi se iz simulacije (ili eksperimenta) odredili parametri materijala, potrebno je odrediti funkciju cilja koja će sadržavati vrijednosti uzete iz rezultata (virtualnog) eksperimenta te od njih oduzeti iste veličine, ali izračunate pomoću jednadžbi materijalnog modela. Zatim je potrebno nekom od minimizacijskih metoda pronaći minimum funkcije cilja.

U ovom radu, najprije je korištena i analizirana referentna funkcija cilja

$$\min \sum_{j=1}^n \left[ (P_j^{\text{mod}} - P_j^{\text{sim}})^2 + \left( \frac{F_j^{\text{mod}}}{A_j^{\text{mod}}} - \frac{F_j^{\text{sim}}}{A_j^{\text{mod}}} \right)^2 \right], \quad (5.6)$$

koja je zatim uspoređena s drugim predloženim minimizacijskim funkcijama iz literature. S obzirom na to da se u ovom problemu radi o troosnom stanju naprezanja, uspoređuju se mjerene vrijednosti (tlak i sila). Treba primijetiti da se tijekom ispitivanja iszenaje-tlak mogu mjeriti obje veličine, međutim u neinvazivnim ispitivanjima na arterijama promjena sile nije poznata.

U (5.6),  $P_j^{\text{sim}}$  predstavlja tlak u  $j$ -tom koraku kako je zadan u simulaciji,  $P_j^{\text{mod}}$  predstavlja tlak izračunat za  $j$ -ti korak prema korištenom modelu.  $n$  označava ukupan broj koraka koji se uzimaju u obzir tijekom određivanja parametara. Analogno,  $F_j^{\text{sim}}$  reduciranu silu u  $j$ -tom koraku zadanu u simulaciji, a  $F_j^{\text{mod}}$  predstavlja reduciranu silu izračunatu za  $j$ -ti korak prema korištenom modelu.  $A_j^{\text{mod}}$  je površina poprečnog presjeka arterije u  $j$ -tom koraku, a računa se prema izrazu za površinu kružnog vijenca.

$P_j^{\text{mod}}$  je dan izrazom

$$P_j^{\text{mod}} = \int_a^b \lambda_\vartheta \frac{\partial W}{\partial \lambda_\vartheta} \frac{dr}{r} . \quad (5.7)$$

Reducirana sila  $F_j^{\text{mod}}$  definirana je izrazom

$$F_j^{\text{mod}} = N - \pi a^2 P_j^{\text{mod}} , \quad (5.8)$$

gdje je  $N$  aksijalna sila u arteriji, koja se računa prema izrazu

$$N = \pi \int_a^b \left( 2 \lambda_z \frac{\partial W}{\partial \lambda_z} - \lambda_\vartheta \frac{\partial W}{\partial \lambda_\vartheta} \right) r dr + \pi a^2 P_j^{\text{mod}} . \quad (5.9)$$

U sklopu ovog rada, minimum funkcije opisan jednadžbom (5.6) pronađen je pomoću računalnog alata *Octave*, primjenom *lsqnonlin* funkcije, koja koristi metodu najmanjih kvadrata kako bi odredila minimum nelinearnih funkcija.

### 5.3. Određivanje tlaka modela za NH materijalni model

Uvrštavanjem prve invarijante desnog *Cauchy-Greenovog* tenzora deformiranosti te jednadžbe (4.15) u izraz za energiju deformiranja NH modela (4.18), izvodi se

$$W_{\text{NH}} = C_1 \left( \frac{1}{\lambda_{\varphi}^2 \cdot \lambda_z^2} + \lambda_{\varphi}^2 + \lambda_z^2 - 3 \right), \quad (5.10)$$

čijim se parcijalnim deriviranjem po  $\partial \lambda_{\varphi}$  dobije izraz

$$\frac{\partial W_{\text{NH}}}{\partial \lambda_{\varphi}} = 2 C_1 \left( \lambda_{\varphi} - \frac{1}{\lambda_{\varphi}^3 \cdot \lambda_z^2} \right). \quad (5.11)$$

Uvrštavanjem (5.11) u izraz za tlak (5.7) moguće je izvesti izraz

$$P^{\text{mod}} = \int_a^b 2 C_1 \left( \lambda_{\varphi}^2 - \frac{1}{\lambda_{\varphi}^2 \cdot \lambda_z^2} \right) \frac{d r}{r}. \quad (5.12)$$

Uvrštavanjem izraza za  $\lambda_{\varphi}$  iz (4.17) i sređivanjem, izraz (5.12) moguće je transformirati u

$$P^{\text{mod}} = 2 C_1 \int_a^b \left( \frac{r^2}{R^2} - \frac{R^2}{\lambda_z^2 r^2} \right) \frac{d r}{r}. \quad (5.13)$$

Pomoću izraza (5.1), moguće je izraziti  $R^2$  kao funkciju  $r^2$

$$R^2 = A^2 + \lambda_z (r^2 - a^2) \quad (5.14)$$

Uvrštavanjem (5.14) u (5.13) te sređivanjem, izvodi se konačan oblik izraza za tlak NH materijalnog modela

$$P^{\text{mod}} = 2 C_1 \int_a^b \frac{\lambda_z^2 r^4 - [\lambda_z (r^2 - a^2) + A^2]^2}{\lambda_z^2 [A^2 + \lambda_z (r^2 - a^2)] r^3} d r. \quad (5.15)$$

### 5.4. Određivanje reducirane sile modela za NH materijalni model

U izrazu (5.9) za aksijalnu silu, osim već izračunate parcijalne derivacije energije deformiranja po  $\lambda_{\varphi}$  dane izrazom (5.11), javlja se i parcijalna derivacija energije deformiranja po  $\lambda_z$ . Deriviranjem izraza (5.10) po  $\lambda_z$  izvodi se

$$\frac{\partial W_{\text{NH}}}{\partial \lambda_z} = 2 C_1 \left( \lambda_z - \frac{1}{\lambda_{\varphi}^2 \cdot \lambda_z^3} \right). \quad (5.16)$$

Uvrštavanjem (5.11) i (5.16) u (5.9), te tako dobivenog izraza u (5.8) dobija se

$$F^{\text{mod}} = 2 \pi C_1 \int_a^b \left[ 2 \left( \lambda_z^2 - \frac{1}{\lambda_{\varphi}^2 \cdot \lambda_z^2} \right) - \left( \lambda_{\varphi}^2 - \frac{1}{\lambda_{\varphi}^2 \cdot \lambda_z^2} \right) \right] r d r. \quad (5.17)$$

Uvrštavanjem izraza za  $\lambda_{\varphi}$  iz (4.17) i sređivanjem, izraz (5.17) moguće je transformirati u

$$F^{\text{mod}} = 2 \pi C_1 \int_a^b \left( 2 \lambda_z^2 - \frac{r^2}{R^2} - \frac{R^2}{\lambda_z^2 r^2} \right) r d r. \quad (5.18)$$

## 5.5. Određivanje tlaka modela za HGO materijalni model

Budući da se kod HGO materijalni model energija deformiranja sastoji od izotropnog i anizotropnog dijela, tlak modela i reducirana sila će se također sastojati od izotropnog i anizotropnog dijela. Stoga vrijedi

$$P_{\text{HGO}} = P_{\text{iso}} + P_{\text{aniso}} . \quad (5.19)$$

Budući da  $W_{\text{iso}}$  HGO modela odgovara  $W_{\text{NH}}$ , izotropni pribrojnik tlaka HGO modela također će biti jednak tlaku NH modela

$$P_{\text{iso}} = 2C_1 \int_a^b \frac{\lambda_z^2 r^4 - [\lambda_z(r^2 - a^2) + A^2]^2}{\lambda_z^2 [A^2 + \lambda_z(r^2 - a^2)] r^3} dr . \quad (5.20)$$

Anizotropni pribrojnik tlaka HGO modela dobija se uvrštavanjem izraza (4.26) za  $W_{\text{aniso}}$  u (5.7). Sređivanjem tako dobivenog izraza dobiva se

$$W_{\text{aniso}} = \frac{k_1}{k_2} \{ \exp[k_2 (\lambda_\theta^2 \cos^2 \alpha + \lambda_z^2 \sin^2 \alpha - 1)^2] - 1 \} , \quad (5.21)$$

što se može transformirati u

$$W_{\text{aniso}} = \frac{k_1}{k_2} [ \exp(k_2 m) - 1 ] , \quad (5.22)$$

gdje je

$$m = \lambda_\theta^4 \cos^4 \alpha + 2 \lambda_\theta^2 \lambda_z^2 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha + \lambda_z^4 \sin^4 \alpha - 2 \lambda_\theta^2 \cos^2 \alpha - 2 \lambda_z^2 \sin^2 \alpha + 1 .$$

Deriviranjem izraza (5.22) po  $\lambda_\theta$  dobiva se

$$\frac{\partial W_{\text{aniso}}}{\partial \lambda_\theta} = k_1 [ 4 \lambda_\theta^3 \cos^4 \alpha + 2 \lambda_\theta (2 \lambda_z^2 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha - 2 \cos^2 \alpha) ] \cdot \exp(k_2 m) . \quad (5.23)$$

Uvrštavanjem (5.23) u (5.7) izvodi se izraz za anizotropni pribrojnik tlaka za HGO materijalni model

$$P_{\text{aniso}} = \int_a^b k_1 \frac{r^2}{R^2} \left( 4 \cos^4 \alpha \frac{r^2}{R^2} + 4 \cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha \lambda_z^2 - 4 \cos^2 \alpha \right) \cdot \exp \left[ k_2 \left( \cos^4 \alpha \frac{r^4}{R^4} + 2 \cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha \frac{r^2}{R^2} \lambda_z^2 + \sin^4 \alpha \lambda_z^4 - 2 \cos^2 \alpha \frac{r^2}{R^2} - 2 \sin^2 \alpha \lambda_z^2 + 1 \right) \right] \frac{dr}{r} . \quad (5.24)$$

## 5.6. Određivanje reducirane sile modela za HGO materijalni model

Reducirana sila je zbroj izotropnog i anizotropnog dijela. Stoga vrijedi

$$F_{\text{HGO}} = F_{\text{iso}} + F_{\text{aniso}} . \quad (5.25)$$

Kako bi bilo moguće odrediti reduciranu silu modela za HGO materijalni model, potrebno je odrediti parcijalnu derivaciju anizotropnog pribrojnika energije deformiranja po  $\lambda_z$ . Parcijalnim deriviranjem izraza (5.22) dobiva se izraz

$$\frac{\partial W_{\text{aniso}}}{\partial z} = k_1 [4 \lambda_z^3 \cos^4 \alpha + 2 \lambda_z (2 \lambda_g^2 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha - 2 \sin^2 \alpha)] \cdot \exp(k_2 m). \quad (5.26)$$

Iz (5.7) i (5.8) slijedi

$$F_j^{\text{mod}} = \pi \int_a^b \left( 2 \lambda_z \frac{\partial W}{\partial \lambda_z} - \lambda_g \frac{\partial W}{\partial \lambda_g} \right) r \, dr. \quad (5.27)$$

Uvrštavanjem (5.14), (5.23) i (5.26) u (5.27) i sređivanjem izraza, dobiva se izraz za anizotropni pribrojnik reducirane sile modela za HGO materijalni model

$$\begin{aligned} F_j^{\text{mod}} &= 8 \pi \int_a^b k_1 \lambda^2 \left( \sin^4 \alpha \lambda^2 + \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha \frac{r^2}{R^2} - \sin^2 \alpha \right) \cdot \\ &\cdot \exp \left[ k_2 \left( \cos^4 \alpha \frac{r^4}{R^4} + 2 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha \frac{r^2}{R^2} \lambda^2 + \sin^4 \alpha \lambda^4 - 2 \cos^2 \alpha \frac{r^2}{R^2} - 2 \sin^2 \alpha \lambda^2 + 1 \right) \right] r \, dr \\ &\quad - 4 \pi \int_a^b k_1 \frac{r^2}{R^2} \left( \cos^4 \alpha \frac{r^2}{R^2} + \cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha \lambda_z^2 - \cos^2 \alpha \right) \cdot \\ &\cdot \exp \left[ k_2 \left( \cos^4 \alpha \frac{r^4}{R^4} + 2 \cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha \frac{r^2}{R^2} \lambda_z^2 + \sin^4 \alpha \lambda_z^4 - 2 \cos^2 \alpha \frac{r^2}{R^2} - 2 \sin^2 \alpha \lambda_z^2 + 1 \right) \right] r \, dr \end{aligned} \quad (5.28)$$

## 6. Virtualni eksperiment

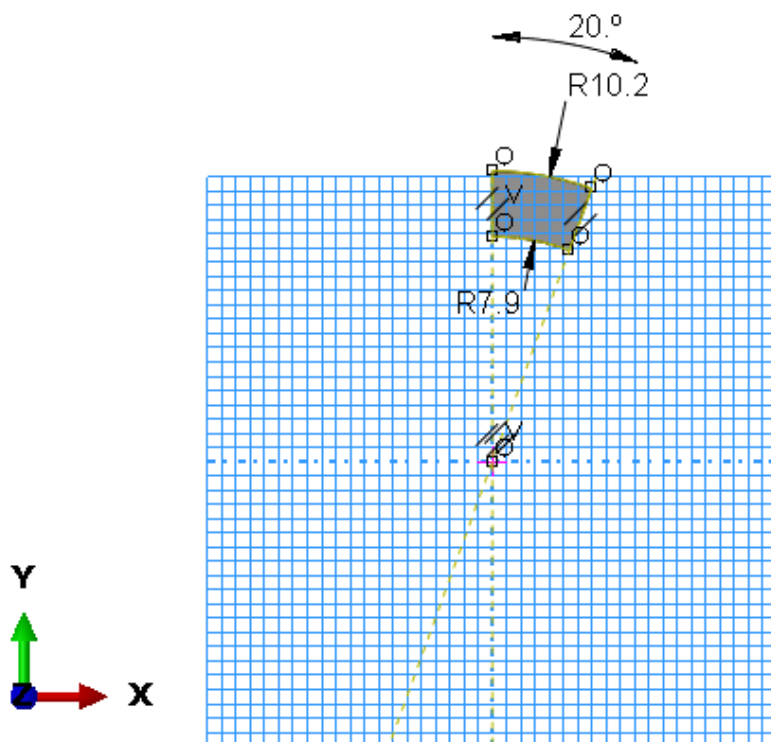
U radu će se koristiti virtualni istezanje-tlak eksperiment, odnosno simulacija provedena je metodom konačnih elemenata pomoću *Abaqus* programskog paketa. Prednost virtualnih eksperimenata je poznavanje materijalnih parametara, do kojih je potrebno doći materijalnom karakterizacijom.

Metoda konačnih elemenata numerička je metoda rješavanja problema polja. Zasniva se na diskretizaciji razmatranog područja na manje dijelove, tzv. konačne elemente.

### 6.1. Definiranje geometrije i mreže konačnih elemenata

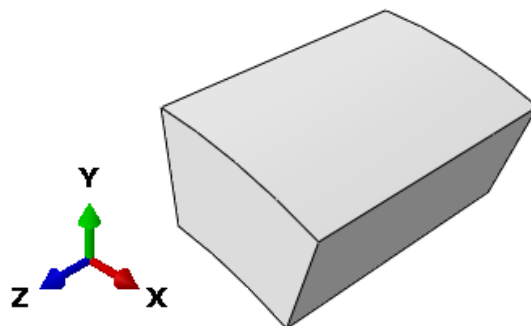
Radi smanjenja broja korištenih konačnih elemenata, nije modeliran cijeli presjek arterije, već samo njegov isječak, na koji je primijenjen rubni uvjet osne simetrije.

Kreiran je dio u 3D prostoru za modeliranje, deformabilnog tipa. Osnovna značajka oblika odabrana je kao *Solid*, odnosno čvrsto tijelo. Napravljena je skica presjeka u *x-y* ravnini, kako je prikazano na slici 6. Skiciran je isječak kružnog vijenca, vanjskog polumjera 10,2 mm, a unutarnjeg polumjera 7,9 mm. Ovi radijusi su odabrani kao prosječni unutarnji i vanjski radijus neopterećene aorte, odnosno izrezane iz tijela, prema [9]. Kut isječka zadan je kao  $20^\circ$ . Tako definirana skica zatim je ekstrudirana 5 mm u smjeru *z* osi. S obzirom na to da se sve veličine mijenjaju samo u radijalnom smjeru, kut i duljina isječka se mogu odabrati proizvoljno. Valja napomenuti da *Abaqus* radi u bezdimenzijskom obliku, bez mjernih jedinica, no u ovom radu pretpostavljen je mm kao mjerna jedinica duljine.



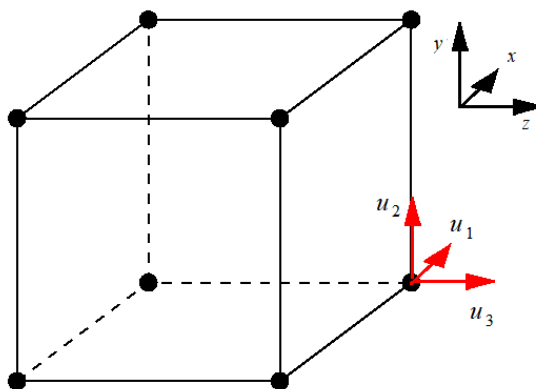
Slika 6. Modelirani isječak poprečnog presjeka arterije

Gotov kreiran dio nakon ekstruzije prikazan je na slici 7.



Slika 7. Modelirani isječak arterije

Dio je diskretiziran sa 7x8x10 mrežom konačnih elemenata. Korišteni su *Abaqusovi* C3D8H konačni elementi. Korišteni element je hibridni heksagonalni konačni element sa po jednim čvorom u svakom od 8 vrhova heksaedra. Svaki čvor ima 3 stupnja slobode gibanja, translacije u smjerovima koordinatnih osi. Budući da se radi o hibridnom elementu, osim stupnjeva slobode u čvorovima, korišteni element ima dodatan stupanj slobode koji se odnosi na tlak, što je važno kako bi se opisalo nestlačivo ponašanje razmatranog materijala. Kada ne bi postojao dodatan stupanj slobode vezan za tlak, radilo bi se o C3D8 konačnom elementu [10] [11]. Korišteni konačni element prikazan je na slici 8.

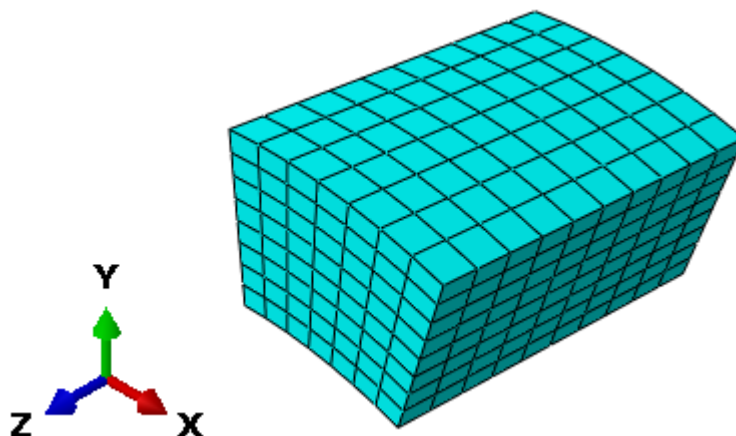


Slika 8. C3D8, odnosno C3D8H konačni element

Element ima ukupno 25 stupnjeva slobode (24 u čvorovima i jedan dodatni za tlak). Na slici je označen globalni koordinatni sustav te su crveno označeni stupnjevi slobode u jednom od čvorova.

Korištena mreža konačnih elemenata prikazana je na slici 9. Ova mreža je odabrana nakon analize konvergencije rezultata, s posebnom pažnjom na broj elemenata u radijalnom smjeru.





Slika 9. Korištena mreža konačnih elemenata

## 6.2. Zadavanje svojstva materijala

Najprije je provedena simulacija s NH materijalnim modelom. Kreiran je materijal, a od mehaničkih svojstava pridružena mu je hiperelastičnost. Odabrano je izotropno ponašanje materijala te je odabran potencijal energije deformiranja koji odgovara *Neo Hookeovom* materijalnom modelu. U *Abaqusu* su zadane vrijednosti materijalnih parametara

$$\begin{aligned} C10 &= 0,0563 \text{ MPa} \quad (6.1) \\ D1 &= 0 \end{aligned}$$

$C10$  parametar odgovara  $C_1$  parametru materijala definiranom u poglavlju 4.1., a izjednačavanje parametra  $D1$  sa nulom odgovara nestlačivom ponašanju materijala.

Nakon toga, provedene su simulacije s 4 različita materijala koji odgovaraju HGO materijalnom modelu. Kako bi se zadao HGO materijalni model, potrebno mu je opet pridružiti hiperelastičnost, no za razliku od prethodnog primjera, potrebno je odabrati anizotropno ponašanje materijala te potencijal energije deformiranja koji odgovara HGO materijalnom modelu (u *Abaqus* programskom paketu nazvan *Holzapfel*).

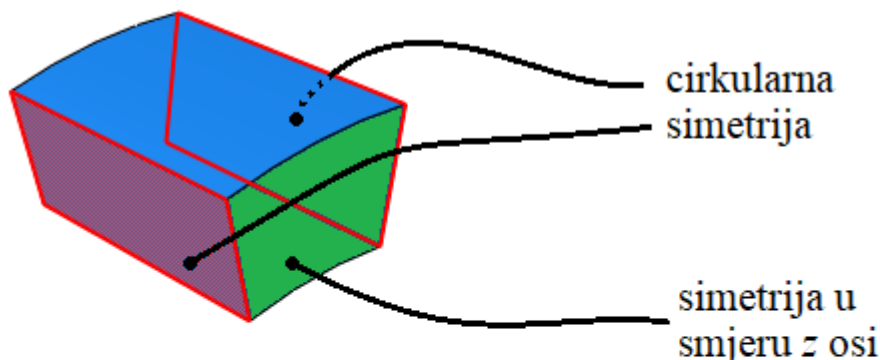
Tablica 1: Materijalni parametri korišteni za simulaciju HGO materijalnog modela

Redni broj materijala	$C_1$ /MPa	$D$	$k_1$ /MPa	$k_2$	$\kappa$	$\alpha$
1.	0,055	0	0,0373	22	0	$\pm 45^\circ$
2.	0,060	0	0,0373	22	0	$\pm 60^\circ$
3.	0,060	0	0,0380	22	0	$\pm 70^\circ$
4.	0,055	0	0,0380	19	0	$\pm 38^\circ$

## 6.3. Rubni uvjeti

Budući da je modeliran samo isječak arterije, potrebno je na bočne rubove isječka primijeniti rubni uvjet aksijalne simetrije (odnosno zabraniti pomak i cirkularnom smjeru; zakreti u radijalnom i aksijalnom smjeru nisu stupanj slobode, pa ih nije potrebno zabraniti). Kako bi to bilo moguće, potrebno je najprije definirati cilindrični koordinatni sustav čija os  $z$  ide kroz

središte arterije. Osim toga, zadana je još i simetrija u smjeru osi  $z$  na jednoj od dviju stranica koje su okomite na os  $z$ . Tako zadani rubni uvjeti prikazani su na slici 10.



Slika 10. Zadavanje rubnih uvjeta

Zadavanje simetrije u smjeru osi  $z$  kako je objašnjeno i označeno na slici iznad podrazumijeva stvarnu duljinu uzorka duplo dužu od modelirane. Budući da je geometrijom zadana duljina uzorka od 5 mm, rubni uvjet simetrije podrazumijeva da se zapravo radi o polovici uzorka duljine 10 mm. Na slici je također narančasto označen zadani cilindrični koordinatni sustav.

Opisani rubni uvjeti zadani su u inicijalnom *stepu* simulacije te su propagirani do kraja simulacije.

## 6.4. Opterećenje

Od opterećenja, zadani su aksijalno predistezanje te tlak na unutarnjoj stijenci arterije. Budući da je u ljudskom tijelu prisutno aksijalno predistezanje na arterijama, a duljina arterija se ne mijenja tijekom srčanog ciklusa, u računalnoj simulaciji zadano je aksijalno opterećenje u obliku pomaka. Predistezanje je zadano u drugom *stepu* simulacije. Predistezanje je zadano u iznosu od 1 mm za NH materijalni model, što odgovara iznosu istežanja

$$\lambda_z = 1,2 ,$$

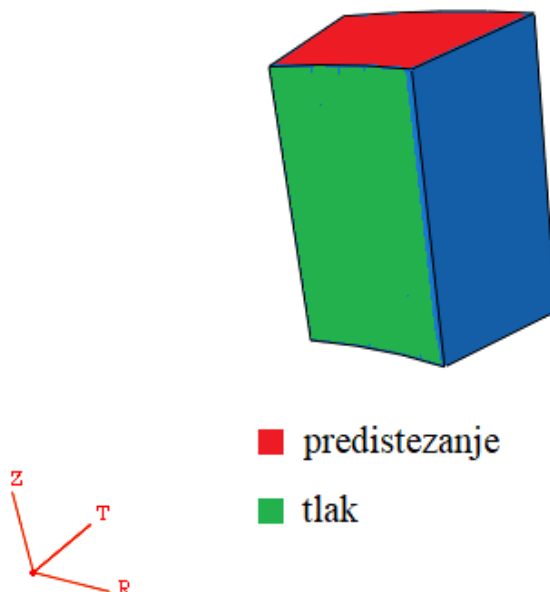
odnosno, u iznosu od 0,5 mm za HGO materijalni model, što odgovara iznosu istežanja

$$\lambda_z = 1,1 .$$

Konačno, u trećem (i posljednjem) *stepu* simulacije, zadan je tlak na unutarnjoj stijenci. Tlak je zadan na način da raste od 0 do 0,016 MPa u 100, odnosno 200 jednakih intervala. Simulacija za NH materijalni model provedena je sa 100 inkremenata tlaka u trećem *stepu* simulacije, a za HGO materijalni model su za svaki materijal provedene dvije simulacije (sa

100 i sa 200 inkremenata u trećem *stepu*). Razlog za provođenje simulacija sa različitim brojem inkremenata jest kako bi se siguralo da se materijalna karakterizacija provodi na minimalno 100 inkremenata (mjernih točaka). Karakterizacija je provedena i na rasponu tlakova od 0 do 0,016 MPa (što bi bilo poznati iz ispitivanja istežanje-tlak), i na rasponu od 0,008 MPa do 0,016 MPa (što odgovara mogućem rasponu krvnog tlaka tijekom jednog ciklusa otkucaja srca za neinvazivna ispitivanja na arterijama).

Zadana opterećenja prikazana su na slici 11.



Slika 11. Zadavanje opterećenja

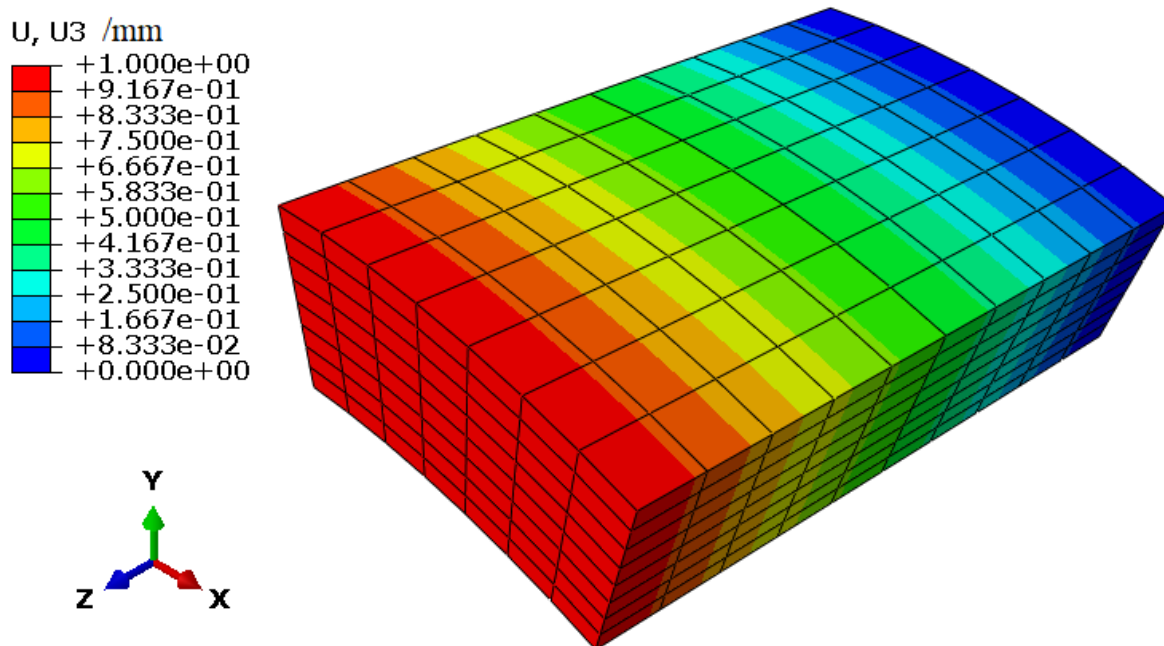
Na stranici koja je na slici obojena crveno, suprotnoj od one na kojoj je primijenjen rubni uvjet simetrije u smjeru  $z$  osi, nametnuto je predistežanje u obliku rubnog uvjeta pomaka, kako je prethodno objašnjeno. Zelenom bojom na slici je označena unutarnja stijenka arterije, na kojoj je zadano djelovanje tlaka, kako je prethodno opisano.

## 6.5. Rezultati simulacija

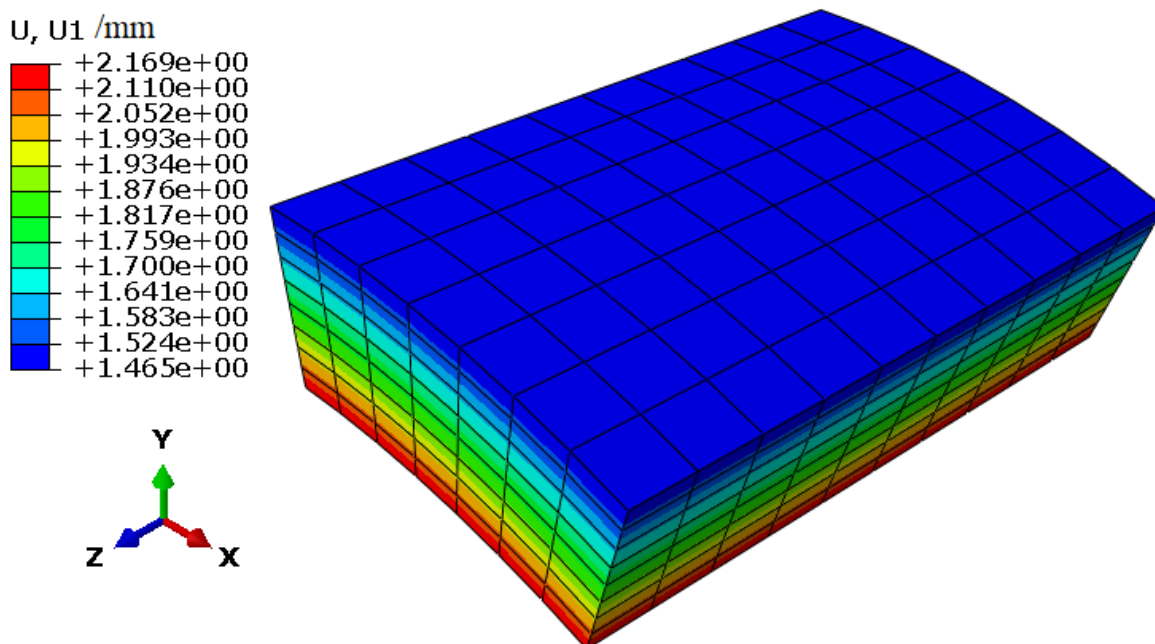
### 6.5.1. Rezultati simulacija NH

Na slici 12. prikazana je raspodjela aksijalnih pomaka za NH pri 20% aksijalnog istežanja i tlaku 0,16 MPa. Vidljivo je da aksijalni pomaci ovise samo o koordinati  $z$ , da su jednaki nuli u rubu u kojem je primijenjen rubni uvjet simetrije u mjeru  $z$  osi te da kontinuirano raste do 1 mm na rubu u kojem zadano predistežanje, odnosno pomak od 1 mm.

Na slici 13. prikazana je raspodjela radijalnih pomaka. Vidljivo je da se simulirana arterija širi (napuhuje) pod utjecajem tlaka iznutra usprkos suženju uslijed aksijalnog opterećenja. Najveći pomaci javljaju se na unutarnjoj stijenci, a najmanji na vanjskoj. Radijalni pomaci ovise isključivo o radijalnoj komponenti.



Slika 12. Raspodjela aksijalnih pomaka za NH

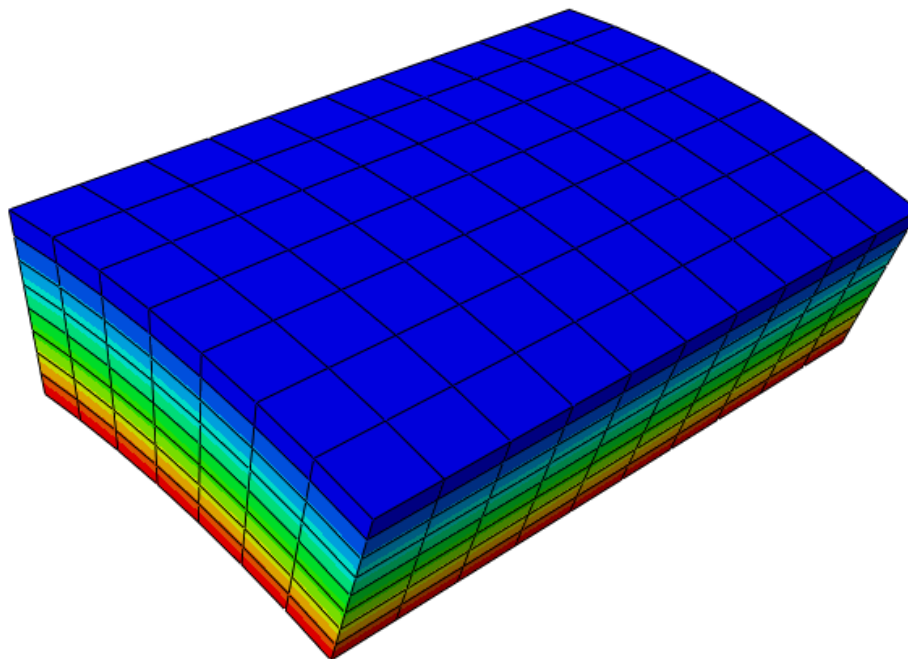
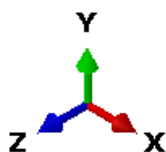
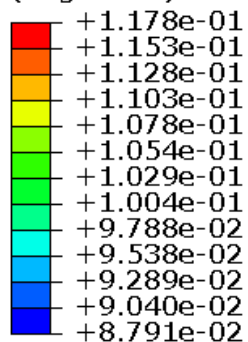


Slika 13. Raspodjela radijalnih pomaka za NH

Na slici 14. prikazana je raspodjela cirkularnog naprezanja. Iznos cirkularnog naprezanja također ovisi isključivo o radijalnoj komponenti. Naprezanje je pozitivno (vlačno), najveći iznos postiže na unutarnjoj stijenci te mu iznos kontinuirano pada do vanjske stijenske.

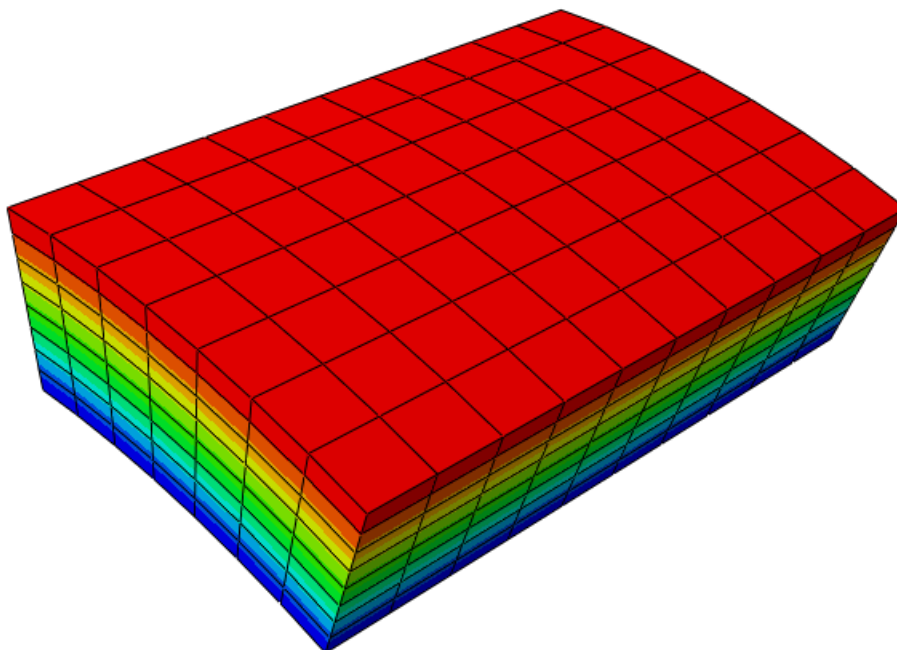
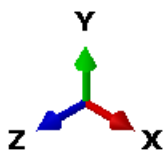
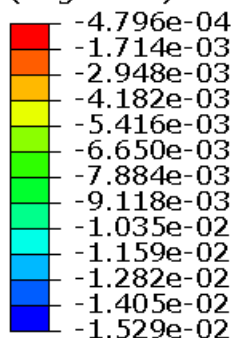
Na slici 15. prikazana je raspodjela radijalnog naprezanja. Naprezanje postiže otprilike vrijednost primijenjenog tlaka na unutarnjoj stijenci, gdje djeluje tlak. Na vanjskoj stijenci, radijalno naprezanje otprilike je jednako nuli. Radijalno naprezanje ovisi isključivo o radijalnoj koordinati, a od unutarnje stijenske prema vanjskoj stijenci, kontinuirano pada.

S, S22 /MPa  
(Avg: 75%)



Slika 14. Raspodjela cirkularnog naprezanja za NH

S, S11 /MPa  
(Avg: 75%)

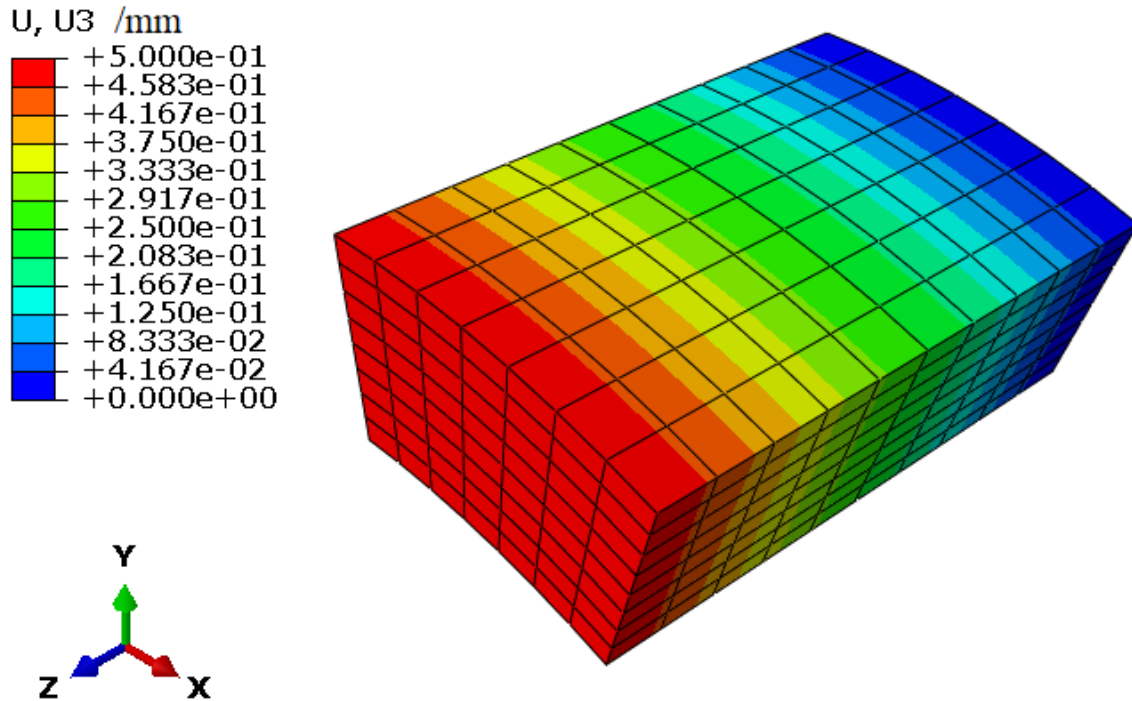


Slika 15. Raspodjela radijalnog naprezanja za NH

## 6.5.2. Rezultati simulacija HGO

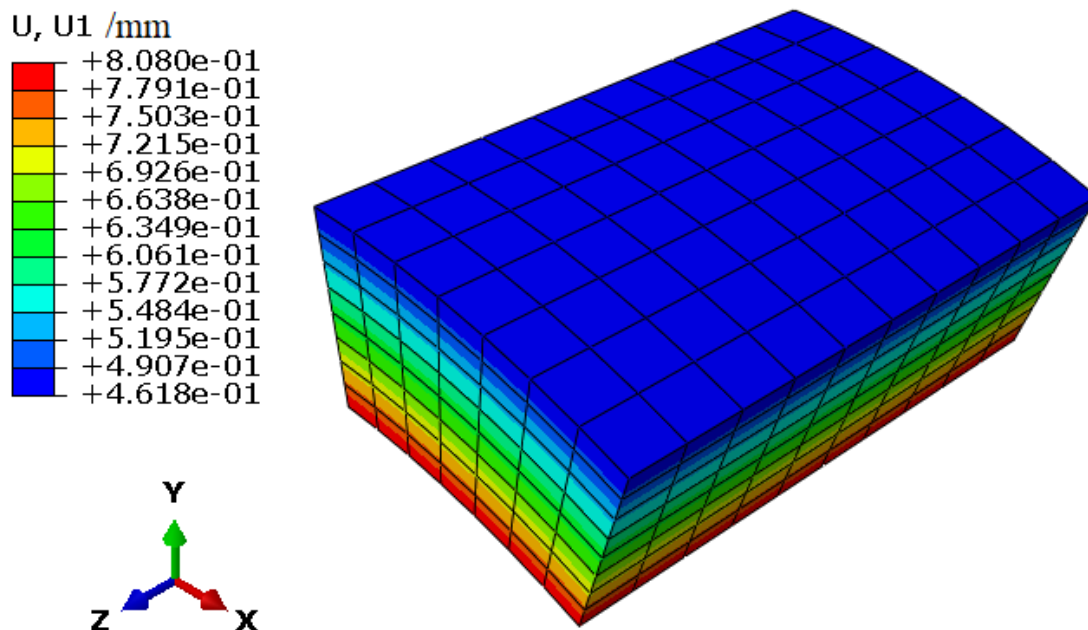
Na slici 16. prikazano je polje pomaka u smjeru osi  $z$  (u aksijalnom smjeru arterije) zajedničko za sve materijale definirane tablicom 1. Vidljivo je da je na rubu na kojem je zadan rubni uvjet simetrije u smjeru osi  $z$  pomak u smjeru osi  $z$  jednak nuli. Također, na suprotnoj stranici, na kojoj je zadano predistezanje u obliku pomaka od 0,5 mm, vidljivo je

da pomak u smjeru osi  $z$  iznosi uprova 0,5 mm. Aksijalni pomak ovisi isključivo o koordinati  $z$  (odnosno, o aksijalnoj koordinati).



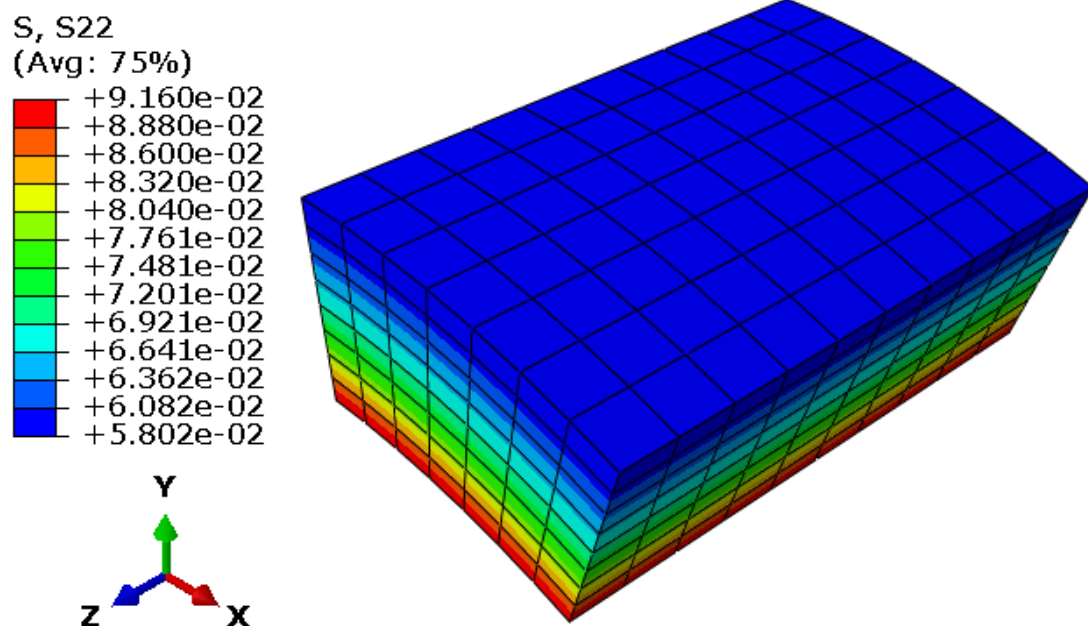
Slika 16. Raspodjela aksijalnih pomaka za HGO – svi materijali

Na slici 17. prikazana je raspodjela radijalnog pomaka za 1. materijal, kako je definiran tablicom 1. Vidljivo je da se pod utjecajem tlaka iznutra model arterije širi. Maksimalni pomak postiže se na unutarnjoj stijenci, a minimalni na vanjskoj. Radijalni pomak ovisi samo o radijalnoj koordinati.



Slika 17. Raspodjela radijalnih pomaka za HGO – 1. materijal

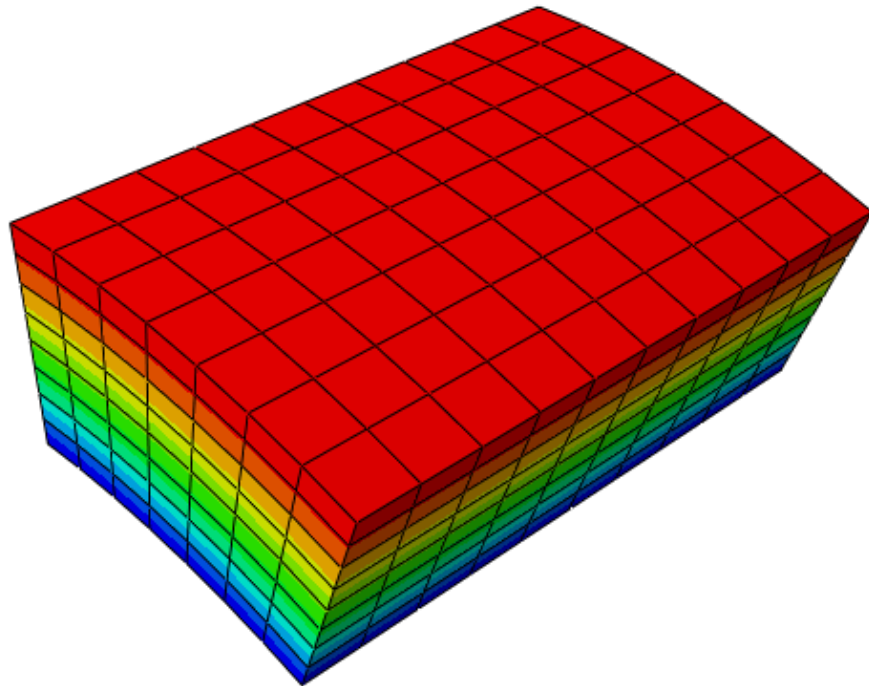
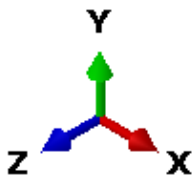
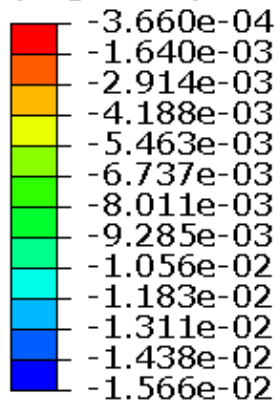
Na slici 18. prikazana je raspodjela cirkularnih napreznja za 1. materijal. Cirkularno napreznje je u čitavom području vlačno i ovisi samo o radijalnoj koordinati. Najveće je na unutarnjoj stijenci i kontinuirano pada do vanjske stijenke.



Slika 18. Raspodjela cirkularnog napreznja za HGO – 1. materijal

Na slici 19. prikazana je raspodjela radijalnog napreznja za 1. materijal. Na stranici na kojoj je stijenka opterećena tlakom, radijalno napreznje odgovara primijenjenom tlaku. Radijalno napreznje također ovisi isključivo o radijalnoj komponenti te mu apsolutni iznos kontinuirano opada od maksimalne vrijednosti na unutarnjoj stijenci do minimalne vrijednosti bliske nuli na vanjskoj stijenci.

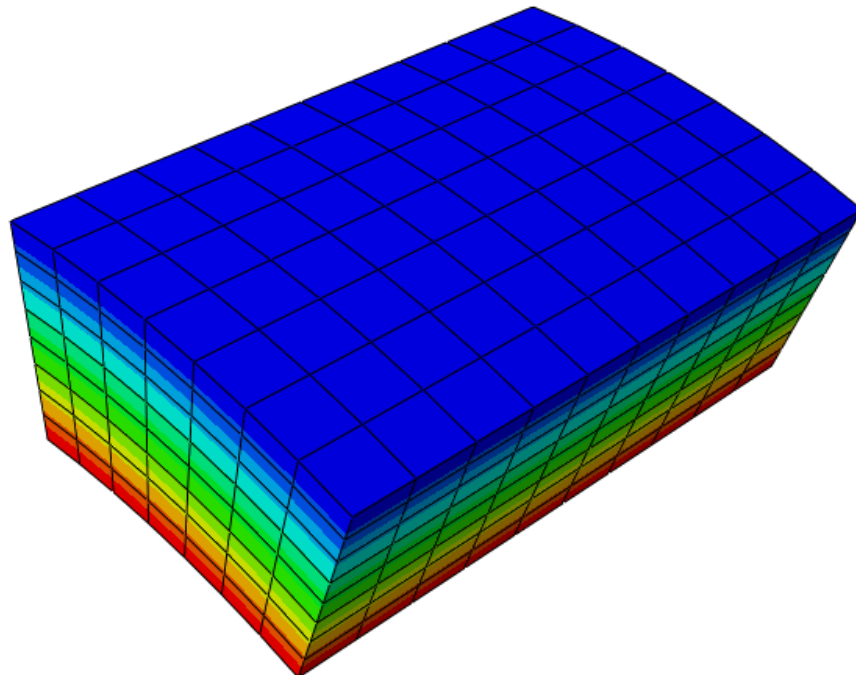
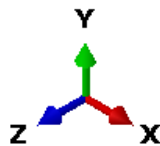
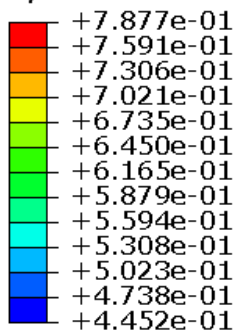
S, S11 /MPa  
(Avg: 75%)



Slika 19. Raspodjela radijalnog napreznja za HGO – 1. materijal

Na slikama 20.-22. prikazani su redom raspodjele radijalnih pomaka, cirkularnog napreznja i radijalnog napreznja za 4. materijal kako je definiran tablicom 1.

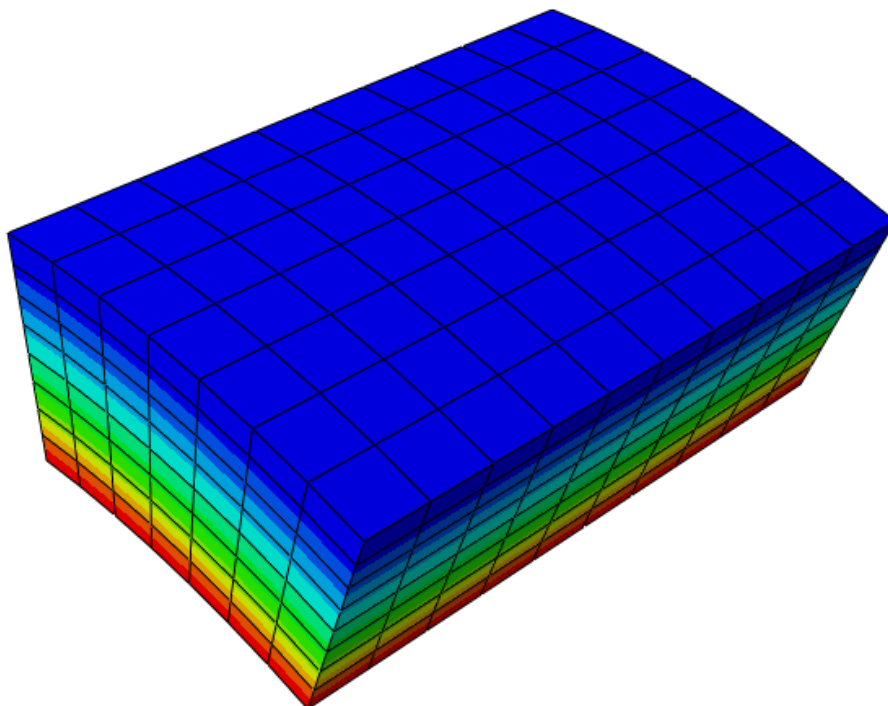
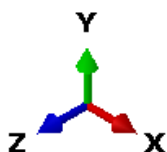
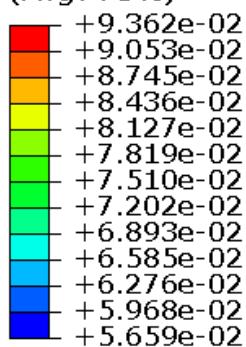
U, U1 /mm



Slika 20. Raspodjela radijalnih pomaka za HGO – 4. materijal

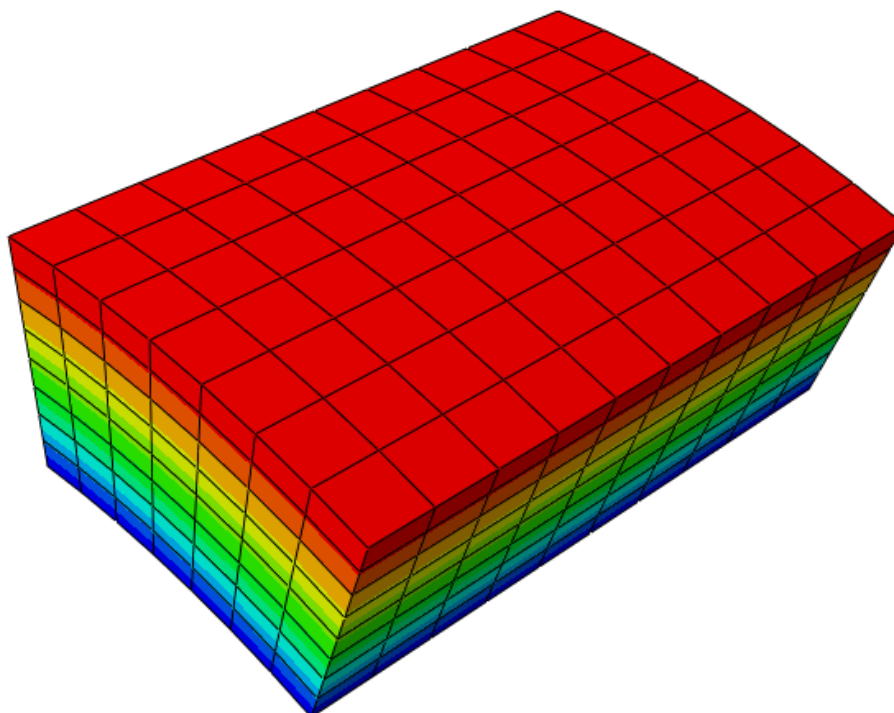
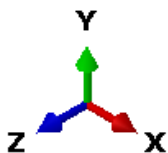
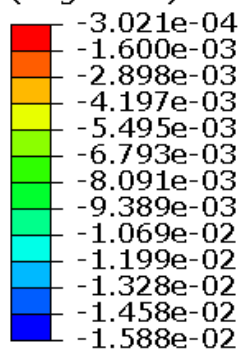


S, S22 /mm  
(Avg: 75%)



Slika 21. Raspodjela cirkularnog naprezanja za HGO – 4. materijal

S, S11 /MPa  
(Avg: 75%)



Slika 22. Raspodjela radijalnog naprezanja za HGO – 4. materijal

Za oba materijala, raspodjele razmatranih veličina su kvalitativno jednake, no kod 1. materijala javljaju se veći pomaci i strmiji je gradijent cirkularnog naprezanja.

## 7. Određivanje parametara materijala

Nakon provođenja simulacije, određeni su parametri materijala prema postupku opisanom u 5. poglavlju, pomoću *lsqnonlin* funkcije.

### 7.1. Utjecaj poznatih ulaznih parametara

#### 7.1.1. Neo Hooke

Napravljena je simulacije s vrijednosti parametra  $C_1=0,0563$  MPa, predistezanja  $\lambda_z=1,2$  i vrijednosti neopterećenog unutarnjeg polumjera  $A=7,9$  mm, kako je bilo opisano u prethodnom poglavlju.

Nestlačiv NH materijalni model ima samo jedan materijalni parametar. Parametar materijala određen je uz različite kombinacije ostalih poznatih parametara, kako bi se utvrdio utjecaj poznavanja pojedinih parametara na određivanje parametra materijala. Određivanje parametra provedeno je pomoću funkcije cilja (5.6) za slučajeve u kojima je poznata sila. U slučajevima u kojima nije poznata sila, zbog nemogućnosti primjene izraza (5.6), korišten je modificirani izraz za funkciju cilja

$$\min \sum_{j=1}^n (P_j^{\text{mod}} - P_j^{\text{sim}})^2. \quad (7.1)$$

Nakon analize, utvrđen je utjecaj poznavanja reducirane sila  $F_j^{\text{sim}}$ , neopterećenog unutarnjeg polumjera  $A$  i predistezanja  $\lambda_z$ . U slučaju nepoznatog polumjera  $A$  ili predistezanja  $\lambda_z$ , te veličine se uvrštavaju u funkciju cilja (5.6) i *lsqnonlin* funkciju računalnog programa kao nepoznanice te ih algoritam određuje zajedno sa parametrom materijala  $C_1$ .

Najprije je utvrđen parametar  $C_1$  uz poznate  $A$ ,  $\lambda_z$  i  $F_j^{\text{sim}}$

$$C_1 = 0,0562490 \text{ MPa}. \quad (7.2)$$

Zaključeno je da je dobiveno vrlo dobro poklapanje rezultata te je ovim rezultatom verificirana ispravnost postupka.

Zatim je utvrđen parametar  $C_1$  uz poznate  $A$  i  $\lambda_z$  te nepoznate sile  $F_j^{\text{sim}}$

$$C_1 = 0,0561295 \text{ MPa}. \quad (7.3)$$

Potom su utvrđeni parametar  $C_1$  i predistezanje  $\lambda_z$  uz poznate  $A$  i  $F_j^{\text{sim}}$

$$\begin{aligned} C_1 &= 0,0561295 \text{ MPa} \text{ i} \\ \lambda_z &= 1,1994. \end{aligned} \quad (7.4)$$

Nakon toga, utvrđeni su parametar  $C_1$  i neopterećni unutarnji radijus  $A$  uz poznate  $\lambda_z$  i  $F_j^{\text{sim}}$

$$\begin{aligned} C_1 &= 0,0561048 \text{ MPa} \text{ i} \\ A &= 7,8989 \text{ mm}. \end{aligned} \quad (7.5)$$

Na kraju, utvrđeni su parametar  $C_1$ , neopterećeni unutarnji radijus  $A$  i predistezanje  $\lambda_z$  uz nepoznate sile  $F_j^{\text{sim}}$

$$\begin{aligned} C_1 &= 0,0247361 \text{ MPa} \\ A &= 5,2418 \text{ mm} \\ \lambda_z &= 0,5279. \end{aligned} \quad (7.6)$$

Vidljivo je da nepoznat  $A$ , nepoznat  $\lambda_z$  ili nepoznate sile ne utječu bitno na točnost, no bez dodatnih uvjeta, za NH materijalni model, nije moguće isključiti i sile i  $\lambda_z$ .

### 7.1.2. Holzapfel-Gasser-Ogden

Prilikom izrade ovog rada, za određivanje parametara materijala HGO materijalnog modela, korišteni su idući načini određivanja materijalnih parametara

- 1 – poznat neopterećeni unutarnji radijus i poznate sile,
- 2 – nepoznat neopterećeni unutarnji radijus i poznate sile,
- 3 – poznat neopterećeni unutarnji radijus i nepoznate sile,
- 4 – nepoznat neopterećeni unutarnji radijus i nepoznate sile,
- 5 – nepoznat neopterećeni unutarnji radijus i  $\lambda_z$ , poznate sile i
- 6 – nepoznat neopterećeni unutarnji radijus i  $\lambda_z$ , nepoznate sile.

Kao i kod NH materijalnog modela, u slučaju nepoznavanja  $A$  ili  $\lambda_z$ , te veličine se uvrštavaju u funkciju cilja (5.6) i *lsqnonlin* funkciju računalnog programa kao nepoznanice te ih algoritam određuje zajedno sa parametrima materijala. Za slučajeve nepoznavanja reducirane sile, ponovno se koristi modificirana funkcija cilja (7.8) koja ne uzima u obzir sile, a sile se naknadno računaju prema izrazu (5.28).

Za sve iznad opisane načine određivanja materijalnih parametara, u algoritmu se koriste tlakovi i odgovarajući trenutni unutarnji radijusi te početni vanjski promjer. Budući da se  $\lambda_z$  smatra konstantnim, na temelju poznatog unutarnjeg radijusa i poznatog početnog vanjskog radijusa, moguće je izračunati sve ostale vanjske radijuse iz uvjeta nestlačivosti.

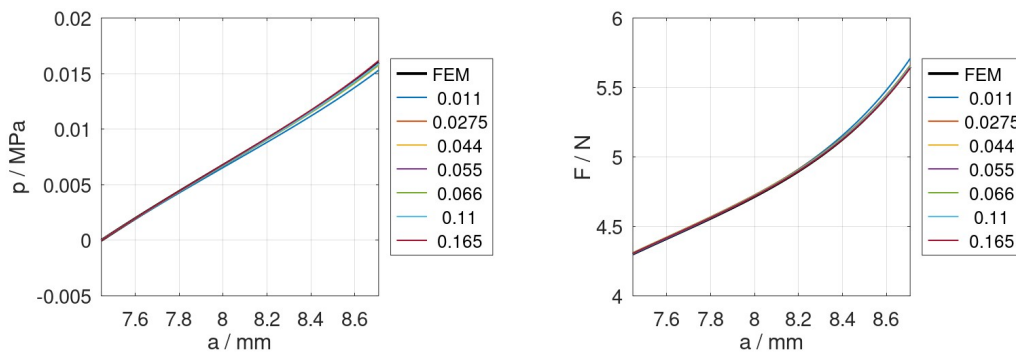
Valja napomenuti da je prilikom *in vitro* ispitivanja moguće mjeriti sve relevantne dimenzije

#### 7.1.2.1. Provjera utjecaja početnih pretpostavki

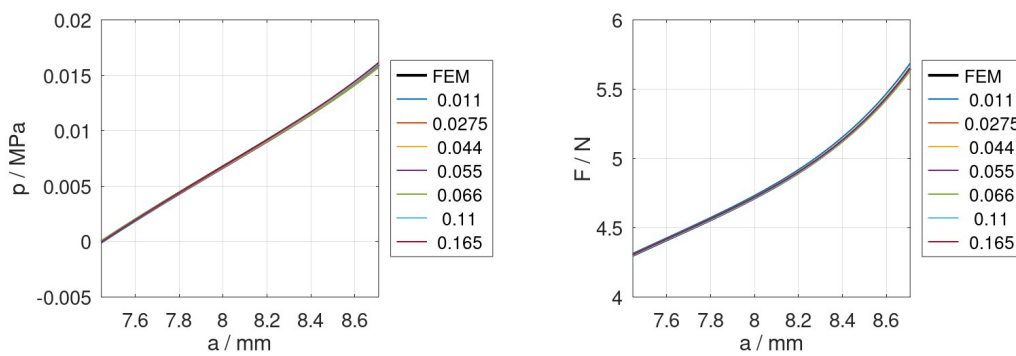
Budući da korištena funkcija *lsqnonlin* optimizacijskim metodama traži minimum funkcije na temelju početnih pretpostavki, provjeren je utjecaj početnih pretpostavki na izračunate parametre.

Kako bi se provjerio utjecaj početnih pretpostavki, u algoritmu je pretpostavljeno točno rješenje, a variran je samo jedan parametar. Tako određeni parametri iskorišteni su za crtanje grafova ovisnosti tlaka, odnosno sile, o trenutnom unutarnjem polumjeru  $a$ . Grafovi se nalaze na slikama 23.-42.

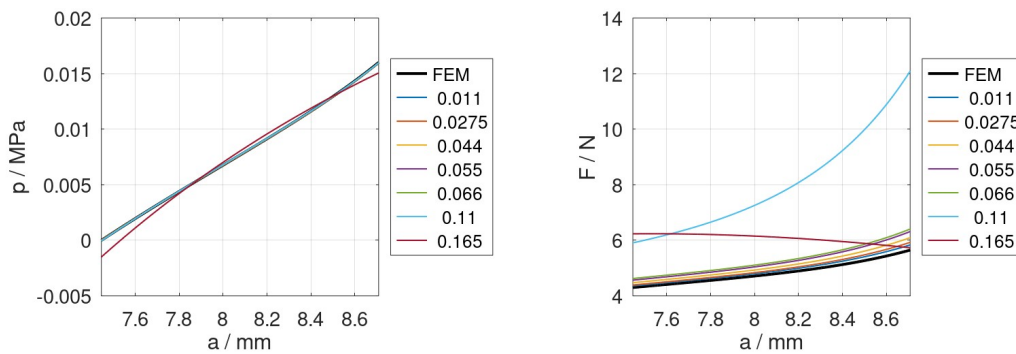
Za svaki način određivanja parametara, provjeren je utjecaj svakog parametra. Analiza je provedena samo za 1. materijal, sa tlakovima od 0,000 MPa do 0,016 MPa.



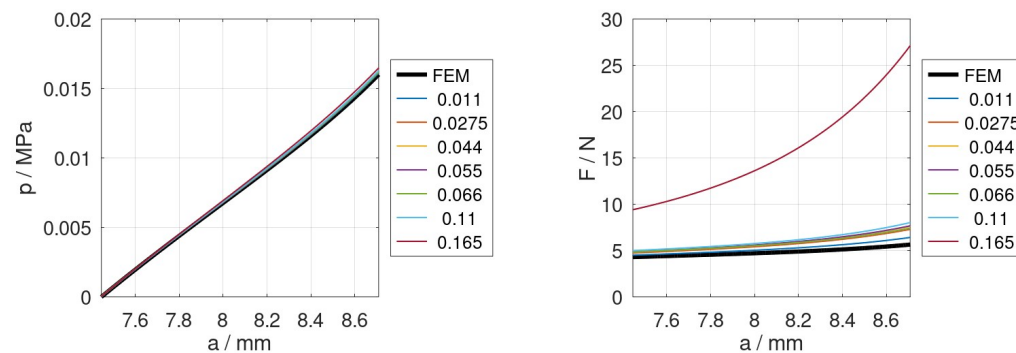
Slika 23. Veza tlaka (lijevo) i reducirane aksijalne sile (desno) o promjeni unutarnjeg radijusa za parametre određene na način 1, varijabilan pretpostavljeni  $C_1$



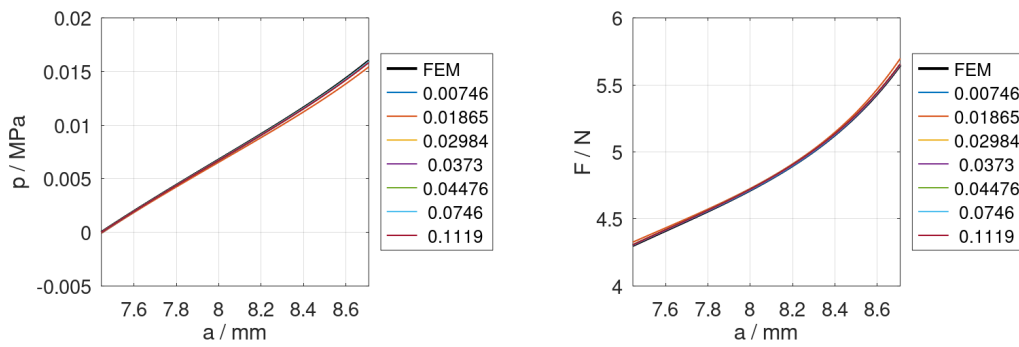
Slika 24. Veza tlaka (lijevo) i reducirane aksijalne sile (desno) o promjeni unutarnjeg radijusa za parametre određene na način 2, varijabilan pretpostavljeni  $C_1$



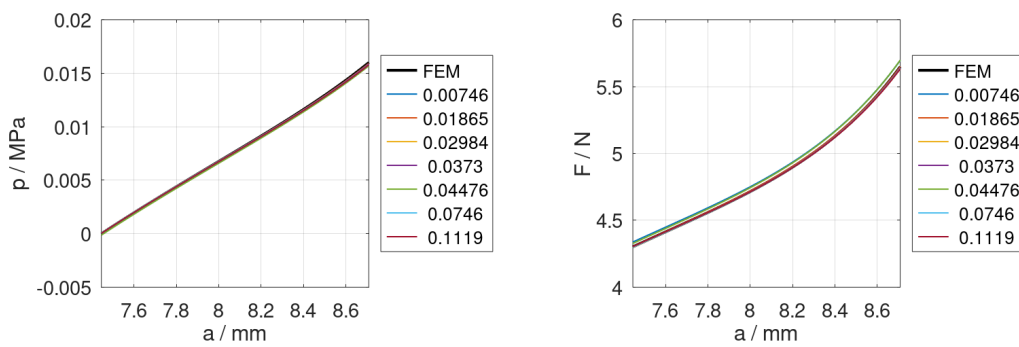
Slika 25. Veza tlaka (lijevo) i reducirane aksijalne sile (desno) o promjeni unutarnjeg radijusa za parametre određene na način 2, varijabilan pretpostavljeni  $C_1$



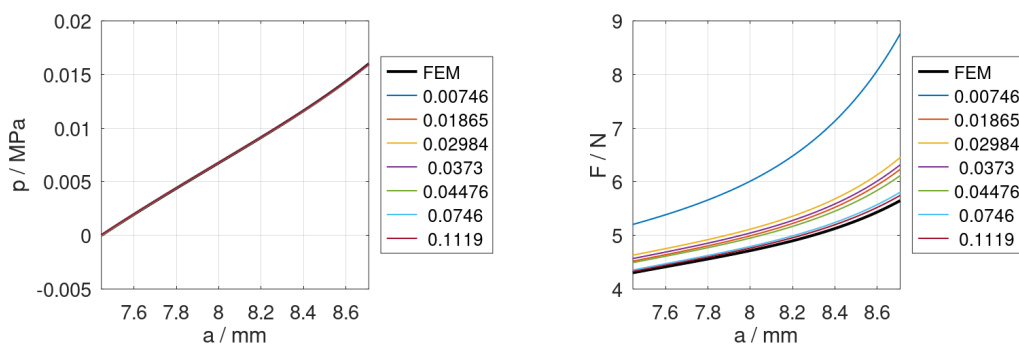
Slika 26. Veza tlaka (lijevo) i reducirane aksijalne sile (desno) o promjeni unutarnjeg radijusa za parametre određene na način 4, varijabilan pretpostavljeni  $C_1$



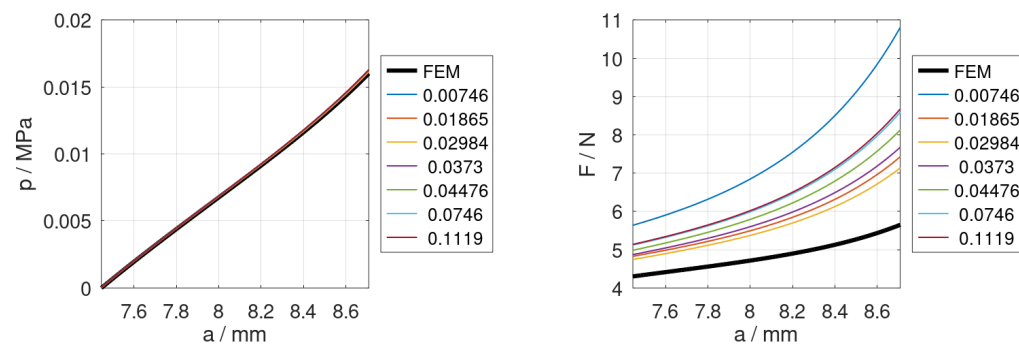
Slika 27. Veza tlaka (lijevo) i reducirane aksijalne sile (desno) o promjeni unutarnjeg radijusa za parametre određene na način 1, varijabilan pretpostavljeni  $k_1$



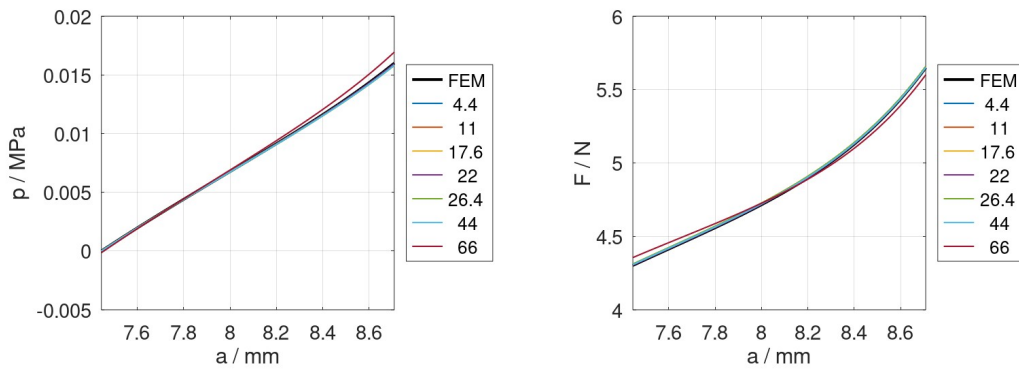
Slika 28. Veza tlaka (lijevo) i reducirane aksijalne sile (desno) o promjeni unutarnjeg radijusa za parametre određene na način 2, varijabilan pretpostavljeni  $k_1$



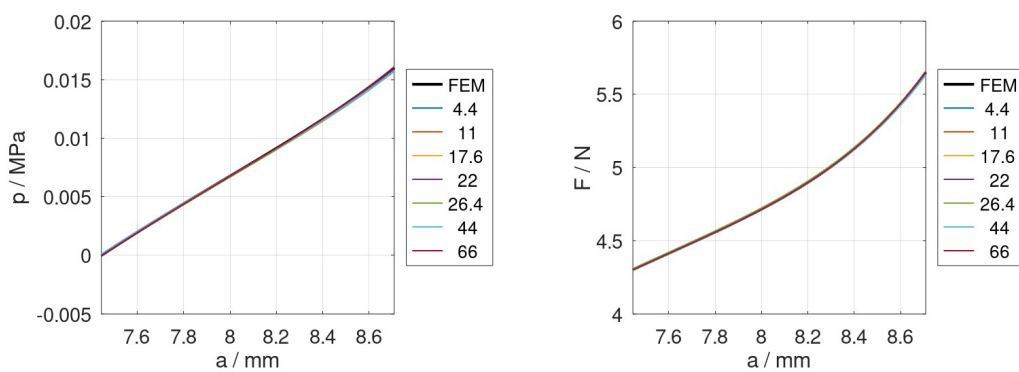
Slika 29. Veza tlaka (lijevo) i reducirane aksijalne sile (desno) o promjeni unutarnjeg radijusa za parametre određene na način 3, varijabilan pretpostavljeni  $k_1$



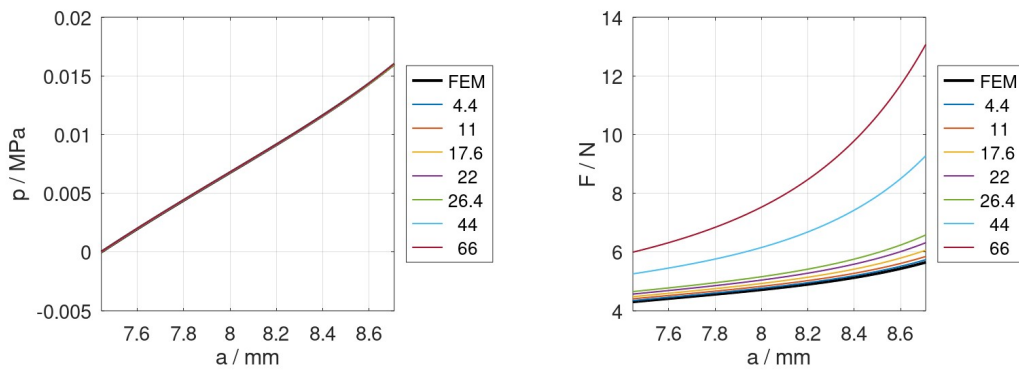
Slika 30. Veza tlaka (lijevo) i reducirane aksijalne sile (desno) o promjeni unutarnjeg radijusa za parametre određene na način 4, varijabilan pretpostavljeni  $k_1$



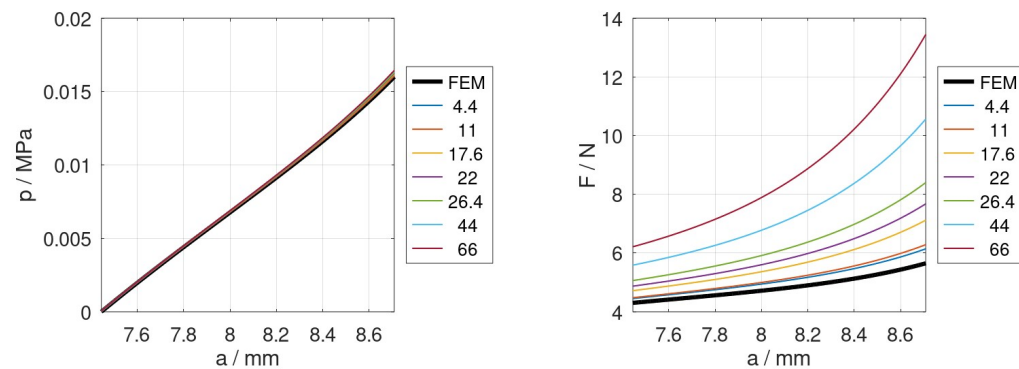
Slika 31. Veza tlaka (lijevo) i reducirane aksijalne sile (desno) o promjeni unutarnjeg radijusa za parametre određene na način 1, varijabilan pretpostavljeni  $k_2$



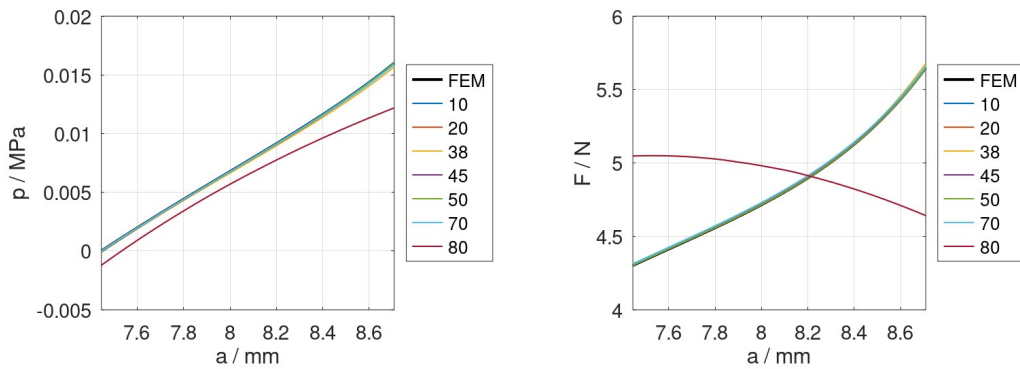
Slika 32. Veza tlaka (lijevo) i reducirane aksijalne sile (desno) o promjeni unutarnjeg radijusa za parametre određene na način 2, varijabilan pretpostavljeni  $k_2$



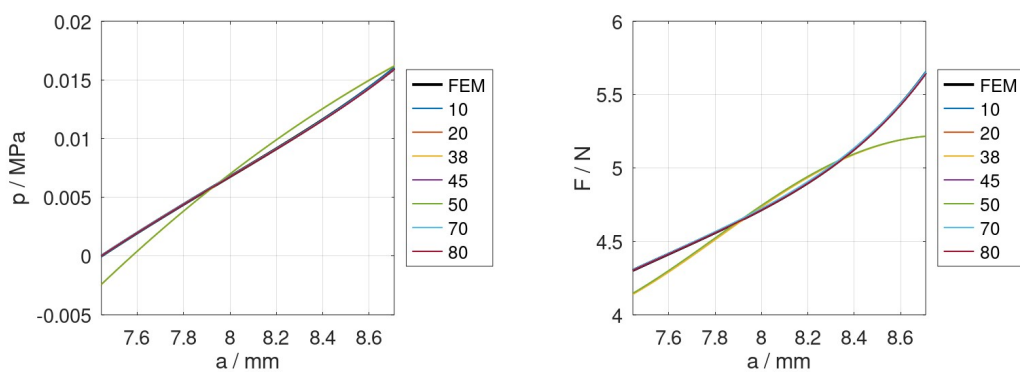
Slika 33. Veza tlaka (lijevo) i reducirane aksijalne sile (desno) o promjeni unutarnjeg radijusa za parametre određene na način 3, varijabilan pretpostavljeni  $k_2$



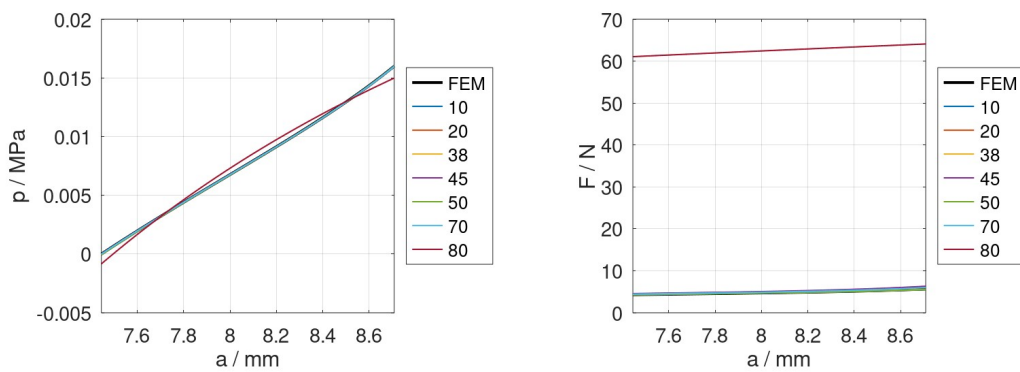
Slika 34. Veza tlaka (lijevo) i reducirane aksijalne sile (desno) o promjeni unutarnjeg radijusa za parametre određene na način 4, varijabilan pretpostavljeni  $k_2$



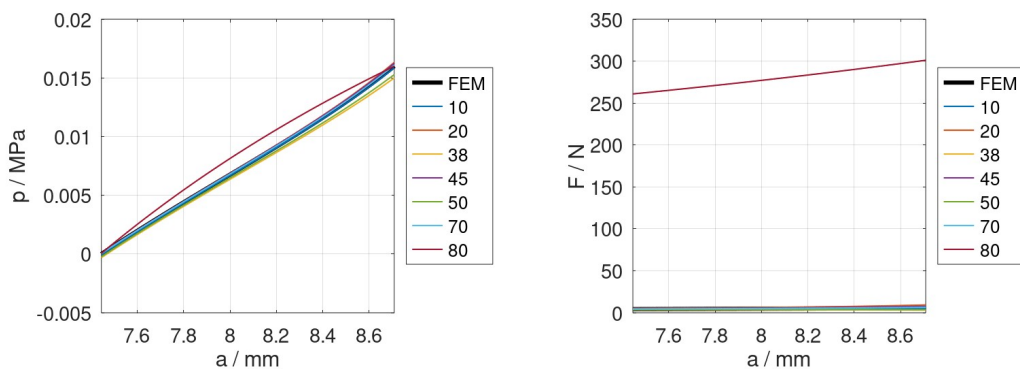
Slika 35. Veza tlaka (lijevo) i reducirane aksijalne sile (desno) o promjeni unutarnjeg radijusa za parametre određene na način 1, varijabilan pretpostavljeni  $\alpha$



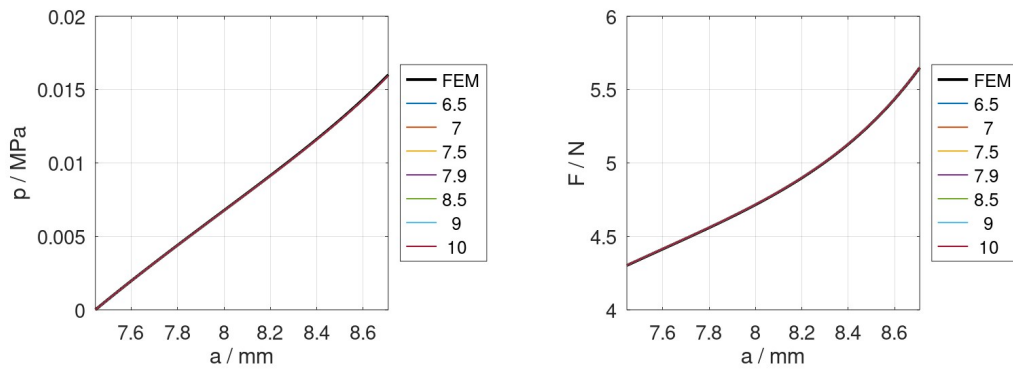
Slika 36. Veza tlaka (lijevo) i reducirane aksijalne sile (desno) o promjeni unutarnjeg radijusa za parametre određene na način 2, varijabilan pretpostavljeni  $\alpha$



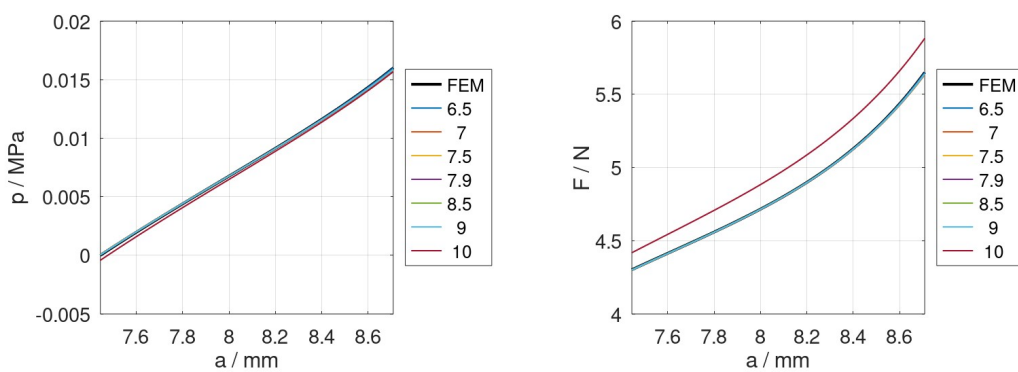
Slika 37. Veza tlaka (lijevo) i reducirane aksijalne sile (desno) o promjeni unutarnjeg radijusa za parametre određene na način 3, varijabilan pretpostavljeni  $\alpha$



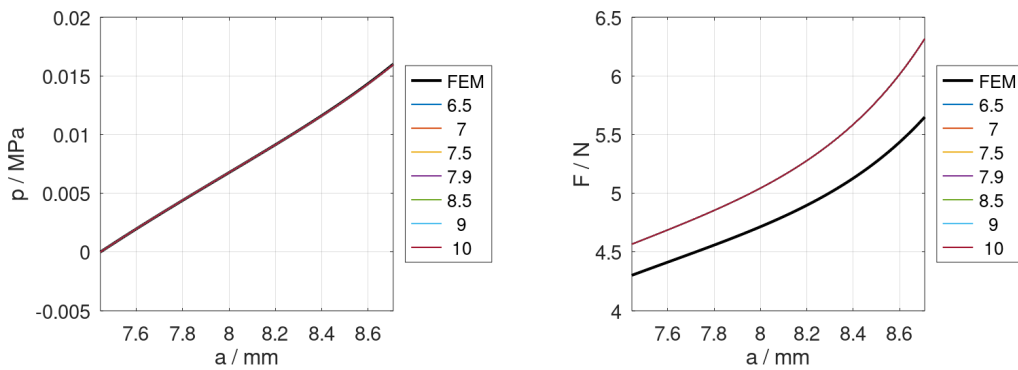
Slika 38. Veza tlaka (lijevo) i reducirane aksijalne sile (desno) o promjeni unutarnjeg radijusa za parametre određene na način 4, varijabilan pretpostavljeni  $\alpha$



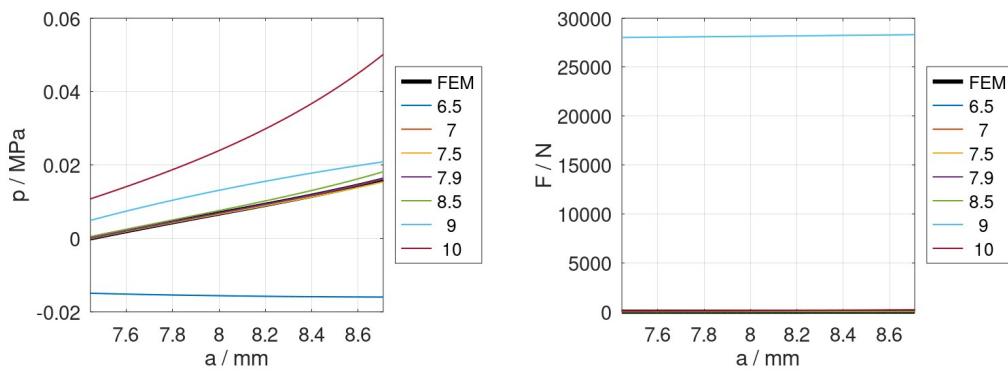
Slika 39. Veza tlaka (lijevo) i reducirane aksijalne sile (desno) o promjeni unutarnjeg radijusa za parametre određene na način 1, varijabilan pretpostavljeni  $A$



Slika 40. Veza tlaka (lijevo) i reducirane aksijalne sile (desno) o promjeni unutarnjeg radijusa za parametre određene na način 2, varijabilan pretpostavljeni  $A$



Slika 41. Veza tlaka (lijevo) i reducirane aksijalne sile (desno) o promjeni unutarnjeg radijusa za parametre određene na način 3, varijabilan pretpostavljeni  $A$



Slika 42. Veza tlaka (lijevo) i reducirane aksijalne sile (desno) o promjeni unutarnjeg radijusa za parametre određene na način 4, varijabilan pretpostavljeni  $A$



Vidljivo je da je dobiveno generalno dobro poklapanje krivulja tlaka, osim za slučaj variranja pretpostavljenog kuta  $\alpha$  te za slučaj variranja pretpostavljenog neopterećenog polumjera  $A$ , za 4. način određivanja parametara.

Poklapanje krivulje sile generalno je vrlo dobro za 1. i 2. način određivanja parametara (u kojima je u obzir prilikom računanja parametara uzeta sila), dok za 3. i 4. način određivanja parametara (u kojima sile nisu uzete u obzir) izračunate sile značajno ovise o početnim pretpostavkama.

Kod varijabilnog pretpostavljenog  $A$ , ni krivulja sile ni krivulja tlaka ne ovisi o pretpostavci za 1. i 3. način određivanja parametara, za koje je  $A$  poznat parametar koji se unosi u algoritam.

### 7.1.2.2. Utjecaj određivanja parametara o inicijalnim pretpostavkama

Za verifikaciju postupka na HGO materijalnom modelu, određeni su parametri materijala za načine 1-4 kako je definirano u prethodnom odjeljku. Parametri su određeni za sve materijale definirane u tablici 1., za podatke iz 100 koraka za tlakove od 0,000 MPa od 0,016 MPa te za podatke iz 100 koraka od 0,008 MPa do 0,016 MPa, što odgovara rasponu od 60 mmHg do 120 mmHg. Za određivanje parametara materijala korištene su sljedeće početne pretpostavke koje traži *lsqnonlin* funkcija

$$\begin{aligned} C_1 &= 0,1 \text{ MPa} , & (7.7) \\ k_1 &= 0,1 \text{ MPa} , \\ k_2 &= 10 , \\ \alpha &= 45^\circ \text{ i} \\ A &= 8 \text{ mm} . \end{aligned}$$

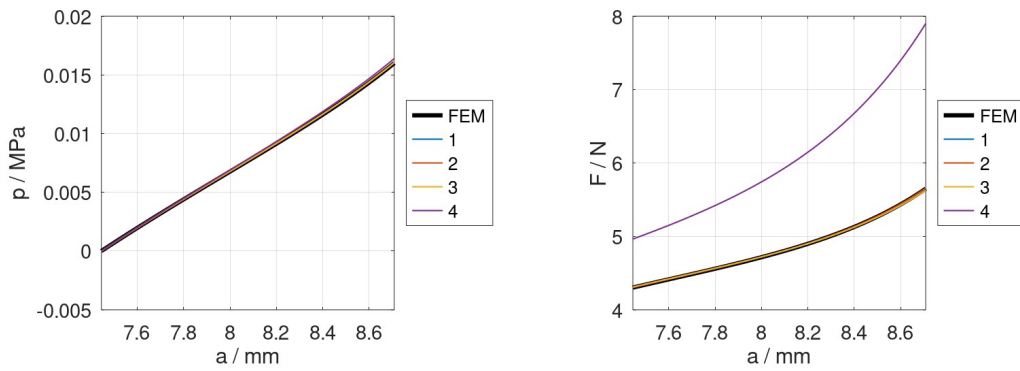
Početne pretpostavke dane u (7.7) namjerno su odabrane s velikim odudaranjem, budući da u praksi nisu unaprijed poznati podatci materijala koje treba odrediti pa nije realno očekivati dobre inicijalne pretpostavke.

Podatci dobiveni na opisani način, za tlakove od 0,000 MPa od 0,016 MPa, prikazani su u tablici 2. Na dnu tablice, prikazani su još jednom zadani parametri materijala (i zadani  $A$ ).

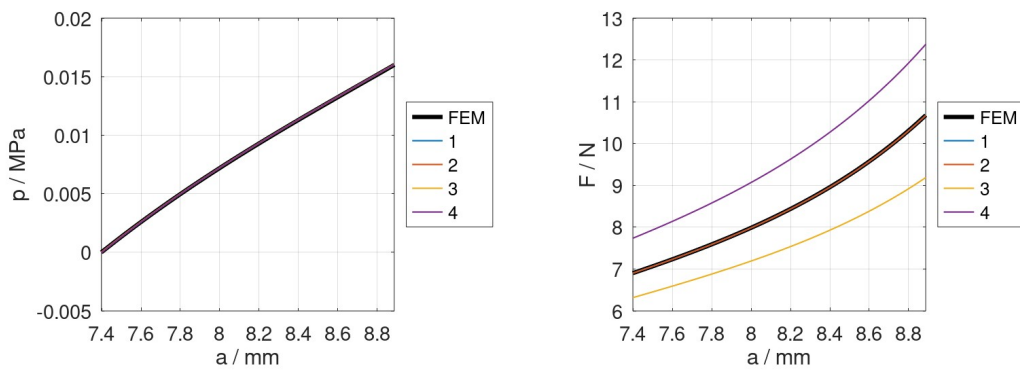
Tablica 2: Izračunati parametri za 1 inicijalnu pretpostavku i tlakove od 0,000-0,016 MPa

	$C_1$ /MPa	$k_1$ /MPa	$k_2$	$\alpha$ /°	$A$ /mm	Redni broj materijala
1. način određivanja parametara	0,0550775	0,0375042	21,9370146	44,9234358		1
	0,0600522	0,0375082	21,8814947	59,9388927		2
	0,0599759	0,0384388	21,7746495	69,9201836		3
	0,0550136	0,0379504	18,9809982	38,0032939		4
2. način određivanja parametara	0,0550474	0,0375737	22,0395000	44,9190000	7,9010500	1
	0,0599941	0,0376263	21,8306000	59,9229000	7,8995800	2
	0,0587385	0,0785671	9,2674100	64,5414000	8,0194900	3
	0,0550032	0,0383958	19,0072000	37,9583000	7,9037800	4
3. način određivanja parametara	0,0551663	0,0378476	21,4931007	44,8517568		1
	0,0599830	0,0408190	16,7114196	57,3102754		2
	0,0599638	0,0406705	13,1205777	66,0513120		3
	0,0552473	0,0381627	18,8485670	38,0824826		4
4. način određivanja parametara	0,0563417	0,0365633	28,5532774	50,5473305	7,9364786	1
	0,0601080	0,0395838	24,0691065	61,8572794	7,9173007	2
	0,0599570	0,0438870	15,5318371	67,8071253	7,9092743	3
	0,0596873	0,0323156	31,8092952	48,2750534	7,9592587	4
Zadano	0,0550000	0,0373000	22,0000000	45,0000000	7,9000000	1
	0,0600000	0,0373000	22,0000000	60,0000000	7,9000000	2
	0,0600000	0,0380000	22,0000000	70,0000000	7,9000000	3
	0,0550000	0,0380000	19,0000000	38,0000000	7,9000000	4

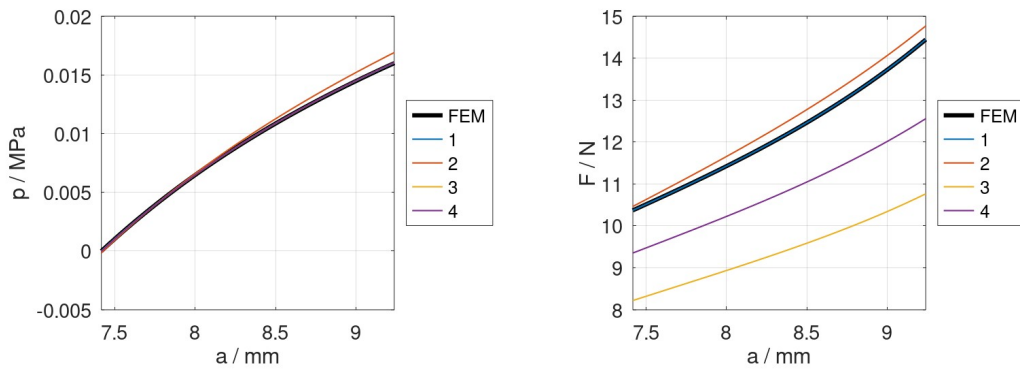
Budući da nije moguće adekvatno ocijeniti valjanost dobivenih rezultata iz tablice, ponašanje materijala prikazano je grafički na slikama 43.-46. Na slikama, lijevo su prikazani grafovi ovisnosti primijenjenog tlaka o unutarnjem polumjeru  $a$ , a desno su prikazani grafovi ovisnosti reducirane sile o unutarnjem polumjeru  $a$ , za raspone  $a$  dobivene iz simulacije.



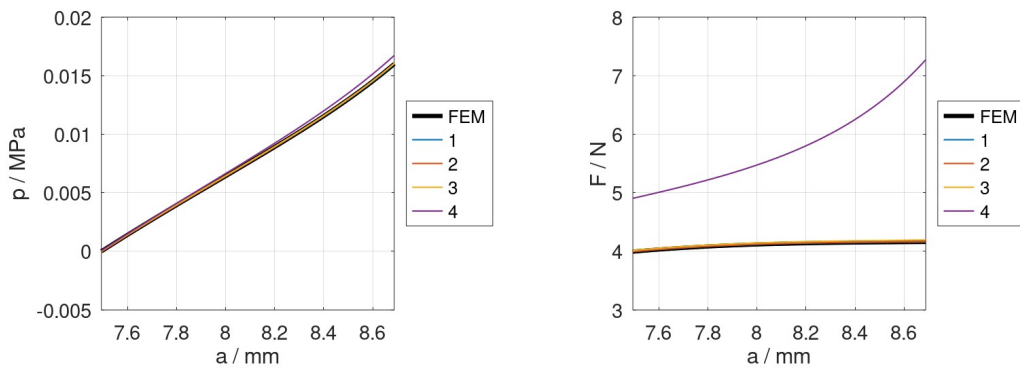
Slika 43. 1. materijal, načini određivanja parametara 1-4, tlakovi od 0,000 MPa od 0,016 MPa



Slika 44. 2. materijal, načini određivanja parametara 1-4, tlakovi od 0,000 MPa od 0,016 MPa



Slika 45. 3. materijal, načini određivanja parametara 1-4, tlakovi od 0,000 MPa od 0,016 MPa



Slika 46. 4. materijal, načini određivanja parametara 1-4, tlakovi od 0,000 MPa od 0,016 MPa

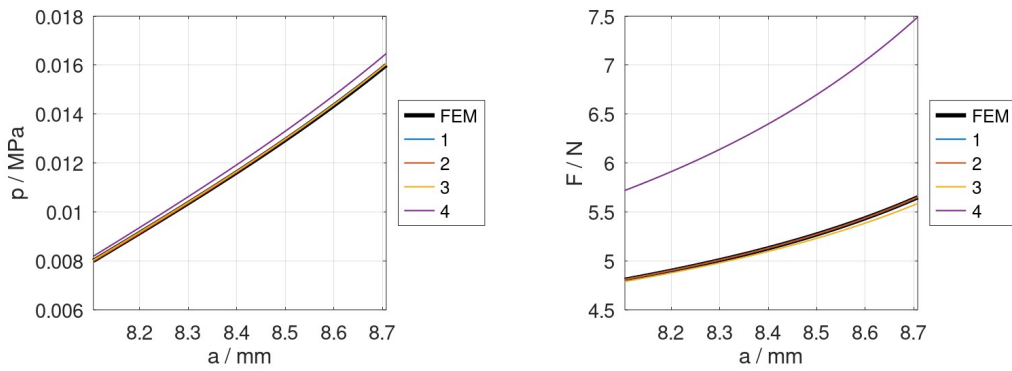
Na slikama 43.-46., vidljivo je vrlo dobro poklapanje krivulja tlaka za sve promatrane materijale. Poklapanje sila, s druge strane, dobro je 1. i 2. način određivanja parametara, odnosno za one načine kod kojih je sila poznata. Trećim načinom određivanja parametara, dobiveno je dobro poklapanje sila za 1. i 4. materijal, dok je poklapanje sila za 2. i 3. materijal lošije. Zanimljivo je da nije pravilo da 4. način određivanja parametara (za koji nije poznat niti  $A$ ) nužno daje gore rezultate od 3. načina.

Podatci dobiveni za tlakove od 0,008 MPa od 0,016 MPa prikazani su u tablici 3.

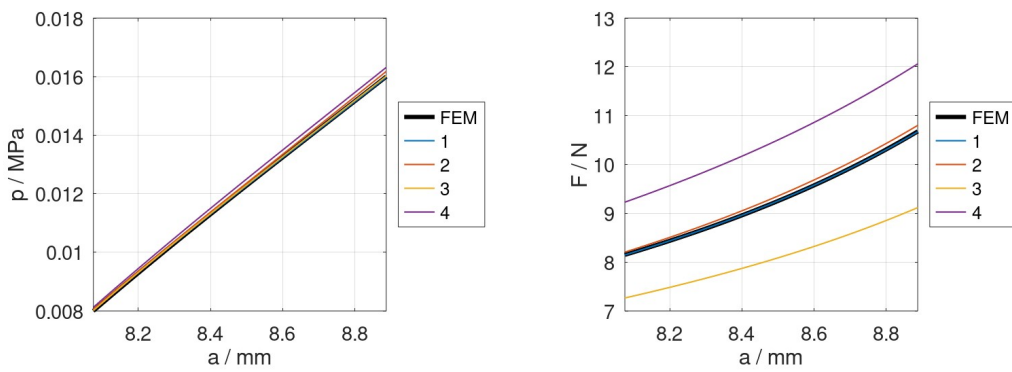
**Tablica 3: Izračunati parametri za 1 inicijalnu pretpostavku i tlakove od 0,008-0,016 MPa**

	$C_1$ /MPa	$k_1$ /MPa	$k_2$	$\alpha$ /°	$A$ /mm	Redni broj materijala
1. način određivanja parametara	0,0550227	0,0374850	21,9175375	44,9482121		1
	0,0587250	0,0407353	20,5330852	59,5899576		2
	0,0581347	0,0599837	13,3557564	66,8812042		3
	0,0550202	0,0379976	18,9946000	37,9944096		4
2. način određivanja parametara	0,0550474	0,0375737	22,0395000	44,9190000	7,9010500	1
	0,0599941	0,0376263	21,8306000	59,9229000	7,8995800	2
	0,0587385	0,0785671	9,2674100	64,5414000	8,0194900	3
	0,0550032	0,0383958	19,0072000	37,9583000	7,9037800	4
3. način određivanja parametara	0,0550559	0,0381910	21,2153329	44,7055748		1
	0,0596653	0,0411728	16,4721642	57,1354554		2
	0,0596563	0,0417320	9,7613858	64,1439326		3
	0,0551675	0,0383429	18,7420499	38,0442177		4
4. način određivanja parametara	0,0543239	0,0427611	25,0242271	49,2645279	7,9444501	1
	0,0588782	0,0546608	17,5276864	59,8222567	7,9555473	2
	0,0593747	0,0512974	10,0503497	65,4374392	7,9235483	3
	0,0558285	0,0423560	26,2267039	46,5408236	7,9681858	4
Zadano	0,0550000	0,0373000	22,0000000	45,0000000	7,9000000	1
	0,0600000	0,0373000	22,0000000	60,0000000	7,9000000	2
	0,0600000	0,0380000	22,0000000	70,0000000	7,9000000	3
	0,0550000	0,0380000	19,0000000	38,0000000	7,9000000	4

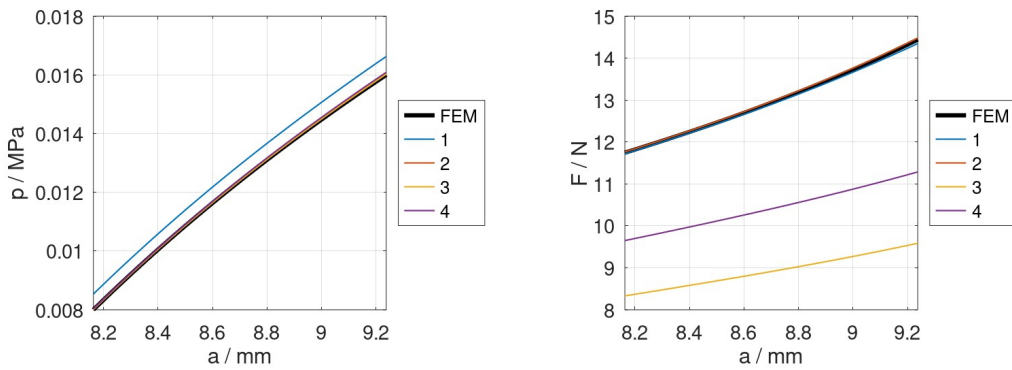
Na slikama 43.-46., lijevo su prikazani grafovi ovisnosti primijenjenog tlaka o unutarnjem polumjeru  $a$ , a desno su prikazani grafovi ovisnosti reducirane sile o unutarnjem polumjeru  $a$ , za raspone  $a$  dobivene iz simulacije, prema rezultatima iz tablice 3.



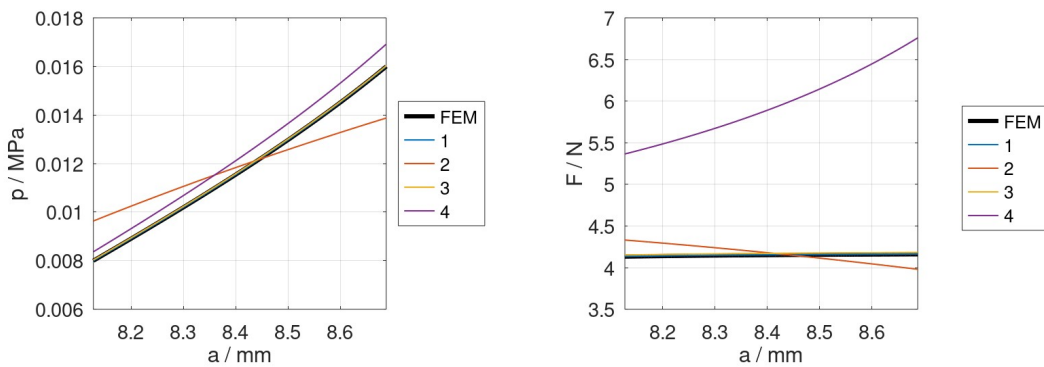
Slika 47. 1. materijal, načini određivanja parametara 1-4, tlakovi od 0,008 MPa od 0,016 MPa



Slika 48. 2. materijal, načini određivanja parametara 1-4, tlakovi od 0,008 MPa od 0,016 MPa



Slika 49. 3. materijal, načini određivanja parametara 1-4, tlakovi od 0,008 MPa od 0,016 MPa



Slika 50. 4. materijal, načini određivanja parametara 1-4, tlakovi od 0,008 MPa od 0,016 MPa

Na slikama 47.-50., ponovno je vidljivo generalno dobro poklapanje krivulja tlaka za sve načine određivanja materijala, dok je za krivulje sila poklapanje dobro za 1. i 2. način, u kojima je sila uzeta u obzir.

Poklapanje krivulja tlaka loše je za 2. i 4. način određivanja parametara, što može biti rezultat loših početnih pretpostavki. Također, vidljivo je da je za 1. način određivanja parametara, za 3. materijal dobiveno vrlo dobro poklapanje krivulja sila, dok krivulja tlaka odudara, otprilike za konstantan iznos. Budući da se radi o načinu određivanja parametara s najvećim brojem poznatih parametara, to može biti znak da krivulja sila ima veći doprinos određivanju parametara nego krivulja tlaka.

### 7.1.2.3. Određivanje parametara materijala s tri inicijalne pretpostavke

Budući da dobiveni rezultati ovise o početnim pretpostavkama, i budući da prilikom stvarnog eksperimenta nije moguće unaprijed znati je li odabrana pretpostavka dobra ili ne, provedeno je određivanje parametara materijala na način da su najprije određeni parametri s prvom inicijalnom pretpostavkom, zatim, ako rezultat ne udovoljava odabranom kriteriju točnosti, provodi se novo određivanje parametara s drugom inicijalnom pretpostavkom. Ukoliko novi parametri još uvijek ne zadovoljavaju odabrani kriterij točnosti, postupak se ponavlja još jednom, s trećim inicijalnim pretpostavkama. Na kraju, od maksimalno tri seta parametara materijala za pojedini slučaj, usvajaju se oni koji najbolje zadovoljavaju odabrani kriterij točnosti. Korištene pretpostavke dane su u tablici 6., gdje svaki redak predstavlja jedan set inicijalnih pretpostavki.

Odabran je kriterij točnosti koeficijent determinacije  $R^2$ .  $R^2$  može se opisati kao mjera kvalitete poklapanja, a koristi se u statistici za kvantificiranje poklapanja modela sa stvarnim mjerenim ili promatranim veličinama.  $R^2$  mjeri koliko dobro neki model predviđa realne podatke. Ovisno o mogućoj definiciji koeficijenta determinacije, iznos mu se kreće od 0 do 1, gdje 0 predstavlja najgore poklapanje, a 1 predstavlja savršeno poklapanje.

Koeficijent determinacije  $R^2$  ima više mogućih definicija, u nastavku će biti objašnjena ona koja je korištena u ovom radu.

Koeficijent determinacije dan je izrazom

$$R^2 = 1 - \frac{RSS}{TSS}, \quad (7.8)$$

gdje su

$$RSS = \sum_{j=1}^n (y_j - f_j)^2 \quad (7.9)$$

suma kvadrata reziduala i

$$TSS = \sum_{j=1}^n (y_j - \bar{y})^2 \quad (7.10)$$

ukupna suma kvadrata.

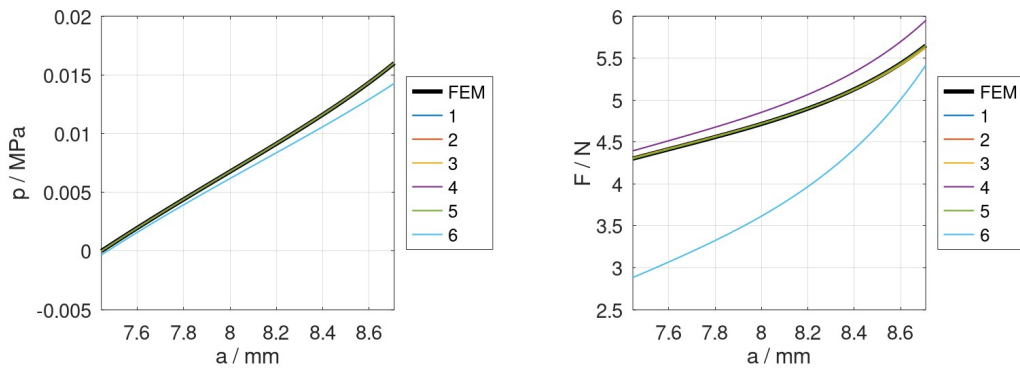
$y_j$  predstavlja mjerene podatke,  $\bar{y}$  predstavlja srednju vrijednost mjerenih podataka, a  $f_j$  predstavlja podatke izračunate prema modelu [12].

Tako izračunati parametri za tlakove od 0 MPa do 0,016 MPa prikazani su u tablici 4.

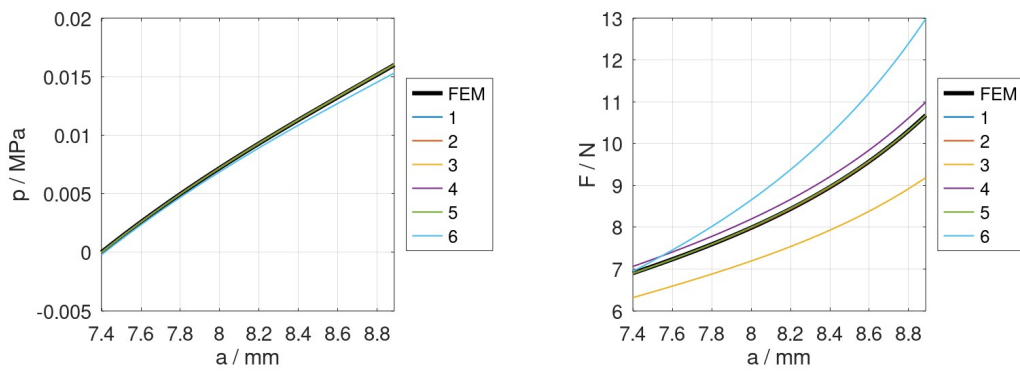
**Tablica 4: Izračunati parametri za 3 inicijalne pretpostavku i tlakove od 0,000-0,016 MPa**

	$C_1$ /MPa	$k_1$ /MPa	$k_2$	$\alpha$ /°	$A$ /mm	$\lambda_z$	$R^2$	Redni broj materijala
1. način određivanja parametara	0,0550	0,0374	21,90	44,97			1,0000	1
	0,0600	0,0373	21,94	59,98			1,0000	2
	0,0600	0,0380	22,02	69,99			1,0000	3
	0,0550	0,0381	18,93	37,99			0,9993	4
2. način određivanja parametara	0,0550	0,0374	21,92	44,98	7,90		1,0000	1
	0,0599	0,0377	21,79	59,93	7,90		1,0000	2
	0,0600	0,0382	21,89	69,96	7,90		1,0000	3
	0,0550	0,0380	18,95	37,99	7,90		0,9995	4
3. način određivanja parametara	0,0552	0,0378	21,49	44,85			1,0000	1
	0,0600	0,0408	16,71	57,31			1,0000	2
	0,0600	0,0407	13,12	66,05			1,0000	3
	0,0552	0,0382	18,85	38,08			1,0000	4
4. način određivanja parametara	0,0553	0,0369	23,01	45,96	7,91		1,0000	1
	0,0598	0,0386	21,95	60,29	7,91		1,0000	2
	0,0600	0,0388	22,37	70,29	7,90		1,0000	3
	0,0544	0,0377	18,64	37,36	7,89		0,9998	4
5. način određivanja parametara	0,0550	0,0374	21,94	45,00	7,90	1,10	1,0000	1
	0,0595	0,0422	20,56	59,74	7,90	1,10	1,0000	2
	0,0600	0,0377	21,83	69,92	7,90	1,10	1,0000	3
	0,0550	0,0381	18,96	38,01	7,90	1,10	1,0000	4
6. način određivanja parametara	0,0538	0,0556	39,36	53,58	7,76	1,06	0,9635	1
	0,0581	0,0696	50,00	66,83	7,78	1,06	0,9926	2
	0,0591	0,0003	41,25	90,00	7,42	1,00	0,9993	3
	0,0534	0,0436	22,30	42,16	7,76	1,06	0,9498	4
Zadano	0,0550	0,0373	22,00	45,00	7,90	1,10		1
	0,0600	0,0373	22,00	60,00	7,90	1,10		2
	0,0600	0,0380	22,00	70,00	7,90	1,10		3
	0,0550	0,0380	19,00	38,00	7,90	1,10		4

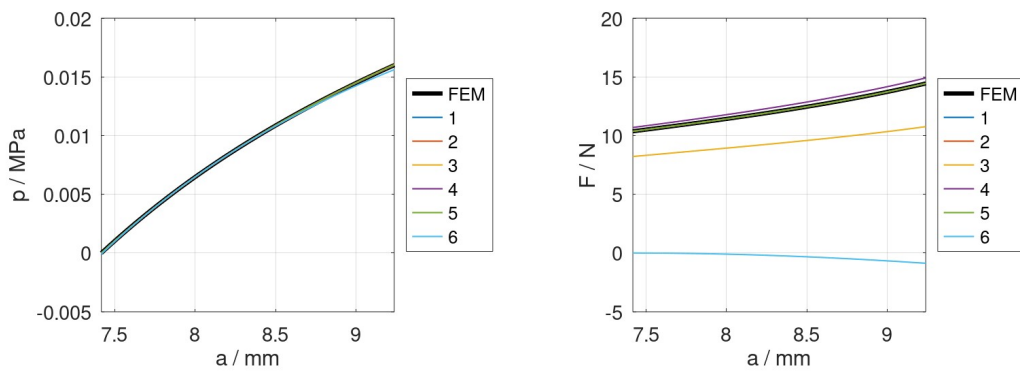
Ovisnosti tlaka i reducirane sile o unutarnjem polumjeru izračunatih iz podataka prema tablici 4. prikazane su grafički na slikama 51.-54.



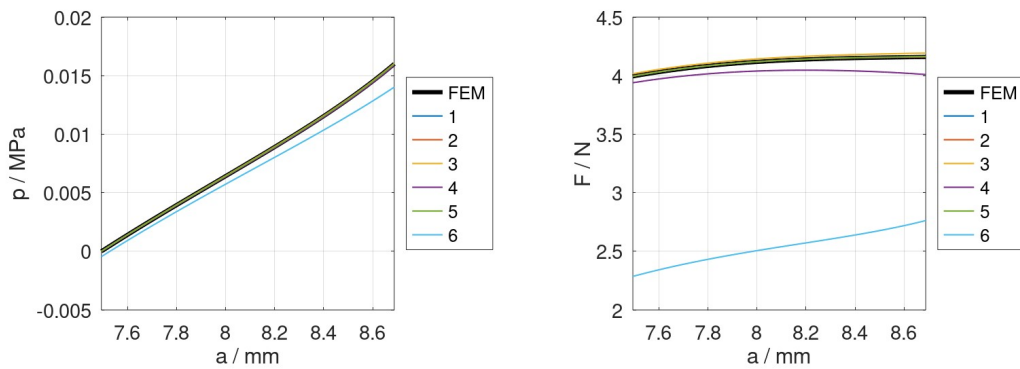
Slika 51. 1. materijal, načini određivanja parametara 1-6, 3 različite pretpostavke



Slika 52. 2. materijal, načini određivanja parametara 1-6, 3 različite pretpostavke



Slika 53. 3. materijal, načini određivanja parametara 1-6, 3 različite pretpostavke



Slika 54. 4. materijal, načini određivanja parametara 1-6, 3 različite pretpostavke

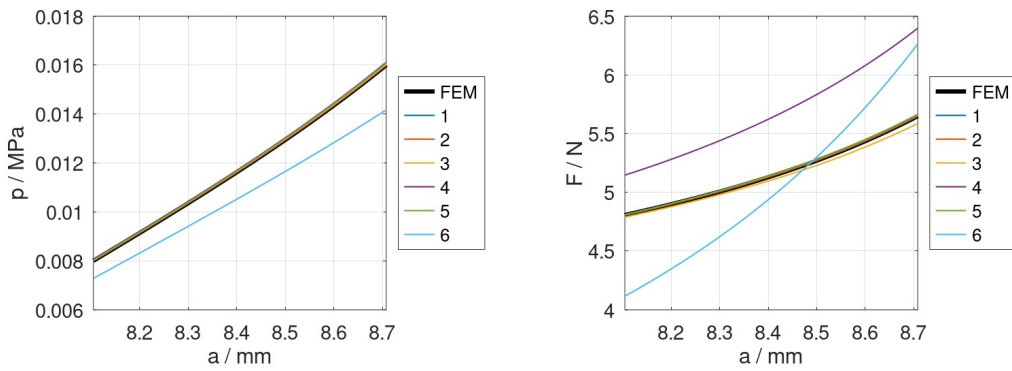


Tako izračunati parametri za tlakove od 0,008 MPa do 0,016 MPa prikazani su u tablici 5.

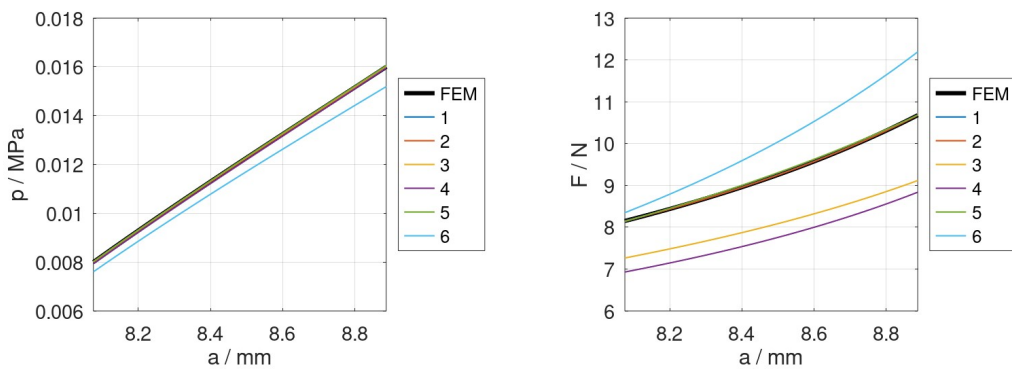
**Tablica 5: Izračunati parametri za 3 inicijalne pretpostavku i tlakove od 0,008-0,016 MPa**

	$C_1$ /MPa	$k_1$ /MPa	$k_2$	$\alpha$ /°	$A$ /mm	$\lambda_z$	$R^2$	Redni broj materijala
1. način određivanja parametara	0,0550	0,0375	21,88	44,98			1,0000	1
	0,0600	0,0374	21,96	59,98			1,0000	2
	0,0600	0,0380	21,99	69,99			1,0000	3
	0,0549	0,0382	18,93	38,00			0,9920	4
2. način određivanja parametara	0,0549	0,0376	21,87	44,99	7,90		1,0000	1
	0,0600	0,0371	22,07	60,01	7,90		1,0000	2
	0,0599	0,0386	21,67	69,89	7,90		1,0000	3
	0,0549	0,0381	18,95	38,02	7,90		0,9925	4
3. način određivanja parametara	0,0551	0,0382	21,22	44,71			0,9997	1
	0,0597	0,0412	16,47	57,14			0,9999	2
	0,0597	0,0417	9,76	64,14			1,0000	3
	0,0552	0,0383	18,74	38,04			0,9998	4
4. način određivanja parametara	0,0543	0,0388	23,85	47,18	7,91		0,9987	1
	0,0586	0,0374	18,37	56,69	7,89		0,9990	2
	0,0662	0,0002	25,18	0,00	7,80		0,9995	3
	0,0558	0,0386	25,41	44,71	7,94		0,9768	4
5. način određivanja parametara	0,0540	0,0394	21,01	44,78	7,91	1,10	1,0000	1
	0,0558	0,0709	15,27	58,69	7,92	1,09	1,0000	2
	0,0584	0,0608	18,01	69,07	7,89	1,09	1,0000	3
	0,0459	0,0537	13,78	36,86	7,96	1,12	0,9999	4
6. način određivanja parametara	0,0537	0,0620	50,00	56,45	7,75	1,05	0,7182	1
	0,0576	0,0851	50,00	66,67	7,75	1,06	0,9381	2
	0,0625	0,0001	13,69	0,00	7,58	1,04	0,9990	3
	0,0554	0,0588	50,00	53,95	7,77	1,05	0,7153	4
Zadano	0,0550	0,0373	22,00	45,00	7,90	1,10	0,00	1
	0,0600	0,0373	22,00	60,00	7,90	1,10		2
	0,0600	0,0380	22,00	70,00	7,90	1,10		3
	0,0550	0,0380	19,00	38,00	7,90	1,10		4

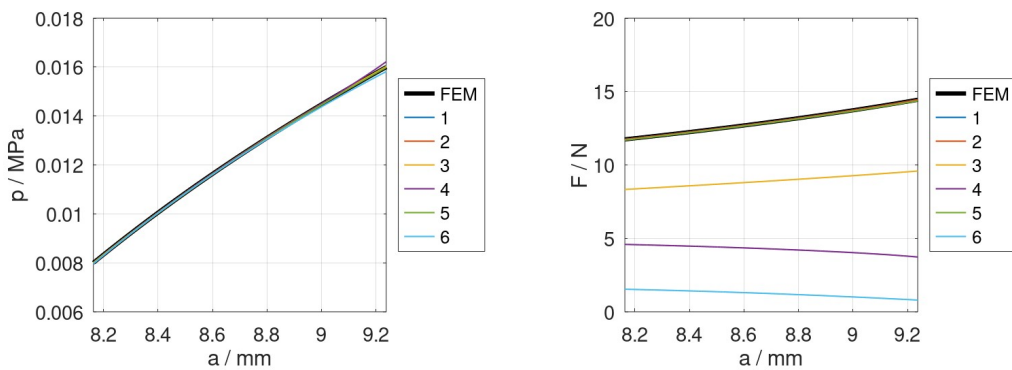
Ovisnosti tlaka i reducirane sile o unutarnjem polumjeru izračunatih iz podataka prema tablici 5. prikazane su grafički na slikama 55.-58.



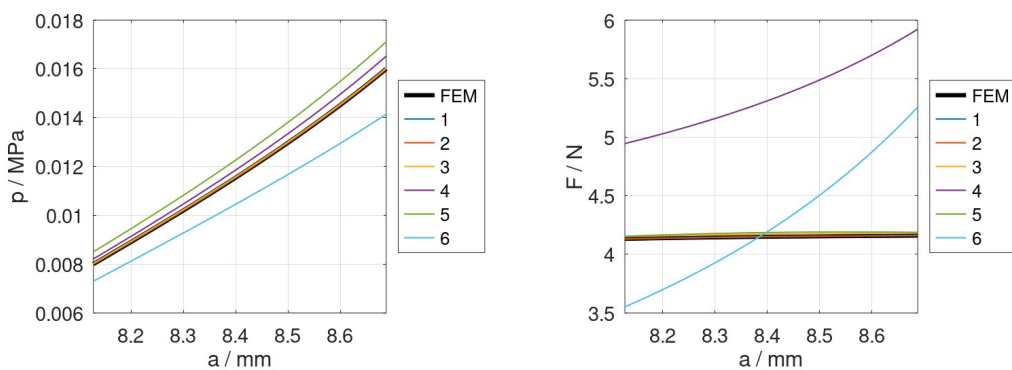
Slika 55. 1. materijal, načini određivanja parametara 1-6, 3 različite pretpostavke, 0,008-0,016 MPa



Slika 56. 2. materijal, načini određivanja parametara 1-6, 3 različite pretpostavke, 0,008-0,016 MPa



Slika 57. 3. materijal, načini određivanja parametara 1-6, 3 različite pretpostavke, 0,008-0,016 MPa



Slika 58. 4. materijal, načini određivanja parametara 1-6, 3 različite pretpostavke, 0,008-0,016 MPa

Tablica 6: Inicijalne pretpostavke

$C_1$ /MPa	$k_1$ /MPa	$k_2$	$\alpha$ /°	$A$ /mm	$\lambda_z$
0,10	0,10	10	45	8,5	1
0,05	0,05	20	30	6,8	1
0,02	0,02	25	55	7,0	1

Usporedbom slika 43.-50. sa slikama 51.-58. vidljivo je da se poklapanje krivulja tlaka i krivulja sila poboljšava sa povećanjem setova inicijalnih pretpostavki. Također, usporedbom slika 51.-54. sa slikama 55.-58., može se zaključiti da je poklapanje krivulja tlaka i krivulja sila bolje kada se parametri određuju iz raspona tlakova od 0 do 0,016 MPa nego kada se određuju iz raspona tlakova od 0,008 do 0,016 MPa.

Za načine određivanja parametara u kojima se ne uzima u obzir sila, poklapanje krivulje sila generalno je loše, no može se dogoditi i zadovoljavajuće poklapanje (primjer su dobrog poklapanja krivulje dobivene 3. načinom određivanja parametara, za 1. i 4. materijal, i za raspone tlakova od 0 MPa do 0,016 MPa i za raspone tlakova od 0,008 MPa do 0,016 MPa). Veća je vjerojatnost dobrog poklapanja za slučajeve gdje se parametri određuju od 0 MPa nego za slučajeve gdje se određuju od 0,008 MPa do 0,016 MPa.

Pogledom na brojeve u tablicama, može se zaključiti da dobro poklapanje krivulje tlaka ne jamči izračunata svojstva materijala ni približno slična stvarnima. Primjerice, za 3. materijal, za podatke dobivene iz raspona tlakova od 0,008 MPa do 0,016 MPa, 6. i 4. način određivanja parametara daju potpuno pogrešne rezultate. Zadani kut kolagenih vlakana iznosi 70°, a izračunat je kut od 0°.

## 8. Usporedba metoda

U nastavku, obrađene su dvije različite predložene funkcije cilja za *in vivo* određivanje parametara materijala arterijske stijenke, a potom su uspoređene s referentnom funkcijom cilja, koja odgovara 6. načinu određivanja podataka kako je opisan u 7.1.2.

### 8.1. Prema Smoljkić

Budući da je nemoguće *in vivo* mjeriti aksijalno opterećenje arterije, predložena su tri dodatna fiziološka uvjeta. Pretpostavljeno je da je reducirana sila otprilike konstantna tijekom jednog ciklusa otkucaja srca, da je energija deformiranja jednaka po cijelom presjeku arterije te da je u dijastoli (trenutku najnižeg tlaka u ciklusu otkucaja srca) energija deformiranja kolagenih vlakana jednaka energiji deformiranja matrice.

Sukladno tome, funkcija cilja dana je izrazom

$$\min \sum_{j=1}^n \left\{ \left[ w_p (P_j^{\text{mod}} - P_j^{\text{sim}}) \right]^2 + \left[ w_f \left( \frac{F_j^{\text{mod}}}{A_j^{\text{mod}}} - \frac{F_j^{\text{average}}}{A_j^{\text{mod}}} \right) \right]^2 \right\} + \sum_{k=1}^m \left\{ \left[ w_{\psi_1} (W_k^{\text{dias, mod}} - W^{\text{average}}) \right]^2 + \left[ w_{\psi_2} (W_{k, \text{col}}^{\text{dias, mod}} - W_{k, \text{mat}}^{\text{dias, mod}}) \right]^2 \right\}, \quad (8.1)$$

gdje su

$$F^{\text{average}} = \frac{\sum_{j=1}^n F_j^{\text{mod}}}{n} \quad (8.2)$$

srednja izračunata reducirana sila kroz cijeli ciklus,

$$W_{k, \text{col}}^{\text{dias, mod}} = \frac{k_1}{2k_2} \sum_{i=4,6} \{ \exp[k_2 (I_i - 1)^2] - 1 \} \quad (8.3)$$

$$I_{4,6} = \lambda_9^2 \cos^2 \alpha + \lambda_z^2 \sin^2 \alpha$$

energija deformiranja kolagenih vlakana u dijastoli,

$$W_{k, \text{mat}}^{\text{dias, mod}} = C_1 (\lambda_r^2 + \lambda_9^2 + \lambda_z^2 - 3) \quad (8.4)$$

energija deformiranja matrice u dijastoli,

$$W_k^{\text{dias, mod}} = W_{k, \text{col}}^{\text{dias, mod}} + W_{k, \text{mat}}^{\text{dias, mod}} \quad (8.5)$$

ukupna energija deformiranja i

$$W^{\text{average}} = \frac{\sum_{k=1}^m W_k^{\text{dias, mod}}}{m}$$

srednja energija deformiranja po presjeku [7].

U izrazu (8.1) veličine sa indeksom  $k$  vezane za energiju, odnose se na njihove vrijednosti po debljini stijenke. Indeks  $k=1$  označava položaj točke na unutarnjoj stijenki, indeks

$k=m$  položaj točke na vanjskoj stijenci, a bilo koji iznos  $1 < k < m$  označava  $k$ -tu od  $m$  ekvidistantnih točaka po debljini arterijske stijenske.

U jednadžbi (8.1),  $w_p$ ,  $w_f$ ,  $w_{\psi_1}$  i  $w_{\psi_2}$  predstavljaju težinske faktore iznosa

$$\begin{aligned} w_p &= 1, \\ w_f &= 0,01, \\ w_{\psi_1} &= 0,0001 \text{ i} \\ w_{\psi_2} &= 0,1. \end{aligned}$$

## 8.2. Prema van der Horstu

Kao i kod prethodne razmatrane metode, budući da nije moguće *in vivo* mjeriti aksijalno opterećenje arterije, predložen je dodatni fiziološki uvjet. Budući da su *in vitro* istraživanja pokazala da reducirana aksijalna sila ne ovisi o unutarnjem tlaku, pretpostavljeno je da za konačni korak povećanja tlaka, povećanje sile bude jednako nuli. Osim toga, razlika na dosadašnja razmatranja jest da u funkciju cilja ulazi unutarnji promjer u ovisnosti o tlaku, a ne tlak u ovisnosti o unutarnjem promjeru, no to se zapravo svodi na isto [13]. Tako opisana funkcija cilja dana je izrazom

$$\min \sum_{j=1}^n \left[ (a_j^{\text{mod}} - a_j^{\text{sim}})^2 + w_F (\Delta F_z^{\text{sim}})^2 \right], \quad (8.6)$$

gdje  $w_F$  predstavlja težinski faktor iznosa

$$w_F = 0,01.$$

## 8.3. Usporedba

Predložena funkcija cilja prema Smoljkić pretpostavlja da je u diastoli energija deformiranja kolagenih vlakana jednaka energiji deformiranja matrice. Budući da je krutost kolagenih vlakana veća od krutosti matrice, ta tvrdnja se oslanja na činjenicu da u neopterećenoj konfiguraciji, u arterijskoj stijenci postoje zaostala naprezanja. S obzirom na to da modeliranje takvog ponašanja pomoću *Abaqus* programskog paketa iziskuje programiranje materijala, u ovom radu nije uzeto u obzir

Obje predložene funkcije cilja u obzir uzimaju međusobnu zavisnost tlaka i unutarnjeg polumjera. Također, obje funkcije cilja pretpostavljaju konstantnu silu tijekom jednog ciklusa otkucaja srca.

Određeni su parametri pomoću dvije iznad predložene funkcije cilja te pomoću funkcije cilja (7.1), uz 6. način određivanja parametara (koji je korišten kao referentna metoda), kako je opisano u poglavlju 7.1.2. ovog rada. Za sve tri metode, pretpostavljeni su nepoznati neopterećeni unutarnji radijus  $A$  i nepoznato istežanje  $\lambda_z$ . Rezultati za raspone tlakova od 0 MPa do 0,016 MPa dani su u tablici 7., a rezultati za raspone tlakova od 0,008 MPa do 0,016 MPa dani su u tablici 8.

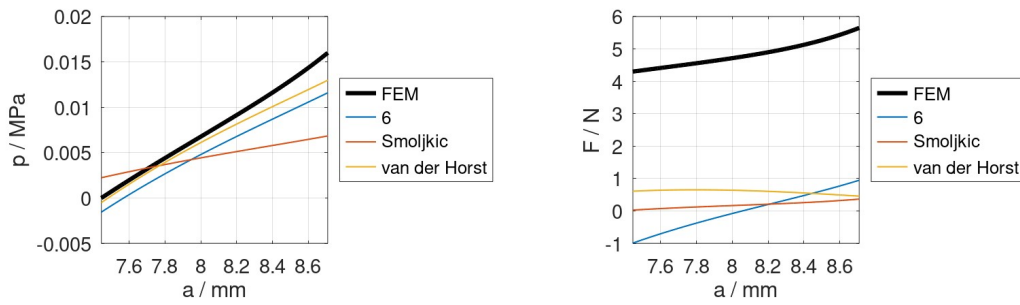
**Tablica 7: Izračunati parametri za 3 inicijalne pretpostavku i tlakove od 0,000-0,016 MPa, usporedba neinvazivnih metoda**

	$C_1$ /MPa	$k_1$ /MPa	$k_2$	$\alpha$ /°	$A$ /mm	$\lambda_z$	$R^2$	Redni broj materijala
6. način određivanja parametara	0,0538	0,0556	39,36	53,58	7,76	1,06	0,9635	1
	0,0581	0,0696	50,00	66,83	7,78	1,06	0,9926	2
	0,0591	0,0003	41,25	90,00	7,42	1,00	0,9993	3
	0,0534	0,0436	22,30	42,16	7,76	1,06	0,9498	4
Prema Smoljkić	0,0198	0,0258	47,65	52,53	6,93	1,01	0,7169	1
	0,0206	0,0250	42,29	52,83	6,94	1,01	0,8959	2
	0,0218	0,0251	28,85	53,41	6,94	1,01	0,7174	3
	0,0199	0,0256	47,27	52,58	6,93	1,01	0,6723	4
Prema van der Horst	0,0582	0,0181	35,86	42,32	7,51	1,02	0,9833	1
	0,0603	0,0151	25,88	48,18	7,46	1,02	0,9891	2
	0,0562	0,0172	26,45	56,33	7,44	1,01	0,9980	3
	0,0621	0,0174	38,69	40,74	7,66	1,04	0,9725	4
Zadano	0,0550	0,0373	22,00	45,00	7,90	1,10		1
	0,0600	0,0373	22,00	60,00	7,90	1,10		2
	0,0600	0,0380	22,00	70,00	7,90	1,10		3
	0,0550	0,0380	19,00	38,00	7,90	1,10		4

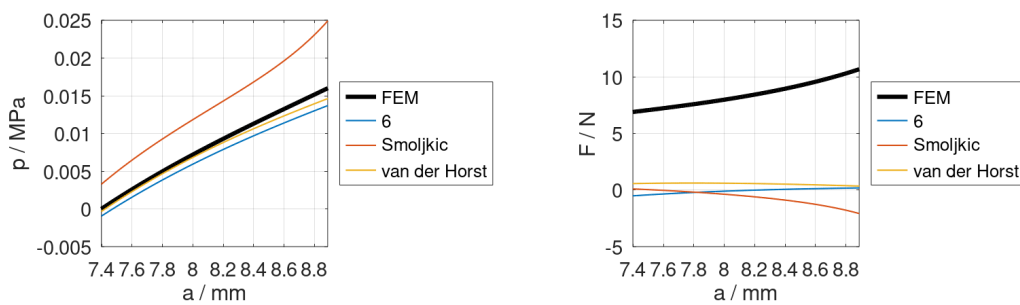
Već je iz tabličnih podataka vidljivo da metoda prema Smoljkić ne opisuje realno korišteni virtualni eksperiment. Izračunati kutevi vrlo malo ovise o zadanim kutevima, odnosno njihova je vrijednost u rasponu između  $52^\circ$  i  $54^\circ$ .

Preostale dvije metode također ne opisuju dobro ponašanje materijala, što je također vidljivo iz izračunatih kuteva, no dobiveni rasponi kuteva su ipak veći. Također, za obje metode, u razmatranim slučajevima, veći zadani kut rezultira sa većim izračunatim kutem.

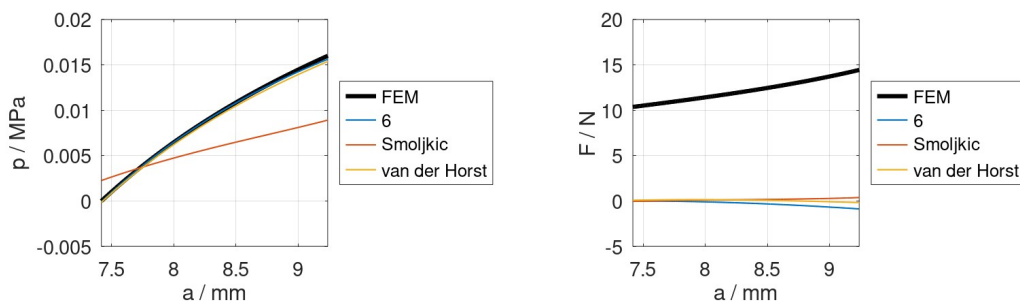
Ovisnosti tlaka i reducirane sile o unutarnjem polumjeru izračunatih iz podataka prema tablici 7. prikazane su grafički na slikama 59.-62.



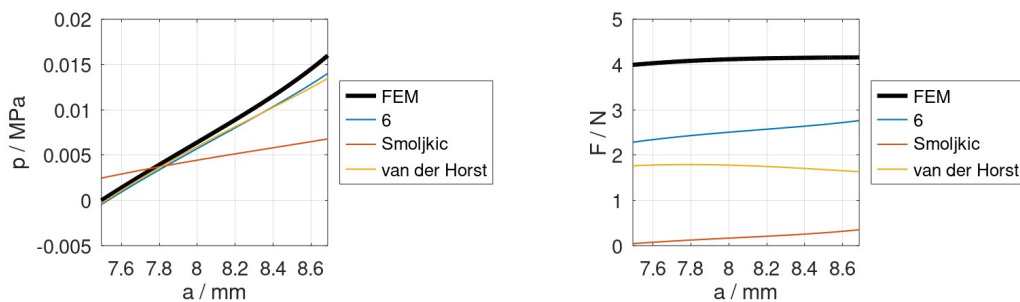
Slika 59. Usporedba metoda prema Smoljkici i prema van der Horstu, 1. materijal



Slika 60. Usporedba metoda prema Smoljkici i prema van der Horstu, 2. materijal



Slika 61. Usporedba metoda prema Smoljkici i prema van der Horstu, 3. materijal



Slika 62. Usporedba metoda prema Smoljkici i prema van der Horstu, 4. materijal

Na slikama 59.-62., vidljivo je da se krivulje tlakova za 6. način određivanja parametara i za način određivanja parametara prema van der Horstu dobro poklapaju s krivuljama virtualnog eksperimenta, dok za način određivanja prema Smoljkić nije dobiveno dobro poklapanje krivulja tlaka.

Za nijednu razmatranu metodu nije dobiveno dobro poklapanje krivulja reduciranih sila.

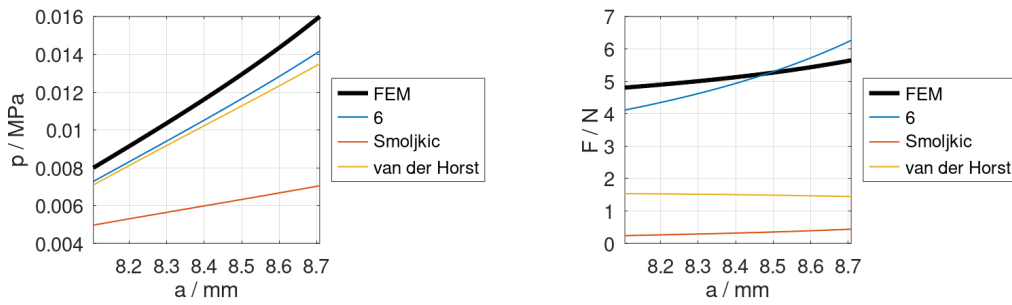
**Tablica 8: Izračunati parametri za 3 inicijalne pretpostavku i tlakove od 0,008-0,016 MPa, usporedba neinvazivnih metoda**

	$C_1$ /MPa	$k_1$ /MPa	$k_2$	$\alpha$ /°	A /mm	$\lambda_z$	R <sup>2</sup>	Redni broj materijala
6. način određivanja parametara	0,0537	0,0620	50,00	56,45	7,75	1,05	0,7182	1
	0,0576	0,0851	50,00	66,67	7,75	1,06	0,9381	2
	0,0625	0,0001	13,69	0,00	7,58	1,03	0,9989	3
	0,0554	0,0588	50,00	53,95	7,77	1,05	0,7153	4
Prema Smoljkić	0,0201	0,0273	45,29	52,75	6,92	1,02	0,5443	1
	0,0203	0,0258	41,95	52,86	6,93	1,01	0,5634	2
	0,0229	0,0286	14,69	51,31	6,89	1,02	0,7837	3
	0,0199	0,0263	47,92	52,44	6,93	1,01	0,5248	4
Prema van der Horst	0,0585	0,0278	23,45	41,48	7,63	1,04	0,9570	1
	0,0622	0,0175	12,63	45,10	7,76	1,09	0,8831	2
	0,0610	0,0026	0,00	48,17	7,47	1,00	0,9801	3
	0,0580	0,0333	26,25	41,51	7,59	1,02	0,9847	4
Zadano	0,0550	0,0373	22,00	45,00	7,90	1,10		1
	0,0600	0,0373	22,00	60,00	7,90	1,10		2
	0,0600	0,0380	22,00	70,00	7,90	1,10		3
	0,0550	0,0380	19,00	38,00	7,90	1,10		4

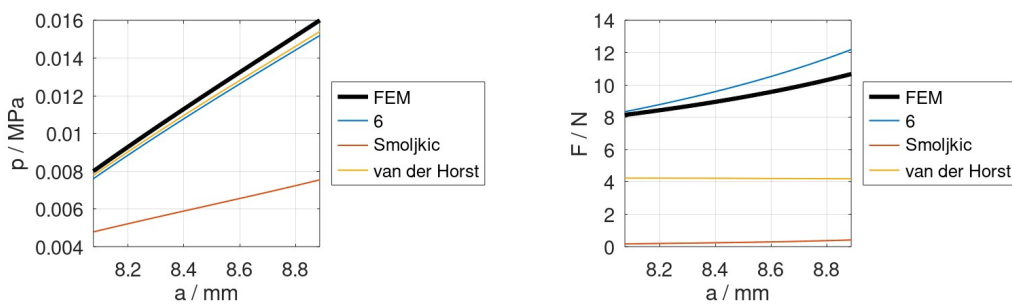
Problemi uočeni kod rezultata određivanja parametara za raspone tlakova od 0 do 0,016 MPa, pojavljuju se i kod određivanja parametara za raspone tlakova od 0,008 MPa do 0,016 MPa. Ipak, najgore utvrđen kut  $\alpha$  odgovara kutu izračunatom za 3. materijal, pri 6. načinu određivanja parametara, gdje on iznosi 0°.

Ovisnosti tlaka i reducirane sile o unutarnjem polumjeru izračunatih iz podataka prema tablici 8. prikazane su grafički na slikama 63.-66.

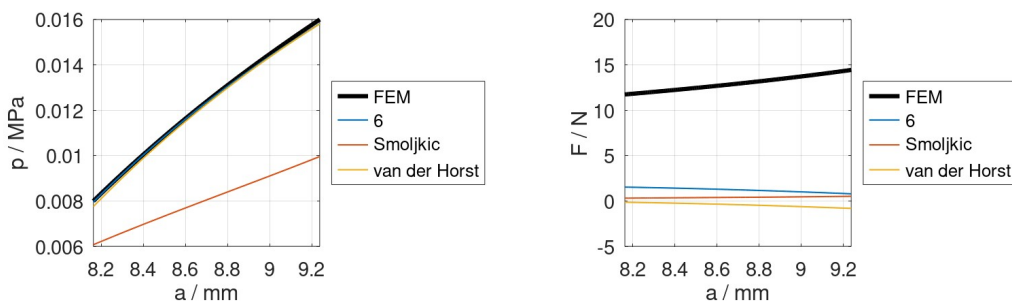




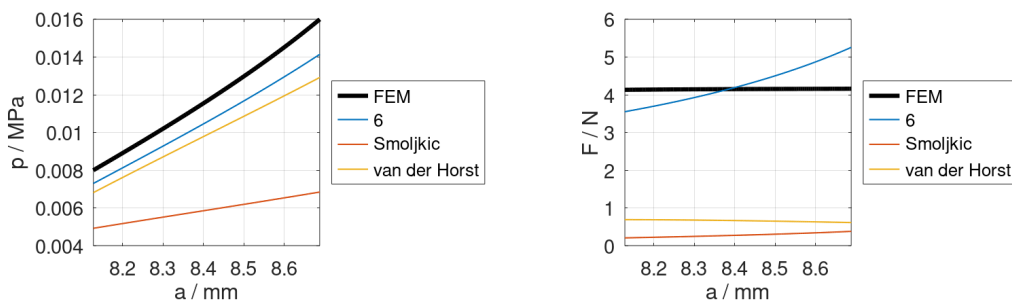
Slika 63. Usporedba metoda prema Smoljkić i prema van der Horstu, 1. materijal, od sistole do dijastole



Slika 64. Usporedba metoda prema Smoljkić i prema van der Horstu, 2. materijal, od sistole do dijastole



Slika 65. Usporedba metoda prema Smoljkić i prema van der Horstu, 3. materijal, od sistole do dijastole



Slika 66. Usporedba metoda prema Smoljkić i prema van der Horstu, 4. materijal, od sistole do dijastole

Ponovno je dobiveno relativno dobro poklapanje krivulja tlaka za 6. način određivanja parametara i za način određivanja parametara prema van der Horstu, dok je dobiveno lošije poklapanje tlaka prema Smoljkić. Usporedbom primarne metrike za validaciju modela ( $R^2$ ) je vidljivo da za standardnu optimizaciju (6. način) rezultati ovise o materijalima. Za drugi i treći materijal je dobiveno odlično poklapanje, dok za ostala dva nije ni približno zadovoljavajuće. S druge strane, metodom po van der Herstu je dobiveno nešto slabije poklapanje, ali je konzistentno.

Poklapanje krivulja sile ponovno je vrlo loše za metode određivanja parametara prema Smoljkić i prema van der Horstu, no zanimljivo je primijetiti da je poklapanje krivulja sila za 6. način određivanja parametara, bolje za raspone od 0,008 MPa do 0,016 MPa nego za raspone tlakova od 0 MPa do 0,016 MPa.

## 9. Zaključak

U radu su uspoređene metode za neinvazivno, *in vivo* određivanje parametara materijala arterijske stijenke, na temelju rezultata virtualnog eksperimenta napuhavanja arterije tlakom iznutra, uz konstantno predistezanje.

Najprije su virtualni eksperiment i određivanje parametra materijala odrađeni za *Neo Hookeov* materijalni model, a zatim za *Holzappel-Gasser-Ogden* materijalni model, koji je u stanju opisati anizotropno ponašanje arterijske stijenke.

Za *Holzappel-Gasser-Ogden* materijalni model, provjereni su utjecaj nepoznavanja reducirane sile, utjecaj nepoznavanja aksijalnog predistezanja te utjecaj nepoznavanja neopterećene geometrije arterijske stijenke.

Parametri materijala su izračunati iz virtualnog eksperimenta, za raspone tlakova od 0 MPa do 0,016 MPa (što je moguće postići *in vitro* eksperimentom) te za raspone tlakova od 0,008 MPa do 0,016 MPa (što odgovara fiziološkom rasponu tlakova te je moguće postići *in vivo* eksperimentom). Nakon provedbe virtualnog eksperimenta, parametri materijala izračunati su pomoću funkcije cilja koja u obzir uzima ovisnost tlaka o trenutnom unutarnjem promjeru te ovisnost reducirane sile o trenutnom unutarnjem promjeru.

Uočeno je da je utjecaj inicijalnih pretpostavki veći za slučajeve određivanja parametara u kojima je veći broj nepoznatih parametara, no da poznavanje manje parametara ne znači nužno lošije dobivene rezultate.

Utvrđeno je da se za više setova inicijalnih pretpostavki dobivaju bolji rezultati nego za samo jedan set inicijalnih pretpostavki.

Pokazano je da nepoznavanje reducirane sile ima veliki utjecaj na točnost izračunatih parametara materijala. Budući da prilikom *in vivo* eksperimenata reducirana sila nije poznata, važno je u funkciju cilja uključiti dodatne fiziološke uvjete.

Uspoređene su dvije funkcije cilja predložene u literaturi koje u obzir uzimaju fiziološke uvjete, sa referentnom funkcijom cilja, koja u obzir uzima samo ovisnost tlaka o trenutnom unutarnjem polumjeru. Budući da pretpostavke na kojima se zasnivaju predložene funkcije cilja nisu adekvatno modelirane virtualnim eksperimentom, nije dobiveno poboljšanje izračunatih parametara. Međutim, metoda po van der Herstu se pokazala konzistentnijom od standardne optimizacije.

Kako bi se adekvatno modelirala stijenka arterije za testiranje metoda za *in vivo* određivanja parametara materijala arterije virtualnim eksperimentom, potrebno je koristiti rutinu za korisnički materijal (eng. *user material*) koji u neopterećenom stanju može opisivati zaostala naprezanja.

## Literatura

- [1] Gasser TC, Ogden RW, Holzapfel GA. Hyperelastic modelling of arterial layers with distributed collagen fibre orientations. *J R Soc Interface*. 2006;3(6):15-35.
- [2] Smoljkić M, Fehervary H, Van den Bergh P, et al. Biomechanical Characterization of Ascending Aortic Aneurysms. *Biomech Model Mechanobiol*. 2017;16(2):705-720.
- [3] Gasser TC, Ogden RW, Holzapfel GA. Hyperelastic modelling of arterial layers with distributed collagen fibre orientations. *J R Soc Interface*. 2006;3(6):15-35.
- [4] Holzapfel GA, Ogden RW. Modelling the layer-specific three-dimensional residual stresses in arteries, with an application to the human aorta. *J R Soc Interface*. 2010;7(46):787-799.
- [5] Vande Geest JP, Sacks MS, Vorp DA. The effects of aneurysm on the biaxial mechanical behavior of human abdominal aorta. *J Biomech*. 2006;39(7):1324-1334.
- [6] Liu M, Liang L, Sun W. A new inverse method for estimation of in vivo mechanical properties of the aortic wall. *J Mech Behav Biomed Mater*. 2017;72:148-158.
- [7] Smoljkić M, Verbrugge P, Larsson M, et al. Comparison of in vivo vs. ex situ obtained material properties of sheep common carotid artery. *Med Eng Phys*. 2018;55:16-24
- [8] Alfrević I, Uvod u tenzore i mehaniku kontinuuma, Golden marketing, Zagreb, 2003
- [9] Knapp I, Diplomski rad - Razvoj postupka određivanja materijalnih parametara hiperelastičnog modela iz pokusa istezanje - tlak, Zagreb: Fakultet Strojarsstva i Brodogradnje, 2020.
- [10] <https://abaqus-docs.mit.edu/2017/English/SIMACAEELMRefMap/simaelm-r-3delem.htm> (9. 7. 2024.)
- [11] <https://abaqus-docs.mit.edu/2017/English/SIMACAEGSARefMap/simagsa-c-ctmhybrid.htm> (9. 7. 2024.)
- [12] <https://www.scribbr.com/statistics/coefficient-of-determination/> (9. 7. 2024.)
- [13] van der Horst A, van den Broek CN, van de Vosse FN, Rutten MC. The fiber orientation in the coronary arterial wall at physiological loading evaluated with a two-fiber constitutive model. *Biomech Model Mechanobiol*. 2012;11(3-4):533-542