

# Proračun čvrstoće vertikalnog spremnika za zrak

---

Črnac, Laura

Undergraduate thesis / Završni rad

2024

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:235:713233>

Rights / Prava: [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2024-08-18**

Repository / Repozitorij:

[Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# ZAVRŠNI RAD

Laura Črnac

Zagreb, 2024.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# ZAVRŠNI RAD

Mentor:

Izv. prof. dr. sc. Ivica Skozrit

Student:

Laura Črnac

Zagreb, 2024.

Izjavljujem da sam ovaj rad izradila samostalno koristeći znanja stečena tijekom studija i navedenu literaturu.

Zahvaljujem se svome mentoru izvanrednom profesoru Ivici Skozritu, profesorima koji su nesebično dijelili svoje znanje, obitelji koja je bila uz mene, posebno moji roditelji, u svakoj mojoj odluci te prijateljima koji su moj put studiranja učinili ljepšim.

Laura Črnac





SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE



Središnje povjerenstvo za završne i diplomske ispite

Povjerenstvo za završne i diplomske ispite studija strojarstva za smjerove:

Procesno-energetski, konstrukcijski, inženjersko modeliranje i računalne simulacije i brodstrojarski

Sveučilište u Zagrebu Fakultet strojarstva i brodogradnje	
Datum	Prilog
Klasa: 602 – 04 / 24 – 06 / 1	
Ur.broj: 15 – 24 –	

## ZAVRŠNI ZADATAK

Student: **Laura Črnac**

JMBAG: **0035225910**

Naslov rada na hrvatskom jeziku: **Proračun čvrstoće vertikalnog spremnika za zrak**

Naslov rada na engleskom jeziku: **Strength calculation of vertical air tank**

Opis zadatka:

Spremnici koji se koriste na brodovima za skladištenje stlačenog zraka, igraju ključnu ulogu u pokretanju glavnih brodskih motora. Ovi spremnici su tipično oblikovani kao cilindrični sa sfernim krajevima, a služe za pohranjivanje komprimiranog zraka koji se koristi za pokretanje glavnih motora. Komprimirani zrak iz ovih spremnika usmjerava se u cilindre motora kao i gorivo te omogućuju početno gibanje klipa tj. rotaciju koljenastog vratila potrebnu za paljenje motora.

Za zadane podatke o konstrukciji, dimenzijama te opterećenju i rubnim uvjetima tlačnog spremnika potrebno je provjeriti da li spremnik zadovoljava uvjet čvrstoće, tj. potrebno je izvršiti kontrolni proračun spremnika. Proračun je potrebno provesti analitički i numerički te usporediti dobivene rezultate. Numerički proračun provesti primjenom programskog paketa Abaqus® koji se temelji na metodi konačnih elemenata. U numeričkim analizama koristiti dostupne konačne elemente iz baze programskog paketa. Potrebno je izvršiti verifikaciju primijenjenih konačnih elemenata i procedura na jednostavnijim problemima te rezultate usporediti s dostupnim analitičkim rezultatima.

U radu je potrebno navesti korištenu literaturu i eventualno dobivenu pomoć

Zadatak zadan:

30. 11. 2023.

Datum predaje rada:

1. rok: 22. i 23. 2. 2024.
2. rok (izvanredni): 11. 7. 2024.
3. rok: 19. i 20. 9. 2024.

Predviđeni datumi obrane:

1. rok: 26. 2. – 1. 3. 2024.
2. rok (izvanredni): 15. 7. 2024.
3. rok: 23. 9. – 27. 9. 2024.

Zadatak zadao:

Izv. prof. dr. sc. Ivica Skozrit

*Skozrit Ivica*

Predsjednik Povjerenstva:

Prof. dr. sc. Vladimir Soldo

*V Soldo*

---

**SADRŽAJ**

Popis tablica .....	V
1. Uvod .....	1
2. Opis objekta analize.....	5
2.2. Dimenzije spremnika.....	5
2.2. Materijal spremnika.....	6
3. Analitički proračun .....	7
3.1. Uvod u teoriju ljsusaka .....	8
3.2. Membransko stanje naprezanja u cilindričnoj ljsusci .....	9
3.3. Membransko stanje naprezanja u eliptičnoj ljsusci .....	11
3.4. Rubni uvjeti .....	15
3.4.1. Savijanje tanke cilindrične ljsuske.....	15
3.4.2. Savijanje eliptične ljsuske.....	17
3.5. Vrijednosti sila i momenata na dodiru ljsusaka .....	18
3.6. Raspodjela pomaka, naprezanja i momenata spoja ljsusaka.....	18
3.6.1. Cilindrična ljsuska .....	19
3.6.2. Eliptična ljsuska.....	22
3.7. Ekvivalentna naprezanja .....	29
3.8. Proračun čvrstoće spremnika .....	36
4. Numeričko rješenje.....	37
4.1. Uvod analize.....	37
4.2. Konačni elementi u ABAQUS® programskom paketu .....	37
4.3. Konačni elementi korišteni u radu .....	38
4.3.1. S4 konačni element .....	38
4.3.2. CAX3 konačni element .....	39
4.3.3. CAX8 konačni element .....	40
4.4. Verifikacija konačnih elemenata .....	40
4.4.1. Cilindrična ljsuska .....	41
4.4.2. Eliptična ljsuska.....	54
4.5. Numerička analiza spremnika .....	56
4.6. Proračun čvrstoće spremnika iz numeričkih podataka .....	65
5. Zaključak .....	67

## Popis slika

Slika 1. Spremnici zraka u brodskim pogonima [1].....	1
Slika 2. Sustav komprimiranog zraka brodskog pogona [1] .....	2
Slika 3. Karakteristični dijelovi uobičajenog spremnika stlačenog zraka [1].....	4
Slika 4. Izvadak iz tehničke dokumentacije spremnika [2].....	5
Slika 5. Dimenzije eliptične glave.....	6
Slika 6. Pojednostavljeni model vertikalnog spremnika .....	7
Slika 7. Opterećenja cilindrične ljuske.....	9
Slika 8. Opterećenja vertikalnog spremnika .....	12
Slika 9. Unutarnja i vanjska opterećenja eliptične ljuske.....	14
Slika 10. Pretpostavljeni smjerovi unutarnjih sila i momenata na spoju ljusaka .....	17
Slika 11. Raspodjela pomaka duž meridijana cilindra .....	20
Slika 12 Raspodjela zakreta duž meridijana cilindra .....	20
Slika 13. Raspodjela meridijalnog momenta savijanja duž meridijana cilindra .....	21
Slika 14. Raspodjela cirkularnog naprezanja duž meridijana cilindra .....	21
Slika 15. Raspodjela meridijalnog naprezanja duž meridijana cilindra .....	22
Slika 16. Diskontinuitet krivulje eliptične glave [9] .....	23
Slika 17. Aproksimacija eliptičnog luka sa dvjema kružnicama .....	25
Slika 18. Raspodjela radijanog pomaka duž luka eliptične ljuske .....	25
Slika 19. Raspodjela zakreta eliptične ljuske duž luka elipse .....	26
Slika 20. Raspodjela meridijalne sile u ovisnosti o kutu $\vartheta$ .....	26
Slika 21. Raspodjela cirkularne sile u ovisnosti o kutu $\vartheta$ .....	27
Slika 22. Raspodjela meridijalnog momenta u ovisnosti o kutu $\vartheta$ .....	27
Slika 23. Raspodjela meridijalnog naprezanja u ovisnosti kuta $\vartheta$ .....	28
Slika 24. Raspodjela cirkularnog naprezanja u ovisnosti kuta $\vartheta$ .....	28
Slika 25. Grafički prikaz deformacija spremnika na granici dodira [7].....	29
Slika 26. Raspodjela ekvivalentnog naprezanja na vanjskom rubu cilindrične ljuske.....	32
Slika 27. Raspodjela ekvivalentnog naprezanja na unutarnjem rubu cilindrične ljuske .....	32
Slika 28. Raspodjela cirkularnog naprezanja vanjskog ruba eliptične ljuske .....	33
Slika 29. Raspodjela cirkularnog naprezanja vanjskog ruba eliptične ljuske .....	33
Slika 30. Raspodjela ekvivalentnog naprezanja vanjskog ruba eliptične ljuske .....	34
Slika 31. Raspodjela ekvivalentnog naprezanja vanjskog ruba eliptične ljuske .....	34

Slika 32. Raspodjela cirkularnog naprezanja unutarnjeg ruba eliptične ljuske.....	35
Slika 33. Raspodjela meridijalnog naprezanja unutarnjeg ruba eliptične ljuske.....	35
Slika 34. Vrste konačnih elemenata dostupne za analizu konstrukcija [10] .....	38
Slika 35. S4 element (lijevo) i S4R (desno) [11] .....	39
Slika 36. CAX3 konačni element [11] .....	39
Slika 37. CAX8 konačni element [12] .....	40
Slika 38. Postavljeni rubni uvjet i opterećenje tlakom $p$ .....	41
Slika 39. Prikaz rezultata cirkularnog naprezanja (lijevo) i radijalnog pomaka (desno) za generiranu mrežu od 28 CAX8 elemenata .....	42
Slika 40. Prikaz rezultata cirkularnog naprezanja (lijevo) i radijalnog pomaka (desno) za generiranu mrežu od 100 CAX8 elemenata .....	42
Slika 41. Prikaz rezultata cirkularnog naprezanja (lijevo) i radijalnog pomaka (desno) za generiranu mrežu od 234 CAX8 elemenata .....	42
Slika 42. Konvergencija rezultata cirkularnog naprezanja $\sigma\varphi$ u numeričkoj analizi pri povećanju broja CAX8 konačnih elemenata .....	43
Slika 43. Konvergencija rezultata radijalnog pomaka u numeričkoj analizi pri povećanju broja CAX8 konačnih elemenata.....	43
Slika 44. Određivanje radijalnog pomaka središnje plohe za umreženje od 100 CAX8 elemenata .....	44
Slika 45. Prikaz rezultata cirkularnog naprezanja (lijevo) i radijalnog pomaka (desno) za generiranu mrežu od 26 CAX3 elemenata .....	46
Slika 46. Prikaz rezultata cirkularnog naprezanja (lijevo) i radijalnog pomaka (desno) za generiranu mrežu od 100 CAX3 elemenata .....	46
Slika 47. Prikaz rezultata cirkularnog naprezanja (lijevo) i radijalnog pomaka (desno) za generiranu mrežu od 400 CAX3 elemenata .....	46
Slika 48. Konvergencija rezultata cirkularnog naprezanja $\sigma\varphi$ u numeričkoj analizi pri povećanju broja CAX3 konačnih elemenata .....	47
Slika 49. Konvergencija rezultata radijalnog pomaka u numeričkoj analizi pri povećanju broja CAX3 konačnih elemenata.....	47
Slika 50. Modeli diskretizirani S4 elementima: a) 56 elemenata, b) 120 elemenata, c) 323 elemenata.....	48
Slika 51. Postavljeni rubni uvjet i opterećenje površinskim tlakom $p$ .....	49

Slika 52. Prikaz rezultata cirkularnog naprezanja (lijevo) i radijalnog pomaka (desno) za generiranu mrežu od 56 S4 elemenata .....	49
Slika 53. Prikaz rezultata cirkularnog naprezanja (lijevo) i radijalnog pomaka (desno) za generiranu mrežu od 120 S4 elemenata .....	50
Slika 54. Prikaz rezultata cirkularnog naprezanja (lijevo) i radijalnog pomaka (desno) za generiranu mrežu od 323 S4 elemenata .....	50
Slika 55. Konvergencija rezultata cirkularnog naprezanja $\sigma\varphi$ u numeričkoj analizi pri povećanju broja S4 konačnih elemenata .....	51
Slika 56. Konvergencija rezultata radijalnog pomaka u numeričkoj analizi pri povećanju broja S4 konačnih elemenata .....	51
Slika 57. Usporedba rezultata radijalnog pomaka numeričke analize za razne elemente .....	53
Slika 58. Usporedba rezultata cirkularnog naprezanja numeričke analize za razne elemente .....	53
Slika 59. Opterećenje i rubni uvjeti postavljeni na eliptičnu ljusku.....	54
Slika 60. Prikaz rezultata cirkularnog naprezanja (lijevo) i radijalnog pomaka (desno) za generiranu mrežu od 23 CAX8 elemenata na eliptičnoj ljusci.....	54
Slika 61. Prikaz rezultata cirkularnog naprezanja (lijevo) i radijalnog pomaka (desno) za generiranu mrežu od 65 CAX8 elemenata na eliptičnoj ljusci.....	55
Slika 62. Prikaz rezultata cirkularnog naprezanja (lijevo) i radijalnog pomaka (desno) za generiranu mrežu od 182 CAX8 elemenata na eliptičnoj ljusci.....	55
Slika 63. Zadani granični uvjeti i opterećenja spremnika zraka .....	57
Slika 64. Lokalno postavljeno finije umreženje u području dodira ljuski .....	57
Slika 65. Radijalni pomak spremnika za zadano opterećenje u mjerilu, 1:1 (lijevo) i 100:1 (desno).....	58
Slika 66. Prikaz meridijalnog naprezanja spremnika za zadano opterećenje na vanjskom rubu spremnika (lijevo), na presjeku (sredina) i u unutarnjem rubu spremnika (desno) .....	58
Slika 67. Prikaz cirkularnog naprezanja spremnika za zadano opterećenje na vanjskom rubu spremnika (lijevo), na presjeku (sredina) i u unutarnjem rubu spremnika (desno) .....	59
Slika 68. Prikaz ekvivalentnog naprezanja spremnika za zadano opterećenje na vanjskom rubu spremnika (lijevo), na presjeku (sredina) i u unutarnjem rubu spremnika (desno) .....	59

Slika 69. Usporedba numeričkih i analitičkih rezultata ekvivalentnog naprezanja cilindrične ljuste .....	61
Slika 70. Usporedba numeričkih i analitičkih rezultata radijalnog pomaka cilindrične ljuste	62
Slika 71. Usporedba numeričkih i analitičkih rezultata ekvivalentnog naprezanja eliptične ljuste .....	62
Slika 72. Raspodjela meridijalnog naprezanja duž luka eliptične ljuste .....	63
Slika 73. Raspodjela cirkularnog naprezanja duž luka eliptične ljuste .....	63
Slika 74. Raspodjela radijalnog pomaka duž eliptične ljuste .....	64
Slika 75. Raspodjela meridijalnog naprezanja duž meridijana cilindra .....	64
Slika 76. Raspodjela cirkularnog naprezanja duž meridijana cilindra .....	64
Slika 77. Područje pojave koncentracije naprezanja na eliptičnoj ljusti .....	65

## Popis tablica

Tablica 1. Karakteristike materijala spremnika (E355E) [4] .....	6
Tablica 2 Promjena eliptičnog luka u ovisnosti o promjeni meridijalnog kuta .....	24
Tablica 3. Usporedba rezultata za iznose cirkularnog naprezanja i radijalnog pomaka za zadano opterećenje za CAX8 element .....	44
Tablica 4. Usporedba rezultata za iznose cirkularnog naprezanja i radijalnog pomaka za zadano opterećenje za CAX3 element .....	48
Tablica 5. Usporedba rezultata za iznose cirkularnog naprezanja i radijalnog pomaka za zadano opterećenje za S4 element .....	52
Tablica 6. Usporedba rezultata za iznose cirkularnog naprezanja i radijalnog pomaka eliptične ljuste za zadano opterećenje za CAX8 element .....	55
Tablica 7. Usporedba vrijednosti cirkularnog naprezanja i radijalnog pomaka na cilindričnoj ljusti spremnika .....	60
Tablica 8. Usporedba vrijednosti cirkularnog naprezanja i radijalnog pomaka na eliptičnoj ljusti spremnika .....	60

## Popis oznaka

$v_i$		vektor stupnjeva slobode $i$ -tog čvora konačnog elementa
$w^c, \sigma_g^c, \sigma_\varphi^c, M_g^c$	mm, MPa, Nmm/mm	funkcije raspodjele pomaka, naprezanja i momenata duž izvodnice cilindrične ljuske
$w_m^c$	mm	membranski radijalni pomak cilindra
$X_1$	N/mm	poopćena sila u smislu sile po jedinici duljine
$X_2$	Nmm/mm	poopćena sila u smislu momenta po jedinici duljine
$\alpha$	rad	kut zakreta
$\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{21}, \alpha_{22}$	mm <sup>2</sup> /N, mm/N, 1/N	uplivni koeficijenti
$\beta$	mm <sup>-1</sup>	geometrijsko-materijalna značajka ljuske
$g'$	rad	kut zakreta manjeg radijusa
$\nu$	-	Poissonov faktor
$\zeta$	-	nezavisna bezdimenzijska varijabla
$\sigma_e$	MPa	granica elastičnosti
$\sigma_{ekv}$	MPa	ekvivalentno naprezanje
$\sigma_{krit}$	MPa	kritično naprezanje
$\sigma_x^c, \sigma_\varphi^c$	MPa	membranska naprezanja cilindrične ljuske
$\sigma_g^e, \sigma_\varphi^e$	MPa	membranska naprezanja eliptične ljuske
$\sigma_g^U, \sigma_\varphi^U$	MPa	naprezanja na unutrašnjem rubu ljuske
$\sigma_g^V, \sigma_\varphi^V$	MPa	naprezanja na vanjskom rubu ljuske
$\gamma$		Parametar elipse
$R_0$	mm	Radijus zakrivljenja elipse
$D$	N/mm	krutost na savijanje
$Q_0$	N/mm	sila po jedinici duljine
$M_0$	Nmm/mm	moment po jedinici duljine

---

## Sažetak

Završni rad je prvenstveno usmjeren na sveobuhvatnu analizu spremnika stlačenog zraka, posebno konstruiranog za opskrbu sustava zrakom za pokretanje brodskog motora. Uz predviđene dimenzije spremnika, provedeno je temeljito ispitivanje čvrstoće za maksimalni ispitni tlak. Ova procjena obuhvatila je i analitičke izračune i numeričke simulacije, primjenom teorija membranskog naprezanja i teorije savijanja ljuske kako bi se osigurala što preciznija procjena. Posebna se pažnja posvetila kompleksnosti geometrije eliptične ljuske. U numeričkoj analizi korišten je softver baziran na metodi konačnih elemenata, ABAQUS<sup>®</sup>, za simulaciju ponašanja spremnika pod zadanim uvjetima opterećenja. Prije početka samog numeričkog proračuna, napravljen je postupak verifikacije konačnih elemenata na jednostavnijim konstrukcijama, kako bi se omogućio odabir najprikladnijeg elementa za zadani problem. Po završetku numeričkih simulacija, dobiveni rezultati uspoređeni su s analitičkim rješenjima kako bi se potvrdila točnost i pouzdanost numeričkog modela. Ovaj sveobuhvatni pristup omogućio je robusnu procjenu strukturnih performansi spremnika, pružajući dragocjene uvide u njegovo ponašanje u radnim uvjetima.

**Ključne riječi:** Analitički proračun, Numerički proračun, Spremnik zraka s eliptičnom glavom, ABAQUS<sup>®</sup>, Metoda konačnih elemenata



---

## Summary

The final work was primarily focused on a comprehensive analysis of a compressed air tank, specially designed to supply air for starting a marine engine. In addition to the intended dimensions of the tank, a thorough strength test was carried out for the maximum test pressure. This assessment included both analytical calculations and numerical simulations, applying membrane stress theory and shell theory to ensure the most accurate assessment possible. Special attention was paid to the complexity of the geometry of the elliptical shell. In the numerical analysis, software based on the finite element method, ABAQUS®, was used to simulate the behavior of the tank under given load conditions. Before starting the actual numerical analysis, a finite element verification procedure was performed on simpler structures, in order to enable the selection of the most appropriate element for the given problem. Upon completion of the numerical simulations, the obtained results were compared with the analytical solutions in order to confirm the accuracy and reliability of the numerical model. This comprehensive approach enabled a robust assessment of the tank's structural performance, providing valuable insights into its behavior under operating conditions.

**Key words:** Analytical calculation, Numerical calculation, Elliptical head air tank, ABAQUS®, Finite element method

## 1. Uvod

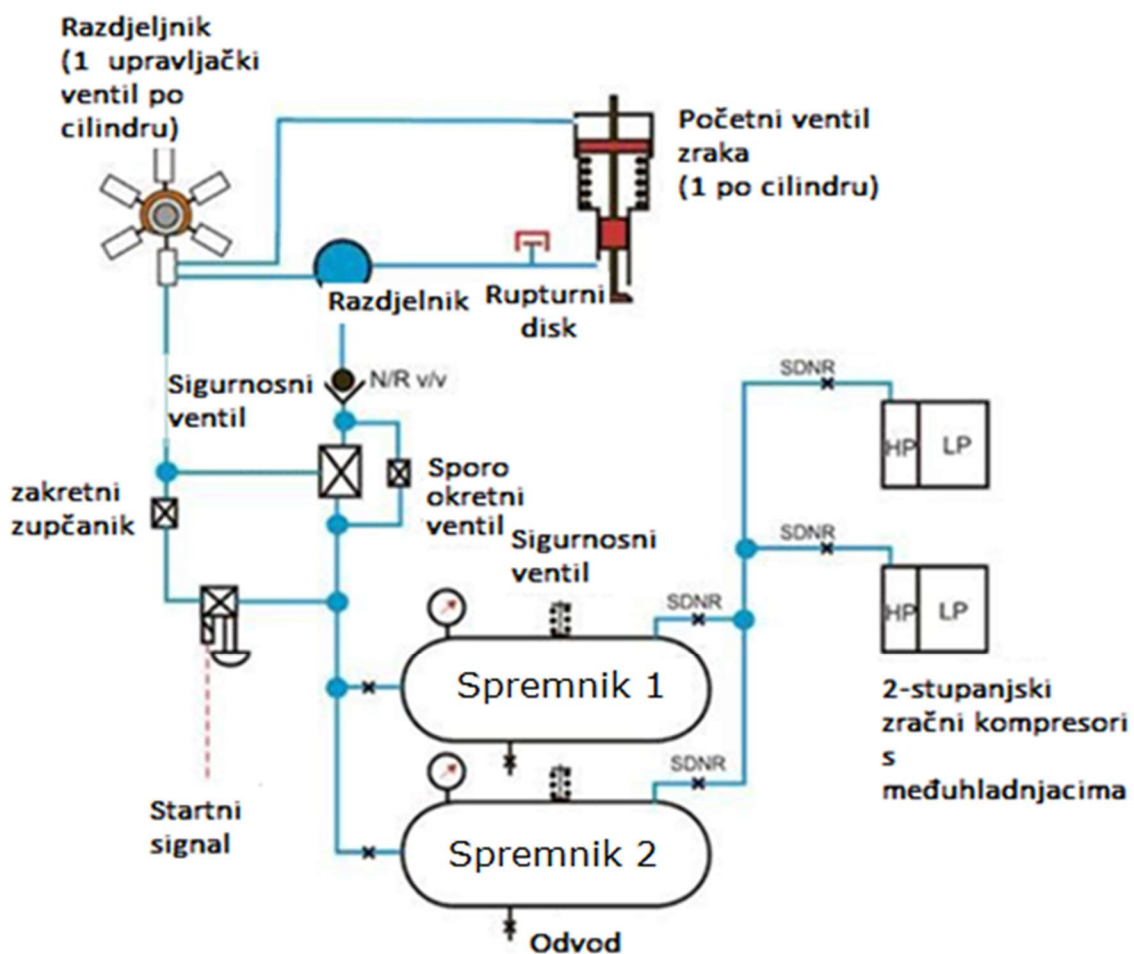
Spremnik zraka služi kao ključna komponenta u raznim industrijama, uključujući energetska postrojenja i brodske pogonske sustave, osiguravajući privremeno skladištenje komprimiranog zraka tijekom razdoblja najveće potrošnje. Obično su dostupni u standardnim volumenima u rasponu od 30 do 2500 litara, ovi su spremnici konstruirani da izdrže radne tlakove do 4 MPa (40 bar). U ovom radu, naglasak je na procjeni čvrstoće vertikalnog spremnika zraka, koji ima vitalnu ulogu u sustavu pokretanja glavnog motora broda. Proračun čvrstoće spremnika proveden je korištenjem naprednih fizikalnih načela, posebno teorije membranskog naprezanja i teorije savijanja ljusaka. Ovi teorijski okviri nude sveobuhvatan uvid u ponašanje struktura tankih stijenki pod narinutim tlakom. Nakon toga je provedena numerička analiza kako bi se potvrdili teorijski izračuni i omogućilo detaljnije razumijevanje prirode deformacija i naprezanja spremnika pod zadanim uvjetima opterećenja. Slika 1. prikazuje dva vertikalna spremnika stlačenog zraka korištena pri pokretanju glavnog broskog motora iz stanja mirovanja.



Slika 1. Spremnici zraka u brodskim pogonima [1]

### 1.1. Brodski sustav vođenja komprimiranog zraka

U ovom odjeljku kratko je opisana funkcija spremnika za startni zrak, kao i sustavi u kojima se oni nalaze. Na brodovima komprimirani zrak ima razne funkcije, pri čemu se zrak visokog tlaka od 3 MPa (30 bar) prvenstveno koristi za pokretanje glavnog motora. Ovaj visokotlačni zrak podvrgava se prigušivanju kroz ventile za smanjenje tlaka kako bi se postigli niži radni tlakovi, oko 0,7-0,8 MPa, pogodni za niz bitnih zadataka. Ovaj zrak sniženog tlaka, poznat kao radni zrak, nalazi primjenu u različitim operacijama kao što su pokretanje pomoćnih motora i generatora za hitne slučajeve, punjenje hidrofora slatke i pitke vode i mnoge druge. Osim toga, brodovi su opremljeni s dva spremnika zraka, koji mogu biti horizontalno ili vertikalno postavljeni. Ovi spremnici se podvrgavaju hidrauličkom ispitivanju tlaka na 1,5 puta većem od radnog tlaka. Slika 2. prikazuje jedan sustav komprimiranog zraka korištenog pri pokretanju broskog motora iz stanja mirovanja.



Slika 2. Sustav komprimiranog zraka broskog pogona [1]

Propisi SOLAS-a, poznato još kao „*International Convention for the Safety of Life at Sea*“, navode kako zajednički kapacitet ovih spremnika mora omogućiti najmanje 12 uzastopnih pokretanja za reverzibilne motore i najmanje 6 uzastopnih pokretanja za nereverzibilne motore bez potrebe za dopunjavanjem. Svako plovilo mora imati dva identična glavna spremnika zraka i jednu bocu zraka za izvanredne situacije. [1]

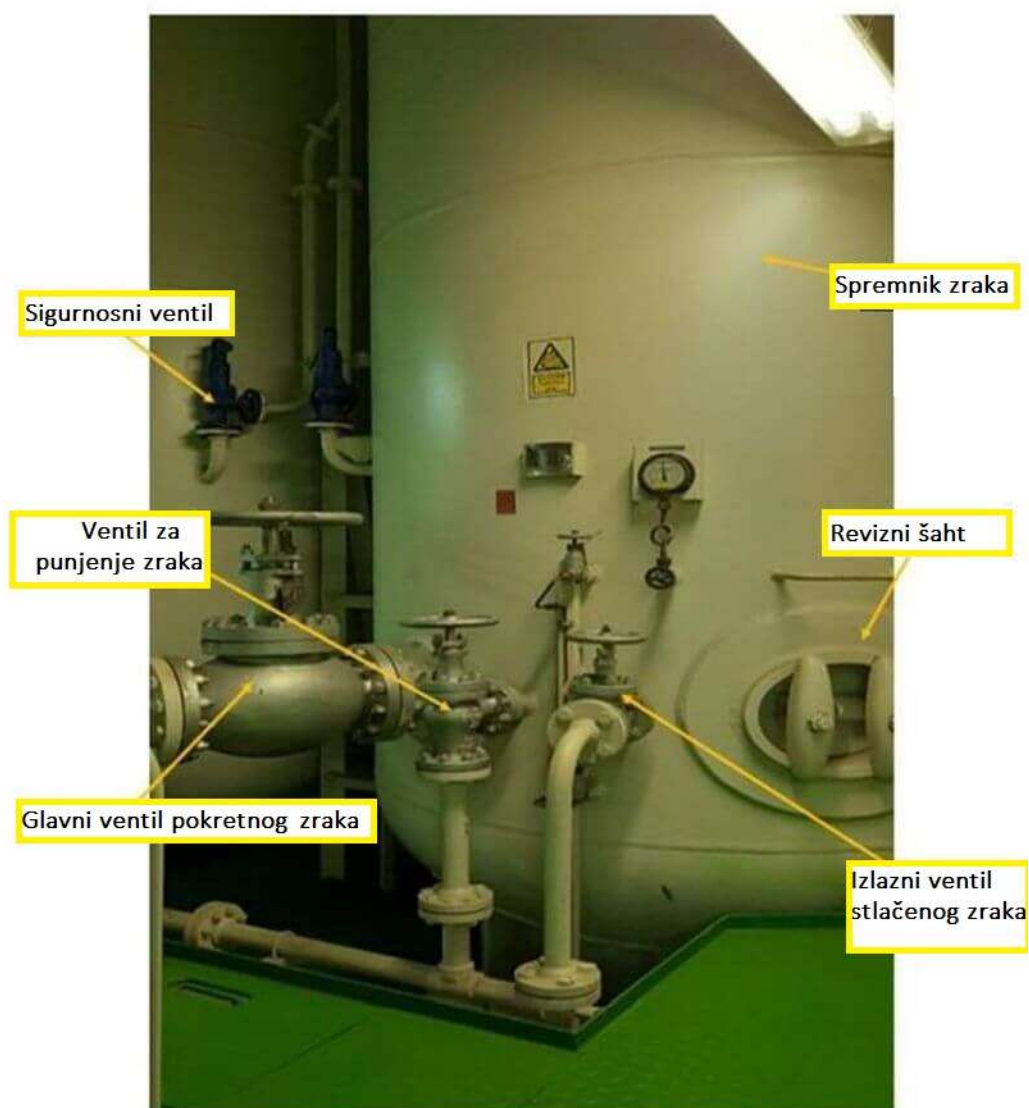
Kako je i prethodno navedeno brodski motori oslanjaju se na komprimirani zrak za napajanje svojih cilindara, koji se skladišti u spremnicima pod tlakom kompresora na otprilike 2,8 MPa. Ovaj komprimirani zrak se dovodi do ulaznih ventila motora preko cijevi velikog promjera, gdje ga regulira sustav upravljačkog zraka. Kontrolni zrak, kojim upravljaju poluge za pokretanje motora, sinkronizira otvaranje ventila s rotacijom motora.

Slika 2. prikazuje jedan takav sustav u kojem razvodni ventili osiguravaju pravilan redosljed i vremenski raspored isporuke zraka. Zatvoreni oprugama, ovi se ventili otvaraju upravljačkim zrakom kako bi komprimirani zrak ušao u cilindre. Međutim, mehanizam za zaključavanje sprječava otvaranje ventila kada je motor uključen kako bi se spriječile nepogode. Redovito održavanje i drenaža cjevovoda ključni su za sprječavanje eksplozija uzrokovanih curenjem ventila koji zapaljuju ulje za podmazivanje. Kako bi se dodatno povećala sigurnost, ugrađene su zamke plamena, sigurnosni ventili i nepovratni izolacijski ventili u sustavu.

Komprimirani zrak iz kompresora usmjerava se u spremnike zraka prije nego što se usmjeri kroz velike cijevi do nepovratnih ventila s daljinskim upravljanjem ili automatskih ventila i na kraju do ventila za pokretanje zraka cilindra. Otvaranjem ventila za pokretanje zraka cilindra uvodi se komprimirani zrak u cilindar.

Sustav upravljačkog zraka kontrolira ventil cilindra i ventil daljinskog upravljanja. Ovaj sustav odvodi upravljački zrak iz velike cijevi, propuštajući ga kroz kontrolni ventil kojim upravlja poluga za pokretanje zraka motora. Aktiviranjem poluge pokreće se daljinski ventil putem upravljačkog zraka. Dodatno, ovaj zrak se koristi za određivanje smjera rada, obično pokretan bregastom osovinom motora. Kako bi se spriječilo slučajno otvaranje ventila tijekom uključivanja motora, mehanizam za blokiranje integriran je u razvod ventila na daljinsko upravljanje. Ovaj mehanizam također sprječava povratak komprimiranog zraka u sustav nakon što ga motor dodatno komprimira.

Slika 3. prikazuje elemente ovog sustava povezanih za vertikalni spremnik zraka. Zaključno, učinkovit rad brodskih motora uvelike se oslanja na dobro osmišljen i pažljivo kontroliran sustav komprimiranog zraka. Od pažljive regulacije dovoda zraka do precizne sinkronizacije otvaranja ventila s rotacijom motora, svaka komponenta igra ključnu ulogu u osiguravanju sigurnog i pouzdanog pokretanja motora. Osim toga, provedba sigurnosnih mjera kao što su zamke plamena, sigurnosni ventili i nepovratni izolacijski ventili naglašavaju predanost ublažavanju potencijalnih opasnosti.



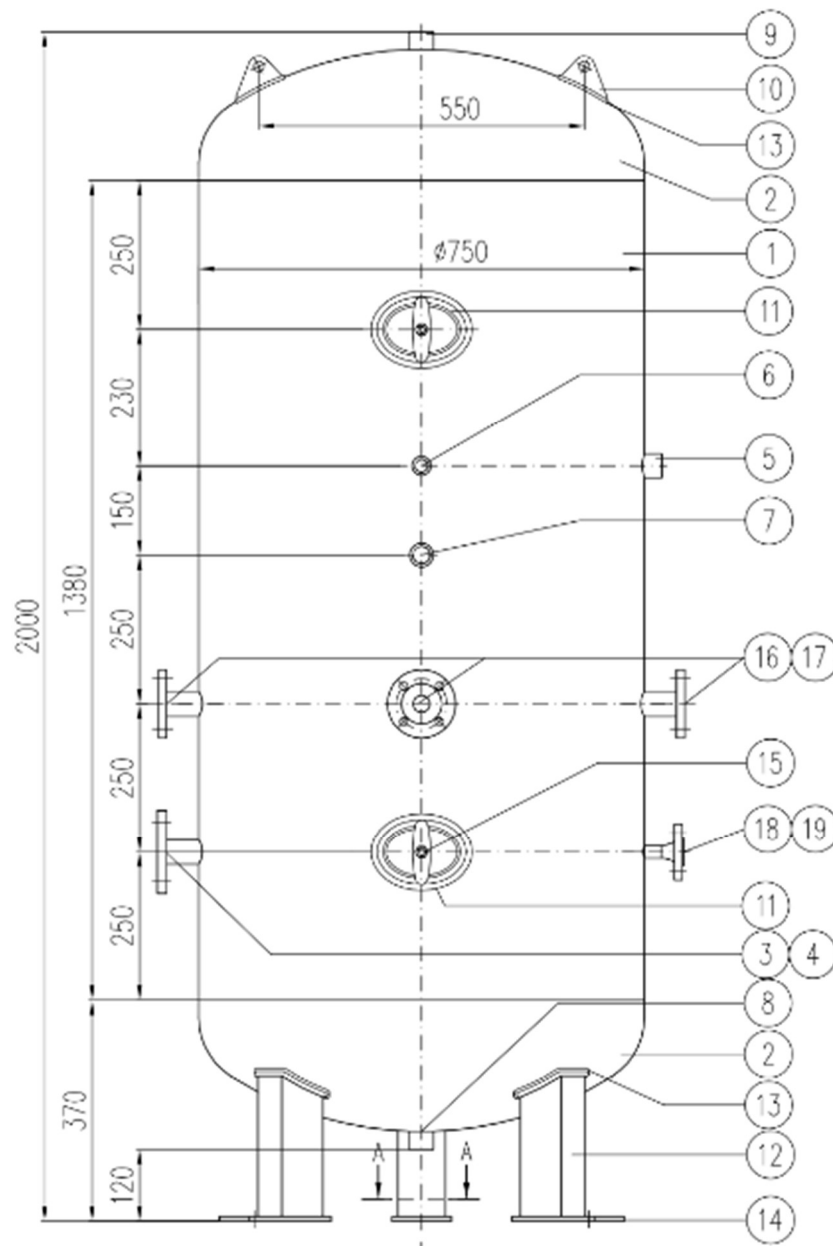
Slika 3. Karakteristični dijelovi uobičajenog spremnika stlačenog zraka [1]

## 2. Opis objekta analize

U ovom poglavlju detaljnije je opisan tlačni spremnik i karakteristike istog koji je kasnije u narednim poglavljima proračunat analitički i numerički.

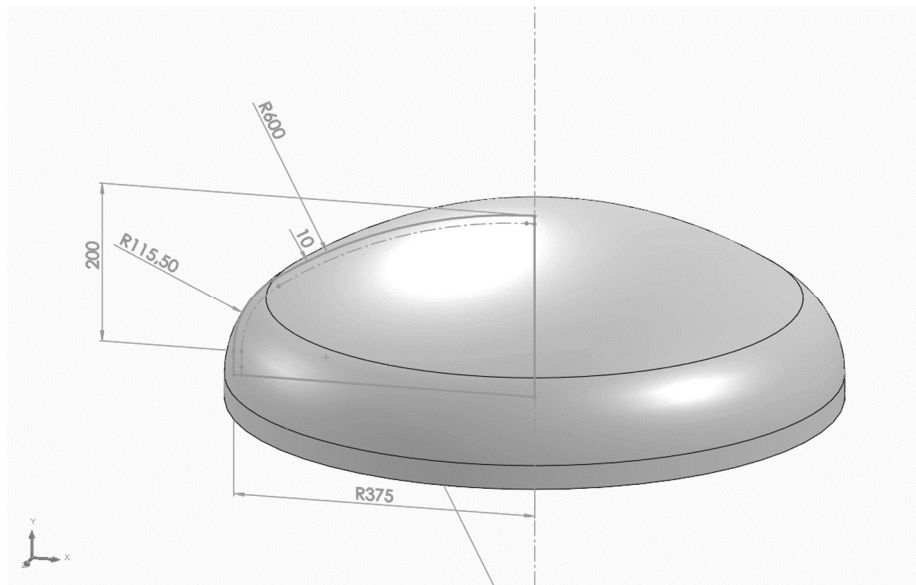
### 2.2. Dimenzije spremnika

Slika 4. prikazuje izvadak tehničke dokumentacije vertikalnog spremnika korištenog u proračunu. Zbog potreba proračuna spremnik će se promatrati kao sustav koji se sastoji od cilindra i dvije eliptične glave (DIN 28013). Spremnik ima kapacitet od  $0,7 \text{ m}^3$ .



Slika 4. Izvadak iz tehničke dokumentacije spremnika [2]

Slika 5. prikazuje 3D model eliptične glave i njezine dimenzije u koje će se koristiti u proračunu. Naravno, označene su mjere vanjskih rubova eliptične glave, međutim u proračunu su odabrane mjere središnjih ploha ljuske.



**Slika 5. Dimenzije eliptične glave**

Eliptične glave su često konstrukcijsko rješenje kod projektiranja tlačno opterećenih spremnika zraka, zbog osiguravanja ravnomjernije raspodjele naprezanja, naime upravo ta promjena polumjera zakrivljenosti omogućuje postupan prijelaz između cilindrične ljuske i glave, smanjujući koncentraciju naprezanja na spoju. Osim toga, eliptične glave nude učinkovito zadržavanje tlaka i smanjenu težinu, što ih čini prikladnima za visokotlačne primjene uz optimizaciju upotrebe materijala.[3]

## 2.2. Materijal spremnika

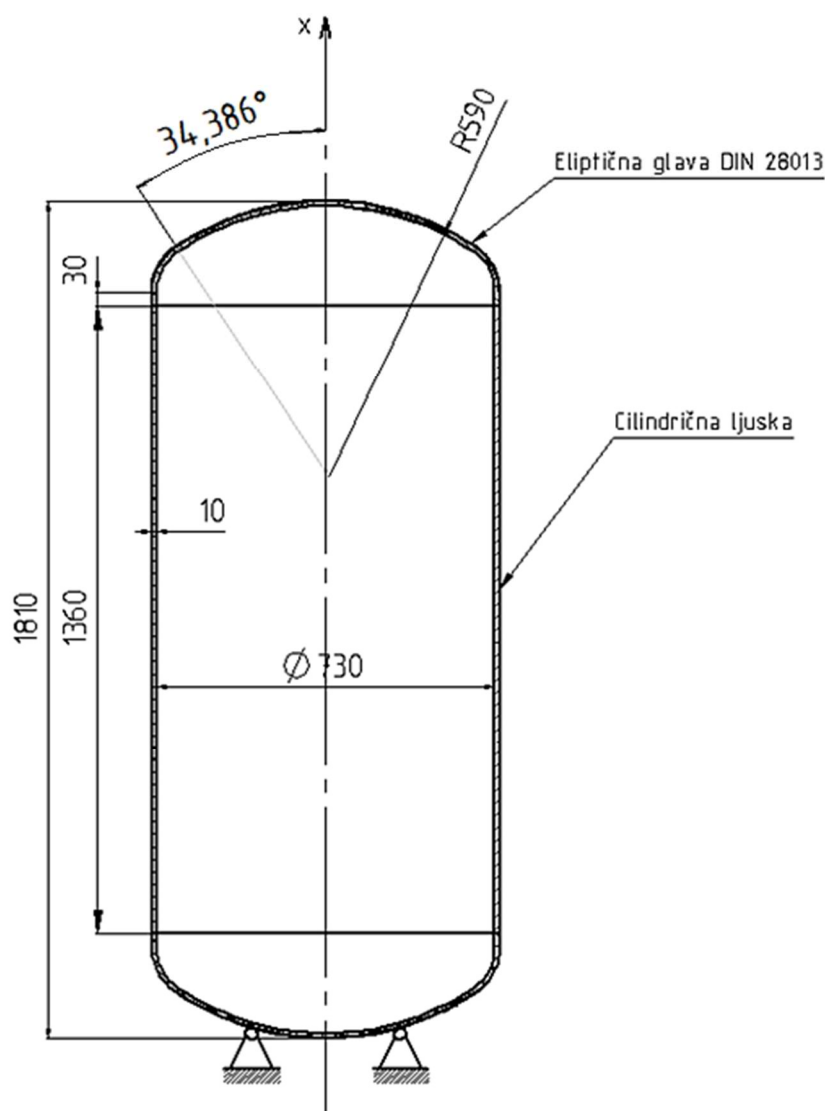
Materijal od kojeg je izrađen spremnik je E355E, čije su karakteristike, također potrebne za proračun, kako opisuje Tablica 1:

**Tablica 1. Karakteristike materijala spremnika (E355E) [4]**

Oznaka	Gustoća $\rho$ / kg/m <sup>3</sup>	Youngov modul elastičnosti $E$ / N/mm <sup>2</sup>	Poissonov faktor $\nu$	Vlačna čvrstoća $R_m$ / N/mm <sup>2</sup>	Granica tečenja $R_{p0,2}$ / N/mm <sup>2</sup>
E355E	7850	210000	0,29	560	320

### 3. Analitički proračun

Slika 6. prikazuje standardnu vertikalnu postavu spremnika, zadanih dimenzija i podvrgnutog unutarnjem statičkom tlaku od  $p = 4,95 \text{ MPa}$  (49,5 bar). Analiza geometrije i dimenzija spremnika uključuje korištenje jednadžbi izvedenih za membransko stanje naprezanja i deformacija te savijanje osnosimetričnih ljuski. Osim analitičkih proračuna, provedena je i numerička analiza pomoću programskog paketa ABAQUS®. Ova analitička rješenja poslužit će kao mjerila za usporedbu s numeričkim rješenjima. Međutim, važno je svakom numeričkom rješenju pristupiti kritički, uzimajući u obzir moguće pogreške koje proizlaze iz korisničkog unosa ili ograničenja u softverskim algoritmima.



Slika 6. Pojednostavljeni model vertikalnog spremnika



### 3.1. Uvod u teoriju ljusaka

Ljuska predstavlja dio kontinuuma, omeđen dvjema zakrivljenim plohama. Te su granice blisko razmaknute u odnosu na druge dimenzije. Razmak između njih označava debljinu ljuske, koja može biti promjenjiva ili konstantna. Štoviše, debljina ljuske igra ključnu ulogu, ostaje li debljina konstantna ili varira po površini može značajno utjecati na faktore kao što su krutost, čvrstoća i otpornost na izvijanje.

Jedan od ključnih pojmova u teoriji ljusaka je srednja ploha, koja predstavlja geometrijsko središte debljine ljuske - ona je bitna u analizi ponašanja ljuske pod različitim opterećenjima i graničnim uvjetima.

Bilo da je otvorena ili zatvorena, svaka ljuska ima definirajući rub. Geometrija ljuske u potpunosti je karakterizirana srednjom plohom, debljinom i rubom. Teorija ljusaka, kao i svaki drugi matematički model, izgrađena je na skupu pretpostavki koje pojednostavljuju stvarne složenosti tankih, zakrivljenih struktura.

Neke uobičajene pretpostavke kod deformiranja ljusaka su sljedeće [5]:

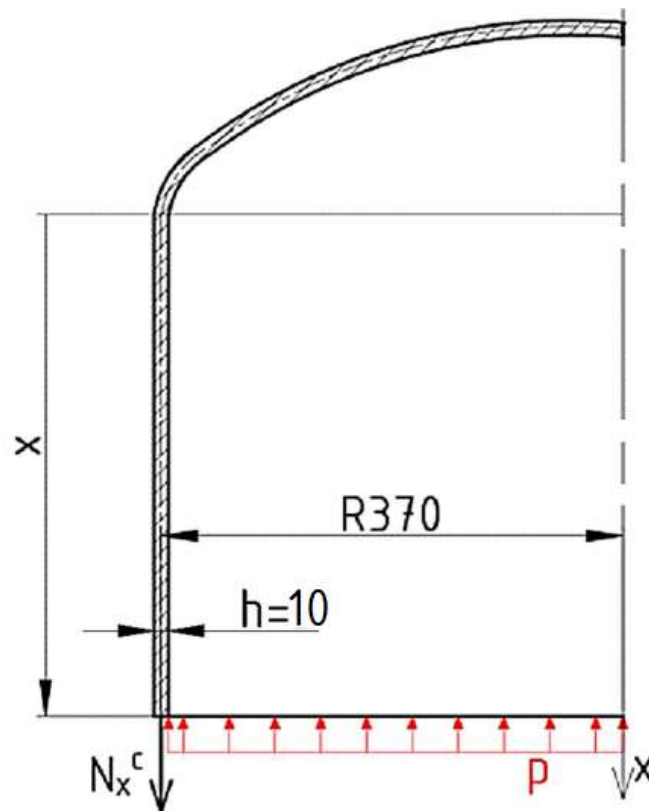
- Debljina stijenke ljuske  $h$  je mala u odnosu na polumjere zakrivljenosti tzv. „*Hipoteza tankostjenih ljusaka*“  $\left(\frac{h}{R} \ll 1\right)$  - ova pretpostavka je ključna jer omogućava dvodimenzionalan pristup proračunu za trodimenzionalno opterećenje.
- Pretpostavljaju se mali pomaci i male deformacije - pretpostavka malih pomaka i deformacija omogućuje korištenje linearne teorije elastičnosti za analizu odgovora ljuske na vanjska opterećenja.
- Materijal je linearno elastičan, izotropan i homogen - ova pretpostavka pojednostavljuje analizu pretpostavljajući ujednačena svojstva materijala kroz strukturu ljuske.
- Nakon deformacije, normale na srednju površinu ostaju ravne i okomite na nepromijenjenu duljinu ravnine tzv. „*Kirchhoff-Love hipoteza*“ - ova hipoteza je značajna jer nam omogućuje da razmotrimo ponašanje ljuske dok zadržavamo netaknutu geometriju srednje plohe, pojednostavljujući izračune.
- Debljina stijenke ljuske je konstantna ili se neznatno mijenja - ova pretpostavka utječe na mehaničko ponašanje ljuske i razmatra se zajedno s hipotezom ljuske tankih stijenki.
- Naprezanja u smjeru normalnom na srednju površinu ljuske zanemaruju se u odnosu na druga naprezanja - ova pretpostavka pojednostavljuje analizu usredotočujući se na naprezanja prvenstveno u ravnini ljuske.

- Opterećenje je statično - pretpostavka statičkih opterećenja pojednostavljuje analizu, jer se ne uzimaju u obzir dinamički učinci kao što su inercija i prigušenje.

Zaključno, teorija savijanja ljsaka pretpostavlja da se kompleksne geometrijske strukture mogu pojednostaviti u manje reprezentativne elemente bez gubitka suštinskog mehaničkog „ponašanja“ sustava na zadano opterećenje.

### 3.2. Membransko stanje naprezanja u cilindričnoj ljsuci

Slika 7. prikazuje dimenzije i opterećenje cilindrične ljsuke.



Slika 7. Opterećenja cilindrične ljsuke

Dimenzije cilindrične ljsuke potrebne za proračun su sljedeće:

$$R = 370 \text{ mm (radijus središnjice),} \quad (3.1)$$

$$h = 10 \text{ mm.} \quad (3.2)$$

Tablica 1 prikazuje svojstva materijala E355E, odnosno modul elastičnosti  $E$  i Poissonov faktor  $\nu$  su sljedeći:

$$E = 210\,000 \text{ MPa,} \quad (3.3)$$

$$\nu = 0,29. \quad (3.4)$$

Prije početka samog proračuna potrebno je provjeriti zadovoljava li razmatrana ljuska uvjet duge ljuske, prema [5] uvjet duge cilindrične ljuske glasi:

$$\int_{s_1}^{s_2} \beta^c(s) ds = \int_0^l \beta^c dx = \beta^c \cdot l > 3, \quad (3.5)$$

pri čemu je:

$$\beta^c = \frac{\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}}{\sqrt{r_2 h}} = 0,0211661 \text{ mm}^{-1}. \quad (3.6)$$

Prema [5] glavni radijusi zakrivljenosti cilindra su:

$$r_1 = \infty, \quad (3.7)$$

$$r_2 = R. \quad (3.8)$$

Kad se uvrste sve potrebne vrijednosti u (3.5) i (3.6) za duljinu cilindra  $l = 1420 \text{ mm}$ , dobije se sljedeće:

$$\int_{s_1}^{s_2} \beta^c(s) ds = \beta^c \cdot l = 30,056 > 3, \quad \text{uvjet duge ljuske je zadovoljen!} \quad (3.9)$$

Kad se postave uvjeti ravnoteže svih sila u smjeru osi  $x$ , dobije se sljedeći izraz:

$$\Sigma F_x = 0, \quad (3.10)$$

$$N_x^c \cdot 2 \cdot R\pi - p \cdot R^2\pi = 0,$$

Kad se izraz (3.10) sredi dobije se iznos sile:

$$N_x^c = \frac{p \cdot R}{2} = 915,75 \frac{\text{N}}{\text{mm}}. \quad (3.11)$$

Meridijalno naprezanje jednako je:

$$\sigma_x^c = \frac{N_x^c}{h} = 91,58 \text{ MPa}. \quad (3.12)$$

Jednadžba ravnoteže membranskih sila prema [5] glasi:

$$\frac{N_\theta}{r_1} + \frac{N_\varphi}{r_2} = p. \quad (3.13)$$

Uvrštavanjem izraza (3.7), (3.8), (3.11) u (3.13) dobije se cirkularna sila:

$$N_\varphi^c = p \cdot R = 1831,5 \frac{\text{N}}{\text{mm}}. \quad (3.14)$$

Zatim slijedi cirkularno naprezanje koje je jednako:

$$\sigma_\varphi^c = \frac{N_\varphi^c}{h} = 183,15 \text{ MPa}. \quad (3.15)$$

Sada se mogu izračunati radijalni pomak i kut zakreta za membransko stanje naprezanja prema [5]:

$$w_m^c = \frac{R}{Eh} (N_\varphi^c - \nu N_x^c) = 0,2759 \text{ mm.} \quad (3.16)$$

S obzirom na to da je radijalan pomak neovisan o osi  $x$  jer se radi o konstantnom tlaku, slijedi da je zakret cilindrične ljuske:

$$\alpha_m^c = \frac{dw}{dx} = 0 \text{ rad.} \quad (3.17)$$

Pomaci su mali kako je pretpostavljeno.

### 3.3. Membransko stanje naprezanja u eliptičnoj ljusci

U ovom odjeljku su postavljene jednadžbe sila, pomaka i zakreta prilagođene kompleksnoj geometriji elipse. Konačne matematičke formulacije za procjenu unutarnjih sila, momenata i pomaka u eliptičnoj ljusci izvedene su na temelju približnih rješenja. Korištenjem ovih formulacija i integracijom teorije membranskih naprezanja, uspostavljena je metodologija za procjenu čvrstoće tlačnih spremnika s eliptičnim glavama, pogodna za potrebe zadane konstrukcije.

Tijekom stanja membranskog naprezanja pretpostavlja se da unutar stijenke djeluju samo normalne sile, dok se sile smicanja i momenti savijanja zanemaruju. U fazi konstruiranja, tlačni spremnici bi trebale biti konfigurirani tako da stvarno naprezanje sliči stanju membranskog kako bi se spriječilo savijanje stijenke i ublažile visoke razine naprezanja koje proizlaze iz savijanja.

Cilindrične tlačne posude obično imaju polu-sferične, toroidno-sferične ili eliptične glave (kao u ovom primjeru). Središnja ravnina eliptične glave se postiže rotiranjem luka elipse oko njene male osi. Velika poluos elipsoida poravnata je s polumjerom cilindričnog dijela ( $a = R$ ), dok mala poluos odgovara visini glave ( $b = H$ ).

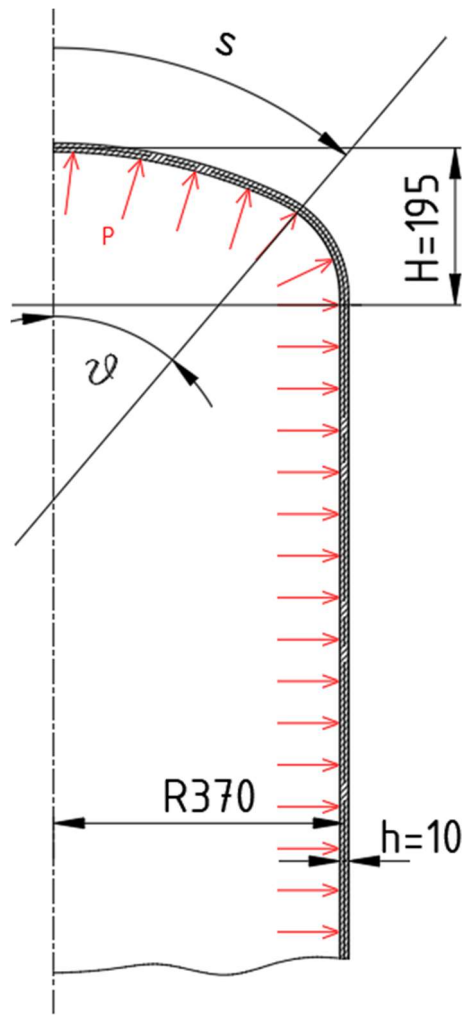
Parametri koji definiraju oblik elipse prema [6] izražavaju se kao:

$$\gamma = \frac{a^2}{b^2} - 1 = 2,6003, \quad (3.18)$$

$$R_0 = a\sqrt{1 + \gamma} = 702,05 \text{ mm.} \quad (3.19)$$

Pri čemu  $R_0$  predstavlja radijus zakrivljenosti vrha glave.

Slika 8. ilustrira temeljne dimenzije spoja cilindrične ljuske tlačnog spremnika, na koju je postavljena eliptična glava.



Slika 8. Opterećenja vertikalnog spremnika

Prema [6] unutarnje sile u stijenci eliptične „glave“ su određene prema membranskoj teoriji :

$$N_{\vartheta}^e = \frac{p \cdot R}{2} \cdot \left( \frac{1 + \gamma}{1 + \gamma \cdot \sin^2 \vartheta} \right)^{1/2} \quad (3.20)$$

$$N_{\varphi}^e = (1 - \gamma \cdot \sin^2 \vartheta) \cdot N_{\vartheta}^e \quad (3.21)$$

Gdje meridijalni kut  $\vartheta$  ima raspon od 0 do 90 ° (dodir cilindrične i eliptične ljuske):

- Na dodiru gdje kut  $\vartheta = 90^\circ$  sile iznose:

$$N_{\vartheta}^e = 915,75 \frac{\text{N}}{\text{mm}}, \quad (3.22)$$

$$N_{\varphi}^e = -1465,44 \frac{\text{N}}{\text{mm}}. \quad (3.23)$$

- Na vrhu glave spremnika gdje kut  $\vartheta = 0^\circ$  sile iznose:

$$N_{\vartheta}^e = 1737,58 \frac{\text{N}}{\text{mm}}, \quad (3.24)$$

$$N_{\varphi}^e = 1737,58 \frac{\text{N}}{\text{mm}}. \quad (3.25)$$

- Na granici radijusa zakrivljenosti glave spremnika gdje kut  $\vartheta = 34,386^\circ$  sile iznose:

$$N_{\vartheta}^e = 1284,67 \frac{\text{N}}{\text{mm}}, \quad (3.26)$$

$$N_{\varphi}^e = 219,19 \frac{\text{N}}{\text{mm}}. \quad (3.27)$$

Analogno opterećenjima, na pojedinim točkama eliptične glave mogu se dobiti cirkularna i meridijalna naprezanja prema izrazima:

$$\sigma_{\varphi}^e = \frac{N_{\varphi}^e}{h}, \quad (3.28)$$

$$\sigma_{\vartheta}^e = \frac{N_{\vartheta}^e}{h}. \quad (3.29)$$

- Na dodiru gdje kut  $\vartheta = 90^\circ$  naprezanja iznose:

$$\sigma_{\vartheta}^e = 91,58 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}, \quad (3.30)$$

$$\sigma_{\varphi}^e = -146,54 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}. \quad (3.31)$$

- Na vrhu glave spremnika gdje kut  $\vartheta = 0^\circ$  naprezanja iznose:

$$\sigma_{\vartheta}^e = 173,76 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}, \quad (3.32)$$

$$\sigma_{\varphi}^e = 173,76 \text{ N/mm}^2. \quad (2.33)$$

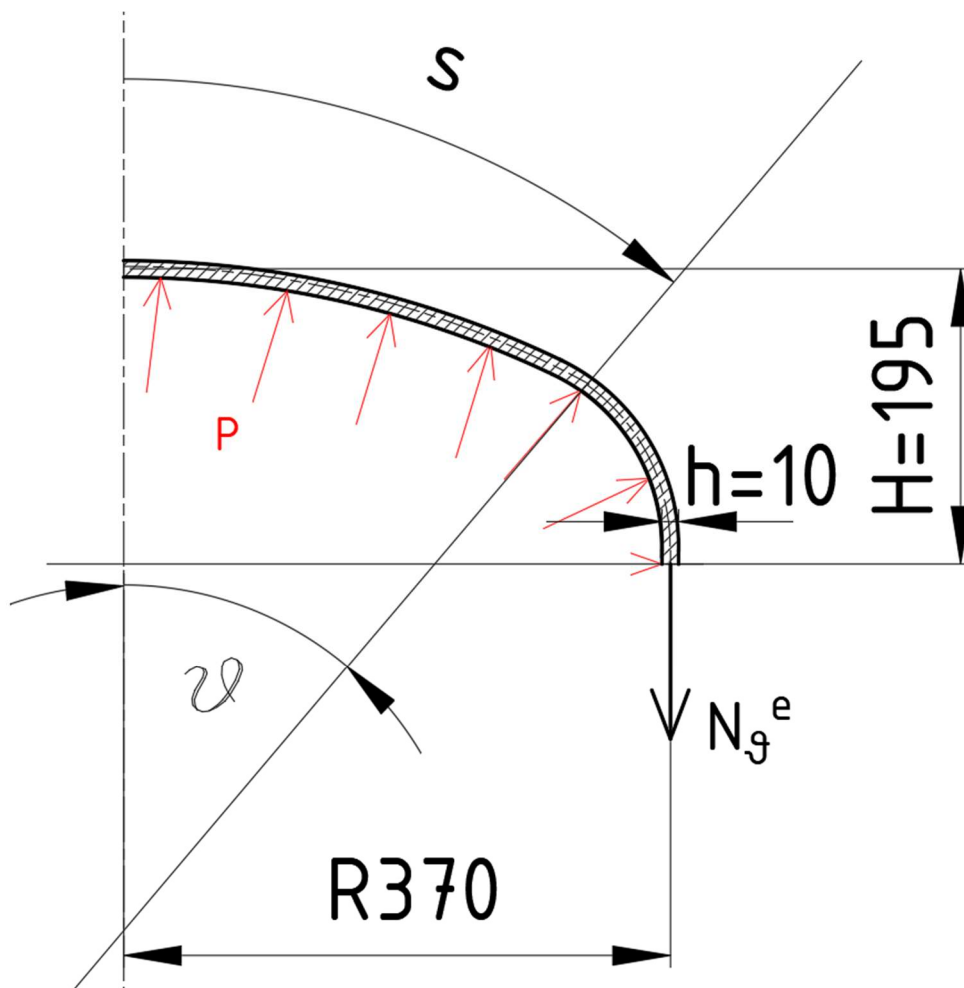
- Na granici radijusa zakrivljenosti glave spremnika gdje kut  $\vartheta = 34,386^\circ$  naprezanja iznose:

$$\sigma_{\vartheta}^e = 128,47 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}, \quad (3.34)$$

$$\sigma_{\varphi}^e = 21,92 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}. \quad (3.35)$$

Kako se može primijetiti iz dobivenih iznosa sila i naprezanja, odnosno prema [7] na mjestu spoja cirkularno naprezanje mijenja se iz vlačnog naprezanja u tlačno naprezanje.

Do ove pojave dolazi jer je raspodjela naprezanja eliptične glave po prirodi veoma složena. Vrijednost meridijalnog naprezanja uvijek je veća od nule, što odgovara vlačnom naprezanju, i postupno opada od tjemena prema točki dodira. Obodno naprezanje povezano je s omjerom velike i male poluosi ( $a/b$ ). Kada je  $a/b < 2^{0,5}$ , vrijednost naprezanja je uvijek veća od nule, što odgovara vlačnom naprezanju, a ta se vrijednost postupno smanjuje od tjemena prema ekvatoru elipse (na točki dodira). Kada je  $a/b = 2^{0,5}$ , vrijednost je nula na tjemenu, a kada je  $a/b > 2^{0,5}$ , javlja se tlačno naprezanje. U ovom radu vrijednost  $a/b$  glave spremnika je približno 2,6, pa je meridijalno naprezanje uvijek i vlačno naprezanje, a cirkularno naprezanje je tlačno u točki dodira. Slika 9. prikazuje dimenzije eliptične glave.



Slika 9. Unutarnja i vanjska opterećenja eliptične ljuske

Nadalje prema [6] u području spoja ljuska, komponenta cirkularne sile uzrokuje vlačno naprezanje cilindra i tlačno naprezanje eliptične glave. I kako se može primijetiti na Slici 9. komponenta  $s$  predstavlja eliptični luk koji je funkcija meridijalnog kuta  $\varphi$ .

Ova razlika rezultira različitim radijalnim pomacima, kao što je opisano u sljedećem izrazu:

$$w_m^c - u_r^e = \frac{pR^2}{2Eh} \cdot (1 + \nu). \quad (3.36)$$

Za prethodno izračunat radijalni pomak stijenke cilindra, odnosno kad se uvrste svi poznati izrazi, (2.18) i (2.16) u (2.28) dobije se radijalni pomak stijenke eliptične glave:

$$u_r^e = -0,3049 \text{ mm}. \quad (3.37)$$

Također radijalni pomak nije funkcija komponente  $x$ , jer je opterećenje statičko i ne mijenja se promjenom visine opterećenja, kao u potpoglavlju 3.2., odnosno prema [8] zakret eliptične ljuske je:

$$\alpha_m^e = \frac{du}{dx} = 0 \text{ rad}. \quad (3.38)$$

### 3.4. Rubni uvjeti

Na spoju cilindrične i eliptične ljuske vrijede sljedeći rubni uvjeti (pomaci i zakreti moraju biti jednaki):

$$u_A = w_B \quad (3.39)$$

$$\alpha_A = \alpha_B \quad (3.40)$$

#### 3.4.1. Savijanje tanke cilindrične ljuske

Za daljnji proračun savijanja cilindrične ljuske, geometrija iste i opterećenja moraju zadovoljavati sljedeće uvjete i ograničenja, odnosno prema [6]:

- Ljuska je tanka, tj. vrijedi  $\frac{h}{R} < \frac{1}{20}$  (ili  $\frac{h}{R} < \frac{1}{50}$ ) - osigurava primjenjivost teorije tanke ljuske, koja pojednostavljuje analizu za strukture sa znatno tanjim stijenkama u usporedbi s njihovim radijusom.
- Pomaci su mali, sa uvjetom  $\frac{w_{\max}}{h} < \frac{1}{5}$  - pretpostavlja male deformacije u odnosu na dimenzije ljuske, dopuštajući linearizaciju vodećih jednadžbi radi lakšeg izračuna.
- Ljuska je osnosimetrična, oslonjena i opterećena osnosimetrično - pojednostavljuje analizu pretpostavljajući simetriju oko osi ljuske, smanjujući složenost u izračunima. ( $p_\varphi = 0, p_x = p_x(x), p_n = p_n(x)$ )



- Komponente opterećenja su konstantne ili se mijenjaju po zakonu pravca– pretpostavka specificira ponašanje primijenjenih opterećenja, što osigurava dosljednost ili poznati obrazac u njihovoj distribuciji ili varijaciji za točno modeliranje.

Zadana ograničenja se mogu primijeniti na zadani spremnik, pritom se može zaključiti da je ljuska tanka ( $h/R \cong 0,03 < 0,05$ ), simetrična oko svoje osi, oslonjena i opterećena simetrično, a komponente opterećenja ostaju konstantne ( $p_x = 0$ ,  $p_n = p$ ). Zaključuje se da su parametri ljuske unutar navedenih granica.

Nadalje se može nastaviti s proračunom, poznato je da je  $\beta^c = 0,0211661 \text{ mm}^{-1}$ , još je potrebno definirati krutost na savijanje prema [5]:

$$D_c = \frac{E \cdot h^3}{12 \cdot (1 - \nu^2)} = 1,91068894 \cdot 10^7 \text{ N/mm} \quad (3.41)$$

Ukupni radijalni pomak i kut zakreta cilindrične ljuske (na mjestu spoja) sastoji se od fleksijskog i membranskog dijela. Nakon izračunate krutosti na savijanje i geometrijske karakteristike materijala cilindrične ljuske na spojnoj točki, nastavljamo izračunavati uplivne koeficijente cilindrične ljuske koristeći sljedeće izraze prema [5]:

$$\alpha_{11}^c = \frac{1}{2D^c\beta_c^3} = 2,759672105 \cdot 10^{-3} \frac{\text{mm}^2}{\text{N}}, \quad (3.42)$$

$$\alpha_{12}^c = \alpha_{21}^c = \frac{1}{2D^c\beta_c^2} = 5,841149574 \cdot 10^{-5} \frac{\text{mm}}{\text{N}}, \quad (3.43)$$

$$\alpha_{22}^c = \frac{1}{D^c\beta_c} = 2,47268712 \cdot 10^{-6} \text{ N}^{-1}. \quad (3.44)$$

Nakon što se odrede uplivni koeficijenti, specifična rješenja za radijalne membranske pomake i membranskog kuta zakreta cilindrične ljuske, te iznosi meridijalne i cirkularne membranske sile na mjestu spoja ljusaka, navedene vrijednosti se mogu uključiti u matematičke izraze za radijalni pomak i kut zakreta cilindrične ljuske preko uplivnih koeficijenata:

$$w_B = u_r^{fc} + w_m^c = \alpha_{11}^c Q_0 - \alpha_{12}^c M_0 + w_m^c, \quad (3.45)$$

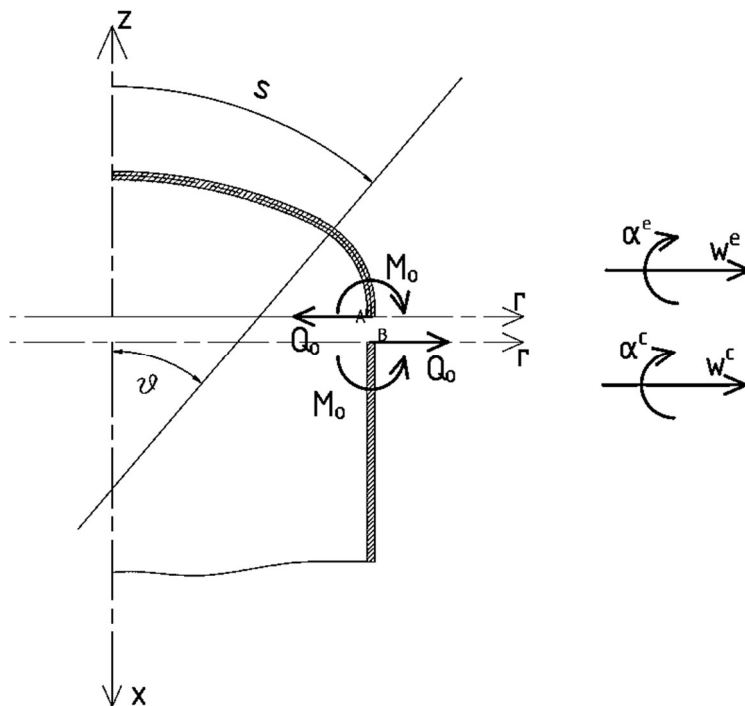
$$\alpha_B = \alpha^{fc} + \alpha^{mc} = -\alpha_{12}^c Q_0 - \alpha_{22}^c M_0 + \alpha^{mc}. \quad (3.46)$$

Kad se uvrste poznate vrijednosti u izraze (3.45) i (3.46) dobiju se sljedeće jednačbe:

$$w_B = 2,759672105 \cdot 10^{-3} \cdot Q_0 - 5,841149574 \cdot 10^{-5} \cdot M_0 + 0,275902, \quad (3.47)$$

$$\alpha_B = 5,841149574 \cdot 10^{-5} \cdot Q_0 - 2,47268712 \cdot 10^{-6} \cdot M_0. \quad (3.48)$$

Pretpostavljene smjerove pomaka i zraketa na dodiru ljusaka prikazuje Slika 10.



Slika 10. Pretpostavljeni smjerovi unutarnjih sila i momenata na spoju ljusaka

### 3.4.2. Savijanje eliptične ljuske

Postupak računanja je sličan kao i u prethodnom odjeljku, prvo je potrebno odrediti geometrijsko-materijalnu značajka ljuske i krutost na savijanje, prema [6]:

$$D^e = \frac{E \cdot h^3}{12(1 - \nu^2)} = 1,91068894 \cdot 10^7 \frac{\text{N}}{\text{mm}}, \quad (3.49)$$

$$\beta_0^c = \frac{\sqrt[4]{3(1 - \nu^2)}}{\sqrt{r_2 h}} = 0,0211661 \text{ mm}^{-1}. \quad (3.50)$$

Nadalje se izračunaju uplivni koeficijenti eliptične ljuske prema [8]:

$$\alpha_{11}^e = \frac{2}{E} \cdot c_\nu \cdot \left(\frac{a}{h}\right)^{\frac{3}{2}} = 2,759672105 \cdot 10^{-3} \frac{\text{mm}^2}{\text{N}}, \quad (3.51)$$

$$\alpha_{12}^e = \alpha_{21}^e = \frac{2}{Eh} \cdot c_\nu^2 \cdot \frac{a}{h} = 5,841149574 \cdot 10^{-5} \frac{\text{mm}}{\text{N}}, \quad (3.52)$$

$$\alpha_{22}^e = \frac{4}{Eh^2} \cdot c_\nu^3 \cdot \left(\frac{a}{h}\right)^{\frac{1}{2}} = 2,47268712 \cdot 10^{-6} \text{ N}^{-1}. \quad (3.53)$$

Pri čemu je pomoćni koeficijent  $c_\nu$  svojstvo materijala i funkcija  $\nu$ , jednak:

$$c_\nu = [3 \cdot (1 - \nu^2)]^{1/4} = 1,2875. \quad (3.54)$$

Isto kao za cilindričnu ljusku nakon što se odrede uplivni koeficijenti mogu se postaviti izrazi pomaka i zakreta:

$$u_A = u_r^{fe} + u_{rm}^e = -\alpha_{11}^e Q_0 - \alpha_{12}^e M_0 + u_{rm}^e, \quad (3.55)$$

$$\alpha_A = \alpha^{fe} + \alpha^{me} = \alpha_{12}^c Q_0 + \alpha_{22}^c M_0 + \alpha^{me}. \quad (3.56)$$

Kad se uvrste poznate vrijednosti u izraze (3.55) i (3.56) dobiju se sljedeće jednadžbe:

$$u_A = -2,759672105 \cdot 10^{-3} \cdot Q_0 - 5,841149574 \cdot 10^{-5} \cdot M_0 - 0,3049, \quad (3.57)$$

$$\alpha_A = 5,841149574 \cdot 10^{-5} \cdot Q_0 - 2,335282257 \cdot 10^{-6} \cdot M_0. \quad (3.58)$$

### 3.5. Vrijednosti sila i momenata na dodiru ljusaka

Za primjenu izraza (3.57), (3.58), (3.47) i (3.48) potrebno je odrediti vrijednosti sile  $Q_0$  i momenta  $M_0$  na granici dodira ljusaka. To su unutarnja opterećenja definirana teorijom momenta na spoju dviju različitih ljuski u kojima vladaju sile teorije membranskog naprezanja, kako bi se postigla unutarnja mehanička ravnoteža. Kad se izjednače izrazi (3.55) i (3.45) prema graničnom rubnom uvjetu i kad se izjednače izrazi (3.58) i (3.48), dobiju se:

$$Q_0 \cong -105,23 \frac{\text{N}}{\text{m}}, \quad (3.59)$$

$$M_0 \cong 0 \frac{\text{Nm}}{\text{m}}.$$

Kako se može vidjeti predznak označava krivo pretpostavljen smjer sile  $Q_0$ . Koristeći dobivene vrijednosti možemo izračunati sile i moment savijanja na mjestu spoja:

$$N_9^e = N_9^c = 915,75 \frac{\text{N}}{\text{mm}}, \quad (3.60)$$

$$Q_0 = -105,23 \frac{\text{N}}{\text{m}}, \quad (3.61)$$

$$M_0 = 0 \frac{\text{Nm}}{\text{m}}, \quad (3.62)$$

$$M_\varphi = \nu M_0 = 0 \frac{\text{Nm}}{\text{m}}. \quad (3.63)$$

### 3.6. Raspodjela pomaka, naprezanja i momenata spoja ljusaka

Prema izrazima iz [5], mogu se upotrijebiti navedene funkcije za opisivanje raspodjele pomaka, naprezanja i momenta unutar eliptične ljuske i cilindrične ljuske. Predznaci se utvrđuju na temelju utjecaja generaliziranih sila koje djeluju u točki dodira na promatrane ljuske. Kako bismo opisali varijacije u pomaku, kutu rotacije, meridijalnom momentu i cirkularnoj sili u

blizini spoja, koristit ćemo dolje navedene eksponencijalno-trigonometrijske funkcije. I gornji i donji spojevi ljuske tretiraju se slično zbog identičnih rubnih uvjeta i uvjeta opterećenja. Zanimaruje se utjecaj težine spremnika na donji dio ljuske. Stoga se svi dijagrami pomaka, zakreta i naprezanja jednako primjenjuju na oba spoja.

### 3.6.1. Cilindrična ljuska

Za cilindričnu ljusku uvode se pomoćne funkcije kojima možemo opisati raspodjelu pomaka, naprezanja i opterećenja duž meridijana cilindra, odnosno prema [5] vrijedi:

$$f_1(\beta^C x) = e^{-\beta^C x} (\cos \beta^C x + \sin \beta^C x), \quad (3.64)$$

$$f_2(\beta^C x) = e^{-\beta^C x} \sin \beta^C x, \quad (3.65)$$

$$f_3(\beta^C x) = e^{-\beta^C x} (\cos \beta^C x - \sin \beta^C x), \quad (3.66)$$

$$f_4(\beta^C x) = e^{-\beta^C x} \cos \beta^C x. \quad (3.67)$$

Odnosno, funkcija radijalnog pomaka cilindrične ljuske opisuje se pomoću izraza:

$$u_r^C = \alpha_{11}^C Q_o f_4 - \alpha_{12}^C M_o f_3 + w_m^C. \quad (3.68)$$

Funkcija kuta zakreta cilindrične ljuske je:

$$\alpha^C = \alpha_{12}^C Q_o f_1 - \alpha_{22}^C M_o f_4 + \alpha^{mC}. \quad (3.69)$$

Funkcija ukupne cirkularne sile za cilindričnu ljusku:

$$N_\varphi^C = Eh \frac{u_r^C}{3R} + \nu N_x. \quad (3.70)$$

Funkciju meridijalnog momenta savijanja za cilindrični dio ljuske:

$$M_\vartheta^C = \frac{Q_o}{\beta} f_2 - M_o f_1. \quad (3.71)$$

Nadalje potrebno je definirati i naprezanja duž ljuske s sljedećim izrazima, prema [5] cirkularno naprezanje se definira kao:

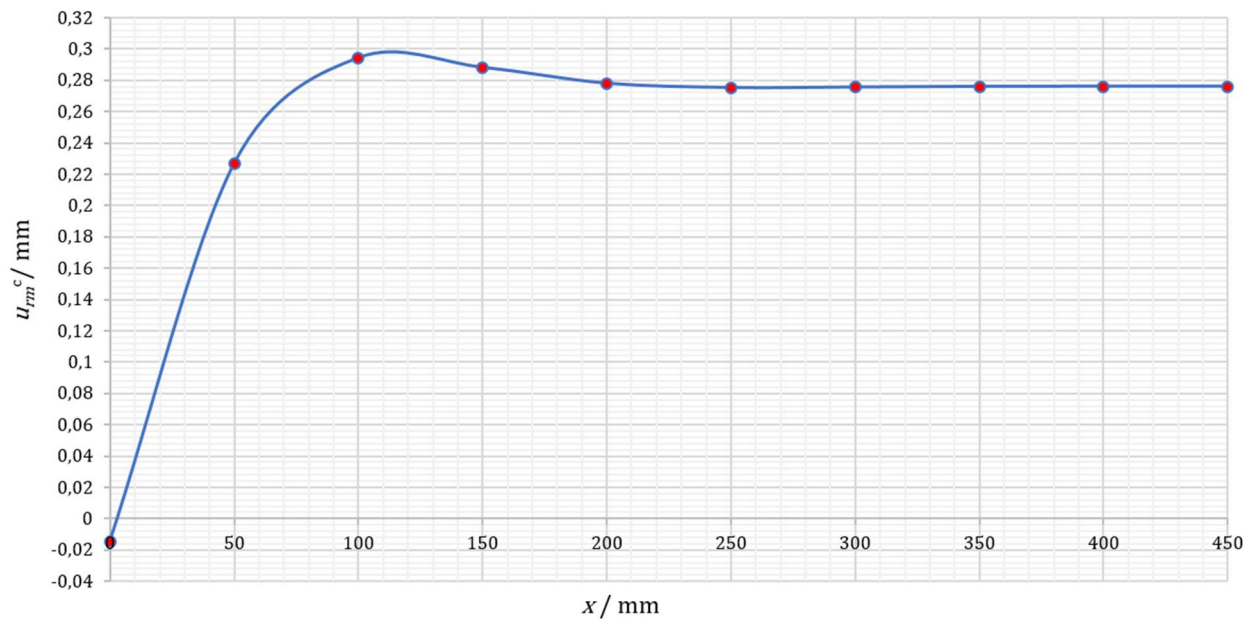
$$\sigma_\varphi^C = \frac{2\beta R}{h^2} \cdot \left( \frac{Q_o}{\beta} f_1 - M_o f_4 \right) + \frac{pR}{h}. \quad (3.72)$$

Dok je meridijalno naprezanje:

$$\sigma_\vartheta^C = \sigma_x^C. \quad (3.73)$$

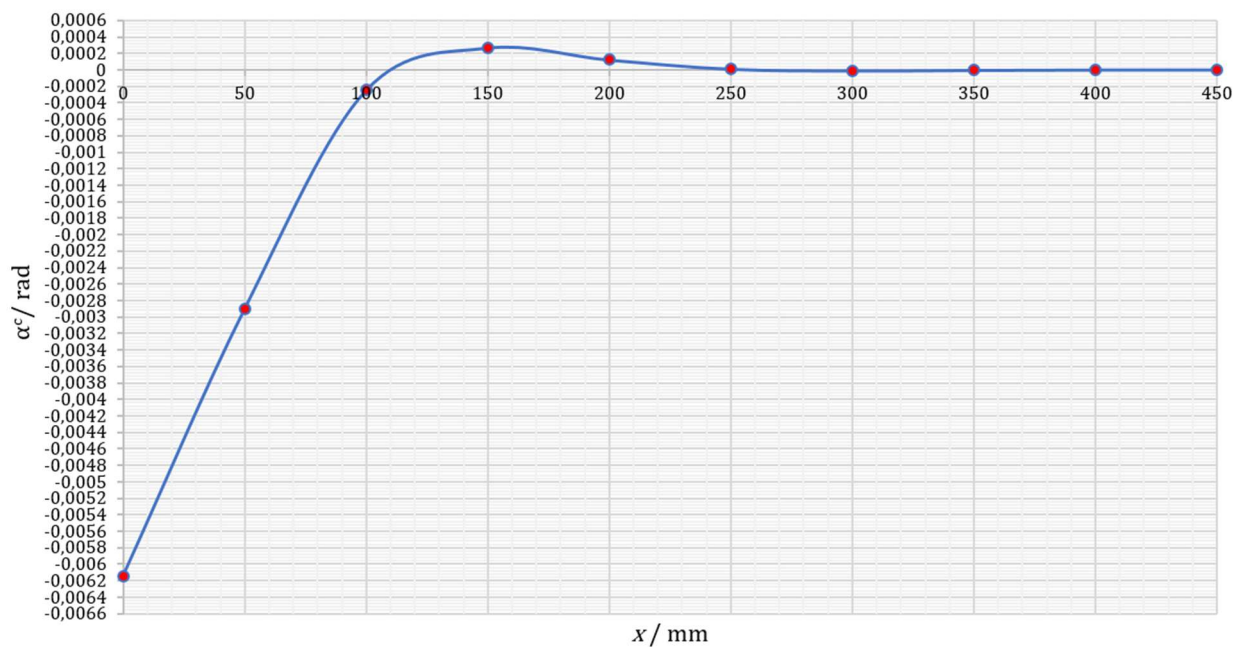
Nadalje, primjenom navedenih izraza dobiveni su sljedeći dijagrami, koje prikazuju Slike 11.-15. Raspodjela karakterističnih veličina za eliptičnu ljusku bit će prikazana po luku elipse, tj. meridijalnom smjeru ljuske. U slučaju cilindrične ljuske, dijagrami će se crtati do polovice duljine ljuske ( $H/2$ ), iz razloga što se lokalno savijanje također pojavljuje na dnu ljuske, tj. na donjem spoju cilindrične i eliptične ljuske.

Slika 11. prikazuje raspodjelu normalnog pomaka duž meridijana cilindra.



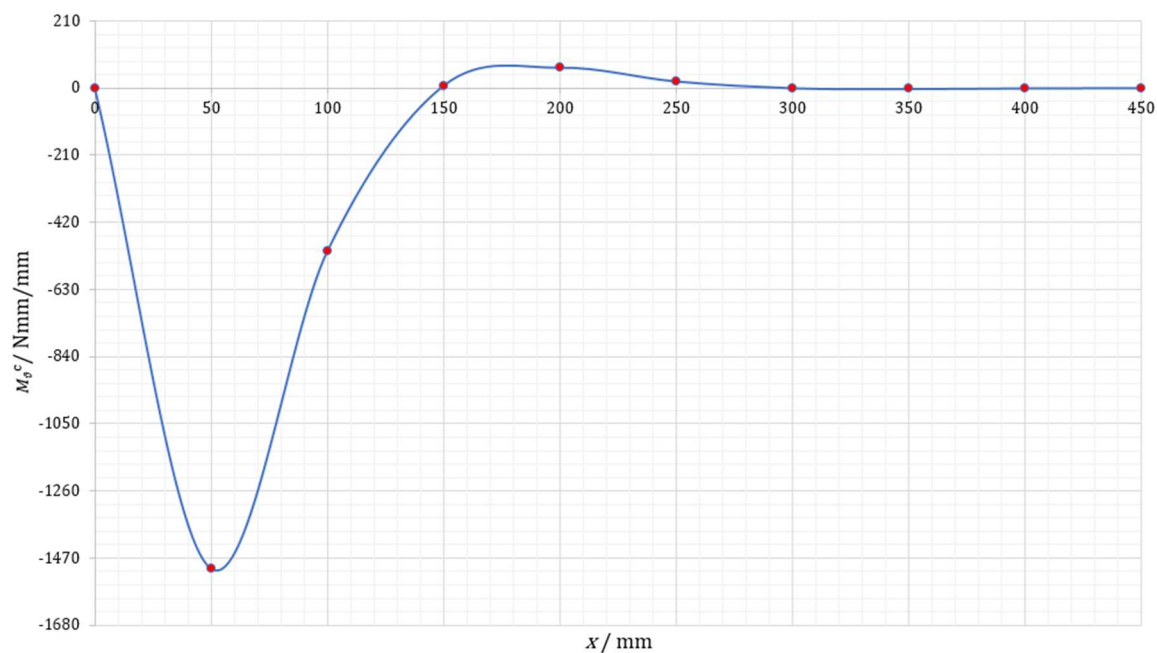
Slika 11. Raspodjela pomaka duž meridijana cilindra

Slika 12. prikazuje raspodjelu zakreta duž meridijana cilindrične ljuske.

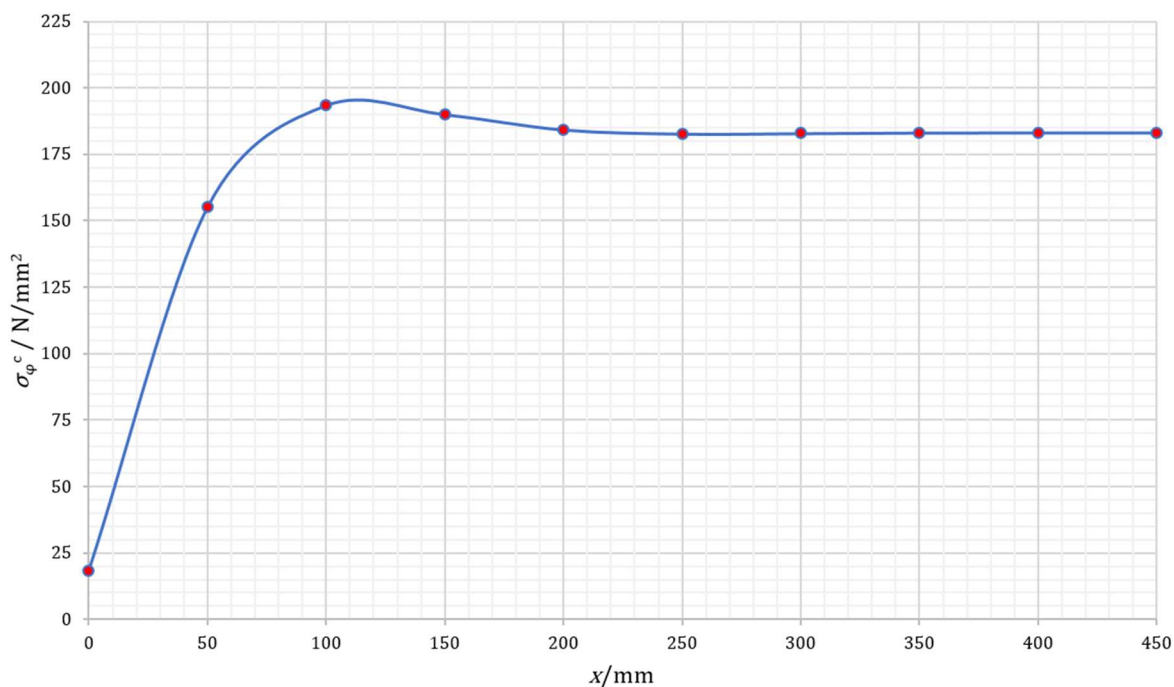


Slika 12 Raspodjela zakreta duž meridijana cilindra

Slika 13. prikazuje dijagram raspodjele meridijalnog momenta savijanja duž meridijana cilindra, dok Slika 14. prikazuje raspodjelu cirkularnu napreznja duž meridijana cilindrične ljuske.

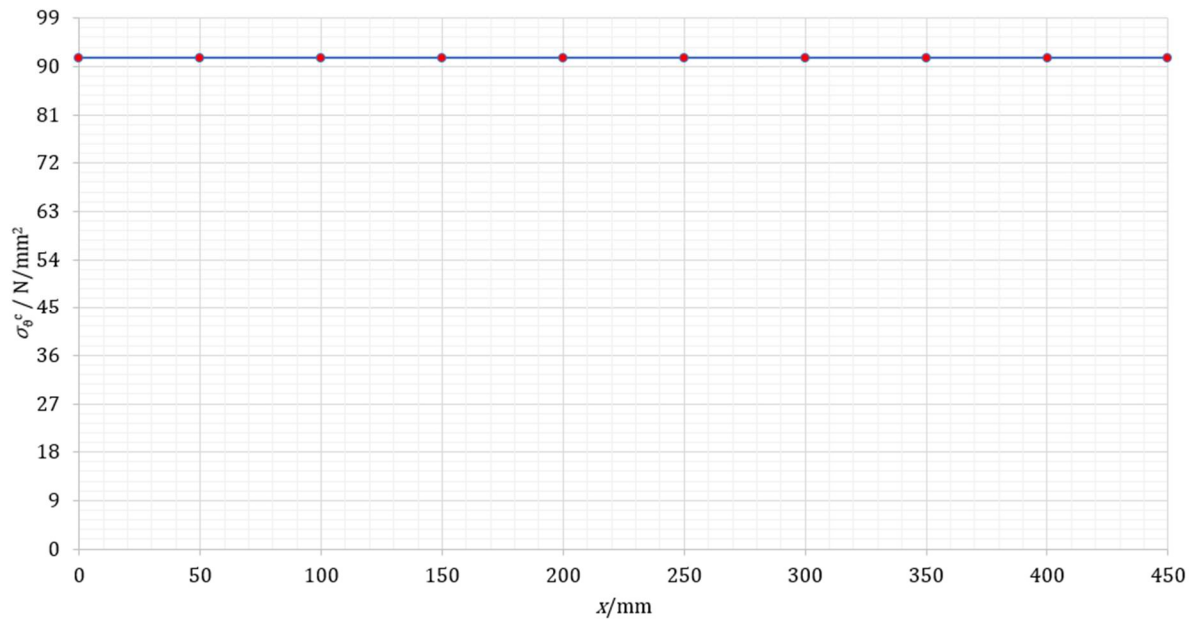


**Slika 13. Raspodjela meridijalnog momenta savijanja duž meridijana cilindra**



**Slika 14. Raspodjela cirkularnog napreznja duž meridijana cilindra**

Slika 15. prikazuje meridijalno naprezanje duž meridijana cilindra.



Slika 15. Raspodjela meridijalnog naprezanja duž meridijana cilindra

### 3.6.2 Eliptična ljuska

Zbog kompleksnosti geometrije eliptične ljuske, koristit će se prenamijenjeni izrazi za raspodjelu opterećenja i pomaka, odnosno prema [8] jednažba promjene radijalnog pomaka u ovisnosti o komponenti  $x$  iznosi:

$$u_r^e = -\alpha_{11}^e Q_0 f_4 - \alpha_{12}^e M_0 f_3 + u_{rm}^e, \quad (3.74)$$

$$\alpha^e = \alpha_{12}^e Q_0 f_1 + \alpha_{22}^e M_0 f_4 + \alpha^{me}. \quad (3.75)$$

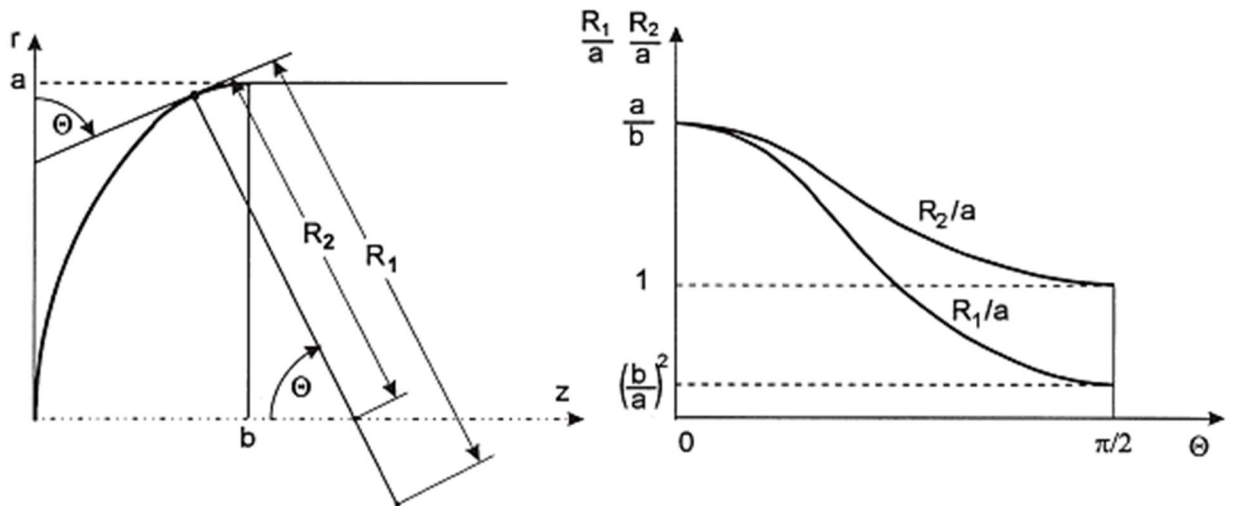
S obzirom na to da je poznato da je  $M_0$  jednak 0, kao i zakret na mjestu spoja, dobiju se sljedeći izrazi:

$$u_r^e = -\alpha_{11}^e Q_0 f_4 + u_{rm}^e, \quad (3.76)$$

$$\alpha^e = \alpha_{12}^e Q_0 f_1. \quad (3.77)$$

Pri čemu su pomoćne funkcije  $f_1$ ,  $f_3$  i  $f_4$  jednake kao u izrazima (3.64), (3.66) i (3.67). Nadalje jednažbe opterećenja i naprezanja nailaze na problem geometrije eliptične ljuske, naime eliptične glave mogu poremetiti stanje membranskog naprezanja unutar tlačnih spremnika. Detaljnija analiza promjene naprezanja ističe da je primarni uzrok poremećaja čvrstoće diskontinuitet polumjera zakrivljenosti glavnog meridijana na spoju eliptične „glave“ i cilindrične ljuske.

Prema teoriji graničnog naprezanja, optimalni oblici glave trebaju osigurati da polumjeri glavnog meridijana budu jednaki na točki dodira ljuski. Posljedično, zakrivljenost ( $1/R_1$ ) meridijalnog profila glave na točki kontakta s kružnom cilindričnom ljuskom treba biti nula. Međutim, torisferične i eliptične glave ne ispunjavaju ovaj zahtjev. Glavni polumjeri zakrivljenosti središnje površine eliptične glave mogu se opisati na sljedeći način, kako prikazuje Slika 16.



Slika 16. Diskontinuitet krivulje eliptične glave [9]

Glavni polumjeri zakrivljenosti središnje površine eliptične glave prema [9] su:

$$R_1 = \frac{a^2}{b} (1 + \gamma \cdot \sin^2 \vartheta)^{-3/2}, \quad (3.78)$$

$$R_2 = \frac{a^2}{b} (1 + \gamma \cdot \sin^2 \vartheta)^{-1/2}. \quad (3.79)$$

Gdje  $R_1$  predstavlja polumjer glavnog meridijana eliptične ljuske, a  $R_2$  glavni cirkularni radijus ljuske. Kut  $\vartheta$  se nalazi između vrijednosti  $0$  (tjeme)  $\leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}$  (spoj ljuski).

Nadalje je potrebno definirati funkciju promjene meridijalne i cirkularne sile, koje su funkcije meridijalnog kuta, prema [6]:

$$N_{\vartheta}^e = \frac{p \cdot R}{2} \cdot \left( \frac{1 + \gamma}{1 + \gamma \cdot \sin^2 \vartheta} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (3.80)$$

$$N_{\varphi}^e = (1 - \gamma \cdot \sin^2 \vartheta) \cdot N_{\vartheta}^e. \quad (3.81)$$



Cirkularni i meridijalni momenti se opisuju prema [6] na sljedeći način:

$$M_{\vartheta}^e = -\frac{p}{8\beta^2}(1 + \gamma)f_2, \quad (3.82)$$

$$M_{\varphi}^e = \nu M_{\vartheta}^e. \quad (3.83)$$

Iz navedenih izraza dobiju se sljedeći dijagrami promjene pomaka i opterećenja u ovisnosti o promjeni eliptičnog luka  $s$  i o promjeni kuta  $\vartheta$ . Važno je naglasiti da iako izrazi koriste iste pomoćne formule, varijabla 'x' o kojoj one ovise nije jednaka kao za cilindar, odnosno vrijedi:

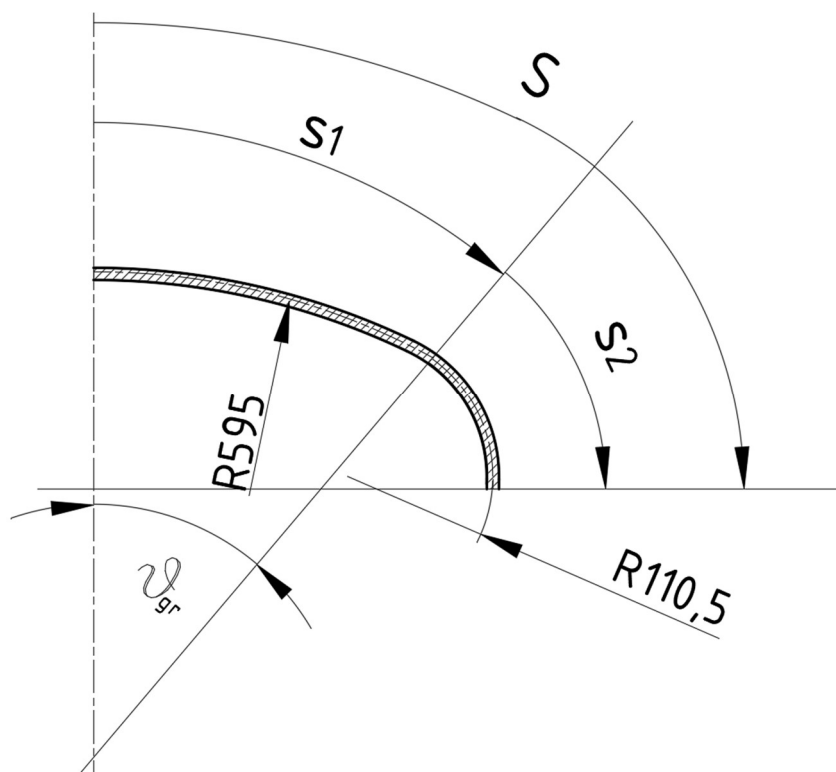
$$x = \int_0^s \beta \, ds. \quad (3.84)$$

Gdje, kako je prethodno navedeno,  $s$  predstavlja eliptični luk. Tu dolazi do problema geometrije iz definicije elipse, gdje je iz komplicirane geometrije iste jako zahtjevno odrediti eliptični luk. Problem geometrije elipse je aproksimiran sa 2 kružna luka, veće kružnice srednjeg radijusa 595 mm i manje kružnice srednjeg radijusa 110,5 mm, što je uočljivo iz konstrukcije, koju prikazuje Slika 17. Vrijednosti luka u ovisnosti o kutu  $\vartheta$  prikazuje Tablica 2.

**Tablica 2. Promjena eliptičnog luka u ovisnosti o promjeni meridijalnog kuta**

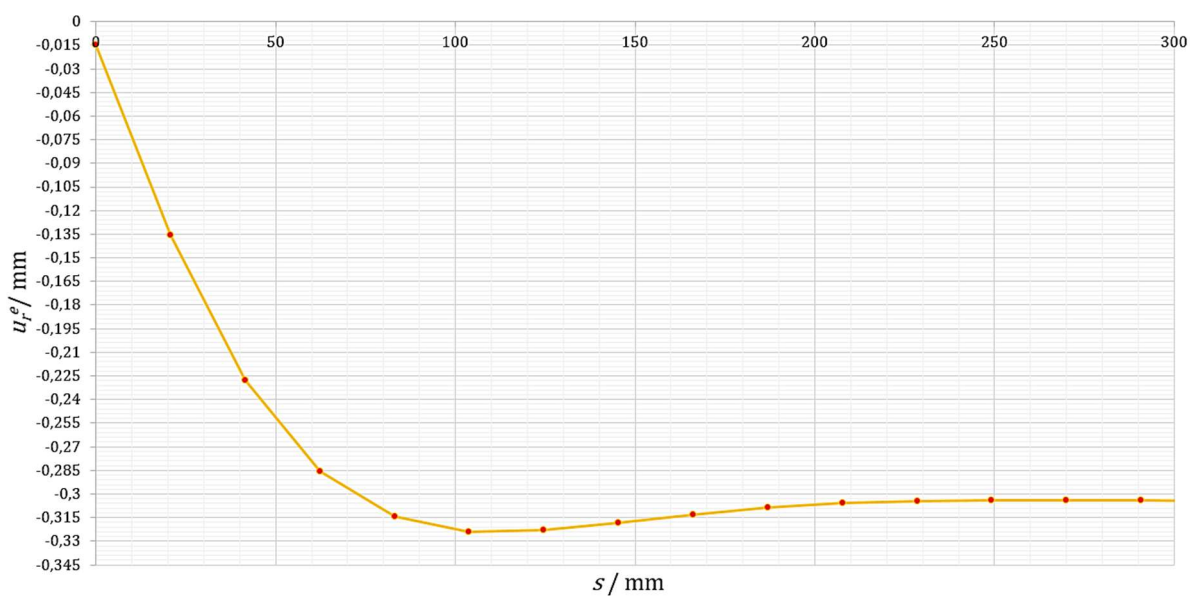
Kut $\vartheta$	Kružni luk $s_1$ / mm	Kružni luk $s_2$ /mm	$\sum s_i$ /mm
15°	155,771	-	155,771
30°	311,541	-	311,541
34,386° (kut prijelaza radijusa zakrivljenosti)	357,089	-	357,089
45°	-	21,214	378,303
60°	-	50,143	407,161
75°	-	79,143	436,161
90° (spoj ljuski)	-	108,001	465,09

Raspodjela karakterističnih veličina za eliptičnu ljusku bit će prikazana po meridijalnom smjeru ljuske, odnosno aproksimiranoj duljini eliptičnog luka. Također važno je napomenuti da funkcija luka  $s_2$  u svojoj definiciji nije ovisna o kutu  $\vartheta$ , jer on opisuje manju kružnicu, odnosno ovisi o kutu rotacije oko osi manje kružnice, koji će se označiti kao  $\vartheta'$ . Vrijedi odnos tih kuteva  $0^\circ (\vartheta = 34,386^\circ) \leq \vartheta' \leq 55,614^\circ (\vartheta = 90^\circ)$ .



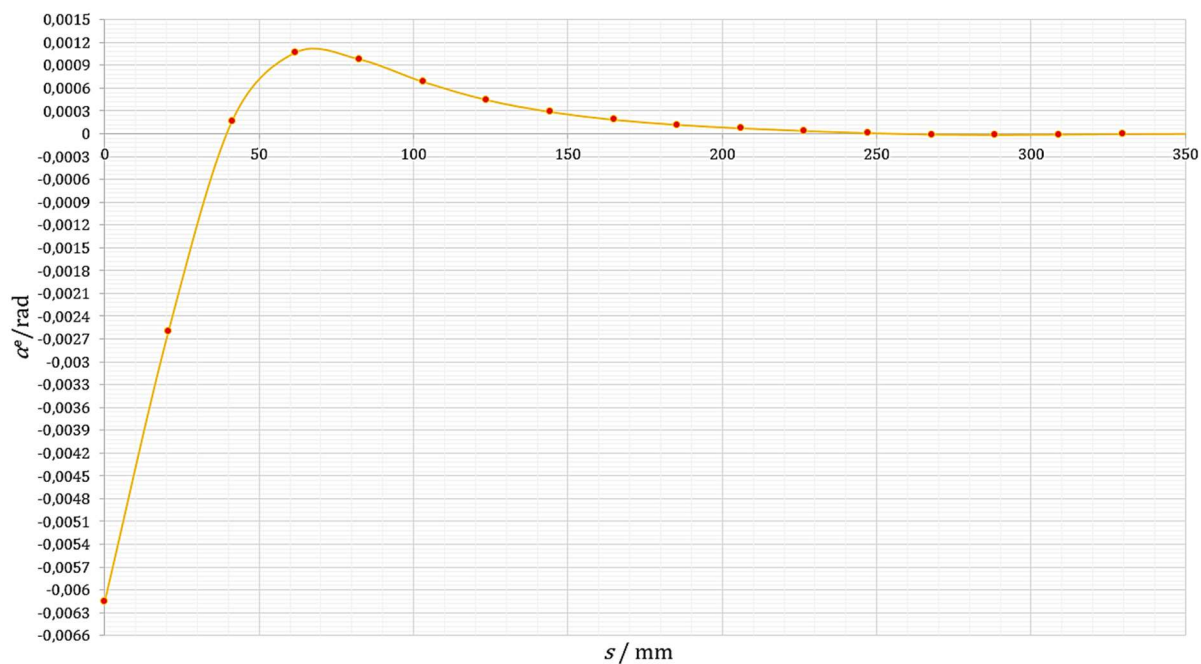
Slika 17. Aproksimacija eliptičnog luka sa dvjema kružnicama

Konačno se iz navedenih izraza mogu dobiti dijagrami pomaka i opterećenja. Slika 18. prikazuje graf raspodjele radijalnog pomaka duž duljine luka eliptične ljeske.

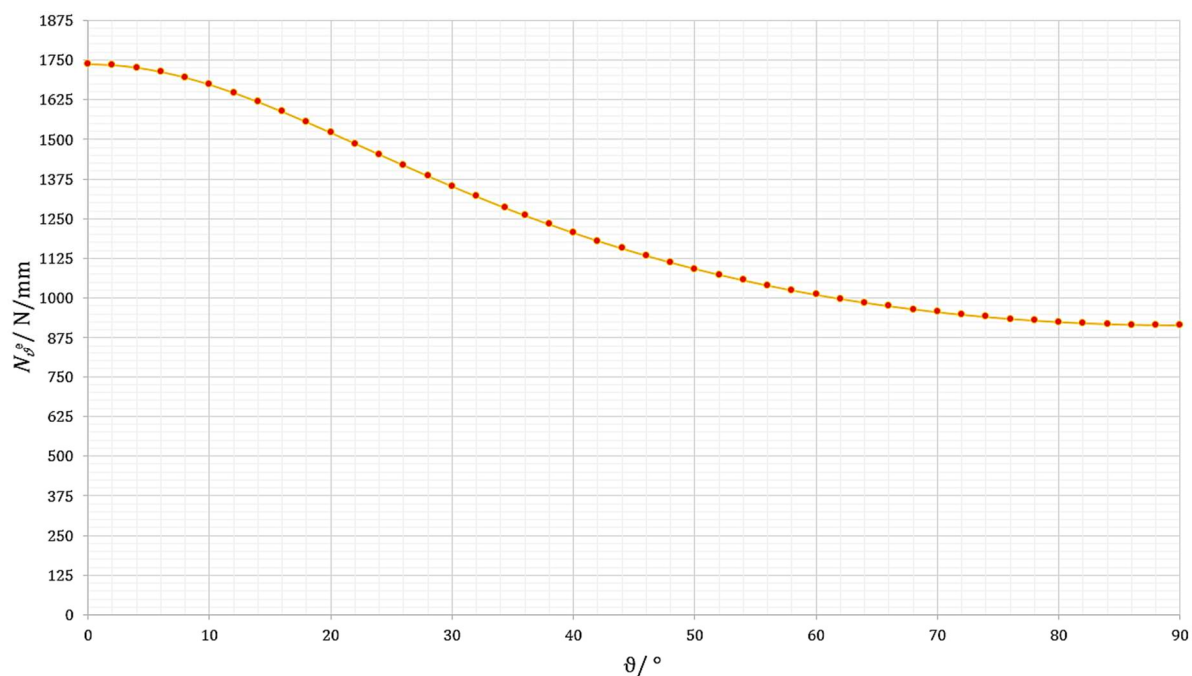


Slika 18. Raspodjela radijalnog pomaka duž luka eliptične ljeske

Slika 19. prikazuje dijagram raspodjele zakreta duž duljine luka eliptične ljuske, dok Slika 20. prikazuje graf raspodjele opterećenja meridijalne sile u ovisnosti o meridijalnom kutu.

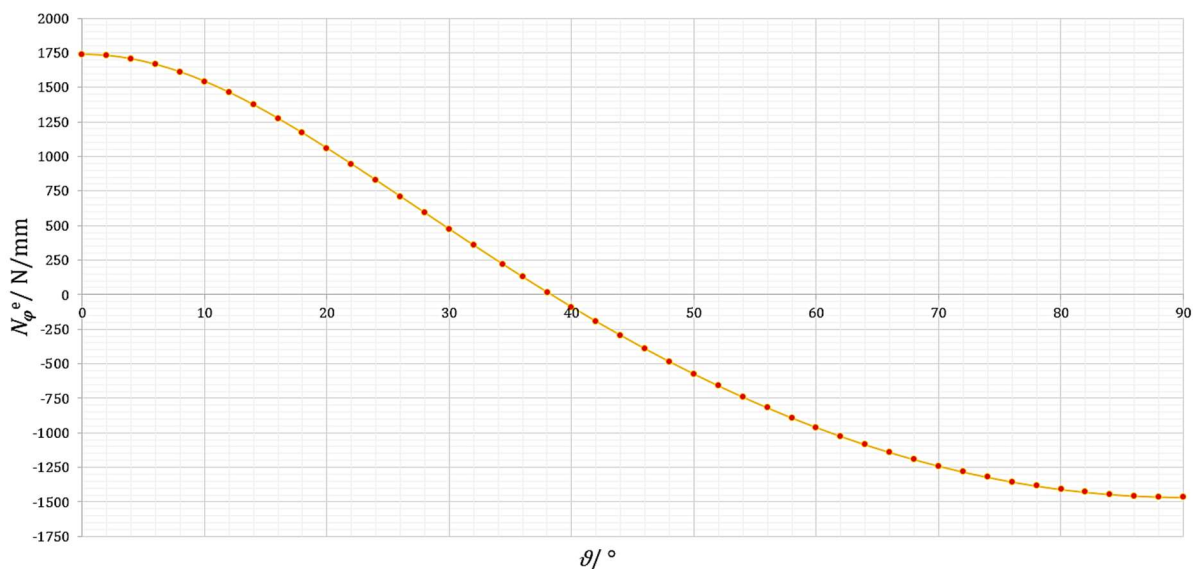


Slika 19. Raspodjela zakreta eliptične ljuske duž luka elipse



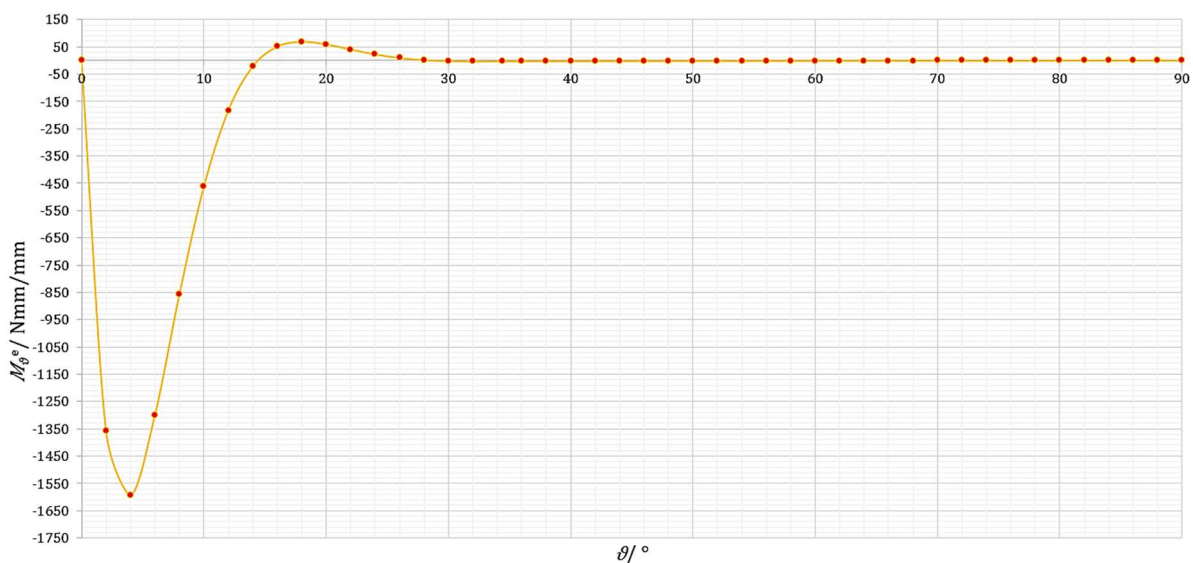
Slika 20. Raspodjela meridijalne sile u ovisnosti o kutu  $\theta$

Slika 21. prikazuje dijagram raspodjele opterećenja cirkularne sile u ovisnosti o meridijalnom kutu.



Slika 21. Raspodjela cirkularne sile u ovisnosti o kutu  $\vartheta$

Slika 22. prikazuje dijagram raspodjele opterećenja meridijalnog momenta u ovisnosti o meridijalnom kutu.



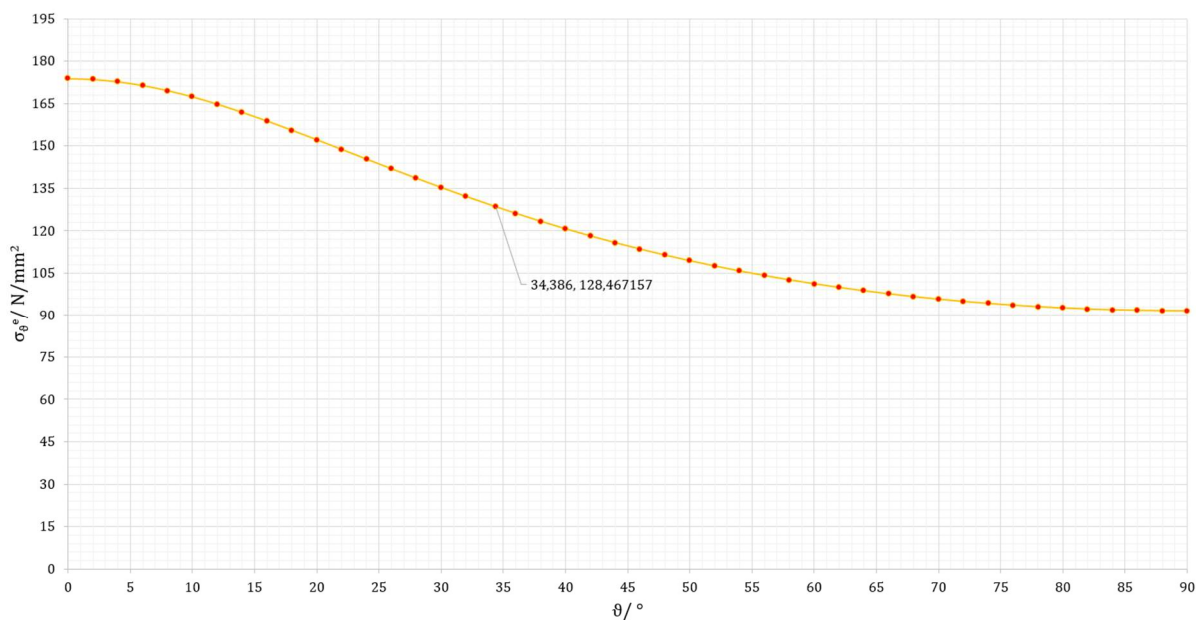
Slika 22. Raspodjela meridijalnog momenta u ovisnosti o kutu  $\vartheta$

Nadalje je potrebno odrediti naprezanja duž eliptične ljuske. Prema [9] meridijalna i cirkularna naprezanja eliptične ljuske su:

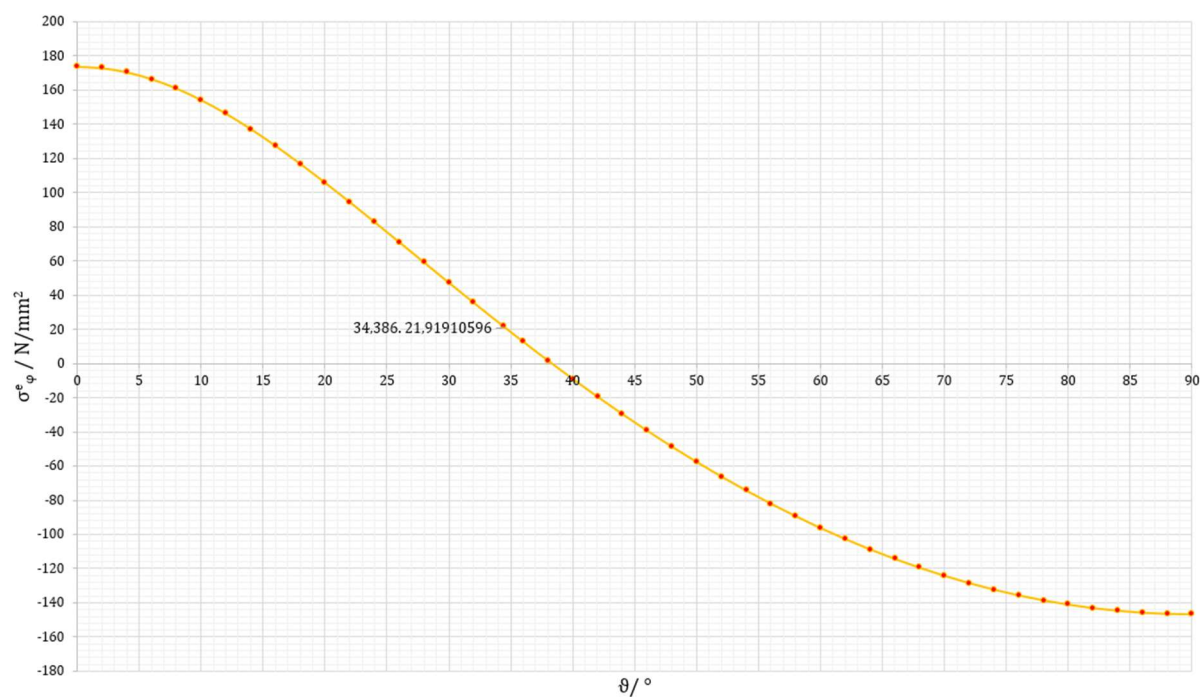
$$\sigma_{\vartheta}^e = \frac{1}{2} \frac{R_2}{t} p \quad (3.85)$$

$$\sigma_{\varphi}^e = \left(1 - \frac{1}{2} \frac{R_2}{R_1}\right) \frac{R_2}{t} p \quad (3.86)$$

Iz razloga što vrijednosti radijusa ovise o iznosu kuta  $\vartheta$ , naprezanja su također funkcija meridijalnog kuta na temelju čega su prikazani dijagrami. Slika 23. prikazuje dijagram koji opisuje meridijalno naprezanje i jasno je vidljiva promjena radijusa zakrivljenosti. Analogno tome Slika 24. prikazuje dijagram cirkularnog naprezanja u ovisnosti o promjeni meridijalnog kuta.

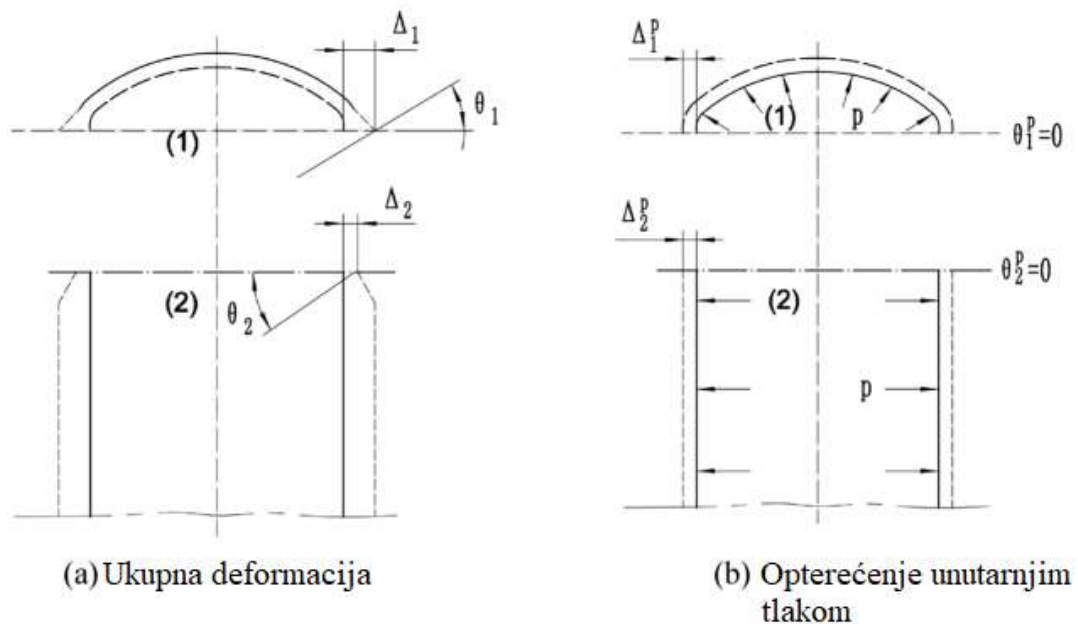


Slika 23. Raspodjela meridijalnog naprezanja u ovisnosti kuta  $\vartheta$



Slika 24. Raspodjela cirkularnog naprezanja u ovisnosti kuta  $\vartheta$

Slika 25.b ilustrativno prikazuje deformacije cilindrične i eliptične ljuske uslijed opterećenja unutarnjim tlakom  $p$ , dok Slika 25.a prikazuje ukupnu deformaciju spremnika.



Slika 25. Grafički prikaz deformacija spremnika na granici dodira [7]

### 3.7. Ekvivalentna naprezanja

Kako bi se kritično naprezanje utvrdilo analitički, bitno je utvrditi funkcije raspodjele za ekvivalentna naprezanja duž unutarnjih i vanjskih rubova ljuske. Ova ekvivalentna naprezanja izračunavaju se na rubovima jer oni obično pokazuju ekstreme naprezanja, prvenstveno zbog linearne raspodjele naprezanja izazvanog savijanjem. Kao što je navedeno u pododjeljku 2.1, naprezanja u smjeru normalnom na srednju površinu se zanemaruju, stoga se ekvivalentno naprezanje određuje na temelju dvoosnog stanja naprezanja. U tu svrhu koriste se opći izrazi za naprezanja na rubovima, pri čemu oznaka 'V' predstavlja vanjski rub ljuske, a analogno tome 'U' unutarnji rub ljuske, kako je navedeno u [5].

$$\sigma_{\vartheta}^{V,U} = \sigma_{\vartheta} \pm \frac{6 \cdot M_{\vartheta}}{h^2}, \quad (3.87)$$

$$\sigma_{\varphi}^{V,U} = \sigma_{\varphi} \pm \frac{6 \cdot M_{\varphi}}{h^2}. \quad (3.88)$$

U izrazu (3.88) se supstituira cirkularni moment prema [5]:

$$M_{\varphi} = \nu M_{\vartheta}. \quad (3.89)$$

Odnosno ubacivanjem izraza (3.89) u (3.88) dobije se:

$$\sigma_{\varphi}^{V,U} = \sigma_{\varphi} \pm \nu \cdot \frac{6 \cdot M_{\vartheta}}{h^2}. \quad (3.90)$$

Ekvivalentno naprezanje se računa prema teoriji najveće distorzijske energije, također poznata kao von Misesov kriterij, tvrdi da se popuštanje materijala događa kada distorzijska energija po jedinici volumena dosegne kritičnu vrijednost bez obzira na stanje naprezanja. Računa se na sljedeći način ekvivalentno naprezanje, prema [5]:

$$\sigma_{\text{ekv}} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2}. \quad (3.91)$$

Nadalje odabire se meridijalno naprezanje kao  $\sigma_1$ , a ciruklarno kao  $\sigma_2$ , odnosno dobije se sljedeći izraz:

$$\sigma_{\text{ekv}} = \sqrt{\sigma_{\vartheta}^2 + \sigma_{\varphi}^2 - \sigma_{\vartheta} \sigma_{\varphi}}. \quad (3.92)$$

Na vanjskome rubu cilindrične ljuske definirana su sljedeća meridijalna, odnosno cirkularna naprezanja:

$$\sigma_{\vartheta}^{V,c} = \sigma_{\vartheta} + \frac{6 \cdot M_{\vartheta}}{h^2}, \quad (3.93)$$

$$\sigma_{\varphi}^{V,c} = \sigma_{\varphi} + \nu \cdot \frac{6 \cdot M_{\vartheta}}{h^2}. \quad (3.94)$$

Raspodjela ekvivalentnog naprezanje na vanjskome rubu cilindrične ljuske je:

$$\sigma_{\text{ekv}}^{V,c} = \sqrt{(\sigma_{\vartheta}^{V,c})^2 + (\sigma_{\varphi}^{V,c})^2 - \sigma_{\vartheta}^{V,c} \sigma_{\varphi}^{V,c}}. \quad (3.95)$$

Ekvivalentna naprezanja eliptične ljuske izražavaju se za srednju plohu prema [9]:

$$\sigma_{\text{ekv}}^e = \sqrt{(\sigma_{\vartheta}^e)^2 + (\sigma_{\varphi}^e)^2 - \sigma_{\vartheta}^e \sigma_{\varphi}^e}. \quad (3.96)$$

Odnosno iz izraza (3.85) i (3.86) dobije se sljedeći izraz:

$$\sigma_{\text{ekv}}^e = \frac{1}{2} \frac{R_2}{t} p \sqrt{3 \left(1 - \frac{R_2}{R_1}\right) + \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2}. \quad (3.97)$$

Navedeni izrazi se mogu postaviti za vanjski rub ljuske, pri čemu će se za izračun eliptičnog luka koristiti radijus veće kružnice biti 600 mm, a manje 115,5 mm. Pri čemu se za  $a_v = 375$  mm i  $b_v = 200$  mm dobije novi parametar elipse:

$$\gamma^V = \frac{(a^V)^2}{(b^V)^2} - 1 = 2,515625. \quad (3.98)$$

Nadalje vrijede naprezanja za vanjski rub eliptične ljuske:

$$\sigma_{\text{ekv}}^{e,V} = \sqrt{(\sigma_{\vartheta}^{e,V})^2 + (\sigma_{\varphi}^{e,V})^2 - \sigma_{\vartheta}^{e,V} \sigma_{\varphi}^{e,V}}. \quad (3.99)$$

Odnosno iz izraza (3.85) i (3.86) dobije se sljedeći izraz za ekvivalentno naprezanje vanjskog ruba eliptične ljuske:

$$\sigma_{\text{ekv}}^{e,V} = \frac{1}{2} \frac{R_2^V}{t} \sqrt{3 \left( 1 - \frac{R_2^V}{R_1^V} \right) + \left( \frac{R_2^V}{R_1^V} \right)^2}. \quad (3.100)$$

Analogno izrazi se postavljaju na unutarnji rub ljuske, pri čemu će se za izračun eliptičnog luka radijus veće kružnice biti 590 mm, a manje 105,5 mm. Pri čemu se za  $a_v = 365$  mm i  $b_v = 190$  mm dobije novi parametar elipse:

$$\gamma^U = \frac{(a^U)^2}{(b^U)^2} - 1 = 2,69044. \quad (3.101)$$

Nadalje vrijede naprezanja za vanjski rub eliptične ljuske:

$$\sigma_{\text{ekv}}^{e,U} = \sqrt{(\sigma_{\vartheta}^{e,U})^2 + (\sigma_{\varphi}^{e,U})^2 - \sigma_{\vartheta}^{e,U} \sigma_{\varphi}^{e,U}}. \quad (3.102)$$

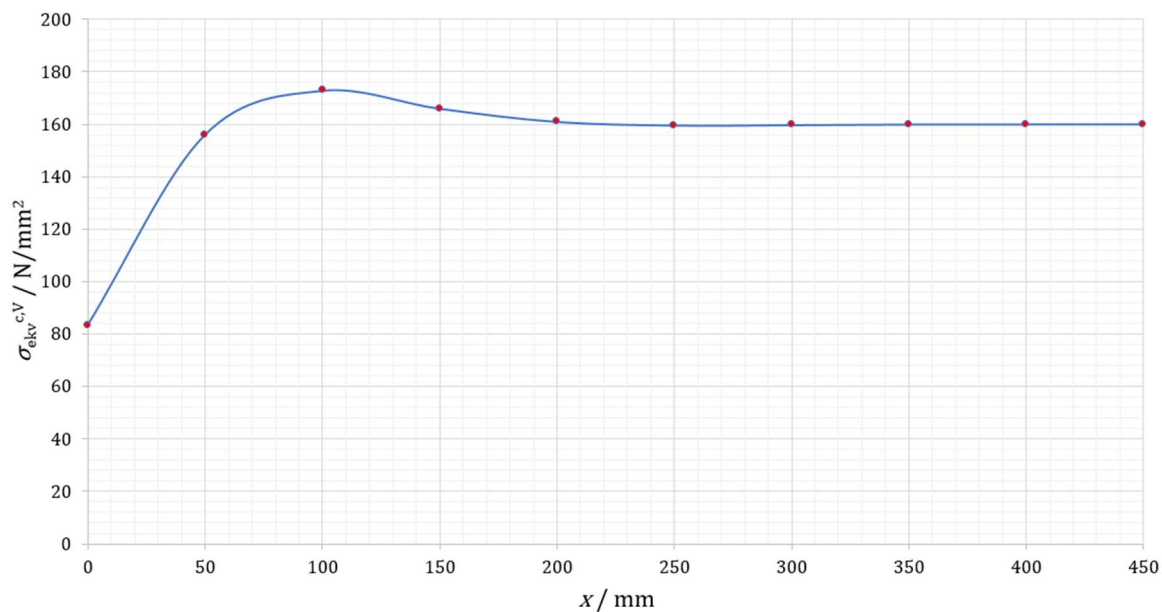
Odnosno iz izraza (3.85) i (3.86) dobije se sljedeći izraz za ekvivalentno naprezanje unutarnjeg ruba eliptične ljuske:

$$\sigma_{\text{ekv}}^{e,U} = \frac{1}{2} \frac{R_2^U}{t} \sqrt{3 \left( 1 - \frac{R_2^U}{R_1^U} \right) + \left( \frac{R_2^U}{R_1^U} \right)^2}. \quad (3.103)$$

Konačno su definirani svi izrazi ekvivalentnih naprezanja za vanjske i unutarnje rubove cilindrične i eliptične ljuske, nadalje se dobiju se sljedeći dijagrami koje prikazuju Slike 26.-33. Slika 26. prikazuje dijagram raspodjele ekvivalentnog naprezanja na vanjskom rubu cilindrične ljuske duž duljine ljuske. Uzduž duljine cilindra, ekvivalentna naprezanja obično pokazuju vršne vrijednosti blizu ruba ljuske, u ovom slučaju to je dodir ljuska, gdje je zakrivljenost najveća, i smanjuju se prema središtu duljine cilindra gdje konvergiraju prema konstantnoj vrijednosti. Ova raspodjela odražava kombinirane učinke savijanja i naprezanja membrane izazvanih unutarnjim tlakom. Dodatno, koncentracije naprezanja mogu se pojaviti na točkama geometrijske nepravilnosti ili strukturalnog diskontinuiteta, ističući područja osjetljiva na lom.

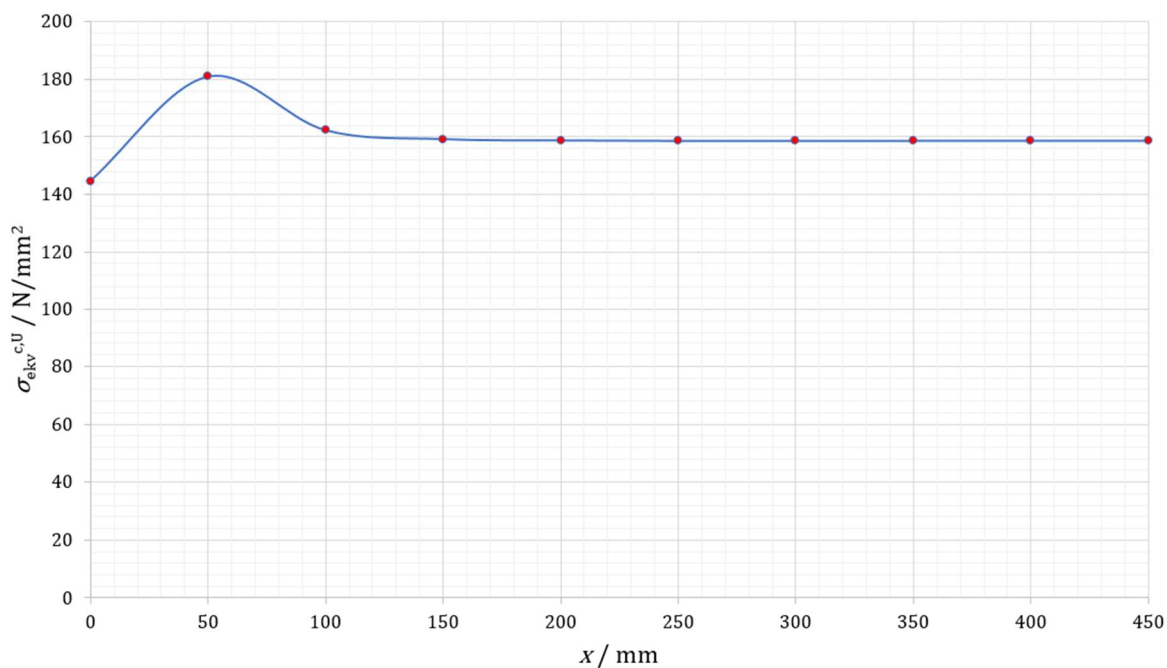


Slika 26. prikazuje dijagram raspodjele ekvivalentnog naprezanja na vanjskom rubu cilindrične ljuske duž duljine ljuske.



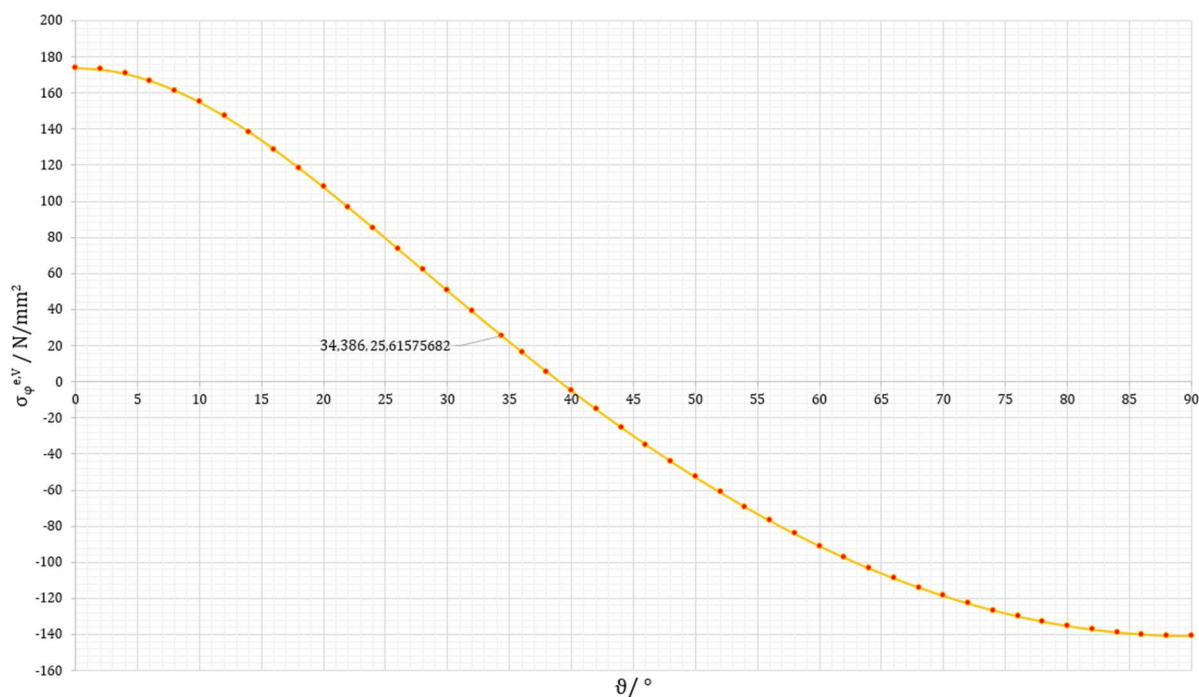
**Slika 26. Raspodjela ekvivalentnog naprezanja na vanjskom rubu cilindrične ljuske**

Slika 27. prikazuje dijagram raspodjele ekvivalentnog naprezanja na unutarnjem rubu cilindrične ljuske.



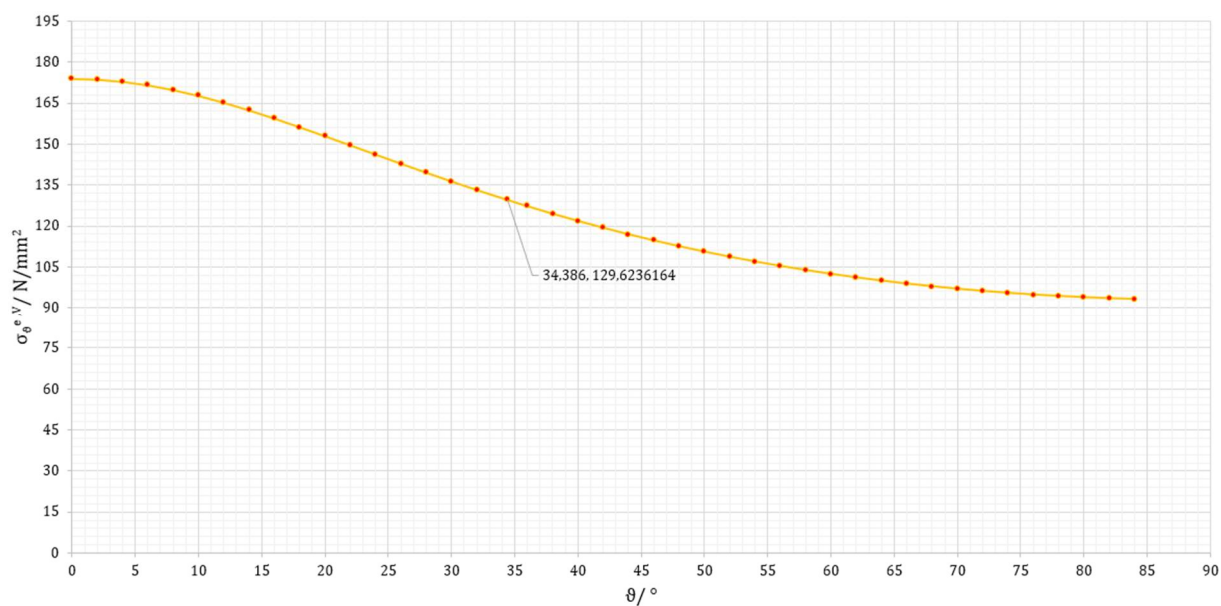
**Slika 27. Raspodjela ekvivalentnog naprezanja na unutarnjem rubu cilindrične ljuske**

Slika 28. prikazuje dijagram raspodjele cirkularnog napreznja na vanjskom rubu eliptične ljsuske u ovisnosti o promjeni meridijalnog kuta.



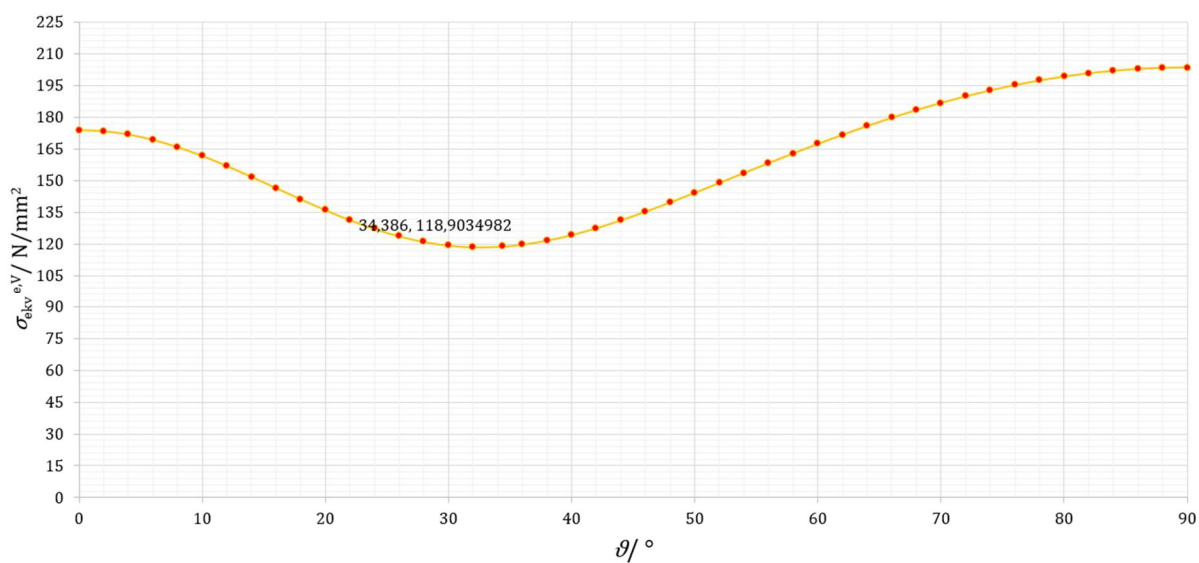
Slika 28. Raspodjela cirkularnog napreznja vanjskog ruba eliptične ljsuske

Slika 29. prikazuje dijagram raspodjele meridijalnog napreznja na vanjskom rubu eliptične ljsuske u ovisnosti o promjeni meridijalnog kuta.



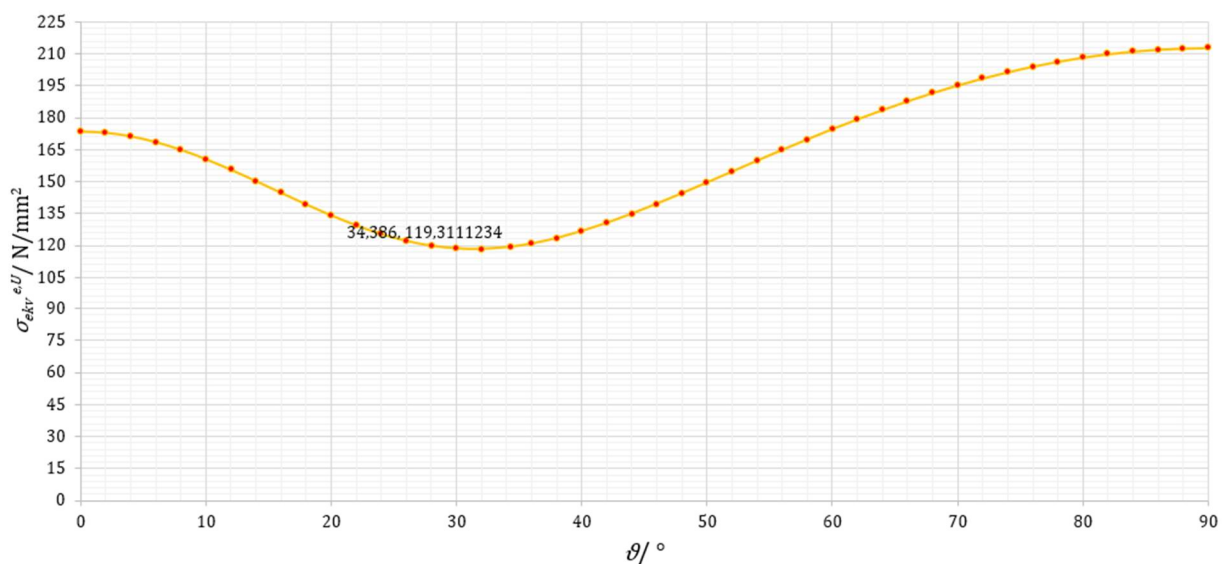
Slika 29. Raspodjela meridijalnog napreznja vanjskog ruba eliptične ljsuske

Slika 30. prikazuje dijagram raspodjele ekvivalentnog napreznja na vanjskom rubu eliptične ljske u ovisnosti o promjeni meridijalnog kuta.



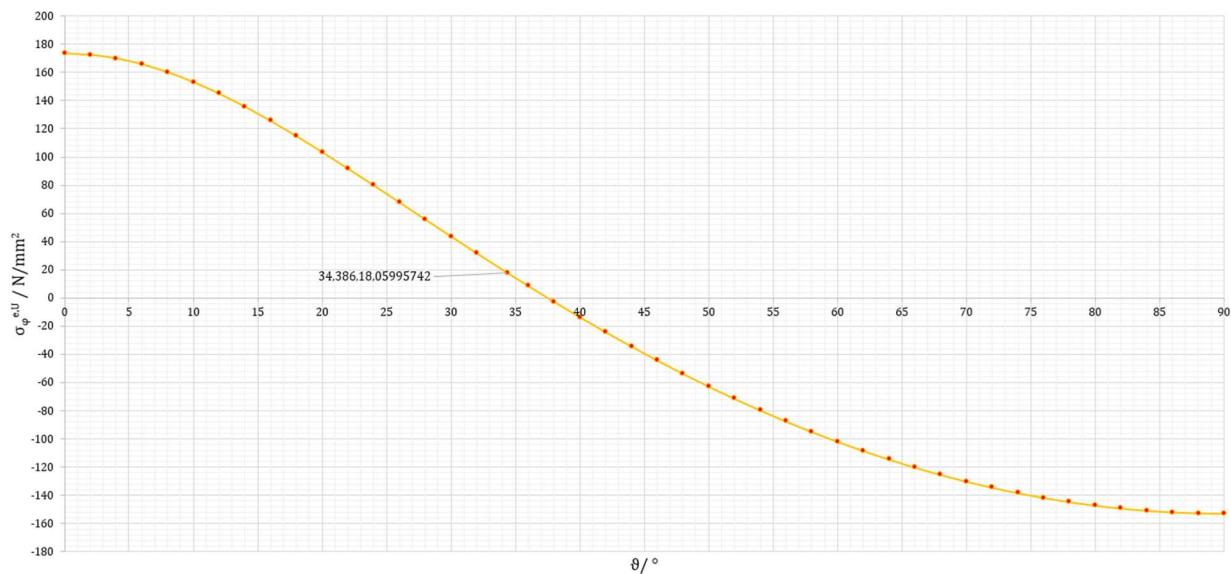
Slika 30. Raspodjela ekvivalentnog napreznja vanjskog ruba eliptične ljske

Slika 31. prikazuje dijagram raspodjele ekvivalentnog napreznja na unutarnjem rubu eliptične ljske u ovisnosti o promjeni meridijalnog kuta.



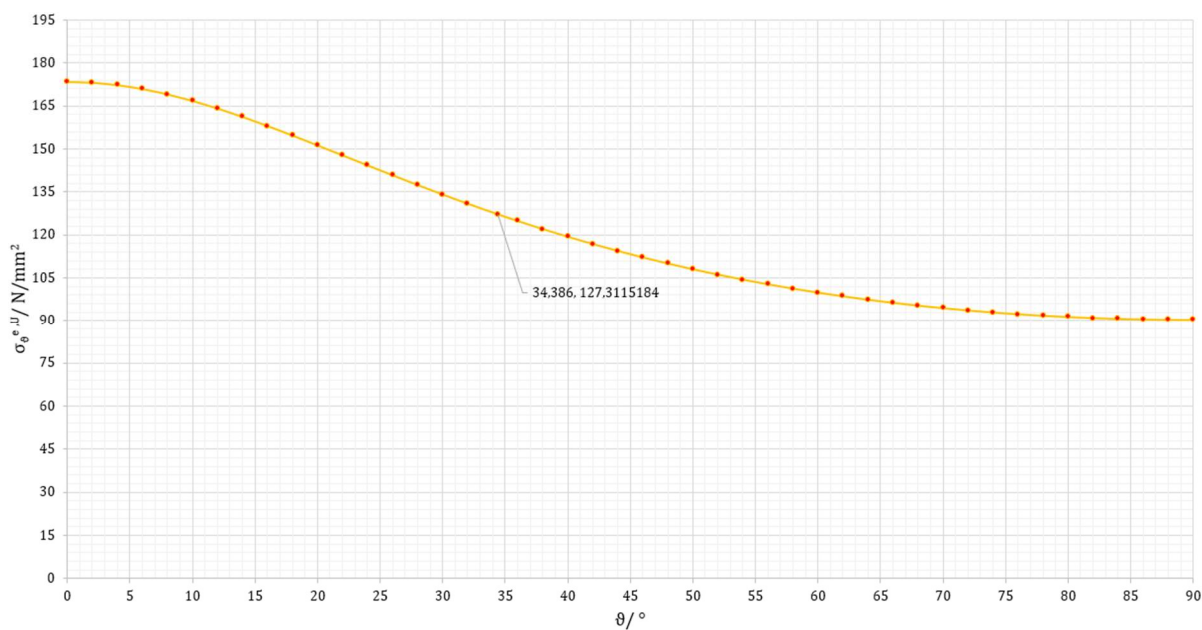
Slika 31. Raspodjela ekvivalentnog napreznja unutarnjeg ruba eliptične ljske

Slika 32. prikazuje dijagram raspodjele cirkularnog naprezanja na unutarnjem rubu eliptične ljuske u ovisnosti o promjeni meridijalnog kuta.



**Slika 32. Raspodjela cirkularnog naprezanja unutarnjeg ruba eliptične ljuske**

Slika 33. prikazuje dijagram raspodjele meridijalnog naprezanja na unutarnjem rubu eliptične ljuske u ovisnosti o promjeni meridijalnog kuta.



**Slika 33. Raspodjela meridijalnog naprezanja unutarnjeg ruba eliptične ljuske**

### 3.8. Proračun čvrstoće spremnika

Za procjenu čvrstoće ključno je odrediti maksimalno naprezanje spremnika i usporediti ga s dopuštenom granicom naprezanja. Slika 27. prikazuje najveće naprezanje točke u blizini spoja cilindrične i eliptične ljuske gdje je ekvivalentno naprezanje jednako  $\sigma_{\text{ekv,max}} = 212,8$  MPa. Naravno, kako je cijeli spremnik napravljen od istog materijala, čelika E355E, dovoljno je provjeriti sigurnost navedene kritične točke, jer ako sigurnost u tom području zadovoljava, može se zaključiti da će i u ostalim. Kritično naprezanje određujemo granicom tečenja materijala koje iznosi  $R_{p0,2} = 320$  MPa, kako je navedeno u Tablici 1. Nadalje sigurnost spremnika se definira sljedećim izrazom:

$$S = \frac{R_{p0,2}}{\sigma_{\text{ekv,max}}} = \frac{320}{212,8} = 1,5. \quad (3.104)$$

Određena je sigurnost iznosa 1,5, što zadovoljava zadane uvjete opterećenja, također treba napomenuti kako je ovo testni tlak iznosa gotovo 40 % većeg od namijenjenog radnog tlaka spremnika, koji iznosi 3 MPa. Može se zaključiti da spremnik zadovoljava uvjet čvrstoće.

## 4. Numeričko rješenje

### 4.1. Uvod analize

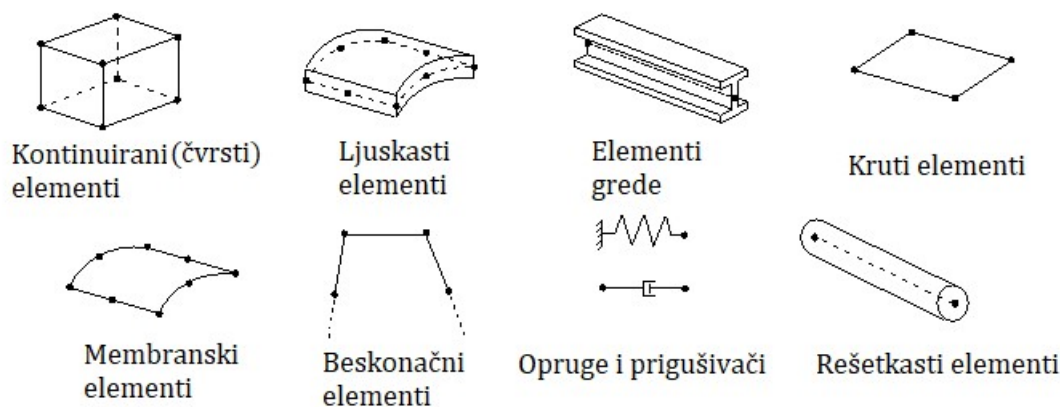
Numerička analiza je provedena primjenom metode konačnih elemenata u programskom paketu ABAQUS®. Ova metoda se intenzivno koristi u rješavanju statičkih i dinamičkih problema kod deformabilnih tijela. Uključuje diskretizaciju kontinuuma u međusobno povezane elemente s ograničenim stupnjevima slobode, čime se beskonačni stupnjevi slobode pretvaraju u konačnu mrežu elemenata. Svaki element je međusobno povezan u čvorovima, sa svojim stanjem opisanim kroz funkcije interpolacije, uključujući pomak, deformaciju naprezanja, temperaturu, itd. Metoda konačnih elemenata daje približna rješenja, bliže aproksimacije stvarnosti mogu se postići odgovarajućim numeričkim modelima proračuna i odabirom elemenata. Točnost se poboljšava s povećanjem broja korištenih elemenata, ova teza će se razmatrati u kasnijim odjeljcima.

Postoje razne vrste konačnih elemenata, uključujući jednodimenzionalne, dvodimenzionalne, trodimenzionalne, osnosimetrične i one prilagođene za specifične zadatke kao što su analize konstrukcija ljuske. ABAQUS®, koji je razvio *Dassault Systèmes*, pojavio se 1978. i od tada je postao vodeći alat u inženjerskim rješenjima temeljenim na konačnim elementima. Sastoji se od dva glavna proizvoda: *ABAQUS/Standard*, svestrani program za linearne i nelinearne analize, i *ABAQUS/Explicit*, dizajniran za specijalizirane analize, posebno u kratkim prijelaznim pojavama. Softver usmjerava upravljanje podacima s tri različite faze: predobrada za ulazne podatke, obrada za izračunavanje i naknadna obrada za vizualizaciju rezultata.

### 4.2. Konačni elementi u ABAQUS® programskom paketu

Točan prikaz složenih struktura i pojava u numeričkim simulacijama uvelike se oslanja na odgovarajući odabir i korištenje konačnih elemenata. U ovom odjeljku se prikazuju različite vrste konačnih elemenata koji će se koristiti u numeričkoj analizi, a svaki je prilagođen za rješavanje specifičnih aspekata problema proračuna. Važno je razumjeti karakteristike i mogućnosti ovih konačnih elemenata, kako bi se omogućilo učinkovito modeliranje i analiza problema. ABAQUS® nudi široku ponudu konačnih elemenata kao i raspon mogućnosti za rješavanje različitih problema.

Slika 34. ilustrira razne vrste elemenata koji se obično koriste u analizi naprezanja unutar ABAQUS®-a. Ključni čimbenik razlikovanja među ovim grupama elemenata je specifična geometrija za koju je svaka grupa prilagođena.



Slika 34. Vrste konačnih elemenata dostupne za analizu konstrukcija [10]

### 4.3. Konačni elementi korišteni u radu

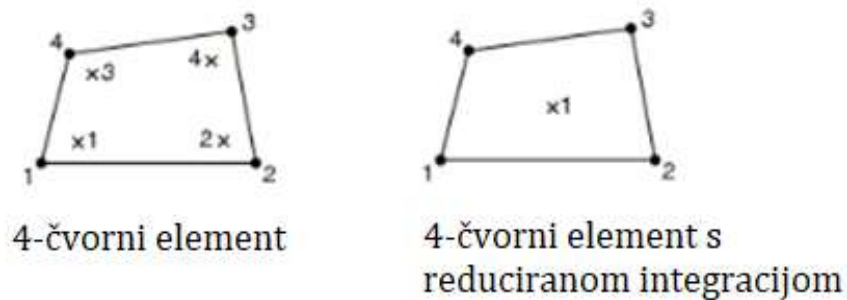
#### 4.3.1. S4 konačni element

Element S4 je četverokutni element s četiri čvora koji se koristi u analizi konačnih elemenata za modeliranje dvodimenzionalnih struktura u uvjetima ravninskih naprezanja. Svaki čvor ima dva stupnja slobode koji predstavljaju pomake u smjerovima osi  $x$  i  $y$ . Koristi funkcije oblika za interpolaciju i obično se primjenjuje u raznim područjima inženjerstva za analizu komponenti poput ploča i ljuski. Kako je prethodno navedeno ljuske su strukture tankih stijenki u kojima se naprezanja i deformacije pojavljuju primarno unutar dvije dimenzije, što čini S4 idealnim odabirom za analizu. Iako je svestran, može imati ograničenja u opisivanju složenih distribucija naprezanja u blizini granica, zahtijevajući specijalizirane elemente ili tehnike umrežavanja za točne rezultate. Slika 35. prikazuje S4 element (lijevo), i S4R (desno) s reduciranom integracijom.

Pojašnjenje oznake je sljedeće:

S – „Shell“ (ljuska),

4 – broj čvorova elementa.



Slika 35. S4 element (lijevo) i S4R (desno) [11]

#### 4.3.2. CAX3 konačni element

Konačni element CAX3 je ljuskasti trokutasti element s tri čvora. U usporedbi s drugim elementima ljuske kao što su S4 i CAX8, element CAX3 ima manje čvorova, što može rezultirati manjom potrebnom memorijom kod računanja. Međutim, ova jednostavnost dolazi s ograničenjima u točnom predstavljanju složenih geometrija i distribucija naprežanja

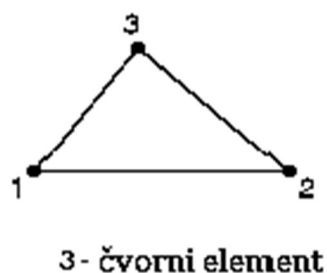
CAX3 pruža ravnotežu između računalne učinkovitosti i točnosti, što ga čini praktičnim izborom za modeliranje tankostjenih struktura u inženjerskim simulacijama. Njegova svestranost i jednostavnost čine ga vrijednim dodatkom paketu alata konačnih elemenata dostupnih rješavanje širokog spektra problema strukturne analize. Slika 36. prikazuje trokutasti konačni element s 3 čvora.

Pojašnjenje oznake je sljedeće:

**C** – „*Continuum*“ (hrv. kontinuum),

**AX** – „*Axysymmetric*“ (hrv. osnosimetričnost),

**3** – broj čvorova elementa.



Slika 36. CAX3 konačni element [11]



### 4.3.3. CAX8 konačni element

Element CAX8 se koristi za modeliranje struktura tankih stijenki, kao i prethodno navedeni S4 i CAX3. Ovaj element pripada kategoriji četverokutnih ljuskastih elemenata s osam čvorova i posebno je namijenjen za predviđanje „ponašanja“ osnosimetričnih struktura podvrgnutih različitim uvjetima opterećenja. Njegove jedinstvene karakteristike omogućuju mu učinkovito predstavljanje složenih geometrija i distribucija naprezanja.

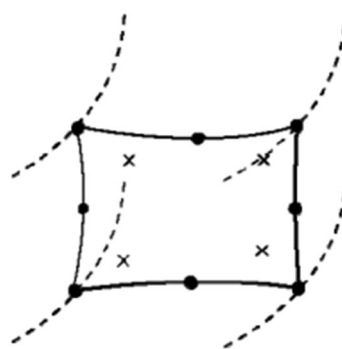
Za razliku od jednostavnijih elemenata kao što je CAX3, element CAX8 nudi povećanu gustoću čvorova i prilagodljivost problemu, omogućujući preciznije modeliranje složenih struktura ljuske. Ova poboljšana sposobnost dolazi s kompromisom povećane računalne memorije, budući da element zahtijeva više računalnih resursa za izvođenje analiza. Međutim, poboljšana točnost koju nudi element CAX8 čini ga preferiranim izborom za primjenu gdje je potreban detaljan prikaz ponašanja ljuske. Slika 37. prikazuje CAX8 konačni element.

Pojašnjenje oznake je sljedeće:

**C** – „*Continuum*“ (hrv. kontinuum),

**AX** – „*Axysymmetric*“ (hrv. osnosimetričnost),

**8** – broj čvorova elementa.



Slika 37. CAX8 konačni element [12]

### 4.4. Verifikacija konačnih elemenata

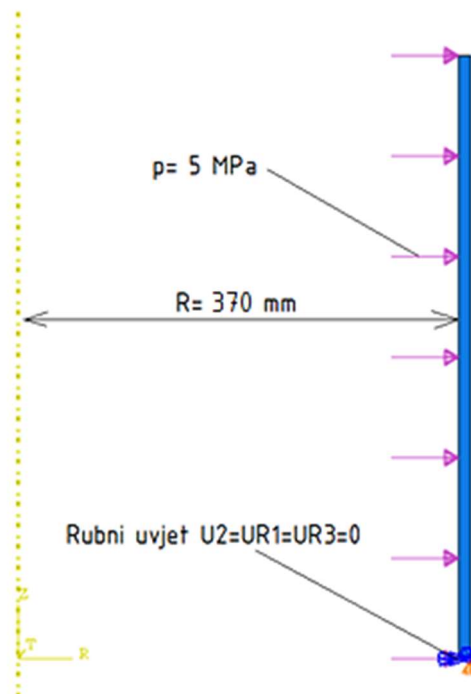
Prije daljnje numeričke analize potrebno je odrediti vrstu elementa najpogodnijeg za zadani problem. Kako bi se to ostvarilo potrebno je pojednostaviti problem vertikalnog spremnika na dva elementa, i svaki element provjeriti zasebno, odnosno proveden je postupak verifikacije. To uključuje procjenu odstupanja najvećeg pomaka elemenata u usporedbi s analitičkim rješenjima.

#### 4.4.1. Cilindrična ljuska

U ovom poglavlju uzet će se cilindrična ljuska za verifikaciju, istih dimenzija kao cilindrična ljuska iz poglavlja 3, opterećena tlakom 5 MPa. . Na donjem rubu cilindra je spriječen pomak u smjeru osi  $y$  Kartezijevog koordinatnog sustava definiranjem  $y$ -simetrije na jednom rubu.

##### 4.4.1.1. Aproksimacija CAX8 konačnim elementom

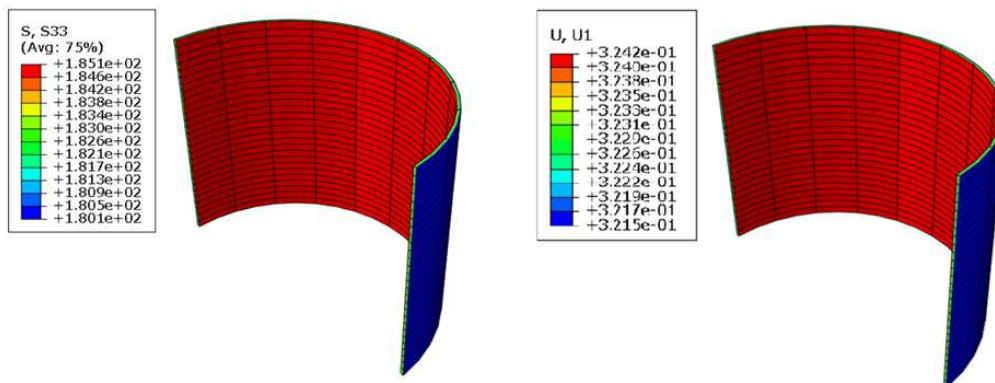
Valja napomenuti da se analiza fokusira na manji dio ljuske zbog očekivanja konstantnih vrijednosti duž duljine cilindra. Na donjem rubu postavljen je prethodno naveden granični uvjeti i postavljeno je opterećenje kako prikazuje Slika 38.



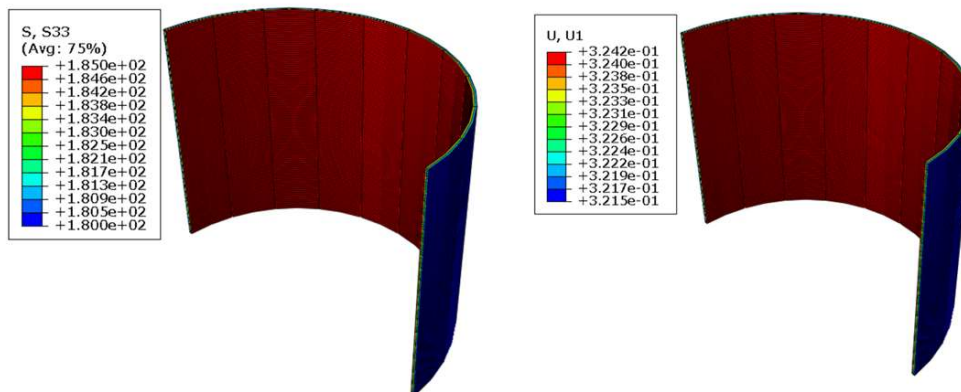
Slika 38. Postavljeni rubni uvjet i opterećenje tlakom  $p$

Kako se elementi mreže u ABAQUS<sup>®</sup>-u povećavaju, očekivana odstupanja numeričkih rezultata od analitičkih rezultata se smanjuju. To je zato što finija mreža omogućuje točniji prikaz geometrije i ponašanja strukture, iz razloga što manji elementi u finijoj mreži mogu točnije uhvatiti gradijente naprezanja preko elementa, što pritom smanjuje pogreške diskretizacije i poboljšava konvergenciju numeričkog rješenja prema analitičkom rješenju. Stoga povećanjem elemenata mreže povećava se preciznost i pouzdanost numeričke analize.

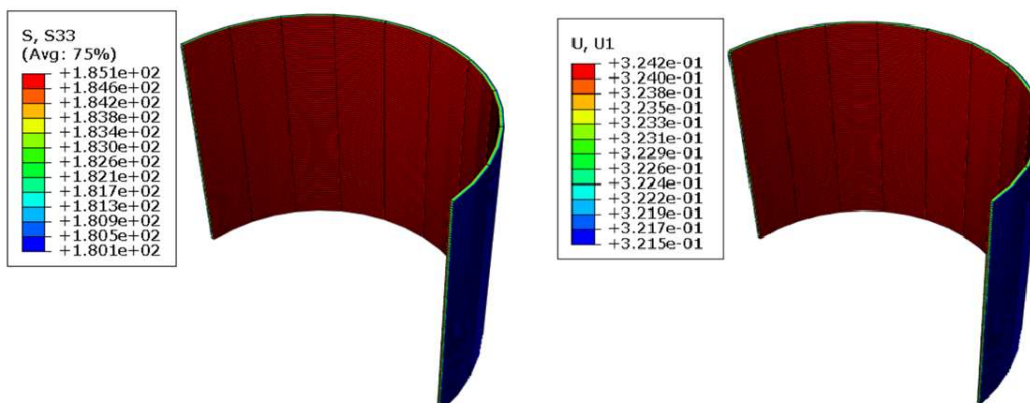
Nadalje Slike 39.-41. prikazuju rezultate dobivene za različit broj konačnih elemenata umreženog dijela cilindra.



Slika 39. Prikaz rezultata cirkularnog napreznja (lijevo) i radijalnog pomaka (desno) za generiranu mrežu od 28 CAX8 elemenata

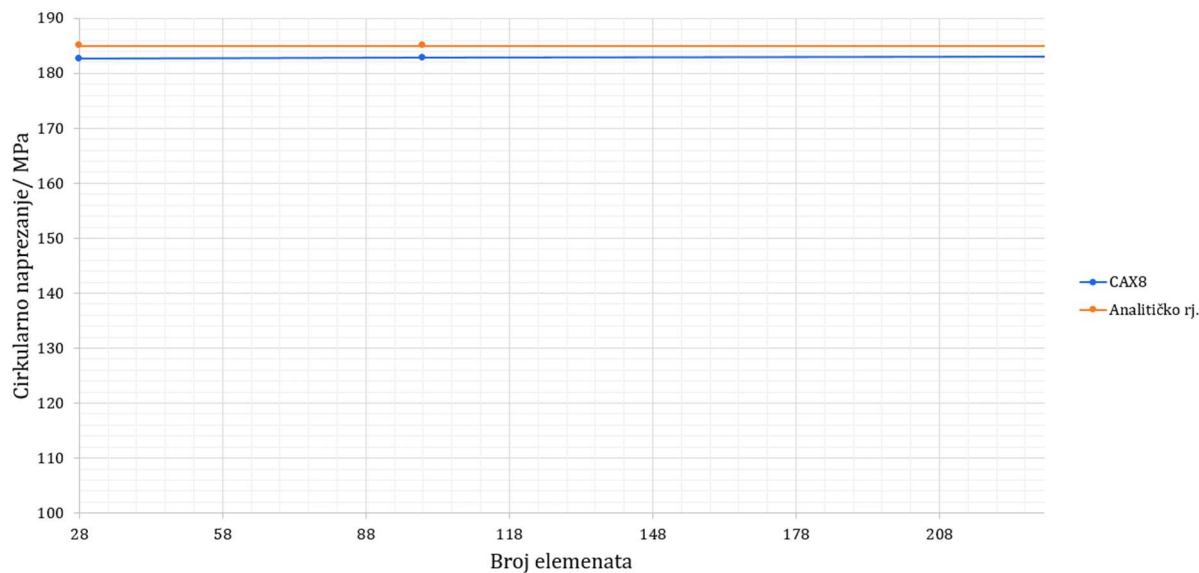


Slika 40. Prikaz rezultata cirkularnog napreznja (lijevo) i radijalnog pomaka (desno) za generiranu mrežu od 100 CAX8 elemenata

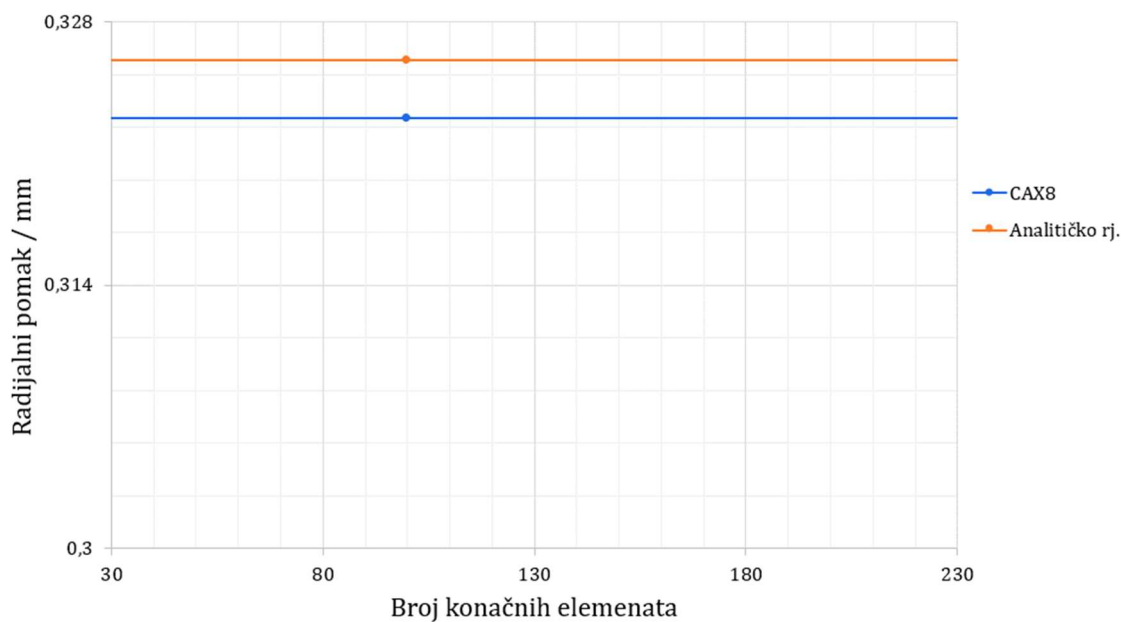


Slika 41. Prikaz rezultata cirkularnog napreznja (lijevo) i radijalnog pomaka (desno) za generiranu mrežu od 234 CAX8 elemenata

Slika 43. prikazuje konvergeniciju numeričkog rješenja cirkularnog naprezanja korištenjem CAX8 konačnih elemenata.

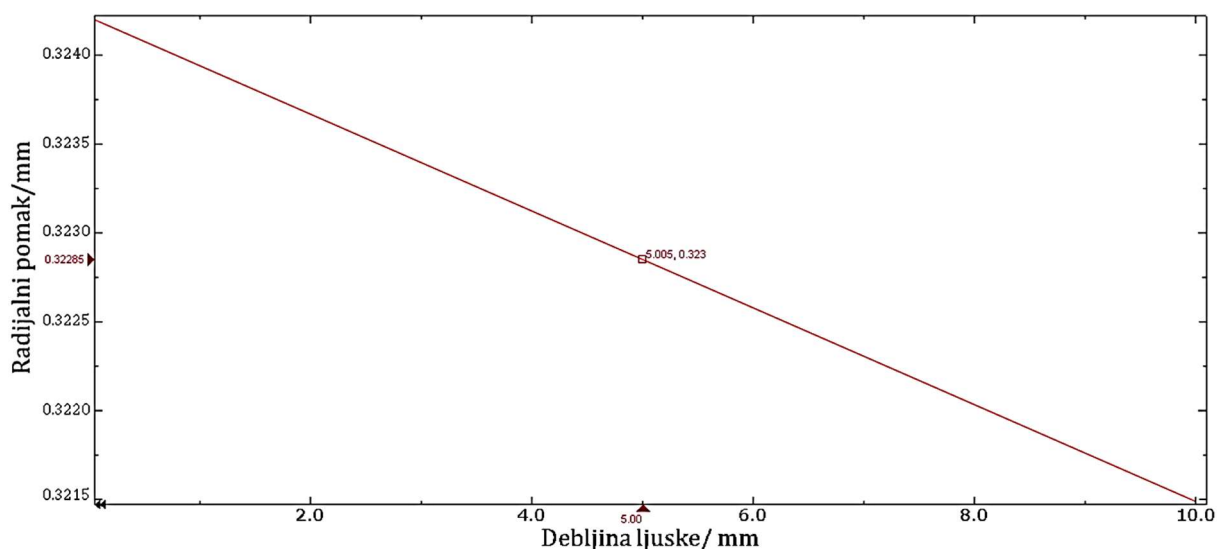


**Slika 42. Konvergenicija rezultata cirkularnog naprezanja  $\sigma_\varphi$  u numeričkoj analizi pri povećanju broja CAX8 konačnih elemenata**



**Slika 43. Konvergenicija rezultata radijalnog pomaka u numeričkoj analizi pri povećanju broja CAX8 konačnih elemenata**

Važno je napomenuti kako su u analitičkom rješenju rezultati naprezanja i radijalni pomak svedeni na središnju plohu stijenke, stoga je potrebno obratiti pozornost na poziciju elementa/čvora iz kojih se očitavaju rezultati. Kod umreženja s većim brojem elemenata i čvorova, moguće je direktno očitati podatak sa čvora u središtu ljuske, međutim kod umreženja s manjim brojem to nije slučaj. Naime, ABAQUS® nudi pretvaranje poznatih podataka u dijagram, iz kojeg se mogu očitati nepoznate vrijednosti na poznatim pozicijama. Slika 44. prikazuje primjer određivanja pomaka središnje plohe za umreženje sa 100 CAX8 elemenata. Analogno tome, na isti način su određeni pomaci i naprezanja za sva umreženja.



Slika 44. Određivanje radijalnog pomaka središnje plohe za umreženje od 100 CAX8 elemenata

Tablica 3. prikazuje usporedbu dobivenih cirkularnih naprezanja i radijalnih pomaka s analitičkim rješenjem za gornji rub ljuske cilindra.

Tablica 3. Usporedba rezultata za iznose cirkularnog naprezanja i radijalnog pomaka za zadano opterećenje za CAX8 element

	Analitičko rješenje	28 elemenata	100 elemenata	234 elemenata
$\sigma_{\varphi}$ / MPa (relativna greška)	185,0	182,55 (1,322 %)	182,56 (1,321 %)	182,57 (1,315 %)
$w_m^c$ / mm (relativna greška)	0,32595	0,3229 (0,936 %)	0,3229 (0,936 %)	0,3229 (0,936 %)

Pri čemu je analitičko rješenje dobiveno preko sljedećih formula, dodatno je pojednostavljen problem time da ljuska nije opterećena u meridijalnom smjeru, stoga meridijalna sila je jednaka 0, prema [5] slijede izrazi:

$$N_{\varphi}^c = p \cdot R = 1850 \frac{\text{N}}{\text{mm}}, \quad (4.1)$$

$$w_m^c = \frac{R}{Eh} (N_{\varphi}^c - \nu N_x^c) = 0,32595 \text{ mm}. \quad (4.2)$$

Odnosno za cirkularno naprezanje vrijedi:

$$\sigma_{\varphi}^c = \frac{N_{\varphi}^c}{h} = 185,0 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}. \quad (4.3)$$

Nadalje potrebno je istaknuti i relativne pogreške rezultata (izražene u postocima), koje se računaju pomoću formule kako slijedi:

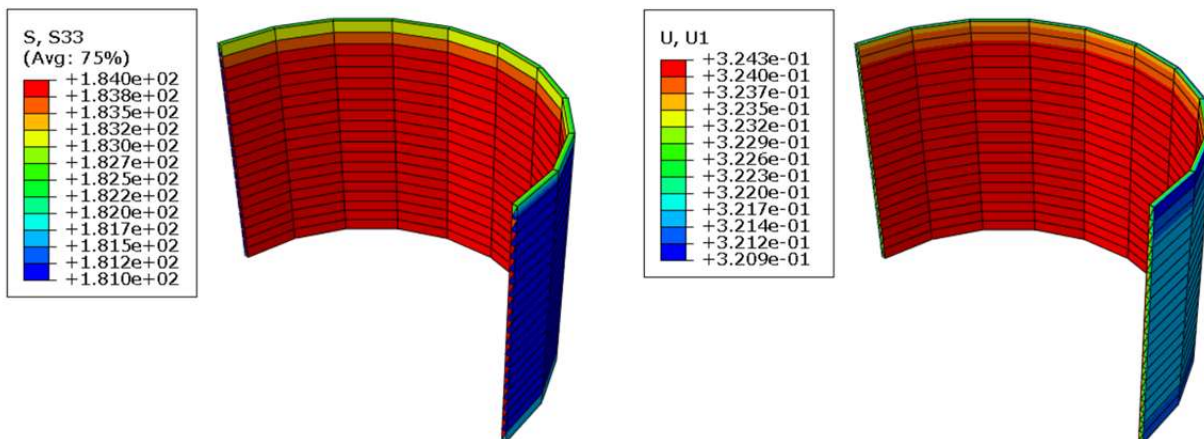
$$\text{Relativna greška} = \frac{|\text{Analitičko rješenje} - \text{numeričko rješenje}|}{\text{Analitičko rješenje}} \cdot 100\%. \quad (4.4)$$

Odstupanja numeričkih vrijednosti od analitičkih su u rasponu 1-2 %, što je sasvim prihvatljivo s obzirom na to da su uobičajene dopuštene greške u praksi do 3 % ili čak do 5 %. Naravno, kako je i prethodno rečeno, mogu se primijetiti veća odstupanja kod umreženja s manjim brojem konačnih elemenata, no u ovom slučaju čak i s umreženjem od 20 elemenata, rezultati su i više nego zadovoljavajući. Kako se da primijetiti iz Slika 42. i 43. rješenje se ne mijenja povećanjem broja elemenata.

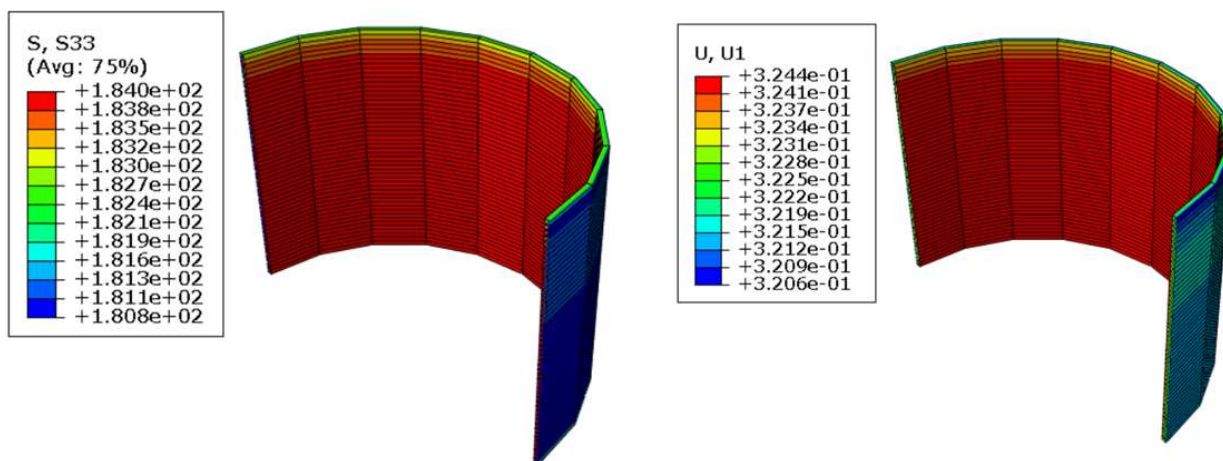
#### 4.4.1.2. Aproksimacija CAX3 konačnim elementom

Elementi CAX3 zahtijevaju manje stupnjeva slobode u usporedbi s elementima višeg reda poput CAX8, što rezultira bržim vremenom rješavanja, posebno za modele velikih dimenzija i složenijih geometrija. Njihova jednostavnost i učinkovitost čine elemente CAX3 izrazito praktičnim izborom za analizu tlačnih spremnika, jer nude dobru ravnotežu između računalne memorije izračuna i točnosti dobivenih rezultata.

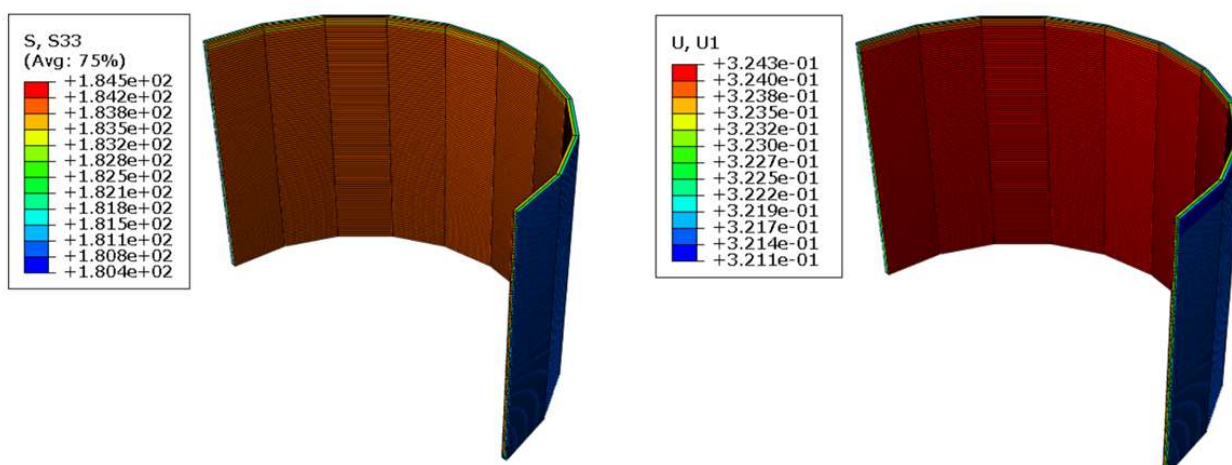
Analogno prethodnom odjeljku, radi se sličan postupak verifikacije, analitička rješenja i rubni uvjeti su jednaki. Opterećenje ljuske i postavljeni rubni uvjeti su jednaki kao kod CAX8 umreženja koje prikazuje Slika 38. Nadalje Slike 45.-47. prikazuju rezultate dobivene za različit broj konačnih elemenata umreženog dijela cilindra.



Slika 45. Prikaz rezultata cirkularnog napreznja (lijevo) i radijalnog pomaka (desno) za generiranu mrežu od 26 CAX3 elemenata



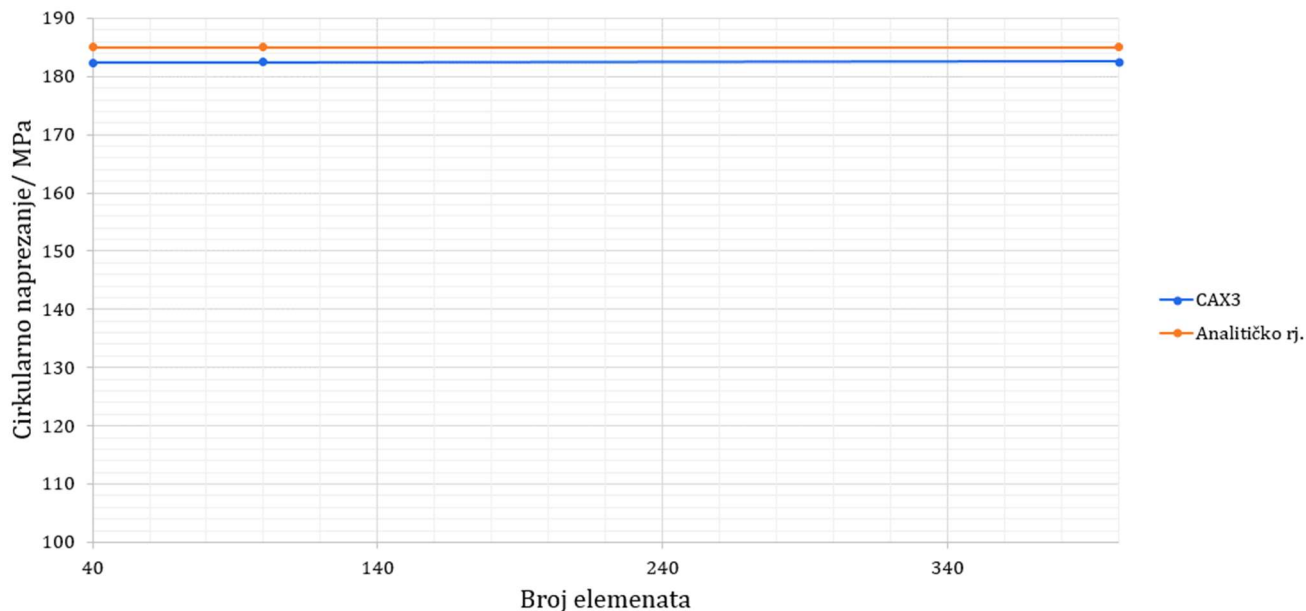
Slika 46. Prikaz rezultata cirkularnog napreznja (lijevo) i radijalnog pomaka (desno) za generiranu mrežu od 100 CAX3 elemenata



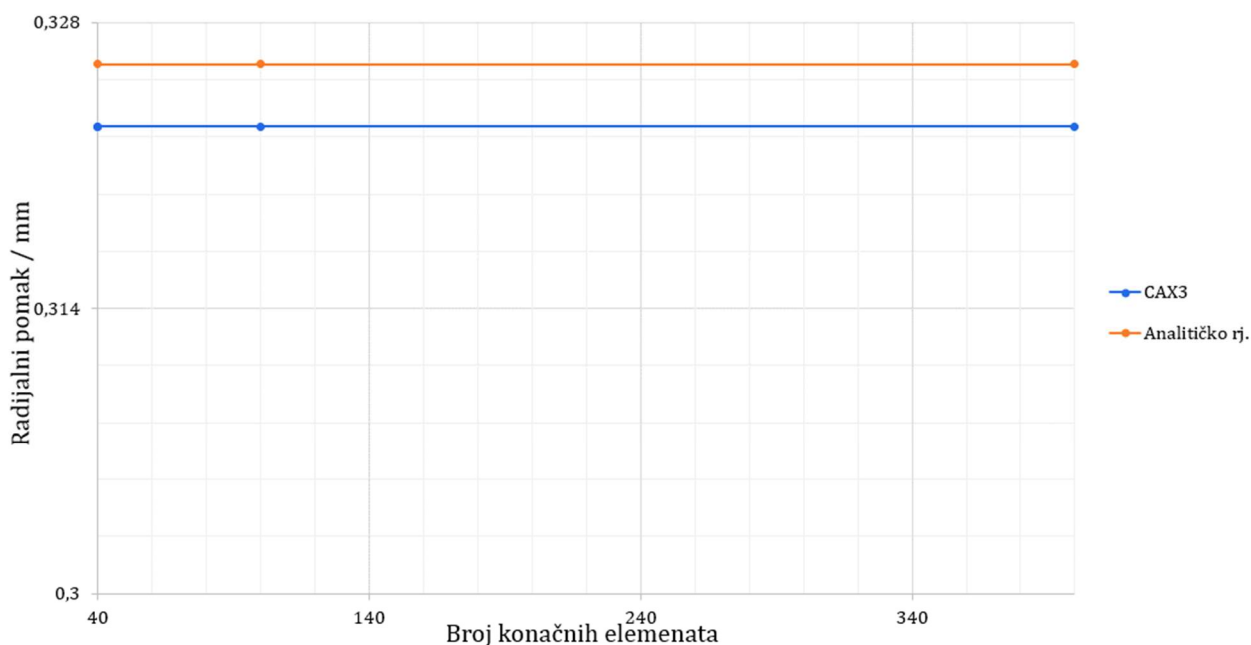
Slika 47. Prikaz rezultata cirkularnog napreznja (lijevo) i radijalnog pomaka (desno) za generiranu mrežu od 400 CAX3 elemenata



U nastavku Slika 48. ilustrira konvergenciju numeričkog rješenja cirkularnog naprezanja korištenjem CAX3 konačnih elemenata, a Slika 50. prikazuje konvergenciju numeričkog rješenja radijalnog pomaka.



**Slika 48. Konvergencija rezultata cirkularnog naprezanja  $\sigma_\varphi$  u numeričkoj analizi pri povećanju broja CAX3 konačnih elemenata**



**Slika 49. Konvergencija rezultata radijalnog pomaka u numeričkoj analizi pri povećanju broja CAX3 konačnih elemenata**



Tablica 4. prikazuje usporedbu dobivenih cirkularnih napreznja i radijalnih pomaka s analitičkim rješenjem za gornji rub ljske cilindra. Kako je navedeno i u prethodnom odjeljku u analitičkom rješenju su rezultati napreznja i radijalni pomak svedeni na središnju plohu stijenke, stoga je potrebno obratiti pozornost na poziciju elementa/čvora iz kojih se očitavaju rezultati.

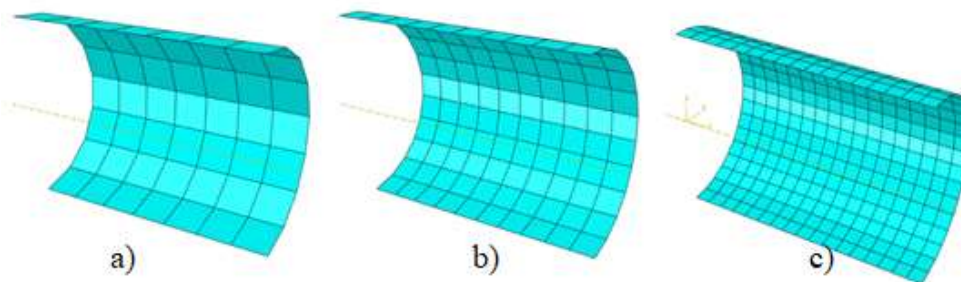
**Tablica 4. Usporedba rezultata za iznose cirkularnog napreznja i radijalnog pomaka za zadano opterećenje za CAX3 element**

	Analičko rješenje	40 elemenata	100 elemenata	400 elemenata
$\sigma_{\varphi}$ / MPa (relativna greška)	185,0	182,40 (1,408 %)	182,48 (1,364 %)	182,51 (1,344 %)
$w_m^c$ / mm (relativna greška)	0,32595	0,32246 (1,07%)	0,32249 (1,06 %)	0,32252 (1,05 %)

Pri čemu je analitičko rješenje dobiveno u prethodnom odjeljku, a relativna greška se računa prema izrazu (4.4). Odstupanja numeričkih vrijednosti od analitičkih su manje od 1,5 %, što je sasvim prihvatljivo s obzirom na to da su uobičajene dopuštene greške u praksi između 3 % i 5 %. Vrlo precizni rezultati se dobiju već kod umreženja s 40 elemenata, a s više elemenata u mreži numerički rezultati neprimjetno konvergiraju k analitičkom rješenju, slično kao kod CAX8.

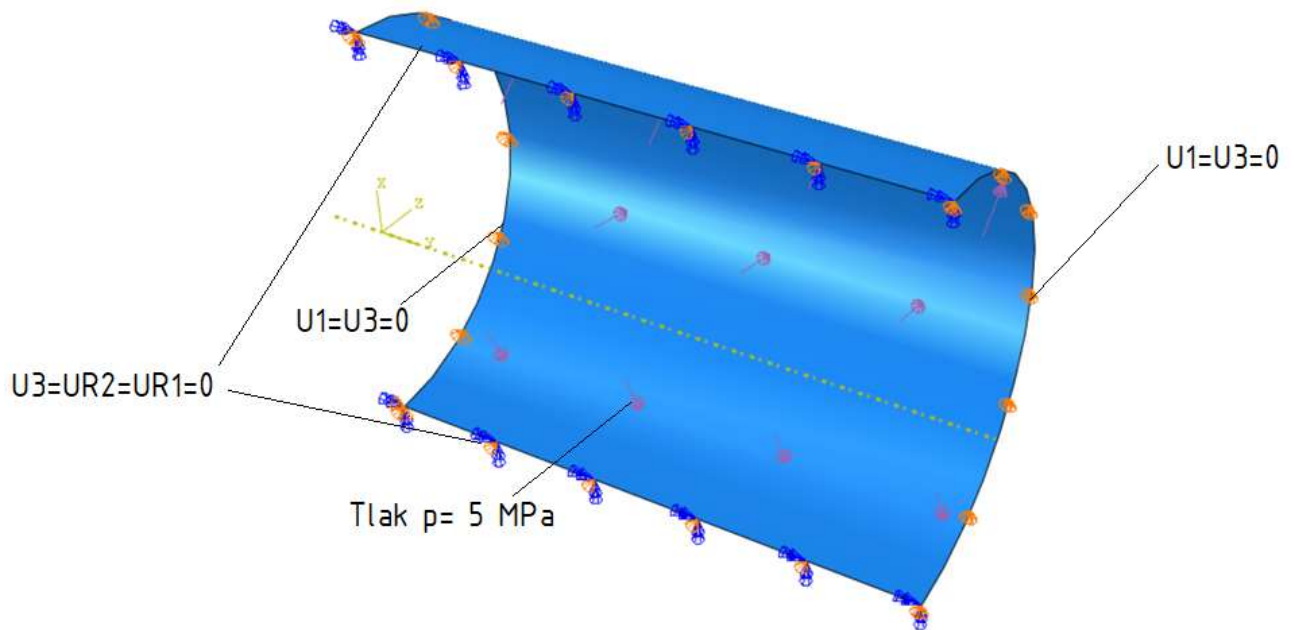
#### 4.4.1.3. Aproximacija S4 konačnim elementom

Analogno prethodnom odjeljku, radi se sličan postupak verifikacije, analitička rješenja i rubni uvjeti su jednaki. Spremnik je simetričan pa je, koristeći se rubnim uvjetima, moguće napraviti analizu polovice spremnika. Slika 50. prikazuje mrežu s različitim brojem elemenata.



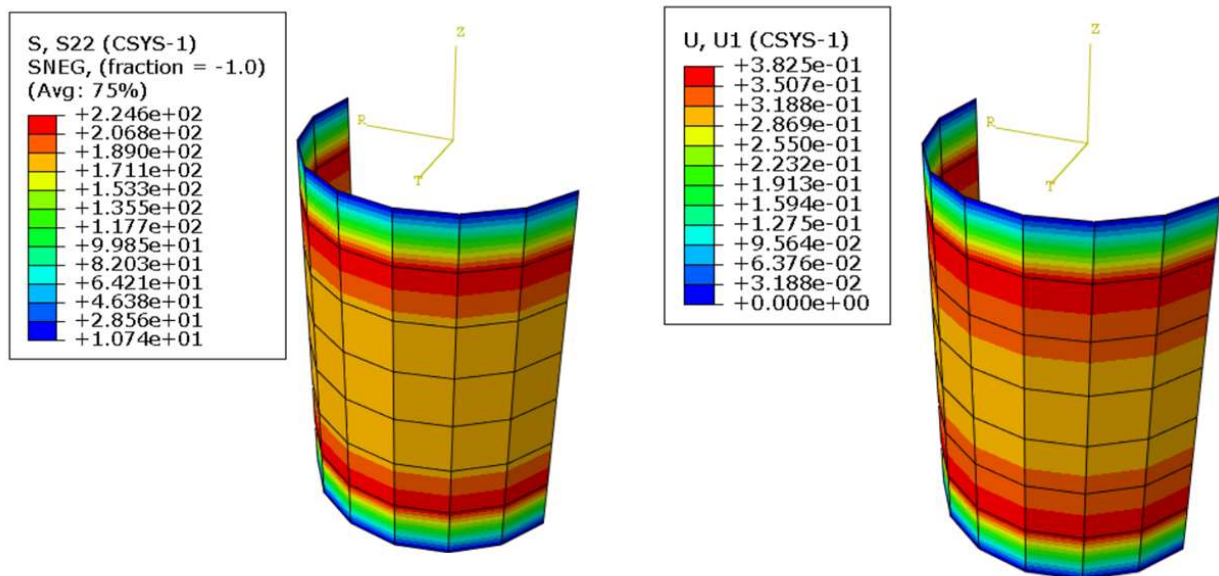
**Slika 50. Modeli diskretizirani S4 elementima: a) 56 elemenata, b) 120 elemenata, c) 323 elemenata**

Nadalje Slika 52. prikazuje postavljeno opterećenje i zadane rubne uvjete cilindrične ljuske.

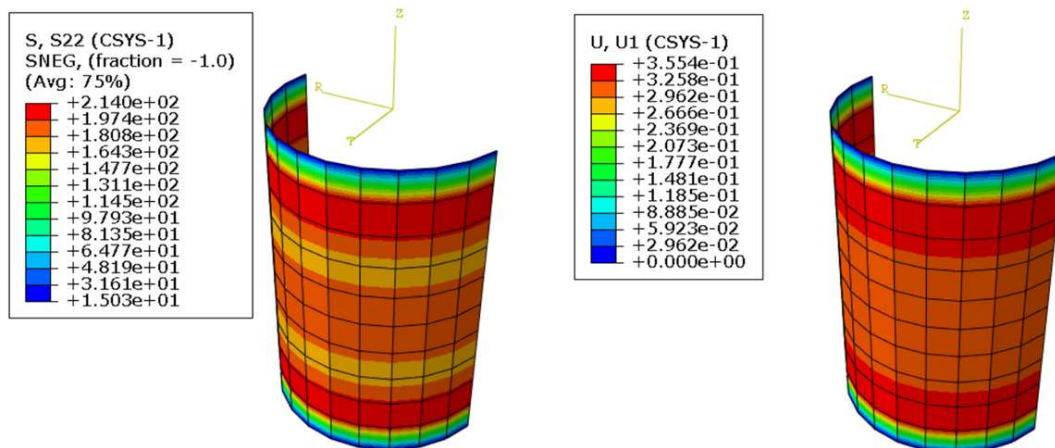


Slika 51. Postavljeni rubni uvjet i opterećenje površinskim tlakom p

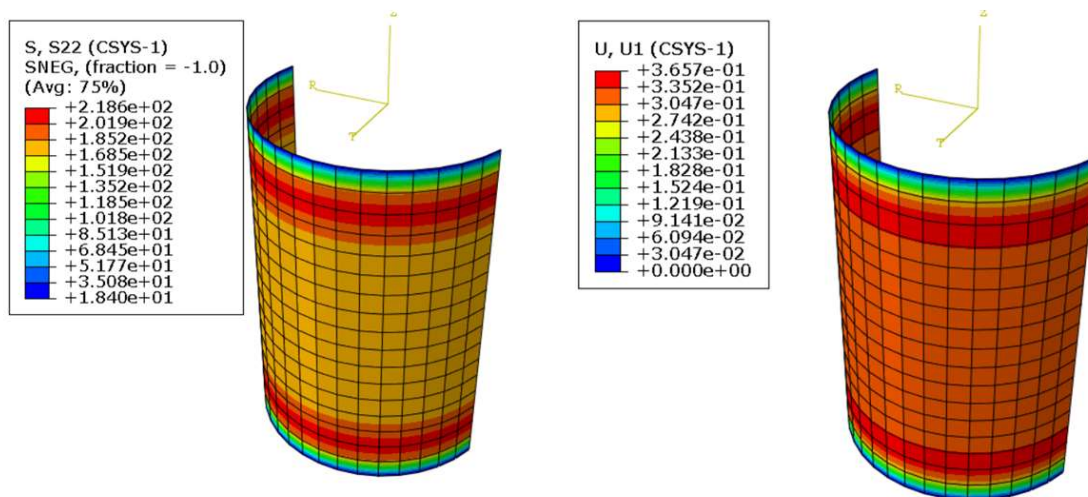
Nadalje Slike 53.-55. prikazuju rezultate dobivene za različit broj konačnih elemenata umreženog dijela cilindra.



Slika 52. Prikaz rezultata cirkularnog napreznja (lijevo) i radijalnog pomaka (desno) za generiranu mrežu od 56 S4 elemenata

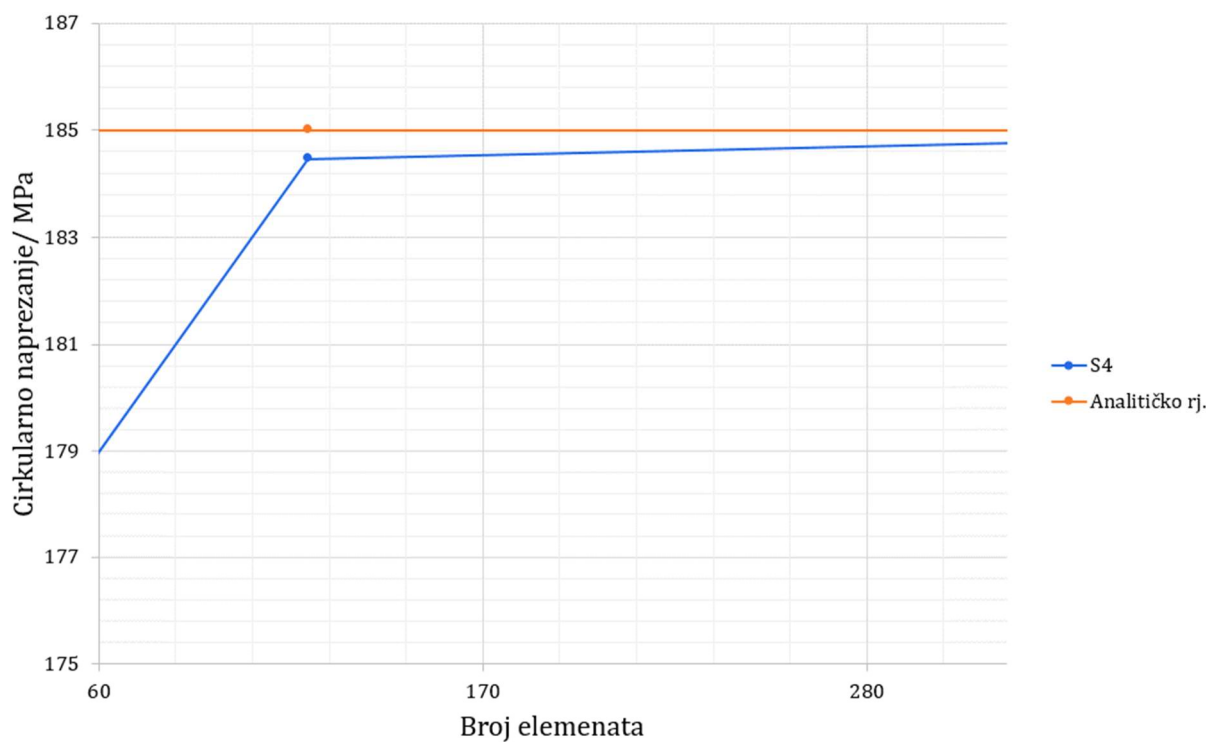


**Slika 53. Prikaz rezultata cirkularnog napreznja (lijevo) i radijalnog pomaka (desno) za generiranu mrežu od 120 S4 elemenata**

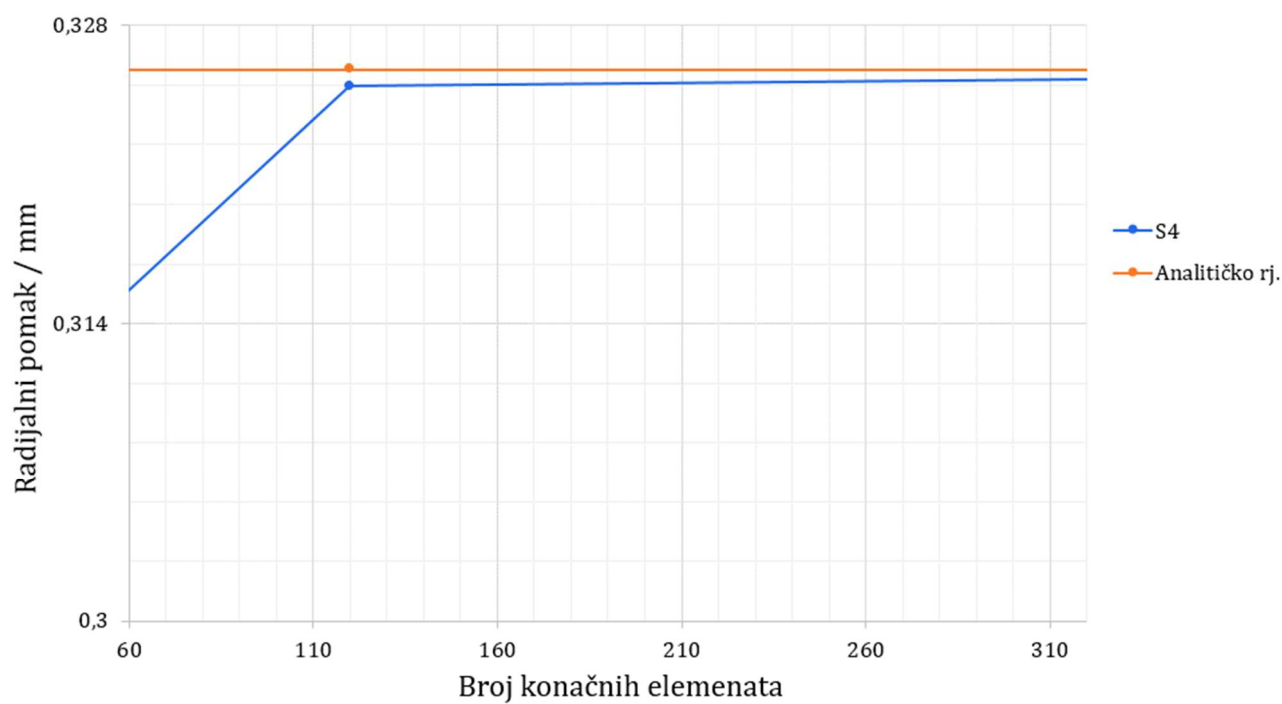


**Slika 54. Prikaz rezultata cirkularnog napreznja (lijevo) i radijalnog pomaka (desno) za generiranu mrežu od 323 S4 elemenata**

U nastavku Slika 56. prikazuje konvergenciju numeričkog rješenja cirkularnog napreznja korištenjem S4 konačnih elemenata, a Slika 57. prikazuje ilustrira konvergenciju numeričkog rješenja radijalnog pomaka korištenjem S4 konačnih elemenata. Može se primijetiti kako s većim brojem S4 elemenata u mreži rješenje naglo konvergira i s iznosom se približava analitičkom rješenju.



Slika 55. Konvergencija rezultata cirkularnog naprežanja  $\sigma_\varphi$  u numeričkoj analizi pri povećanju broja S4 konačnih elemenata



Slika 56. Konvergencija rezultata radijalnog pomaka u numeričkoj analizi pri povećanju broja S4 konačnih elemenata

Tablica 5. prikazuje usporedbu dobivenih cirkularnih napreznja i radijalnih pomaka s analitičkim rješenjem za gornji rub ljuske cilindra kod umreženja s S4 elementima.

**Tablica 5. Usporedba rezultata za iznose cirkularnog napreznja i radijalnog pomaka za zadano opterećenje za S4 element**

	Analičko rješenje	56 elemenata	120 elemenata	323 elemenata
$\sigma_{\varphi}$ / MPa (relativna greška)	185,0	178,61 (3,46 %)	184,47 (0,286 %)	184,76 (0,131 %)
$w_m^c$ / mm (relativna greška)	0,32595	0,3149 (3,381%)	0,3251 (0,248 %)	0,3255 (0,142 %)

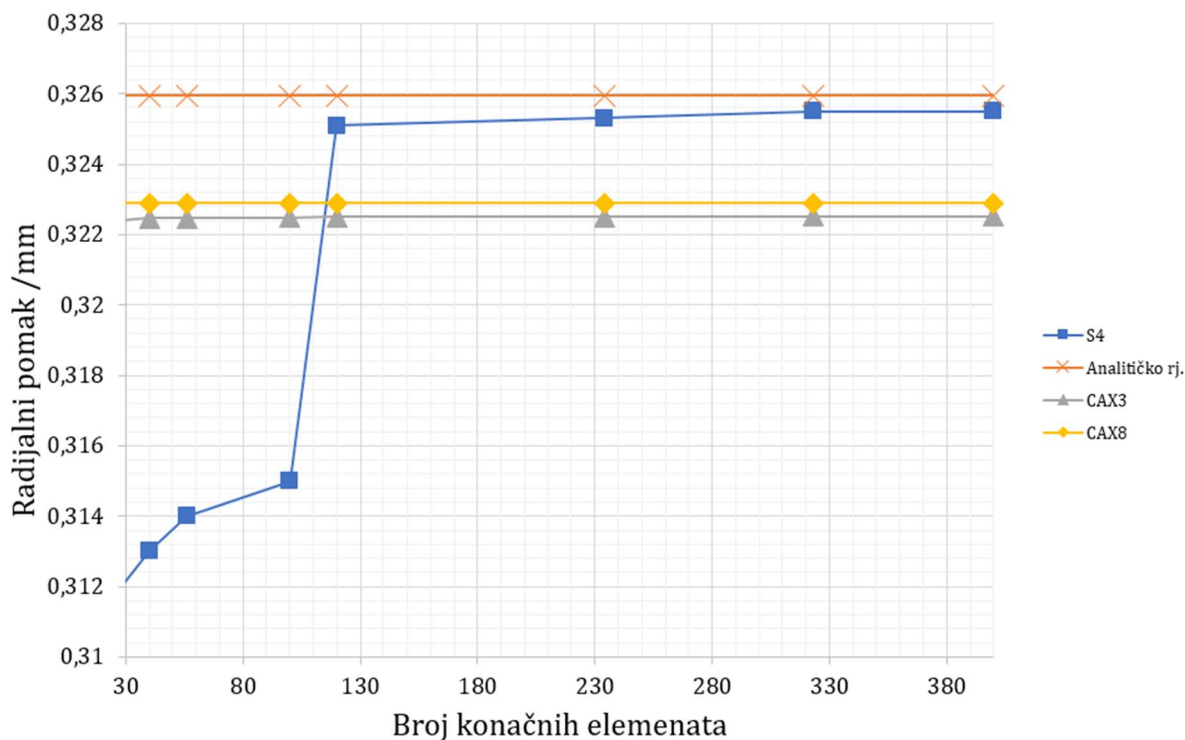
Pri čemu je analitičko rješenje dobiveno u prethodnom odjeljku, a relativna greška se računa po izrazu (4.4).

Odstupanja numeričkih vrijednosti od analitičkih su nešto veće od 3% za umreženja s manjim brojem S4 elemenata, što se može shvatiti prihvatljivim s obzirom na to da su uobičajene dopuštene greške u praksi do 3-5 %. Međutim zanimljivo je koliko je naglo konvergira rezultat kod umreženja s većim brojem elemenata. Vrlo precizni rezultati se dobiju kod umreženja preko 120 elemenata, pa su i rezultati i više nego zadovoljavajući.

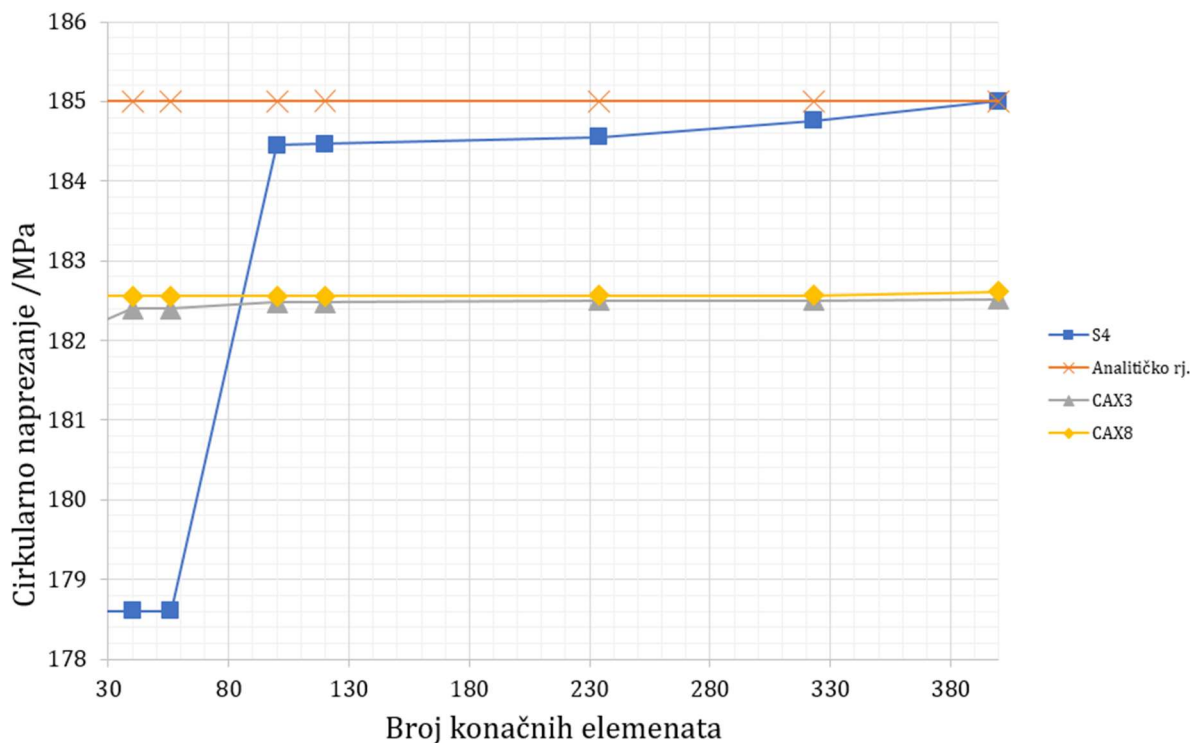
Slike 58. i 59. prikazuju dijagram usporedbi konvergencija rezultata različitih konačnih elemenata u ovisnosti o broju elemenata.

Nadalje se mogu usporediti dobiveni rezultati numeričke analize s elementima S4, CAX8 i CAX3 u odnosu na analitičko rješenje. Slika 58. prikazuje usporedbu rezultata radijalnog pomaka različitih elemenata u odnosu na analitičko rješenje, kako se može primijetiti CAX8 i CAX3 imaju poprilično jednoliko konvergiranje rezultatu čak pri rjeđem umreženju, s time da CAX8 konvergira nešto bliže analitičkom rješenju. S druge strane S4 prikazuje drastičnu konvergenciju rezultata pri gušćim umreženjima kojima se jako približava analitičkom rješenju. Elementi CAX8 nude veću točnost u predstavljanju složenih geometrija poput eliptičnih ljuski u usporedbi s elementima S4. Međutim, potrebno je istaknuti da se proračun vrši na spremniku s eliptičnom glavom, a dodatni čvorovi u elementima CAX8 omogućuju bolje hvatanje radijusa zakrivljenosti i raspodjele napreznja u ljusci. Elementi CAX8 također inherentno uzimaju u obzir efekte posmične deformacije u strukturama tankih stijenki, što može biti značajno u slučaju eliptičnih ljuski, osiguravajući realističnije prikazivanje ponašanja konstrukcije pod

uvjetima opterećenja. S obzirom na to da je CAX8 imao greške ispod 1,4 % i za najrjeđa umreženja ,nadalje će se eliptična ljuska analizirati s tim. Analogno tome Slika 59. prikazuje konvergenciju rezultata za cirkularno naprezanje koja prikazuje slično „ponašanje“ elemenata.



Slika 57. Usporedba rezultata radijalnog pomaka numeričke analize za razne elemente

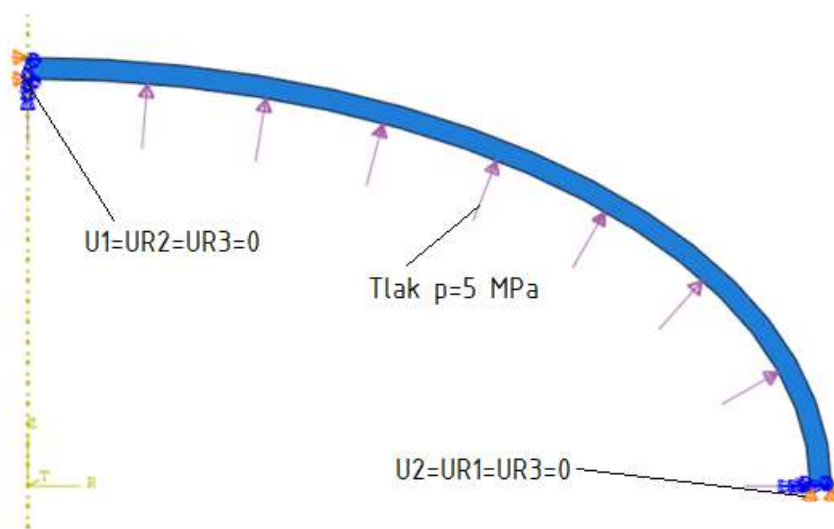


Slika 58. Usporedba rezultata cirkularnog naprezanja numeričke analize za razne elemente



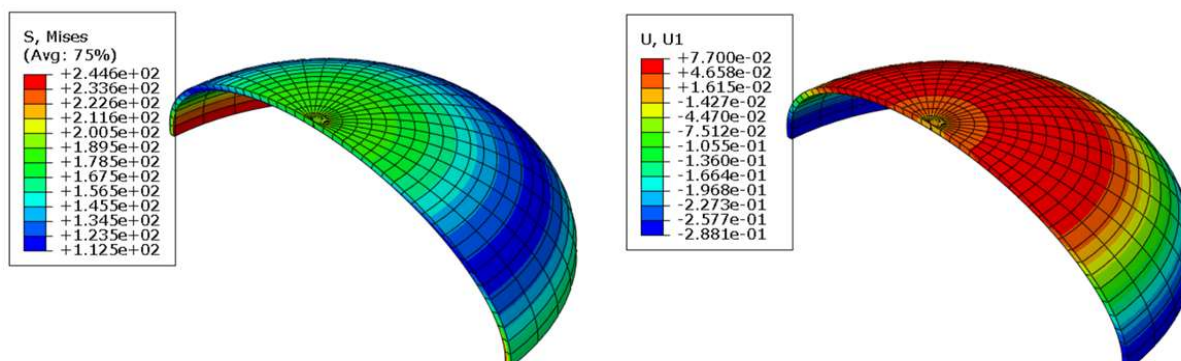
#### 4.4.2. Eliptična ljuska

Bilo bi preporučljivo procijeniti izvedbu elementa CAX8 na eliptičnoj ljusci u kojoj dominira membransko naprezanje. Eliptična glava zadržava identične dimenzije onima o kojima su navedene u prethodnim odjeljcima i podvrgnuta je opterećenju tlakom od 5 MPa. Koristeći simetriju, analiza se provodi samo na polovici modela ljuske, kako prikazuje Slika 60., koja također prikazuje granične uvjete i opterećenje primijenjeno na eliptični model ljuske. U ovom slučaju uspoređuju se iznosi ekvivalentnih naprezanja i radijalnog pomaka ljuske.

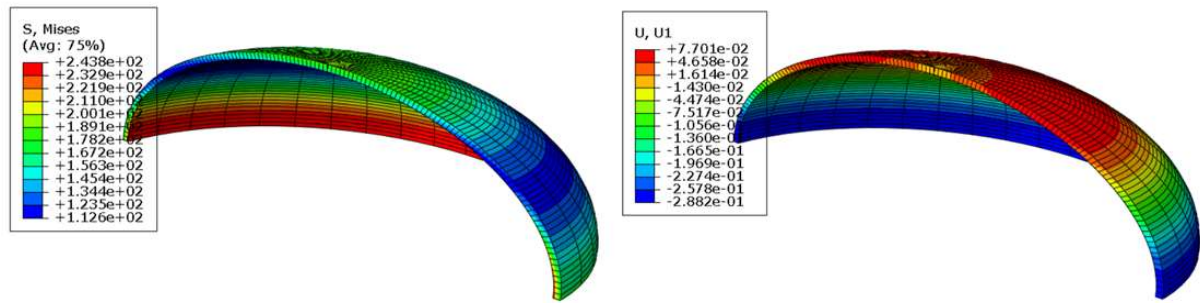


Slika 59. Opterećenje i rubni uvjeti postavljeni na eliptičnu ljusku

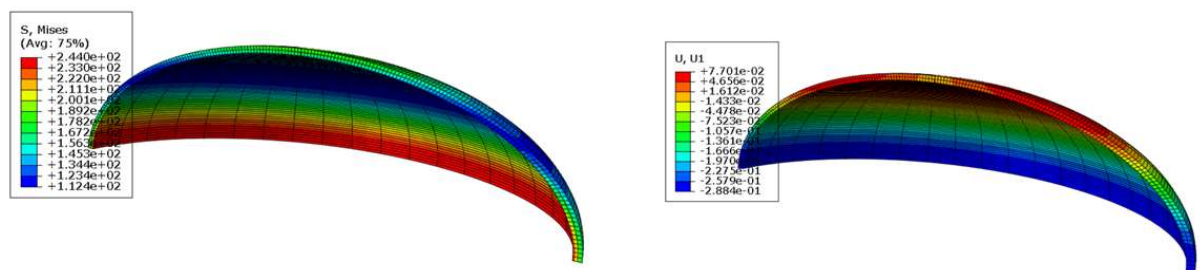
Nadalje Slike 61.-63. prikazuju rezultate dobivene za različit broj konačnih elemenata umreženog dijela cilindra.



Slika 60. Prikaz rezultata cirkularnog naprezanja (lijevo) i radijalnog pomaka (desno) za generiranu mrežu od 23 CAX8 elemenata na eliptičnoj ljusci



Slika 61. Prikaz rezultata cirkularnog napreznja (lijevo) i radijalnog pomaka (desno) za generiranu mrežu od 65 CAX8 elemenata na eliptičnoj ljusci



Slika 62. Prikaz rezultata cirkularnog napreznja (lijevo) i radijalnog pomaka (desno) za generiranu mrežu od 182 CAX8 elemenata na eliptičnoj ljusci

Tablica 6. prikazuje usporedbu dobivenih cirkularnih napreznja i radijalnih pomaka s analitičkim rješenjem za eliptičnu ljusku.

Tablica 6. Usporedba rezultata za iznose cirkularnog napreznja i radijalnog pomaka eliptične ljuske za zadano opterećenje za CAX8 element

	Analiitičko rješenje	23 elemenata	65 elemenata	184 elemenata
$\sigma_{ekv}$ / MPa (relativna greška)	175,51	175,99 (0,271 %)	175,68 (0,095 %)	175,65 (0,0798 %)
$u_r^e$ / mm (relativna greška)	-0,30495	-0,2981 (2,248 %)	-0,2982 (2,204 %)	-0,2983 (2,187 %)

Pri čemu je analitičko rješenje dobiveno preko sljedećih formula, za dodatno pojednostavljenje ekvivalentno napreznje će se gledati na tjemenu ljuske gdje je meridijalni kut jednak 0.



Kad se taj uvjet uvrsti u izraze (3.78) i (3.79), dobiju se sljedeći izrazi:

$$R_1 = \frac{a^2}{b} = 702,05, \quad (4.5)$$

$$R_2 = \frac{a^2}{b} = 702,05. \quad (4.6)$$

Nadalje, kad se izrazi (4.5) i (4.6) uvrste u izraz (3.97) dobije se jednačba ekvivalentnog naprežanja u tjemenu eliptične ljuske:

$$\sigma_{ekv}^e = \frac{1}{2} \frac{R_2}{t} p = 175,51 \text{ MPa}. \quad (4.7)$$

Pomak se može opisati sljedećim izrazom prema [8]:

$$u_r^e = \frac{pR^2}{2Eh} \cdot \left[ 2 - \nu - \left( \frac{a}{b} \right)^2 \right] = -0,3032 \text{ mm}. \quad (4.8)$$

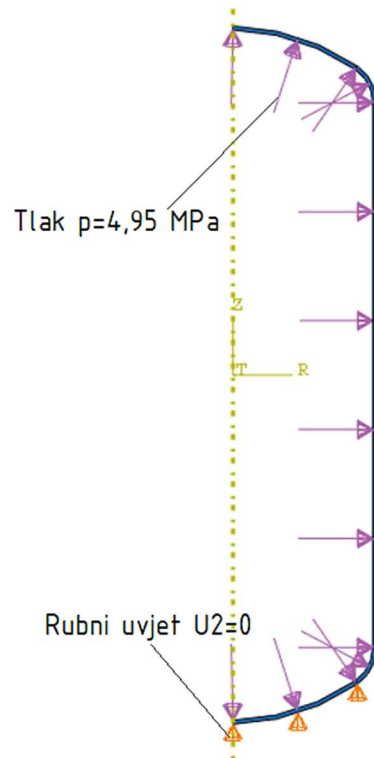
Nadalje potrebno je istaknuti i relativne pogreške rezultata (izražene u postocima), koje se računaju pomoću formule (4.4).

Odstupanja numeričkih vrijednosti od analitičkih su u rasponu 1-3 %, što je sasvim prihvatljivo s obzirom na to da su uobičajene dopuštene greške u praksi od 3 % do 5 %. Naravno, kako je i prethodno rečeno, mogu se primijetiti veća odstupanja kod umreženja s manjim brojem konačnih elemenata, no u ovom slučaju čak i s umreženjem od 23 elemenata, rezultati ekvivalentnog naprežanja su i više nego zadovoljavajući.

#### 4.5. Numerička analiza spremnika

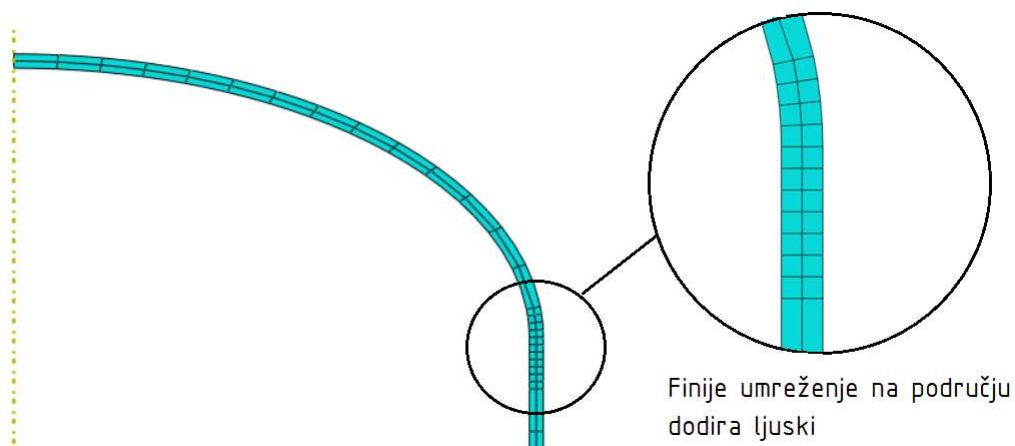
U ovom odjeljku je provedena numerička analiza spremnika podređenog testnom tlaku  $p = 4,95$  MPa. Analiza će se provesti za osnosimetričnu ljusku, i s obzirom na simetriju spremnika proračunat će se polovica spremnika koristeći CAX8 konačne elemente. Umreženje je napravljeno od 192 elemenata zbog ograničenja broja čvorova u verziji ABAQUS® *Learning Edition*. Međutim može se iskoristiti svojstvo „*Partitioning*“ koje može lokalizirati dio modela kako bi se mogla na tom mjestu ostvariti finija mreža elemenata, ovo svojstvo je primijenjeno na područje dodira ljusaka. Slika 64. prikazuje postavljene granične uvjete spremnika i narinuto opterećenje. Na samom podnožju spremnika, aproksimirano je da je pomak u vertikalnom smjeru (U2) jednak 0 iz razloga što je spremnik postavljen na 3 oslonca, koji pokrivaju dovoljno veliku površinu dna, gdje će vertikalni pomaci biti gotovo zanemarivi. Zbog dovoljno velike duljine spremnika utjecaj ovog rubnog uvjeta je zanemariv na gornji spoj cilindrične i eliptične ljuske. Nadalje svi podaci će se iščitavati s gornjeg spoja ljusaka. Na samom podnožju spremnika, aproksimirano je da je pomak u vertikalnom smjeru (U2) jednak 0 iz razloga što je

spremnik postavljen na 3 oslonca, koji pokrivaju dovoljno veliku površinu dna, gdje će vertikalni pomaci biti gotovo zanemarivi. Zbog dovoljno velike duljine spremnika utjecaj ovog rubnog uvjeta je zanemariv na gornji spoj cilindrične i eliptične ljuske. Nadalje svi podaci će se iščitavati s gornjeg spoja ljusaka. Slika 64. prikazuje postavljene granične uvjete spremnika i narinuto opterećenje.



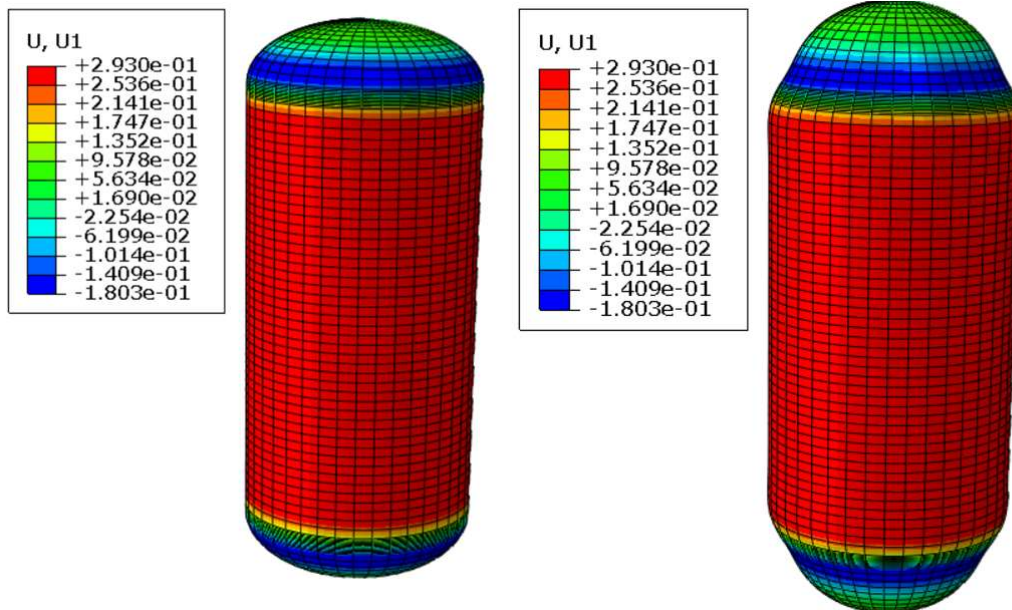
Slika 63. Zadani granični uvjeti i opterećenja spremnika zraka

Slika 65. prikazuje finije umreženje u području dodira ljuski postignuto funkcijom programa „Partition“.



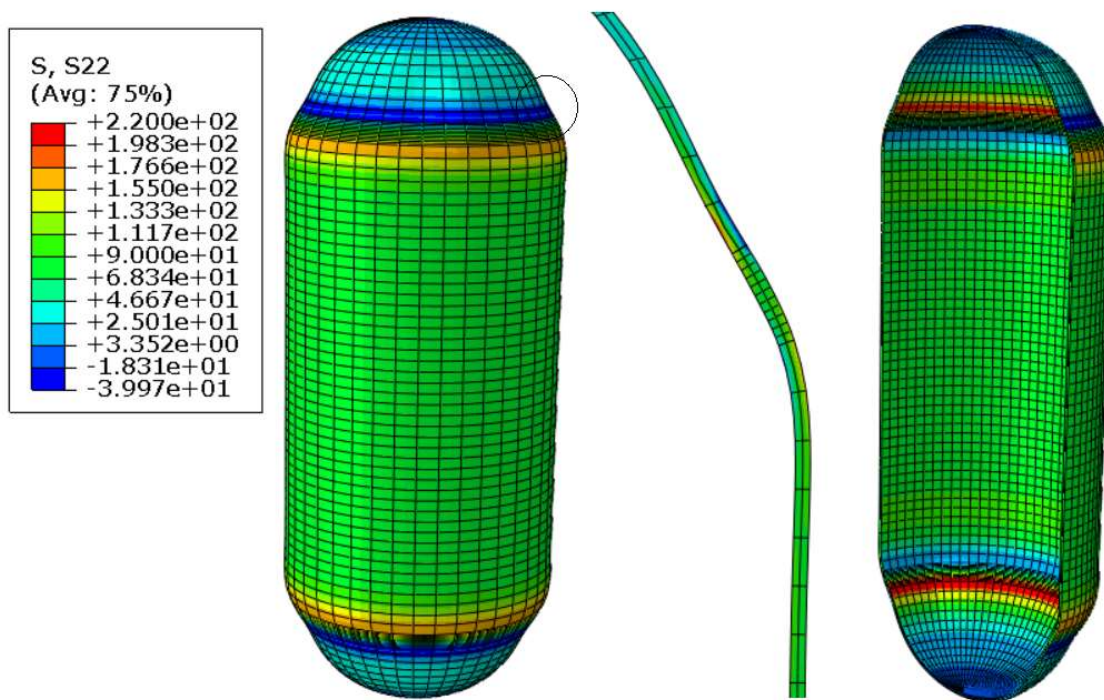
Slika 64. Lokalno postavljeno finije umreženje u području dodira ljuski

Slika 66. prikazuje usporedbu dobivenih vizualne rezultate radijalnog pomaka spremnika u različitim mjerilima.



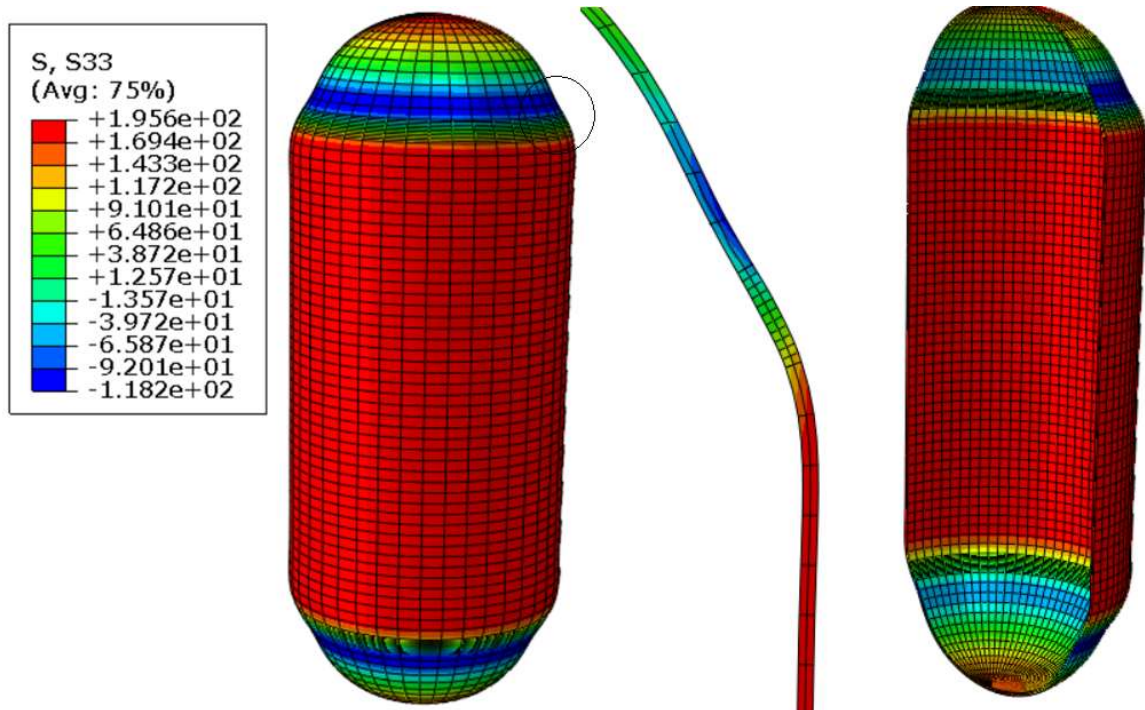
**Slika 65. Radijalni pomak spremnika za zadano opterećenje u mjerilu, 1:1 (lijevo) i 100:1 (desno)**

Slika 66. prikazuje rezultate dobivene za meridijalno naprezanje spremnika prikazano na vanjskom i unutarnjem rubu ljuske kao i na presjeku spremnika na mjestu dodira ljuski.

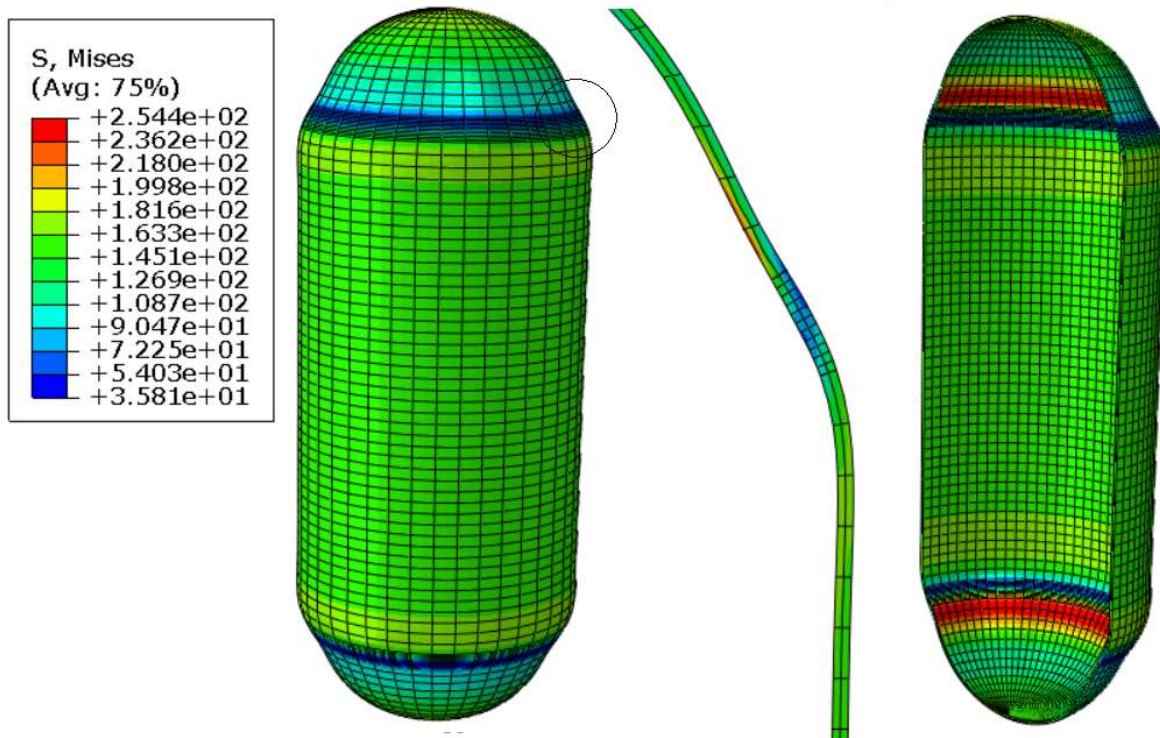


**Slika 66. Prikaz meridijalnog naprezanja spremnika za zadano opterećenje na vanjskom rubu spremnika (lijevo), na presjeku (sredina) i u unutarnjem rubu spremnika (desno)**

Analogno Slika 67. prikazuje rezultate dobivene za cirkularno naprezanje spremnika, a Slika 68. analogno prikazuje evivalentno napreznje.



**Slika 67. Prikaz cirkularnog naprezanja spremnika za zadano opterećenje na vanjskom rubu spremnika (lijevo), na presjeku (sredina) i u unutarnjem rubu spremnika (desno)**



**Slika 68. Prikaz ekvivalentnog naprezanja spremnika za zadano opterećenje na vanjskom rubu spremnika (lijevo), na presjeku (sredina) i u unutarnjem rubu spremnika (desno)**



Tablica 7. pokazuje da su odstupanja vrijednosti veličina dobivenih numeričkom metodom izuzetno mala u odnosu na vrijednosti dobivenih analitičkim putem na cilindričnoj ljusci. Također pretpostavka da je meridijalno naprezanje konstantno duž cilindrične ljuske je također ispravno. Rezultati su za cilindričnu ljusku zadovoljavajući.

**Tablica 7. Usporedba vrijednosti cirkularnog naprezanja i radijalnog pomaka na cilindričnoj ljusci spremnika**

	<b>Analitičko rješenje</b>	<b>CAX8 numeričko rješenje</b>
<b><math>\sigma_{\theta}</math>/ MPa</b> (relativna greška)	91,58	89,11 (2,70 %)
<b><math>\sigma_{\varphi}</math>/ MPa</b> (relativna greška)	183,15	180,66 (1,359%)
<b><math>u_r^c</math>/ mm</b> (relativna greška)	0,2759	0,2740 (0,685 %)

Nadalje Tablica 8. prikazuje istu usporedbu ,ali za eliptičnu glavu spremnika.

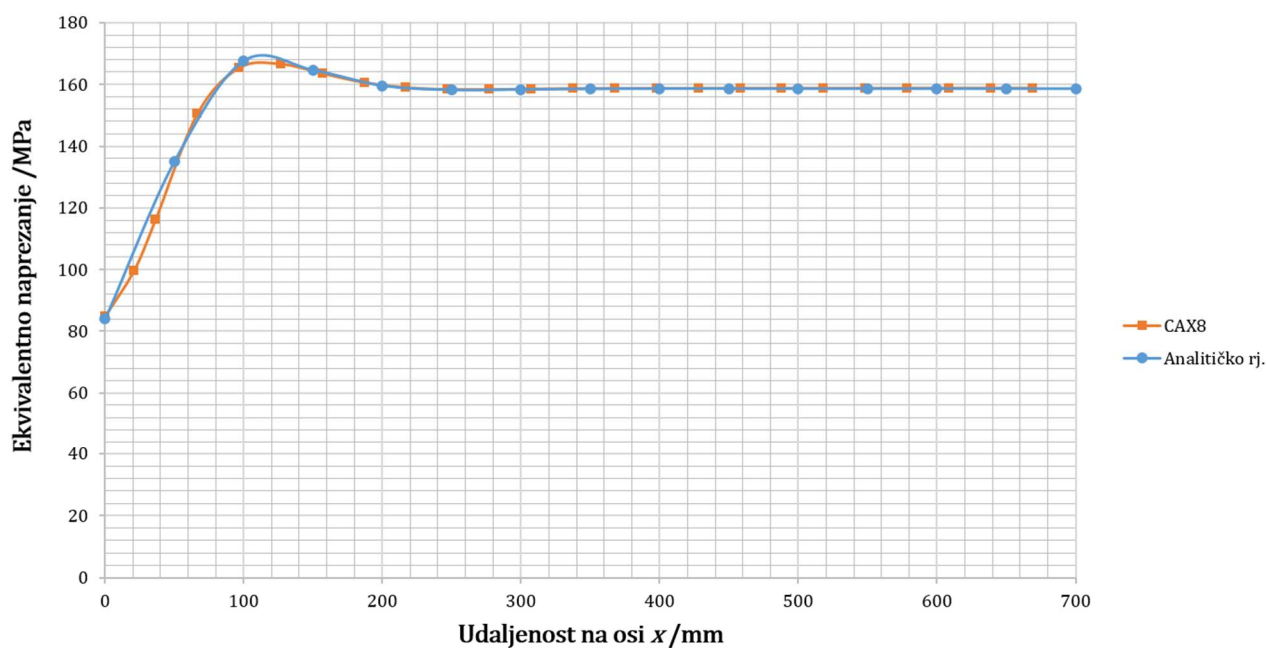
**Tablica 8. Usporedba vrijednosti cirkularnog naprezanja i radijalnog pomaka na eliptičnoj ljusci spremnika**

	<b>Analitičko rješenje</b>	<b>CAX8 numeričko rješenje</b>
<b><math>\sigma_{\theta}</math>/ MPa</b> (relativna greška)	173,76 (na tjemenu)	171,617 (1,23 %)
<b><math>\sigma_{\varphi}</math>/ MPa</b> (relativna greška)	173,76 (na tjemenu)	171,303 (1,41 %)
<b><math>u_r^e</math>/ mm</b> (relativna greška)	-0,3049 (na dodiru ljusaka)	-0,0377 (86,64%)

Dok su provedene analitičke i numeričke analize i cilindrične i eliptične ljuske, usporedbom rezultata pojavile su se značajne razlike. Za cilindričnu ljusku, uočene pogreške bile su minimalne, što ukazuje na dobro slaganje između analitičkog i numeričkog pristupa. Međutim, za eliptičnu ljusku uočena su značajna odstupanja numeričkih vrijednosti u odnosu na analitičke, pri čemu su relativne pogreške bile znatno veće.

Značajne razlike u pogreškama između analitičkih i numeričkih analiza cilindrične i eliptične ljuske mogu se pripisati nekoliko čimbenika. Nadalje, eliptične ljuske same po sebi posjeduju

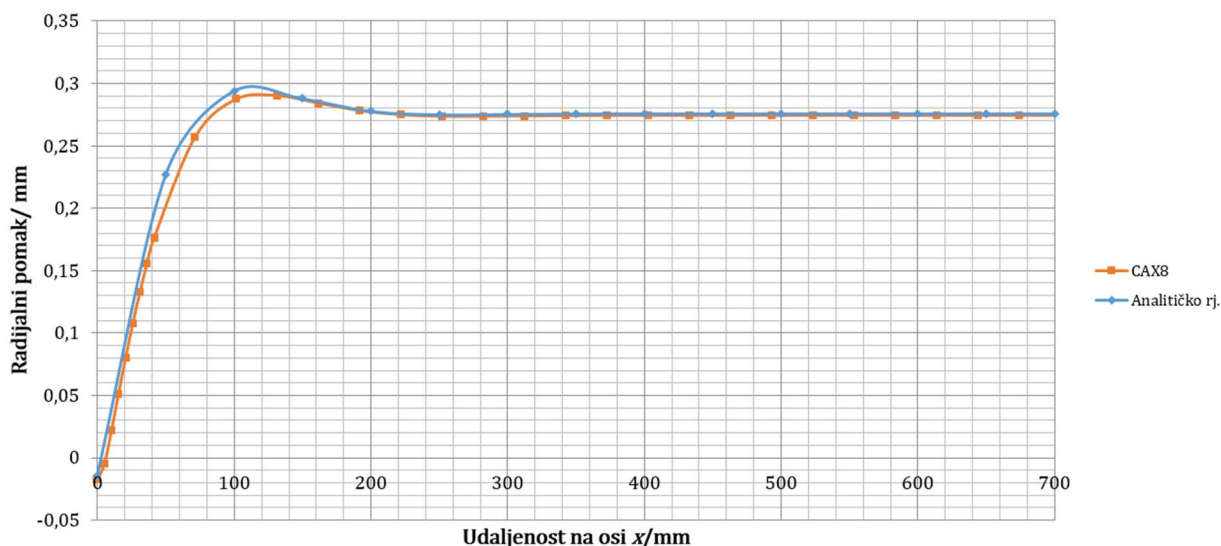
složeniju geometriju u usporedbi s cilindričnim ljuskama, što može dovesti do izazova u preciznom određivanju zakrivljenosti površine i raspodjele napreznja. Analitička metoda koja se primijenila u ovom radu se oslanja na pojednostavljene pretpostavke (aproksimacija luka elipse je jedna od njih) kako bi se olakšao izračun, ali te pretpostavke možda neće u potpunosti obuhvatiti ponašanje složenih struktura poput eliptičnih ljuski. Nasuprot tome, numeričke metode poput analize konačnih elemenata mogu objasniti realističnija geometrijska svojstva i svojstva materijala, ali se i dalje oslanjaju na pretpostavke i izbore modeliranja koji mogu utjecati na točnost. Rubni uvjeti primijenjeni u analizi također mogu utjecati na rezultate, s eliptičnim glavama koje potencijalno unose dodatne složenosti u usporedbi s cilindričnim ljuskama. Slika 69. prikazuje „preklopljene“ dijagrame ekvivalentnog napreznja kao funkcija duljine cilindričnog djela spremnika. Kako se može primijetiti pravci se preklapaju, postižu maksimalnu vrijednost u istoj točki i pri većim udaljenostima od mjesta dodira ljusaka konvergiraju u približno jednaku vrijednost.



**Slika 69. Usporedba numeričkih i analitičkih rezultata ekvivalentnog napreznja cilindrične ljuske**

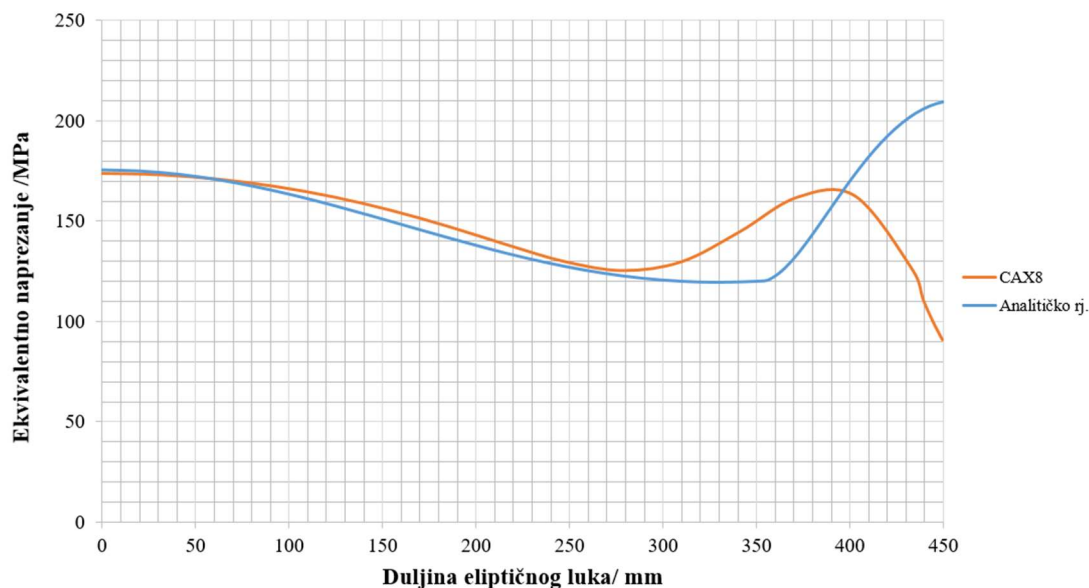
Nadalje potrebno je usporediti i rezultate radijalnog pomaka cilindrične ljuske tlačnog spremnika. Očekuju se preklapanja grafova numeričke analize i analitičke kao na Slici 69.

Slika 70. prikazuje „preklopljene“ dijagrame radijalnog kao funkcija duljine cilindričnog djela spremnika. Analogno Slici 69. ,kako se može primijetiti pravci se preklapaju, postižu maksimalnu vrijednost u istoj točki i pri većim udaljenostima od mjesta dodira ljsaka konvergiraju u približno jednaku vrijednost.



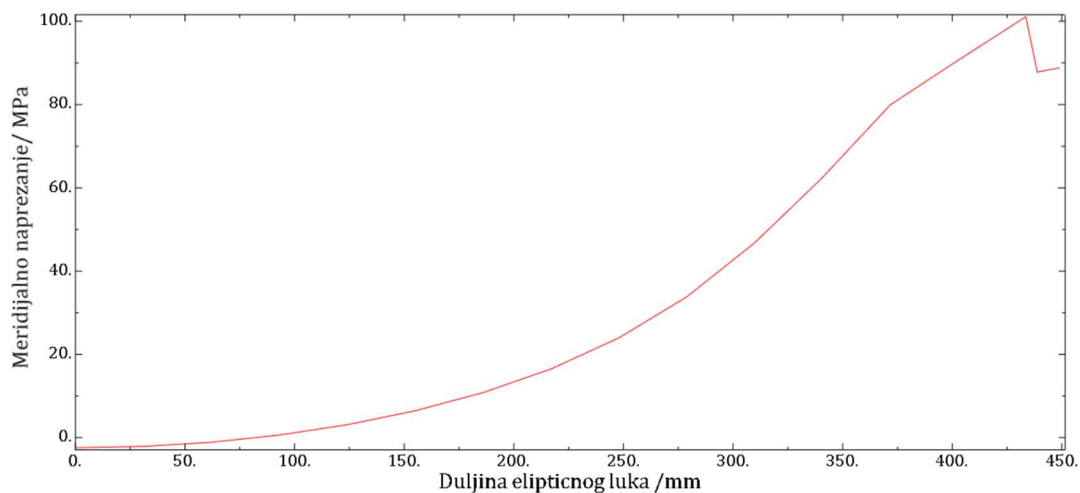
**Slika 70. Usporedba numeričkih i analitičkih rezultata radijalnog pomaka cilindrične ljske**

Nadalje se na jednak način može usporediti i ekvivalentno naprezanje eliptične ljske. S obzirom na to da se iz Tablice 8. jasno vidi kako je relativna greška radijalnog pomaka jako velika, može se zaključiti da će raspodjele pomaka duž luka eliptične ljske prikazivati znatno različite rezultate.

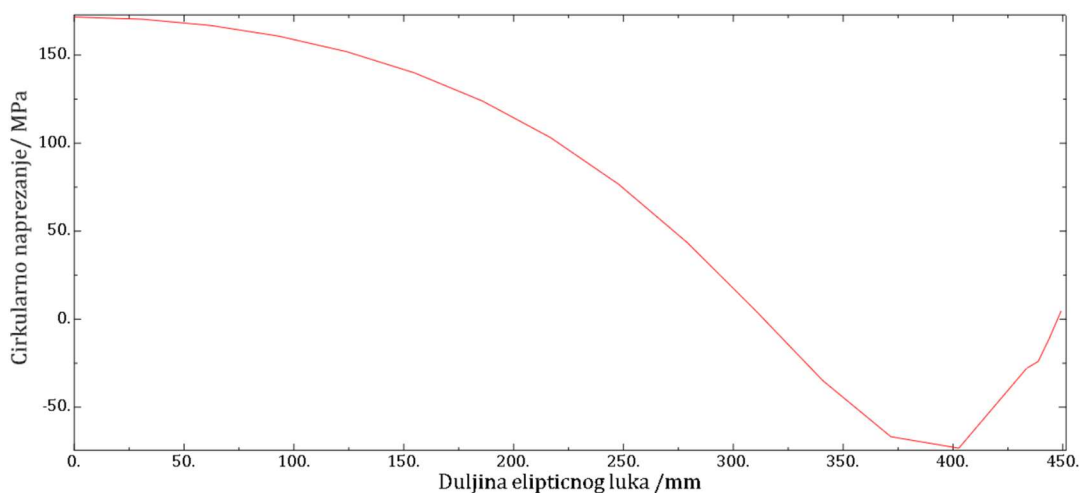


**Slika 71. Usporedba numeričkih i analitičkih rezultata ekvivalentnog napreznja eliptične ljske**

Slika 71. prikazuje usporedbu rezultata ekvivalentnog naprezanja eliptične ljske dobivenih analitičkom i numeričkom analizom. Može se vidjeti iz dijagrama kako se analitički „odziv“ eliptične ljske na zadano opterećenje približno ponaša kao numerički „odziv“ ljske sve do područja promjene zakrivljenosti ljske. Naime, analitičko rješenje ekvivalentnog naprezanja postiže svoj maksimalan iznos na dodiru ljsaka, dok numeričko postiže u samom tjemenu eliptične ljske. Zaključno, veće pogreške uočene u analizi eliptične ljske u usporedbi s cilindričnom ljskom mogu se pripisati čimbenicima kao što su inherentna složenost geometrije, problemi s kvalitetom mreže, ograničenja u pretpostavkama modeliranja, razlike u граниčnim uvjetima ili varijacije u materijalu. Razlika u rezultatima naglašava važnost daljnjeg istraživanja korištenih tehnika modeliranja i analize, posebno kada se radi o složenim geometrijama kao što su eliptične ljske. Nadalje Slika 72. prikazuje raspodjelu meridijalnog naprezanja duž luka eliptične ljske. Analogno, Slika 73. prikazuje cirkularno naprezanje.



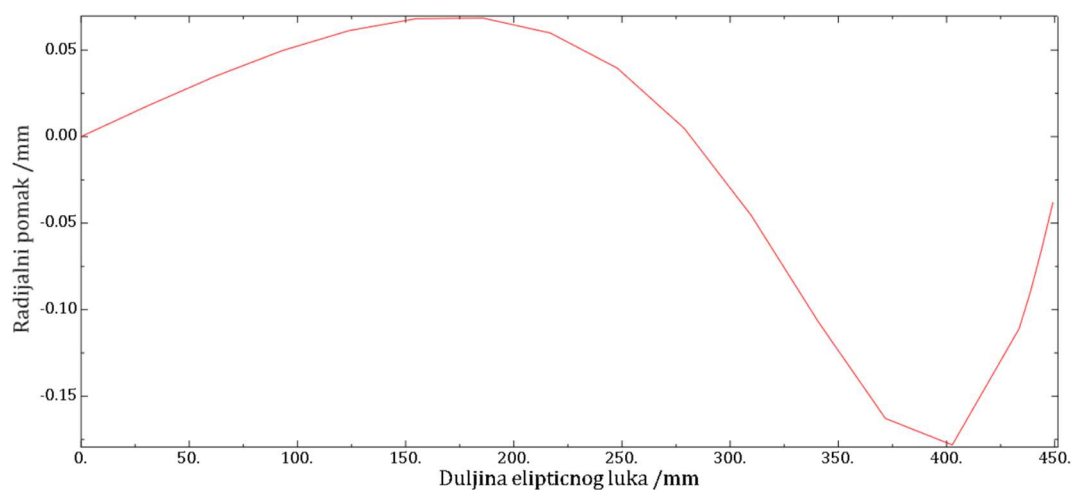
**Slika 72. Raspodjela meridijalnog naprezanja duž luka eliptične ljske**



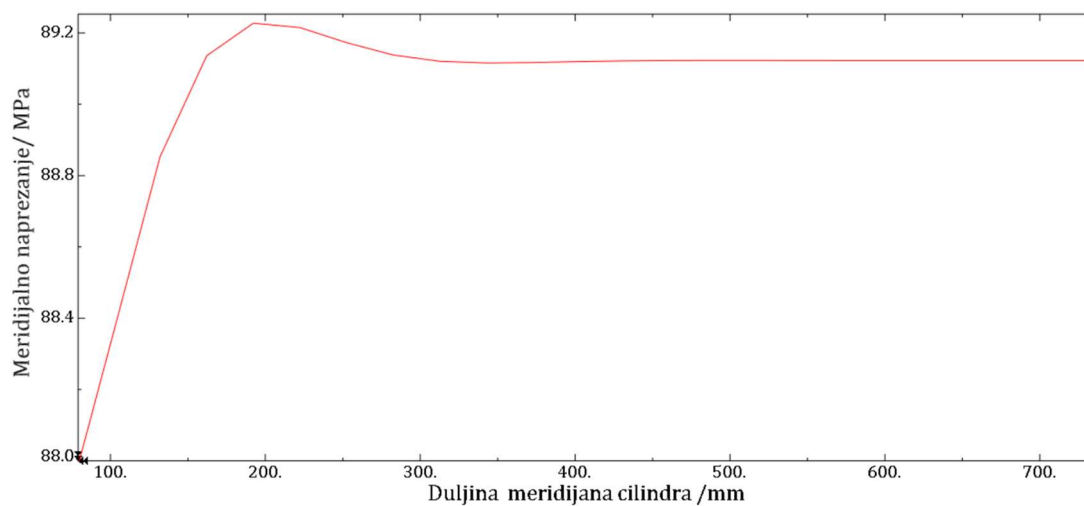
**Slika 73. Raspodjela cirkularnog naprezanja duž luka eliptične ljske**



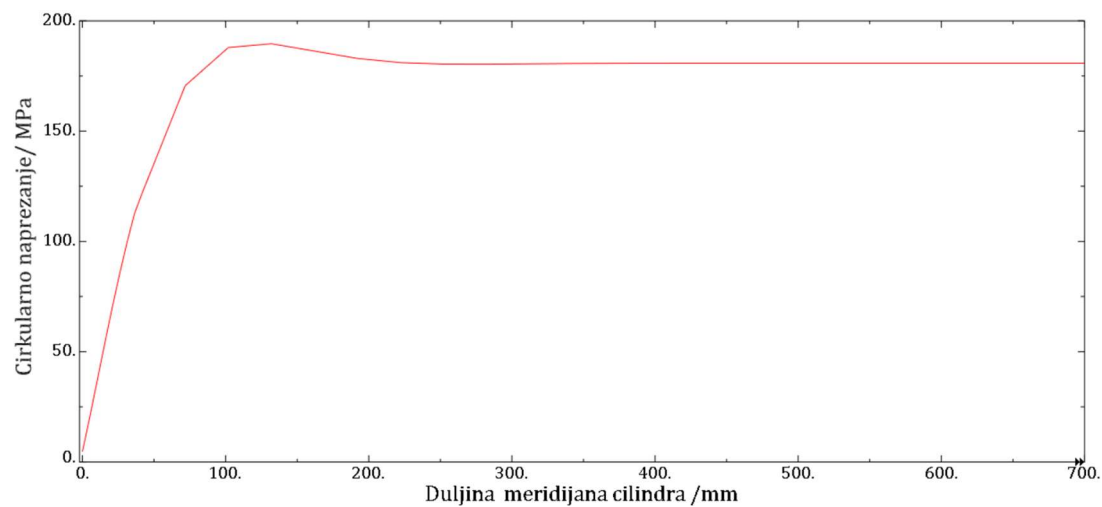
Nadalje Slika 74. prikazuje raspodjelu radijalnog pomaka duž luka eliptične ljske.



**Slika 74. Raspodjela radijalnog pomaka duž eliptične ljske**



**Slika 75. Raspodjela meridijalnog napreznja duž meridijana cilindra**



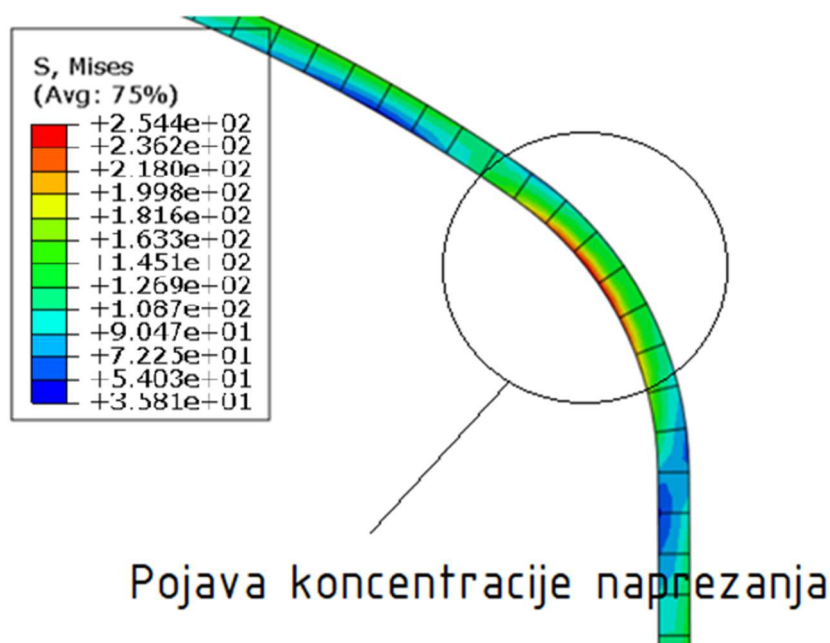
**Slika 76. Raspodjela cirkularnog napreznja duž meridijana cilindra**

Slike 75. i 76. prikazuju raspodjelu meridijalnog i cirkularnog napreznja duž meridijana cilindrične ljuske.

Naime, u numeričkoj analizi posebna se pozornost može posvetiti naglom skoku ekvivalentnog napreznja na dijelu promjene radijusa zakrivljenosti, pri čemu kod manjeg radijusa dolazi do veće koncentracije napreznja, zbog manje površine na koju je raspoređen tlak.

#### 4.6. Proračun čvrstoće spremnika iz numeričkih podataka

Za procjenu čvrstoće, kako je to navedeno i u odjeljku 3.6, ključno je odrediti maksimalno ekvivalentno napreznje spremnika koje je dobiveno kroz ovu numeričku analizu i usporediti ga s dopuštenom granicom napreznja. U numeričkoj analizi najveće napreznje na mjestu najmanjeg radijusa zakrivljenosti elipse. Pri čemu je ekvivalentno napreznje jednako  $\sigma_{ekv,max} = 192,1$  MPa (srednja ploha). Međutim koncentracija napreznja je puno utjecajnija nego što je to pretpostavljeno u analitičkom proračunu. Naime, Slika 77. prikazuje presjek spremnika, na kojem se jasno vidi nagli porast napreznja kod manjeg radijusa, i značajno je veće ekvivalentno napreznje na unutrašnjem djelu ljuske u odnosu na središnju ravninu plohe. Stoga je potrebno provjeriti čvrstoću spremnika za maksimalno ekvivalentno napreznje na unutrašnjem rubu ljuske, odnosno  $\sigma_{ekv,max}^U = 233,8$  MPa.



Slika 77. Područje pojave koncentracije napreznja na eliptičnoj ljusci

Naravno, kako je cijeli spremnik napravljen od istog materijala, čelika E355E, dovoljno je provjeriti sigurnost navedene kritične točke, jer ako sigurnost u tom području zadovoljava,

može se zaključiti da će i u ostalim. Kritično naprezanje, kako je prethodno navedeno, određujemo granicom tečenja materijala koje iznosi  $R_{p0,2} = 320$  MPa, kako je navedeno u Tablici 1. Nadalje sigurnost spremnika se definira sljedećim izrazom:

$$S = \frac{R_{p0,2}}{\sigma_{ekv,max}} = \frac{320}{233,8} = 1,38 \quad (4.9)$$

Određena je sigurnost iznosa 1,38 , što zadovoljava zadane uvjete opterećenja, međutim valja napomenuti kako je ovo testni tlak iznosa gotovo 40 % većeg od namijenjenog radnog tlaka spremnika (3 MPa). S obzirom na velike razlike između numeričke i analitičke analize, preporučljivo je koristiti više pristupa proračunu čvrstoće, kako je to prikazano u ovom radu.

## 5. Zaključak

U ovom završnom radu napravljena je dubinska analiza strukture spremnika stlačenog zraka, koji se koristi u sustavu pokretanja brodskog motora iz stanja mirovanja, temeljeno na teorijama membranskog naprezanja i teorije ljusaka. Kako bi se mogla provesti temeljita analiza čvrstoće konstrukcije, prvo se mora shvatiti odgovarajući teorijski okvir koji točno opisuje deformacije i naprezanja unutar konstrukcije. Slično tome, kada koristite alati za numeričku analizu kao što je ABAQUS<sup>®</sup>, bitno je razumjeti mogućnosti i ograničenja softvera, posebno u pogledu konačnih elemenata. Iako su dostupne brojne opcije konačnih elemenata, odabir najprikladnije vrste zahtijeva pažljivo razmatranje, koje se često utvrđuje praćenjem konvergencije rezultata i verifikacijskim ispitivanjima. Usporedbe između analitičkih i numeričkih rješenja općenito su pokazale dobro preklapanje za cilindričnu ljusku, međutim utvrđen je veliki jaz između analitičkih proračuna i numeričkih analiza za eliptičnu ljusku, posebno u pogledu položaja i veličina maksimalnih naprezanja. Stoga kombinirana uporaba analitičkih i numeričkih metoda može osigurati uzajamnu provjeru valjanosti rezultata, osiguravajući veće povjerenje u točnost strukturnih analiza. Zbog složenosti geometrije koja se koristila u proračunu, teško je u analitičkoj analizi predvidjeti prirodu naprezanja dijelova spremnika pod zadanim opterećenjem. U ovom radu odstupanje rezultata istaknulo je važnost prepoznavanja inherentnih razlika između analitičkih i numeričkih analiza i potrebu pažljivog tumačenja i usklađivanja njihovih rezultata.

## Literatura

- [1] <https://www.marineinsight.com/tech/air-compressor/compressed-air-line-on-ships/>
- [2] <https://sperre.com/air-system-solutions>
- [3] <https://www.redriver.team/understanding-the-four-most-common-types-of-heads-for-pressure-vessels/>
- [4] <https://matmatch.com/materials/minfm36989-jis-g3128-grade-e355e>
- [5] Alfirević I.: Linearna analiza konstrukcija, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb, 2011.
- [6] Pavo Baličević, Dražan Kozak, Tomislav Mrčela: Strojnski Vestnik/Journal of Mechanical Engineering „Strength of Pressure Vessels with Ellipsoidal Heads“
- [7] Zhanhui Wang, Zhifang Zhang, Jinzhong Chen & Jinjun Bai: Stress analysis and applicability analysis of the elliptical head
- [8] K. Magnucki, J. Lewin´ski :Fully stressed head of a pressure vessel
- [9] K. Magnuckia, W. Szyca, J. Lewinski: Minimization of stress concentration factor in cylindrical pressure vessels with ellipsoidal heads
- [10] <https://www.fidelisfea.com/post/which-ABAQUS-element-type-should-my-finite-element-analysis-fea-simulation-use>
- [11] <https://www.researchgate.net/>
- [12] <https://depidiomas.unitru.edu.pe/?e=compressed-air-line-on-ships-a-general-overview-ll-zPReWrTL>
- [13] Nama, N., Aguirre, M., Humphrey, J.D. et al. A nonlinear rotation-free shell formulation with prestressing for vascular biomechanics. Sci Rep 10, 17528 (2020).
- [14] <https://classes.engineering.wustl.edu/>
- [15] [http://www.industrialseparation.com/20180412\\_pressure-vessel-ellipsoidal-heads-under-internal-pressure.html](http://www.industrialseparation.com/20180412_pressure-vessel-ellipsoidal-heads-under-internal-pressure.html)
- [16] S. Isić, E. Nezirić, E.Šunje : Analysis of stress in torispherical head of pressure vessels, Faculty of Mechanical Engineering USRC “Mithat Hujdur – Hujka”, Mostar, Bosnia and Herzegovina 2010.

## **Prilozi**

I. CD-R disc