

# Korekcije mjernih pogrešaka

---

**Penava, Ana**

**Undergraduate thesis / Završni rad**

**2024**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:235:414031>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-07-13**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# ZAVRŠNI RAD

**Ana Penava**

Zagreb, 2024.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# ZAVRŠNI RAD

Mentori:

Dr. sc. Vedran Šimunović, dipl. ing.

Student:

Ana Penava

Zagreb, 2024.

Izjavljujem da sam ovaj rad izradila samostalno koristeći znanja stečena tijekom studija i navedenu literaturu.

Zahvaljujem se dr. sc. Vedranu Šimunoviću za strpljenje, pomoć i upute prilikom izrade ovog rada.

Zahvaljujem se svom dečku i svojim prijateljima koji su uvelike uljepšali ovaj dio studija, bili konstantna podrška koja me motivirala da ustrajem.

Nadasve, želim se zahvaliti svojoj obitelji koja mi je omogućila studiranje i uvijek bila tu kao velika moralna potpora.

Ana Penava



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE



Središnje povjerenstvo za završne i diplomske ispite  
Povjerenstvo za završne i diplomske ispite studija strojarstva za smjerove:  
proizvodno inženjerstvo, računalno inženjerstvo, industrijsko inženjerstvo i menadžment, inženjerstvo  
materijala i mehatronika i robotika

Sveučilište u Zagrebu Fakultet strojarstva i brodogradnje	
Datum	Prilog
Klasa: 602 – 04 / 24 – 06 / 1	
Ur.broj: 15 – 24 –	

## ZAVRŠNI ZADATAK

Student: **Ana Penava** JMBAG: **0035230996**

Naslov rada na hrvatskom jeziku: **Korekcije mjernih pogrešaka**

Naslov rada na engleskom jeziku: **Correction of Measurement Errors**

Opis zadatka:

Mjerne pogreške su inherentne u svakom procesu mjerenja i posljedica su brojnih utjecaja. Njihova prisutnost je neizbježna te neminovno utječu na točnost, preciznost i pouzdanost rezultata mjerenja. Mjerne pogreške uobičajeno se mogu podijeliti na: sustavne, slučajne i grube pogreške.

U radu je potrebno:

- Opisati grubu, slučajnu i sustavnu pogrešku. Ponuditi primjere.
- Na simuliranim podacima primijeniti različite metode za detekciju grube pogreške.
- Na primjeru mjerenja pravocrtnosti prikazati eliminaciju sustavne pogreške Donaldsonovom metodom.
- Na simuliranim podacima prikazati primjenu metode usrednjavanja u cilju smanjenja slučajne pogreške.

Zadatak zadan:

30. 11. 2023.

Datum predaje rada:

1. rok: 22. i 23. 2. 2024.  
2. rok (izvanredni): 11. 7. 2024.  
3. rok: 19. i 20. 9. 2024.

Predviđeni datumi obrane:

1. rok: 26. 2. – 1. 3. 2024.  
2. rok (izvanredni): 15. 7. 2024.  
3. rok: 23. 9. – 27. 9. 2024.

Zadatak zadao:

Doc. dr. sc. Vedran Šimunović

Predsjednik Povjerenstva:

  
Prof. dr. sc. Damir Godec



## SADRŽAJ

SADRŽAJ .....	I
POPIS SLIKA .....	III
POPIS TABLICA .....	IV
POPIS OZNAKA .....	V
SAŽETAK .....	VII
SUMMARY .....	VIII
1. UVOD .....	1
2. OSNOVNA NAČELA VEZANA ZA MJERITELJSTVO .....	3
2.1. Mjerenje .....	3
2.2. Mjerna nesigurnost .....	3
2.3. Mjerni etaloni .....	3
2.4. Umjeravanje .....	4
2.5. Sljedivost .....	4
2.6. Točnost i preciznost .....	5
2.6.1. Točnost .....	5
2.6.2. Preciznost .....	5
2.6.3. Razlika između točnosti i preciznosti .....	5
3. MJERNE POGREŠKE .....	7
3.1. Osnovni pojmovi .....	7
3.2. Grube pogreške .....	8
3.2.1. Neki od uzroka grubih pogrešaka .....	8
3.2.2. Primjeri grube pogreške .....	9
3.3. Sustavne pogreške .....	9
3.3.1. Umjeravanje .....	10
3.3.2. Radni uvjeti .....	10
3.3.3. Deformacija predmeta mjerenja .....	10
3.3.4. Faktori koji se mogu izbjeći .....	11
3.3.5. Primjer sustavne pogreške: Linearna pogreška .....	11
3.4. Slučajne pogreške .....	12
3.4.1. Rezolucija instrumenta .....	13
3.4.2. Fizikalne varijacije .....	13
3.4.3. Primjer slučajne pogreške .....	13
4. METODE DETEKCIJE GRUBIH POGREŠAKA .....	14
4.1. Dixonova metoda detekcije grubih pogrešaka .....	14
4.1.1. Primjena Dixonovog Q-testa .....	14
4.1.2. Primjer Q-testa .....	15
4.2. Tri $\sigma$ -test .....	16
4.2.1. Primjena Tri $\sigma$ -testa .....	16
4.2.2. Primjer 3s-testa .....	17
5. METODA DETEKCIJE SUSTAVNE POGREŠKE .....	18

---

5.1. Metoda najmanjih kvadrata .....	18
5.1.1. Postupak određivanja parametara a i b uporabom metode najmanjih kvadrata ..	18
5.2. Tehnike preokreta .....	20
5.3. Eksperimentalni dio Tehnike preokreta na primjeru mjerenja pravocrtnosti.....	21
5.3.1. Detekcija sustavne pogreške na primjeru pravocrtnosti.....	25
5.3.1.1. Zaključak .....	29
6. SMANJENJE SLUČAJNE POGREŠKE METODOM USREDNJAVANJA .....	31
6.1. Općenito o metodi usrednjavanja.....	31
6.2. Primjena metode usrednjavanja na simuliranim podacima.....	31
7. ZAKLJUČAK.....	36
8. LITERATURA .....	37

## POPIS SLIKA

Slika 1. Lanac sljedivosti [5] .....	4	
Slika 2. Razlika točnosti i preciznosti [8] .....	6	
Slika 3. Regresijski pravac [1] .....	12	
Slika 4. Prikaz kritičnih vrijednosti parametra $Q$ [21] .....	15	
Slika 5. Prikaz $3\sigma$ -testa [22] .....	17	
Slika 6. Prikaz mjernog sustava Tehnike preokreta[24] .....	20	
Slika 7. Mjerni sustav Tehnike preokreta u početnom položaju .....	21	
Slika 8. Mjerni sustav Tehnike preokreta u zakrenutom položaju .....	21	
Slika 9. Graf ovisnosti rezultata mjerenja o pomaku za početni položaj .....	22	
Slika 10. Aritmetička sredina mjernih podataka za početni položaj .....	23	
Slika 11. Regresijski pravac za početni položaj .....	23	
Slika 12. Graf ovisnosti rezultata mjerenja o pomaku za zakrenuti položaj .....	24	
Slika 13. Aritmetička sredina mjernih podataka za zakrenuti položaj .....	25	
Slika 14. Regresijski pravac za za zakrenuti položaj .....	25	
Slika 15. Odstupanja od pravocrtности vodilice .....	28	
Slika 16. Odstupanja od pravocrtности mjernog predmeta .....	29	
Slika 17. Odstupanje od pravocrtности mjernog predmeta, početni položaj .....	30	
Slika 18. Odstupanje od pravocrtности mjernog predmeta, zakrenuti položaj .....	30	
Slika 19. Prikaz teorijske funkcije koja predstavlja predmet mjerenja .....	32	
Slika 20. Šum koji predstavlja slučajnu pogrešku .....	32	
Slika 21. Simulirano mjerenje 1 .....	33	
Slika 22. Simulirano mjerenje 2 .....	33	
Slika 23. Simulirano mjerenje 3 .....	33	
Slika 24. Simulirano mjerenje 4 .....	33	
Slika 25. Simulirano mjerenje 5 .....	33	
Slika 26. Simulirano mjerenje 6	Slika 27. Simulirano mjerenje 7 .....	34
Slika 28. Simulirano mjerenje 8	Slika 29. Simulirano mjerenje 9 .....	34
Slika 30. Simulirano mjerenje 10 .....	34	
Slika 31. Rezultati mjerenja nakon provođenja metode usrednjavanja .....	35	



**POPIS TABLICA**

Tablica 1, Prikaz rezultata mjerenja .....	9
Tablica 2 Prikaz mjernih podataka za početni položaj predmeta.....	22
Tablica 3. Prikaz mjernih podataka za zakrenuti položaj .....	24
Tablica 4. Prikaz odstupanja od pravocrtnosti za 20 točaka mjerenja, početni položaj predmeta .....	26
Tablica 5. Prikaz odstupanja od pravocrtnosti za 20 točaka mjerenja, zakrenuti položaj predmeta .....	27
Tablica 6. Prikaz vrijednosti $G(x)$ i $R(x)$ .....	28
Tablica 7. Maksimalna odstupanja simuliranih mjerenja .....	35

## POPIS OZNAKA

Oznaka	Jedinica	Opis
$P$	mm	Pogreška mjerenja
$P_{rel}$	mm	Relativna pogreška mjerenja
$X_s$	mm	Stvarna mjerna vrijednost
$X_i$	mm	Izmjerena mjerna vrijednost
$L$	mm	Duljina mjernog predmeta
$\Delta L$	mm	Promjena duljine predmeta uslijed temperature
$\alpha$	$K^{-1}$	Linearni koeficijent temperaturnog rastezanja
$N$	-	Ukupan broj rezultata opažanja
$X_N$	mm	Najveća vrijednost rezultata opažanja
$r_{10}$	-	Dixonov parametar
$r_{11}$	-	Dixonov parametar
$r_{21}$	-	Dixonov parametar
$r_{22}$	-	Dixonov parametar
$\alpha$	-	Parametar razine pouzdanosti Dixonove metode
$Q$	-	Kritična vrijednost parametra
$s^2$	-	varijanca
$s$	-	Procijenjeno standardno odstupanje
$\sigma$	-	Standardno odstupanje
$\bar{x}$	-	Aritmetička sredina
$\mu$	-	Očekivanje
$y$	-	Zavisna veličina
$x$	-	Nezavisna veličina
$a$	-	Parametar funkcije
$b$	-	Parametar funkcije
$D_i$	$\mu\text{m}$	Odstupanje
$y_i$	$\mu\text{m}$	$I$ -te izmjerene mjerne vrijednosti
$F(x)$	-	Funkcija cilja
$f(x)$	-	Funkcija $y$ zavisi o veličini $x$

---

$I_1$	$\mu\text{m}$	Izlazni indikator za početni položaj
$I_2$	$\mu\text{m}$	Izlazni indikator za zakrenuti položaj
$G(x)$	$\mu\text{m}$	Ravnost klizne staze vodilice
$R(x)$	$\mu\text{m}$	Ravnost mjernog predmeta
$\bar{y}$	$\mu\text{m}$	Aritmetička sredina
$\bar{y}_i$	$\mu\text{m}$	I-te vrijednosti aritmetičke sredine, početni položaj predmeta
$\bar{y}_j$	$\mu\text{m}$	J-te vrijednosti aritmetičke sredine, zakrenuti položaj predmeta

## **SAŽETAK**

U ovom radu obrađena je analiza i metoda za detekciju i korekciju tri vrste mjernih pogrešaka: grube, sustavne i slučajne. Prvo su opisane pogreške i njihov utjecaj na mjerenja. Detekcija grubih pogrešaka obavljena je pomoću Dixonove metode i 3 $\sigma$  testa. Zatim je prikazana detekcija sustavne pogreške na primjeru pravocrtnosti korištenjem tehnike preokreta i metode najmanjih kvadrata. U zadnjem poglavlju provedena je metoda usrednjavanja na simuliranim podacima zbog smanjenja slučajne pogreške. Ova analize nude korisne uvide i alate za poboljšanje preciznosti mjerenja u različitim kontekstima.

Ključne riječi: mjerna pogreška, detekcija pogreške, korekcija pogreške.

## **SUMMARY**

The analysis and methods for detecting and correcting three types of measurement errors: outlier, systematic, and random, are discussed in this paper. First, the errors and their impact on measurements are described. Detection of outliers is performed using Dixon's method and the  $3\sigma$  test. Then, detection of systematic errors is illustrated using the example of linearity by applying the reversal technique and the method of least squares. In the final chapter, averaging method is applied to simulated data to reduce random error. These analyses provide valuable insights and tools for improving measurement accuracy in various contexts.

Key words: measurement error, error detection, error correction.

## 1. UVOD

Uvođenje u temu mjernih pogrešaka zahtijeva dublje razmatranje kako bi se shvatila važnost njihove uloge u kontekstu mjerenja i analize. Mjerne pogreške su inherentni dio svakog mjerenja, a razumijevanje njihove prirode i utjecaja ključno je za osiguranje točnih i pouzdanih rezultata.

Zašto su mjerni pogreške bitne?

Mjerni pogreške su bitne iz nekoliko razloga. Prije svega, točnost i pouzdanost mjerenja su ključne za donošenje ispravnih zaključaka u mnogim područjima, uključujući znanstvena istraživanja, inženjerske projekte, medicinske dijagnoze i industrijske procese. Čak i male pogreške u mjerenju mogu imati značajan utjecaj na konačne rezultate i interpretaciju podataka. Drugo, mjerne pogreške trebaju biti korigirane kako bi se osigurala dosljednost i usporedivost mjerenja različitih instrumenata, laboratorija ili vremenskih razdoblja. Bez adekvatne korekcije, rezultati mjerenja mogu biti nepouzdana i teško usporedivi.

Kako mjerne pogreške utječu na mjerenja i rezultate?

Mjerne pogreške mogu imati značajan utjecaj na mjerenja i rezultate na različite načine. Oni mogu dovesti do narušavanja preciznosti, osjetljivosti ili točnosti mjerenja, što može rezultirati netočnim interpretacijama ili odlukama. Također, mjerni pogreške mogu utjecati na statističku analizu podataka, uključujući procjenu pouzdanosti rezultata ili određivanje granica detekcije.

Tri vrste mjernih pogrešaka koje su opisane u ovom radu:

**Grube pogreške:** Ove pogreške su očite, nenamjerne i često rezultat ljudske greške ili nepredviđenih okolnosti. Primjerice, očita pogreška u očitavanju mjernog instrumenta ili oštećenje uzorka tijekom pripreme za analizu.

**Sustavne pogreške:** Sustavne pogreške proizlaze iz stalnih ili ponavljajućih uzroka te dovode do sustavnog odstupanja između stvarne vrijednosti i izmjerene vrijednosti. One mogu biti posljedica pogrešaka umjeravanja, nedostataka u dizajnu instrumenta ili nepotpunog razumijevanja mjernog procesa.

**Slučajne pogreške:** Ove pogreške su inherentno slučajne i proizlaze iz nepredvidivih fluktuacija u mjernim uvjetima ili samom uzorku. Slučajne pogreške se obično opisuju statistički, a njihov utjecaj može biti smanjen ponavljanjem mjerenja ili korištenjem statističkih metoda za analizu podataka.

Stoga, razumijevanje različitih vrsta mjernih pogrešaka ključno je za provođenje točnih i pouzdanih mjerenja. Identifikacija, kvantifikacija i korekcija ovih pogrešaka nužni su koraci u osiguranju vjerodostojnih rezultata i napretku u različitim znanstvenim, tehničkim i medicinskim disciplinama.

## 2. OSNOVNA NAČELA VEZANA ZA MJERITELJSTVO

### 2.1. Mjerenje

Postupak mjerenja uključuje eksperimentalno dobivanje jedne ili više vrijednosti koje se razumno mogu pripisati toj veličini. Važno je napomenuti da se mjerenje ne primjenjuje na nazivna svojstva, već podrazumijeva usporedbu veličine ili brojanje entiteta. Također, da bi se izvršilo mjerenje, potrebno je opisati veličinu na način koji je proporcionalan namjeravanoj uporabi rezultata mjerenja. To uključuje postupak mjerenja i kalibrirani mjerni sustav koji djeluje prema specificiranom postupku mjerenja, uključujući uvjete mjerenja. [2]

### 2.2. Mjerna nesigurnost

Mjerna nesigurnost (eng. Uncertainty of measurement, njem. Messunsicherheit) označava činjenicu da za određenu mjernu vrijednost ili njezin mjerni rezultat ne postoji jedna vrijednost, već je moguć beskonačan broj vrijednosti koje su raspršene oko tog rezultata. Stoga, bitno je promatranje rasipanja mjernih vrijednosti i njegovo izražavanje putem mjerne nesigurnosti. [3]

### 2.3. Mjerni etaloni

Etalon predstavlja konkretiziranu mjeru, standard, referentnu tvar ili sustav za mjerenje, namijenjen određivanju, ostvarivanju, čuvanju ili obnavljanju jedinice određene veličine kako bi služio kao referenca. Postignuta definicija te veličine, s izraženom vrijednošću i mjernom nesigurnošću, koristi se kao točka odnosa. Mjerni etaloni klasificiraju se prema sljedećim kategorijama:

- Internacionalni etalon - etalon priznat međunarodnim sporazumom kao globalna osnova za utvrđivanje vrijednosti drugih etalona iste veličine.
- Primarni etalon - etalon jedinice određene veličine s najvišim mjeriteljskim karakteristikama, potvrđen usporedbom s internacionalnim etalom. Njegova svrha je postavljanje mjeriteljskih standarda za sekundarne etalone.
- Nacionalni etalon – etalon koji je priznat službenom nacionalnom odlukom kao osnovica za određivanje vrijednosti drugih etalona iste veličine unutar zemlje. Često nazivan nacionalnim etalom, može također biti i primarni etalon.



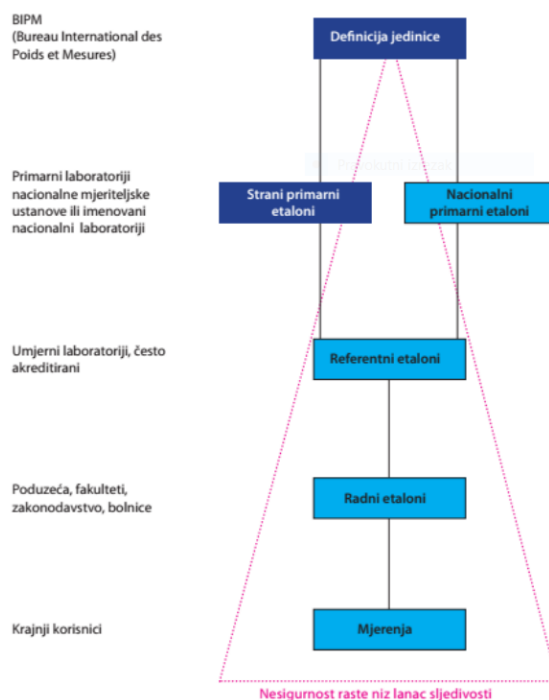
- Sekundarni etalon - etalon jedinice određene veličine s mjeriteljskim karakteristikama utvrđenim usporedbom s primarnim etalom. Koristi se za provjeru mjeriteljskih svojstava radnih etalona.
- Radni etalon - etalon jedinice određene veličine s mjeriteljskim karakteristikama utvrđenim usporedbom s sekundarnim etalom. Njegova uloga je postavljanje mjeriteljskih standarda za instrumente. [1]

## 2.4. Umjeravanje

Umjeravanje (kalibriranje, baždarenje) predstavlja skup postupaka kojima se pod određenim uvjetima odnos između vrijednosti mjernih veličina prikazanih na određenom mjerilu, tvarnoj mjeri, usporedbenoj tvari ili mjernom sustavu te odgovarajućih vrijednosti ostvarenih etalonima. Cilj umjeravanja je osigurati sukladnost očitavanja umjerenih mjerila. [4]

## 2.5. Sljedivost

Svojstvo rezultata mjerenja omogućuje povezivanje rezultata s referencom kroz dokumentirani neprekinuti lanac umjeravanja, pri čemu svako umjeravanje doprinosi nesigurnosti mjerenja. Ova karakteristika osigurava da nema plagijata u postupku mjerenja. Mjerna sljedivost zahtijeva postojanje utvrđene hijerarhije umjeravanja. [1]



Slika 1.Lanac sljedivosti [5]

## **2.6. Točnost i preciznost**

### **2.6.1. Točnost**

Točnost se odnosi na slaganje prosječne vrijednosti velikog broja mjernih rezultata i stvarne ili prihvaćene referentne vrijednosti. Dok se preciznost odnosi na sličnost rezultata mjerenja dobivenih pod određenim uvjetima. [6] Također se može opisati kao maksimalan iznos za koji se rezultat razlikuje od stvarne vrijednosti, ili kao blizina izmjerene vrijednosti njezinoj stvarnoj vrijednosti, često izražena u postotku. Stvarna vrijednost može biti definirana kao srednja vrijednost beskonačnog broja izmjerenih vrijednosti kada prosječna odstupanja zbog različitih doprinosećih čimbenika teže nuli. U stvarnosti, ostvarivanje apsolutne stvarne vrijednosti nije moguće zbog nesavršenosti mjernog procesa, stoga je eksperimentalno određivanje nedostižno. Pozitivna i negativna odstupanja od stvarne vrijednosti nisu identična i neće se međusobno poništiti. Nikada ne bismo mogli sa sigurnošću tvrditi da li ono što se mjeri predstavlja apsolutnu vrijednost ili ne. [7]

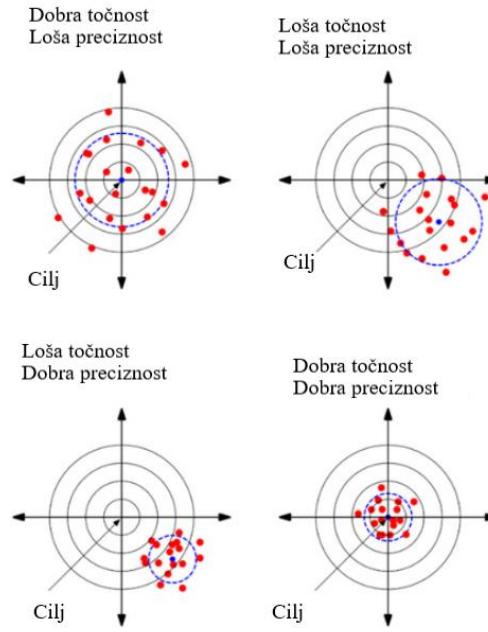
### **2.6.2. Preciznost**

S druge strane, preciznost se odnosi na sličnost rezultata mjerenja dobivenih pod određenim uvjetima. [6] Ona označava mjeru ponovljivosti u procesu mjerenja. Ova karakteristika odnosi se na stupanj usklađenosti u rezultatima mjerenja iste veličine provedenih metodom pod sličnim uvjetima. Drugim riječima, preciznost se odnosi na sposobnost mjernog instrumenta da ostvari ponovljive rezultate tijekom mjerenja iste veličine. Pojam ponovljivosti koristi se za opisivanje ovog svojstva, naglašavajući njegovu nasumičnu prirodu, koja samostalno ne garantira točnost, iako je poželjna karakteristika.

Ako mjerni instrument nije precizan, rezultati će varirati prilikom ponovljenih očitavanja. U većini slučajeva mjerenja, preciznost ima veći značaj od točnosti. [7]

### **2.6.3. Razlika između točnosti i preciznosti**

Točnost nam pruža informacije o koliko se izmjereni rezultat razlikuje od stvarne vrijednosti, dok preciznost označava kvalitetu mjerenja, no ne jamči nam da je sam postupak mjerenja ispravan. Ovi koncepti izravno su povezani s slučajnim i sustavnim pogreškama u mjerenju. Na Slici 2. jasno je prikazana razlika između preciznosti i točnosti.



Slika 2. Razlika točnosti i preciznosti [8]

### 3. MJERNE POGREŠKE

Bez obzira na sve preventivne mjere poduzete tijekom procesa mjerenja, uvijek će postojati odstupanje između dobivenog rezultata mjerenja i stvarne (ali nepoznate) vrijednosti veličine. Ovo odstupanje nazivamo pogreškom mjerenja. Mjerenje gubi svoju ulogu ukoliko nema kvantitativnog pokazatelja za veličinu te pogreške. Taj pokazatelj poznat je kao nesigurnost. Bez poznavanja nesigurnosti, nemoguće je usporediti rezultat mjerenja s referentnom vrijednošću ili s rezultatima drugih mjerenja. [9]

#### 3.1. Osnovni pojmovi

Stvarna vrijednost,  $X_s$ , neke mjerne veličine koju je potrebno izmjeriti predstavlja rezultat koji bi se dobio u savršenim uvjetima mjerenja. Budući da su potpuno savršena mjerenja ne postoje, stvarna vrijednost nam uvijek ostaje neodređena i nepoznata. Rezultat dobiven mjerenjem naziva se rezultatom mjerenja i označava se simbolom  $X_i$ . Pogreška mjerenja,  $P$ , predstavlja razliku između izmjerenog rezultata mjerenja i stvarne vrijednosti što je i predočeno sljedećom formulom: [1]

$$P = X_i - X_s \quad (1)$$

Apsolutna pogreška označava razliku između izmjerene vrijednosti i stvarne vrijednosti neke količine, a isto je prikazano prethodnom formulom. No, sama apsolutna pogreška nije dovoljna jer ne pruža detalje o važnosti te pogreške. [10] Primjerice, ako mjerimo duljinu od 10 cm, greška od  $\pm 5 \mu\text{m}$  se može zanemariti, međutim ta ista greška se ne smije zanemariti ako mjerimo duljinu od 30  $\mu\text{m}$ .

Relativna pogreška definira se kao omjer između apsolutne pogreške mjerenja i stvarne vrijednosti mjerenja. [10]

$$P_{rel} = \frac{X_i - X_s}{X_s} \quad (2)$$

Pogreške se mogu podijeliti na:

- Grube pogreške
- Sustavne pogreške
- Slučajne pogreške

### 3.2. Grube pogreške

Nastaju greškama koje potječu iz ljudske pogreške tijekom mjerenja, iznenadnim smetnjama u okolini ili u samom mjernom uređaju. Ovakve pogreške rezultat su grubog i/ili subjektivno uvjetovanog propusta u procesu mjerenja. Na primjer, promatrač može zabilježiti pogrešnu vrijednost, krivo očitati sa skale, zaboraviti znamenku prilikom očitavanja ili napraviti sličan propust. Ako se provodi više mjerenja ili ukoliko jedna osoba provjerava rad druge, rezultati s ovakvim pogreškama trebali bi se jasno istaknuti. Uobičajeno je isključiti takve rezultate iz analize podataka. [11]

#### 3.2.1. Neki od uzroka grubih pogrešaka

Da bi se bolje razumjelo što uzrokuje grube pogreške, pomično mjerilo može poslužiti kao primjer. Neki značajni čimbenici grube pogreške obuhvaćaju sljedeće:

1. Neprecizno rukovanje: To se može odnositi na nepravilno poravnanje čeljusti pomičnog mjerila s objektom koji se mjeri, držanje pomičnog mjerila pod nepravilnim kutom ili nepravilno čitanje skale.
2. Slaba procjena: Ovo obuhvaća nedostatak odabira odgovarajućih čeljusti ili skale za određeno mjerenje, kao i propust u pravilnom uzimanju u obzir eventualnih nepravilnosti na objektu koji se mjeri.
3. Nedostatak iskustva: Manjak iskustva može rezultirati pogreškama u pravilnom rukovanju čeljustima, pomicanju ih na ispravan položaj ili preciznom tumačenju očitavanja.
4. Problemi s opremom: Problemi s samim uređajem, kao što su oštećene čeljusti ili nesporazumi s skalom, ili s objektom koji se mjeri, poput nepravilnosti površine ili deformacija.
5. Ljudski čimbenici: Fiziološki faktori poput umora ili stresa mogu utjecati na sposobnost korisnika da pravilno koristi pomično mjerilo i precizno čita skalu. [12]

### 3.2.2. Primjeri grube pogreške

#### Primjer br. 1:

Tablica 1, Prikaz rezultata mjerenja

Broj mjerenja	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Rezultat [mm]	10,243	10,241	10,222	10,231	10,641	10,200	10,275	10,239	10,301

Tablica 1. prikazuje rezultate mjerenja jednog industrijskog dijela, a jasno se može uočiti da 5. mjerenje, odnosno vrijednost 10,641, značajno odstupa od ostatka vrijednosti rezultata što se registrira kao gruba greška, a samim time rezultat se odbacuje.

#### Primjer br. 2:

Ako se pretpostavi da osoba interpretira očitavanje manometra kao  $3,12 \frac{N}{m^2}$  umjesto stvarnih  $3,21 \frac{N}{m^2}$ . Ovakva situacija predstavlja primjer grube pogreške jer, kad se dalje provodi proračun, primijetit će se značajno odstupanje u praktičnoj primjeni što dovodi do problema. [12]

### 3.3. Sustavne pogreške

Sustavna pogreška predstavlja grešku koja, tijekom niza mjerenja provedenih u istim uvjetima za određenu vrijednost i količinu, ili zadržava konstantnu apsolutnu vrijednost i predznak ili varira prema određenom zakonu s promjenjivim uvjetima. [13] Drugim riječima, u tijeku ponovljenih mjerenja iste veličine ostaju stabilne ili se mijenjaju na predvidiv način.

Ovakve vrste grešaka mogu se kontrolirati u pogledu njihove veličine i smjera, a mogu se procijeniti i minimizirati ako se ulože napore u njihovu analizu. Kako bismo ih procijenili, bitno je identificirati sve izvore takvih pogrešaka. Preciznost mjerenja smatra se iznimno visokom kada su sustavne pogreške minimalne. Identifikacija ovakvih grešaka zahtijeva pažljiv pristup, a statistička analiza nije uvijek moguća. Također, sustavne pogreške ne mogu se eliminirati jednostavno povećanjem broja očitavanja i formiranjem njihovih prosjeka. To su ponovljive netočnosti koje se stalno pojavljuju u istom smjeru. Smanjenje sustavnih pogrešaka doprinosi povećanju preciznosti mjerenja. A uzroci ovog tipa grešaka su sljedeći:

- Umjeravanje

- Radni uvjeti
- Deformacija predmeta mjerenja
- Faktori koji se mogu izbjeći . [7]

### 3.3.1. Umjeravanje

Kad god je to moguće, preporučuje se provjera umjeravanja instrumenta prije prikupljanja podataka. Ako nema dostupne norme za umjeravanje, preciznost instrumenta može se provjeriti usporedbom s drugim instrumentom koji je barem jednako precizan, ili konzultacijom s tehničkim podacima koje pruža proizvođač. Greške umjeravanja obično imaju linearni karakter pa veće vrijednosti rezultiraju većim apsolutnim pogreškama. [14]

### 3.3.2. Radni uvjeti

Standardni mjeriteljski uvjeti okoline odnose se na sljedeće:

- Temperatura: 20 °C
- Tlak: 1013,25 mbar (101325 Pa)
- Relativna vlažnost: 58 %. [1]

Temperatura predstavlja ključni vanjski faktor koji značajno utječe na preciznost mjerenja. Čak i povećanje temperature za 1°C rezultira opipljivim povećanjem duljine čelika za 0,311 µm po 1 m duljine, što postaje značajno u situacijama gdje se zahtijeva visoka preciznost. Da bi se postigli rezultati bez grešaka, potrebno je uvesti korekcijski faktor za temperaturu. Osim toga, relativna vlažnost zraka, termalni gradijenti, vibracije te udio  $CO_2$  u zraku utječu na indeks loma atmosfere. Termalno širenje nastaje zbog toplinske radijacije različitih izvora, poput svjetlosnih izvora, sunčevog svjetla i tjelesne temperature radnika. [7] A sljedećom formulom je prikazana ovisnost širenja predmeta o promjeni temperature:

$$\Delta L = L \times \alpha \times \Delta t \quad (3)$$

Gdje je:  $\Delta L$  – promjena duljine predmeta uslijed temperature u m;  $L$  – duljina predmeta u m;  $\alpha$  – linearni koeficijent temperaturnog rastezanja u  $K^{-1}$ ;  $\Delta t$  – razlika temperature predmeta. [1]

### 3.3.3. Deformacija predmeta mjerenja

Svako elastično tijelo, pod opterećenjem, podvrgava se elastičnoj deformaciji. Pritisak ticala koji se primjenjuje tijekom mjerenja ima utjecaj na preciznost mjerenja. Zbog konkretnog pritiska ticala, moguće je da dođe do elastične deformacije radnog komada i savijanja oblika radnog komada. Stoga, tijekom usporednog mjerenja, važno je osigurati da su primijenjena mjerna opterećenja jednaka. [7]

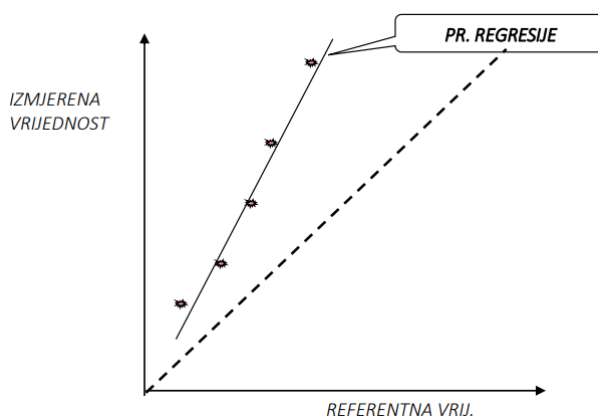
### 3.3.4. Faktori koji se mogu izbjeći

- Osobne greške: Osobne pogreške nastaju zbog nepažnje, nedostatka detaljnog poznavanja postupka mjerenja, ograničenja (primjerice, daltonizam osobe koja izvodi titraciju promjene boje), suda i predrasuda osobe koja obavlja mjerenje. Automatizacijom, odgovarajućim obučavanjem te osiguravanjem da osoba svlada bilo kakvu pristranost, neke od ovih pogrešaka moguće je ublažiti kako bi se očuvala točnost mjerenja. [13]
- Odstupanje od nule: Pri mjerenju pomoću mikrometra, elektroničke vage ili električnih uređaja, uvijek je prvo potrebno provjeriti nulu. Ponovno se postavi instrument na nulu ako je moguće, ili zabilježi odstupanje nule kako bi se kasnije mogla ispraviti očitavanja. Preporučljivo je također periodično provjeravati nulu tijekom eksperimenta. Zanemarivanje postavljanja uređaja na nulu rezultirat će konstantnom pogreškom koja je izraženija kod manjih mjerenih vrijednosti nego kod većih. [14]
- Paralaksa: Pogreške paralakse nastaju kada pogled nije okomito usmjeren prema skali instrumenta ili kada promatrač čita instrument iz kuta. Ovaj tip pogreške obično je povezan s instrumentima koji imaju skalu i pokazivač. Postojanje ogledala iza pokazivača ili indikatora gotovo u potpunosti eliminira pojavu ove vrste pogreške. [7]
- Vremensko kašnjenje i histereza: Određeni mjerni uređaji zahtijevaju određeno vrijeme da postignu ravnotežu, a mjerenje prije nego što instrument postigne stabilnost rezultirat će očitanjem koje je nerealno visoko ili nisko. Uobičajen primjer je mjerenje temperature pomoću termometra koji još nije postigao termalnu ravnotežu sa svojim okolišem. Sličan fenomen je histereza, gdje očitavanja instrumenta zaostaju i čini se da imaju "memorijski" efekt, pri čemu se podaci uzimaju sekvencijalno kroz raspon vrijednosti prema gore ili prema dolje. Histereza je najčešće povezana s materijalima koji postaju magnetizirani kada im se izloži mijenjajuće magnetsko polje. [14]

### 3.3.5. Primjer sustavne pogreške: Linearna pogreška

Linearna pogreška se definira kao konstantan (linearni) porast ili pad vrijednosti pogreške rezultata mjerenja unutar specifičnog opsega mjernog instrumenta. [1]





**Slika 3. Regresijski pravac [1]**

Na Slici 3. prikazani su rezultati mjerenja, a pravac regresije je upravo onaj koji najbolje opisuje odnose između izmjerenih rezultata, odnosno takav je da je srednje kvadratno odstupanje od njega minimizirano. [16]

### 3.4. Slučajne pogreške

Kako bi se opisala slučajna mjerna pogreška, korisno je zamisliti situaciju gdje se određena količina mjeri nekoliko puta. Ako se primijete razlike između rezultata pojedinačnih mjerenja, a te razlike ne mogu biti pojedinačno predviđene, te bilo kakve pravilnosti koje su inherentne njima ispoljavaju se samo kroz mnogo rezultata, tada se pogreška proizašla iz ovakvog raspršivanja rezultata naziva slučajna pogreška. [15] Kad je riječ o neminovnoj nesavršenosti opažачa i uređaja, te pogreške se mogu umanjivati, no potpuno ih je nemoguće izbjeći. To su nesavršenosti koje proizlaze isključivo iz samog postupka mjerenja. Poboljšanjem izolacije od okoline i primjenom naprednijih uređaja, moguće je smanjiti te pogreške do granica tehnoloških mogućnosti. Važno obilježje slučajnih pogrešaka je njihova proizvoljna distribucija oko stvarne vrijednosti. Prema zakonima vjerojatnosti, najvjerojatnija stvarna vrijednost izmjerene veličine predstavlja aritmetičku sredinu svih prikupljenih podataka. [11]

Uzroci slučajnih grešaka su najčešće sljedeći:

- Rezolucija instrumenta
- Radni uvjeti (opisano kod sustavnih pogrešaka)
- Paralaksa (opisano kod sustavnih pogrešaka)
- Fizikalne varijacije
- Osobne greške (opisano kod sustavnih pogrešaka) [14],[17]

### **3.4.1. Rezolucija instrumenta**

Svi instrumenti imaju ograničenu preciznost koja ograničava mogućnost razlikovanja malih varijacija u mjerenjima. Na primjer, mjerna traka ne može pružiti razlučivanje udaljenosti s točnošću znatno većom od polovice najmanje podjele njegove skale (u ovom slučaju 0,5 mm).[14]

### **3.4.2. Fizikalne varijacije**

Pametno je uvijek prikupiti više mjerenja na što širem rasponu. Na taj način se često otkrivaju varijacije koje bi inače mogle proći neprimijećene. Te varijacije mogu zahtijevati pažljivije ispitivanje ili se mogu kombinirati kako bi se dobila prosječna vrijednost. [14]

### **3.4.3. Primjer slučajne pogreške**

U nastavku su navedena dva primjera:

1. Mjerenja mase na analitičkoj vagi mijenjaju se ovisno o protoku zraka, čak i pri malim varijacijama mase u uzorku.
2. Mjerenja težine na vagi fluktuiraju jer je gotovo nemoguće stajati na vagi na isti način svaki put. Srednjom vrijednosti višestrukih mjerenja smanjuje se pojava pogreške. [14]

## 4. METODE DETEKCIJE GRUBIH POGREŠAKA

### 4.1. Dixonova metoda detekcije grubih pogrešaka

Eliminacija sumnjivih opažanja trebala bi se temeljiti isključivo na objektivnim kriterijima, a ne na subjektivnim ili intuitivnim osnovama. Ovo postignuće može se ostvariti primjenom statistički valjanih testova za "detekciju odstupanja". [18]

Dixon je razvio različite jednadžbe za identifikaciju pravih odstupanja. Najčešće korištena od njih naziva se  $r_{10}$  ili jednostavno Q test, koja se primjenjuje kako bi se testiralo je li pojedinačna vrijednost gruba pogreška u uzorku veličine između 3 i 7. Dean i Dixon su u kasnijem radu predložili nekoliko drugih formula, ali one se rijetko koriste. [19]

Dixonov Q-test omogućuje ispitivanje legitimnosti odbacivanja jednog (i samo jednog) opažanja iz male serije rezultata opažanja. Ovaj test se temelji na statističkoj distribuciji "omjera područja" poredanih uzoraka podataka izvučenih iz iste normalne populacije. Stoga se pretpostavlja normalna (Gaussova) distribucija podataka kad god se ovaj test primjenjuje. Ako dođe do otkrivanja i odbacivanja odstupanja, Dixonov Q-test se ne može ponovno primijeniti na preostali skup opažanja. [18]

#### 4.1.1. Primjena Dixonovog Q-testa

Neka se rezultati opažanja odnose kao:  $x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_N$ , gdje je  $x_1$  najmanja vrijednost rezultata opažanja, a  $x_N$  najveća vrijednost.  $N$  je ukupan broj rezultata opažanja. [20] Prema priloženoj Slici 4. možemo primijeniti test na konkretan primjer.

$\alpha$	.30	.20	.10	.05	.02	.01	.005	
$N$								
3	.684	.781	.886	.941	.976	.988	.994	$r_{10}$
4	.471	.560	.679	.765	.846	.889	.926	
5	.373	.451	.557	.642	.729	.780	.821	
6	.318	.386	.482	.560	.644	.698	.740	
7	.281	.344	.434	.507	.586	.637	.680	
8	.318	.385	.479	.554	.631	.683	.725	$r_{11}$
9	.288	.352	.441	.512	.587	.635	.677	
10	.265	.325	.409	.477	.551	.597	.639	
11	.391	.442	.517	.576	.638	.679	.713	$r_{21}$
12	.370	.419	.490	.546	.605	.642	.675	
13	.351	.399	.467	.521	.578	.615	.649	
14	.370	.421	.492	.546	.602	.641	.674	$r_{22}$
15	.353	.402	.472	.525	.579	.616	.647	
16	.338	.386	.454	.507	.559	.595	.624	
17	.325	.373	.438	.490	.542	.577	.605	
18	.314	.361	.424	.475	.527	.561	.589	
19	.304	.350	.412	.462	.514	.547	.575	
20	.295	.340	.401	.450	.502	.535	.562	
21	.287	.331	.391	.440	.491	.524	.551	
22	.280	.323	.382	.430	.481	.514	.541	
23	.274	.316	.374	.421	.472	.505	.532	
24	.268	.310	.367	.413	.464	.497	.524	
25	.262	.304	.360	.406	.457	.489	.516	

Slika 4. Prikaz kritičnih vrijednosti parametra Q[21]

Parametri prikazani na Slici 4. znače redom:

- $r_{10}$  parametar se koristi kada je prisutno  $3 \leq n \leq 7$  rezultata mjerenja i jednak je:

$$r_{10} = \frac{x_2 - x_1}{x_N - x_1} \quad (4)$$

- $r_{11}$  parametar se koristi kada je prisutno  $8 \leq n \leq 10$  rezultata mjerenja i jednak je:

$$r_{11} = \frac{x_2 - x_1}{x_{N-1} - x_1} \quad (5)$$

- $r_{21}$  parametar se koristi kada je prisutno  $11 \leq n \leq 13$  rezultata mjerenja i jednak je:

$$r_{21} = \frac{x_3 - x_1}{x_{N-1} - x_1} \quad (6)$$

- $r_{22}$  parametar se koristi kada je prisutno  $n \geq 14$  rezultata mjerenja i jednak je:

$$r_{22} = \frac{x_3 - x_1}{x_{N-2} - x_1} \quad (7)$$

Dok  $\alpha$  označava razinu pouzdanosti, a kad je  $\alpha=0.05$  razina pouzdanosti iznosi 95% što se u praksi najčešće upotrebljava. [20]

#### 4.1.2. Primjer Q-testa

Pomoću Dixonovog Q-testa ćemo otkloniti grubu pogrešku, ako ona postoji, mjernim rezultatima: 5,85, 7,20, 7,29, 7,51, 7,68.

Pošto imamo 5 rezultata mjerenja, izračunavamo parametar  $r_{10}$  te ga zatim uspoređujemo s kritičnom vrijednosti Q parametra s razinom pouzdanosti od 95%:

$$r_{10} = \frac{x_2 - x_1}{x_N - x_1} = \frac{7,20 - 5,85}{7,68 - 5,85} = 0,738$$

Dobili smo rezultat 0,738 koji je veći od kritične vrijednosti parametra  $Q=0,642$  za  $N=5$  i  $\alpha=0,05$  što znači da je mjerna vrijednost 5,85 gruba pogreška i kao takvu ju odbacujemo i ne koristimo u svojim daljnim proračunima.

## 4.2. Tri $\sigma$ -test

Jedan od često korištenih pristupa za identifikaciju grubih pogrešaka temelji se na konceptu Tri  $\sigma$  granica. Ova metoda se oslanja na statistički pojam standardnog odstupanja, koji pokazuje koliko se podaci razlikuju od prosječne vrijednosti. Tri  $\sigma$  granice definirane su kao interval vrijednosti unutar kojeg se očekuje da će se nalaziti 99,7% podataka ako su podaci distribuirani prema normalnoj razdiobi. Vrijednosti koje se nalaze izvan ovog intervala smatraju se grubim pogreškama. [22]

### 4.2.1. Primjena Tri $\sigma$ -testa

Na primjer, pretpostavimo da imamo set uzoraka ispitivanja i želimo koristiti Tri  $\sigma$  granice kako bismo identificirali potencijalne grube pogreške. Sljedimo sljedeće korake:

1. Prvo ćemo izračunati aritmetičku sredinu  $\bar{x}$  zbrojem svih  $N_i$  rezultata i dijeljenjem s ukupnim brojem rezultata  $N$ , što nam predstavlja očekivanje  $\mu$  prema Slici 5.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N} \quad (8)$$

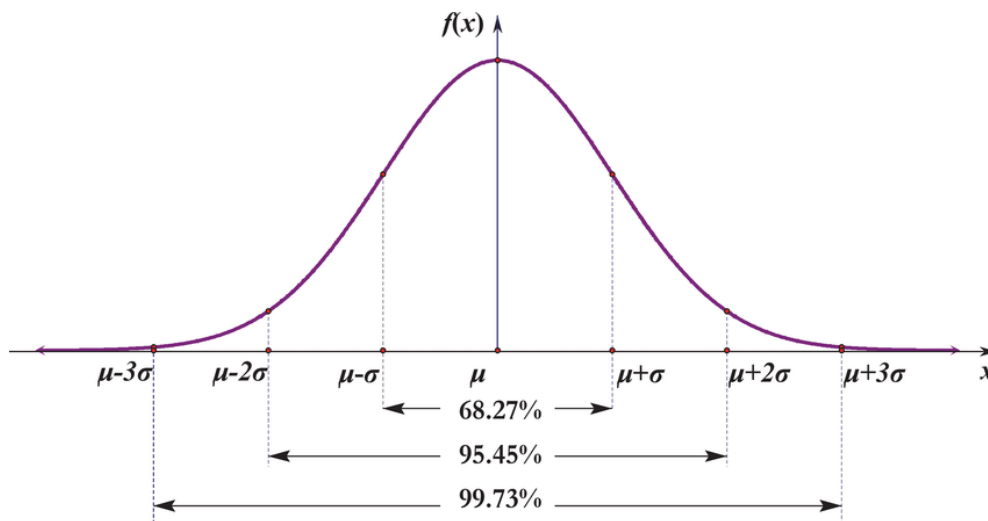
Naime,  $3\sigma$ -test koristimo kad imamo beskonačno velik broj podataka, a u našem slučaju, imat ćemo konačan broj podataka i stoga će aritmetička sredina predstavljati očekivanje, a procijenjeno standardno odstupanje  $s$  će predstavljati standardno odstupanje  $\sigma$ . Dakle  $3\sigma$ -test možemo nazvati  $3s$ -test, naravno u slučaju s određenim brojem podataka.

2. Zatim ćemo izračunati varijancu prema sljedećoj formuli: [23]

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N - 1} \quad (9)$$

3. Konačno, izračunat ćemo gornje i donje granice množeći procijenjenu standardnu devijaciju  $s$  tri (jer koristimo  $3s$  granice) te dodajući ili oduzimajući rezultat od

aritmetičke sredine. Procijenjena standardna devijacija,  $s$  je korijen od varijance. Rezultati izvan ovog raspona mogu se smatrati grubim pogreškama.



Slika 5. Prikaz 3 $\sigma$ -testa [22]

#### 4.2.2. Primjer 3s-testa

Pomoću primjene 3s-testa ćemo otkloniti grubu pogrešku, ako ona postoji, mjernim rezultatima: 5,85, 7,20, 7,29, 7,51, 7,68:

Prema prethodno navedenim koracima:

1. Izračun aritmetičke sredine prema formuli:  $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N} = \frac{5,85+7,20+7,29+7,51+7,68}{5} = 7,106$
2. Izračun varijance prema formuli navedenoj u 2. koraku prema kojoj se dobije vrijednost  $s^2 = 0,52823$
3. I konačno računamo procijenjenu standardnu devijaciju prema formuli:  $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{0,52823^2} = 0,72679$ . Sada slijedi određivanje donje i gornje granice na način da pomnožimo procijenjenu standardnu devijaciju  $s$  3 i dobivenu vrijednost zbrojimo, odnosno oduzmemo od vrijednosti aritmetičke sredine za dobivanje gornje i donje granice.

$$\text{Donja granica 3s-testa: } \bar{x} - 3 \times s = 7,106 - 2,18037 = 4,926$$

$$\text{Gornja granica 3s-testa: } \bar{x} + 3 \times s = 7,106 + 2,18037 = 9,286$$

Zaključak: Primjenom 3s-testa na setu mjernih podataka, utvrđeno je da nijedan mjerni rezultat ne odstupa od prethodno definiranih granica i stoga nema grube pogreške u našim mjernim rezultatima. S obzirom da je test proveden na vrlo malom uzorku od  $N=5$ , 3s-test nije pouzdan i preporuča se primjena Dixon-ovog testa.

## 5. METODA DETEKCIJE SUSTAVNE POGREŠKE

### 5.1. Metoda najmanjih kvadrata

Nezavisno jedan od drugog, ovu metodu su razvili Adrien-Marie Legendre i Carl Friedrich Gauss. To je metoda za analizu eksperimentalnih podataka s primjenom numeričke matematike i statističkih tehnika koja omogućava dobivanje funkcionalne povezanosti između mjerenih veličina. Postupak uključuje prilagodbu funkcije i određivanje parametara te funkcije tako da se minimizira kvadratna greška između izmjerenih i izračunatih vrijednosti. Ova prilagodba omogućava stvaranje krivulje koja se optimalno prilagođava dostupnim podacima. Dobivena funkcionalna veza omogućuje predviđanje vrijednosti ne samo unutar područja obuhvaćenog mjerenjem, već i izvan njega. [25]

Pretpostavimo da imamo dvije veličine  $x$  i  $y$  koje zavise jedna o drugoj što znači da očitana vrijednost veličine  $x$  u potpunosti određuje vrijednost veličine  $y$  po nekoj od funkcija  $f(x)$  koje su prikazane u nastavku:

- linearna zavisnost:  $y = ax + b$ , grafički je prikaz ove zavisnosti je pravac
- kvadratna zavisnost:  $y = ax^2 + bx + c$ , grafički prikaz je parabola
- kubna zavisnost:  $y = ax^3 + bx^2 + dx + c$
- recipročna zavisnost:  $y = a/x$ , grafički prikaz je hiperbola
- eksponencijalna zavisnost:  $y = ae^{bx}$
- potencijalna zavisnost:  $y = ab^x$  i mnoge druge

Oznake  $a$  i  $b$  nazivamo parametrima funkcije. [26]

#### 5.1.1. Postupak određivanja parametara $a$ i $b$ uporabom metode najmanjih kvadrata

$I$ -to odstupanje  $D_i$  je razlika između izmjerene vrijednosti  $y_i$  i teoretske vrijednosti  $f(x, a, b)$ , tj. vrijednosti funkcije  $f(x, a, b)$  za  $x = x_i$  što se opisuje izrazom:

$$D_i = y_i - f(x_i, a, b) \quad (10)$$

Shodno metodi najmanjih kvadrata, suma kvadrata odstupanja treba biti minimalna ( $D_1^2 + D_2^2 + \dots + D_n^2$ ). Budući da taj izraz ovisi o nepoznatim parametrima  $a$  i  $b$  (također ovisi i o

vrijednostima  $x_i$  i  $y_i$ , ali te vrijednosti su nam poznate), možemo zapisati funkciju cilja  $F(a, b)$ :

$$F(a, b) = \sum_{i=1}^n [y_i - f(x_i, a, b)]^2 \quad (11)$$

Potrebno je odrediti parametre u kojima funkcija cilja  $F$  postiže minimum. Uvjeti lokalnog ekstrema za funkciju  $F$  su:

$$\frac{\partial F}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial b} = 0 \quad (12)$$

Nakon deriviranja funkcije  $F$  prema ovim uvjetima dobiju se dvije jednadžbe s dvije nepoznanice  $a$  i  $b$ :

$$\sum_{i=1}^n [y_i - f(x_i, a, b)] \times \frac{\partial f(x_i, a, b)}{\partial a} = 0 \quad (13)$$

$$\sum_{i=1}^n [y_i - f(x_i, a, b)] \times \frac{\partial f(x_i, a, b)}{\partial b} = 0 \quad (14)$$

Iz ovog sustava određujemo parametre  $a$  i  $b$  ovisno koju vezu želimo postići. U nastavku je opisano određivanje linearne veze, odnosno regresijskog pravca. Jednadžba pravca opisana:

$$f(x, a, b) = ax + b \quad (15)$$

Stoga su parcijalne derivacije po  $a$  i  $b$  za ovaj slučaj jednake:

$$\frac{\partial f(x_i, a, b)}{\partial a} = x_i \quad (16)$$

$$\frac{\partial f(x_i, a, b)}{\partial b} = 1 \quad (17)$$

Ako ove izraze uvrstimo u jednadžbe (13) i (14) dobivamo izraze za izračun parametara  $a$  i  $b$  za slučaj pravca:

$$a = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \quad (18)$$

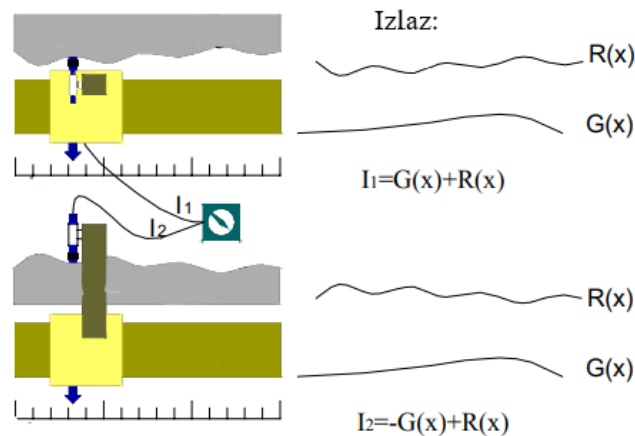
$$b = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \quad (19)$$

Dobiveni pravac zove se regresijski pravac i opisuje izrazom  $y=ax + b$ . [26]



## 5.2. Tehnike preokreta

Tijekom kretanja prihvata duž vodilica, primjećuje se neželjeno pomicanje u smjeru koji nije preferiran (okomito na smjer vođenja). Ovaj fenomen poznat je kao "pogreška pravocrtnosti". Fokus ove metode jest unaprijediti sustav za mjerenje odstupanja od pravocrtnosti predmeta mjerenja primjenom tehnike preokreta.



Slika 6. Prikaz mjernog sustava Tehnike preokreta[24]

Slika 6. prikazuje mjerni sustav za mjerenje pogreške pravocrtnosti mjernog predmeta pomoću induktivnog ticala i precizne vodilice, čiji je izlazni indikator  $I_1$ . Na istoj slici prikazan je ravni predmet okrenut za 180°. Na ticalu je prikazan izlaz  $I_2$ . Pretpostavimo da je pravocrtnost klizne staze vodilice označena s  $G(x)$ , a odstupanje mjernog predmeta označeno s  $R(x)$ , indikatorski izlazi  $I_1$  i  $I_2$  za ove dvije pozicije, dani su u jednadžbama:

$$I_1(x) = G(x) + R(x) \quad (20)$$

$$I_2 = -G(x) + R(x) \quad (21)$$

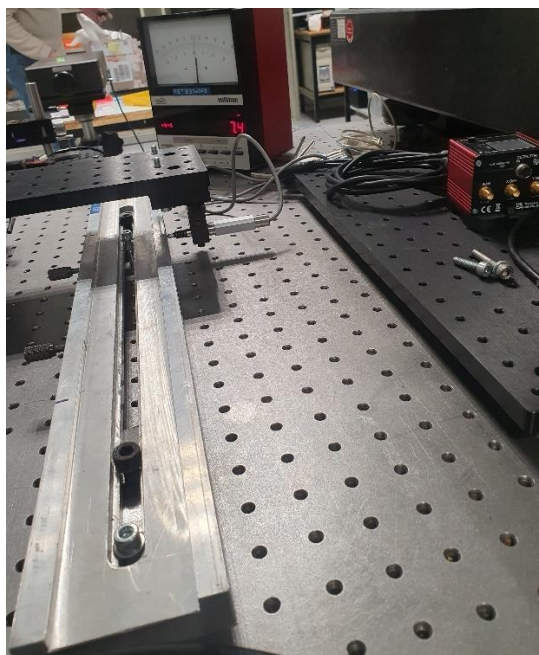
Stoga su izrazi za pravocrtnost klizne staze vodilice i za pogrešku ravnosti mjernog predmeta opisani u sljedećim jednadžbama: [24]

$$G(x) = \frac{I_1(x) - I_2(x)}{2} \quad (22)$$

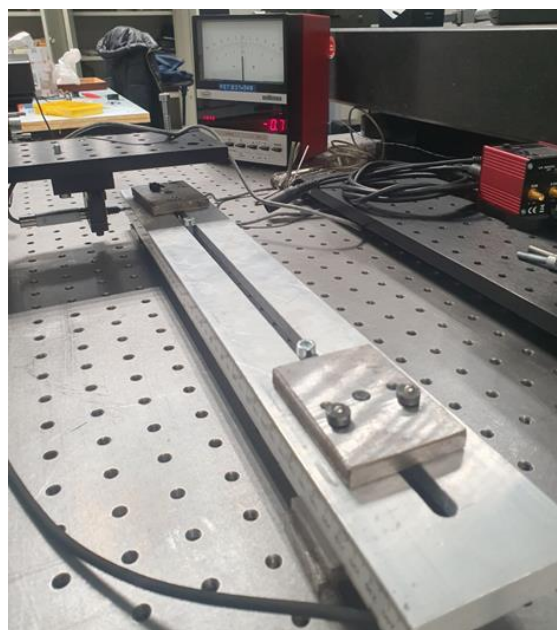
$$R(x) = \frac{I_1(x) + I_2(x)}{2} \quad (23)$$

### 5.3. Eksperimentalni dio Tehnike preokreta na primjeru mjerenja pravocrtnosti

Nakon namještanja mjernog sustava za Tehniku preokreta u laboratoriju, provelo se 4 mjerenja na početnom položaju vodilice i mjernog predmeta na kojem se mjeri pravocrtnost, a zatim još 4 mjerenja, ali u položaju u kojem je predmet mjerenja zakrenut za  $180^\circ$ , a samim time mijenja se i položaj ticala što je i prikazano Slikom 7. i Slikom 8. u nastavku:



Slika 7. Mjerni sustav Tehnike preokreta u početnom položaju



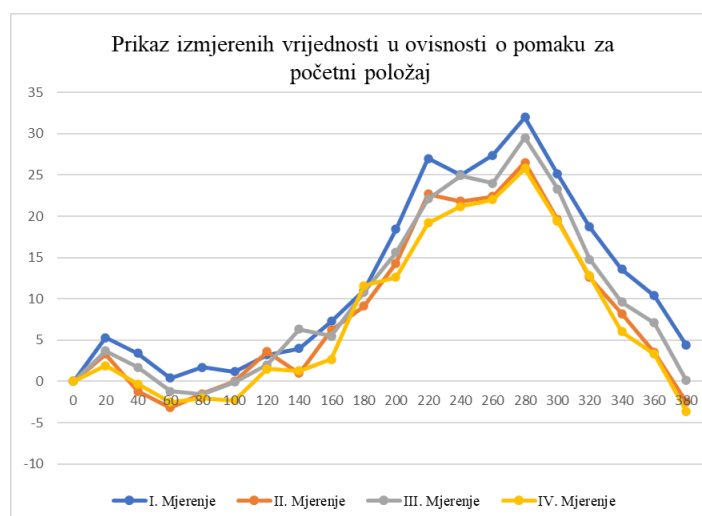
Slika 8. Mjerni sustav Tehnike preokreta u zakrenutom položaju

Mjerni predmet je označen mjernom skalom u milimetrima što se koristilo prilikom mjerenja, odnosno za svaki pomak od 20 mm, zabilježen je mjerni rezultat u  $\mu\text{m}$  u dvadeset različitih točaka.

**Tablica 2 Prikaz mjernih podataka za početni položaj predmeta**

Rezultat broj:	I. Mjerenje, [ $\mu\text{m}$ ]	II. Mjerenje	III. Mjerenje	IV. Mjerenje	Pomak, [mm]	A(I. i II. Mj.)	A(III. i IV. Mj.)	Auk
1.	0	0	0	0	0	0	0	0
2.	5,3	3,3	3,7	1,9	20	4,3	2,8	3,55
3.	3,4	-1,2	1,7	-0,3	40	1,1	0,7	0,9
4.	0,4	-3,2	-1,2	-2,5	60	-1,4	-1,85	-1,625
5.	1,7	-1,5	-1,6	-2	80	0,1	-1,8	-0,85
6.	1,2	0	-0,1	-2,3	100	0,6	-1,2	-0,3
7.	3,2	3,6	2	1,5	120	3,4	1,75	2,575
8.	4	1	6,3	1,3	140	2,5	3,8	3,15
9.	7,3	6,2	5,5	2,7	160	6,75	4,1	5,425
10.	11	9,1	10,8	11,6	180	10,05	11,2	10,625
11.	18,4	14,3	15,6	12,6	200	16,35	14,1	15,225
12.	27	22,7	22,1	19,2	220	24,85	20,65	22,75
13.	25	21,8	24,9	21,2	240	23,4	23,05	23,225
14.	27,4	22,4	24	22	260	24,09	23,1	23,595
15.	32	26,5	29,5	25,8	280	29,25	27,65	28,45
16.	25,1	19,6	23,3	19,4	300	22,35	21,35	21,85
17.	18,7	12,6	14,8	12,8	320	15,65	13,8	14,725
18.	13,6	8,2	9,6	6	340	10,9	7,8	9,35
19.	10,4	3,5	7,1	3,3	360	6,95	5,2	6,075
20.	4,4	-2,5	0,1	-3,6	380	0,95	-1,75	-0,4

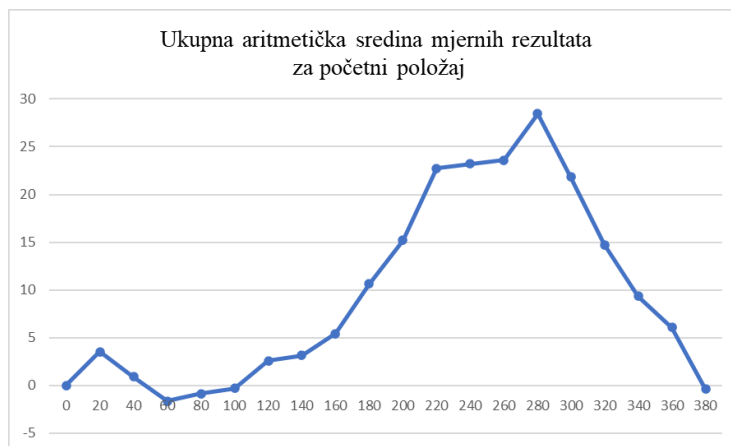
Tablica 2. prikazuje 4 ponovljena mjerenja i njihove rezultate za pomak od 20 mm, također prikazuje i aritmetičku sredinu za prva dva mjerenja, aritmetičku sredinu za druga dva mjerenja i ukupnu aritmetičku sredinu prikazanu u zadnjem stupcu. Na temelju izmjerenih vrijednosti mjerenja priložena je Slika 9. sa grafom koji pokazuje izmjerene vrijednosti sva 4 ponovljena mjerenja i to za početni položaj mjernog predmeta:



**Slika 9. Graf ovisnosti rezultata mjerenja o pomaku za početni položaj**

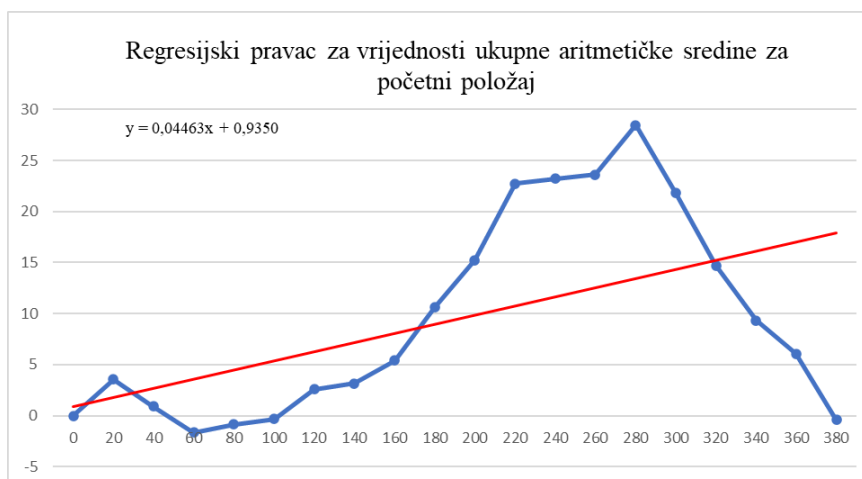
Grafom se utvrđuje gotovo podjednako rasipanje za sva 4 mjerenja, naravno uz mala odstupanja. Konačni rezultat prikazan je kao aritmetička sredina (ona koja je prikazana u posljednjem stupcu ) svih mjerenja.

Slika 10. pokazuje aritmetičku sredinu u ovisnosti o pomaku od 20 mm:



**Slika 10. Aritmetička sredina mjernih podataka za početni položaj**

Nakon što je utvrđen trend rasipanja mjernih rezultata, na podacima aritmetičke sredine prikazan je regresijski pravac koji najbolje opisuje odnose tih točaka, odnosno suma kvadrata odstupanja za te točke je najmanja u odnosu na dobiveni regresijski pravac koji za ovaj slučaj opisan izrazom  $y=0,04463x + 0,9350$ . Na Slici 11. prikazan je regresijski pravac za aritmetičku sredinu mjernih rezultata u ovisnosti o pomaku:



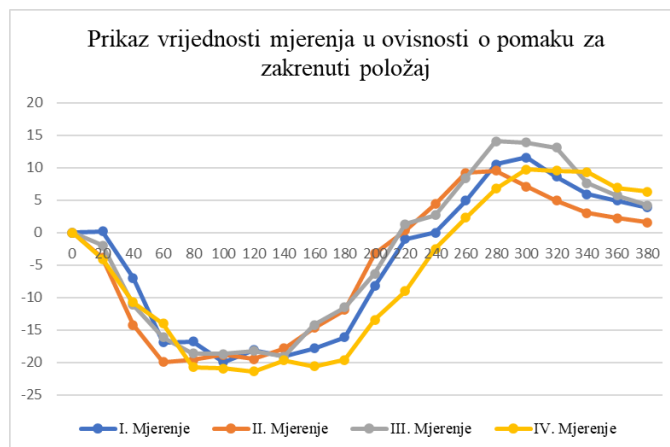
**Slika 11. Regresijski pravac za početni položaj**

Sada slijedi ponovljeni postupak mjerenja za zakrenuti položaj predmeta za 180°. Kao što je prikazano Tablicom 2. u zakrenutom položaju mjerni predmet, a samim time i ticalo mijenjaju položaj.

Tablica 3. Prikaz mjernih podataka za zakrenuti položaj

Rezultat broj:	I. Mjerenje, [ $\mu\text{m}$ ]	II. Mjerenje	III. Mjerenje	IV. Mjerenje	Pomak, [mm]	A(I. i II. Mj.)	A(III. i IV. Mj.)	Auk
1.	0	0	0	0	0	0	0	0
2.	0,2	-3,9	-2	-4,1	20	-1,85	-3,05	-2,45
3.	-7	-14,2	-11,1	-10,7	40	-10,6	-10,9	-10,75
4.	-16,9	-19,9	-16,1	-14	60	-18,4	-15,05	-16,725
5.	-16,8	-19,6	-18,6	-20,7	80	-18,2	-19,65	-18,925
6.	-19,9	-18,8	-18,7	-20,9	100	-19,35	-19,8	-19,575
7.	-18,1	-19,5	-18,2	-21,4	120	-18,8	-19,8	-19,3
8.	-19,1	-17,8	-19,1	-19,7	140	-18,45	-19,4	-18,925
9.	-17,8	-14,7	-14,2	-20,6	160	-16,25	-17,4	-16,825
10.	-16,1	-11,9	-11,5	-19,6	180	-14	-15,55	-14,775
11.	-8,2	-3,2	-6,3	-13,4	200	-5,7	-9,85	-7,775
12.	-1	0,3	1,3	-9	220	-0,35	-3,85	-2,1
13.	0	4,4	2,7	-2,5	240	2,2	0,1	1,15
14.	4,9	9,2	8,4	2,3	260	7,05	5,35	6,2
15.	10,5	9,5	14,1	6,8	280	10	10,45	10,225
16.	11,6	7,1	13,9	9,7	300	9,35	11,8	10,575
17.	8,6	4,9	13,1	9,5	320	6,75	11,3	9,025
18.	5,9	3	7,6	9,3	340	4,45	8,45	6,45
19.	4,9	2,2	5,7	6,9	360	3,55	6,3	4,925
20.	3,9	1,6	4,2	6,3	380	2,75	5,25	4

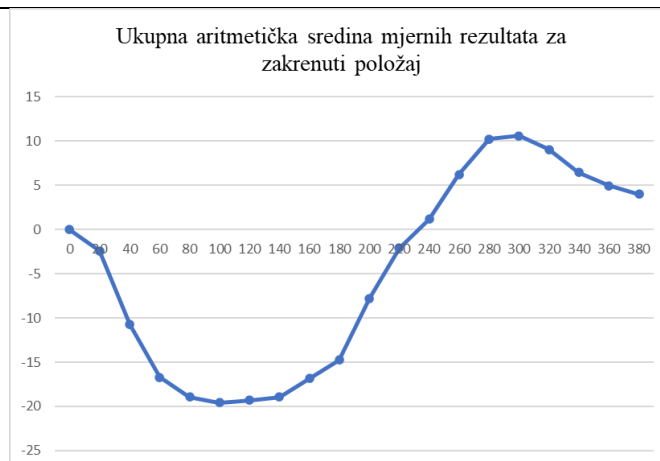
Tablica 3. prikazuje 4 ponovljena mjerenja i njihove rezultate za pomak od 20 mm, također prikazuje i aritmetičku sredinu za prva dva mjerenja, aritmetičku sredinu za druga dva mjerenja i ukupnu aritmetičku sredinu prikazanu u zadnjem stupcu. Na temelju izmjerenih vrijednosti mjerenja priložena je Slika 12. sa grafom koji prikazuje izmjerene vrijednosti sva 4 ponovljena mjerenja i to za zakrenuti položaj mjernog predmeta:



Slika 12. Graf ovisnosti rezultata mjerenja o pomaku za zakrenuti položaj

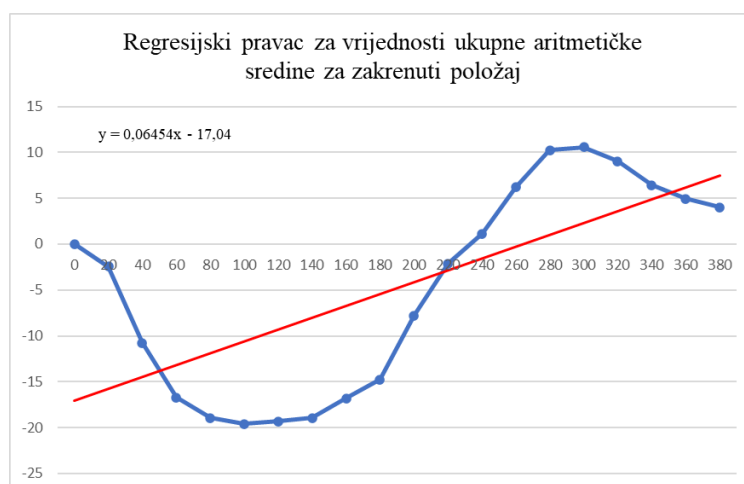
Grafom je prikazano gotovo podjednako rasipanje za sva 4 mjerenja.

Slika 13. pokazuje aritmetičku sredinu ponovljenih mjerenja:



**Slika 13. Aritmetička sredina mjernih podataka za zakrenuti položaj**

Nakon što je utvrđen trend rasipanja mjernih rezultata, prikazan je regresijski pravac koji najbolje opisuje utvrđena odstupanja, odnosno suma kvadrata odstupanja za te točke je najmanja u odnosu na dobiveni regresijski pravac koji za ovaj slučaj opisan izrazom  $y = 0,06454x - 17,04$ . Na Slici 14. prikazan je regresijski pravac aritmetičku sredinu mjernih rezultata u ovisnosti o pomaku.



**Slika 14. Regresijski pravac za za zakrenuti položaj**

### 5.3.1. Detekcija sustavne pogreške na primjeru pravocrtnosti

Kako bi se provela tehnika preokreta, za početni i zakrenuti položaj mjernog predmeta potrebno je izračunati odstupanje za svih 20 točaka aritmetičke sredine od regresijskog pravca. Dobivenih 20 rezultata predstavljaju odstupanja od pravocrtnosti mjernog predmeta, a ta odstupanja uvrštavamo u izraze za ravnost klizne staze vodilice i za pogrešku ravnosti mjernog predmeta odnosno u  $G(x)$  i  $R(x)$ .

**Tablica 4. Prikaz odstupanja od pravocrtnosti za 20 točaka mjerenja, početni položaj predmeta**

Rezultat broj:	Pomak,[mm]	y pravca	Auk	y-Auk
1.	0	0,935	0	0,935
2.	20	1,8276	3,55	-1,7224
3.	40	2,7202	0,9	1,8202
4.	60	3,6128	-1,625	5,2378
5.	80	4,5054	-0,85	5,3554
6.	100	5,398	-0,3	5,698
7.	120	6,2906	2,575	3,7156
8.	140	7,1832	3,15	4,0332
9.	160	8,0758	5,425	2,6508
10.	180	8,9684	10,625	-1,6566
11.	200	9,861	15,225	-5,361
12.	220	10,7536	22,75	-11,9964
13.	240	11,6462	23,225	-11,5788
14.	260	12,5388	23,595	-11,0562
15.	280	13,4314	28,45	-15,0186
16.	300	14,324	21,85	-7,526
17.	320	15,2166	14,725	0,4916
18.	340	16,1092	9,35	6,7592
19.	360	17,0018	6,075	10,9268
20.	380	17,8944	-0,4	18,2944

Prethodno prikazana Tablica 4. pokazuje vrijednosti  $y$  regresijskog pravca,  $y = 0,04463x + 0,9350$  za svaku točku pomaka i vrijednosti  $\bar{y}$  aritmetičke sredine za svih 20 izmjerenih točaka po pomaku od 20 mm. Također i vrijednosti odstupanja od pravocrtnosti, [ $\mu\text{m}$ ] koja su izračunata prema sljedećem izrazu:

$$y_i - \bar{y}_i \quad (24)$$

gdje:  $y_i$  označava  $i$ -te vrijednosti jednadžbe regresijskog pravca za sve točke pomaka i to za početni položaj predmeta.

$\bar{y}_i$  označava  $i$ -te vrijednosti ukupne aritmetičke sredine mjernih podataka za početni položaj predmeta.

Identičan postupak se ponavlja za zakrenuti položaj predmeta:

**Tablica 5. Prikaz odstupanja od pravocrtnosti za 20 točaka mjerenja, zakrenuti položaj predmeta**

Rezultat broj:	Pomak, [mm]	y pravca	Auk	y-Auk
1.	0	-17,04	0	-17,04
2.	20	-15,7492	-2,45	-13,2992
3.	40	-14,4584	-10,75	-3,7084
4.	60	-13,1676	-16,725	3,5574
5.	80	-11,8768	-18,925	7,0482
6.	100	-10,586	-19,575	8,989
7.	120	-9,2952	-19,3	10,0048
8.	140	-8,0044	-18,925	10,9206
9.	160	-6,7136	-16,825	10,1114
10.	180	-5,4228	-14,775	9,3522
11.	200	-4,132	-7,775	3,643
12.	220	-2,8412	-2,1	-0,7412
13.	240	-1,5504	1,15	-2,7004
14.	260	-0,2596	6,2	-6,4596
15.	280	1,0312	10,225	-9,1938
16.	300	2,322	10,575	-8,253
17.	320	3,6128	9,025	-5,4122
18.	340	4,9036	6,45	-1,5464
19.	360	6,1944	4,925	1,2694
20.	380	7,4852	4	3,4852

Za Tablicu 5. vrijedi sve prethodno navedeno za Tablicu 4. samo što se u ovom slučaju radi o jednadžbi regresijskog pravca za zakrenuti položaj odnosno  $y = 0,06454x - 17,04$ .

U konačnici možemo izračunati pravocrtnost klizne staze vodilice i pogrešku pravocrtnosti mjernog predmeta odnosno  $G(x)$  i  $R(x)$  prema sljedećim izrazima:

$$G(x) = \frac{(y_i - \bar{y}_i) - (y_j - \bar{y}_j)}{2} \quad (25)$$

$$R(x) = \frac{(y_i - \bar{y}_i) + (y_j - \bar{y}_j)}{2} \quad (26)$$

Gdje se indeks  $i$  odnosi na početni položaj, a indeks  $j$  na zakrenuti položaj.



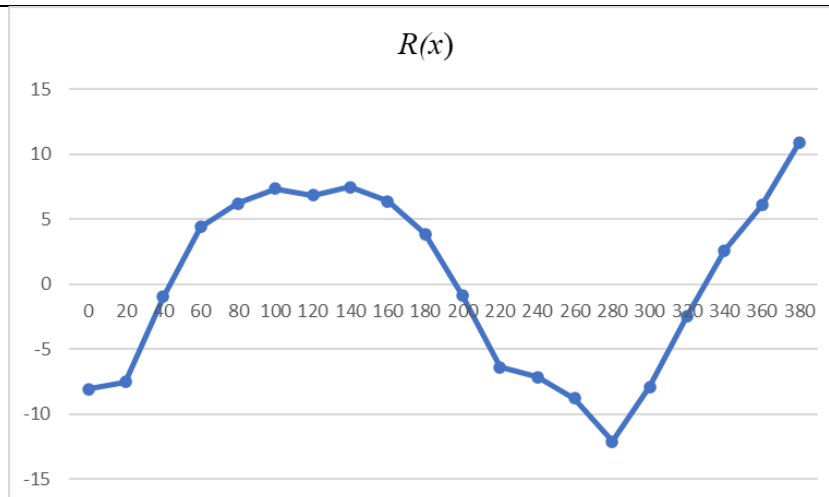
Tablica 6. Prikaz vrijednosti  $G(x)$  i  $R(x)$ 

Rezultat broj:	Pomak, [mm]	$y$ -Auk, početni položaj	$y$ -Auk, zakrenuti položaj	$G(x)$	$R(x)$
1.	0	0,935	-17,04	8,9875	-8,0525
2.	20	-1,7224	-13,2992	5,7884	-7,5108
3.	40	1,8202	-3,7084	2,7643	-0,9441
4.	60	5,2378	3,5574	0,8402	4,3976
5.	80	5,3554	7,0482	-0,8464	6,2018
6.	100	5,698	8,989	-1,6455	7,3435
7.	120	3,7156	10,0048	-3,1446	6,8602
8.	140	4,0332	10,9206	-3,4437	7,4769
9.	160	2,6508	10,1114	-3,7303	6,3811
10.	180	-1,6566	9,3522	-5,5044	3,8478
11.	200	-5,361	3,643	-4,502	-0,859
12.	220	-11,9964	-0,7412	-5,6276	-6,3688
13.	240	-11,5788	-2,7004	-4,4392	-7,1396
14.	260	-11,0562	-6,4596	-2,2983	-8,7579
15.	280	-15,0186	-9,1938	-2,9124	-12,1062
16.	300	-7,526	-8,253	0,3635	-7,8895
17.	320	0,4916	-5,4122	2,9519	-2,4603
18.	340	6,7592	-1,5464	4,1528	2,6064
19.	360	10,9268	1,2694	4,8287	6,0981
20.	380	18,2944	3,4852	7,4046	10,8898

Tablica 6. pokazuje vrijednosti  $G(x)$  i  $R(x)$  za svih 20 točaka mjerenja. Vrijednosti  $G(x)$  predstavljaju odstupanje od ravnosti vodilice, a vrijednosti  $R(x)$  predstavljaju odstupanja od pravocrtosti mjernog predmeta po pomaku od 20 mm. Grafički to možemo vidjeti na Slikama 15. i 16.



Slika 15. Odstupanja od pravocrtnosti vodilice



Slika 16. Odstupanja od pravocrtnosti mjernog predmeta

### 5.3.1.1. Zaključak

Provodeći ovaj eksperiment, mogu se detektirati dvije sustavne pogreške:

- Sustavna linearna pogreška uslijed postavljanja mjernog predmeta koja se eliminirala metodom najmanjih kvadrata. Za početni položaj ona iznosi  $a=0,04463 \mu\text{m}$  ( a-parametar regresijskog pravca ), a za zakrenuti položaj iznosi  $a=0,06454 \mu\text{m}$ . Iznos maksimalnog odstupanja od pravocrtnosti za početni položaj mjernog predmeta, kad se ne bi uzimala u obzir pogreška vodilice, se dobiva oduzimanjem vrijednosti maksimalnog i minimalnog odstupanja sa Tablice 4., odnosno  $18,294 - (-15,019) = 33,313 \mu\text{m}$ . A za zakrenuti položaj se izračunava na isti način iz Tablice 5., odnosno  $10,921 - (-13,299) = 24,22 \mu\text{m}$ .
- Sustavna pogreška zbog vođenja ( baze mjerenja ) koja se eliminirala tehnikom preokreta. Iznos maksimalnog odstupanja od pravocrtnosti vodilice se dobiva oduzimanjem vrijednosti maksimalnog odstupanja i minimalnog odstupanja sa Tablice 6., odnosno  $8,987 - (-5,627) = 14,615 \mu\text{m}$ . Iznos maksimalnog odstupanja od pravocrtnosti mjernog predmeta se dobiva oduzimanjem vrijednosti maksimalnog odstupanja i minimalnog odstupanja sa Tablice 6., odnosno  $10,8898 - (-12,1062) = 22,996 \mu\text{m}$ .

Slika 17. i Slika 18. prikazuju odstupanja od pravocrtnosti mjernog predmeta za početni i zakrenuti položaj:



Slika 17. Odstupanje od pravocrtnosti mjernog predmeta, početni položaj



Slika 18. Odstupanje od pravocrtnosti mjernog predmeta, zakrenuti položaj

## 6. SMANJENJE SLUČAJNE POGREŠKE METODOM USREDNJAVANJA

### 6.1. Općenito o metodi usrednjavanja

Kada se uzimaju različita mjerenja, greška se smanjuje jer se minimizira utjecaj nasumičnih utjecaja i izdvojenih vrijednosti na konačni rezultat.

Prilikom mjerenja, uvijek postoji određena razina nesavršenost. To može biti posljedica različitih čimbenika, kao što su preciznost mjernog instrumenta, sposobnost osobe koja izvršava mjerenje da precizno očita instrument ili slučajne varijacije u veličini koja se mjeri. Prikupljanjem više mjerenja i njihovim usrednjavanjem moguće je smanjiti utjecaj tih čimbenika na konačni rezultat.

Kada se usrednjavaju višestruka mjerenja, slučajne pogreške (one koje su jednako vjerojatno prevelike ili premale) obično se poništavaju. Primjerice, ako je jedno mjerenje malo previsoko, a drugo malo prenisko, prosjek će biti bliži stvarnoj vrijednosti.

Važno je napomenuti da usrednjavanje mjerenja može smanjiti samo slučajne pogreške, a ne sustavne pogreške (one koje konzistentno iskrivljuju rezultate u jednom smjeru). Ako mjerni instrument nije točan (nije pravilno umjeren), uzimanje više mjerenja neće pomoći. Potrebno je umjeriti instrument i/ili koristiti drugu metodu za smanjenje sustavnih pogrešaka.

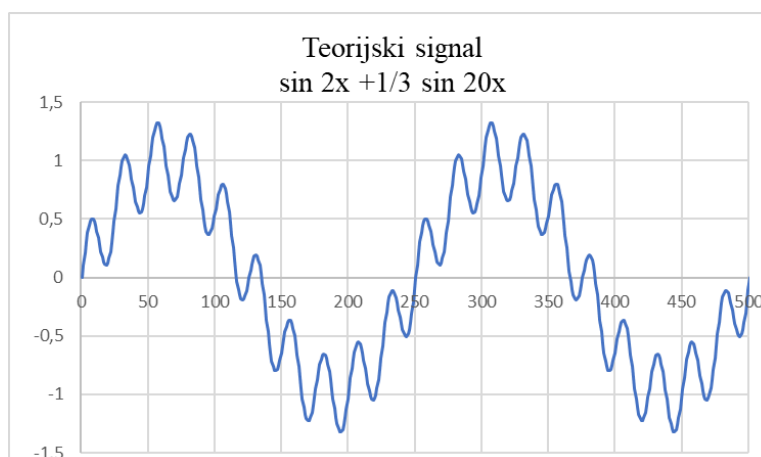
U konačnici, usrednjavanje višestrukih mjerenja jednostavan je i učinkovit način smanjenja utjecaja slučajnih pogrešaka i povećanja točnosti rezultata. [27]

### 6.2. Primjena metode usrednjavanja na simuliranim podacima

Metoda smanjenja slučajne mjerne pogreške, poznata kao metoda usrednjavanja ili metoda izračuna aritmetičkih sredina, primijenjena je na simuliranim podacima koristeći program Excel. Prvo su određene vrijednosti na osi  $x$  dijeljenjem perioda sinusne funkcije ( $2\pi$ ) s 500. Prva točka na osi  $x$  počinje s vrijednošću 0, dok se svaka sljedeća povećava za iznos  $2\pi/500$ . Nakon što su određene vrijednosti točaka na osi  $x$ , izračunate su vrijednosti na osi  $y$  za teorijsku funkciju koja opisuje predmet mjerenja, definirana je:

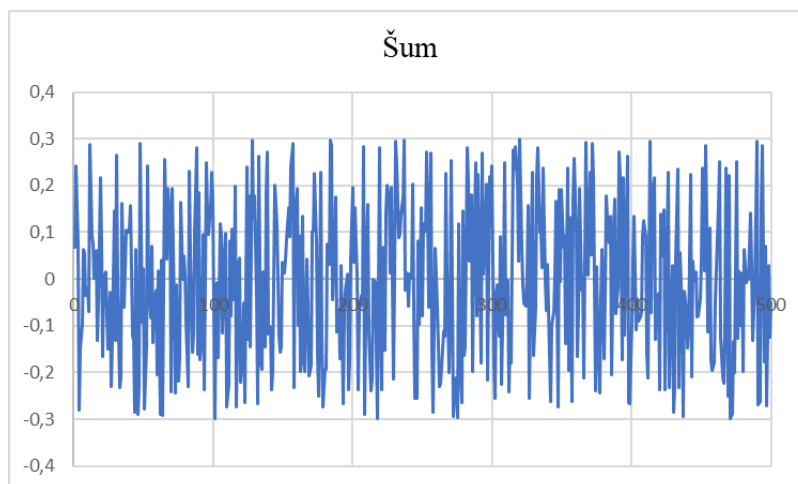
$$y = \sin(2x) + \frac{1}{3} \sin(20x) \quad (27)$$

Određeno je svih 500 vrijednosti  $y$  za teorijsku funkciju. U stvarnosti to može biti primjer mjerenja etalona za profil (multiwave etalon). Slika 19. prikazuje simulirani profil mjerenja.



**Slika 19. Prikaz teorijske funkcije koja predstavlja predmet mjerenja**

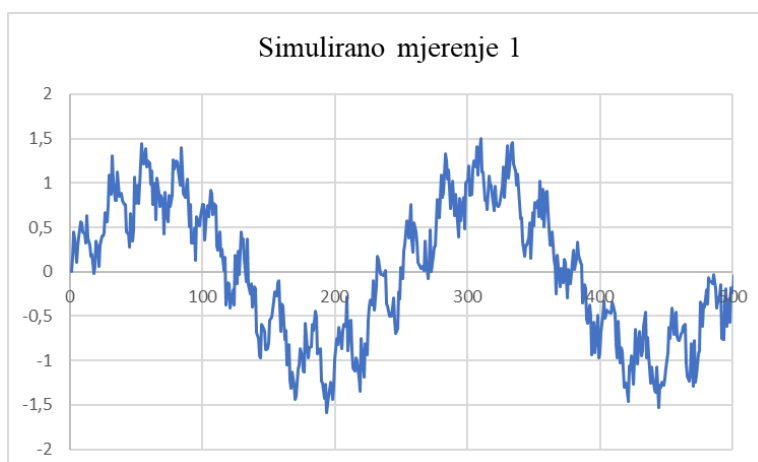
Kada je definiran simulirani predmet mjerenja, Slika 19., potrebno je profilu pridodati šum, koji u našem slučaju predstavljaju slučajnu pogrešku. Provedeno je 10 simuliranih mjerenja što znači da je potrebno odrediti svih 10 skupova vrijednosti šuma za svaku od 500 točaka. Vrijednosti se određuju tako da su nasumične jedna u odnosu na drugu što je zapravo karakteristično kod slučajne pogreške, odnosno ona se mijenja na nama nepredvidiv način. Prethodno navedeno simulirano je pomoću funkcije  $\text{RAND}() * 0,6 - 0,3$  za jednoliko distribuiranu funkciju (pravokutna razdioba) koja poprima vrijednosti  $y$  u intervalu od -0,3 do 0,3. Funkcija šuma odnosno slučajne pogreške prikazana je Slikom 20.



**Slika 20. Šum koji predstavlja slučajnu pogrešku**

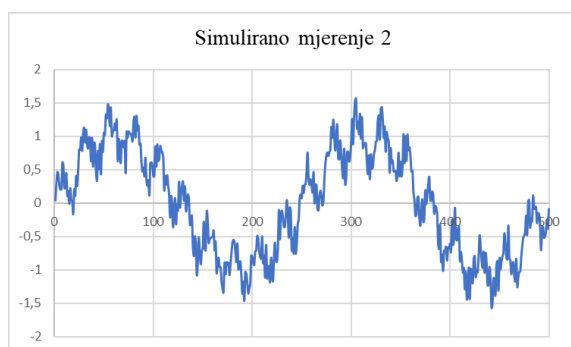
Kada je definirana teorijska funkcija koja predstavlja predmet mjerenja i šum koji predstavlja slučajnu pogrešku, potrebno je izvršiti 10 simuliranih mjerenja na temelju kojih će se provesti metoda usrednjavanja odnosno određivanja aritmetičkih sredina. Simulirano mjerenje se

odrađuje tako da se zbroji teorijska funkcija i funkcija šuma. Dakle, prvo simulirano mjerenje je određeno zbrajanjem vrijednosti teorijske funkcije i vrijednosti funkcije šuma za prvi skup podataka i dobiven je izgled funkcije prikazan na Slici 24.

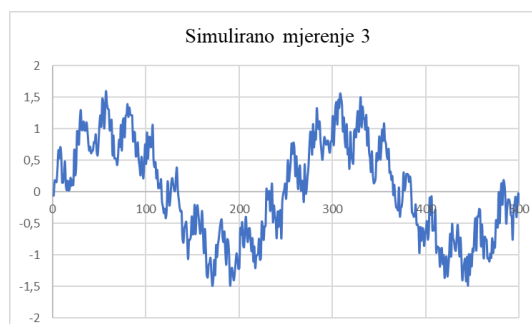


**Slika 21. Simulirano mjerenje 1**

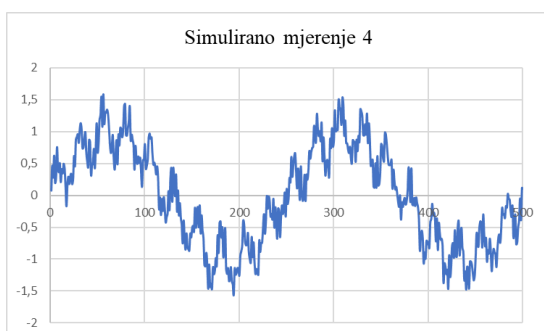
Sva naredna simulirana mjerenja su određena zbrajanjem teorijske funkcije i vrijednosti ostalih skupova podataka šuma, vrijednosti šuma su različiti za svako pojedino simulirano mjerenje. Narednih devet slika prikazuju simulirana mjerenja.



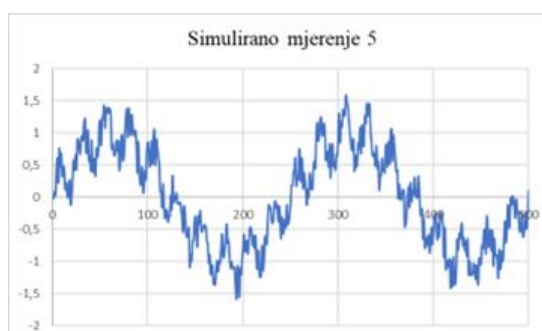
**Slika 22. Simulirano mjerenje 2**



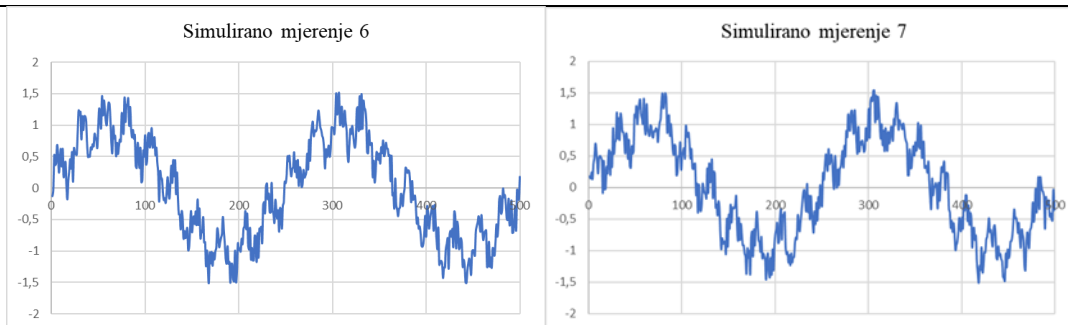
**Slika 23. Simulirano mjerenje 3**



**Slika 24. Simulirano mjerenje 4**

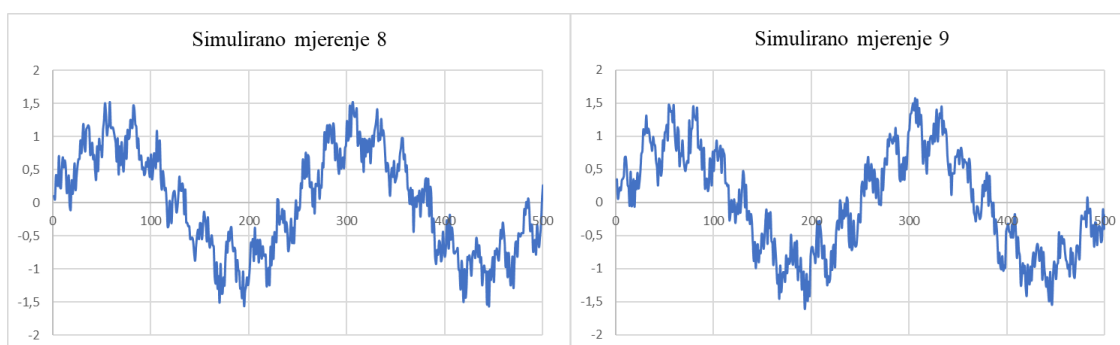


**Slika 25. Simulirano mjerenje 5**



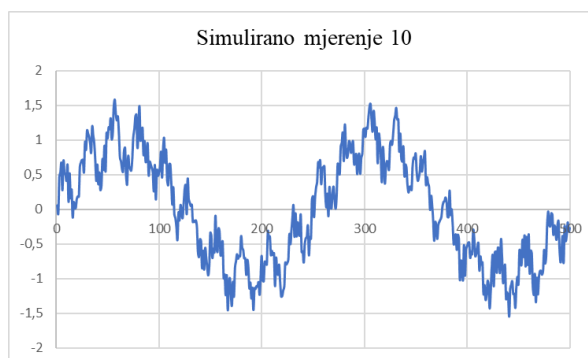
Slika 26. Simulirano mjerenje 6

Slika 27. Simulirano mjerenje 7



Slika 28. Simulirano mjerenje 8

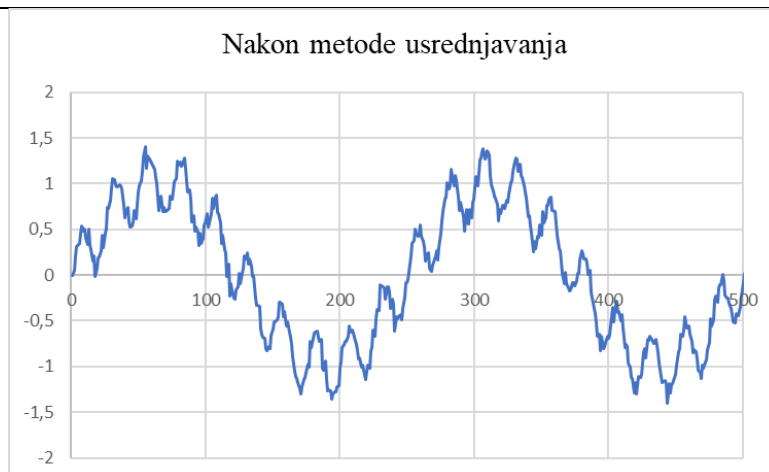
Slika 29. Simulirano mjerenje 9



Slika 30. Simulirano mjerenje 10

Ako usporedimo grafove sa Slika 22., 23., 24., 25., 26., 27., 28., 29., i 30. može se uočiti kako se izgledi funkcija simuliranih mjerenja razlikuju samo u pridodanom šumu, tj. ne može se primijetiti veliko odstupanje jednog grafa u odnosu na drugi.

U cilju provedbe metode usrednjavanja potrebno je izračunati aritmetičku sredinu svih deset simuliranih mjerenja i to u svih 500 točaka kako bi se moglo prikazati vrijednosti mjerenja nakon provedene metode usrednjavanja. Aritmetičke sredine svih simuliranih mjerenja dobivene su korištenjem funkcije AVERAGE().



**Slika 31. Rezultati mjerenja nakon provođenja metode usrednjavanja**

Slika 31. pokazuje rezultate mjerenja nakon provođenja metode usrednjavanja. Ako usporedimo Sliku 31. sa Slikama simuliranih mjerenja, može se jasno uvidjeti razlika u izgledu funkcije. Zaključuje se kako funkcija rezultata mjerenja nakon metode usrednjavanja ima puno manje izražene dijelove koje oblikuje šum što znači da traženjem aritmetičkih sredina za sva simulirana mjerenja daje točnije vrijednosti mjernih rezultata, odnosno vrijednosti koje su bliže vrijednostima naše teorijske funkcije opisane jednadžbom (27). U konačnici mogu se izračunati maksimalna odstupanja za svako mjerenje i usporediti ih sa maksimalnim odstupanjem teorijske funkcije. Shodno tome, može se prikazati tablica sa maksimalnim odstupanjima za svako pojedino mjerenje:

**Tablica 7. Maksimalna odstupanja simuliranih mjerenja**

	I. Mjerenje	II. Mjerenje	III. Mjerenje	IV. Mjerenje	V. Mjerenje	VI. Mjerenje	VII. Mjerenje	VIII. Mjerenje	IX. Mjerenje	X. Mjerenje
Max. Odstupanje	3,0872	3,133	3,086	3,145	3,17	3,022	3,051	3,086	3,162	3,13

Također se odredilo maksimalno odstupanje za podatke metode usrednjavanja koje iznosi 2,806. Uspoređujući vrijednost maksimalnog odstupanja metode usrednjavanja s vrijednostima maksimalnih odstupanja kod simuliranih mjerenja, zaključuje se da je maksimalno odstupanje metode usrednjavanja manje od maksimalnih odstupanja simuliranih mjerenja.

Zaključno, izračunato je maksimalno odstupanje teorijske funkcije i dobivena vrijednost od 2,639. To predstavlja odstupanje mjernih rezultata bez šuma. A ako se usporedi s vrijednosti maksimalnog odstupanja metode usrednjavanja, primjećuje se značajno približavanje izmjerene i teorijske vrijednosti.



## 7. ZAKLJUČAK

U ovom radu obradile su se korekcije mjernih pogrešaka: grube, sustavne i slučajne mjerne pogreške.

Grube pogreške detektiraju se statističkim testovima, Dixonovim Q-testom i 3 $\sigma$  testom. Na istim simuliranim mjernim podacima su se primijenila oba testa, Dixonovim Q-testom se uspostavilo kako je jedna mjerna vrijednost gruba pogreška koja se kao takva eliminira. 3 $\sigma$  testom se utvrdilo kako nijedna mjerna vrijednost ne odstupa od ostatka simuliranih podataka, odnosno nije gruba pogreška. Ipak 3 $\sigma$  test proveden je na premalom skupu od samo 5 ponovljenih mjerenja za koji se nikako ne preporuča njegovo korištenje. Zaključuje se da primjenom različitih statističkih testova ne dobiva isti rezultat te je stoga poželjno u praksi koristiti više statističkih testova ovisno o broju ponovljenih mjerenja.

Sustavna pogreška se utvrdila mjerenjem eksperimentalnih vrijednosti na primjeru pravocrtnosti. Utvrđeno da se linearna sustavna pogreška pojavila zbog postavljanja mjernog komada. Linearna pogreška se eliminirala metodom najmanjih kvadrata. Također, do sustavne pogreške došlo je zbog vođenja mjerne baze, ova sustavna pogreška se eliminirala tehnikom preokreta za početni i zakrenuti položaj predmeta. Kao rezultat tehnike preokreta dobilo se odstupanje od pravocrtnosti vodilice i odstupanje od pravocrtnosti mjernog predmeta.

Slučajna pogreška prikazana je na simuliranim podacima u programu Excel. Odredila se teorijska sinusna funkcija koja predstavlja predmet mjerenja. Također se odredila funkcija (pravokutna razdioba) šuma koja predstavlja slučajnu pogrešku. Provelo se deset simuliranih mjerenja i konačno provedena je metoda usrednjavanja, tj. izračun aritmetičkih sredina pojedinih simuliranih mjerenja u svrhu smanjenja slučajne pogreške. Utvrđeno da se maksimalna odstupanja razlikuju od maksimalnog odstupanja metode usrednjavanja, odnosno maksimalno odstupanje metode usrednjavanja manje je u odnosu na maksimalno odstupanje simuliranih mjerenja. Kada se uspoređi maksimalno odstupanje metode usrednjavanja sa teorijskim odstupanjem (maksimalno odstupanje teorijske funkcije), utvrđuje se da je odstupanje metode neznatno veće od idealnog odstupanja. Zaključuje se da se metodom usrednjavanja smanjuje slučajna pogreška, ali se do kraja ne može ukloniti.

## 8. LITERATURA

- [1] d. i. Dr. sc. Biserka Runje, »Predavanja iz kolegija Teorija i tehnika mjerenja,« Zagreb, 2023.
- [2] BIPM, International vocabulary of metrology-Basic and general concepts and associated terms, 3. izdanje ur., JCGM, 2008., p. 108.
- [3] D. Benčić, »POJAM, ZNAČENJE I ISKAZIVANJE MJERNE NESIGURNOSTI,« *Geodetski list*, p. 8, 1998.
- [4] L. z. M. Krleža, »Hrvatska enciklopedija,« Leksikografski zavod Miroslav Krleža, 2013-2023. [Mrežno]. Available: <https://www.enciklopedija.hr/clanak/63149>. [Pokušaj pristupa 30. 12. 2023.].
- [5] d. i. Dr. sc. Vedran Šimunović, »Predavanja iz kolegija Mjerenja u proizvodnji,« Zagreb, 2023..
- [6] I. 5725-1:2023, »ISO,« 2023.. [Mrežno]. Available: <https://www.iso.org/obp/ui/#iso:std:iso:5725:-1:ed-2:v1:en>. [Pokušaj pristupa 11. 1. 2024.].
- [7] L. K. N.V. Raghavendra, Engineering Metrology and Measurements, Oxford: OXFORD University Press, 2013.
- [8] B. Ozcan, »MDPI,« 31 3. 2022.. [Mrežno]. Available: <https://www.mdpi.com/1424-8220/22/11/4211>. [Pokušaj pristupa 12. 1. 2024.].
- [9] W. O. F. v. d. H. M. J. Korsten, Measurement Science for Engineers, Enschedeu, Twente: Elsevier Science & Technology Books, 2004..
- [10] BYJU"S, »Absolute and relative error,« [Mrežno]. Available: <https://byjus.com/maths/absolute-and-relative-error/>. [Pokušaj pristupa 14. 1. 2024.].
- [11] PMF, »Obrada rezultata mjerenja,« [Mrežno]. Available: <http://www.phy.pmf.unizg.hr/~sanja/wp-content/uploads/2012/09/POGRE%C5%A0KE-PRI-MJERENJU.pdf>. [Pokušaj pristupa 14. 1. 2024.].
- [12] Testbook, »Gross Error: Learn its Definition, Examples, & How To Reduce Them,« 28. 7. 2023.. [Mrežno]. Available: <https://testbook.com/physics/gross-error>. [Pokušaj pristupa 14. 1. 2024.].
- [13] S. direct, »Systematic Error,« 2021.. [Mrežno]. Available: <https://www.sciencedirect.com/topics/engineering/systematic-error>. [Pokušaj pristupa 15. 1. 2024.].
- [14] T. U. o. N. C. College Physics Labs Mechanics, »Measurements and Error Analysis,« [Mrežno]. Available: [https://www.webassign.net/question\\_assets/unccolphysmechl1/measurements/manual.html](https://www.webassign.net/question_assets/unccolphysmechl1/measurements/manual.html). [Pokušaj pristupa 15. 1. 2024.].
- [15] S. G. Rabinovich, Measurement Errors and Uncertainties, Theory and Practice, Springer, 2005.
- [16] D. G. D. M. Mirta Benšić, »Linearna regresija kroz primjer,« *Osječki matematički list*, 2023.
- [17] Testbook, »Random Error: Learn its Definition, Types, Sources, & Examples,« 28. 7. 2023.. [Mrežno]. Available: <https://testbook.com/physics/random-errors>. [Pokušaj pristupa 15. 1. 2024.].
- [18] »Dixon's Q-test: Detection of a single outlier,« [Mrežno]. Available:

- [http://195.134.76.37/applets/AppletQtest/Appl\\_Qtest2.html](http://195.134.76.37/applets/AppletQtest/Appl_Qtest2.html). [Pokušaj pristupa 16. 1. 2024.].
- [19] Statistics how to, »Dixon's Q Test: Definition, Step by Step Examples + Q Critical Values Tables,« [Mrežno]. Available: <https://www.statisticshowto.com/dixons-q-test/#Alternate>. [Pokušaj pristupa 16. 1. 2024.].
- [20] D. B. Rorabacher, »JMP User Community,« [Mrežno]. Available: <https://community.jmp.com/kvoqx44227/attachments/kvoqx44227/discussions/48839/1/Rorabacher%201991%20-%20Critical%20Values%20of%20Dixon%20Test.pdf>. [Pokušaj pristupa 16. 1. 2024.].
- [21] W. J. Dixon, »PROCESSING DATA FOR OUTLIERS,« [Mrežno]. Available: <https://webpace.ship.edu/pgmarr/Geo441/Readings/Dixon%201953%20-%20Processing%20Data%20for%20Outliers.pdf>. [Pokušaj pristupa 16. 1. 2024.].
- [22] »Faster Capital,« 17. 12. 2023.. [Mrežno]. Available: <https://fastercapital.com/content/Outlier-detection--Detecting-Anomalies-with-Three-Sigma-Limits.html#Using-Three-Sigma-Limits-in-Outlier-Detection>. [Pokušaj pristupa 1. 2. 2024.].
- [23] *Predavanja iz kolegija Matematika 3, Vjerojatnost i statistika.*
- [24] R. d. C. A. d. M. F. T. P. Benedito Di Giacomo, »REVERSAL TECHNIQUE APPLIED TO THE MEASUREMENT OF STRAIGHTNESS ERRORS,« Sao Paulo.
- [25] Leksikografski zavod Miroslav Krleža, »Hrvatska enciklopedija,« 2013.-2024.. [Mrežno]. Available: <https://www.enciklopedija.hr/clanak/metoda-najmanjih-kvadrata>. [Pokušaj pristupa 16. 2. 2024.].
- [26] FKIT, »Zavod za matematiku-FKIT,« [Mrežno]. Available: [https://matematika.fkit.hr/novo/statistika\\_i\\_vjerojatnost/predavanja/7%20-%20Metoda%20najmanjih%20kvadrata.pdf](https://matematika.fkit.hr/novo/statistika_i_vjerojatnost/predavanja/7%20-%20Metoda%20najmanjih%20kvadrata.pdf). [Pokušaj pristupa 16. 2. 2024.].
- [27] Aaron, »Tutor chase,« [Mrežno]. Available: <https://www.tutorchase.com/answers/igcse/physics/how-does-averaging-multiple-measurements-reduce-error>. [Pokušaj pristupa 18. 2. 2024.].