

Utjecaj parametara numeričkog modela u simulacijama opstrujavanja

Klasić, Karlo

Master's thesis / Diplomski rad

2023

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:235:198680>

Rights / Prava: [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2024-12-03**

Repository / Repozitorij:

[Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

DIPLOMSKI RAD

Karlo Klasić

Zagreb, 2023.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

DIPLOMSKI RAD

Mentor:

Prof. dr. sc. Severino Krizmanić

Student:

Karlo Klasić

Zagreb, 2023.



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

Središnje povjerenstvo za završne i diplomske ispite
Povjerenstvo za diplomske ispite studija strojarstva za smjerove:



Procesno-energetski, konstrukcijski, inženjersko modeliranje i računalne simulacije i brodstrojarski

Sveučilište u Zagrebu Fakultet strojarstva i brodogradnje	
Datum	Prilog
Klasa: 602 - 04 / 23 - 6 / 1	
Ur.broj: 15 - 23 -	

DIPLOMSKI ZADATAK

Student: **Karlo Klasić** JMBAG: 0035214530

Naslov rada na hrvatskom jeziku: **Utjecaj parametara numeričkog modela u simulacijama opstrujavanja**

Naslov rada na engleskom jeziku: **Influence of numerical model parameters in free-flow simulations**

Opis zadatka:

Prilikom proračuna strujanja, pravilan odabir parametara numeričkog postupka je od ključne važnosti. Pri tome, značajan utjecaj na rezultate proračuna imaju model turbulencije i njegove postavke, te primjena odgovarajućeg modela zidne turbulencije. Kod otvorenih zadaća, uz navedeno, znatan utjecaj ima i finoća diskretizacije prostora u području vrtložnog traga opstrujavanja tijela.

U ovome radu potrebno je provesti računalne simulacije opstrujavanja tijela s oštrim i oblim bridovima, za koje postoje eksperimentalna istraživanja. Pri izradi rada se preporučuje primjena slobodno dostupnog programskog paketa OpenFOAM koji se temelji na metodi konačnih volumena.

U sklopu rada potrebno je:

- izraditi proračunske geometrijske modele objekata simulacija, te prema potrebi uvesti pojednostavljenja;
- obaviti sve postupke računalnog proračuna: prostorna diskretizacija modela, odabir i ugađanje numeričkog postupka, obrada i prikaz rezultata simulacija;
- usporediti rezultate proračuna s eksperimentalnim ili empirijskim podacima;
- po mogućnosti, odrediti korekcijske veličine koje bi bile namijenjene usklađivanju rezultata proračuna s eksperimentalnim rezultatima.

U radu je potrebno navesti korištenu literaturu i eventualno dobivenu pomoć.

Zadatak zadan:

28. rujna 2023.

Zadatak zadao:

Izv. prof. dr. sc. Severino Krizmanić

Datum predaje rada:

30. studenoga 2023.

Predvideni datumi obrane:

4. – 8. prosinca 2023.

Predsjednik Povjerenstva:

Prof. dr. sc. Tanja Jurčević Lulić

Izjavljujem da sam ovaj rad izradio samostalno, koristeći se pritom isključivo literaturom koja je citirana i navedena u popisu literature.

Sadržaj

Sadržaj	II
Popis slika	V
Popis tablica	VII
Popis oznaka.....	VIII
Sažetak	X
Summary	XI
1. Uvod.....	1
2. Režim strujanja i granični sloj, [1]	2
2.1. Laminarno strujanje.....	3
2.2. Turbulentno strujanje	3
2.2.1. Nestacionarnost turbulentnog strujanja.....	3
2.2.2. Difuzijski karakter turbulentnog strujanja.....	4
2.2.3. Povećana disipacija energije kod turbulentnog strujanja	5
2.3. Granični sloj	5
2.3.1. Model laminarnog graničnog sloja.....	5
2.3.2. Turbulentni granični sloj, [1]	9
2.3.3. Turbulentna kinetička energija, [1], [4]	14
2.4. $k-\varepsilon$ model turbulencije	16
2.4.1. Visoki Re_t , [1], [4], [6]	17
2.4.1.1. Zidne funkcije.....	18
2.5. $k-\omega$ model turbulencije, [7], [8].....	20
2.6. $k-\omega$ SST model turbulencije, [10]	22
3. Metoda kontrolnih volumena	25
3.1. Diskretizacija, [11]	25
3.1.1. Diskretizacija domene	25
3.1.2. Diskretizacija jednažbi	26

3.1.2.1.	Metode vremenske integracije, [12]	28
3.1.2.1.1.	Implicitna metoda vremenske integracije	28
3.1.2.1.2.	Implicitna Crank-Nicolsonova metoda vremenske integracije	28
3.1.2.1.3.	Eksplicitna metoda vremenske integracije	28
3.2.	Numeričke sheme rješavanja aproksimacijskih izraza	29
3.2.1.	Centralne razlike, [11], [12], [13]	29
3.2.2.	Upwind metoda, [11].....	30
3.2.3.	Linearna Upwind shema, [11], [12]	31
3.3.	Rubni i početni uvjeti	31
3.3.1.	Rubni uvjeti, [13]	31
3.3.1.1.	Dirichletovi rubni uvjeti	32
3.3.1.2.	Neumannovi rubni uvjeti	32
3.3.1.3.	Newtonovi rubni uvjeti	32
3.3.2.	Početni uvjeti, [13]	32
3.4.	Algoritmi za rješavanje problema MKV, [14]	33
3.4.1.	PIMPLE algoritam	33
4.	Proces izrade proračunske mreže	36
4.1.	Generiranje proračunske mreže.....	37
4.1.1.	Struktura proračunske mreže, [15], [16]	37
4.1.2.	Uvjeti kvalitete mreže, [16].....	38
4.1.2.1.	maxNonOrtho	38
4.1.2.2.	Skewness	39
4.1.2.3.	maxConcave	40
4.1.2.4.	minArea i minVolume	40
4.1.2.5.	minTwist.....	40
4.1.2.6.	minCellDeterminant	41

4.1.2.7. minFaceWeight.....	41
4.1.2.8. minVolRatio	42
4.1.2.9. minTetQuality.....	42
4.1.2.10. maxAspectRatio.....	43
4.2. cfMesh,.....	43
4.2.1. Pripremanje geometrije	43
4.2.1.1. Domena.....	43
4.2.1.2. Vozilo	44
4.2.2. meshDict, [15].....	46
5. Korekcijski faktor koeficijenta sile otpora	48
5.1. Sila otpora, [11].....	48
5.2. Određivanje koeficijenta otpora pomoću CFD-a	49
5.2.1. Slučaj 1: Kocka	50
5.2.2. Slučaj 2: Tesla Cybertruck	61
6. Zaključak.....	70
Literatura	72

Popis slika

Slika 1: Formiranje graničnih slojeva	2
Slika 2: Prikaz pulsacija u prijelaznom dijelu sloja	3
Slika 3: Prikaz pulsacija u sloju potpuno izražene turbulencije	4
Slika 4: Profil brzine pri laminarnom i turbulentnom režimu strujanja u cijevi	5
Slika 5: Laminarni granični sloj	6
Slika 6: Raspodjela smičnih naprezanja	10
Slika 7: Odnos bezdimenzijskih vrijednosti $u + i y +$	14
Slika 8: Diskretizirana domena	25
Slika 9: Usporedba raznih numeričkih shema	30
Slika 10: Raspodjela konvekcijskog člana u linearnoj upwind metodi	31
Slika 11: Raspodjela početnih i rubnih uvjeta na jednoj domeni	33
Slika 12: Vrste kontrolnih volumena koje podržava OpenFoam	36
Slika 13: Najčešće korišteni volumeni: a) Heksaedarski, b) Poliedarski, c) Tetraedarski	37
Slika 14: Vrste prijelaza kontrolnih volumena: a) Skokoviti, b) Kontinuirani	37
Slika 15: Definicija uvjeta maxNonOrthogonality	38
Slika 16: Definicija uvjeta Skewness	39
Slika 17: Definicija uvjeta maxConcave	40
Slika 18: Definicija uvjeta minArea i minVol	40
Slika 19: Definicija uvjeta minTwist	41
Slika 20: Definicija uvjeta minFaceWeight	42
Slika 21: Definicija uvjeta Aspect Ratio	43
Slika 22: Dimenzije domene proračunskog modela	44
Slika 23: Kontakt ceste i kotača	45
Slika 24: Definicija kuta dijeljenja geometrije	45
Slika 25: Utjecaj surfaceFeatureEdges: a) Prije, b) Nakon	46
Slika 26: Odabir referentne površine ovisno o udarnom kutu	49
Slika 27: Dimenzije proračunske domene opstrujavanja kocke	50
Slika 28: Slučaj 1 - Rješenja na gruboj mreži	52
Slika 29: Slučaj 1 - Rješenja na srednje gruboj mreži	53
Slika 30: Slučaj 1 - Rješenja na finijoj mreži	55
Slika 31: Stacioniranje simulacije ovisno o ulaznoj brzini	56

Slika 32: C_d u ovisnosti o srednjoj vrijednosti $y +$ za određenu brzinu.....	56
Slika 33: Vrijednosti korekcijskog faktora dobivene proračunom.....	58
Slika 34: Aproksimacijski polinomi korekcijskog faktora.....	58
Slika 35: Aproksimacijski polinom 4. reda.....	60
Slika 36: Dimenzije proračunske domene opstrujavanja vozila	61
Slika 37: Slučaj 2 - Rješenja na gruboj mreži	63
Slika 38: Slučaj 2 - Rješenja na finijoj mreži	65
Slika 39: Slučaj 2 - Raspodjela tlaka na vozilu pri gruboj i f finijoj mreži.....	65
Slika 40: Slučaj 2 - Raspodjela $y +$ vrijednosti na vozilu pri gruboj i finoj mreži.....	66
Slika 41: Slučaj 2 - Raspodjela brzine i tlaka u okolišu vozila	66
Slika 42: Stacioniranje vrijednosti za finiju mrežu	67
Slika 43: Prikaz strujnica oko vozila.....	67
Slika 44: Točka na aproksimacijskoj krivulji za slučaj finije mreže.....	68

Popis tablica

Tablica 1: Standardni iznosi koeficijenata konstanti pri velikim Re	18
Tablica 2: Konstante za $k - \omega$ model turbulencije pri niskim vrijednostima Re broja	22
Tablica 3: Konstante $k - \omega$ SST modela turbulencije.....	24
Tablica 4: Korektivna shema ovisno o kutu neortogonalnosti	39
Tablica 5: Kriteriji kvalitete izrade mreže pomoću cfMesh-a.....	47
Tablica 6: Rubni uvjet na ulazu.....	55
Tablica 7: Usporedba aproksimiranog rješenja K_p sa računalno dobivenim $Kn = C_d, n/C_d$ e za 2. red	59
Tablica 8: Usporedba aproksimiranog rješenja K_p sa računalno dobivenim Kn za 3. red	59
Tablica 9: Usporedba aproksimiranog rješenja K_p sa računalno dobivenim Kn za 4. red	60
Tablica 10: Usporedba veličina dviju mreža Cybertrucka	68

Popis oznaka

$A \text{ [m}^2\text{]}$	- Površina poprečnog presjeka,
C_d	- Koeficijent sile otpora,
C_μ	- Koeficijent trenja,
$\bar{k} \left[\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \right]$	- Turbulentna kinetička energija,
$l \text{ [m]}$	- Duljina,
$l_m \text{ [m]}$	- Put miješanja,
n	- Normala,
Pe	- Pecletov broj,
$p \text{ [Pa]}$	- Tlak,
Re	- Reynoldsov broj,
$u, v \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$	- Horizontalna i vertikalna brzina,
\tilde{u}	- Bezdimenzijska brzina normirana brzinom slobodne struje,
u^+	- Bezdimenzijska brzina normirana brzinom trenja,
$u_\infty \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$	- Brzina slobodne struje
$u_\tau \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$	- Brzina trenja,
$x, y \text{ [m]}$	- Koordinate,
\tilde{x}, \tilde{y}	- Bezdimenzijske koordinate,
y^+	- Bezdimenzijska udaljenost od nepropusne stijenke,
$\Gamma \left[\frac{\text{m}^2}{\text{s}} \right]$	- Koeficijent difuzije,
$\delta \text{ [m]}$	- Debljina graničnog sloja,
$\bar{\epsilon} \left[\frac{\text{m}^2}{\text{s}^3} \right]$	- Disipacija turbulentne kinetičke energije,
$\bar{\omega} \text{ [s}^{-1}\text{]}$	- Specifična disipacija turbulentne kinetičke energije,

$\rho \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right]$	- Gustoća,
$\tau, \tau_w \text{ [Pa]}$	- Smično naprezanje na nepropusnoj stjenki,
$\mu \text{ [Pa} \cdot \text{s]}$	- Dinamička viskoznost,
$\nu \left[\frac{\text{m}^2}{\text{s}} \right]$	- Kinetička viskoznost,
ϕ	- Opća fizikalna veličina

Sažetak

Ovaj rad istražuje izradu proračunskih mreža i njihovu bitnost za postizanje preciznih rezultata u inženjerskim analizama. Fokusiranje na kriterije kvalitete proračunskih mreža, u radu se ispituje kako oni utječu na konačni izgled mreže i konačne rezultate analiza. Dalje, ispituje se mogućnost dobivanja aproksimacijske krivulje za korektivni faktor koji povezuje rezultate grube i fine mreže kako bi se na gruboj mreži mogli postići približni rezultati. Ovo ispitivanje provodi se na modelima kocke i Teslinog Cybertrucka kako bi se analizirala primjenjivost takvog faktora u realnim inženjerskim situacijama. Kroz ispitivanje, dobiven je aproksimacijski izraz za korektivni faktor koeficijenta sile otpora.

Ključne riječi: priprema geometrije, kriteriji kvalitete mreže, PIMPLE algoritam, MKV, CFD, koeficijent sile otpora, aproksimacijski izraz korektivnog faktora za koeficijent otpora.

Summary

This thesis explores the meshing process and its significance in achieving precise results in engineering analyses. By focusing on the mesh quality criteria, this thesis investigates how they influence the final mesh structure and analyses results. Furthermore, it examines the potential of obtaining an approximation curve for a corrective factor that connects results from coarse and fine mesh, aiming to achieve approximate results on the coarse mesh. This study is conducted using models of a cube and Tesla's Cybertruck and an approximation expression for the corrective drag force coefficient has been derived.

Keywords: geometry preparation, mesh quality criteria, PIMPLE algorithm, FVM, CFD, drag force coefficient, approximation expression of the corrective factor for drag coefficient.

1. Uvod

Aerodinamika predstavlja dio znanosti mehanike fluida koja proučava utjecaj strujanja zraka oko ispitnih tijela. Ako se radi o nestlačivim strujanjima, glavni parametri za razmatranje su tlak i brzina strujanja fluida, a gustoća i temperatura dolaze u obzir kod stlačivih strujanja. Aerodinamika se može podijeliti na eksperimentalni i teorijski dio. Eksperimentalna se aerodinamika sprovodi u ispitnim zračnim tunelima, a u zadnjih nekoliko desetljeća u obzir dolazi i računalna dinamika fluida koja postaje sve preciznija zbog porasta računalne moći. Za razne vrste proračuna se koriste različite vrste proračunskih mreža pa se tako u CFD analizama koriste mreže sastavljane od kontrolnih volumena. Proračunska mreža mora zadovoljiti određene topološke i geometrijske uvjete kvalitete koji su objašnjeni u nastavku izvještaja. Naravno, rješenje ovisi o postavljenim rubnim i početnim uvjetima, no adekvatna i kvalitetna proračunska mreža je uvjet za precizan i stabilan proračun.

Jedna od osnovnih zadaća proračuna opstrujavanja je traženje utjecaja sile na proračunski objekt. Osim sile, tlakova, brzina i ostalih nepoznatih vrijednosti, traži se i koeficijent sile otpora. Vrijednost koeficijenta otpora dobivenog numeričkim putem ovisi o kvaliteti modelirane geometrije, izrađene proračunske mreže, dimenzijama domene, modelu turbulencije, početnim i rubnim uvjetima, odabranim numeričkim shemama i rješavačima algebarskih jednadžbi u obliku matričnih sustava. Ukoliko se koriste resursi većeg kapaciteta i snage, finija mreža ne predstavlja problem kao što bi predstavljala na slabijim računalnim resursima.

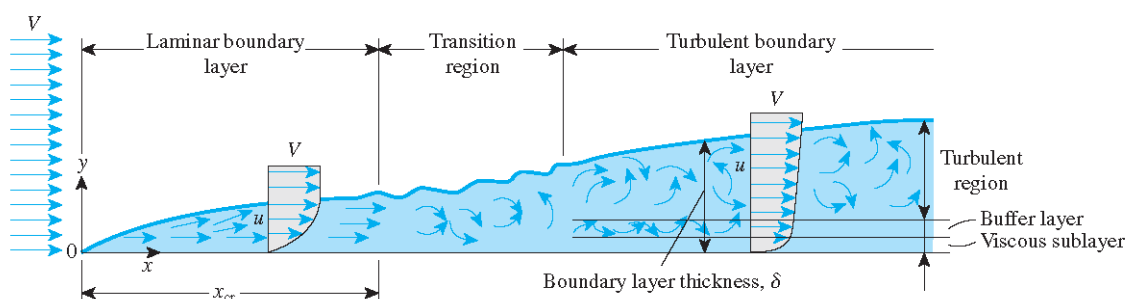
Tu se postavlja pitanje o postojanju korekcijskih faktora koji bi korigirali dobiveni koeficijent tako da se približi rezultatu dobivenom na finoj mreži ili eksperimentalno.

2. Režim strujanja i granični sloj, [1]

U pogledu rubnih uvjeta kojima se u sklopu matematičkog modela opisuje strujanje u nekom području, razlikujemo unutarnje i vanjsko (optjecanje) strujanje. U pogledu režima strujanja, razlikuju se turbulentno i laminarno strujanje. Između ovih režima strujanja ne postoji jasna granica, no poznato je da se u tehničkim primjenama, kao i u pripadnim uzorima iz prirode, češće pojavljuje turbulentno strujanje. Režim strujanja vezan je uz vrijednost Reynoldsova broja koji predstavlja omjer između inercijskih i viskoznih sila. Uz vrijednost Reynoldsova broja, granica među režimima strujanja ovisi i o dodatnim utjecajima, poput hrapavosti površine i uvjetima na ulaznim granicama. Stoga se režim strujanja određuje putem raspona Reynoldsovog broja.

$$Re = \frac{\rho U l}{\mu} \quad (1)$$

Slika 1 prikazuje razvijanje pojedinih režima strujanja u graničnom sloju ovisno o Reynoldsovom broju. Ukoliko je strujanje u području $x < x_{cr}$ (vezano uz područje $Re = \frac{\rho U x}{\mu} < Re_{cr}$) će uvijek biti laminarno (ne može biti turbulentno), dok će strujanje u području $x > x_t$ (vezano uz područje $Re = \frac{\rho U x}{\mu} > Re_t$) uvijek biti turbulentno (ne može biti laminarno). Pri tome, vrijednosti Re_{cr} i Re_t ovise o hrapavosti stijenke i razini turbulencije u neporemećenoj struji fluida (struji izvan graničnog sloja).



Slika 1: Formiranje graničnih slojeva

2.1. Laminarno strujanje

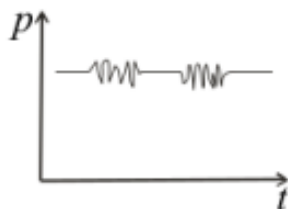
Laminarni režim strujanja može se okarakterizirati pravilnim strujanjem u slojevima, gdje ne dolazi do miješanja fluida između slojeva. Ovakvo se strujanje pojavljuje kod niskih vrijednosti Re broja. Kritični raspon Re broja do kojeg vrijede uvjeti laminarnog strujanja je uvjetovan i rubnim uvjetima, npr. različit je u slučajevima unutarnjih i vanjskih strujanja.

2.2. Turbulentno strujanje

Turbulentni režim strujanja okarakteriziran je kaotičnim i slučajnim promjenama svih promjenjivih veličina u prostoru i vremenu. U takvim se slučajevima pristupa statističkoj analizi strujanja gdje se osrednjuju vrijednosti promjenjivih veličina. Intenzivno miješanje fluida na razini čestica rezultira karakteristikom difuzijskog strujanja u kojem se javlja povećana disipacija energije.

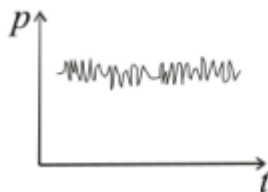
2.2.1. Nestacionarnost turbulentnog strujanja

Nestacionarnost podrazumijeva pulsacijske promjene veličina strujanja. Kao što je već rečeno, Slika 1 prikazuje razvijanje pojedinog režima strujanja u ovisnosti o Re broju. Prijelazna zona odnosi se na područje u kojem je Re broj u granicama $Re_{cr} < Re < Re_t$. Taj se dio graničnog sloja odnosi na prijelaz iz laminarnog u turbulentni režim strujanja, a ponašanje veličina strujanja u tom dijelu prikazuje Slika 2. Veličine su podložne povremenim pulsacijama ovisno o naletu turbulencije.



Slika 2: Prikaz pulsacija u prijelaznom dijelu sloja

Slika 3 prikazuje pulsacije tlaka u potpuno izraženom turbulentnom strujanju.



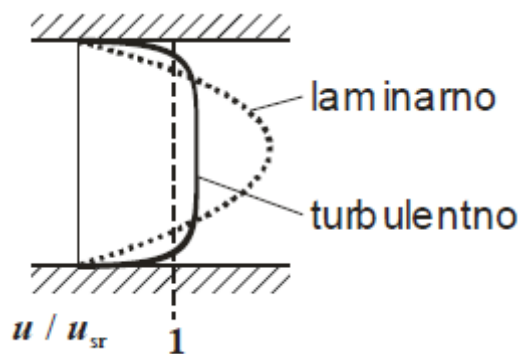
Slika 3: Prikaz pulsacija u sloju potpuno izražene turbulencije

2.2.2. Difuzijski karakter turbulentnog strujanja

Difuzijski proces je spontani proces koji postoji sve dok postoji i gradijent fizikalne veličine. Za turbulentnu difuziju vrijedi činjenica da se odvija pri kaotičnom gibanju čestica, a svoje porijeklo vuče iz konvektivnog prijenosa fizikalne veličine. Prijenos fizikalne veličine ili pojave u fluidima među česticama se naziva molekularnom difuzijom. U turbulentnom strujanju, intenzivni konvekcijski transport uslijed kaotičnog gibanja čestica dovodi do intenzivnog lokalnog miješanja, što se u okviru modela turbulencije obuhvaća uvođenjem turbulentne difuzije, te se i na taj način vrši difuzijski prijenos fizikalne pojave.

Jedna od fizikalnih veličina koja se prenosi difuzijom u strujanjima fluida je količina gibanja. Konkretno, za turbulentna strujanja će čestice s većom vrijednosti ulaziti u područje manje vrijednosti gdje će se difuzijskom procesom vršiti izmjena te veličine. To je moguće zbog pojave turbulentnih smičnih naprezanja. U stanjima potpuno izražene turbulencije je molekularna difuzija podosta manja u odnosu na turbulentnu.

Difuzija je proces koji teži ujednačavanju, ravnoteži i ona se može dobro vidjeti prilikom strujanja u cijevima. U uvjetima potpuno izražene turbulencije je turbulentna difuzija dominantni oblik difuzije pa se stoga u cijevima javlja gotovo ujednačeni profil strujanja što prikazuje i Slika 4.



Slika 4: Profil brzine pri laminarnom i turbulentnom režimu strujanja u cijevi

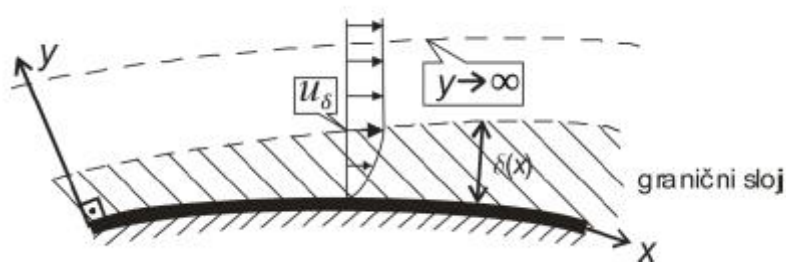
2.2.3. Povećana disipacija energije kod turbulentnog strujanja

Kao što je ranije spomenuto, Slika 4 prikazuje raspodjelu brzine po presjeku cijevi ovisno o režimu strujanja. Disipacija neke fizikalne veličine ili pojave će biti veća što je veći gradijent, a zbog turbulentne difuzije i viskoznosti, u turbulentnim strujanjima dolazi do pojave većih gradijenata na stijenci što rezultira većom disipacijom energije. Konkretno, više se mehaničke energije transformira u unutarnju energiju fluida nego kod režima laminarnog strujanja.

2.3. Granični sloj

2.3.1. Model laminarnog graničnog sloja

Takav granični sloj opisuje se pomoću teorije graničnog sloja koju je predložio Prandtl u kojoj se opstrujavanju zakrivljene ploče velikog radijusa pristupa razdvajanjem strujanja na viskozni dio unutar graničnog sloja i neviskozno strujanje dalje od graničnog sloja. Viskozni dio, tj. dio graničnog sloja je zbog svoje viskoznosti opisan Navier-Stokes-ovim jednažbama. Kako bi se olakšao pristup rješavanju tih jednažbi, Prandtl je uočio da je visina graničnog sloja podosta manja u odnosu na duljinu tijela u opstrujavanju te je procjenom reda veličine pojedinih faktora zaključio da nisu svi članovi jednako utjecajni, tj. neki se mogu zanemariti [1], [2], [3].



Slika 5: Laminarni granični sloj

Pretpostavke za takav skup jednažbi su:

- Stacionarno strujanje,
- Masene se sile zanemaruju,
- Dvoosno strujanje gdje se os x poklapa s konturom stijenke.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (3)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (4)$$

Kako bi se izvršila procjena reda veličine pojedinih sastavnica jednažbi (2), (3) i (4), potrebno je veličine pretvoriti u bezdimenzijske pomoću referentnih veličina. Za brzine su to maksimalni iznosi u pojedinim smjerovima, dok je za koordinatu x to duljina ploče, a za y je veličina graničnog sloja. Za tlak je referentna vrijednost dvostruki dinamički tlak.

$$u = U\tilde{u} \quad (5)$$

$$v = V\tilde{v} \quad (6)$$

$$x = L\tilde{x} \quad (7)$$

$$y = \delta\tilde{y} \quad (8)$$

$$p = \rho U^2 \tilde{p} \quad (9)$$

Uvrštavanjem izraza u jednadžbu (5), (6), (7) i (8) u jednadžbu kontinuiteta (2), dobije se izraz s bezdimenzijskim veličinama.

$$\frac{U}{L} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \frac{V}{\delta} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} = 0$$

Kako su bezdimenzijski članovi istog reda veličine, tako su i konstante istog reda veličine pa se povlači izraz za vertikalnu brzinu

$$V = U \frac{\delta}{L} \quad (11)$$

Kako je pretpostavljeno prije, ovi se izrazi formuliraju za visoke Re brojeve gdje je visina graničnog sloja dosta manja od duljine stijenke pa je tako i brzina u vertikalnom smjeru što prikazuje i izraz (11). Uvrštavanjem bezdimenzijskih izraza u jednadžbu količine gibanja (3) i (4) dobije izraz pomoću kojeg se može procijeniti red veličine.

$$\frac{U^2}{L} \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \frac{U^2}{L} \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} = -\frac{U^2}{L} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} + \nu \frac{U}{L^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x}^2} + \nu \frac{V}{\delta^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2} \quad (12)$$

Analizom jednadžbe (12) se može vidjeti kako su drugačiji članovi jedino uz izraz za smična naprezanja pa kako. Član $\frac{U}{L^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x}^2}$ se može zanemariti jer je duljina objekta opstrujavanja velika, a kako bi se zadovoljila procjena reda veličine, $\nu \frac{V}{\delta^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2}$ treba biti mjerljiv s ostatkom jednadžbi. Fizikalno to znači da viskozne sile trebaju biti istog reda veličine kao i inercijske sile. To rezultira izrazom:

$$\frac{U^2}{L} = \nu \frac{V}{\delta^2} \quad (13)$$

Iz čega se dobije izraz za debljinu graničnog sloja:

$$\delta = \frac{L}{\sqrt{\frac{U\delta}{\nu}}} = \frac{L}{\sqrt{Re}} \quad (14)$$

Sad kad postoji izraz za debljinu graničnog sloja, jednadžba (12) se može podijeliti s $\frac{U^2}{L}$:

$$\tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2} \quad (15)$$

Kod visokih vrijednosti Re brojeva, član $\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x}^2}$ se može zanemariti pa ostaje konačni oblik bezdimenzijskog strujanja u smjeru osi x :

$$\tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2} \quad (16)$$

Sada treba proučiti jednadžbu (4).

$$\frac{U^2}{L\sqrt{Re}} \tilde{u} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}} + \frac{U^2}{L\sqrt{Re}} \tilde{v} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} = -\frac{U^2}{L\sqrt{Re}} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{y}} + \nu \frac{U^2}{L\sqrt{Re}^3} \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{x}^2} + \nu \frac{U^2}{L\sqrt{Re}} \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{y}^2} \quad (17)$$

Pa slijedi:

$$\frac{1}{Re} \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} \right) = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{y}} + \frac{1}{Re^2} \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{y}^2} \quad (18)$$

Pri visokim vrijednostima Re broja, svi članovi otpadaju što rezultira izrazom koji govori o konstantnom tlaku po debljini graničnog sloja.

Sada se mogu napisati jednadžbe koje zajedno čine sustav Prandtlovih jednadžbi za laminarni granični sloj:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} &= 0 \\ \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} &= -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2} \\ \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{y}} &= 0 \end{aligned} \quad (19)$$

2.3.2. Turbulentni granični sloj, [1]

Kao što je ranije spomenuto, promjenjive vrijednosti u turbulentnom strujanju se opisuju kao zbroj konstantne vrijednosti (statistički srednje vrijednosti) i pulsacija u obliku:

$$f(x, y, z, t) = \bar{f}(x, y, z, t) + f'(x, y, z, t) \quad (19.a)$$

Ukoliko se veličine tako uvrste u Navier-Stokesove jednačbe, dobe se jednačbe za osrednjeni i pulsirajući oblik. Njihovim zbrajanjem se dobije izvorni oblik. Jednačbe s osrednjenim vrijednostima nazivaju se još nazivaju i Reynoldsovim jednačbama.

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (20)$$

$$\rho \frac{d\bar{u}_i}{dt} + \frac{\partial(\rho \bar{u}_i \bar{u}_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \rho \overline{u'_i u'_j} \right] \quad (21)$$

Iako se radi o osrednjenom obliku, u jednačbi (21) se ipak pojavljuju elementi pulsirajućeg oblika koji se naziva Reynoldsovim napreznjima, a predstavlja element turbulentne difuzije. Ta činjenica otežava rješavanje jer su Reynoldsova napreznja zapravo simetričan tenzor sa 6 nepoznanica što rezultira s više nepoznanica od broja jednačbi. Da bi se one rješavale, potrebno je tražiti korelacije brzine i tlaka, no to bi trajalo unedogled jer bi broj nepoznanica brže rastao od broja jednačbi. Kako bi se to spriječilo, taj se problem rješava uz postavljanje modela turbulencije.

Turbulentna viskoznost nije stvarna veličina, već se modelira zbog kaotičnog gibanja čestica. Model tenzora Reynoldsovih napreznja je definirao Boussinesq na sljedeći način:

$$-\rho \overline{u'_i u'_j} = \mu_t \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \bar{k} \delta_{ij} \quad (22)$$

Turbulentna kinetička energija je definirana izrazom:

$$\bar{k} = \frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i} \quad (23)$$

Turbulentna viskoznost prema kinetičkoj teoriji plinova:

$$\mu_t = \rho l_m v_t$$

a karakteristična brzina turbulentnih pulsacija v_t je povezana s duljinom puta miješanja l_m preko relacije:

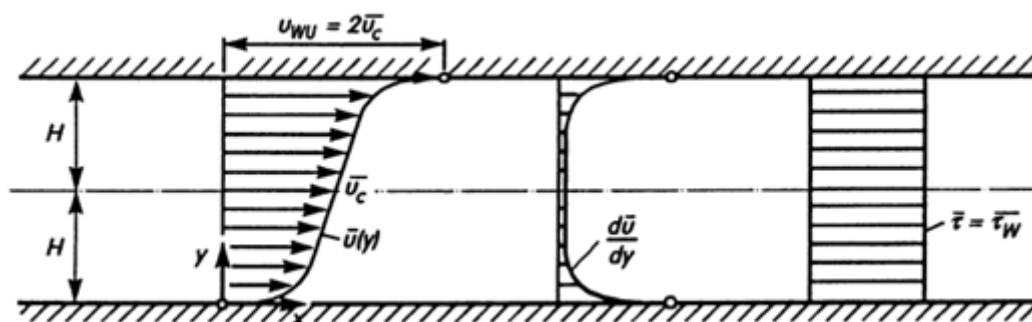
$$v_t = l_m \left| \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_2} \right|$$

Uvrštavajući Boussinesqov izraz u Reynoldsovu jednadžbu količine gibanja, slijedi idući izraz:

$$\rho \frac{d\bar{u}_i}{dt} + \frac{\partial(\rho \bar{u}_i \bar{u}_j)}{\partial x_j} = - \frac{\partial(\bar{p} + \frac{2}{3} \rho \bar{k})}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\mu + \mu_t) \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \right]$$

Reynoldsove jednadžba za količinu gibanja sada ima oblik osrednjenih veličina sa zamjenom tlaka s efektivnim tlakom: $(\bar{p} + \frac{2}{3} \rho \bar{k})$ i efektivnom viskoznošću $(\mu + \mu_t)$.

Tenzor Reynoldsovih naprezanja predstavlja smična naprezanja, a njihova analiza na primjeru ploče slijedi u nastavku.



Slika 6: Raspodjela smičnih naprezanja

Slika 6 prikazuje primjer za analizu smičnih naprezanja. Donja ploča je stacionarna, a gornja se pomiče brzinom U_{WU} , a nakon uspostavljanja kvazistacionarnog strujanja, može se

razmotriti raspodjela smičnih naprezanja. Pretpostavke ostaju iste kao i za Prandtlove jednadžbe za laminarni granični sloj, a tlak je pretpostavljen kao konstantna vrijednost jer se postiglo kvazistacionarno stanje pa srednja vrijednost tlaka ne ovisi o horizontalnoj koordinati, kao ni o vertikalnoj, a to je zaključak iz Prandtlovih jednadžbi (19), [2], [3]

$$\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_2} = 0$$

Kako se razvio kvazistacionarni slučaj, horizontalna brzina ne ovisi o horizontalnoj koordinati stoga integracijom preostalog člana dolazi do zaključka kako je vertikalna brzina konstantna.

$$\begin{aligned}\bar{u}_2 &= const \\ \bar{u}_2(x_2 = 0) &= 0 \\ \bar{u}_2 &= 0\end{aligned}$$

Uz primijenjene rubne uvjete jednadžba količine gibanja glasi:

$$\rho \bar{u}_i \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_j} + \rho \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\mu + \mu_t) \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \right]$$

Član $\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_j}$ predstavlja jednadžbu kontinuiteta, a to je jednako nuli pa ta jednadžba poprima idući oblik:

$$\rho \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\mu + \mu_t) \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \right]$$

Za pretpostavljene uvjete desna strana jednadžbe se može napisati na idući način:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\mu + \mu_t) \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \right] &= (\mu + \mu_t) \left(\frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial^2 \bar{u}_j}{\partial x_i \partial x_j} \right) \\ \frac{\partial^2 \bar{u}_j}{\partial x_i \partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_j} \right) = 0\end{aligned}$$

Pa vrijedi idući oblik:

$$\rho \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = (\mu + \mu_t) \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_j}$$

$$i=1 \quad \rho \bar{u}_1 \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_1} + \rho \bar{u}_2 \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_2} = (\mu + \mu_t) \left(\frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial x_1 \partial x_1} + \frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial x_2 \partial x_2} \right)$$

Za $i=2$ nema smisla analizirati jer ima trivijalno rješenje zbog vertikalne brzine koja je jednaka nuli.

$$\frac{\partial \tau}{\partial x_2} = 0$$

$$\tau = const$$

$$\tau(x_2 = 0) = \tau_w$$

U svakom djelu sloja je različit utjecaj molekularne i turbulentne viskoznosti. U blizini zida je dominantnije izražena molekularna viskoznost zbog niske vrijednosti Re broja, dok turbulentna prevladava dalje od zida. S tim rečenim, potrebno je analizirati ta dva slučaja.

a) Blizina zidne stijenke ($\mu \gg \mu_t$)

$$\tau_w = \mu \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_2} \longrightarrow \bar{u}_1 = \frac{\tau_w}{\mu} x_2 \quad \text{Linearni profil brzine}$$

b) Dalje od zida ($\mu_t \gg \mu$)

$$\mu_t = \rho l_m^2 \left| \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_2} \right| \longrightarrow \tau_w = \mu_t \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_2} \longrightarrow l_m = \kappa x_2$$

Nakon integracije slijedi izraz za brzinu:

$$\bar{u}_1 = \frac{1}{\kappa} \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \ln(x_2) + C \quad - \quad \text{Logaritamski profil brzine}$$

Zbog dimenzije brzine, $\sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$ je proglašena brzinom trenja u_τ .

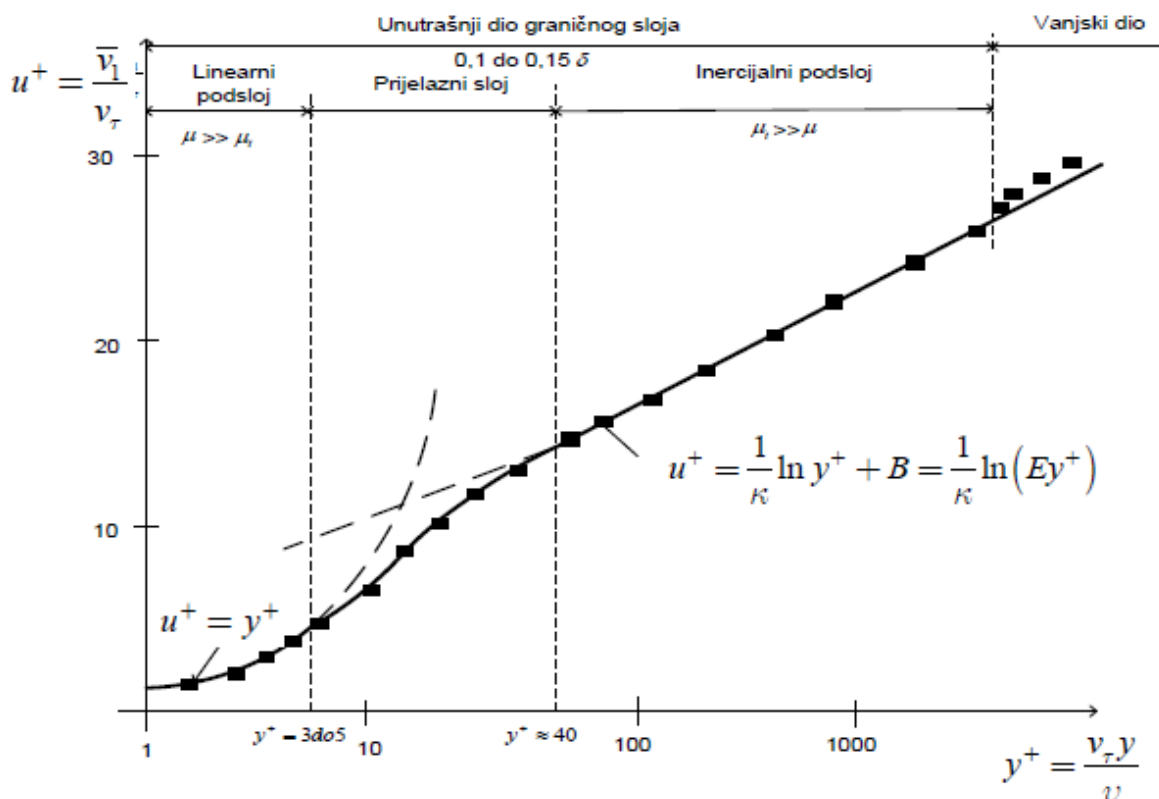
$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$$

Za daljnje razmatranje treba definirati neke bezdimenzijske veličine:

Bezdimenzijska brzina:
$$u^+ = \frac{\bar{u}_1}{u_\tau} \quad (24)$$

Bezdimenzijska udaljenost od zida:
$$y^+ = \frac{u_\tau x_2}{\nu} \quad (25)$$

Prema gornjim podjelama ovisnih o udaljenosti od zida se može granični sloj podijeliti na linearni podsloj (blizu zida), inercijalni (dalje od zida) i naravno njihov prijelaz. Slika 7 prikazuje grafičku ovisnost u^+ o y^+ .

Slika 7: Odnos bezdimenzijskih vrijednosti u^+ i y^+

Preporuka je izbjegavanje prijelaznog podsloja radi nedovoljno točne aproksimacije.

2.3.3. Turbulentna kinetička energija, [1], [4]

Kao i sve promjenjive veličine, tako se i kinetička energija strujanja zapisuje kao zbroj kinetičke energije glavnog (osrednjenog) strujanja i pulsirajućeg dijela

Poznato je da se kinetička energija pretvara u unutarnju (disipacija) zbog utjecaja viskoznihih sila, ali ne na svim područjima jednako. Mjerenjima je ustanovljeno da se kinetička energija s područja pulsacija većih amplituda predaje područjima manjih pa sve dok se ne pretvori u unutarnju energiju na područjima najmanjih pulsacija. Ne smije se zanemariti kinetička energija glavnog (osrednjenog) strujanja, a konačan zaključak je da se kinetička energija glavnog toka predaje područjima pulsacija najvećih amplituda te se od područja najvećih amplituda predaje manjima pa sve do pretvorbe u unutarnju energiju.

Kinetička energija pulsirajućeg dijela je razlika srednje vrijednosti kinetičke energije cijelog i osrednjenog (glavnog) strujanja.

$$\begin{aligned} \text{Cijelo:} \quad & \overline{\frac{\partial(\rho u_i \frac{u_i}{2})}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_j \frac{u_j}{2})}{\partial x_j}} = \overline{-u_i \frac{\partial p}{\partial x_i} + u_i \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\mu + \mu_t) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right]} \\ \text{Glavno:} \quad & \frac{\partial(\rho \bar{u}_i \frac{\bar{u}_i}{2})}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \bar{u}_j \frac{\bar{u}_j}{2})}{\partial x_j} = -\bar{u}_i \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \bar{u}_i \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\mu + \mu_t) \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \right] + \bar{u}_i \frac{\partial}{\partial x_j} (-\overline{\rho u'_i u'_j}) \end{aligned}$$

Razlika jednadžbi ta dva strujanja predstavlja jednadžbu za kinetičku energiju turbulencije \bar{k} :

$$\frac{\partial(\rho \bar{k})}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \bar{u}_j \bar{k})}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_j} - \overline{\rho u'_j k'} - \overline{u'_j p'} \right) - \mu \frac{\partial \overline{u'_i}}{\partial x_j} \frac{\partial \overline{u'_i}}{\partial x_j} - \overline{\rho u'_i u'_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \quad (26)$$

Ta jednadžba opisuje balans između pet prepoznatljivih doprinosa, a to su:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho \bar{k})}{\partial t} & \quad - \text{lokalna promjena,} \\ \frac{\partial(\rho \bar{u}_j \bar{k})}{\partial x_j} & \quad - \text{konvekcijski član,} \\ \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_j} - \overline{\rho u'_j k'} - \overline{u'_j p'} \right) & \quad - \text{difuzijski član,} \\ \rho \nu \frac{\partial \overline{u'_i}}{\partial x_j} \frac{\partial \overline{u'_i}}{\partial x_j} & \quad - \text{član koji predstavlja disipaciju} \\ & \quad \text{kinetičke energije,} \\ -\overline{\rho u'_i u'_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} & \quad - \text{član izvora/ponora kinetičke energije.} \end{aligned}$$

Difuzijski član se sastoji od molekularne i turbulentne difuzije, dok se turbulentna difuzija sastoji od difuzije zbog kaotičnog gibanja i pulsirajućeg tlaka. Disipacija kinetičke energije (ε) je pozitivna vrijednost.

2.4. k - ε model turbulencije

Model se bazira na izračunu turbulentne kinetičke energije (\bar{k}) i disipacije kinetičke energije ($\bar{\varepsilon}$). Kinetička energija računa se prema izrazu (26), a izraz (27) predstavlja disipaciju kinetičke energije

$$\frac{\partial(\rho\bar{\varepsilon})}{\partial t} + \frac{\partial(\rho\bar{u}_j\bar{\varepsilon})}{\partial x_j} = a + b + c + d + e \quad (27)$$

$$a = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial x_j} - \rho \overline{u'_j \varepsilon'} - 2\nu \overline{\frac{\partial u'_j}{\partial x_k} \frac{\partial p'}{\partial x_k}} \right] \quad (27a)$$

$$b = -2\rho\nu^2 \overline{\frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j \partial x_k} \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j \partial x_k}} \quad (27b)$$

$$c = -2\mu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \left[\overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k}} + \overline{\frac{\partial u'_k}{\partial x_j} \frac{\partial u'_k}{\partial x_i}} \right] \quad (27c)$$

$$d = -2\mu \overline{\frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_k} \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} u'_j} \quad (27d)$$

$$e = -2\mu \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}} \quad (27e)$$

Izraz (27a) predstavlja difuziju koja se dijeli na turbulentnu i molekularnu. $\mu \frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial x_j}$ predstavlja molekularnu difuziju koja dominira blizu zida dok ostatak predstavlja turbulentnu zbog pulsirajućih brzina i tlaka. Izraz (27b) fizikalno predstavlja ponor i on je uvijek negativan pa se zaključuje da smanjuje disipaciju kinetičke energije dok zbroj izraza (27c), (27d) i (27e) predstavlja generaciju, tj. povećanje disipacije, [5].

Pošto je nemoguće odrediti točan odnos pulsirajućih brzina i tlaka, svaki od tih članova se modelira ovisno veličini Reynoldsovog broja turbulencije Re_t .

$$Re_t = \frac{\mu_t}{\mu}$$

Standardni $k - \varepsilon$ model je pogodan za visoke vrijednosti Re_t .

2.4.1. Visoki Re_t , [1], [4], [6]

U ovom području dominira turbulentna viskoznost, dok se molekularna može zanemariti pa se prema tome izrazi modeliraju. Kako bi se pojednostavili izrazi, turbulentna difuzija se modelira kao molekularna, dakle preko konstante i gradijenta. Referirajući se na izraz (26), turbulentna difuzija je modelirana kao:

$$\overline{\rho u'_j k'} - \overline{u'_j p'} = \frac{\mu_t}{\sigma^k} \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_j}$$

a turbulentna difuzija iz izraza za disipaciju kinetičke energije (27a)

$$-\overline{\rho u'_j \varepsilon'} - 2\nu \overline{\frac{\partial u'_j}{\partial x_k} \frac{\partial p'}{\partial x_k}} = \frac{\mu_t}{\sigma^\varepsilon} \frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial x_j}$$

Potrebno je još modelirati i član koji predstavlja izvor/ponor kinetičke energije. Nastala pulsacija je nestabilna i tijekom vremena se raspada na pulsacije sve manjih valnih duljina, a sve viših frekvencija. Brzina disipacije kinetičke energije je proporcionalna brzini oduzimanja kinetičke energije od glavnog strujanja pa je generacija $\bar{\varepsilon}$ proporcionalna s G , dok je s karakterističnim vremenom raspada pulsacija obrnuto proporcionalna.

$$\rho \bar{\varepsilon} = \frac{C_1 G \bar{\varepsilon}}{\bar{k}}$$

Funkcija C_1 poprima konstantnu vrijednost pri visokim Re_t . Za model destrukcije je potrebno uočiti par fizikalnih činjenica. Ako nema generacije kinetičke energije, dakle $G = 0$, generacija $\bar{\varepsilon}$ također postaje jednaka nuli, a $\bar{\varepsilon}$ teži u nulu. To govori da je destrukcija $\bar{\varepsilon}$ proporcionalna omjeru disipacije i karakterističnog vremena raspada pulsacija:

$$\text{Destrukcija } \rho \bar{\varepsilon} = \frac{C_2 \rho \bar{\varepsilon}^2}{\bar{k}}$$

C_2 je, kao i C_1 , konstanta pri visokim vrijednostima Re_t . Jednadžbe koje čine takav oblik modela turbulencije su iduće:

$$\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_j} = 0 \quad (28a)$$

$$\rho \bar{u}_i \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_j} + \rho \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\mu + \mu_t) \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \right] \quad (28b)$$

$$\mu_t = \frac{C_\mu \rho \bar{k}^2}{\bar{\varepsilon}} \quad (28c)$$

$$\frac{d(\rho \bar{k})}{dt} + \frac{\partial(\rho \bar{u}_j \bar{k})}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma^k} \right) \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_j} \right] + G - \rho \bar{\varepsilon} \quad (28d)$$

$$G = 2\mu_t D_{ij}^2 \quad (28e)$$

$$\frac{\partial(\rho \bar{\varepsilon})}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \bar{u}_j \bar{\varepsilon})}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma^\varepsilon} \right) \frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial x_j} \right] + \frac{C_1 G \bar{\varepsilon}}{\bar{k}} - \frac{C_2 \rho \bar{\varepsilon}^2}{\bar{k}} \quad (28f)$$

Tablica 1 prikazuje standardne vrijednosti koeficijenata pri velikim vrijednostima Re_t .

Tablica 1: Standardni iznosi koeficijenata konstanti pri velikim Re_t .

C_μ	C_1	C_2	σ^k	σ^ε
0,09	1,44	1,92	1	1,3

Glavna pretpostavka ovog modela je potpuno razvijeno turbulentno strujanje što nije slučaj po cijeloj proračunskoj domeni. Problem se javlja u točkama zastoja i uz nepropusnu stijenku. U ova dva slučaja je Re_t mala vrijednost (dominacija molekularne viskoznosti).

2.4.1.1. Zidne funkcije

Vertikalne brzine uz stijenku se mogu zanemariti, dok postoji tangencijalno položena brzina glavnog strujanja. Iz jednadžbe količine gibanja za smjer strujanja ostaje:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[(\mu + \mu_t) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right] = \frac{\partial \tau}{\partial y} = 0$$

a na zidu je definiran rubni uvjet zidnog smičnog naprezanja τ_w pa se onda smatra kako je

$$\tau = \tau_w = \text{const}$$

To je izraz s kojim se pokušava modelirati odnos u graničnom sloju. U tom dijelu dominaciju iskazuje molekularna viskoznost pa se može smatrati kako je profil brzine tu linearan. To je već pokazano, [5]. Dakle vrijedi:

$$\bar{u} = \frac{\tau}{\mu} y$$

Nakon linearnog podsloja dolazi prijelazni podsloj u kojem su molekularna i turbulentna viskoznost istog reda veličine koji onda prelazi u inercijski podsloj u kojem vrijedi navedeni model turbulencije jer turbulentna viskoznost postaje dominantna. Ukoliko se turbulentna viskoznost modelira pomoću Prandtlove hipoteze puta miješanja:

$$\mu_t = \rho \kappa^2 y^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right| \quad (29)$$

slijedi izraz za brzinu:

$$\bar{u} = \frac{1}{\kappa} \sqrt{\frac{\tau}{\rho}} \ln(y) + C$$

Bezdimenzijski:

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(Ey^+)$$

Taj je izraz dobiven uz pretpostavku da se tlak u tom dijelu uzdužno ne mijenja. Problem nastaje zbog velikog gradijenta brzine u području od stijenke prema slobodnoj struji. U inercijskom podsloju doprinos konvekcije i difuzije kinetičke energije turbulencije je zanemariv u odnosu na generaciju i disipaciju iste pa se zaključuje da se radi o ravnotežnom graničnom sloju (brzina nastajanja kinetičke energije jednaka je disipacije u toplinu). Imajući to na umu, veličina G se sada zapisuje:

$$G = \mu_t \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2$$

Izraz (28c) prikazuje model turbulentne viskoznosti pa se iz njega izražava $\rho \bar{\epsilon}$, a iz ravnotežnog odnosa u graničnom sloju $\rho \bar{\epsilon} = G$ proizlazi:

$$\tau_w^2 = C_\mu \rho^2 \overline{k^2}$$

Ili izraženo preko osrednjene brzine:

$$\tau_w = \frac{\rho \kappa C_\mu^{\frac{1}{4}} \overline{k^{\frac{1}{2}}} \bar{u}}{\ln(Ey^+)}$$

Bezdimenzijska visina je definirana:

$$y^+ = \frac{\rho}{\mu} C_\mu^{\frac{1}{4}} \overline{k^{\frac{1}{2}}} y$$

Za izraz disipacije kinetičke energije turbulencije treba derivirati logaritamski profil brzine po vertikalnoj koordinati te uvrstiti u izraz za ravnotežni slučaj, pri čemu treba imati na umu izraz (29), a to rezultira izrazom:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{C_\mu^{\frac{3}{4}} \overline{k^{\frac{3}{2}}}}{\kappa y}$$

Time su zaključene zidne funkcije za visoke vrijednosti Re_t . Drugi način opisivanja područja niskih Re_t vrijednosti je razvoj specijalnog modela, no takvi modeli nemaju širu primjenu zbog poteškoće definiranja univerzalnog modela i zbog neekonomičnosti proračuna.

2.5. k - ω model turbulencije, [7], [8]

Ovaj model je izveden zbog potrebe da se pronađe bolje rješenje strujanja uz nepropusnu stijenku jer kao što je rečeno, prijašnji model je dobar za velike iznose Reynoldsovog broja turbulencije, a u okolišu nepropusne stijenke vladaju manje vrijednosti. Tu se javlja i problem opisivanja gradijenta tlaka u graničnom sloju jer to prijašnji model ne opisuje dobro. Smična naprezanja ostaju konstantna, a to dovodi do lošijeg i nepouzdanijeg opisivanja odvajanja strujanja.

Uvodi se pojam specifične disipacije kinetičke energije (ω), a predstavlja omjer disipacije i kinetičke energije:

$$\omega = \frac{\varepsilon}{\beta^* k}$$

Izraz za specifičnu disipaciju kinetičke energije:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{\omega}}{dt} = & \frac{\bar{\omega}}{\bar{k}} \left[-v \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - 2v \frac{\overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u'_k}{\partial x_i} \frac{\partial u'_k}{\partial x_j}}}{\beta^* \bar{\omega}} \right] \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \frac{2v}{\beta^* \bar{k}} \overline{u'_k \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_k \partial x_j}} \\ & - \left[\frac{2v}{\beta^* \bar{\omega}} \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k} \frac{\partial u'_k}{\partial x_j}} + v \overline{\frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j \partial x_k} \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j \partial x_k}} - \beta^* \bar{\omega}^2 \right] + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[v \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial x_j} - \frac{v}{\beta^* \bar{k}} \overline{u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}} \right] \\ & + \frac{1}{2} \frac{\bar{\omega}}{\bar{k}} \overline{u'_j u'_i u'_i} - \frac{2v}{\beta^* \rho k} \overline{\frac{\partial p'}{\partial x_k} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k}} + \frac{\bar{\omega}}{\rho \bar{k}} \overline{p' u'_j} + \frac{1}{\bar{k}} \left[2v \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_j} - \frac{1}{2} \overline{u'_j u'_i u'_i} - \frac{1}{\rho} \overline{p' u'_j} \right] \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial x_j} \\ & + \frac{1}{\bar{k}^2} \left[\frac{\bar{\omega}}{2} \overline{u'_j u'_i u'_i} - \frac{1}{\beta^*} \overline{v u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_i}{\partial x_k}} + \frac{\bar{\omega}}{\rho} \overline{p' u'_j} - \frac{2}{\beta^* \rho} \overline{v \frac{\partial p'}{\partial x_k} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k}} \right] \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_j} \end{aligned}$$

Loša karakteristika ovog modela je loše opisivanje strujnica podalje od graničnog sloja, dakle u području slobodne struje. Model turbulentne viskoznosti definiran je idućim izrazom:

$$\mu_t = \frac{\rho k}{\omega}$$

Za ovaj model nisu potrebne zidne funkcije jer je neostjeljiv na vrijednosti y^+ .

Jednadžbe za kinetičku energiju i specifičnu disipaciju s modeliranim članovima su prikazane u nastavku:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \bar{k}) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \bar{k} \bar{u}_j) &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_j} \right] + G_k - Y_k + S_k \\ \frac{\partial}{\partial t} (\rho \bar{\omega}) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \bar{\omega} \bar{u}_j) &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\omega} \right) \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial x_j} \right] + G_\omega - Y_\omega + S_\omega \end{aligned}$$

G_k predstavlja generaciju turbulentne kinetičke energije koja proizlazi zbog gradijenata srednje brzine, dok G_ω predstavlja generaciju ω na isti način kao u modelu $k - \varepsilon$. Y_k i Y_ω predstavljaju disipaciju k i ω zbog turbulencije. S_k i S_ω predstavljaju izvore. Kako bi se bolje opisalo

turbulentno strujanje, u ovoj se izvedbi jednadžbi turbulentna viskoznost prigušuje sa koeficijentom prigušenja α^* prema izrazu:

$$\mu_t = \alpha^* \frac{\rho k}{\omega}$$

Gdje je taj koeficijent prigušenja jednak:

$$\alpha^* = \alpha_\infty^* \left(\frac{\alpha_0^* + \frac{Re_t}{R_k}}{1 + \frac{Re_t}{R_k}} \right)$$

a konstante za koeficijent prigušenja iznose:

Tablica 2: Konstante za $k - \omega$ model turbulencije pri niskim vrijednostima Re_t broja

R_k	α_0^*
6	0,024

Dok za visoke vrijednosti Re_t koeficijent prigušenja iznosi:

$$\alpha^* = \alpha_\infty^* = 1$$

Disipacije su modelirane izrazima:

$$Y_k = \rho \beta^* f_\beta^* \bar{k} \bar{\omega}$$

$$Y_\omega = \rho \beta^* f_\beta^* \bar{\omega}^2$$

2.6. $k-\omega$ SST model turbulencije, [10]

$k - \omega$ SST model turbulencije koristi $k - \omega$ model turbulencije od nepropusne stijenke kroz viskozni podsloj, stoga se $k - \omega$ SST model može koristiti kao model niskih Reynoldsovih

brojeva turbulencije bez dodatnih funkcija prigušenja. Na području slobodnih struja, SST formulacija koristi $k - \varepsilon$ model i time izbjegava uobičajeni problem prevelike osjetljivosti na svojstva turbulentnosti slobodne struje koje karakterizira $k - \omega$ model.

Prednost modela je zadovoljavajuće ponašanje u područjima većih gradijenata tlaka i odvajajućih strujanja, dok kao manu izražava veće turbulencije na područjima kao zastoja i područjima s većim ubrzanjem čestica. Međutim, ova tendencija je puno manje izražena nego kod običnog $k - \varepsilon$ modela.

Jednadžbe modela su slične jednadžbama prošlih te su prikazane u nastavku.

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \bar{k}) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho \bar{k} \bar{u}_j) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_j} \right] + \tilde{G}_k - Y_k + S_k$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \bar{\omega}) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho \bar{\omega} \bar{u}_j) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\omega} \right) \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial x_j} \right] + G_\omega - Y_\omega + D_\omega + S_\omega$$

\tilde{G}_k predstavlja generaciju turbulentne kinetičke energije koja se javlja zbog gradijenta srednje brzine, a G_ω predstavlja generaciju specifične disipacije (ω). Također, Y_ω i Y_k predstavljaju disipaciju k i ω zbog turbulencije. S_ω i S_k predstavljaju izvore. Pojavljuje se pojam mješovite difuzije D_ω čija se definicija nalazi u nastavku.

$$\tilde{G}_k = \min(G_k, 10\rho\beta^*\bar{k}\bar{\omega})$$

$$G_\omega = \frac{\alpha}{\nu_t} G_k$$

$$Y_k = \rho\beta^* f_{\beta^*} \bar{k} \bar{\omega}, f_{\beta^*} = 1$$

$$Y_\omega = \rho\beta^* f_{\beta^*} \bar{\omega}^2, f_{\beta^*} = 1$$

Turbulentna viskoznost je definirana izrazom:

$$\mu_t = \frac{\rho k}{\omega} \frac{1}{\max\left[\frac{1}{\alpha^*}, \frac{SF_2}{\alpha_1 \omega}\right]}$$

S je magnituda brzine deformacije, a α^* je koeficijent prigušenja. Funkcije miješanja F_1 i F_2 dodane su SST modelu kako bi osigurale odgovarajuće ponašanje modela u blizini nepropusnih stijenki i u područjima slobodnog strujanja.

$$\sigma_k = \frac{1}{\frac{F_1}{\sigma_{k,1}} + \frac{1-F_1}{\sigma_{k,2}}}$$

$$\sigma_\omega = \frac{1}{\frac{F_1}{\sigma_{\omega,1}} + \frac{1-F_1}{\sigma_{\omega,2}}}$$

$$F_1 = \text{tgh}(\Phi_1^4)$$

$$F_2 = \text{tgh}(\Phi_2^2)$$

Izraz za kombiniranje D_ω kombinira $k - \epsilon$ i $k - \omega$ model turbulencije, a definiran je prema izrazu:

$$D_\omega = 2(1 - F_1)\rho\sigma_{\omega,2} \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j}$$

Konstante $k - \omega$ SST modela iznose:

Tablica 3: Konstante $k - \omega$ SST modela turbulencije

$\sigma_{\omega,1}$	$\sigma_{\omega,2}$	$\sigma_{k,1}$	$\sigma_{k,2}$	a_1	β^*
2	1,168	1,176	1	0,31	0,09

3. Metoda kontrolnih volumena

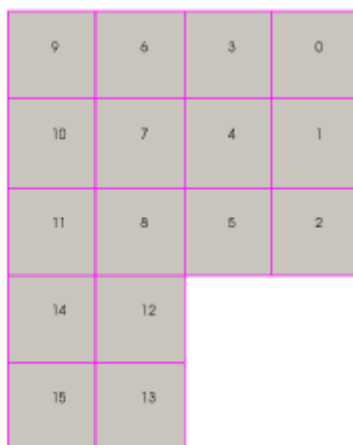
Metoda konačnih volumena (MKV) je numerička metoda koja pretvara parcijalne diferencijalne jednačbe zakona očuvanja u diskretne algebarske jednačbe primjenjive na kontrolne volumene

3.1. Diskretizacija, [11]

Algebarske jednačbe izvede se iz osnovne jednačbe očuvanja varijable ϕ . Nakon što se izračunaju vrijednosti ϕ , podaci se analiziraju kako bi se izvukle potrebne informacije.

3.1.1. Diskretizacija domene

Prostor se dijeli na diskretne, nepreklapajuće kontrolne volumene koji potpuno popunjavaju proračunsku domenu kako bi se dobila proračunska mreža.



Slika 8: Diskretizirana domena

Slika 8 prikazuje primjer diskretizirane domene. Rešetka se sastoji od 16 nepreklapajućih kontrolnih volumena čija geometrija je definirana sa 16 centara. Algebarske jednačbe koje proizlaze iz diskretizacije jednačbe očuvanja zapisuju se za svaki volumen u proračunskoj

domeni, pri čemu se rješenje dobiva u obliku skupa vrijednosti pripadnog polja, koje su smještene u središtu svakog volumena.

3.1.2. Diskretizacija jednadžbi

Tijekom diskretizacije, parcijalne diferencijalne jednadžbe se integriraju preko svakog kontrolnog volumena u mreži, a rezultat toga je skup algebarskih jednadžbi. Algebarske jednadžbe se zatim sastavljaju u globalne matrice i vektore.

Diferencijalna jednadžba prijenosa fizikalne veličine ϕ glasi:

$$\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \rho \frac{\partial}{\partial x_j} \left(u_j \Phi - \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right) = S_\phi \quad (31)$$

Kako bi se dobio izraz sa kojim se može raditi, potrebno je jednadžbu (31) integrirati po odgovarajućim argumentima.

$$\int_{KV} \rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} dV + \int_{KV} \rho \frac{\partial}{\partial x_j} \left(u_j \Phi - \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right) dV = \int_{KV} S_\phi dV \quad (32)$$

$$\int_{KV} \rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} dV \quad - \text{Vremenska promjena fizikalne veličine} \quad (32a)$$

(lokalna promjena),

$$\int_{KV} \rho \frac{\partial}{\partial x_j} \left(u_j \Phi - \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right) dV \quad - \text{Difuzijski i konvekcijski član,} \quad (32b)$$

$$\int_{KV} S_\phi dV \quad - \text{Izvorski član.} \quad (32c)$$

Koristeći Gaussov teorem, član (32b) se može zapisati kao:

$$\int_{KV} \rho \frac{\partial}{\partial x_j} \left(u_j \Phi - \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right) dV = \int_{KP} \rho \left(u_j \Phi - \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right) n_j dS \quad (33)$$

što predstavlja protok veličine kroz granice domene i kontrolnih volumena.

Metoda kontrolnih volumena svodi se na aproksimiranje diferencijalne jednadžbe pomoću konačnih razlika i konačnih volumena pa bi sukladno tome diferencijalni član bio jednak:

$$\int_{KV} \rho \Phi dV = \rho \bar{\Phi} \Delta V$$

Gdje $\bar{\Phi}$ predstavlja srednju vrijednost u cijelom volumenu. Dakle, kako taj član predstavlja difuzijski i konvekcijski protok može se zaključiti kako će samo normalne vrijednosti imati utjecaj na vrijednosti fizikalne veličine unutar volumena. S tim na umu, izraz (33) se može aproksimirati na idući način:

$$\int_{KP} \rho \left(u_j \Phi - \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right) dS = (\overline{u_n \Phi})_{\Delta S} \Delta S - \Gamma \left(\overline{\frac{\partial \Phi}{\partial n}} \right)_{\Delta S} \Delta S \quad (33a)$$

Ukoliko se radi o granici domene, $\left(\overline{\frac{\partial \Phi}{\partial n}} \right)_{\Delta S}$ se aproksimira izrazom:

$$\left(\overline{\frac{\partial \Phi}{\partial n}} \right)_{\Delta S} = \frac{\partial \Phi}{\partial n} \Big|_n$$

Tu se može postaviti i pitanje utjecaja konvekcijskog i difuzijskog protoka, a njihov omjer predstavlja Pe broj:

$$Pe = \frac{u_n \Phi \Delta n}{\Gamma}$$

Taj podatak govori o tome kako je utjecaj difuzije dominantniji od konvekcije ukoliko Δn , koji predstavlja karakterističnu dimenziju kontrolnog volumena, postaje sve manji. To je slučaj u graničnom prijelazu. Postupak definiranja na plohama naziva se numeričkom shemom.

Lokalna se promjena aproksimira na idući način:

$$\int_{KV} \rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} dV = \rho \frac{\partial \Phi_c}{\partial t} \Delta V$$

a vremenski promjenjivi član se diskretizira pomoću jednog od nekoliko metoda vremenske diskretizacije (vremenske integracije).

3.1.2.1. Metode vremenske integracije, [12]

3.1.2.1.1. Implicitna metoda vremenske integracije

Ta metoda je bazirana na vremenskoj razlici unazad:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}(t + \Delta t) \approx \frac{\Phi(t + \Delta t) - \Phi(t)}{\Delta t}$$

U toj metodi je uključena greška 1. reda, a ako se pojave fizikalni problemi s nelinearnim svojstvima materijala, u matricnoj jednadžbi je potrebno proračunavati matrice svojstava za svaku iteraciju.

3.1.2.1.2. Implicitna Crank-Nicolsonova metoda vremenske integracije

U toj metodi je aproksimacija određena središnjom razlikom na način da se u središtu vremenskog koraka uzimaju uprosječene vrijednosti fizikalne veličine:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right) \approx \frac{\Phi(t + \Delta t) - \Phi(t)}{\Delta t}$$

U toj metodi se javlja greška 2. reda što znači da se smanjuje s 2. potencijom vremenskog koraka. Obje implicitne metode su bezuvjetno stabilne, dakle neovisno o veličini vremenskog koraka, no mora se uzimati u obzir da s povećanjem vremenskog koraka raste i greška u rješenju.

3.1.2.1.3. Eksplicitna metoda vremenske integracije

Eksplicitna metoda se bazira na vremenskoj razlici unaprijed:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}(t) \approx \frac{\Phi(t + \Delta t) - \Phi(t)}{\Delta t}$$

Za određivanje fizikalne veličine u budućem trenutku, koriste se vrijednosti fizikalne veličine u sadašnjem trenutku. Za razliku od gore navedenih implicitnih metoda, eksplicitna metoda vremenske integracije je stabilna isključivo ako je korak integracije manji od kritičnog. Uzmimo li se svi aproksimacijski izrazi i uvrstimo u početni izraz, dobije se konačni oblik jednadžbe:

$$\rho \frac{\partial \Phi_c}{\partial t} \Delta V = -\Phi_c \sum_{i=1}^m a_N^i - \sum_{i=1}^m a_N (\Phi_c - \Phi_N) + S_c \Delta V$$

Navedene aproksimacije se odnose na sve granice domene i na sve kontrolne volumene pa skup tih jednadžbi čini sustav koji se zapisuje u matričnom obliku:

$$\mathbf{A}\Phi = \mathbf{b}$$

Gdje su a_N i a_C koeficijenti iz jednadžbi oblika te se a_C nalaze na dijagonali matrice \mathbf{A} . Kako bi diskretizirana jednadžba imala smisla, potrebno je pridržavati se nekoliko pravila.

3.2. Numeričke sheme rješavanja aproksimacijskih izraza

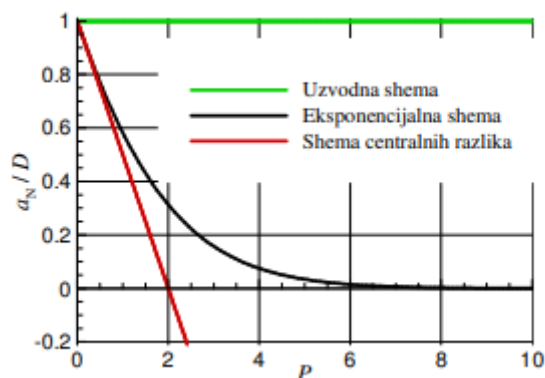
3.2.1. Centralne razlike, [11], [12], [13]

Ova se shema temelji na pretpostavci linearne raspodjele fizikalne veličine između težišta kontrolnih volumena. Difuzijski se član raščlanjuje prema izrazu:

$$-D \frac{d\Phi}{dn} \Big|_n = -D(\Phi_n - \Phi_c)$$

A ravnomjerno raspoređen konvekcijski član je definiran izrazom:

$$\Phi_n = \frac{\Phi_c - \Phi_N}{2}$$



Slika 9: Usporedba raznih numeričkih shema

Ova metoda je drugog reda točnosti. Slika 9 prikazuje da shema centralnih razlika proizvede negativne vrijednosti koeficijenata za $P > 2$, što će rezultirati pojavom nerealnih oscilacija u blizini promjena.

3.2.2. Upwind metoda, [11]

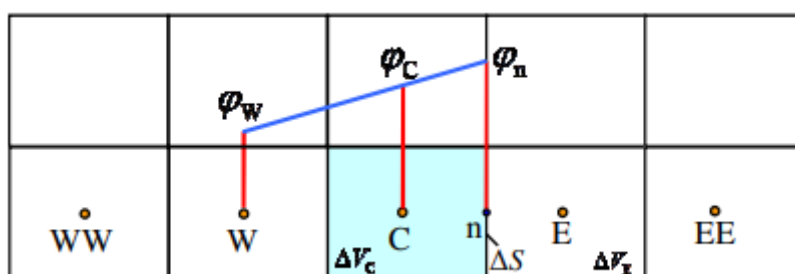
Kao i u mnogim shemama, tu se također modeliraju konvekcijski i difuzijski član neovisno jedan o drugome. Difuzijski član ostaje jednak izrazu (34) dok za konvekcijski član vrijedi da će Peckletov broj poprimiti vrijednost beskonačnosti. Za $+\infty$ će izraz za protok biti modeliran:

$$F\Phi_c + D(\Phi_c - \Phi_N)$$

Slika 9 prikazuje kako ova metoda griješi više pri većim Peckletovim brojevima što je nedostatak. To se dešava zbog neovisnosti konvekcije o difuziji. Još jedan nedostatak je unošenje lažne difuzije u rješenje i što je prvog reda točnosti. U drugu ruku, kao pozitivnu stranu ističe jednostavnost računanja koeficijenata, a neće se desiti lažna oscilatorna ponašanja jer su ti koeficijenti uvijek pozitivni. Što se tiče konvergencije, također se može zamijetiti kako ne radi probleme zbog svoje robusnosti.

3.2.3. Linearna Upwind shema, [11], [12]

Ta shema je drugog reda točnosti u kojoj se difuzijski član definira prema izrazu (34). Ukoliko se radi o ravnomjernoj mreži, Slika 10 prikazuje raspodjelu konvekcijjskog člana.



Slika 10: Raspodjela konvekcijjskog člana u linearnoj upwind metodi

$$\phi_n = \begin{cases} \phi_C + \frac{1}{2}(\phi_C - \phi_W) & \rho u_n \Delta S > 0 \\ \phi_E + \frac{1}{2}(\phi_E - \phi_{EE}) & \rho u_n \Delta S < 0 \end{cases}$$

Linearni upwind generira negativne koeficijente i stvara oscilacijska rješenja u blizini diskontinuiteta, slično kao i prethodne metode višeg reda točnosti. Sve metode koje proizvode nefizičke oscilacije u rješenjima problema, što uključuje stvaranje novih maksimuma i minimuma čak i kada je izvorni član nula, nazivaju se neomeđenima. Svojstvo omeđenosti numeričke metode izuzetno je važno, i od kvalitetne numeričke metode se uvijek očekuje da zadovoljava to svojstvo bez iznimke.

3.3. Rubni i početni uvjeti

3.3.1. Rubni uvjeti, [13]

Rubni uvjeti su vrijednosti fizikalnih veličina ili njihovih derivacija, poznatih u svakom trenutku, koje se nalaze na granicama promatranog sustava. Za prijenos topline, dijele se u 3 skupine, a to su: Dirichletovi, Neumanovi i Newtonovi rubni uvjeti.

3.3.1.1. Dirichletovi rubni uvjeti

U svakom trenutku je zadana vrijednost tražene fizikalne veličine na granicama promatranog sustava, a u ovom razmatranju je to temperatura. Matematički se zapisuje kao:

$$T = T_0 \text{ na granici } \Gamma_T$$

3.3.1.2. Neumannovi rubni uvjeti

Neumannov rubni uvjet predstavlja vrijednost gradijenta fizikalne veličine na granici sustava, a sa stajališta prijenosa topline može se reći da predstavlja gustoću toplinskog toka na granici. Matematički se zapisuje kao:

$$q_f = \left(-\lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial n}\right)_f \text{ na granici } \Gamma_{qf}$$

3.3.1.3. Newtonovi rubni uvjeti

Ovi rubni uvjeti predstavljaju vrijednost toplinskog toka na granici sustava, a zadan je još jednim načinom prijenosa topline, konvekcijom. Matematički se zapisuje kao:

$$q_c = \alpha(\vartheta_c - \vartheta_\infty) \text{ na granici } \Gamma_{qc}$$

Newtonovi rubni uvjeti se još nazivaju i Cauchyjevi rubni uvjeti. Može se vidjeti da nam daju povezanost gradijenta temperature i razlike granične i temperature fluida.

Na jednom rubu može biti zadan samo jedan od ta 3 rubna uvjeta dok je početni uvjet zadan po cijelom području diskretizacije, odnosno po cijeloj domeni.

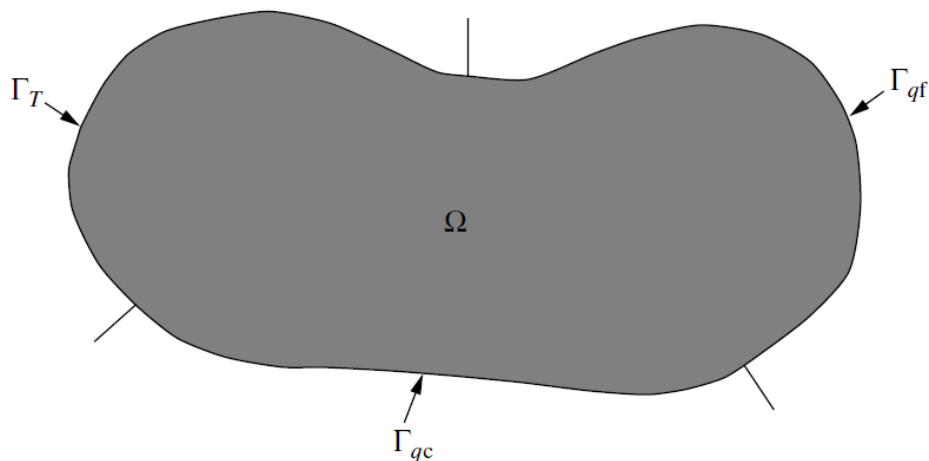
3.3.2. Početni uvjeti, [13]

Početni uvjeti predstavljaju distribuciju fizikalne veličine po cijeloj domeni Ω u trenutku početka analize problema. U ovom problemu je to raspodjela temperature i matematički je prikazana kao:

$$T(x,y,z,t=0) = T_0(x,y,z)$$

Ovakva vrsta uvjeta dolazi u obzir prilikom razmatranja nestacionarnih problema.

Slika 11 prikazuje raspodjelu rubnih i početnih uvjeta.



Slika 11: Raspodjela početnih i rubnih uvjeta na jednoj domeni

3.4. Algoritmi za rješavanje problema MKV, [14]

Skup jednažbi uključuje jednu vektorsku jednažbu (moment) i jednu skalarnu jednažbu (kontinuitet), što znači da je sustav zatvoren. No, problem je u tome što se tlak ne pojavljuje u jednažbi kontinuiteta i taj se sustav zove sustav s točkom sedla. Na brzinu direktno ne utječe apsolutna vrijednost tlaka, već razlikama u tlaku. Metode za rješavanje ovog sustava tlaka i brzine temelje se na izvođenju jednažbe za tlak iz jednažbe kontinuiteta i korištenju izračunatih vrijednosti tlaka kako bi se osigurao kontinuitet polja brzine.

3.4.1. PIMPLE algoritam

Taj algoritam je kombinacija PISO i SIMPLE algoritama. Za razliku od SIMPLE algoritma, PIMPLE uključuje dodatne korake za korekciju tlaka, a koristi se za nestacionarne, kvazistacionarne i tranzijentne pojave. Ideja iza upotrebe više koraka za ispravak tlaka je potpuno razriješiti međudnos između tlaka i brzine u jednom proračunskom koraku, čime se

eliminira potreba za višestrukim nelinearnim iteracijama. Koraci PIMPLE algoritma su prezentirani u nastavku.

- a) Za rješavanje momentne jednadžbe se koristi polje tlaka iz prethodnog koraka ili korištenjem rubnog uvjeta ukoliko se radi o prvom koraku.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot (\Phi^{(s-1)} u) - \nabla \cdot (v \nabla u) = -\nabla p^{(s-1)}$$

Također se računa volumni protok zbog linearizacije konveksijskog člana, a momentna jednadžba poprima oblik:

$$\frac{\Delta u}{\Delta t} + a_{ii}^u u_i + \sum_{j \neq i}^N a_{ij}^u u_j = r_b - \nabla p^{(s-1)}$$

Važno je napomenuti da u ovom slučaju nema primjene podrelaksacije, budući da se jednadžba momenta rješava samo jednom tijekom svakog vremenskog koraka. Rezultat rješenja jednadžbe momenta je polje brzine u^* , koje ne zadovoljava jednadžbu kontinuiteta.

- b) Jednadžba tlaka se sastavlja na isti način kao u SIMPLE algoritmu, a pri tome se ne uzimaju u obzir inercijski efekti koji proizlaze iz vremenskog deriviranja u jednadžbi momenta. To je bitno radi dosljednosti pošto rješenje ne smije ovisiti o veličini vremenskog koraka. Oblik jednadžbe tlaka:

$$\nabla \cdot [(a_{ii}^u)^{-1} \Delta p] = \nabla \cdot [(a_{ii}^u)^{-1} H(u^*)]$$

Izraz $H(u^*)$ uključuje doprinose izvan glavne dijagonale iz jednadžbe momenta, zajedno s bilo kakvim doprinosima s desne strane, osim gradijenta tlaka. Iz praktičnih razloga, izraz s desne strane tumači se kao pseudobrzina \hat{u} .

Jednadžba tlaka tada poprima konačan oblik:

$$a_{ii}^p p_i + \sum_{j \neq i}^N a_{ij}^p p_j = \nabla \cdot \hat{\Phi}$$

Nakon što se dobije rješenje za jednadžbu tlaka $p(s)$, računa se volumni protok $\hat{\Phi}$ koji ispunjava jednadžbu kontinuiteta za svaku plohu f koja dijeli volumene i i j :

$$\Phi^{(s)} = \hat{\Phi} - \sum_{j \neq i}^N a_{ij}^p (p_j^{(s)} - p_i^{(s)})$$

c) Gornji se podaci uvode u jednadžbu za polje brzine pa je ona oblika:

$$u^{(s)} = \frac{1}{a_{ii}^u + \text{diag}\left(\frac{\Delta u}{\Delta t}\right)} \left(a_{ii}^u \hat{u} - \Delta p + \text{source}\left(\frac{\Delta u}{\Delta t}\right) \right)$$

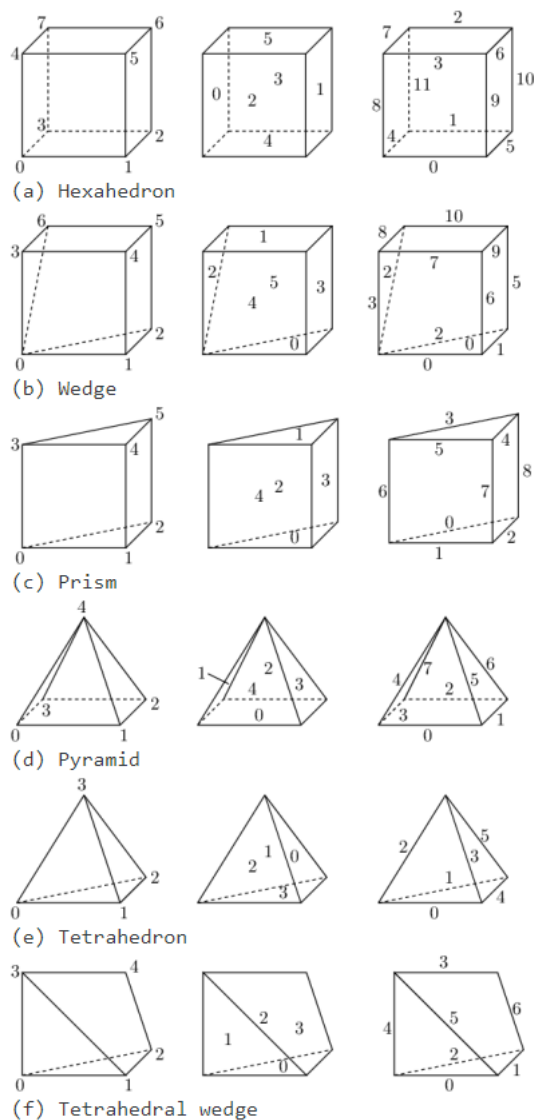
Član $\text{diag}\left(\frac{\Delta u}{\Delta t}\right)$ predstavlja doprinos na glavnoj dijagonali vremenske diskretizacije, a $\text{source}\left(\frac{\Delta u}{\Delta t}\right)$ je doprinos vremenskoj diskretizaciji. Algoritam ponovno ide na korak b) i rješava jednadžbu tlaka, a to se ponavlja ovisno o tome koliki je broj unutarnjih iteracija postavljen. Tijekom iteracija, dobiveno polje brzine utječe na vrijednosti pseudobrzine \hat{u} i volumnog protoka $\hat{\Phi}$ s desne strane jednadžbe tlaka.

Prednosti segregiranih algoritama uključuju nisku potrošnju memorije tijekom simulacija (sadrže samo jednu matricu i polje rješenja). Nedostaci segregiranog pristupa proizlaze iz činjenice da se linearna veza između tlaka i brzine prekida razdvajanjem jednadžbi u dva neovisna sustava. Kako bi se spriječila divergencija rješenja, SIMPLE algoritam koristi postupak podrelaksacije (implicitno za jednadžbu momenta i eksplicitno za polje tlaka).

PISO algoritam je stabilniji jer rješava jednadžbu tlaka više puta kako bi suzbio neprihvatljive korekcije rješenja, ali zahtijeva manje vremenske korake jer se momentna jednadžba drži „zamrznuta“.

4. Proces izrade proračunske mreže

Slika 12 prikazuje vrste kontrolnih volumena koje OpenFoam podržava:

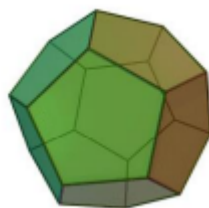


Slika 12: Vrste kontrolnih volumena koje podržava OpenFoam

a Slika 13 prikazuje najčešće korištene:



a) Heksaedarski



b) Poliedarski



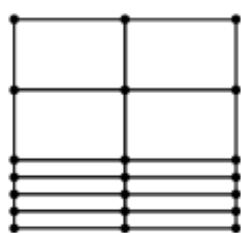
c) Tetraedarski

Slika 13: Najčešće korišteni volumeni: a) Heksaedarski, b) Poliedarski, c) Tetraedarski

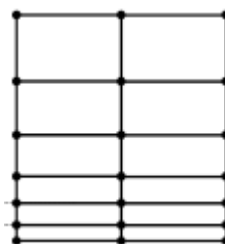
4.1. Generiranje proračunske mreže

4.1.1. Struktura proračunske mreže, [15], [16]

Ovisno o rasporedu kontrolnih volumena, proračunska se mreža može definirati kao strukturirana ili nestrukturirana. Strukturirana mreža se sastoji od volumena čiji raspored slaganja prati obrazac kartezijevog koordinatnog sustava (na oko lijepo raspoređeni kontrolni volumeni). Bitna karakteristika strukture proračunske mreže je i prijelaznost kontrolnih volumena. Mreža koja ima kontinuirani prijelaz veličina volumena je kvalitetnija od one koja nema. Slika 14 prikazuje te prijelaze.



a) Skokoviti prijelaz



b) Kontinuirani prijelaz

Slika 14: Vrste prijelaza kontrolnih volumena: a) Skokoviti, b) Kontinuirani

Kvaliteta izrađene mreže se provjerava naredbom `checkMesh -allTopology -allGeometry`, a uvjeti koji se provjeravaju su opisani u nastavku.

4.1.2. Uvjeti kvalitete mreže, [16]

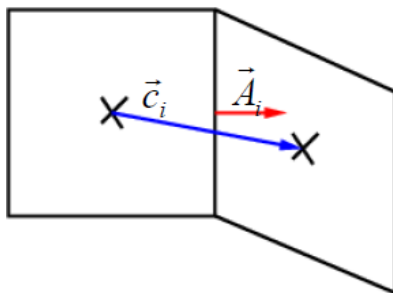
Osnovni i najbitniji uvjeti kvalitete proračunske mreže su:

1. NonOrthogonality
2. MaxSkewness
3. MaxAspectRatio

4.1.2.1. maxNonOrtho

Neortogonalnost se računa kao skalarni umnožak površine zajedničke strane dva volumena i vektora koji spaja dva težišta.

$$nonOrtho = \frac{A_i c_i}{|A_i| |c_i|}$$



Slika 15: Definicija uvjeta maxNonOrthogonality

Neortogonalnost utječe na računanje gradijenata i izraza Laplaceovih jednadžbi pa je maksimalna vrijednost 70° , dok se u nekim slučajevima zahtjevnih mreža i geometrija toleriraju vrijednosti i do 80° . U tim je slučajevima potrebno koristiti korektore u *snGradSchemes* dijelu *fvSchemes* datoteke. Tablica 4 je primjer korištenih shema ovisno o kutu neortogonalnosti.

Tablica 4: Korektivna shema ovisno o kutu neortogonalnosti

Najveći kut [°]	Korištena shema
< 0,5	orthogonal
< 5	uncorrected
< 70	corrected
< 80	limited corrected 0.5

4.1.2.2. Skewness

Definira se kao omjer:

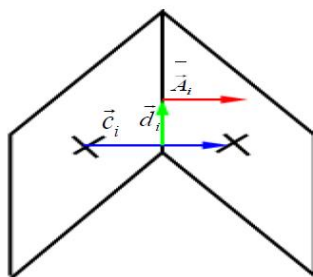
$$skewness = \frac{d_i}{c_i}$$

gdje je:

c_i – udaljenost između dva težišta,

d_i – udaljenost od c_i do težišta spojne plohe dva kontrolna volumena.

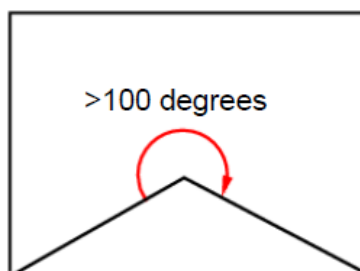
Takva izobličenosť volumena utječe na gradijentne i konvekcijske članove pa je potrebno maksimalnu vrijednost držati do vrijednosti 4, a u nekim se slučajevima može tolerirati vrijednost do 8. Još jedna loša okolnost je degradacija plošnih integrala pomoću numeričkih shema što dodatno doprinosi greški numeričke difuzije. Ako se ne može izraditi optimalna mreža bez iskrivljenih volumena, potrebno je u proračunu koristiti podrelaksacijske faktore.



Slika 16: Definicija uvjeta Skewness

4.1.2.3. maxConcave

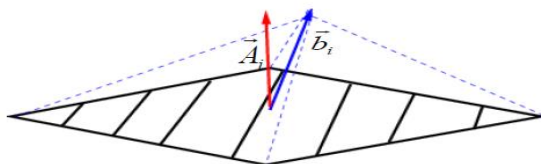
Provjerava unutarnje kutove ploha kontrolnog volumena. Konkavnost je loša karakteristika za proračun pa ako se ona ne može izbjeći, potrebno je koristiti korigirane numeričke sheme za konvekciju i difuziju. Vrijednost koja se navodi kao maksimalna je 80° , no mreža treba težiti prema najmanjoj mogućoj vrijednosti kuta konkavnosti.



Slika 17: Definicija uvjeta maxConcave

4.1.2.4. minArea i minVolume

Provjerava se minimalna površina plohe i volumena jednog kontrolnog volumena. Volumen se računa kao skalarni umnožak vektora površine plohe i vektora koji povezuje težište kontrolnog volumena te središte plohe volumena. Minimalne vrijednosti za obje vrijednosti iznose 10^{-13} .



Slika 18: Definicija uvjeta minArea i minVol

4.1.2.5. minTwist

Pošto se strane dijele na trokutne kontrolne volumene, s obzirom na njihova središta, potrebno je provjeriti uvjet minTwist koji se računa kao:

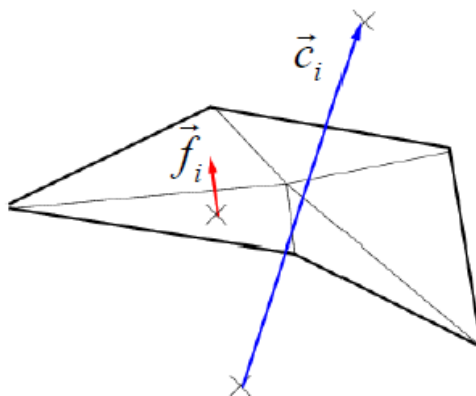
$$faceTwist = \frac{f_i c_i}{|f_i| |c_i|}$$

gdje su:

c_i – vektor udaljenosti između dva težišta,

f_i – vektor udaljenosti od c_i do težišta spojne plohe dva kontrolna volumena.

Za uspješnu mrežu se obično uzima minimalna vrijednost koja iznosi 0,02.



Slika 19: Definicija uvjeta minTwist

4.1.2.6. minCellDeterminant

Ovaj uvjet provjerava determinantu kontrolnog volumena što mu daje na važnosti pogotovo u spregu jednadžbi brzina – tlak, stoga treba biti dobro uravnotežena vrijednost. Predstavlja vrijednost determinante tenzora koji sadrži vektore površina ploha kontrolnog volumena, a minimalna vrijednost iznosi 0,001.

4.1.2.7. minFaceWeight

Kako bi se taj uvjet odredio, potrebno je odrediti projicirane vektora centara susjednih kontrolnih volumena prema:

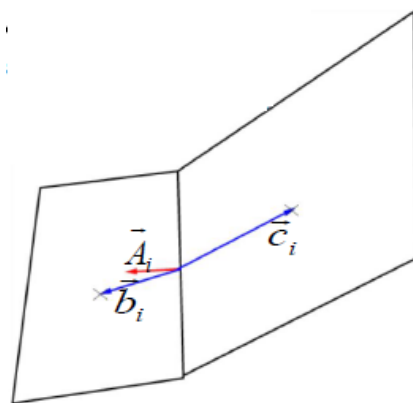
$$d_{\text{nei}} = \frac{|A_i b_i|}{|A_i|}$$

$$d_{\text{own}} = \frac{|A_i c_i|}{|A_i|}$$

pa je uvjet $faceWeight$ određen izrazom:

$$faceWeight = \frac{\min(d_{nei}, d_{own})}{d_{nei} + d_{own}}$$

a minimalna vrijednost iznosi 0,05.



Slika 20: Definicija uvjeta $minFaceWeight$

4.1.2.8. $minVolRatio$

Računa se kao omjer manjeg i većeg volumena dva kontrolna volumena:

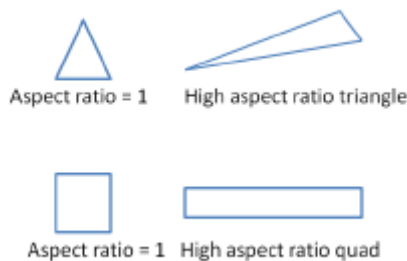
$$volRatio = \frac{\min(V_{nei}, V_{own})}{\max(V_{nei}, V_{own})}$$

4.1.2.9. $minTetQuality$

Ovaj kriterij je potrebno postaviti na što manju vrijednost kako bi se omogućilo dobro praćenje rješenja (obično 10^{-15}). Ponekad se s uključenim uvjetom iskrivi geometrija pa u izradi mreže za ovaj izvještaj ostaje isključen.

4.1.2.10. `maxAspectRatio`

Taj uvjet je definiran kao omjer najdulje i najkraće stranice jednog kontrolnog volumena te ga je kao takvog potrebno držati na što manjoj vrijednosti, bližoj jedinici.



Slika 21: Definicija uvjeta Aspect Ratio

Velike vrijednosti doprinose numeričku difuziju čime se smanjuje preciznost rješenja kao posljedica problema sa konvergencijom ili gubitkom stabilnosti proračuna (divergencijom). Posebno je opasno ukoliko se radi o zonama velikih gradijenata.

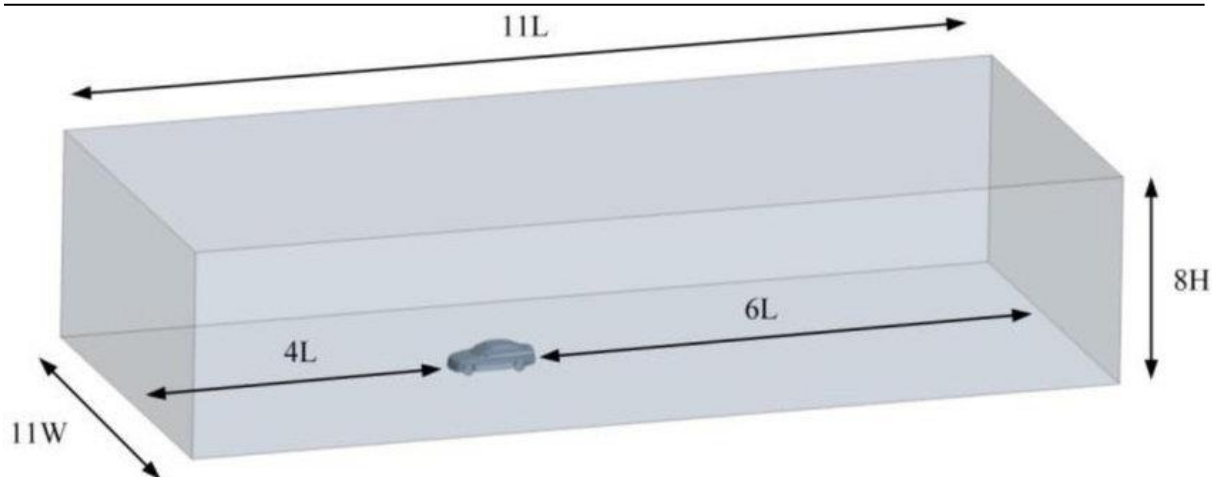
4.2. cfMesh,

Iako je naputak da geometrijske datoteke budu tipa `.fms`, cfMesh jednako dobro radi sa geometrijskim datotekama tipa `.stl`.

4.2.1. Pripremanje geometrije

4.2.1.1. Domena

Ulazna datoteka za cfMesh treba opisivati površine koje zatvaraju proračunsku domenu. Pošto se radi o izradi mreže za površinsku analizu strujanja, potrebno je definirati geometriju tunela, a koristi se i uvjet simetrije kako bi se u konačnici smanjio broj kontrolnih volumena. Definicija domene prema iskustvenim podacima prikazuje Slika 22.

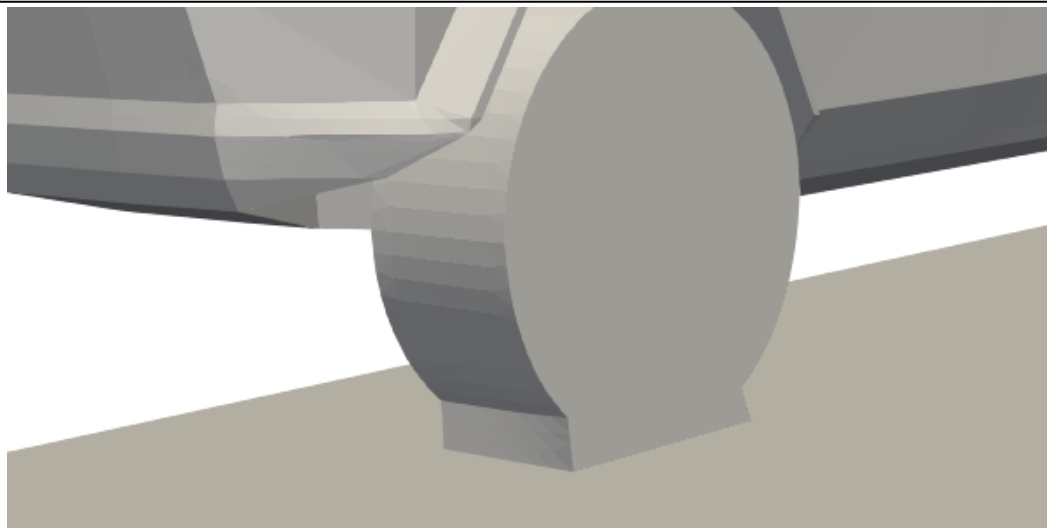


Slika 22: Dimenzije domene proračunskog modela

Ispred vozila se definira rubni uvjet brzine pa se mora ostaviti dovoljno prostora da se strujanje razvije, a iza vozila treba biti više prostora kako rubni uvjet tlaka (izlaz tunela) ne bi utjecao na vrijednosti tlaka oko vozila.

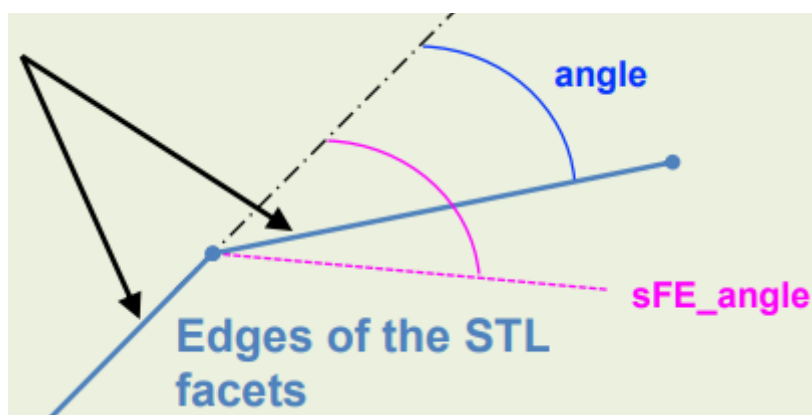
4.2.1.2. Vozilo

Geometrijski model za računalnu simulaciju mora biti dosljedan fizičkom modelu uz potrebna pojednostavljenja kako bi se olakšao proces izrade mreže. Dijelovi koji nemaju veliki ili nikakav utjecaj na aerodinamiku trebaju biti „zakrpani“ ili maknuti. Još jedan bitan detalj je spoj ceste s kotačima. Naime, takav tangentni spoj otežava izradu graničnih slojeva kao i mreže općenito zbog naglih smanjenja dimenzija te na tom dijelu mreža ima dosta nepravilnih kontrolnih volumena. Taj se problem rješava tako da se spoj kotača i ceste modelira kontaktnim heksaedrom koji olakšava postavljanje kontrolnih volumena. Slika 23 prikazuje takav kontaktni heksaedar.



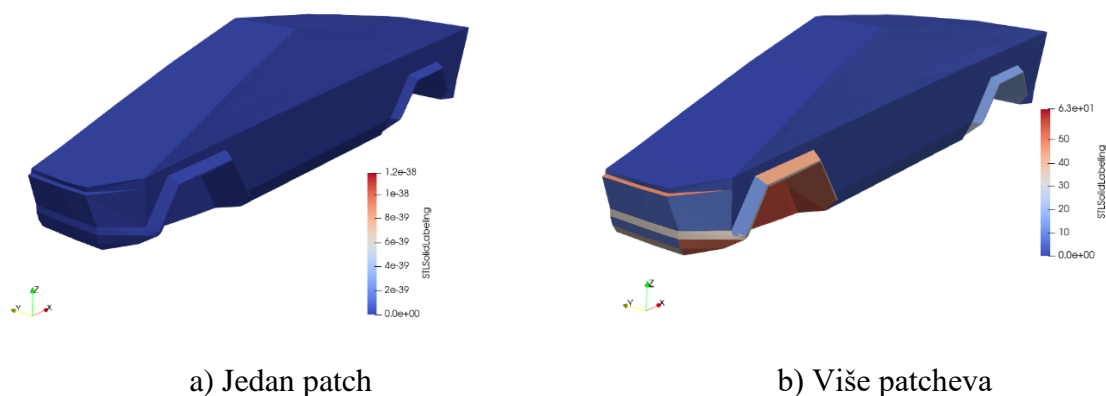
Slika 23: Kontakt ceste i kotača

Bitna činjenica vezana uz cfMesh je ta da ako jedan patch ima oštre bridove, cfMesh ih neće prepoznati te će ih loše opisati. Kako bi se to spriječilo, potrebno je jedan patch podijeliti na više njih tako da plohe koje se spajaju u oštrim bridovima budu separirane. Za taj postupak se koristi naredba *surfaceFeatureEdges -angle 'kut_dijeljenja'*. Slika 24 prikazuje definiciju kuta dijeljenja.



Slika 24: Definicija kuta dijeljenja geometrije

Kut dijeljenja mora biti manji od kuta između dvije spojene plohe kako bi bile prepoznate kao dvije zasebne površine. Što je kut manji, to je geometrija preciznija, no treba se pronaći optimalna vrijednost kako se ne bi otežao proces izrade mreže zbog previše detalja na geometriji. Obično se njegova vrijednost uzima u intervalu od 40° do 70° . Slika 25 prikazuje usporedbu geometrije vozila prije i nakon primjene naredbe *surfaceFeatureEdges*.



Slika 25: Utjecaj `surfaceFeatureEdges`: a) Prije, b) Nakon

Iduća bitna stavka za `cfMesh`, pogotovo za tetraedarske kontrolne volumene je smjer normala površina. Površine koje zatvaraju proračunsku domenu trebaju biti okrenute prema unutrašnjosti domene jer u suprotnom `cfMesh` generira tetraedarske volumene van domene što doprinosi nestabilnosti proračuna. Ukoliko neka površina ima pogrešno orijentiranu normalnu, treba se izvršiti naredba `surfaceOrient` pa se ta površina ponovno treba vratiti u `.stl` ili `.fms` datoteku cijelog proračuna.

4.2.2. meshDict, [15]

`meshDict` je datoteka koja služi za upravljanje koracima izrade proračunske mreže, a nalazi se u system direktoriju. Kao takva, sastoji se od nužno potrebnih i opcionalnih dijelova. Nužno potrebni su:

- `surfaceFile` – ime `.stl` ili `.fms` geometrijske datoteke,
- `maxCellSize` – maksimalna veličina kontrolnog volumena
- `boundaryCellSize` – veličina kontrolnih volumena koje opisuju patcheve

a dodatne postavke služe za stanjivanje i sređivanje proračunske mreže te se mogu pronaći u Uputama za korištenje, a za ovu mrežu je korištena opcija `objectRefinement`. Poseban segment `meshDict`-a zove se `meshQualitySettings`, a služi za unos graničnih vrijednosti parametara kvalitete proračunske mreže. Tablica 5 prikazuje vrijednosti za pojedine kriterije.

Tablica 5: Kriteriji kvalitete izrade mreže pomoću cfMesh-a

meshQualitySettings	Iznos granične vrijednosti
maxNonOrthogonality	65
fcUniform	0,1
volUniform	0,1
minCellDeterminant	0,001
minVolRatio	0,01
minFaceTriangleTwist	-1 (ne uzima se u obzir)
minPyramidVolume	10^{-13}
minimumFaceArea	-1 (ne uzima se u obzir)
faceFlatness	0,8
minCellPartTetrahedra	10^{-13}
minTetQuality	-10^{30} (ne uzima se u obzir)
maxSkewness	5
minFaceTwist	0,02
maxAngle	80

Te vrijednosti ne moraju biti striktno takve jer se zahtjevi za sve mreže nisu isti. Ovisi o vrsti kontrolnih volumena te o proračunskim zahtjevima.

5. Korekcijski faktor koeficijenta sile otpora

5.1. Sila otpora, [11]

Kako bi se odredio utjecaj sile, potrebno je prisjetiti se jednadžbe količine gibanja koja je zapravo proizašla iz II. Newtonovog zakona. Jednadžba količine gibanja preformulirana u obliku kontrolnih volumena pomoću Reynoldsovog transportnog teorema glasi:

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \sigma_i + f_i \quad (37)$$

Odnosno, ukupna sila jednaka je zbroju površinskih i volumnih sila. Površinske sile σ_i jednake su:

$$\sigma_i = \sigma_{ji} n_j$$

$$\sigma_{ji} = \begin{bmatrix} -p & \Sigma_{12} & \Sigma_{13} \\ \Sigma_{21} & -p & \Sigma_{23} \\ \Sigma_{31} & \Sigma_{32} & -p \end{bmatrix} = -p + \Sigma_{ji}$$

Pošto se sve ostale veličine u II. Newtonovom zakonu integriraju po volumenu, potrebno je primijeniti Gaussov teorem za površinske sile.

$$\int_S \sigma_{ji} n_j dS = \int_V \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} dV = - \int_V \frac{\partial p}{\partial x_j} dV + \int_V \frac{\partial \Sigma_{ji}}{\partial x_j} dV$$

$$- \int_V \frac{\partial p}{\partial x_j} dV \quad - \text{ Sila otpora oblika,}$$

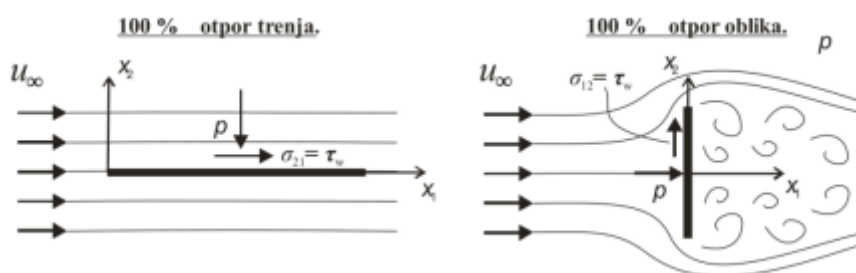
$$\int_V \frac{\partial \Sigma_{ji}}{\partial x_j} dV \quad - \text{ Sila trenja zbog viskoznih sila}$$

Iz prikazanog se sila može razvrstati na dva dijela, a to su sila otpora oblika (zbog tlaka) i sila trenja zbog viskoznih sila. Uz tu silu otpora, još jedna komponenta je sila uzgona. To su

komponente čiji vektorski zbroj daje ukupnu silu napisanu prema jednadžbi (37). Sila otpora i sila uzgona su se eksperimentalno pokazale da su proporcionalne umnošku kvadrata brzine, gustoće i poprečnog presjeka referentne površine.

$$D = \frac{1}{2} C_d \rho A u_\infty^2$$

Gdje C_d predstavlja koeficijent sile otpora, a $\frac{1}{2} \rho u_\infty^2$ predstavlja dinamički tlak. Ovisno o dimenzijama objekta opstrujavanja, otpor oblika i otpor sile trenja nemaju isti utjecaj. To također ovisi i o udarnom kutu pa je referentna površina za isti objekt drugačijeg iznosa ovisno o utjecaju pojedinih otpora. Slika 26 prikazuje ekstremne slučajeve.



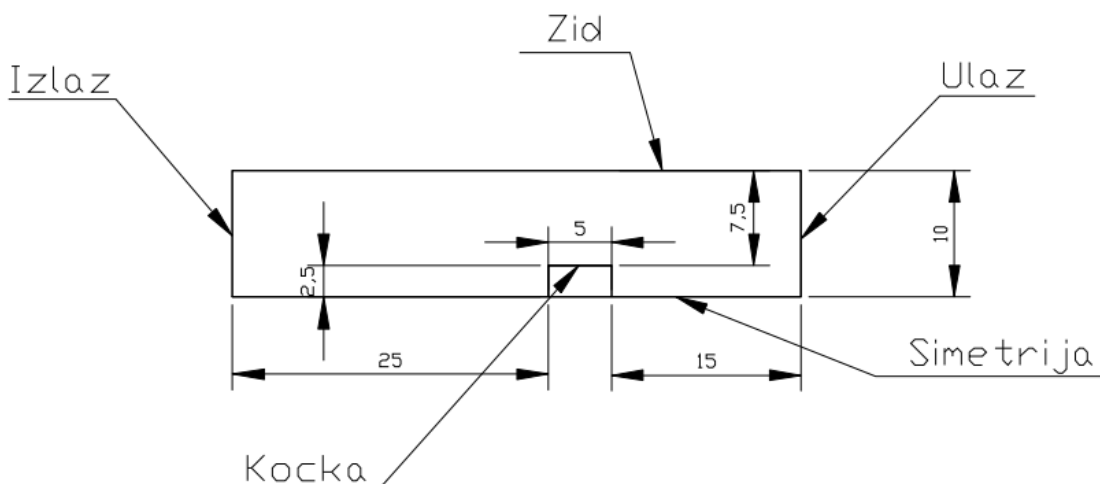
Slika 26: Odabir referentne površine ovisno o udarnom kutu

5.2. Određivanje koeficijenta otpora pomoću CFD-a

Vrijednost koeficijenta otpora dobivenog numeričkim putem ovisi o kvaliteti modelirane geometrije, izrađene proračunske mreže, dimenzijama domene, modelu turbulencije, početnim i rubnim uvjetima, odabranim numeričkim shemama i rješavačima algebarskih jednadžbi u obliku matricnih sustava. Ukoliko se koriste resursi većeg kapaciteta i snage, finija mreža ne predstavlja problem kao što bi predstavljala na slabijim računalnim resursima. Tu se postavlja pitanje o postojanju korekcijskih faktora koji bi korigirali dobiveni koeficijent sile otpora tako da se približi rezultatu dobivenim na finijoj mreži ili dobivenim eksperimentalno. Određivanje korekcijskih faktora je napravljeno pomoću proračuna na kocki te na modelu Tesle Cybertrucka.

5.2.1. Slučaj 1: Kocka

Slika 27 prikazuje dimenzije proračunske domene.

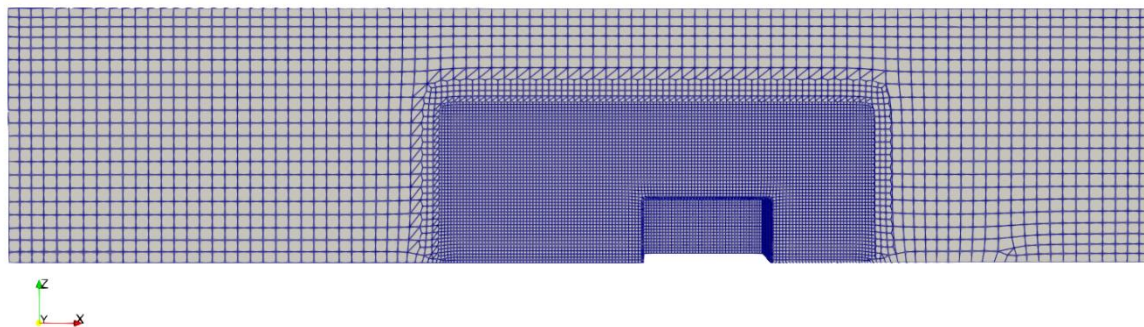


Slika 27: Dimenzije proračunske domene opstrujavanja kocke

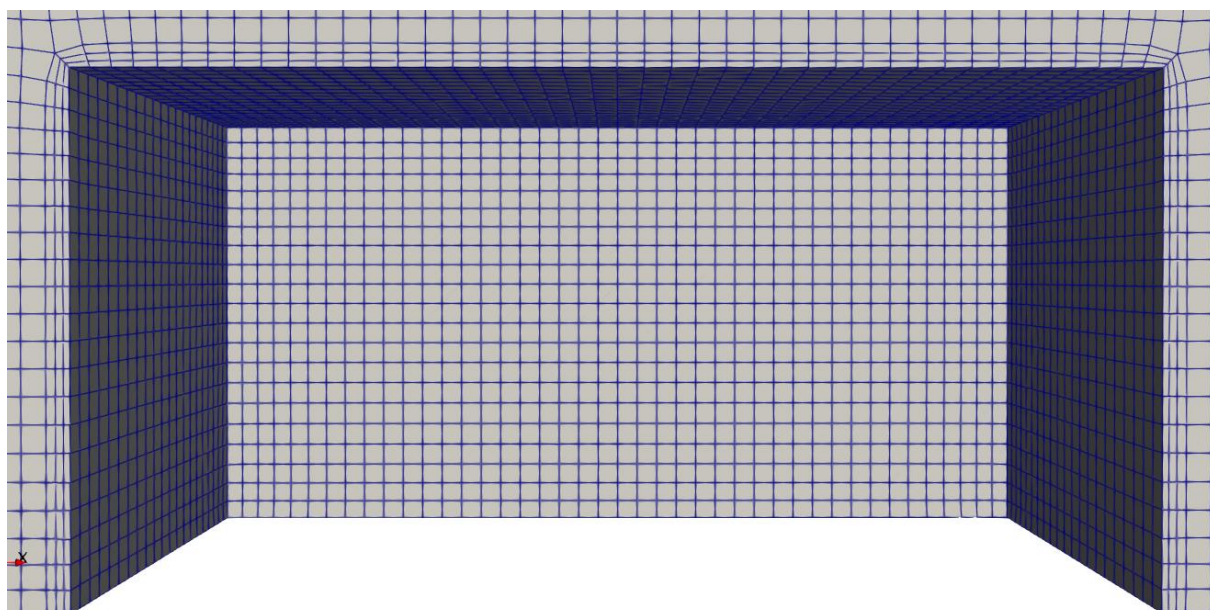
Na kocki je provedeno 5 proračuna sa istim rubnim i početnim uvjetima, svojstvima fluida, $k - \omega SST$ modelom turbulencije i svim numeričkim shemama, a jedino se razlikuju dimenzije mreže kako bi se našla poveznica između y^+ vrijednosti, brzine slobodne struje i koeficijenta sile otpora. Proračuni su provedeni pomoću PIMPLE algoritma.

U svim slučajevima je ulazna brzina 50 m/s te 40 m/s, a rezultati ovisno o mreži su prikazani u nastavku:

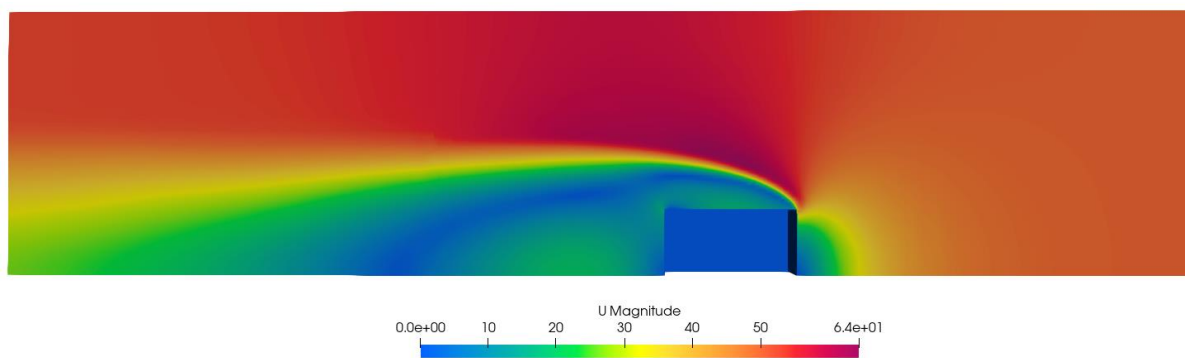
Gruba mreža sastoji se od 345 409 kontrolnih volumena, a domena i rješenja su prikazana u nastavku:



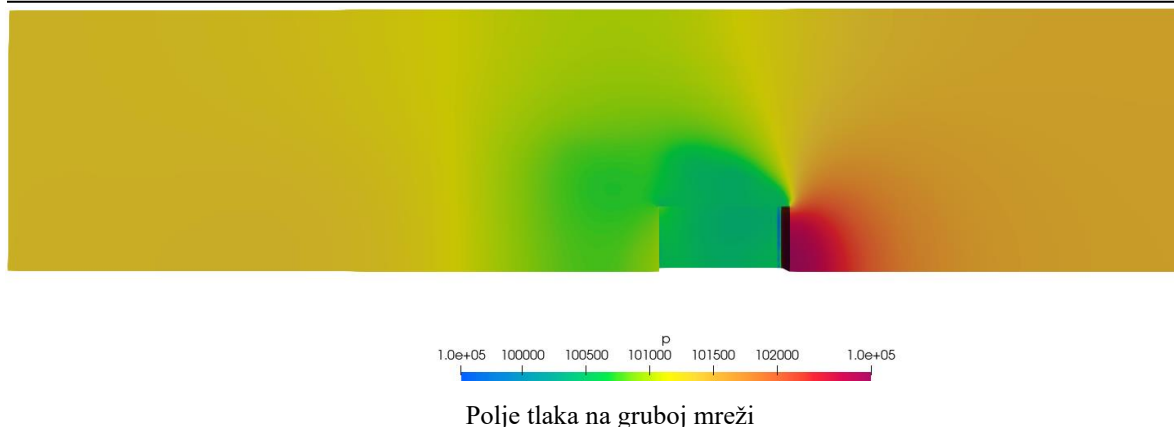
Domena grube mreže



Detalj opisanog graničnog sloja

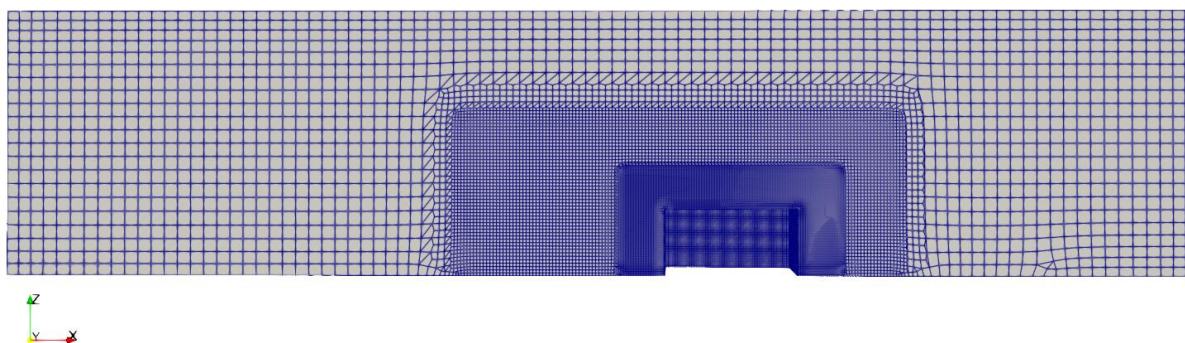


Polje brzine na gruboj mreži

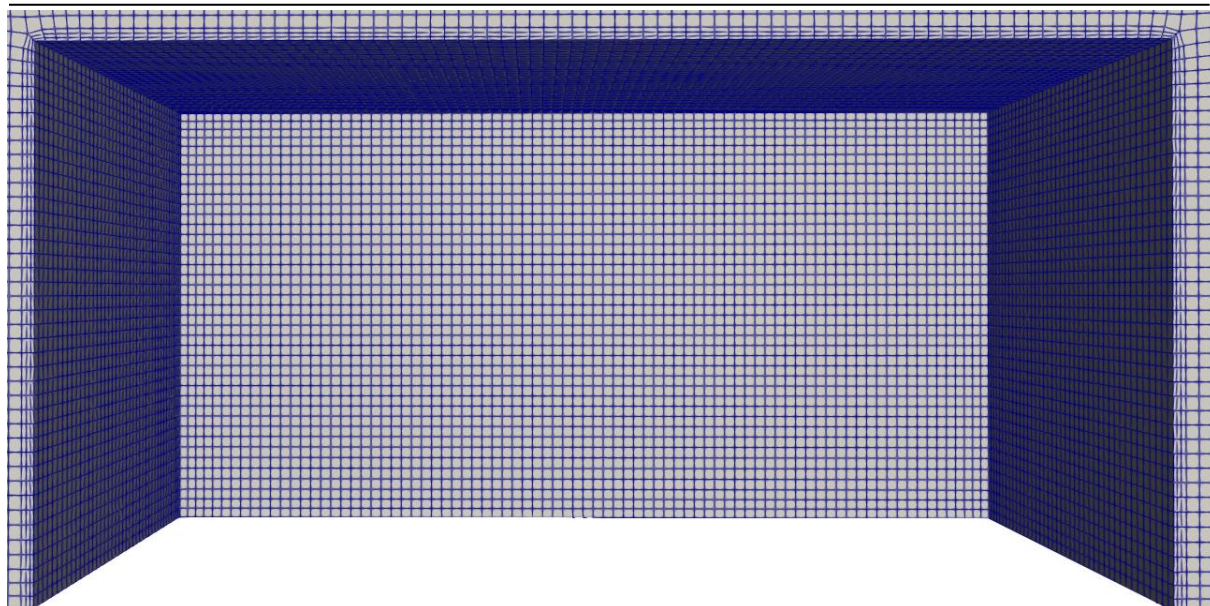


Slika 28: Slučaj 1 - Rješenja na gruboj mreži

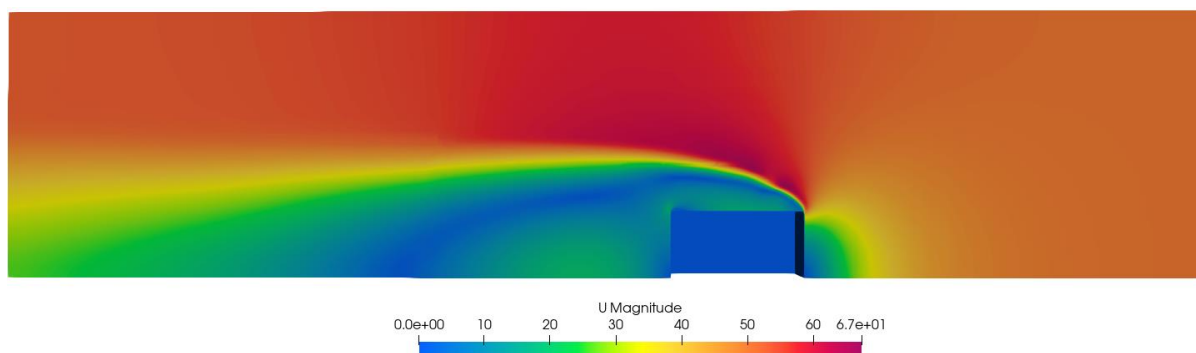
Srednje gruba mreža sastoji se od 723 883 kontrolnih volumena, a domena i rješenja su prikazana u nastavku:



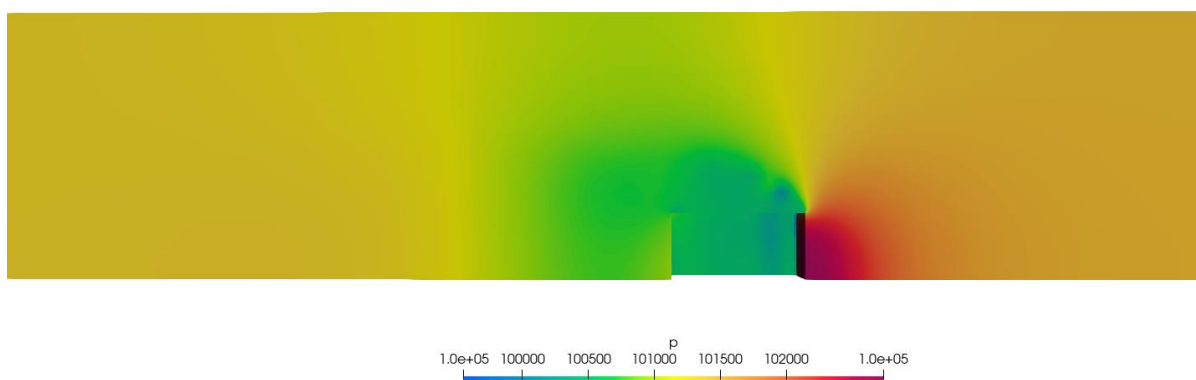
Domena srednje grube mreže



Detalj opisanog graničnog sloja



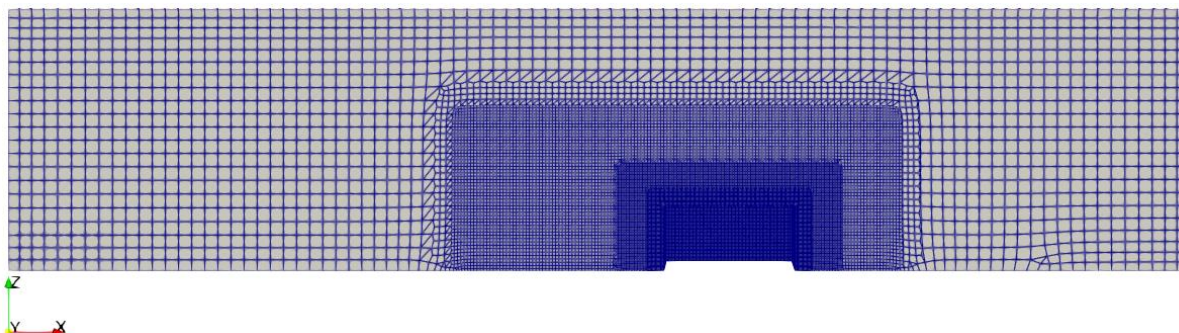
Polje brzine na srednje gruboj mreži



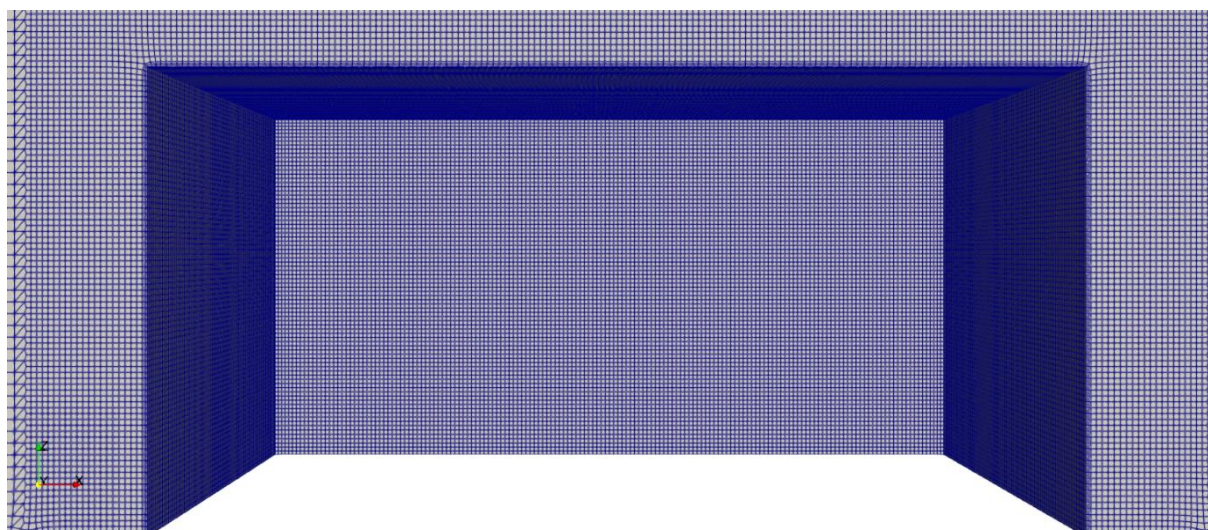
Polje tlaka na srednje gruboj mreži

Slika 29: Slučaj 1 - Rješenja na srednje gruboj mreži

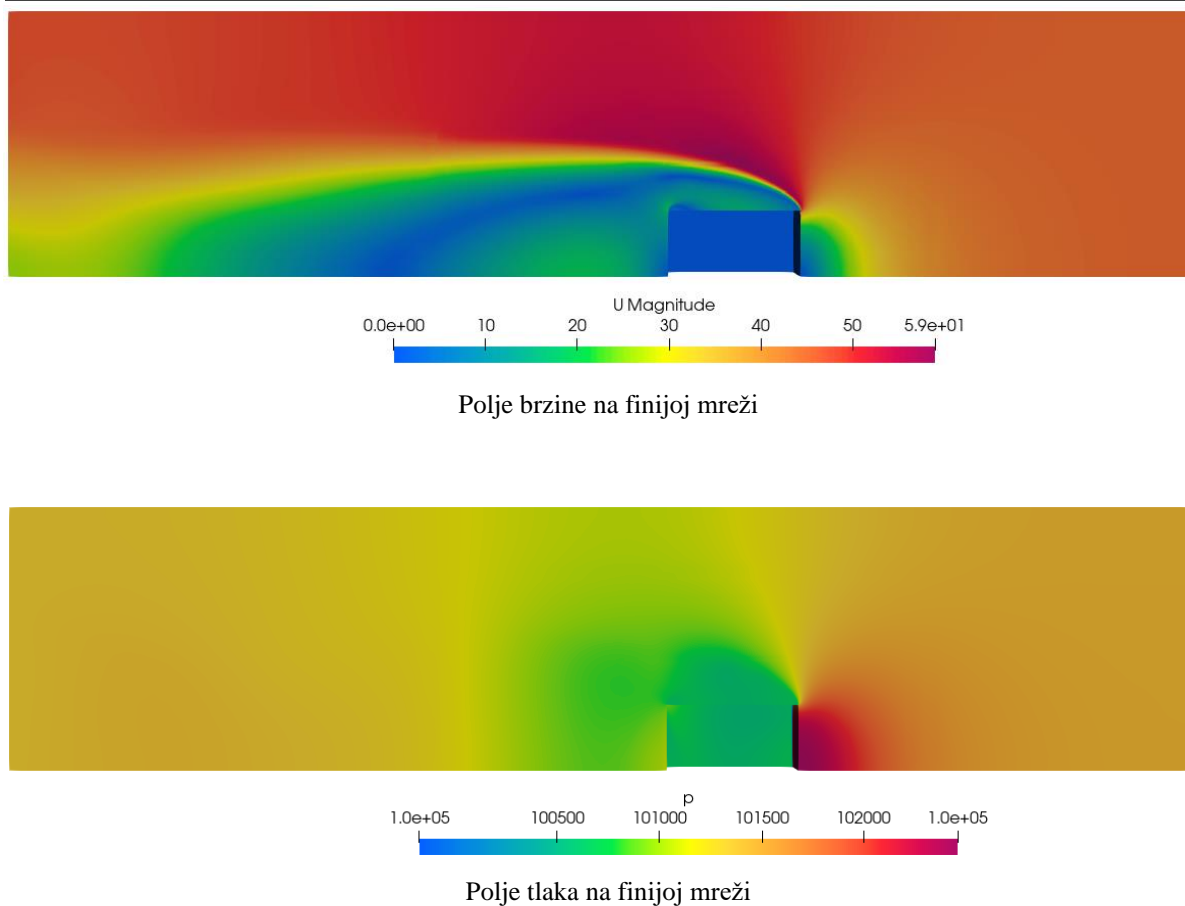
Finija mreža sastoji se od 1 537 343 kontrolnih volumena, a domena i rješenja su prikazana u nastavku:



Domena finije mreže



Detalj opisanog graničnog sloja



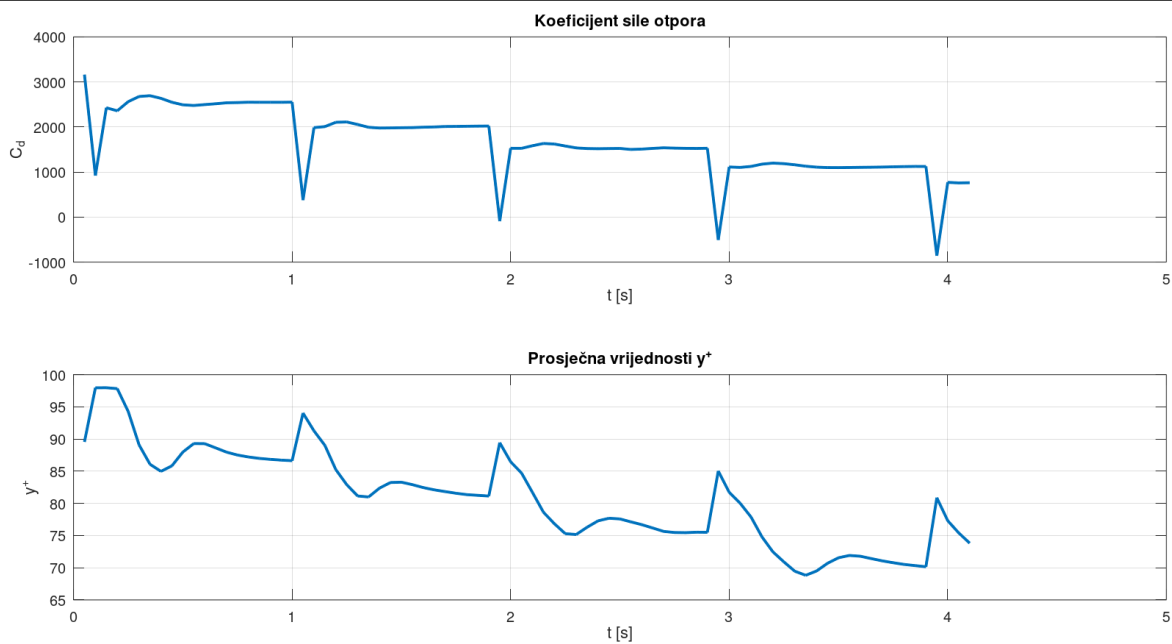
Slika 30: Slučaj 1 - Rješenja na finijoj mreži

Tablica 6 predstavlja rubni uvjet na ulazu, zadan kao tablična vrijednost prema kojoj se brzina mijenja ovisno o vremenu simulacije.

Tablica 6: Rubni uvjet na ulazu

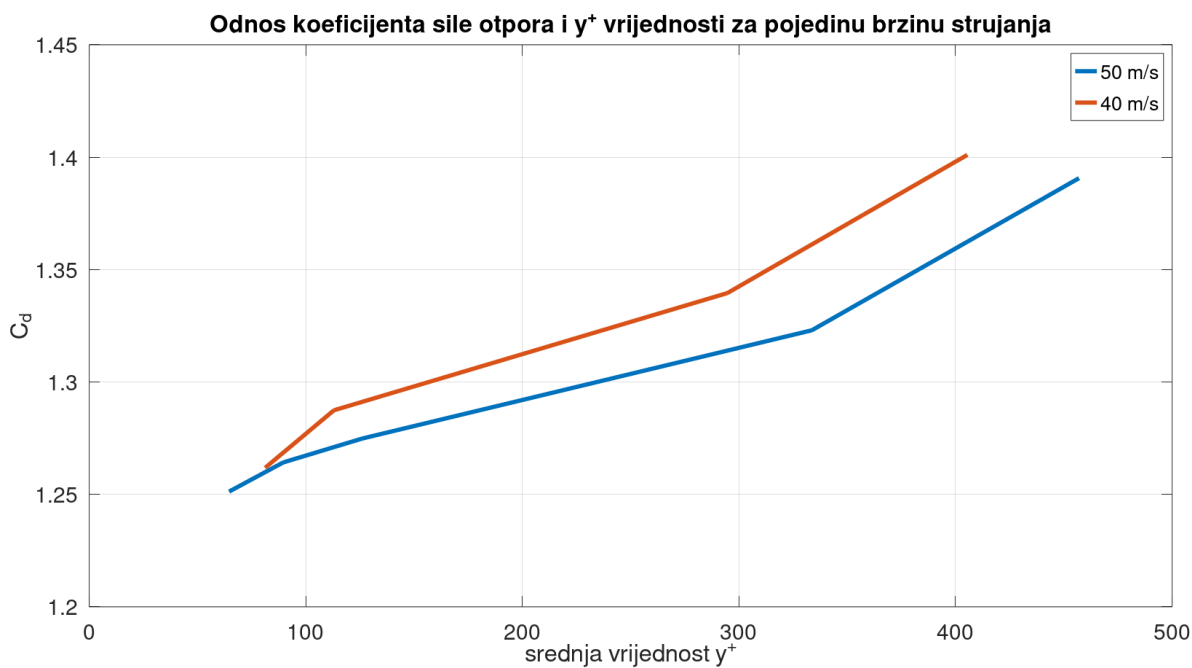
t [s]	U_x [m/s]
0 - 0,1	50
0.12 - 1	45
1,05 - 1,9	40
1,95 - 2,9	35

Dobivena rješenja koeficijenta sile otpora su skalirane sa brzinom $U = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ i Slika 31 prikazuje vrijeme stacioniranja vrijednosti za pojedinu brzinu.



Slika 31: Stacioniranje simulacije ovisno o ulaznoj brzini

Ovi su proračuni provedeni kako bi se provjerilo postoji li ovisnost koeficijenta sile otpora, srednje vrijednosti y^+ te brzini slobodne struje. Za brzine 40 m/s i 50 m/s su uzete vrijednosti srednjeg y^+ na kocki, a Slika 32 predstavlja traženu raspodjelu vrijednosti.

Slika 32: C_d u ovisnosti o srednjoj vrijednosti y^+ za određenu brzinu

Eksperimentalna vrijednost koeficijenta sile otpora kocke iznosi: $C_{d,e} = [0.82, 0.87]$, [16] što pokazuje kako ni finija mreža u proračunu nije dovoljno sitna pa treba pronaći korekcijski faktor za zadane uvjete. Slika 32 prikazuje kako izračunati koeficijent otpora ovisi o srednjoj vrijednosti y^+ koja pak ovisi o brzini. Teško je zaključiti tu ovisnost. U nastavku će se definirati pojam korekcijskog koeficijenta:

$$C_{d,e} = \frac{C_{d,n}}{K} \quad (35)$$

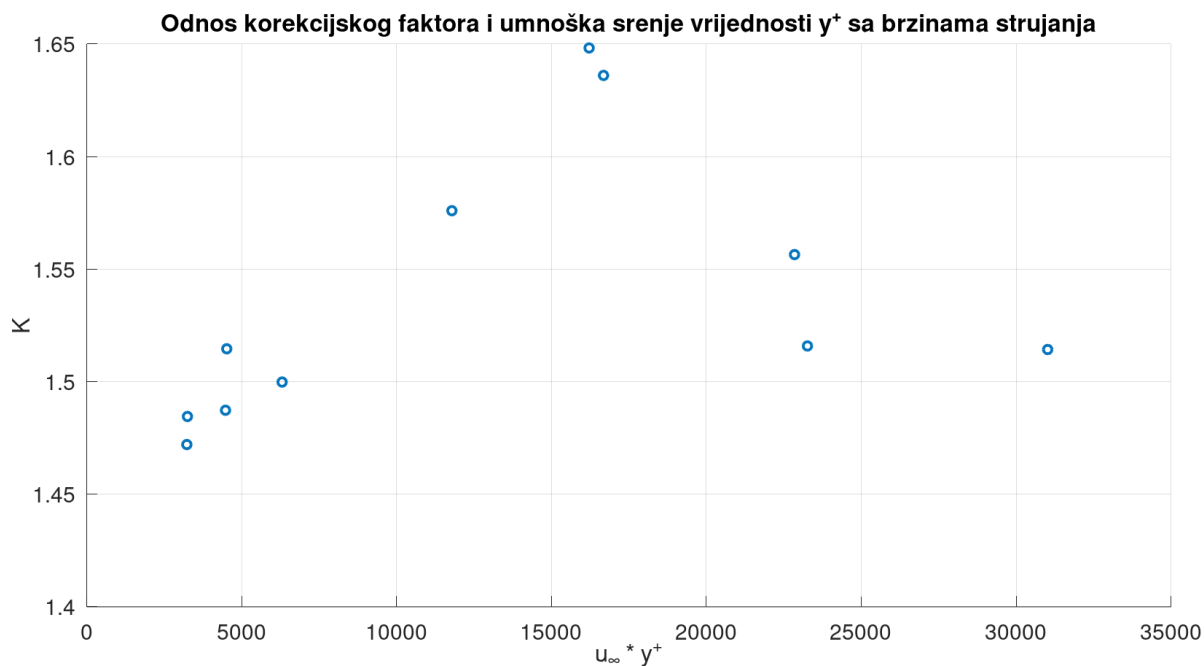
Gdje $C_{d,e}$ predstavlja vrijednost dobivenu eksperimentom, $C_{d,n}$ predstavlja vrijednost dobivenu numeričkim putem uz grubu mrežu, a K predstavlja korekcijski faktor. Kao što je rečeno ranije, koeficijent sile otpora između ostalog ovisi o finoći mreže. Ako su svi ostali kriteriji za uspješno sprovođenje proračuna zadovoljeni, finoća mreže se može promatrati i uz vrijednosti y^+ , a koji ovisi o brzini narinutoj rubnim i početnim uvjetima. Upravo je ta ideja bila glavna prilikom definiranja korekcijskog faktora. Postavlja se pitanje mogućnosti definiranja korekcijskog faktora kao funkcije u obliku:

$$K = K(\overline{y^+}, u_\infty) \quad (36)$$

Radi lakšeg definiranja, korekcijski faktor je izražen kao funkcija umnoška brzine slobodne struje i $\overline{y^+}$.

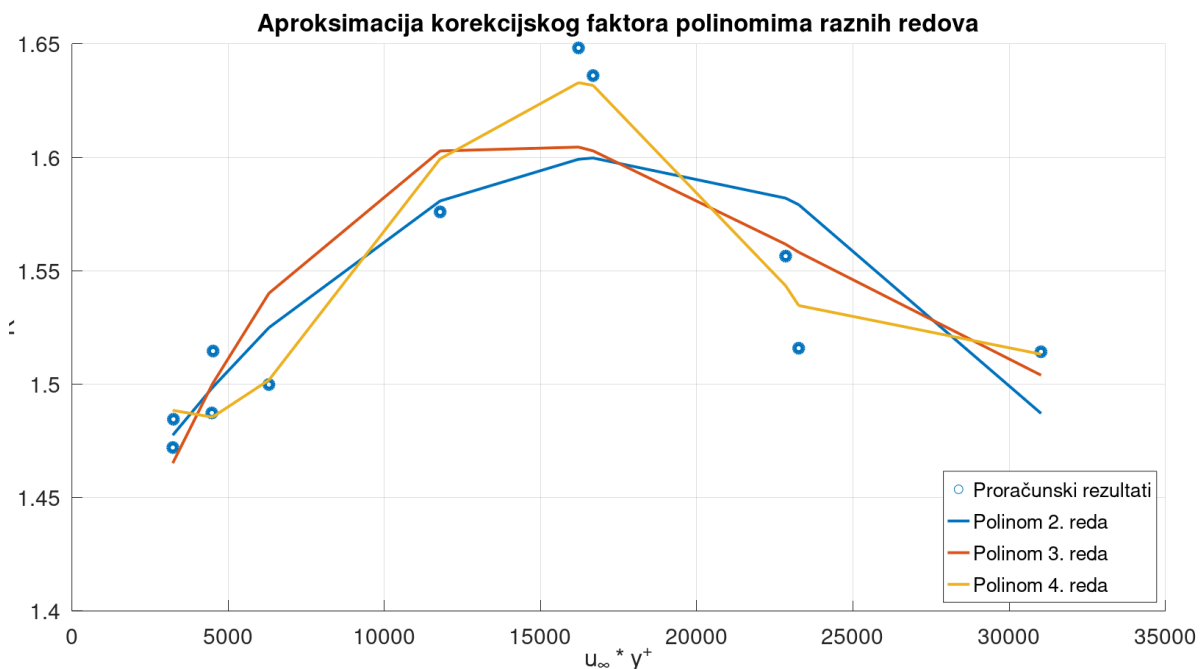
$$K = K(\overline{y^+} \cdot u_\infty) \quad (37)$$

Slika 33 prikazuje grafički koje su vrijednosti dobivene računalno za korekcijski faktor izražen kao izraz (37).



Slika 33: Vrijednosti korekcijskog faktora dobivene proračunom

Ovi su rezultati dosta raštrkani i ne mogu se opisati analitičkim izrazom, pa se stoga prelazi na numeričku polinomnu aproksimaciju.



Slika 34: Aproksimacijski polinomi korekcijskog faktora

Polinomne aproksimacije predstavljene su u nastavku, a da bi se odredilo koja će se aproksimacija koristiti, potrebno ih je međusobno usporediti.

$$K_2(\bar{y}^+ * u_\infty) = a_2(\bar{y}^+ \cdot u_\infty)^3 + b_2(\bar{y}^+ \cdot u_\infty)^2 + 1,4154$$

$$a_2 = -6,0937 \cdot 10^{-10}$$

$$b_2 = 2,1217 \cdot 10^{-5}$$

$$K_3(\bar{y}^+ * u_\infty) = a_3(\bar{y}^+ \cdot u_\infty)^3 + b_3(\bar{y}^+ \cdot u_\infty)^2 + c_3(\bar{y}^+ \cdot u_\infty) + 1,3487$$

$$a_3 = 3,0073 \cdot 10^{-14}$$

$$b_3 = -2,1481 \cdot 10^{-9}$$

$$c_3 = 4,2704 \cdot 10^{-5}$$

$$K_4(\bar{y}^+ * u_\infty) = a_4(\bar{y}^+ \cdot u_\infty)^4 + b_4(\bar{y}^+ \cdot u_\infty)^3 + c_4(\bar{y}^+ \cdot u_\infty)^2 + d_4(\bar{y}^+ \cdot u_\infty) + 1,5844$$

$$a_4 = 7,5427 \cdot 10^{-18}$$

$$b_4 = -4,8398 \cdot 10^{-13}$$

$$c_4 = 9,4687 \cdot 10^{-9}$$

$$d_4 = -5,5449 \cdot 10^{-5}$$

Tablica 7: Usporedba aproksimiranog rješenja K_p sa računalno dobivenim $K_n = C_{d,n}/C_{d,e}$ za 2. red

	Aproksimacijski polinom 2. reda										
$\bar{y}^+ \cdot u_\infty$	3230.6	3250.3	4478.7	4519.2	6306	11787	16217	16682	22847	23265	31019
K_p	1.4775	1.4779	1.4982	1.4988	1.5249	1.5808	1.5992	1.5997	1.582	1.5791	1.4872
K_n	1.4721	1.4845	1.4873	1.5146	1.4998	1.576	1.6482	1.6361	1.5565	1.5159	1.5143
$\frac{K_p}{K_n} \cdot 100\%$	-0.371	0.44877	-0.7289	1.0442	-1.6721	-0.30597	2.9773	2.2209	-1.6411	-4.1744	1.7922

Tablica 8: Usporedba aproksimiranog rješenja K_p sa računalno dobivenim K_n za 3. red

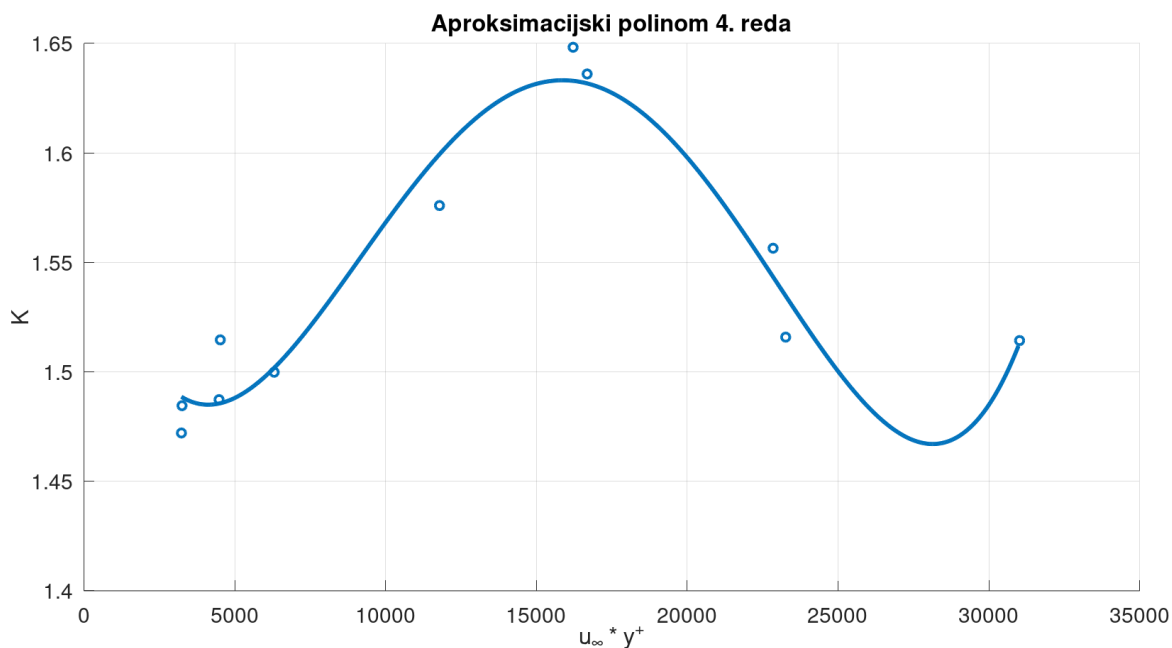
	Aproksimacijski polinom 3. reda										
$\bar{y}^+ \cdot u_\infty$	3230.6	3250.3	4478.7	4519.2	6306	11787	16217	16682	22847	23265	31019
K_p	1.4652	1.4658	1.4995	1.5006	1.5401	1.6028	1.6045	1.6029	1.5617	1.5582	1.504

K_n	1.4721	1.4845	1.4873	1.5146	1.4998	1.576	1.6482	1.6361	1.5565	1.5159	1.5143
$\frac{K_p}{K_n} \cdot 100\%$	0.46598	1.2622	-0.82171	0.9277	-2.6828	-1.7047	2.6527	2.0282	-0.33492	-2.7917	0.68043

Tablica 9: Usporedba aproksimiranog rješenja K_p sa računalno dobivenim K_n za 4. red

	Aproksimacijski polinom 4. reda										
$\overline{y^+} \cdot u_\infty$	3230.6	3250.3	4478.7	4519.2	6306	11787	16217	16682	22847	23265	31019
K_p	1.4886	1.4884	1.4855	1.4857	1.5018	1.5994	1.6329	1.6317	1.5434	1.5347	1.5132
K_n	1.4721	1.4845	1.4873	1.5146	1.4998	1.576	1.6482	1.6361	1.5565	1.5159	1.5143
$\frac{K_p}{K_n} \cdot 100\%$	-1.1206	-0.26064	0.12018	1.9117	-0.1317	-1.4845	0.93038	0.26364	0.84071	-1.2413	0.07106

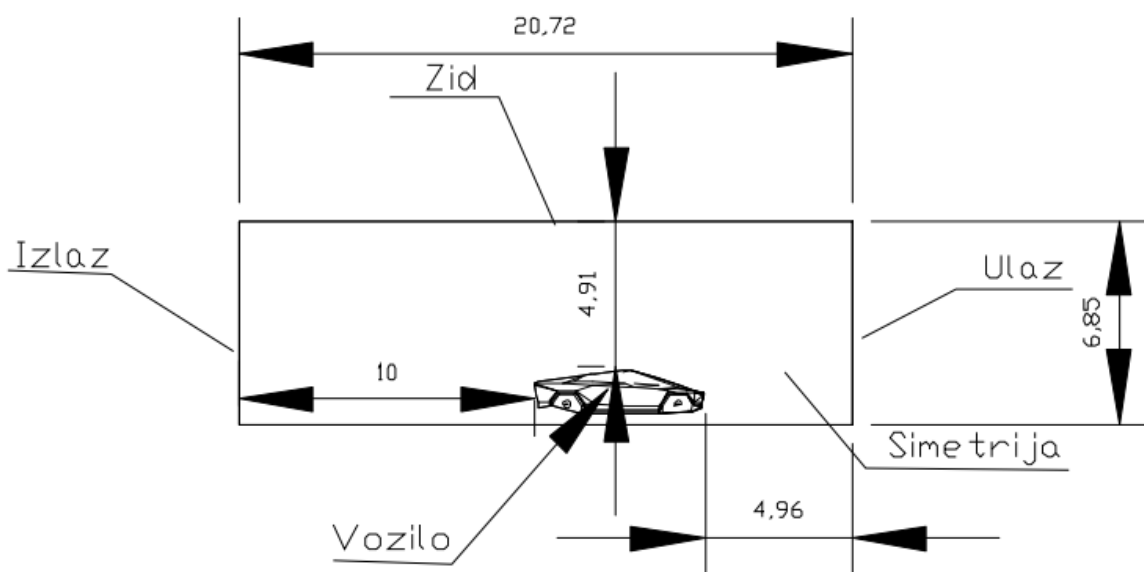
Slika 34 i prethodne tablice pokazuju da polinom 4. stupnja najbolje opisuje ponašanje korekcijskog faktora.



Slika 35: Aproksimacijski polinom 4. reda

Sada je taj zaključak potrebno testirati na realnijem slučaju, a to je opstrujavanje vozila Tesla Cybertruck.

5.2.2. Slučaj 2: Tesla Cybertruck



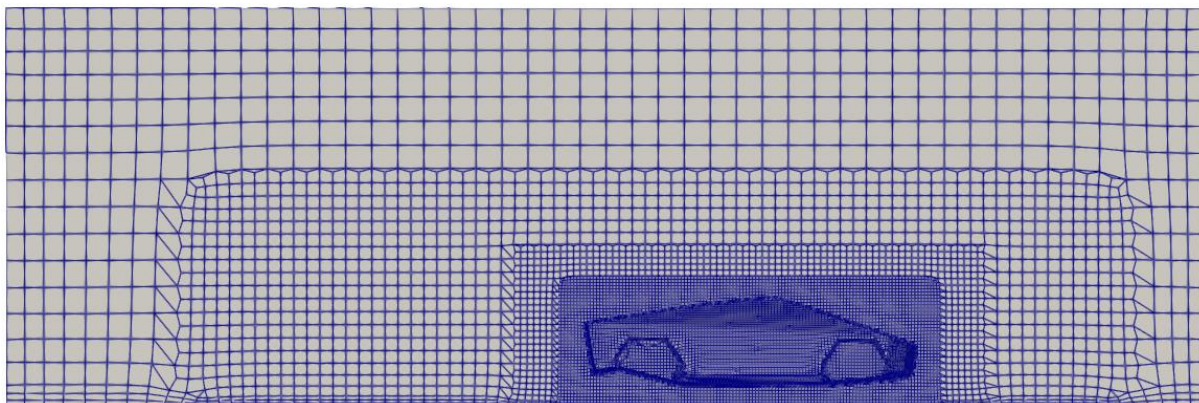
Slika 36: Dimenzije proračunske domene opstrujavanja vozila

Slika 22 prikazuje standardne dimenzije domene za aerodinamički proračun vozila, no radi svrhe traženja korekcijskog faktora i ubrzanja proračuna, korištene su dimenzije koje pokazuje Slika 36.

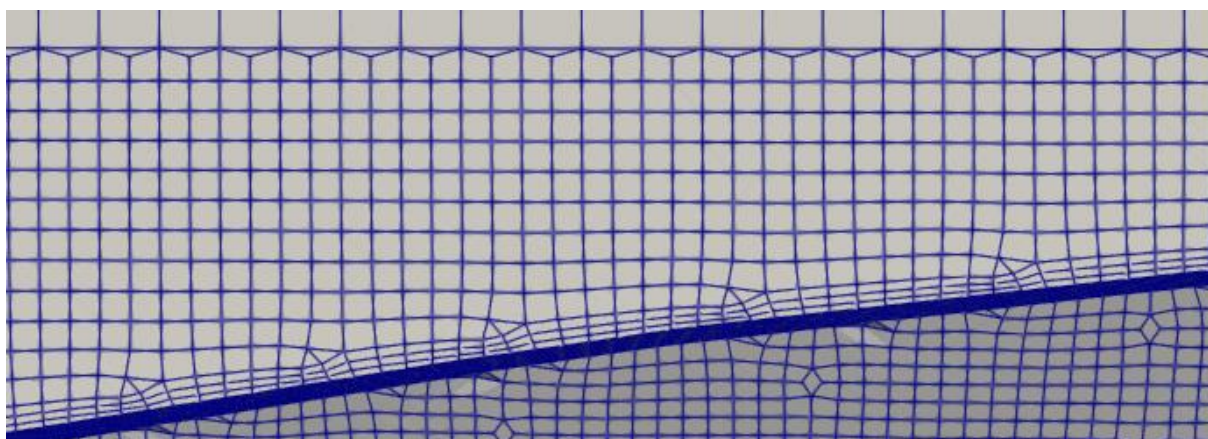
Na vozilu su provedena 2 proračuna sa istim rubnim i početnim uvjetima, svojstvima fluida, $k - \omega$ SST modelom turbulencije i svim numeričkim shemama, a jedino se razlikuju dimenzije mreže kako bi se našla poveznica između y^+ vrijednosti, brzine slobodne struje i koeficijenta sile otpora. Proračuni su provedeni pomoću PIMPLE algoritma.

U svim slučajevima je ulazna brzina 10 m/s, a rezultati ovisno o mreži su prikazani u nastavku:

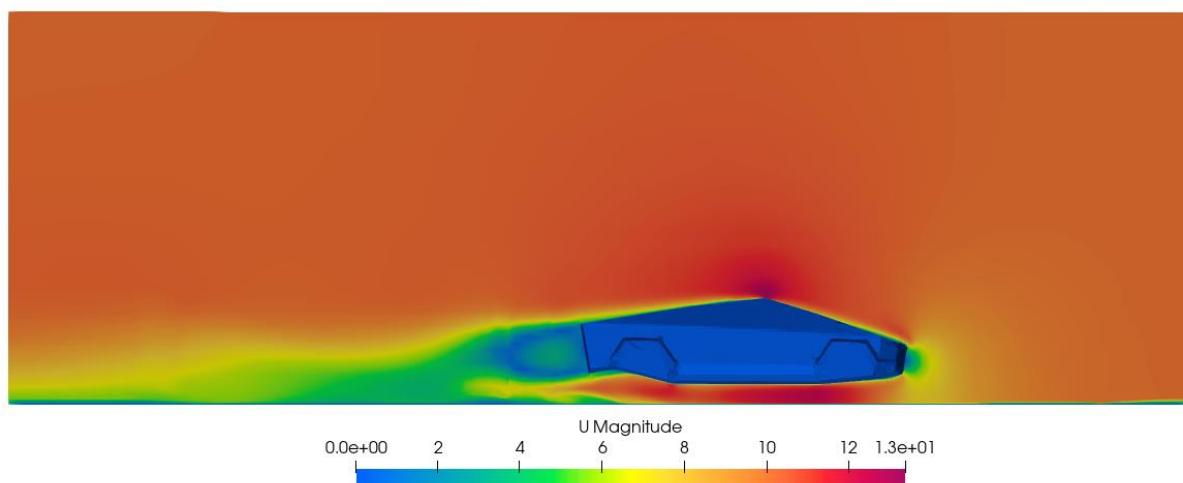
Gruba mreža sastoji se od 143 829 kontrolnih volumena, a domena i rješenja su prikazana u nastavku:



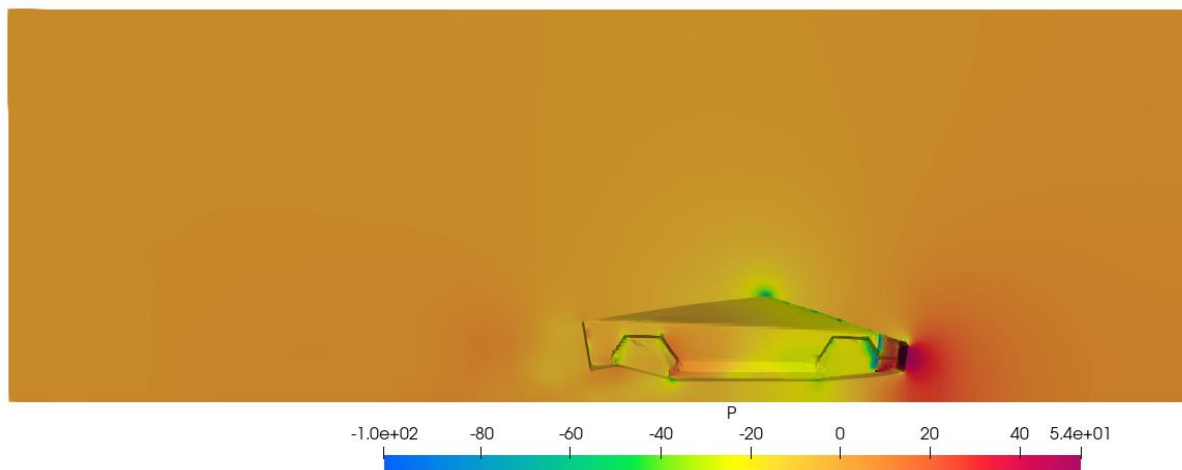
Domena grube mreže



Detalj opisanog graničnog sloja



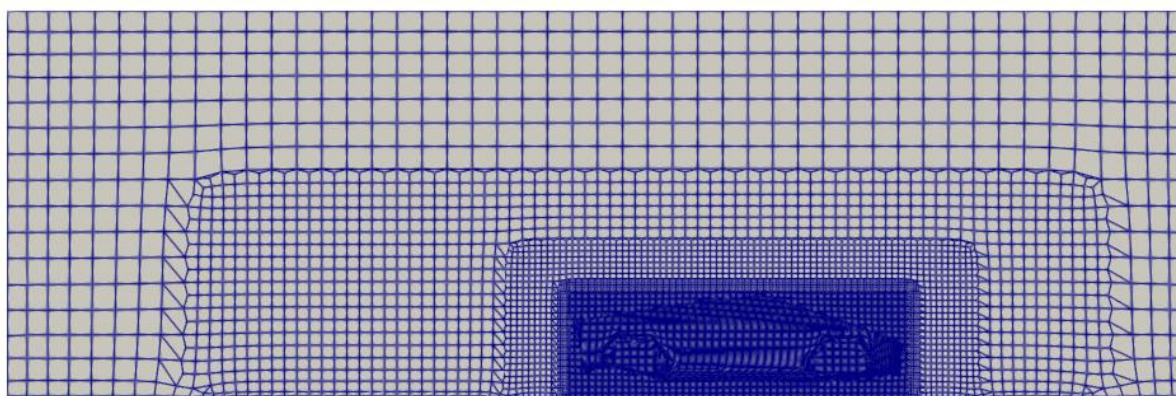
Polje brzine na gruboj mreži



Polje tlaka na gruboj mreži

Slika 37: Slučaj 2 - Rješenja na gruboj mreži

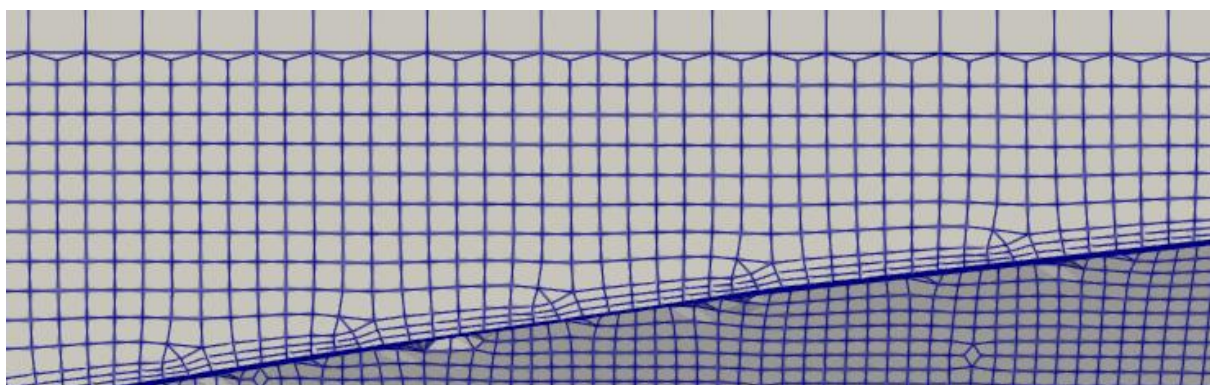
Finija mreža sastoji se od 518 367 kontrolnih, a domena i rješenja su prikazana u nastavku:



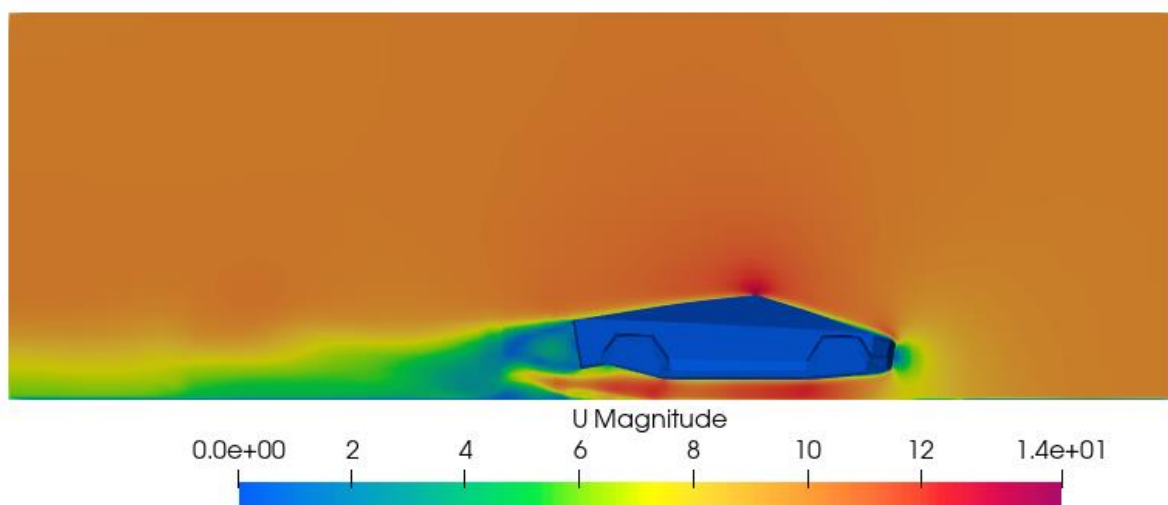
Domena finije mreže



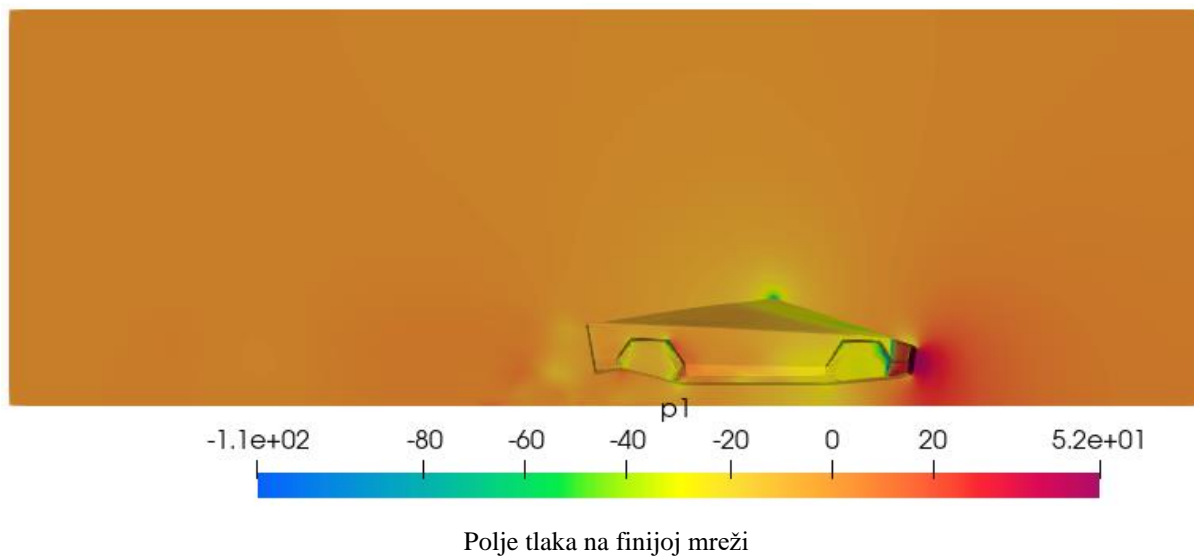
Diskretizirana površina vozila



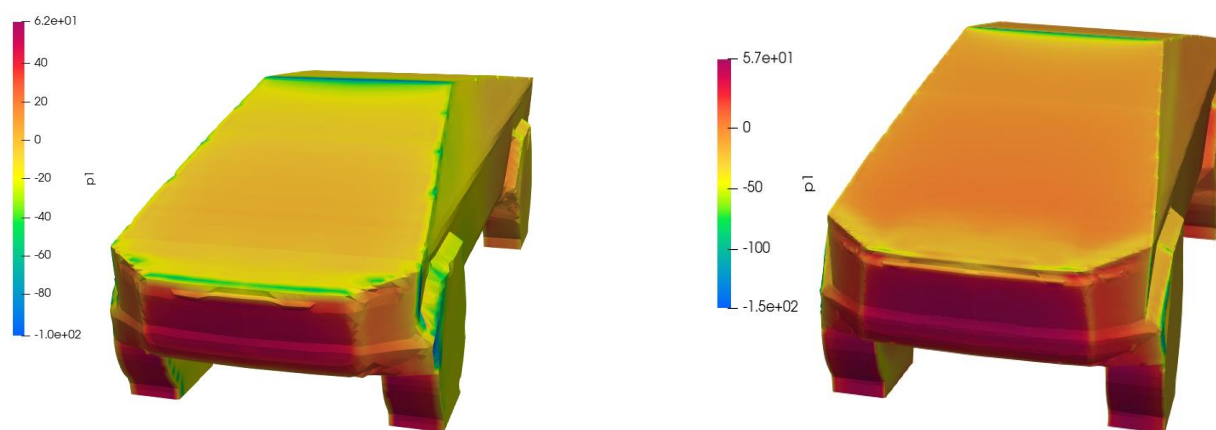
Detalj opisanog graničnog sloja



Polje brzine na finijoj mreži



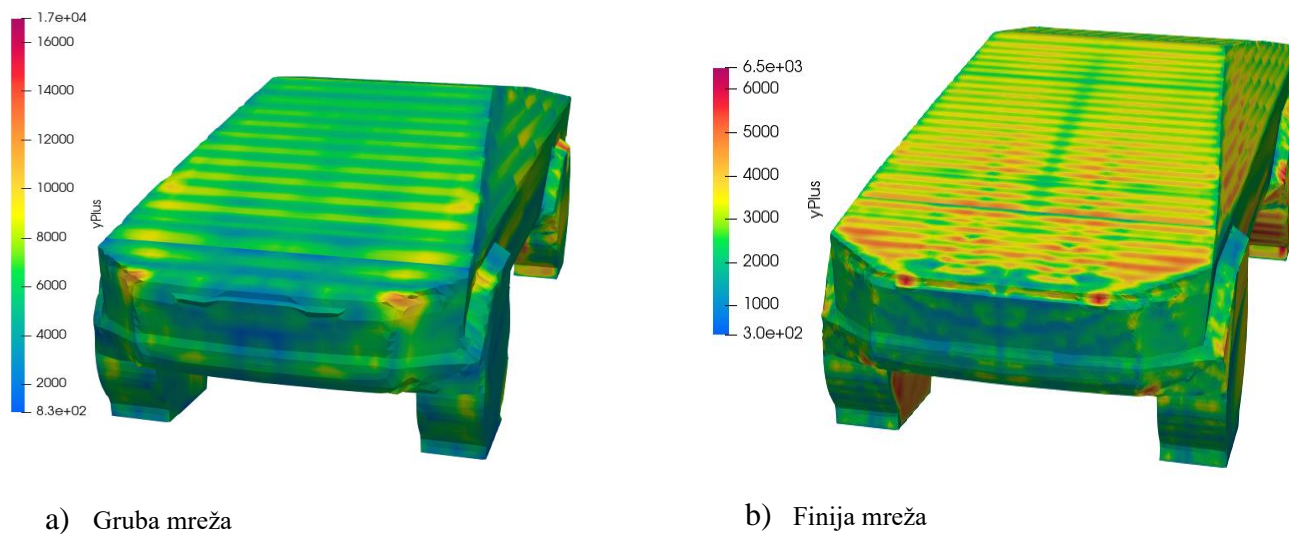
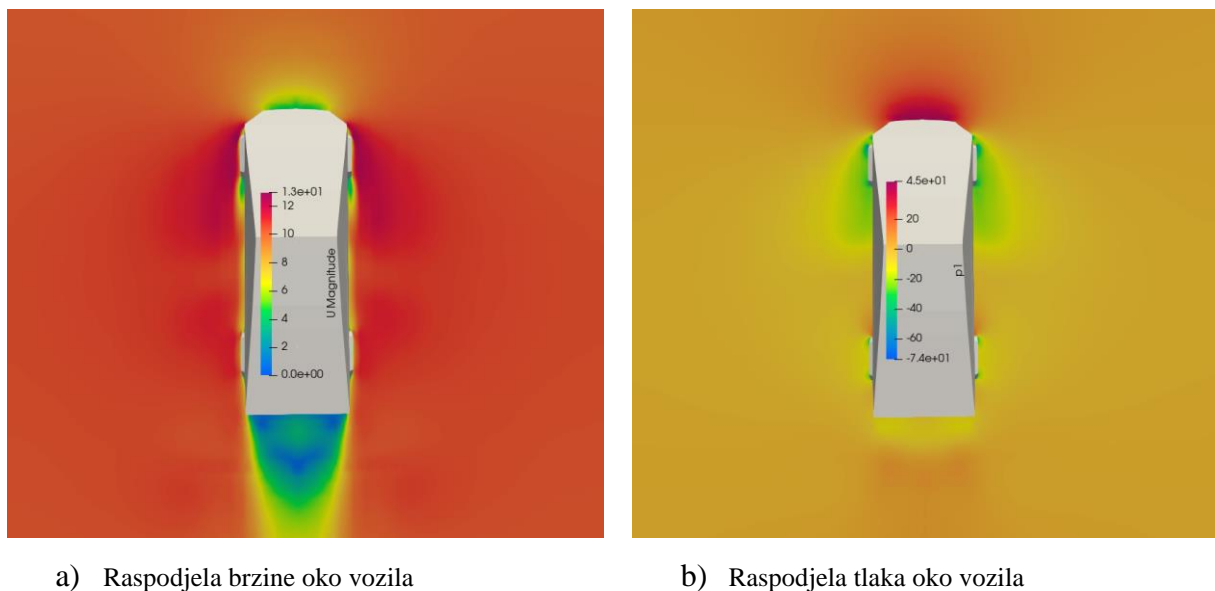
Slika 38: Slučaj 2 - Rješenja na finijoj mreži



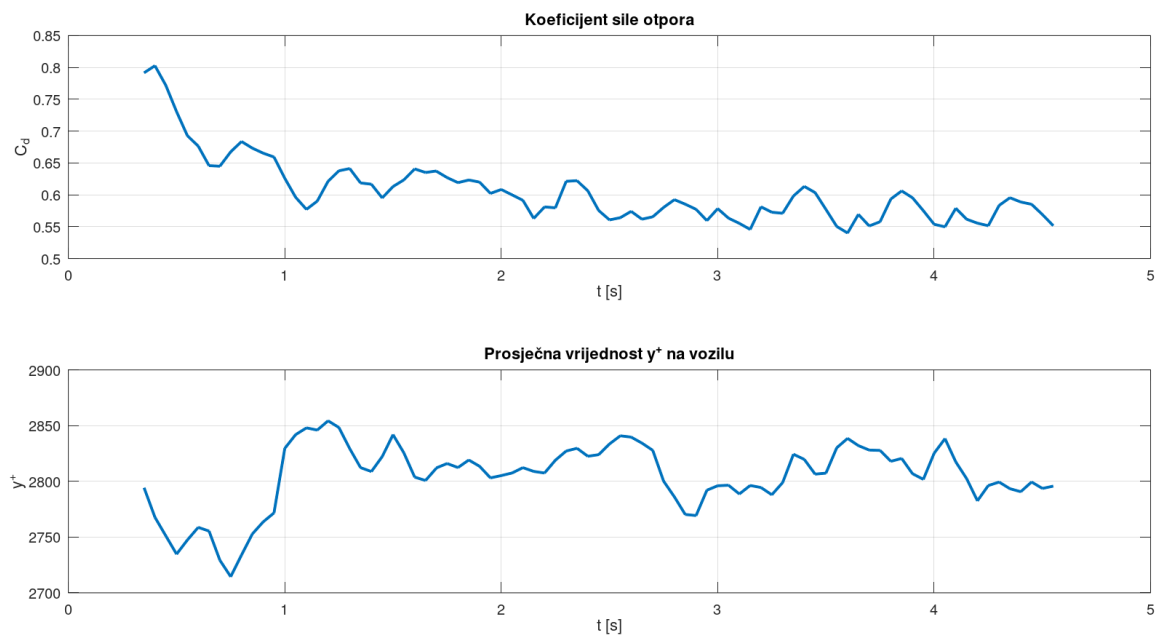
a) Gruba mreža

b) Finija mreža

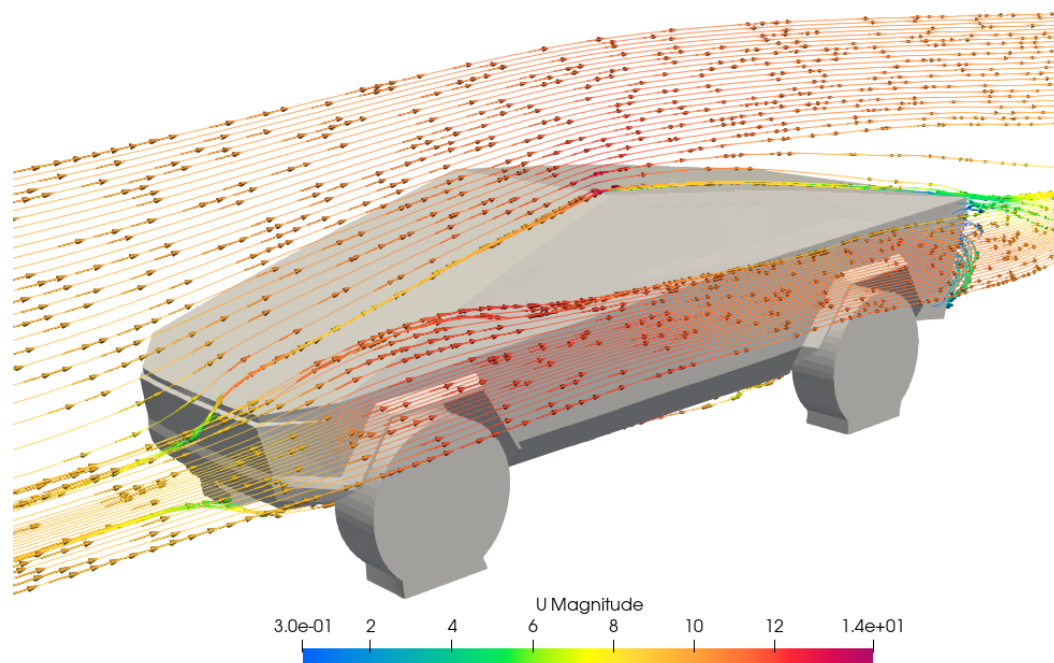
Slika 39: Slučaj 2 - Raspodjela tlaka na vozilu pri gruboj i f finijoj mreži

Slika 40: Slučaj 2 - Raspodjela y^+ vrijednosti na vozilu pri gruboj i finoj mreži

Slika 41: Slučaj 2 - Raspodjela brzine i tlaka u okolišu vozila

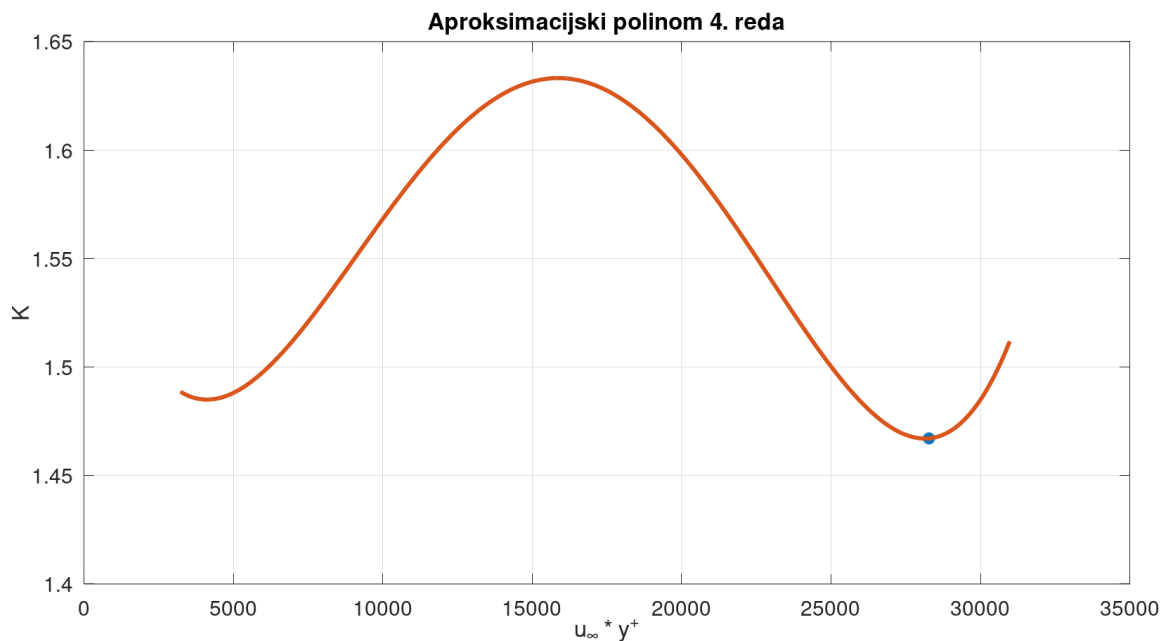


Slika 42: Stacioniranje vrijednosti za finiju mrežu



Slika 43: Prikaz strujnica oko vozila

Tablica 10 prikazuje usporedbu dobivenih proračunskih veličina te njihova korekcija.



Slika 44: Točka na aproksimacijskoj krivulji za slučaj finije mreže

Tablica 10: Usporedba veličina dviju mreža Cybertrucka

	Gruba mreža	Fina Mreža
$\overline{y^+} \cdot u_\infty$	56578,76	28278
$C_{d,n}$	0,5827	0,557624
K_4	18,394	1,4671
C_d^K	0,0317	0,3801

Udarana površina za ovaj proračun iznosi $A = 1.53281 \text{ m}^2$ (polovica vozila) pošto se primjenjuje uvjet simetrije, a eksperimentalno dobiveni koeficijent otpora iznosi $C_{d,e} = 0,39$, [17], [18]

Polinomna aproksimacija K_4 daje neupotrebljive rezultate za grubu mrežu što se može prepisati malom broju kontrolnih volumena, nedovoljno opisanoj geometriji (čak i za uvjete u kojima se traži korekcijski faktor) što rezultira velikim odstupanjima od očekivanih vrijednosti. Još jedan od uzroka je raspon aproksimacijskog $\overline{y^+} \cdot u_\infty \in [3230.6, 31019]$. Tablica 10 pokazuje kako vrijednost $\overline{y^+} \cdot u_\infty$ za taj slučaj ne spada u zadani raspon pa je i za očekivati krivo rješenje. Traženje aproksimacijske krivulje za veći raspon umnoška $\overline{y^+} \cdot u_\infty$ nije imalo smisla jer se za veće vrijednosti već radi o poprilično gruboj mreži.

Što se tiče finije mreže, aproksimacijski polinom dobro korigira za navedene parametre te je dobivena vrijednost korigiranog koeficijenta sile otpora za 0,0099 manja od eksperimentalne vrijednosti (također dobivenu pomoću proračuna koji su potvrđeni eksperimentom).

6. Zaključak

Proračunska mreža je temelj uspješnog proračuna jer o njoj ovise točnost, preciznost i stabilnost simulacije. Da bi se osiguralo brže generiranje mreže, potrebno je geometriju pojednostaviti tako da se izbace nepotrebni i nevažni detalji, a koji kompliciraju generiranje kontrolnih volumena. Također, geometrija treba biti nepropusna, tj. zatvorena, a površine ne smiju imati preklapajuće trokute ni bridove. Za generiranje mreže se najčešće koriste tetraedarski, heksaedarski i nešto rjeđe poliedarski volumeni jer teže opisuju geometriju, a mnogi ih komercijalni programi ne uvrštavaju u ponudu kontrolnih volumena. Kako bi se provjerilo zadovoljava li generirana mreža uvjete, potrebno je provjeriti kriterije kvalitete među kojima su najbitniji maxNonOrtho, maxSkewness, maxAspectRatio i minVolRatio. Sve te vrijednosti utječu na numeričke sheme konvekcijskih i difuzijskih članova u jednadžbama brzine i tlaka. Kao takve, te vrijednosti obavezno moraju zadovoljavati granične vrijednosti da ne bi nastupila nestabilnost ili u konačnici neprecizno rješenje.

Izrada proračunske mreže je iterativni proces i uzima dosta vremena cijelog procesa simulacije, no treba uvijek težiti čim boljoj mreži, neovisno o uloženom vremenu jer dobro generirana mreža (uz pretpostavku dobro postavljenih parametara simulacije) dovodi do preciznog rješenja.

Različiti podaci, istraživanja i analize su dostupne za aerodinamiku kocke pa je zbog toga bila pogodan objekt analize u ovom radu. Osim adekvatne geometrije, rubnih i početnih uvjeta, modela turbulencije i numeričkih shema, rezultat analize uvelike ovisi o finoći proračunske mreže. Mana finih mreža je poskupljenje proračuna, a radi pojednostavljenja procesa i smanjenja troškova, u ovom je radu prezentirana polinomna aproksimacija korekcijskog faktora koji korigira rješenje koeficijenta sile otpora dobiveno na grubljoj mreži.

Prednost korištenja te aproksimacije je dobivanje okvirnih rezultata ako se ne pretjeruje na grubosti mreže. Kako je vidljivo na grafovima, proračunati koeficijent sile otpora ovisi o brzini i srednjoj vrijednosti y^+ . Logika koja stoji iza traženja tih ovisnosti je iduća: iz srednje vrijednosti y^+ se može očitati koliko je mreža fina u ovisnosti o narinutoj brzini. Koeficijent sile otpora uvelike ovisi o finoći mreže jer se prikupljaju podaci na površini i u kontrolnim volumenima graničnih slojeva. Kako bi se izbjeglo kompliciranje traženje ovisnosti

koeficijenta sile otpora o tim parametrima, pristupilo se s pretpostavkom da je koeficijent otpora ovisan o umnošku $\overline{y^+}u_\infty$.

Traženje aproksimacijskog polinoma je rezultiralo s 3 potencijalna polinoma različitih redova. Usporedbom rezultata pojedinih aproksimacijskih polinoma se pokazalo da polinomi većeg reda bolje opisuju korekcije pa je zbog toga odabran polinom 4. reda. Problem aproksimacijskih polinoma je što nisu univerzalni pa tako nije ni taj. U rasponu $\overline{y^+}u_\infty$ za koji je izveden dovoljno dobro korigira vrijednosti koeficijenta sile otpora, a ako bi se taj raspon želio povećati, bilo bi potrebno tražiti novi aproksimacijski polinom koji možda ne bi bio 4. reda.

To je prezentirano u drugom slučaju, Tesla Cybertruck na grubljoj mreži. Kako bi se ubrzao proces proračuna, korištena je jako gruba mreža pa polinomna aproksimacija ne korigira pravilno numeričko rješenje. To pokazuje kako mreža ipak treba biti nekog stupnja finoće. Finija mreža u tom slučaju je dovoljno fina da korekcijska aproksimacija daje fizikalno rješenje vrlo blizu eksperimentalno dobivenog, a opet dovoljno gruba da simulacija na ograničenim računalnim resursima ne traje dugi vremenski period.

Literatura

- [1] Virag, Z., Šavar, M., Džijan, I.: *Mehanika fluida II*, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb, 2018.
- [2] Schlichting, H.: *Boundary-Layer Theory*, Springer, New York, 2000.
- [3] Olanrewaju, E., Abiodun, A.: *Laminar flow in fluid*, Ladoke Akintola University of Technology, Oyo, 2021.
- [4] Avva, R., Smith, C., Singhal, A.: *Comparative Study of High and Low Reynolds Number Versions of k -Epsilon Models*, Nevada, 1990.
- [5] Mohammadi, B., Pironneau, O.: *Analysis of the k -Epsilon turbulence model*, Masson, Paris, 1993.
- [6] Vostruha, K., Pelant, J.: *Perturbation analysis of k -Omega and k -Epsilon turbulent models*, EPJ Web of Conferences 45(2013)01097, 5.
- [7] Davidson, L.: *An introduction to turbulence models*, Chalmers University of Technology, Goteborg, 2022.
- [8] Wilcox, D.C.: *Turbulence MOdeling for CFD- third eition*, DWC Industries, California, 2006.
- [9] Menter, F.R.: *Improved Two-Equation k -Omega Turbulence Models for Aerodynamic Flows*, Ames Research Center, California, 1992.
- [10] *The k -Omega SST model in OpenFOAM*, <https://mustafabhotvawala.com/the-k-omega-sst-model-in-openfoam/>, navedi datum pristupanja toj stranici ko gore v primjeru
- [11] Virag, Z., Džijan, I.: *Računalna dinamika fluida*, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb, 2014.
- [12] Versteeg, H.K., Malalasekera, W.: *An introduction to computational fluid dynamics: the finite volume method*, Pearson education, London, 2007.
- [13] Moukalled, F., Mangani, L., Darwish, M.: *The Finitte Volume method in Computational Fluid Dynamics – An Advanced Introduction with OpenFOAM and Matlab*, Springer, Cham, 2016.
- [14] Uroić, T.: *Implicitly coupled finite volume algorithms*, Doktorska disertacija, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Sveučilište u Zagrebu, 2019.
- [15] Juretić, F.: *cfMesh user guide*, Creative Fields, Zagreb, 2015.

-
- [16] Lande, A.M.: *Complex Mesh Generation with OpenFOAM*, Master's thesis, University of South-Eastern Norway, 2021.
- [17] Saha, A.K.: *Three-dimensional numerical simulations of the transition of flow*, Department of Mechanical Engineering, Louisiana State University, 2004.
- [18] Hortelano-Capetillo, J. G., Vázquez, J., Bañoslopez, E., Alfaro-Ayala, J.: *Drag and lift force analysis for the cybertuck Tesla vehicle*, Journal of Technological Engineering, 5(2021)15, 9-16.