

# Usporedba proračuna nosivosti zupčanika primjenom normi i metode konačnih elemenata

---

**Bonković, Niko**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2023**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:235:166058>

*Rights / Prava:* [Attribution-NonCommercial-NoDerivatives 4.0 International/Imenovanje-Nekomercijalno-Bez prerada 4.0 međunarodna](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-03-06**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# DIPLOMSKI RAD

**Niko Bonković**

Zagreb, 2023.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# DIPLOMSKI RAD

Mentori:

Doc. dr. sc. Tomislav Lesičar, mag. ing. mech.

Student:

Niko Bonković

Zagreb, 2023.

Izjavljujem da sam ovaj rad izradio samostalno koristeći znanja stečena tijekom studija i navedenu literaturu.

Zahvaljujem se svojoj obitelji, djevojci, kolegama i prijateljima koji su me podržavali, bodrili i pomagali tijekom studiranja. Također se zahvaljujem svom mentoru na ukazanoj pomoći i savjetu tijekom izrade ovog rada.

Niko Bonković



Sveučilište u Zagrebu	
Fakultet strojarstva i brodogradnje	
Datum	Prilog
Klasa: 602 - 04 / 23 - 6 / 1	
Ur.broj: 15 - 23 -	

## DIPLOMSKI ZADATAK

Student: **Niko Bonković**

JMBAG: 0035209614

Naslov rada na hrvatskom jeziku: **Usporedba proračuna nosivosti zupčanika primjenom normi i metode konačnih elemenata**

Naslov rada na engleskom jeziku: **Comparison of the gear load capacity obtained by using standards and finite element method**

Opis zadatka:

Zupčanici su ozubljeni mehanički prijenosnici snage i gibanja koji čine neizbježan element svakog industrijskog pogona ili stroja. Kako bi se osigurao neometan rad pogona ili stroja, potrebno je proračunati nosivost zupčanika te osigurati da ne dođe do oštećenja zubi. Jedan od češćih oblika oštećenja koji se javlja je lom korijena zuba. U ovom radu razmatrat će se zupčani par gdje pogonski zupčanik ima 21 zub, a gonjeni 59. Brzina vrtnje pogonskog zupčanika iznosi 2000 okr/min. Osnovni profil ozubljenja je ISO 53 Profil B ( $\alpha = 20^\circ, h_{ap} = m_n, c_p = 0,25m_n, h_{fp} = 1,25m_n, \rho_{fp} = 0,3m_n$ ), pri čemu je kut nagiba boka zubi  $0^\circ$ , a normalni modul  $m_n = 2$  mm. Širina zupčanika iznosi  $b = 25$  mm. Materijal zupčanika je 16MnCr5, kvalitete ML prema ISO 6336-5:2016, cementiran i kaljen. Potrebno je:

1. Proučiti potrebnu literaturu vezanu uz proračun zupčanika prema trenutno važećem međunarodnom standardu (ISO 6336-3:2019) i metodu konačnih elemenata.
2. Proračunati naprezanja u korijenu zuba prema metodi B u ISO 6336-3:2019 te korištenjem Wöhlerove krivulje za zadanu grupu materijala iz ISO 6336-5 odrediti zamorni vijek zupčanika.
3. Odrediti naprezanja u korijenu zuba pomoću metode konačnih elemenata. Odrediti stvarni kritični čvor u korijenu zuba te za taj čvor odrediti zamorni vijek. Napraviti usporedbu položaja stvarnog kritičnog čvora, kritičnog čvora prema normi te čvora s najvećim glavnim naprezanjem.
4. Usporediti dvije geometrije gonjenog zupčanika. Jednu s debljinom vijenca  $s_R = 2h_t$  i drugu s tankim vijencem  $s_R = h_t$ .
5. Rezultate dobivene primjenom normi usporediti s numeričkim simulacijama temeljenim na metodi konačnih elemenata za gonjeni zupčanik.

U numeričkim simulacijama potrebno je proučiti utjecaj faktora trenja i centrifugalne sile na zamorni vijek zupčanika. Zupčanike diskretizirati tetraedarskim ili heksaedarskim konačnim elementima. Za provedbu numeričkih simulacija primijeniti komercijalne programske pakete Abaqus i FESafe. U radu je potrebno navesti korištenu literaturu i eventualno dobivenu pomoć.

Zadatak zadan:

Datum predaje rada:

Predviđeni datumi obrane:

28. rujna 2023.

30. studenoga 2023.

4. – 8. prosinca 2023.

Zadatak zadao:

Predsjednik Povjerenstva:

Doc. dr. sc. Tomislav Lesičar

Prof. dr. sc. Tanja Jurčević Lulić

**SADRŽAJ**

POPIS SLIKA .....	III
POPIS TABLICA.....	IV
POPIS OZNAKA .....	V
SAŽETAK.....	VII
SUMMARY .....	VIII
1. UVOD.....	1
1.1. Općenito o zupčanicima.....	1
1.1.1. Razvoj zupčanika .....	1
1.1.2. Razvoj geometrije ozubljenja .....	1
1.1.3. Razvoj proračuna zupčanika .....	2
1.2. Zamor materijala .....	3
1.3. Metoda konačnih elemenata.....	4
1.3.1. ISO 6336 .....	5
2. PRORAČUN NOSIVOSTI KORIJENA ZUPČANIKA PREMA STANDARDU ISO 6336 .....	7
2.1. Zadani zupčanik .....	7
2.2. Proračun naprezanja u korijenu zuba .....	7
2.2.1. Faktor oblika $Y_F$ .....	8
2.2.2. Faktor korekcije naprezanja .....	10
2.2.3. Faktor debljine vijenca.....	11
2.2.4. Faktori nagiba boka i dubokog zuba .....	11
2.2.5. Vrijednost nominalnog naprezanja u korijenu zuba .....	11
2.3. Proračun naprezanja u korijenu zuba .....	12
2.3.1. Faktor primjene $K_A$ .....	12
2.3.2. Faktor uzubljivanja $K_\gamma$ .....	12
2.3.3. Faktor unutrašnjih dinamičkih opterećenja $K_v$ .....	13

2.3.4.	Faktor raspodjele opterećenja po duljini boka zuba kod proračuna nosivosti korijena $K_{f\beta}$ .....	13
2.3.5.	Faktor raspodjele opterećenja na pojedine na pojedine zube u zahvatu $K_{F\alpha}$ .....	13
2.4.	Proračun vrijednosti dopuštenog naprezanja u korijenu zuba .....	14
2.4.1.	Faktor korekcije naprezanja $Y_{ST}$ .....	15
2.4.2.	Faktor zamornog vijeka $Y_{NT}$ .....	15
2.4.3.	Faktor relativne osjetljivosti na zarezno djelovanje $Y_{\delta relT}$ .....	15
2.4.4.	Relativni faktor površine $Y_{RelT}$ .....	16
2.4.5.	Faktor veličine $Y_X$ .....	16
2.4.6.	Dopuštena naprezanja za statičko i referentno opterećenje .....	16
2.5.	Određivanje naprezanja u korijenu i zamornog vijeka zadanih zupčanika .....	17
3.	PRORAČUN NAPREZANJA U KORIJENU ZUBA METODOM KONAČNIH ELEMENATA .....	18
3.1.	Postavljanje problema .....	18
3.2.	Kreiranje proračunskog modela .....	18
3.3.	Diskretiziranje modela mrežom konačnih elemenata .....	20
3.4.	Analiza konvergencije i odabir tipa konačnih elemenata .....	22
3.5.	Evaluacija rezultata numeričke analize .....	25
3.6.	Rezultati numeričke analize bez drugih utjecaja .....	25
3.7.	Numerička simulacija s utjecajem centrifugalne sile .....	26
3.8.	Rezultati numeričke analize s utjecajem trenja .....	27
3.9.	Rezultati numeričke analize s tankim vijencem .....	29
3.10.	Određivanje zamornog vijeka zupčanika .....	32
3.11.	Usporedba dobivenih rezultata .....	33
4.	ZAKLJUČAK .....	35

**POPIS SLIKA**

Slika 1.	Veličine koje utječu na faktor oblika [6].....	8
Slika 2.	Površine na kojima je definiran kontakt.....	19
Slika 3.	Rubni uvjeti i opterećenje.....	20
Slika 4.	Podjela geometrije zuba na manje cjeline .....	21
Slika 5.	Inicijalna mreža konačnih elemenata na gonjenom zupčaniku .....	22
Slika 6.	Analiza konvergencije .....	23
Slika 7.	Tipovi konačnih elemenata .....	23
Slika 8.	Mreža konačnih elemenata .....	24
Slika 9.	Naprezanje u korijenu pogonskog zupčanika.....	25
Slika 10.	Naprezanje u korijenu zuba gonjenog zupčanika prema uputama iznad .....	26
Slika 11.	Rezultati analize s utjecajem centrifugalne sile .....	27
Slika 12.	Naprezanja u korijenu zuba pogonskog zupčanika - trenje.....	28
Slika 13.	Naprezanja u korijenu zuba gonjenog zupčanika - utjecaj trenja.....	29
Slika 14.	Veza između središta zupčanika i vanjskog tankog vijenca.....	30
Slika 15.	Naprezanja u korijenu zuba pogonskog zupčanika - tanki vijenac .....	31
Slika 16.	Naprezanja u korijenu zuba pogonskog zupčanika - tanki vijenac .....	31
Slika 17.	Set elemenata korištenih za analizu zamora.....	32
Slika 18.	Prikaz stvarnog kritičnog čvora i čvora s najvećim glavnim naprezanjem.....	33



## POPIS TABLICA

Tablica 1. Rezultati proračuna naprezanja i zamornog vijeka prema ISO 6336 .....	17
Tablica 2. Vrijednosti zadane kod definiranja materijala.....	19
Tablica 3. Analiza konvergencije .....	22
Tablica 4. Usporedba različitih tipova konačnih elemenata.....	24
Tablica 5. Maksimalne vrijednosti naprezanja .....	26
Tablica 6. Vrijednosti maksimalnih naprezanja - centrifugalna sila .....	27
Tablica 7. Maksimalna sila u korijenu zuba uz utjecaj trenja .....	28
Tablica 8. Maksimalna i minimalna naprezanja u kritičnoj točki .....	30
Tablica 9. Zamorni vijek zupčanika .....	32
Tablica 10. Usporedba rezultata dobivenih numerički i MKE.....	33

**POPIS OZNAKA**

Oznaka	Jedinica	Opis
$b$	mm	Širina zupčanika
$c_{\gamma\alpha}$	N/mm/ $\mu\text{m}$	Krutost uzubljivanja
$d$	mm	Promjer diobene kružnice
$d_{\text{an}}$	mm	Promjer tjemene kružnice
$d_{\text{bn}}$	mm	Promjer temeljne kružnice
$d_{\text{n}}$	mm	Diobeni promjer virtualnog zupčanika
$f_{\text{pb}}$	-	Devijacija koraka na temeljenoj kružnici
$F_{\text{t}}$	N	Nominalna tangencijalna sila koja djeluje na referentnoj kružnici
$G$	-	Pomoćna varijabla
$H$	-	Pomoćna varijabla
$h_{\text{ap}}$	mm	Visina tjemena zuba
$h_{\text{ip}}$	mm	Visina podnožja zuba
$h_{\text{t}}$	mm	Visina zuba
$K_{\text{A}}$	-	Faktor primjene
$K_{\text{F}\alpha}$	-	Faktor raspodjele opterećenja na pojedine zube u zahvatu
$K_{\text{F}\beta}$	-	Faktor raspodjele opterećenja po duljini boka zuba
$K_{\text{I}}$	-	Faktor intenzivnosti naprezanja
$K_{\text{V}}$	-	Faktor unutrašnjeg dinamičkog opterećenja
$K_{\text{Y}}$	-	Faktor uzubljivanja
$L$	-	Omjer koraka i visine zuba
$m_{\text{n}}$	mm	Normalni modul
$n$	$\text{min}^{-1}$	Brzina vrtnje
$N_{\text{L}}$	-	Broj ciklusa
$q_{\text{S}}$	-	Omjer koraka i radijusa zakrivljenosti korijena

$S_{F \min}$	-	Minimalna vrijednost faktora sigurnosti korijena zuba
$S_{Fn}$	mm	Debljina zuba u korijenu
$S_{pr}$	mm	Zaostala podrezanost korijena
$S_R$	mm	Debljina vijenca
$t$	mm	Korak zupčanika
$y_\alpha$	$\mu\text{m}$	Vrijednost uhodavanja
$Y_\beta$	-	Faktor nagiba boka
$Y_{\delta \text{ rel T}}$	-	Faktor relativne osjetljivosti na zarezno djelovanje
$Y_B$	-	Faktor debljine vijenca
$Y_{DT}$	-	Faktor dubine zuba
$Y_F$	-	Faktor oblika
$Y_{NT}$	-	Faktor zamornog vijeka
$Y_{R \text{ rel T}}$	-	Relativni faktor površine
$Y_S$	-	Faktor korekcije naprezanja
$Y_{ST}$	-	Faktor korekcije naprezanja
$Y_X$	-	Faktor veličine
$z_n$	-	Broj zubi zupčanika
$x$	mm	Pomak profila
$\alpha$	$^\circ$	Kut zahvatne linije
$\alpha_{Fen}$	$^\circ$	Kut djelovanja sile
$\beta$	$^\circ$	Kut nagiba boka
$\varepsilon_\alpha$	-	Stupanj prekrivanja
$\rho_f$	mm	Polumjer zakrivljenosti korijena zuba u kritičnom presjeku
$\rho_{fP}$	mm	Polumjer zakrivljenosti korijena zuba
$\sigma_F$	MPa	Naprezanje u korijenu zuba
$\sigma_{F0}$	MPa	Nominalno naprezanje u korijenu zuba
$\sigma_{F \text{ lim}}$	MPa	Promjenjiva jednosmjerna čvrstoća korijena zuba
$\sigma_{FP}$	MPa	Dopušteno naprezanje u korijenu zuba

**SAŽETAK**

Zupčanici spadaju u skupinu strojnih elemenata čija je svrha prenošenje snage i gibanja. Jedan su od najzastupljenijih strojnih elemenata unutar te skupine te njihovo konstruiranje predstavlja vrlo kompleksan inženjerski problem. Zatajenje zuba u korijenu najčešći je način zatajenja zupčanika u industriji. Zbog toga se često javlja potreba za što boljim razumijevanjem njegova nastajanja. U ovom radu su obrađene dvije metode određivanja naprezanja u korijenu zuba i određivanja zamornog vijeka zupčanika. Proračun je prvo proveden prema standardu Međunarodne Organizacije za Standardizaciju ISO 6336: Proračun nosivosti cilindričnih zupčanika s ravnim ili kosim zubima, a nakon toga numerički, metodom konačnih elemenata. Proveden je proračun nosivosti i zamornog vijeka prema standardu za slučaj sa i bez utjecaja tankog vijenca, dok su numeričke simulacije provedene za ta dva slučaja, kao i za slučaj kada se uzima u obzir trenje i centrifugalna sila.

Ključne riječi: Zupčanik, Metoda konačnih elemenata, Zamor materijala

**SUMMARY**

Gears are machine elements that are used to transmit power and motion. They are one of the most represented machine elements in that field and the process of designing them is a very complex engineering problem. Tooth-bending fatigue is the most common way of gear failure in the industry. For this reason, there is often a need for a better understanding of its cause. In this paper, two methods of determining the tooth root bending stress and the fatigue life of gears are discussed. According to the standard of the International Organization for Standardization ISO 6336: Calculation of load capacity spur and helical gears, and numerically, using the finite element method. The calculation of load capacity and fatigue life according to the standard was carried out in two cases, with and without the influence of a thin rim, while numerical simulations were carried out for those two cases and two additional cases, when friction and centrifugal force were taken into consideration.

Key words: Gear, Finite element method, Fatigue

## 1. UVOD

### 1.1. Općenito o zupčanicima

#### 1.1.1. Razvoj zupčanika

Nije moguće odrediti kada je došlo do izuma zupčanika. Smatra se da je prve primjene strojnih elemenata koji podsjećaju na zupčanike bilo moguće naći i prije 4000 godina, što se zaključuje iz različitih antičkih zapisa. Tada su se koristili u svrhe izvlačenja vode i prenašanja tereta. Kasnije je Leonardo Da Vinci skicirao i opisivao zupčaničke parove koje su zatim Nizozemci primjenjivali u vjetrenjačama. Krajem 13. stoljeća zupčanici se počinju češće pojavljivati i to prvenstveno u satnim mehanizmima. Dolaskom industrijske revolucije i prvih pogonskih strojeva, pojavila se potreba za pretvorbom brzine vrtnje i momenta te samim time počinje i ubrzani razvoj zupčanika. Najprije su se pojavili parni strojevi čija je brzina vrtnje bila preniska za upotrebu što je zahtijevalo konstruiranje multiplikatora, a kasnije pojavom parnih turbina i potreba za redukcijom brzine vrtnje i samim time masovne proizvodnje reduktora. Konačno, pojavom motora s unutrašnjim izgaranjem i elektromotora, počinje nagli razvoj svih vrsta prijenosnika koji mogu prenositi velike snage i visoke brzine vrtnje. Danas prijenosnici mogu prenositi u ekstremnim slučajevima i više od 150 MW, te se u posebnim slučajevima konstruiraju za brzine do  $150\,000\text{ min}^{-1}$  [1]. Njihova primjena u strojarstvu je široka i gotovo je nemoguće zamisliti bilo kakav pogonski stroj bez upotrebe zupčanika.

#### 1.1.2. Razvoj geometrije ozubljenja

Razvoj geometrije ozubljenja je uglavnom pratio razvoj teorije strojarstva. Utemeljiteljem znanstvene teorije ozubljenja se smatra P. De La Hire koji je krajem 17. stoljeća prvi razvio zupčanički par s konstantnim prijenosnim omjerom. L. Euler je sredinom 18. stoljeća razvio koncept zuba zupčanika koji prati evolventnu krivulju. Takva geometrija zuba se i danas koristi u konstruiranju gotovo svih zupčanika. Iako je već tada teorija ozubljenja bila dobro razvijena, nije se počela primjenjivati u praksi do 19. stoljeća i pojave parnih strojeva, elektromotora i motora s unutarnjim izgaranjem. Kasnijim razvojem i sve širom primjenom zupčanika pojavljuje se potreba za standardizacijom ozubljenja. Već je 1942. godine postojao sustav tolerancija zupčanika koji je 1952. godine i zapisan u standard DIN 3962. U godinama koje su

slijedile, DIN 3962 je proširen te su napisani i mnogi drugi standardi koji su daju sve više informacija i detaljnije opisuju preporuke za konstrukciju zupčanika [2].

### **1.1.3. Razvoj proračuna zupčanika**

Postoji više načina zatajenja zupčanika, od kojih su najčešći zatajenje zuba u korijenu, rupičenje (eng. *pitting*), zaribavanje, mikro-rupičenje (eng. *micropitting*) te fraktura boka (eng. *flank fracture*). Za sve načine zatajenja je pri konstruiranju potrebno kvantificirati rizik od njihove pojave te se pobrinuti da njih ne dođe. S obzirom da će se u ovom radu razmatrati kaljeni zupčanici čija je površina višestruko manje osjetljiva na trošenje i pojavu rupičenja od nekaljenih zupčanika, taj će se dio proračuna zanemariti te će se rad fokusirati na naprezanja u korijenu i voditi pretpostavkom da je upravo taj način zatajenja najkritičniji tj. onaj koji treba pratiti i spriječiti. Korijen zuba je bio prvi dio zupčanika za koji se počela razvijati teorija proračuna početkom 18 stoljeća. Dotada su se konstruktori vodili iskustvenim omjerima koji su se pokazali zadovoljavajući u praksi. Primjerice, širina zupčanika u inčima mora biti jednaka snazi u konjskim snagama koju je potrebno prenijeti. Pretpostavlja se da je prvu relaciju između veličine zuba i savojnog opterećenja predložio P. Muschenbroek 1772. godine. Relacija povezuje opterećenje, materijal i dimenzije zupčanika. Zatim je engleski inženjer T. Tredgold pretpostavio da je glavni faktor koji utječe na nosivost zupčanika raspored opterećenja po boku zuba, te je zapisao relaciju koja opisuje debljinu zuba na diobenom promjeru koja se pokazala zadovoljavajuće točnom za lijevane zupčanike. Sredinom 19. stoljeća F. Releaux je upotrijebio omjer širine zuba i koraka u svojim izračunima i prepoznao mogućnost njegove primjene. Najveći utjecaj na proračun korijena zupčanika imao je C.v. Bach koji je u svojim jednadžbama kreirao fundamentalnu relaciju opterećenja zuba  $P$ , faktora primjene  $k$ , koraka  $t$  i širine zupčanika  $b$ , koja se u proširenom obliku i dan danas koristi. Veliki doprinos proračunu ovom području imali su i C. Lewis i H. Hofer. Prvi je definirao parabolu unutar zuba koja ima jednaku krutost kao zub ali jednostavniju geometriju, stoga ju je jednostavnije proračunati. H. Hofer je zamijenio njegovu parabolu dvama dužinama sa svake strane središnjice zuba. Duljina presijeca središnjicu zuba pod  $30^\circ$  i tangira korijen zuba. Presjecište te duljine i korijena zuba se i danas u standardu koristi kao kritično mjesto u korijenu zuba te se u toj točki promatra naprezanje i u ovom radu. Početkom 20. stoljeća kod proračuna se počinje uzimati u obzir i faktor zareznog djelovanja. Tu su uvelike doprinijeli G. Niemann i G. Glaubitz koji su uzeli u obzir savojna, tlačna i smična naprezanja. Konačno, nakon što su već nekoliko desetljeća u upotrebi bile teorije

zareznog djelovanja na vratilima i sličnim strojnim elementima, teorije su prilagođene i zupčanicima te je započelo njihovo zapisivanje u norme. Tu je važno napomenuti M. Hirta koje je eksperimentalnim metodama odredio faktore koncentracije naprezanja i tako postavio temelje standarda ISO 6336 odnosno DIN 3990 [2].

## 1.2. Zamor materijala

Zamor materijala je pojava pri kojoj dolazi do pojave loma materijala zbog dugotrajnog izlaganja cikličkom opterećenju. Izrazito je bitno proučavati ga jer su posljedice zamornog loma najčešće katastrofalne [3]. Pojavom prvih strojeva koji proživljavaju intenzivna ciklička opterećenja, dolazi i do pojave prvih zamornih lomova i njihovih analiza. Najistaknutije analize je vodio A. Wöhler u pedesetim i šezdesetim godinama 19. stoljeća. A. Wöhler je radio mnoge eksperimente u kojima je analizirao kako ciklička naprezanja utječu na vijek trajanja strojnog dijela. Dokazao je da se smanjivanjem amplitude cikličkih naprezanja može produljiti zamorni vijek strojnog dijela. Nadalje, dokazao je i da je moguće odrediti pri kojoj amplitudi cikličkog opterećenja neće ni nakon praktički beskonačnog broja ciklusa doći do loma. Ti se podaci za svaki materijal mogu pokazati grafički S-N dijagramom (eng. Stress – Number of cycles) koji se u čast A. Wöhlera često naziva i Wöhlerovim dijagramom. Zatim su slijedili mnogi znanstvenici koji su akumulirali eksperimentalne podatke te samim time i znanje o ovoj temi. Iz te grupe se može izdvojiti M. A. Minera koji je 1945. godine formulirao kriterij zbrajanja ciklusa naprezanja kod akumulacije zamornog oštećenja, koju je prije njega predložio A. Palmgren. Danas se ta metoda naziva Palmgren-Minerova metoda i jako često je korištena. Veliki napredak u ispitivanju zamora materijala dogodio se pedesetih godina prošlog stoljeća kada su razvijene servo-hidrauličke umaralice. Ocem moderne mehanike loma smatra se G. R. Irwin koji je između ostalog, kod proučavanja pukotina i njihovog nastajanja kreirao novi faktor  $K_I$  - faktor intenzivnosti naprezanja, koji je s vremenom prihvaćen kao osnova linearno elastične mehanike loma. U drugoj polovici 20. stoljeća razvijaju se novi pristupi mehanici loma od kojih je važno spomenuti  $\epsilon$ -N metodu koja opisuje nisko-ciklički zamor. To je metoda ovisnosti amplitude deformacije o broju ciklusa opterećenja do nastanka zamorne pukotine. Prema toj metodi vrijeme do nastanka pukotine je jednako zamornom vijeku komponente, zbog toga što nakon inicijacije pukotine jako brzo dolazi do njezinog širenja i konačnog loma. Razlika u odnosu na S-N metodu je u tome što ova metoda predviđa ishod u slučaju kada se na mjestima koncentracije naprezanja javlja plastična deformacija i samim time može obuhvatiti više



slučajeva opterećenja [1]. Danas postoje četiri metode koje se koriste pri određivanju zamornog vijeka komponente i izbor najpogodnije ovisi, između ostalog, o opterećenju, traženom zamornom vijeku, geometriji i važnosti komponente koja se konstruira. To su već spomenute S-N i  $\epsilon$ -N metode, da/dN- $\Delta K$  metoda koja za razliku od  $\epsilon$ -N uzima u obzir vrijeme nakon nastanka pukotine te opisuje njezinu propagaciju. Konačno, četvrta metoda obuhvaća  $\epsilon$ -N i da/dN- $\Delta K$  metodu kako bi u potpunosti mogla opisati nastanak i propagaciju pukotine. 90% zatajenja na konstrukcijama posljedica je zamora materijala. Kada je riječ o zupčanicima najučestalije zatajenje je vezano upravo za zamorni lom u korijenu zuba. Takvo zatajenje nerijetko vodi prema zatajenju većeg broja zuba, što kao krajnju posljedicu može imati zaustavljanje rada konstrukcije [3].

U ovom radu će se stoga kao pretpostavljeni princip zatajenja uzeti zamorni lom u korijenu zupčanika, pri čemu naprezanja u korijenu neće uzrokovati plastične deformacije. Sukladno tome razmatrati će se područje visoko-cikličkog zamora za što je dovoljno koristiti se S-N metodom.

### 1.3. Metoda konačnih elemenata

Za numeričku analizu problema će se koristiti metoda konačnih elemenata. To je numerička metoda koja se koristi za proračun fizikalnih veličina važnih za integritet konstrukcije poput naprezanja, pomaka i deformacija. Metoda se razvila u 20. stoljeću paralelno s razvojem računala i matičnih metoda u mehanici. Prve primjene metode je prezentirao R.W. Clough u šezdesetim godinama prošlog stoljeća i smatra se da je on imenovao metodu. Velika prednost metode je to što je sposobna analizirati gotovo sve vrste geometrije, opterećenja, rubnih uvjeta i ako su dobro zadani parametri, dati rješenja za probleme koje je nemoguće proračunati analitički. Negativna strana metode je što je jako osjetljiva na ulazne parametre i može davati prividno dobre rezultate koji su u potpunosti pogrešni zbog mnogih fenomena koju su mogući prilikom numeričkog rješavanja problema. S vremenom se proširila u sva područja strojarstva i postala je nezamjenjivi alat za provjeru integriteta konstrukcije u procesu konstruiranja novih proizvoda. Osnovna ideja metode konačnih elemenata je podjela složenih konstrukcija na manje, jednostavnije dijelove poznate kao "konačni elementi". Svaki od tih elemenata ima definirane matematičke karakteristike i ponaša se kao pojednostavljeni model stvarne strukture. Konačni elementi mogu se podijeliti na dvodimenzionalne (2D) i trodimenzionalne (3D) konačne elemente [3].

2D konačni elementi nazivaju se još i ravninski, a koriste se uglavnom u problemima kojima su opisane ploče i ljuske, odnosno elementi kojima je debljina, kao treća dimenzija, zanemarivo mala u usporedbi s ostale dvije.

3D konačni elementi složeniji su te se koriste ukoliko u simulaciju nije moguće uvesti pojednostavljenja koja sa sobom donose 2D elementi. Primjeri takvih slučajeva bili bi proračuni tijela složenijeg oblika, konstrukcije od heterogenih materijala, složeno opterećene konstrukcije ili detaljnije analize područja konstrukcija [4].

U praksi, kada je god opravdano, odnosno kad god su rezultati dovoljno točni, koriste se 2D konačni elementi zbog njihove jednostavnosti, vremena trajanja simulacije i utroška memorije računala. U radu će se koristiti 2D pravokutni konačni elementi.

### **1.3.1. ISO 6336**

ISO 6336 je standard Međunarodne Organizacije za Standardizaciju koji opisuje proračun nosivosti cilindričnih zupčanika s ravnim ili kosim zubima. Prvi put je objavljen 1997. godine nakon pet desetljeća istraživanja međunarodnog povjerenstva sastavljenog od niza stručnjaka u ovom području strojarstva. Od prvog izdanja je objavljeno još nekoliko revizija, od kojih je zadnja bila 2021. godine. Rezultati dobiveni metodom koja je zapisana u ovom standardu će se uspoređivati s rezultatima dobivenima numeričkim metodama [5]. Standard je podijeljen na pet glavnih dijelova:

- ISO 6336-1 – Temeljna načela, uvod i opći utjecajni faktori
- ISO 6336-2 – Proračun nosivosti boka zuba (rupičenje)
- ISO 6336-3 – Proračun nosivosti korijena zuba
- ISO 6336-5 – Čvrstoća i kvaliteta materijala
- ISO 6336-6 – Proračun radnog vijeka pod promjenjivim opterećenjem

Osim međunarodnog standarda, dokument se sastoji i od tehničkih specifikacija i tehničkih izvještaja, dokumenata koji još nisu dovoljno cjeloviti da bi bili dio standarda, ali su korisni i općeprihvaćeni od strane inženjera koji se bave proračunom nosivosti zupčanika. Svrha standarda je približiti svim inženjerima koji se bave proračunom zupčanika, metodu koja je provjerena i prihvaćena na međunarodnoj razini i time osigurati maksimalnu moguću sigurnost, pouzdanost i efikasnost zupčanika odnosno prijenosnika u koje se ugrađuju. Standard prepoznaje tri različite metoda proračuna. Metodu A, B i C. Metodu A opisuje činjenica da su rezultati izvedeni iz cjelokupnog testiranja, preciznih mjerenja ili matematičkih analiza koje

opisuju prijenosnik na temelju iskustva, ili kombinacijom nečeg od navedenog. Svi podaci moraju biti dostupni za ovakvu analizu. U ovoj metodi pretpostavke moraju biti jasno naglašene. Metoda A zahtijeva znanje i iskustvo za korištenje, pogotovo zbog toga što detalji uvjeta rada nisu uvijek u potpunosti poznati. Metoda B je analitička i uvodi aproksimacije u obliku različitih faktora. Njenim se korištenjem dobivaju dovoljno precizni rezultati za većinu slučajeva. Neophodno je za dani slučaj provjeriti sve pretpostavke koje metoda donosi sa sobom, odnosno potrebno je provjeriti slažu li se uvjeti slučaja s pretpostavkama standarda. Metoda B je korištena u ovom radu. Metoda C okarakterizirana je dodatnom aproksimacijom mnogih faktora u svrhu jednostavnosti primjene. Kao i u metodi B potrebno je provjeriti kako se pretpostavke metode slažu s uvjetima slučaja [5].

## 2. PRORAČUN NOSIVOSTI KORIJENA ZUPČANIKA PREMA STANDARDU ISO 6336

U ovom poglavlju će se prikazati zadatkom zadana geometrija i izvršiti proračun sigurnosti korijena zupčanika pomoću ISO 6336-3, ISO 6336-1 i ISO 6336-5 te odrediti zamorni vijek zupčanika pomoću ISO 6336-6.

### 2.1. Zadani zupčanik

Za analizu problema koristit će se zupčanički par sa slijedećim parametrima:

- Standardni profil ozubljenja: ISO 53 Profil B,
- $\alpha = 20^\circ$ ,
- $h_{ap} = m_n$ ,
- $c_p = 0,25 m_n$ ,
- $h_{fp} = 1,25 m_n$ ,
- $\rho_{fP} = 0,3 m_n$ ,
- $\beta = 0^\circ$ ,
- $m_n = 2 \text{ mm}$ ,
- $z_1 = 21$ ,
- $z_2 = 59$ ,
- $b = 25 \text{ mm}$ ,
- $n_1 = 2000 \text{ min}^{-1}$ ,
- Materijal zupčanika: 16MnCr5, kvalitete ML, cementiran i kaljen.

### 2.2. Proračun naprezanja u korijenu zuba

Proračun naprezanja će se vršiti metodom B. Jednadžba kojom se računa naprezanje u korijenu zuba (1) u standardu je zapisana na slijedeći način:

$$\sigma_F = \sigma_{F0} \cdot K_A \cdot K_V \cdot K_V \cdot K_{F\beta} \cdot K_{F\alpha}, \quad (1)$$

gdje je:

- $\sigma_{F0}$  – nominalno naprezanje u korijenu zuba,
- $K_A$  – faktor primjene,
- $K_V$  – faktor uzubljivanja,

- $K_V$  – faktor unutrašnjeg dinamičkog opterećenja,
- $K_{F\beta}$  – faktor raspodjele opterećenja po duljini boka zuba,
- $K_{F\alpha}$  – faktor raspodjele opterećenja na pojedine zube u zahvatu.

Nominalno naprezanje u korijenu zuba se računa pomoću jednadžbe (2) :

$$\sigma_{F0} = \frac{F_t}{b \cdot m_n} \cdot Y_F \cdot Y_S \cdot Y_\beta \cdot Y_B \cdot Y_{DT}, \quad (2)$$

gdje je:

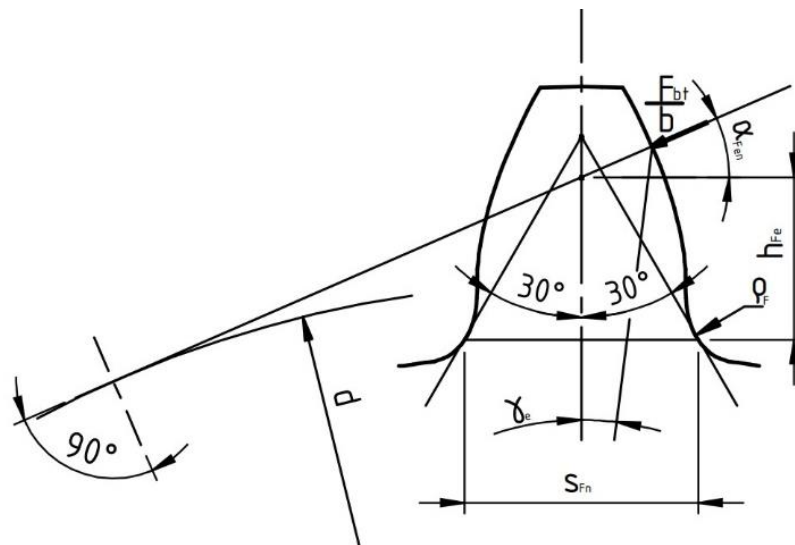
- $F_t$  – nominalna tangencijalna sila koja djeluje na referentnoj kružnici,
- $Y_F$  – faktor oblika,
- $Y_S$  – faktor korekcije naprezanja,
- $Y_\beta$  – faktor nagiba boka,
- $Y_B$  – faktor debljine vijenca,
- $Y_{DT}$  – faktor dubine zuba.
- 

### 2.2.1. Faktor oblika $Y_F$

Faktor oblika se računa pomoću jednadžbe (3):

$$Y_F = \frac{6 \cdot \frac{h_{Fe}}{m_n} \cdot \cos\alpha_{Fen}}{\left(\frac{s_{Fn}}{m_n}\right)^2 \cdot \cos\alpha_n} \cdot f_e. \quad (3)$$

Veličine koje utječu na vrijednost faktora oblika prikazane su na slici 1.



Slika 1. Veličine koje utječu na faktor oblika [6]

Kako bi se izračunale vrijednosti  $S_{Fn}$ ,  $\alpha_{Fen}$  i  $h_{Fe}$ , najprije je potrebno izračunati vrijednost  $\theta$  koja se računa iterativno pomoću izraza (4) koji glasi:

$$\theta = \frac{2G}{z_n} \cdot \tan\theta - H. \quad (4)$$

Za početnu vrijednost  $\theta$  može se uzeti  $\frac{\pi}{6}$ . Vrijednosti  $G$  i  $H$  se računaju na pomoću izraza (5) i (6) koji glase:

$$G = \frac{\rho_{fP}}{m_n} - \frac{h_{fP}}{m_n} + x, \quad (5)$$

$$H = \frac{2}{z_n} \cdot \left( \frac{\pi}{2} - \frac{E}{m_n} \right) - T. \quad (6)$$

Gdje je:

$\rho_{fP}$  – polumjer zakrivljenosti u korijenu zuba,

$m_n$  – normalni modul,

$h_{fP}$  – visina podnožja zuba,

$x$  – pomak profila,

$z_n$  – broj zubi zupčanika.

Za zupčanike s vanjskim ozubljenjem vrijednosti  $T$  i  $E$  su prikazani izrazima (7) i (8) koji glase:

$$T = \frac{\pi}{3}, \quad (7)$$

$$E = \frac{\pi}{4} m_n - h_{fP} \cdot \tan\alpha_n + \frac{s_{pr}}{\cos\alpha_n} - (1 - \sin\alpha) \cdot \frac{\rho_{fP}}{\cos\alpha_n}, \quad (8)$$

gdje je vrijednost  $s_{pr}$  zaostala podrezanost korijena. Ako nema podrezanosti, vrijednost  $s_{pr}$  je jednaka nuli.

Vrijednost  $s_{Fn}$  je sada moguće izračunati pomoću jednadžbe (9):

$$\frac{s_{Fn}}{m_n} = z_n \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right) + \sqrt{3} \cdot \left( \frac{G}{\cos\theta} - \frac{\rho_{fP}}{m_n} \right). \quad (9)$$

Radijus zakrivljenosti korijena zuba  $\rho_f$  se računa pomoću jednadžbe (10):

$$\frac{\rho_f}{m_n} = \frac{\rho_{fP}}{m_n} + \frac{2 \cdot G^2}{\cos\theta \cdot (z_n \cdot \cos^2\theta - 2G)}. \quad (10)$$

Krak momenta  $h_{Fe}$  se računa pomoću jednadžbe (11):

$$\frac{h_{Fe}}{m_n} = \frac{1}{2} \left[ (\cos\gamma_e - \sin\gamma_e \cdot \tan\alpha_{Fen}) \cdot \frac{d_{en}}{m_n} - z_n \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right) - \left( \frac{G}{\cos\theta} - \frac{\rho_{fP}}{m_n} \right) \right]. \quad (11)$$

Vrijednost  $\alpha_{\text{Fen}}$  se računa pomoću jednadžbe (12) koja glasi:

$$\alpha_{\text{Fen}} = \tan\alpha_{\text{en}} - \text{inv}\alpha_{\text{n}} - \frac{0,5 \cdot \pi + 2 \cdot x \cdot \tan\alpha_{\text{n}}}{z_{\text{n}}}. \quad (12)$$

Gdje su (13), (14), (15) i (16) dodatne geometrijske značajke:

$$\alpha_{\text{en}} = \arccos\left(\frac{d_{\text{bn}}}{d_{\text{en}}}\right), \quad (13)$$

$$d_{\text{an}} = d_{\text{n}} + d_{\text{Na}} - d, \quad (14)$$

$$d_{\text{bn}} = d_{\text{n}} \cdot \cos\alpha_{\text{n}}, \quad (15)$$

$$d_{\text{en}} = 2 \cdot \frac{z}{|z|} \sqrt{\left[ \sqrt{\left(\frac{d_{\text{an}}}{2}\right)^2 - \left(\frac{d_{\text{bn}}}{2}\right)^2} - \frac{\pi \cdot d \cdot \cos\beta \cdot \cos\alpha_{\text{n}}}{|z|} \cdot (\varepsilon_{\alpha} - 1) \right]^2 + \left(\frac{d_{\text{bn}}}{2}\right)^2} \quad (16)$$

Sada je moguće izračunati faktor oblika za pogonski zupčanik pomoću izraza (17):

$$Y_{\text{F}} = \frac{6 \cdot \frac{1,95}{2} \cdot \cos(17,57^\circ)}{\left(\frac{3,89}{2}\right)^2 \cdot (\cos 20^\circ)} \cdot 1 = 1,56. \quad (17)$$

Faktor oblika za gonjeni zupčanik se računa analogno pomoću izraza (18):

$$Y_{\text{F}} = \frac{6 \cdot \frac{2,12}{2} \cdot \cos(19,79^\circ)}{\left(\frac{4,41}{2}\right)^2 \cdot \cos(20^\circ)} \cdot 1 = 1,31. \quad (18)$$

### 2.2.2. Faktor korekcije naprezanja

Faktor korekcije naprezanja se analitički može izračunati pomoću jednadžbe (19). Proračun vrijedi kada je vrijednost omjera koraka i radijusa zakrivljenosti korijena između vrijednosti  $1 \leq q_{\text{S}} \leq 8$ .

$$Y_{\text{S}} = (1,2 + 0,13 \cdot L) \cdot q_{\text{S}}^{\left[\frac{1}{1,21 + \frac{2,3}{L}}\right]}. \quad (19)$$

Gdje je:

$$L = \frac{s_{\text{Fn}}}{h_{\text{Fe}}}, \quad (20)$$

$$q_{\text{S}} = \frac{s_{\text{Fn}}}{2\rho_{\text{F}}}. \quad (21)$$

Faktor korekcije naprezanja prikazan je izrazom (22) te je za pogonski zupčanik je jednak:

$$Y_S = (1,2 + 0,13 \cdot 1,99) \cdot 1,87 \left[ \frac{1}{1,21 + \frac{2,3}{1,99}} \right] = 1,9. \quad (22)$$

Faktor korekcije naprezanja prikazan je izrazom (23) te je za gonjeni zupčanik je jednak:

$$Y_S = (1,2 + 0,13 \cdot 2,07) \cdot 2,48 \left[ \frac{1}{1,21 + \frac{2,3}{2,07}} \right] = 2,17. \quad (23)$$

### 2.2.3. Faktor debljine vijenca

S obzirom da se u radu razmatraju dvije različite debljine vijenca, koje utječu na vrijednosti ovog faktora. Proračun je potrebno izvršiti za oba slučaja. Kod slučaja kada je debljina vijenca  $s_R$  jednaka dvostrukoj visini zuba  $h_t$ , za vrijednost faktora se može uzeti 1. Vrijednost tog faktora je 1 dok je god debljina vijenca  $s_R \geq 1,2 \cdot h_t$ . U suprotnom, vrijednost faktora se računa pomoću jednadžbe (24) koja glasi:

$$Y_B = 1,6 \cdot \ln \left( 2,242 \cdot \frac{h_t}{s_R} \right). \quad (24)$$

U slučaju kada je  $s_R = h_t$ , faktor iznosi 1,29. Vrijednost faktora je jednaka za pogonski i gonjeni zupčanik u oba slučaja.

### 2.2.4. Faktori nagiba boka i dubokog zuba

Vrijednost faktora nagiba boka  $Y_\beta$  u razmatranom slučaju je jednaka 1 zbog toga što je nagib boka zuba  $\beta = 0$ .

Zbog toga što je stupanj prekrivanja profila  $\varepsilon_\alpha \leq 2,05$  faktor dubokog zuba je također jednak 1 u ovom slučaju.

### 2.2.5. Vrijednost nominalnog naprezanja u korijenu zuba

Nakon što su izračunati svi faktori koji utječu na nominalno naprezanje u korijenu zuba, moguće ih je uvrstiti u jednadžbu i dobiti vrijednost nominalnog naprezanja u korijenu zuba u ovisnosti o nominalnoj tangencijalnoj sili na referentnoj kružnici.

#### 2.2.5.1. Vrijednost nominalnog naprezanja kod normalnog vijenca

U slučaju kada se analizira vijenac debljine  $s_R = 2h_t$  nominalno naprezanje u korijenu pogonskog zupčanika prikazano je izrazom (25) te je jednako:



$$\sigma_{F0} = \frac{F_t}{b \cdot m_n} \cdot Y_F \cdot Y_s = \frac{F_t}{25 \cdot 2} \cdot 1,56 \cdot 1,9 = 0,05928 F_t. \quad (25)$$

Nominalno naprezanje u korijenu gonjenog zupčanika prikazano je izrazom (26) te glasi:

$$\sigma_{F0} = \frac{F_t}{b \cdot m_n} \cdot Y_F \cdot Y_s = \frac{F_t}{25 \cdot 2} \cdot 1,31 \cdot 2,18 = 0,05712 F_t. \quad (26)$$

#### 2.2.5.2. Vrijednost nominalnog naprezanja za slučaj tankog vijenca

U slučaju kada se analizira tanki vijenac kod kojeg je vijenac debljine  $s_R = h_t$  nominalno naprezanje u korijenu pogonskog zupčanika uvećano je za faktor  $Y_B$  te je jednako:

$$\sigma_{F0} = \frac{F_t}{b \cdot m_n} \cdot Y_F \cdot Y_s \cdot Y_B = \frac{F_t}{25 \cdot 2} \cdot 1,56 \cdot 1,9 \cdot 1,29 = 0,07647 F_t. \quad (27)$$

Nominalno naprezanje u korijenu gonjenog zupčanika je jednako:

$$\sigma_{F0} = \frac{F_t}{b \cdot m_n} \cdot Y_F \cdot Y_s \cdot Y_B = \frac{F_t}{25 \cdot 2} \cdot 1,31 \cdot 2,18 \cdot 1,29 = 0,07368 F_t. \quad (28)$$

### 2.3. Proračun naprezanja u korijenu zuba

Kao što je već ranije zapisano, naprezanja u korijenu zuba se mogu izračunati izrazom (1).

#### 2.3.1. Faktor primjene $K_A$

Faktor primjene  $K_A$  uvećava tangencijalnu silu kako bi se kompenzirali vanjski utjecaji na zupčanički par. U ovom radu se neće uzimati u obzir iz dva razloga. Prvi je zbog toga što nije definirano u kakvom će okruženju raditi ovaj zupčanički par i koliko će vanjske sile utjecati na njega. Drugi razlog je to što bi trebalo dodatno opteretiti numerički model kako bi u konačnici rezultati dobiveni proračunom iz standarda i numerički bili usporedivi.

#### 2.3.2. Faktor uzubljivanja $K_\gamma$

Ovaj faktor je jednostavno odrediti kada se razmatraju čelnici s ravnim zubima koji imaju samo jedan tok snage. Faktor uzubljivanja  $K_\gamma$  uzima u obzir nejednaku raspodjelu snage kada zupčanik ima više tokova snage, kao što je slučaj kod planetarnih prijenosnika. Vrijednost faktora je stoga u ovom slučaju stoga jednak 1.

### 2.3.3. Faktor unutrašnjih dinamičkih opterećenja $K_v$

Faktor  $K_v$  je definiran kao omjer stvarnog momenta na zubu i nominalnog momenta za koje je ozubljenje konstruirano. Općenito je prihvaćeno da na njegovu vrijednost utječu sama konstrukcija zupčanika i točnost izrade. U standardu je navedeno trinaest parametara koji imaju utjecaj na vrijednost faktora među kojima su inercije i krutosti elemenata koji rotiraju, krutosti ležajeva i kućišta te svojstva maziva. Iz toga je vidljivo da je točno određivanje ovog faktora moguće samo ako je poznata cijela konstrukcija prijenosnika i točnost njegove izrade. Za razmatranja koja će se provoditi u ovom radu smatra se da nije potrebno uzimati u obzir ovaj faktor jer ga nije moguće točno odrediti, niti će se njegov utjecaj na rezultat vidjeti u numeričkim simulacijama.

### 2.3.4. Faktor raspodjele opterećenja po duljini boka zuba kod proračuna nosivosti korijena $K_{H\beta}$

U standardu postoje dva faktora raspodjele opterećenja po duljini boka, jedan za proračun naprezanja na boku zuba  $K_{H\beta}$  te drugi za proračun naprezanja u korijenu  $K_{F\beta}$ . To je bitno naglasiti zbog toga što se drugi može izračunati jedino ako je poznat prvi. Faktori uzimaju u obzir sve parametre koji utječu na neravnomjernu raspodjelu opterećenja po boku zuba. Sam proračun  $K_{H\beta}$  je izrazito kompleksan zbog toga što uzima u obzir dvanaest parametara među kojima su točnosti izrade svih strojnih elemenata unutar prijenosnika, njihove krutosti, poravnanja vratila, utjecaj uhodavanja itd. Za točno definiranje ovog faktora je potrebno znati kako je konstruiran i proizveden cijeli prijenosnik što nije u ovom slučaju definirano. Također, u ovom radu će se provoditi 2D analiza u kojoj neće biti vidljiva raspodjela opterećenja po boku zuba i pretpostavljeno je da je ozubljenje idealne geometrije. U ovom radu, zbog navedenih razloga, neće se uzimati u obzir ovaj faktor.

### 2.3.5. Faktor raspodjele opterećenja na pojedine na pojedine zube u zahvatu $K_{F\alpha}$

Ovaj faktor uzima u obzir utjecaj neravnomjerne raspodjele poprečnog opterećenja koje je uzrokovano time što nije samo jedan zub u zahvatu već se broj zubi u zahvatu mijenja s vremenom. Prosječan broj zubi u zahvatu prikazuje stupanj prekrivanja  $\varepsilon_\alpha$  koji se računa pomoću izraza (29):

$$\varepsilon_\alpha = \frac{\sqrt{d_{a1}^2 - d_{b1}^2} + \sqrt{d_{a2}^2 - d_{b2}^2} - 2 \cdot a \cdot \sin[\alpha]}{2 \cdot p_{et}} = 1,676. \quad (29)$$

Kada je vrijednost stupnja prekrivanja između 1 i 2 kao što je u ovom slučaju, to znači da je jedan dio vremena jedan zub u zahvatu, a u ostatku vremena su dva zuba u zahvatu. Zbog te neravnomjernosti je potrebno uzeti u obzir faktor  $K_{F\alpha}$ . Faktor se za slučaj kada je stupanj prekrivanja manji od 2 računa pomoću izraza (30):

$$K_{F\alpha} = \frac{\varepsilon_{\alpha}}{2} \cdot \left( 0.9 + 0.4 \cdot \frac{c_{\gamma\alpha} \cdot (f_{pb} - y_{\alpha})}{\frac{F_{tH}}{b}} \right), \quad (30)$$

gdje je  $c_{\gamma\alpha}$  krutost uzublivanja koja se računa pomoću izraza (31):

$$c_{\gamma\alpha} = c' \cdot (0.75 \cdot \varepsilon_{\alpha} + 0.25) = 21,42. \quad (31)$$

Izračun vrijednost krutosti  $c'$  je detaljno opisan u standardu te se sad zbog preglednosti neće rasписivati.

Vrijednost  $f_{pb}$  je devijacija koraka na temeljnoj kružnici koja će se za ovu primjenu uzeti minimalna vrijednost zapisana u standardu, a to je  $3 \mu\text{m}$ .

Vrijednost uhodavanja  $y_{\alpha}$  se može izračunati pomoću izraza (32):

$$y_{\alpha} = 0,075 \cdot f_{pb} = 0,225. \quad (32)$$

Konačno, moguće je izračunati vrijednost faktora  $K_{F\alpha}$  koja iznosi 0,82. S obzirom da je u standardu definirano da je minimalna moguća vrijednost faktora 1. Za daljnji proračun će se koristiti ta vrijednost.

#### 2.4. Proračun vrijednosti dopuštenog naprežanja u korijenu zuba

Kako bi zupčanički par zadovoljio s obzirom na naprežanje u korijenu zuba, mora biti zadovoljna jednačina (33):

$$\sigma_{FP} \geq \sigma_F, \quad (33)$$

Jednačina vrijedi kada je minimalni faktor sigurnosti  $S_{Fmin}=1$ , odnosno u tom slučaju je  $\sigma_{FP} = \sigma_{FG}$ . Dozvoljeno naprežanje u korijenu zuba te se može izračunati pomoću jednačine (34) koja glasi:

$$\sigma_{FP} = \frac{\sigma_{F \text{ lim}} \cdot Y_{ST} \cdot Y_{NT}}{S_{F \text{ min}}} \cdot Y_{\delta \text{ rel T}} \cdot Y_{R \text{ rel T}} \cdot Y_X, \quad (34)$$

gdje je:

- $\sigma_{F \text{ lim}}$  – promjenjiva jednosmjerna čvrstoća korijena zuba,
- $Y_{ST}$  – faktor korekcije naprežanja,

- $Y_{NT}$  – faktor zamornog vijeka,
- $Y_{\delta_{relT}}$  – faktor relativne osjetljivosti na zarezno djelovanje,
- $Y_{R_{relT}}$  – relativni faktor površine,
- $Y_X$  – faktor veličine,
- $S_{F_{min}}$  – minimalna vrijednost faktora sigurnosti korijena zuba.

Standard naglašava da je bitna razlika između dozvoljenog napreznja za slučaj statičkog opterećenja i referentnog opterećenja, kada je broj ciklusa veći od  $3 \cdot 10^6$ . Svi proračunski faktori imaju svoju vrijednost za slučaj dopuštenog statičkog i referentnog opterećenja. Kada se izračuna dopušteno napreznje za oba slučaja, moguće je generirati krivulju čvrstoće oblika za danu geometriju zupčanika te očitati broj ciklusa opterećivanja do pojave loma.

#### 2.4.1. Faktor korekcije napreznja $Y_{ST}$

Faktor korekcije napreznja je u oba slučaja je jednak 2 zbog toga što referentni zupčanici imaju geometriju za koju je faktor korekcije napreznja jednak 2 ili su rezultati ispitivanja preračunati na tu vrijednost.

#### 2.4.2. Faktor zamornog vijeka $Y_{NT}$

Faktor zamornog vijeka uzima u obzir viša napreznja koja bi korijen zuba mogao podnijeti ako je opterećen samo statički. U tom slučaju vrijednost faktora je 2,5.

Kada se traži dopušteno napreznje za zamorni vijek odnosno  $3 \cdot 10^6$  ciklusa, za tip materijala Eh vrijednost faktora je 1.

#### 2.4.3. Faktor relativne osjetljivosti na zrezno djelovanje $Y_{\delta_{relT}}$

Ovaj faktor kvantificira koliko je zadana geometrija osjetljiva na zrezno djelovanje i svodi ga na vrijednost referentnog ispitivanog zupčanika. Za statičko opterećenje se može, za zadanu grupu materijala Eh, izraziti preko vrijednosti faktora korekcije napreznja  $Y_S$  izrazom (35) koji glasi:

$$Y_{\delta_{relT}} = 0,44 \cdot Y_S + 0,12 = 0,96. \quad (35)$$

Vrijednost faktora za referentno opterećenje se računa pomoću izraza (36) i (37) koji glase:

$$Y_{\delta \text{ rel T}} = \frac{1 + \sqrt{\rho' \cdot \chi^*}}{1 + \sqrt{\rho' \cdot \chi_T^*}} = 0,99. \quad (36)$$

$$\chi^* = \chi_P^* \cdot (1 + 2q_S) = 0,94. \quad (37)$$

gdje je  $\chi_P^* = 1/5$ , a vrijednost  $q_S = 1,87$  dobivena iz kod proračuna faktora oblika. Vrijednost  $\chi_T^*$  se dobije kada se za uzme da je vrijednost  $q_S = 2,5$ . Vrijednost  $\rho'$  iznosi 0,003 za razmatranu grupu materijala. Konačno, moguće je izračunati vrijednost faktora  $Y_{\delta \text{ rel T}}$  za referentno opterećenje koja iznosi 0,99.

#### 2.4.4. Relativni faktor površine $Y_{\text{relT}}$

Ovaj faktor uzima u obzir kvalitetu obrade površine razmatranog zupčanika i svodi ga na onu standardnog ispitanog zupčanika koji je poliran u korijenu. Faktor  $Y_{\text{relT}}$  je za referentno naprezanje i razmatrani materijal jednak 0,91. Za statičko opterećenje za vrijednost faktora se uzima 1.

#### 2.4.5. Faktor veličine $Y_X$

Faktor veličine se koristi kako bi se uzela u obzir veličina zuba i njezin utjecaj na raspodjelu točaka slabosti u strukturi materijala i gradijenata naprezanja koji se u teoriji smanjuju s povećanjem dimenzija strojnog dijela. S obzirom da je razmatrani zupčanik relativno malog modula vrijednost faktora u oba slučaja je jednaka 1.

#### 2.4.6. Dopuštena naprezanja za statičko i referentno opterećenje

Sada kada su definirani svi utjecajni faktori moguće je izračunati dopuštena naprezanja za statičko opterećenje i referentno opterećenje te nacrtati S-N dijagram za promatrani oblik zupčanika i zadani materijal. Vrijednost  $\sigma_{F \text{ lim}}$  za zadani materijal se može preuzeti iz ISO 6336-5 te iznosi 312 MPa. Vrijednost faktora sigurnosti se neće uzimati u obzir. Izraz za dopušteno naprezanje za referentno opterećenje na pogonskom zupčaniku glasi:

$$\sigma_{FP \text{ ref}} = \frac{\sigma_{F \text{ lim}} \cdot Y_{ST} \cdot Y_{NT \text{ ref}}}{S_{F \text{ min}}} \cdot Y_{\delta \text{ rel T ref}} \cdot Y_{R \text{ rel T ref}} \cdot Y_X = 563 \text{ MPa}. \quad (38)$$

Izraz za dopušteno naprezanje za referentno opterećenje na gonjenom zupčaniku glasi:

$$\sigma_{FP \text{ ref}} = \frac{\sigma_{F \text{ lim}} \cdot Y_{ST} \cdot Y_{NT \text{ ref}}}{S_{F \text{ min}}} \cdot Y_{\delta \text{ rel T ref}} \cdot Y_{R \text{ rel T ref}} \cdot Y_X = 568 \text{ MPa}. \quad (39)$$

Izraz za dopušteno naprezanje za statičko opterećenje za pogonski zupčanik se može izračunati pomoću izraza (40) te glasi:

$$\sigma_{FP\ stat} = \frac{\sigma_{F\ lim} \cdot Y_{ST} \cdot Y_{NT\ stat}}{S_{F\ min}} \cdot Y_{\delta\ rel\ T\ stat} \cdot Y_{R\ rel\ T\ stat} \cdot Y_X = 1491\ MPa. \quad (40)$$

Izraz za dopušteno naprezanje za statičko opterećenje za gonjeni zupčanik se može izračunati pomoću izraza (41) te glasi:

$$\sigma_{FP\ stat} = \frac{\sigma_{F\ lim} \cdot Y_{ST} \cdot Y_{NT\ stat}}{S_{F\ min}} \cdot Y_{\delta\ rel\ T\ stat} \cdot Y_{R\ rel\ T\ stat} \cdot Y_X = 1672\ MPa. \quad (41)$$

Iz te dvije vrijednosti je moguće odrediti eksponent koji definira graničnu vrijednost dopuštenog naprezanja u području ograničenog zamornog vijeka između vrijednosti broja ciklusa  $10^3 \leq N_L \leq 3 \cdot 10^6$ . Eksponent se za zadanu grupu materijala određuje izrazom (42) koji glasi:

$$\exp = 0,2867 \cdot \log\left(\frac{\sigma_{FP\ stat}}{\sigma_{FP\ ref}}\right). \quad (42)$$

Konačno, moguće je za bilo koju vrijednost naprezanja u korijenu  $\sigma_F$  izračunati broj ciklusa koje može izdržati do loma, odnosno zamorni vijek komponente pomoću izraza (43) koji glasi:

$$N_L = \sqrt{\frac{\exp \cdot \sigma_{FP\ ref}}{\sigma_F}} \cdot 3 \cdot 10^6. \quad (43)$$

## 2.5. Određivanje naprezanja u korijenu i zamornog vijeka zadanih zupčanika

Nakon definiranja svih potrebnih izraza za određivanje naprezanja u korijenu i zamornog vijeka zupčanika, moguće je odrediti njihove vrijednosti za proizvoljnu vrijednost opterećenja. U ovom radu će se razmatrati jedna razina opterećenja koja neće rezultirati plastičnim deformacijama u korijenu zuba zupčanika tj. zupčanik će biti opterećen u režimu visoko cikličkog zamora. Pogonski zupčanik opterećen je zakretnim momentom od 152,8 Nm. U tablici 1. su dane vrijednosti naprezanja u korijenu zuba i zamorni vijek za pogonski i gonjeni zupčaniku u dva slučaja sa i bez utjecaja tankog vijenca.

**Tablica 1. Rezultati proračuna naprezanja i zamornog vijeka prema ISO 6336**

Debljina vijenca	Referentni, $s_R=2h_t$		Tanki vijenac, $s_R=h_t$	
	Pogonski	Gonjeni	Pogonski	Gonjeni
Zupčanik				
$\sigma_F$	432,65	415,52	558,12	536,02
$N_L$	2,691E+07	3,017E+07	3,282E+06	4,59E+06

### 3. PRORAČUN NAPREZANJA U KORIJENU ZUBA METODOM KONAČNIH ELEMENATA

#### 3.1. Postavljanje problema

Postoji više načina na koji se može pristupiti rješavanju problema određivanja naprezanja u korijenu zuba. Prvi i najjednostavniji način je postaviti problem onako kako ga standard definira. To bi značilo promatrati svaki zupčanik zasebno i aplicirati silu na bok zuba u vanjskoj točki jednostrukog zahvata. Drugi način je postaviti model koji se sastoji od dva zupčanika kojima su zubi u zahvatu. Promatrani zupčanik potrebno fiksirati, a drugog opteretiti momentom koji rezultira istom silom kao i kao i u prethodno opisanom slučaju. Pri tome pažnju treba posvetiti definiranju kontakta, svojstava materijala i načina na koji se aplicira opterećenje. Treći način, ujedno i najkompleksniji je modelirati oba zupčanika, dovesti ih u zahvat i napraviti kvazi-statičku simulaciju prolaska zuba kroz zahvat. U tom slučaju će rezultat simulacije biti povijest stanja naprezanja u svakom čvoru promatranog zupčanika tijekom ciklusa prolaska zuba kroz zahvat. Spomenuta povijest stanja naprezanja koristi se kao osnova za analizu zamornog vijeka sve točke zahvata. Kako bi se u obzir uzeo utjecaj prolaska zuba kroz zahvat, u sklopu ovoga rada, biti će korištena treća metoda.

Osim toga, potrebno je i razmotriti da li je potrebno napraviti 3D simulaciju ili je 2D model dovoljno dobar za opisivanje problema. Standard postavlja problem određivanja nominalnog naprezanja  $\sigma_{F0}$  u korijenu zuba kao dvodimenzijski problem. Kasnije se pri određivanju naprezanja  $\sigma_F$  dodaju dodatni faktori koji uzimaju u obzir i treću dimenziju, odnosno širinu zupčanika. Ti faktori su u ovom radu zanemareni pa će se iz tog razloga, ali i zbog toga što je vremenski višestruko manje zahtjevno postaviti i provesti analizu na dvodimenzionalnom modelu, problem postaviti i analizirati u 2D prostoru. Dodatna činjenica koja podržava ovaj pristup je i to što se takva analiza često može pronaći u komercijalnim programima poput KISSofta ili MASTAe.

#### 3.2. Kreiranje proračunskog modela

Za proračun metodom konačnih elemenata je korišten programski paket *Abaqus Standard*. Za analizu problema je razmatran jedan središnji poprečni presjek zupčanika koji je zatim modeliran u programskom paketu i diskretiziran pravokutnim 2D konačnim elementima. Sama geometrija ozubljenja je kreirana u programskom paketu KISSsoft te je uvezena kao nacrt (eng. *sketch*). Svaki zupčanik je dodan u programu zasebno te su kreirana dva dijela (eng. *part*). U

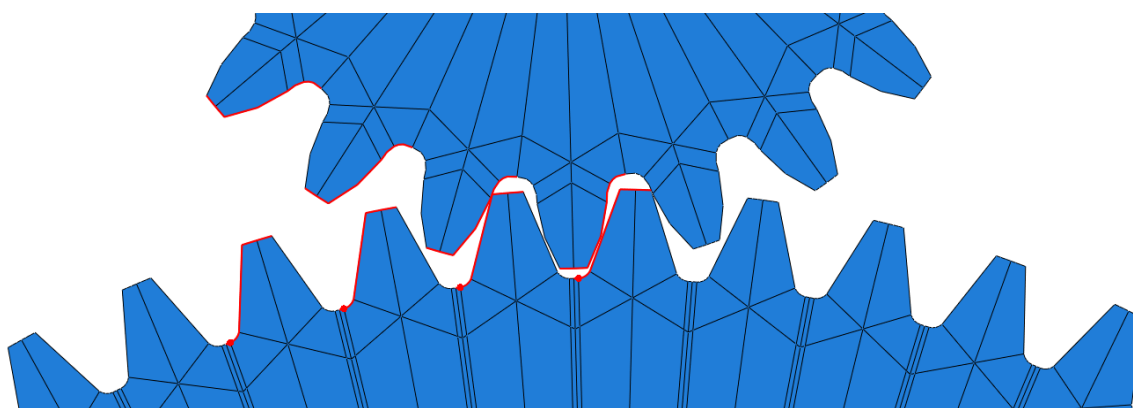
modulu *Property* je zatim kreiran materijal sa svojstvima čelika zadanog u zadatku. Kako bi se mogla uspješno provesti analiza potrebno mu je dodijeliti modul elastičnosti, Poissonov omjer i gustoću materijala. Vrijednosti korištene za analizu su prikazane u tablici 2.

**Tablica 2. Vrijednosti zadane kod definiranja materijala**

Veličina	Vrijednost	Mjerna jedinica
Modul elastičnosti	206 000	MPa
Poissonov omjer	0,3	-
Gustoća	$7,85 \cdot 10^9$	$10^3 \text{ kg/mm}^3$

Zatim je kreiran presjek koji je definiran kao 2D deformabilan s debljinom 25 mm. Presjeku je dodijeljen ranije definirani materijal. Slijedeći korak je u modulu *Assembly* postaviti zupčanike na zadani osni razmak i primaknuti ih u zahvat. Zatim su u modulu *Step* definirana dodatna dva koraka simulacije. Prvi korak je zadan s relativno malim opterećenjem od 1 Nm. Njegov je zadatak dovesti promatrani zub do početne točke zahvata. Zatim se u drugom koraku analize na model primjeni zahtijevani moment i taj korak traje dok se god promatrani zub nalazi u zahvatu. Jednom kada izađe iz zahvata simulacija može završiti.

Slijedeći korak je definiranje kontakta između zubi. Kako bi to bilo moguće potrebno je najprije kreirati površine koje će biti u zahvatu. U modulu *Interaction* su kreirana četiri površinska para od kojih svaki odgovara jednom boku zuba koji će biti u zahvatu tijekom simulacije. Površine koje će biti u kontaktu tijekom simulacije su prikazane na slici 2.

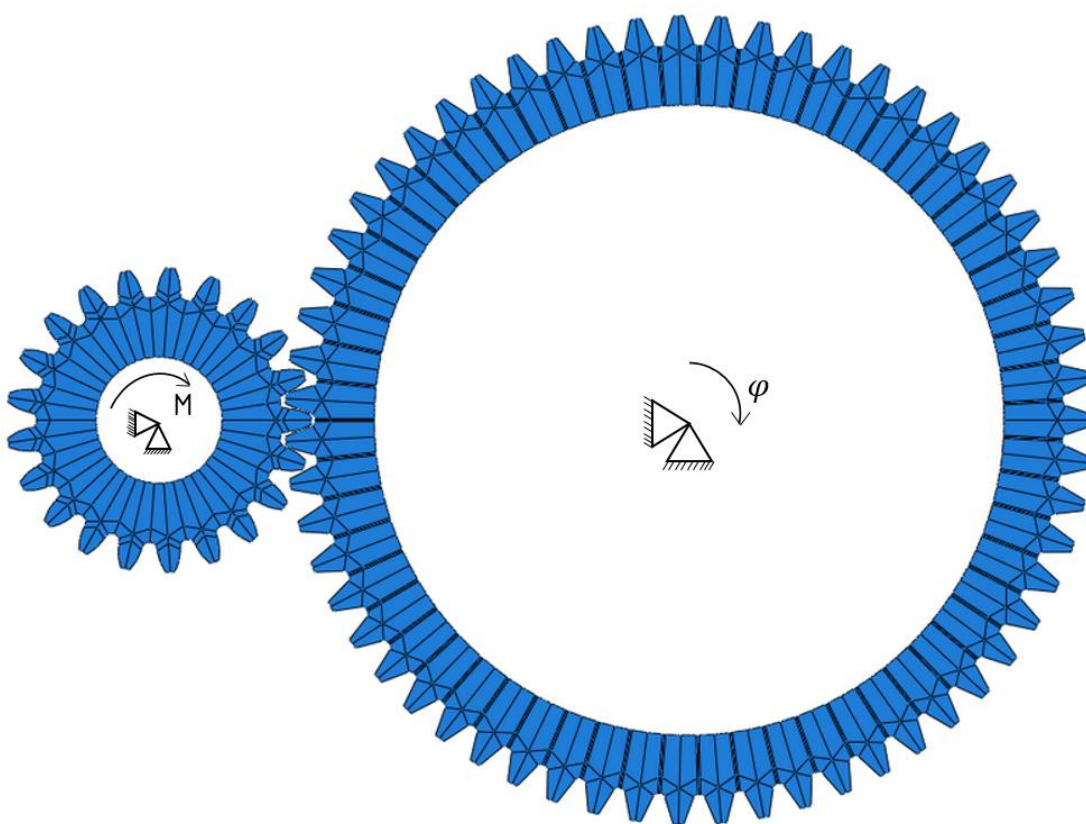


**Slika 2. Površine na kojima je definiran kontakt**

Kontakt između tih površina je definiran kao općeniti, tvrdi (eng. *hard contact*) i bez trenja, zbog toga što se u inicijalnom slučaju trenje ne uzima u obzir. U istom modulu je potrebno



definirati vezu između središta rotacije i unutarnjeg promjera zupčanika kako bi se dodijeljena sila mogla prenijeti na vijenac zupčanika. To je napravljeno pomoću kinematičkog ograničenja (eng. *kinematic coupling*) u kojem je definirano da nisu dozvoljeni međusobni pomaci ni rotacije između osi rotacije na kojoj će biti zadano opterećenje i unutrašnje površine zupčanika. Opterećenje i rubni uvjeti zupčanika su definirani u modulu *Load*. Kao što je već spomenuto, najprije je u prvom koraku zadana relativno mala vrijednost momenta na pogonskom zupčaniku i pomak na gonjenom zupčaniku. Zatim je u drugom koraku nametnut pomak kuta zakreta gonjenom zupčaniku takav da jedan zub prođe kroz sve točke zahvata te je zadan puni moment na pogonskom zupčaniku [7]. Rubni uvjeti su prikazani na slici 3.

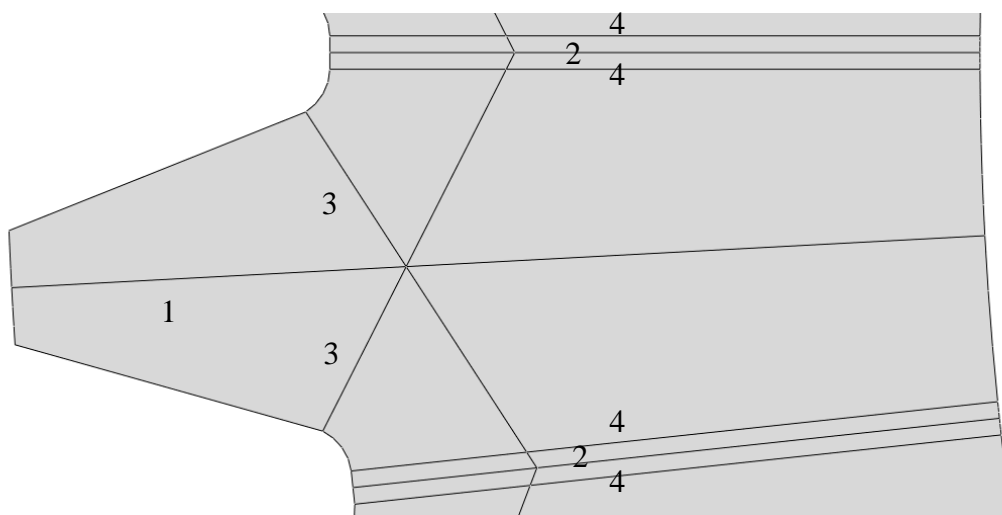


Slika 3. Rubni uvjeti i opterećenje

### 3.3. Diskretiziranje modela mrežom konačnih elemenata

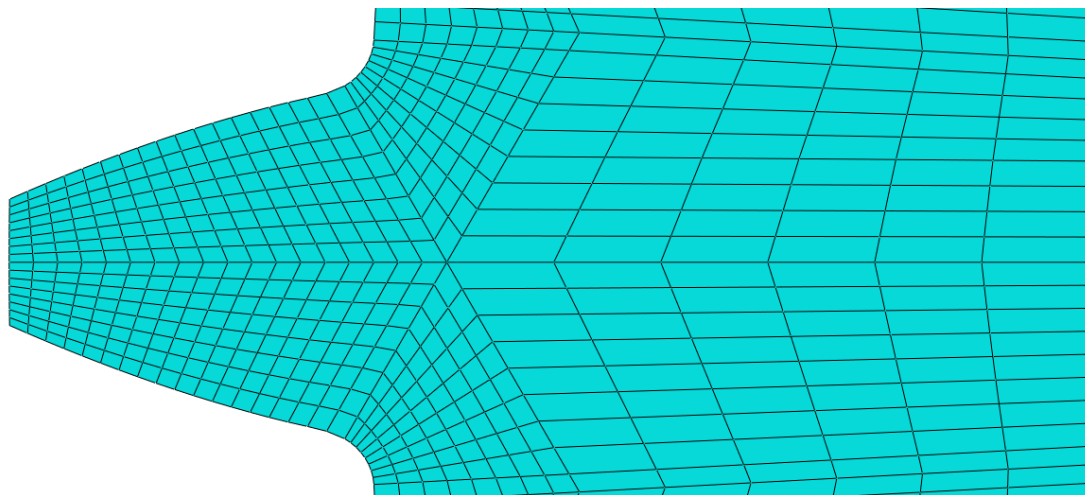
Slijedeći korak je diskretizacija mrežom konačnih elemenata u modulu *Mesh*. Prije same diskretizacije zupčanika konačnim elementima potrebno ga je podijeliti na manje cjeline, zbog toga što se radi o relativno kompleksnoj geometriji i bez podjele površine na manje dijelove nije moguće dobiti željeni raspored elemenata. Podjelom na manje cjeline je također lakše izbjeći izobličenje konačnih elemenata, što može pokvariti kvalitetu rezultata ili narušiti

stabilnost simulacije. Na slici 4. je prikazano kako je podijeljena površina jednog zuba promatranog (gonjenog) zupčanika. Zub je najprije podijeljen pravcem koji prolazi kroz središte njegova tjemena i os rotacije zupčanika. Dužina koja nastaje je na slici 4. prikazana brojem 1. Analogno je podijeljena i uzubina dužinom označenom brojem 2. Kako bi se mogli grafički prikazati rezultati analize potrebno je osigurati da jedna cjelina završava u točki koja je standardom određena kao kritična. Ta točka se nalazi u korijenu zuba na pravcu koji zatvara kut od  $30^\circ$  s dužinom 1. Tu dužinu nije praktično koristiti za podjelu modela. Bolje rješenje je kreiranje nove dužine okomite na spomenutu tangentu, koja zatvara kut od  $60^\circ$  s dužinom označenom brojem 1. Konačno, dodane su i dužine označene brojem 4, zbog toga što se u inicijalnom nacrtu na tom mjestu pojavljuje diskontinuitet. Kako bi se mogla i ta cjelina kontrolirati, kreirane su dužine označene brojem 4, koje su paralelne s dužinom označenom brojem 2. Analogno je podijeljen i zub pogonskog zupčanika.



**Slika 4. Podjela geometrije zuba na manje cjeline**

Nakon podjele zupčanika, moguće je kreirati inicijalnu mrežu konačnih elemenata. Kako bi se postigao što bolji omjer kvalitete rezultata i vremena potrebnog za provedbu simulacije, inicijalno je kreirana nešto gušća mreža elemenata uz bok i korijen zuba, a rjeđa u unutrašnjosti zupčanika. Također je napravljena analiza konvergencije rješenja, u kojoj se samo mjestimično usitnjavala mreža konačnih elemenata na promatranom zubu u korijenu i boku zuba. Inicijalna mreža konačnih elemenata na gonjenom zupčaniku je prikazana na slici 5.



**Slika 5. Inicijalna mreža konačnih elemenata na gonjenom zupčaniku**

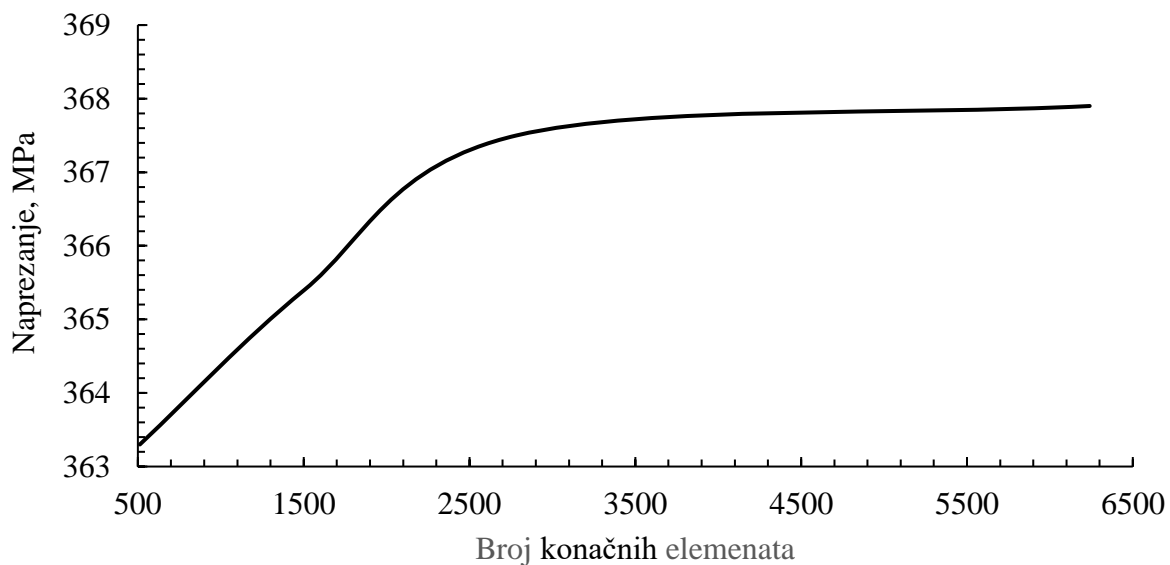
### 3.4. Analiza konvergencije i odabir tipa konačnih elemenata

Kako bi se provjerila kvaliteta mreže napravljena je analiza konvergencije. Iako je modeliran cijeli zupčanik, mreža je usitnjavana samo na zubima koji su u zahvatu za vrijeme simulacije. U tablici 3. se može vidjeti kako se mijenja vrijeme analize i vrijednost naprezanja u odnosu na broj konačnih elemenata u promatranom zubu.

**Tablica 3. Analiza konvergencije**

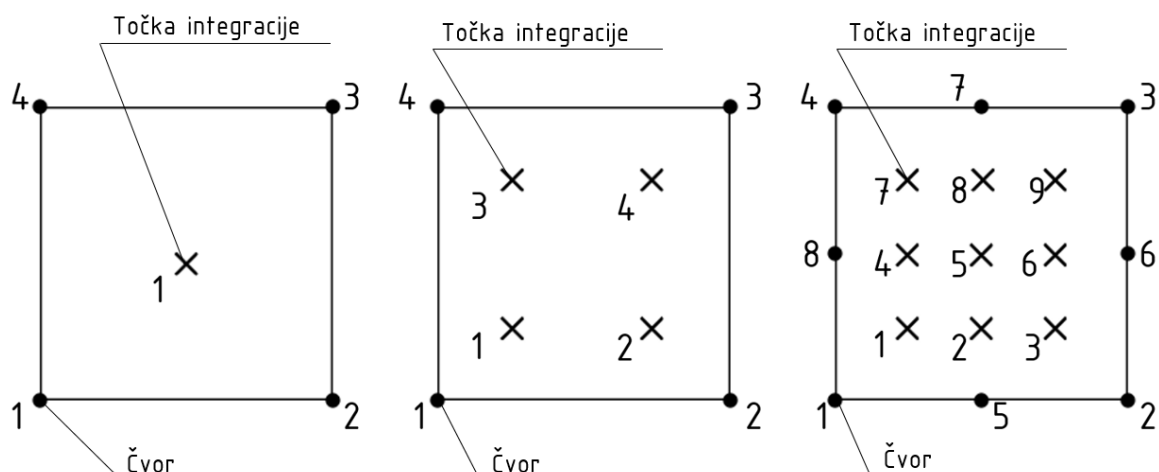
Broj konačnih elemenata	512	1504	2784	6240
Vrijeme analize, s	422	468	512	549
Naprezanje, MPa	363,3	365,4	367,5	367,9

Na slici 6. grafički je prikazana analiza konvergencije.



**Slika 6. Analiza konvergencije**

Za ovakav ravninski problem je moguće koristiti nekoliko različitih vrsta konačnih elemenata. Zbog toga je paralelno uz analizu gustoće konačnih elemenata provedena i usporedba različitih vrsta konačnih elemenata. Prva tri razmatrana su iz iste grupe jednostavnih pravokutnih 2D konačnih elementa. Zadnji razmatrani je također pravokutni 2D konačni element, ali drugog reda. Na slici 7. je moguće vidjeti kako izgledaju čvorovi i točke integracije za razmatrane konačne elemente.



**Slika 7. Tipovi konačnih elemenata**

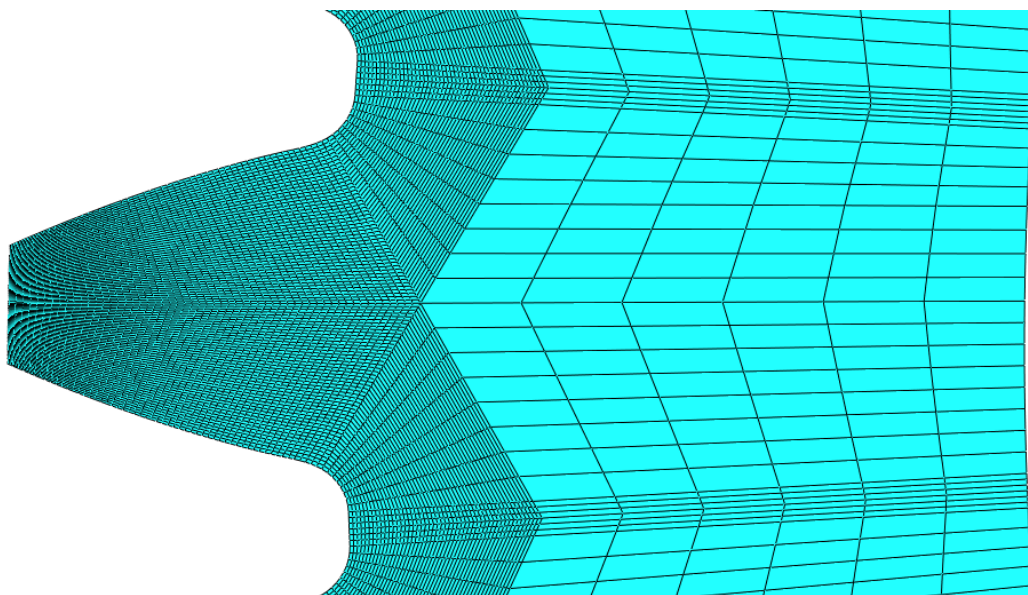
U tablici 4. moguće je vidjeti rezultate analize s 1504 konačna elementa za četiri različita tipa konačnih elemenata.

**Tablica 4. Usporedba različitih tipova konačnih elemenata**

Vrsta KE	CPS4R	CPS4	CPS4I	CPS8
Vrijeme analize, s	420	468	553	1108
Naprezanje, MPa	308,4	366,4	366,1	356,2

CPS4R daje najmanje kvalitetne rezultate, zbog toga što ima samo jednu točku integracije u sredini, dok CPS4 i CPS4I imaju 4 točke integracije unutar granica konačnog elementa. Razlika između CPS4 i CPS4I je jedino u tome što element s oznakom I ima dodatne jednadžbe koje sprječavaju pojavu fizikalnog ukrućivanja elemenata (eng. *shear-locking*). Svi navedeni elementi imaju četiri čvora, po jedan na svakom vrhu pravokutnika. CPS8 je višestruko kompleksniji konačni element od prethodna tri i to se vidi po vremenu potrebnom za izvršavanje simulacije koje je dvostruko dulje od elemenata iz grupe CPS4. Također za ovaj problem se čini da dodatno vrijeme potrebno da se dovrši analiza ne pridonosi kvaliteti rezultata u ovoj konfiguraciji. Konačno je za daljnju analizu odabran CPS4 element za koji se čini da daje najbolji omjer kvalitete rezultata i vremena potrebnog za provedbu analize.

Na slici 8. je prikazan konačan izgled mreže konačnih elemenata na gonjenom zupčaniku koja je sastavljena od CPS4 konačnih elemenata.

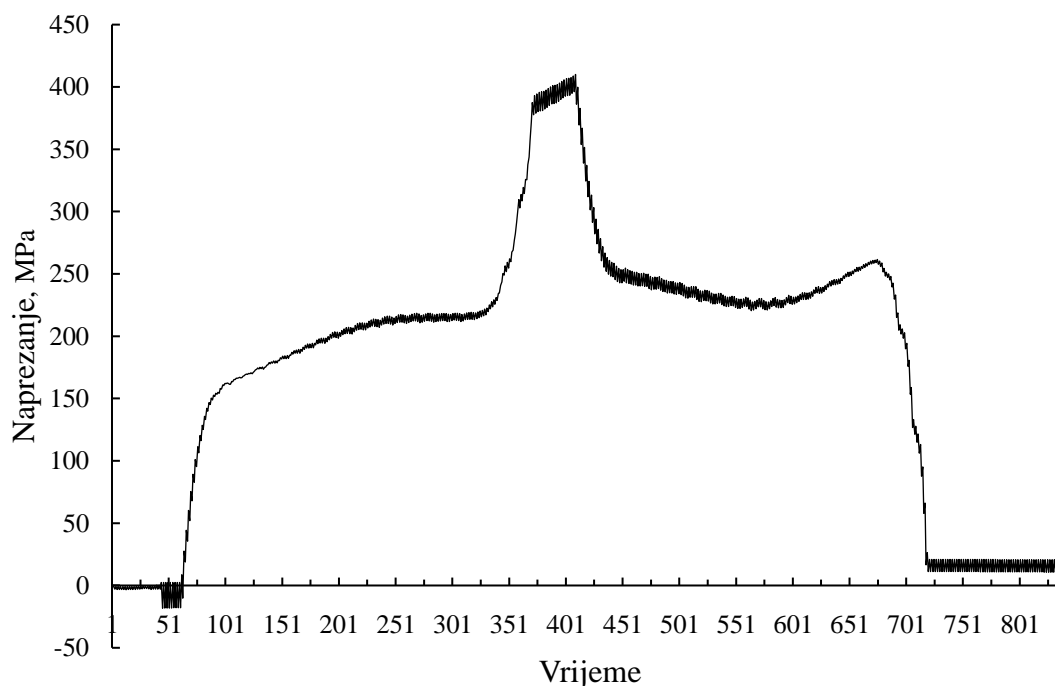
**Slika 8. Mreža konačnih elemenata**

### 3.5. Evaluacija rezultata numeričke analize

Nakon provedbe analize je potrebno je grafički prikazati naprezanja koja se pojavljuju u korijenu zuba kroz vrijeme, odrediti maksimalnu vrijednost i usporediti je s vrijednošću dobivenom standardom. Kako bi se mogli uspoređivati rezultati, potrebno je kreirati lokalni koordinatni sustav koji prati promatrani čvor u svim koracima analize. Očitane vrijednosti naprezanja je potrebno transformirati u željeni koordinatni sustav i kreirati bazu podataka koja ispisuje vrijednost naprezanja u željenoj točki za svaki vremenski inkrement simulacije.

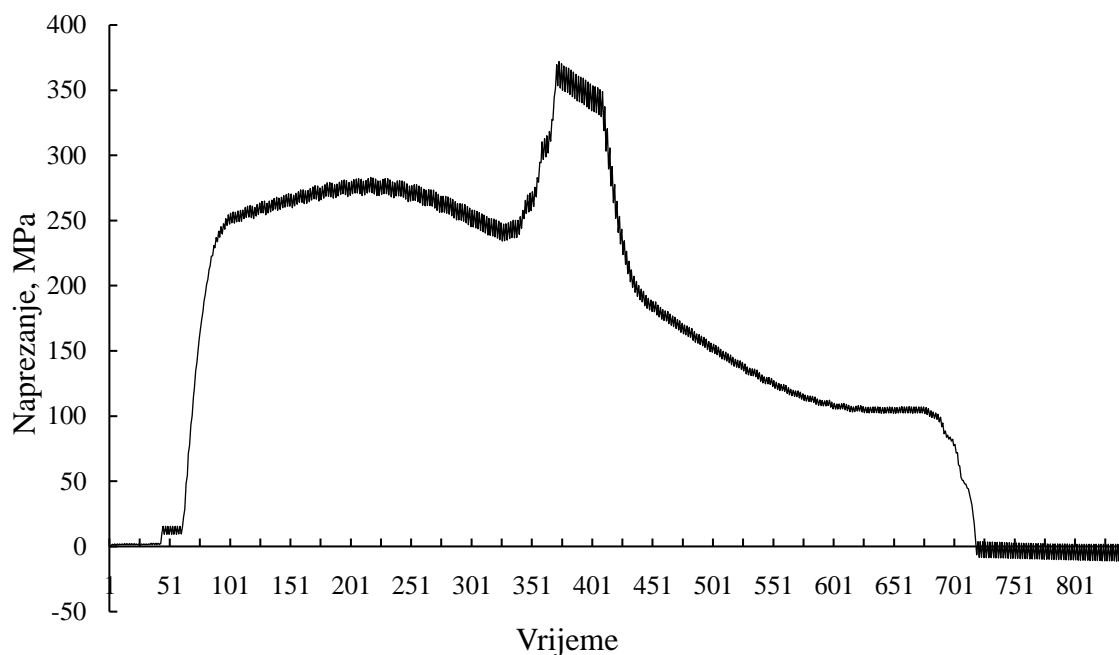
### 3.6. Rezultati numeričke analize bez drugih utjecaja

U prvoj simulaciji je razmatrana situacija kada nisu uzeti u obzir centrifugalna sila, trenje ni tanki vijenac. Na slici 9. su prikazane vrijednosti naprezanja na mjestu koje je standardom definirano kao kritično u korijenu zuba pogonskog zupčanika. Vršna vrijednost naprezanja iznosi 410 MPa.



**Slika 9. Naprezanje u korijenu pogonskog zupčanika**

Na slici 10. su prikazane vrijednosti naprezanja na mjestu koje standard definira kao kritično mjesto na gonjenom zupčaniku. Vršna vrijednost naprezanja iznosi 372 MPa.



**Slika 10.** Naprezanje u korijenu zuba gonjenog zupčanika prema uputama iznad

Maksimalne vrijednosti naprezanja dane su u tablici 5.

**Tablica 5.** Maksimalne vrijednosti naprezanja

Zupčanik	Maksimalno naprezanje, MPa
Pogonski	410,0
Gonjeni	371,9

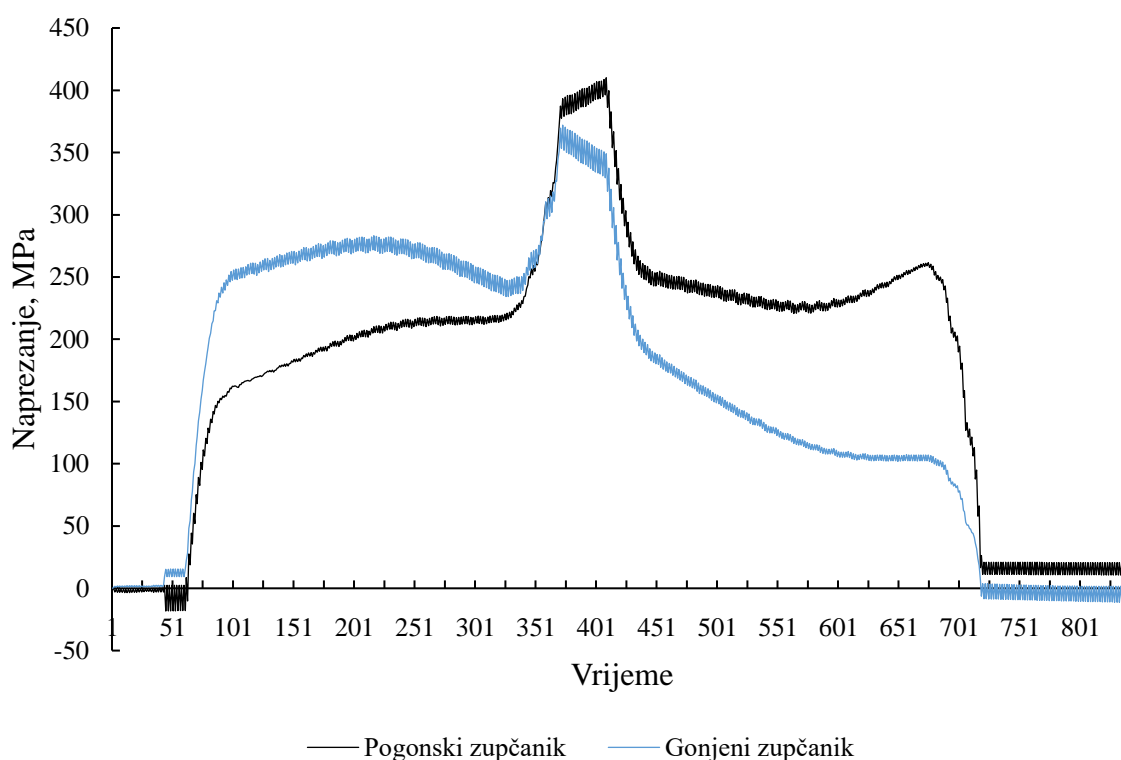
### 3.7. Numerička simulacija s utjecajem centrifugalne sile

Za ovu analizu je bilo dovoljno definirati gustoću materijala i obodnu brzinu u rad/s. S obzirom da je brzina vrtnje pogonskog zupčanika zadana zadatkom, izvršena je analiza utjecaja centrifugalne sile pri brzini vrtnje od  $2000 \text{ min}^{-1}$ , odnosno  $209,44 \text{ rad/s}$  na pogonskom zupčaniku. Brzina na gonjenom zupčaniku se dobije dijeljenjem s prijenosnim omjerom. Rezultati analize su gotovo identični. Vršna vrijednost naprezanja se povećala za  $0,1 \text{ MPa}$  na pogonskom i gonjenom zupčaniku te grafički nije moguće uočiti razliku u odnosu na prethodni slučaj. Na slici 11. prikazane su vrijednosti naprezanja za mjesto koje standard definira kao kritično u korijenu pogonskog i gonjenog zupčanika. Vrijednosti maksimalnih naprezanja dane su u tablici 6.

Tablica 6. Vrijednosti maksimalnih naprezanja - centrifugalna sila

Zupčanik	Maksimalno naprezanje, MPa
Pogonski	410,1
Gonjeni	372,0

Na slici 11. su prikazane vrijednosti naprezanja na mjestu koje standard definira kao kritično mjesto na pogonskom i gonjenom zupčaniku.



Slika 11. Rezultati analize s utjecajem centrifugalne sile

### 3.8. Rezultati numeričke analize s utjecajem trenja

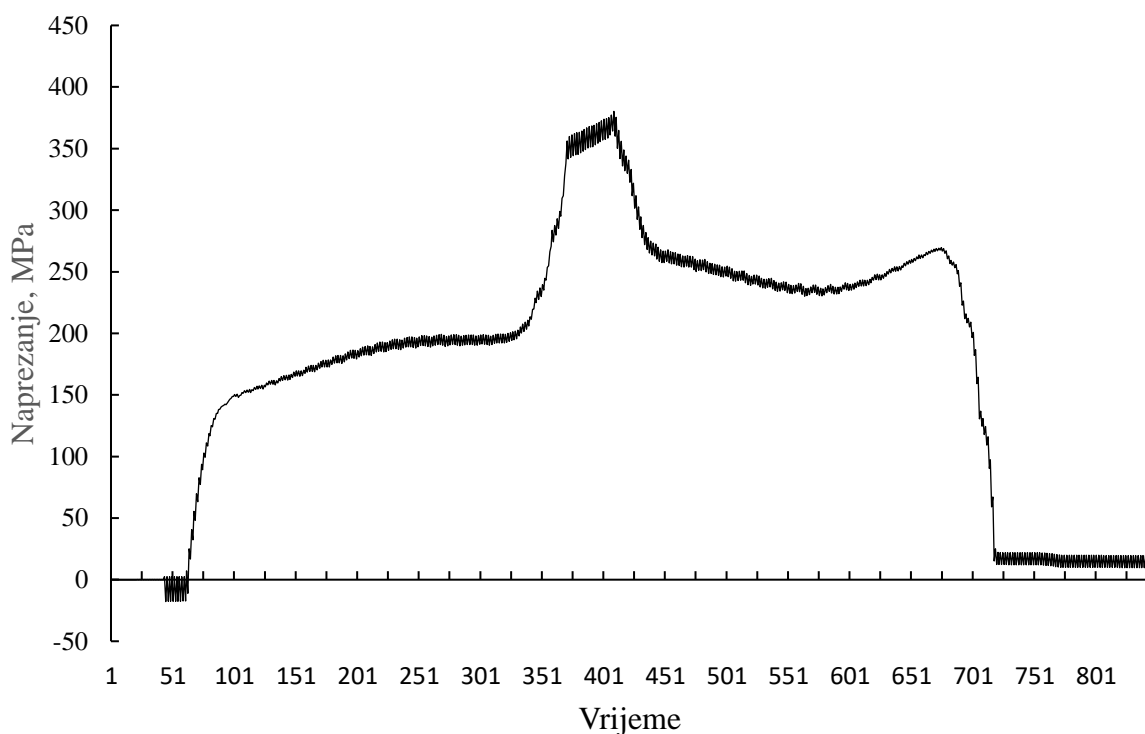
Kako bi se uzeo u obzir utjecaj trenja, potrebno je promijeniti definiciju kontakta na način da se uz pravila u smjeru normale na površinu kontakta doda i pravilo u tangencijalnom smjeru, odnosno okomito na normalu. To je napravljeno definiranjem tzv. *penalty* funkcije na tangencijalni pomak između dvije površine u kontaktu. Za definiciju te funkcije je dovoljno znati vrijednost faktora trenja. Za faktor trenja između bokova zubi je uzeta srednja vrijednost faktora trenja  $\mu_m = 0,087$  koja je određena u programu KISSSoft. U slučaju kada se uzme



trenje u obzir, dolazi do pada vršnih vrijednosti naprezanja. Razlog tome je što sila trenja tijekom prolaska zuba kroz zahvat od točke A do točke C uzrokuje dodatna tlačna naprezanja u korijenu zuba koja zatim umanjuju ukupnu vrijednost vlačnog naprezanja. Vrijednosti maksimalnih naprezanja dane su u tablici 7. Naprezanja u kritičnom čvoru u korijenu zuba pogonskog zupčanika prikazana su na slici 12.

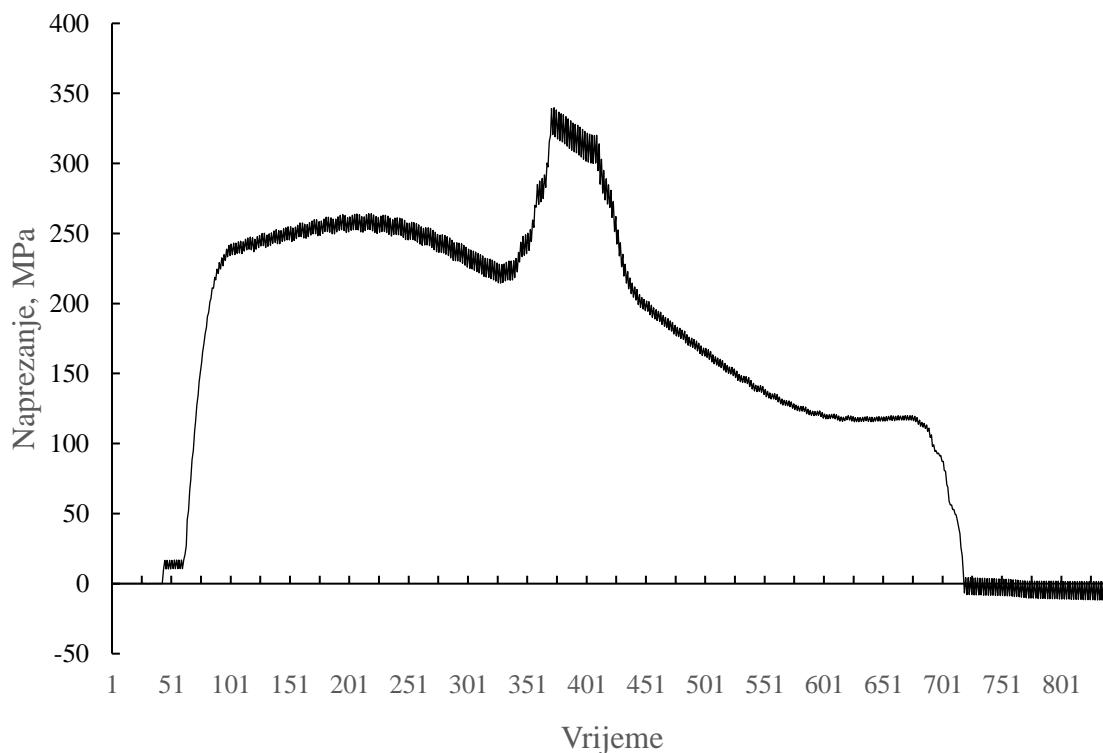
**Tablica 7. Maksimalna sila u korijenu zuba uz utjecaj trenja**

Zupčanik	Maksimalno naprezanje, MPa
Pogonski	380,2
Gonjeni	339,8



**Slika 12. Naprezanja u korijenu zuba pogonskog zupčanika - trenje**

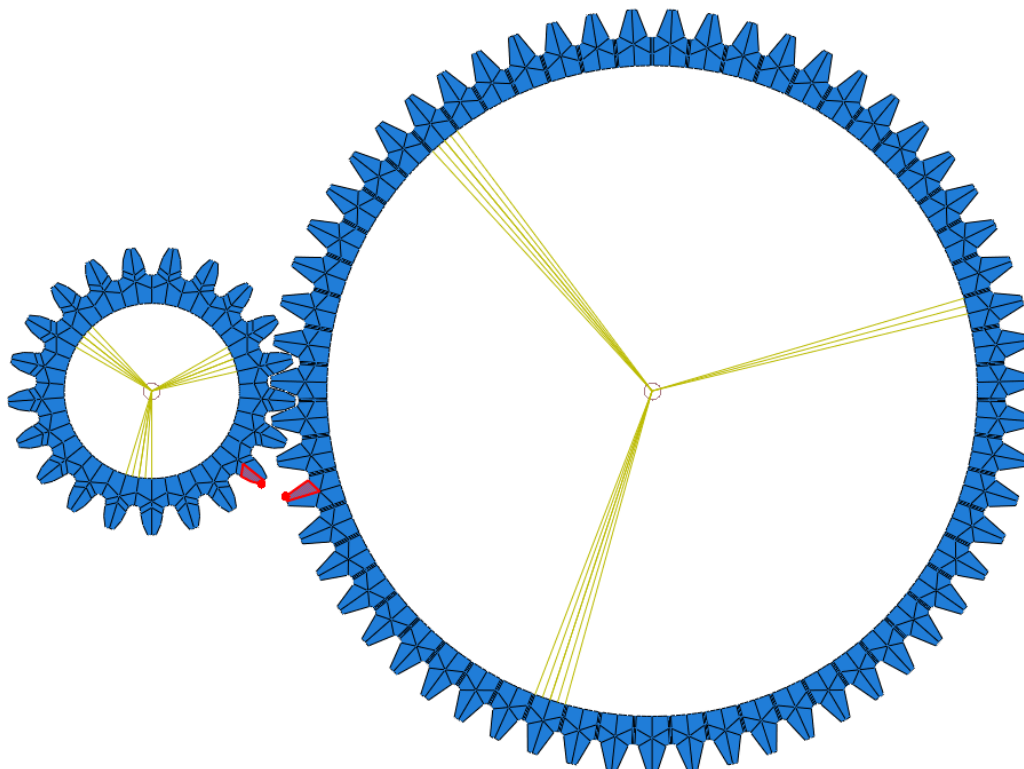
Analogno se mogu prikazati naprezanja u kritičnoj točki u korijenu gonjenog zupčanika. Taj dijagram je prikazan na slici 13.



**Slika 13. Naprezanja u korijenu zuba gonjenog zupčanika - utjecaj trenja**

### 3.9. Rezultati numeričke analize s tankim vijencem

Za ovu analizu je trebalo napraviti nekoliko izmjena na modelu. Najprije je trebalo kreirati novu geometriju kod koje je visina vijenca  $s_R$  jednaka visini zuba  $h_t$ . Nova geometrija je podijeljena i diskretizirana konačnim elementima na isti način kao i originalna. Također je bilo potrebno pronaći drukčiji način prijenosa okretnog momenta iz središta zupčanika na unutrašnju površinu. Za tanki vijenac je potrebno u kinematskoj vezi dozvoliti pomake i rotacije, za razliku od prethodnog slučaja gdje je cijeli model ukrućen kinematičkom vezom (eng. *kinematic coupling*). Prvo razmatrano rješenje je bilo postaviti drugu vrstu veze koja se u programskom paketu naziva *Continuum distributing coupling*. Takva kinematička veza ne sprječava pomake i rotacije između unutrašnje površine zupčanika i osi rotacije. Međutim, pristup se nije pokazao dobrim, zato što zupčanici u trenutku opterećenja momentom zbog prekomjerne deformacije mjestimično izlaze iz zahvata. Drugi pristup, koji je u konačnici i korišten, je primjena *kinematic coupling*-a, ali sa smanjenom površinom na koju prenosi moment i udaljenijom od promatranih zubi u zahvatu. Na taj se način dobije model zupčanika koji bi u stvarnosti odgovarao zupčaniku kojem je središte osi rotacije s vijencem povezano s tri kraka. Opisani raspored ukrućenja s označenim zubima koji se razmatraju u analizi je prikazan na slici 14.

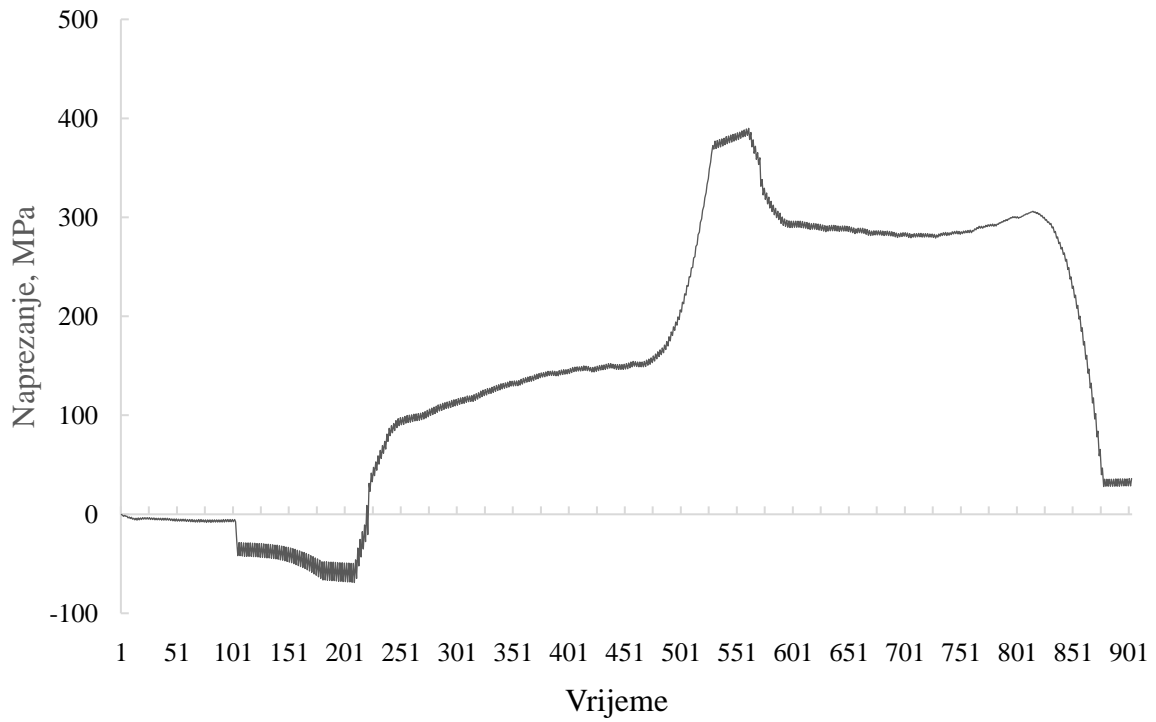


**Slika 14. Veza između središta zupčanika i vanjskog tankog vijenca**

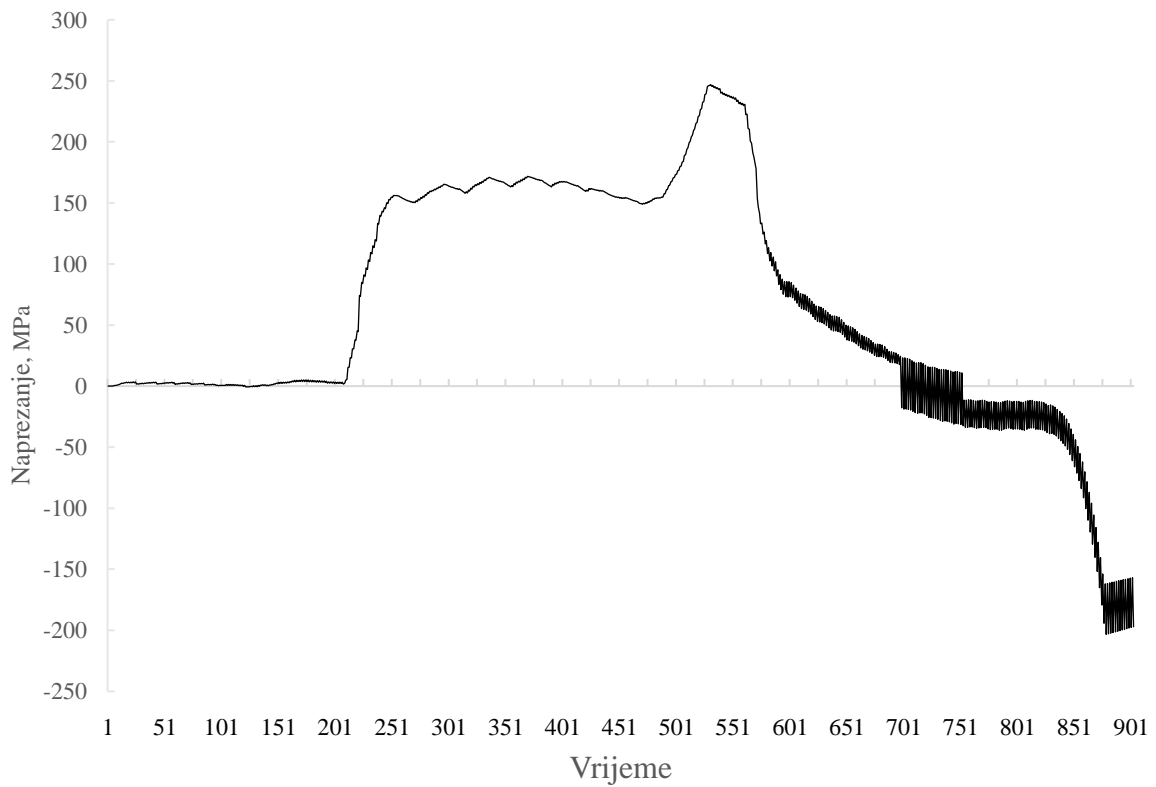
Ostali parametri su isti kao i u prethodnim simulacijama. Na slici 15. je prikazana povijest stanja naprezanja u kritičnom čvoru u korijenu zuba za pogonski zupčanik. Vidljivo je da se oblik krivulje promijenio u odnosu na prethodno analizirane slučajeve i da se pojavljuju značajna tlačna naprezanja neposredno prije te vlačna naprezanja neposredno nakon prolaska zuba kroz zahvat. Na slici 16. je prikazana povijest stanja naprezanja u kritičnom čvoru u korijenu gonjenog zupčanika. U ovom slučaju je razlika u odnosu na prethodne analize još naglašenija. Za ovaj slučaj su u tablici 8. zapisane maksimalna vrijednost naprezanja i minimalna vrijednost glavnog naprezanja.

**Tablica 8. Maksimalna i minimalna naprezanja u kritičnoj točki**

Zupčanik	Maksimalno naprezanje, MPa	Minimalno naprezanje, MPa
Pogonski	389,9	-66,9
Gonjeni	245,4	-203,3



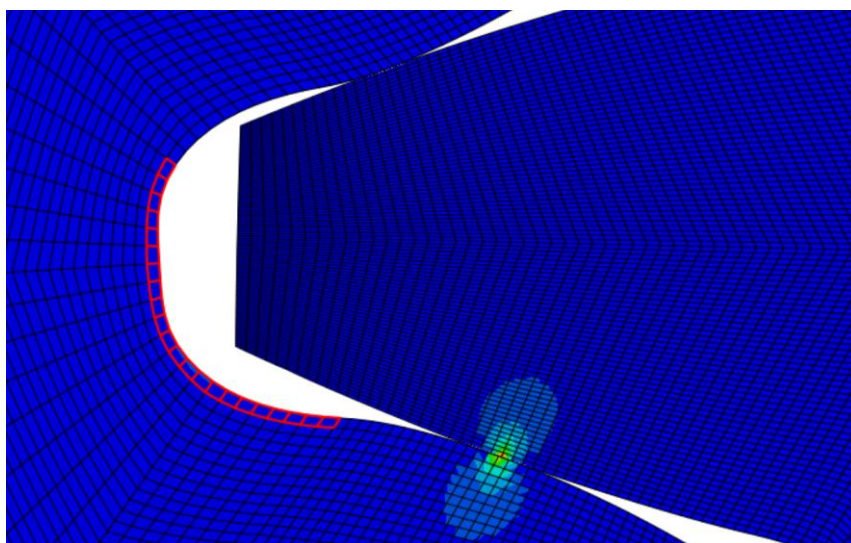
**Slika 15.** Naprezanja u korijenu zuba pogonskog zupčanika - tanki vijenac



**Slika 16.** Naprezanja u korijenu zuba pogonskog zupčanika - tanki vijenac

### 3.10. Određivanje zamornog vijeka zupčanika

Analiza zamornog vijeka zupčanika napravljena je u programskom paketu Fe-Safe [8]. Program se koristi se za analizu zamora i proračun predviđenog životnog vijeka. Prvi je komercijalno dostupan program koji omogućuje analizu zamora na temelju višeosnih stanja naprezanja. Koristi metodu konačnih elemenata za modeliranje i analizu ponašanja konstrukcija koje su pod utjecajem opterećenja. Prije nego se unese model koji se želi analizirati potrebno je u Abaqusu kreirati set elemenata za koje se traži proračun zamornog vijeka. Jedan kreirani set je prikazan na slici 17.



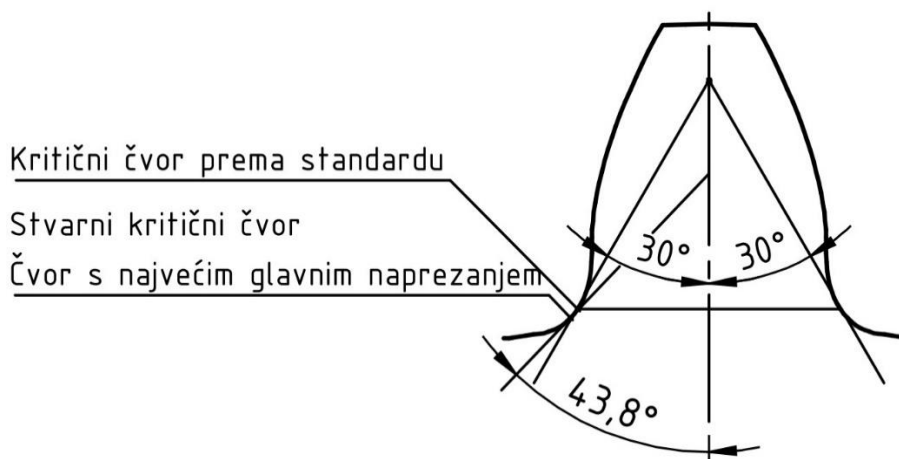
Slika 17. Set elemenata korištenih za analizu zamora

Nakon što se model učita u program dodijeli mu se materijal, te odabere dio analize koji predstavlja ciklus opterećenja. Na osnovi tih podataka program može kreirati S-N i Heighov dijagram te iz njih definirati zamorni vijek. U tablici 9. su prikazani rezultati analize odnosno zamorni vijek zupčanika za sve razmatrane slučajeve.

Tablica 9. Zamorni vijek zupčanika

Slučaj opterećenja	Zamorni vijek pogonskog zupčanika	Zamorni vijek gonjenog zupčanika
Referentni	8,42E+06	9,31E+06
Centrifugalna sila	8,40E+06	9,28E+06
Trenje	9,21E+06	9,69E+06
Tanki vijenac	7,80E+05	8,36E+05

Kada je uspješno provedena analiza zamornog vijeka zupčanika, moguće je odrediti koji je stvarni kritični čvor te čvor s najvećim glavnim naprežanjem. U analizi se pokazalo da je čvor u kojem je najveće glavno naprežanje ujedno i kritični čvor. Njihovo mjesto i kut u odnosu na središnjicu zuba je prikazan na slici 18.



**Slika 18. Prikaz stvarnog kritičnog čvora i čvora s najvećim glavnim naprežanjem**

### 3.11. Usporedba dobivenih rezultata

U tablici 10. su zapisani svi dobiveni rezultati te je u postocima izražena razlika između rezultata dobivenih standardom i numerički, metodom konačnih elemenata.

**Tablica 10. Usporedba rezultata dobivenih numerički i MKE**

	Zupčanik	Naprežanje u korijenu $\sigma_F$		Zamorni vijek NL	
		Pogonski	Gonjeni	Pogonski	Gonjeni
ISO 6336 proračun	Referentni	432,7	415,5	5,39E+07	5,64E+07
	Tanki vijenac	558,1	536,0	5,24E+06	7,17E+06
Numerički proračun	Referentni	410,0	371,9	8,42E+06	9,31E+06
	Centrifuga	410,1	372,0	8,40E+06	9,28E+06
	Trenje	380,2	339,8	9,21E+06	9,69E+06
	Tanki vijenac	389,9	245,4	7,80E+05	8,36E+05
Razlika numeričkog i ISO	Referentni	5,25%	10,49%	68,71%	69,14%
	Centrifuga	5,22%	10,47%	68,78%	69,24%
	Trenje	12,13%	18,22%	65,77%	67,88%
	Tanki vijenac	30,14%	58,34%	76,23%	81,79%

Na prvi pogled se čini da se rješenja dobivena numerički i standardom znatno razlikuju. Ali, treba uzeti u obzir da se uspoređuju dva problema koja nisu postavljena na isti način. Na slici 1. je prikazano kako standard postavlja problem računanja naprezanja u korijenu zuba.

U standardu se naprezanje u kritičnom čvoru u korijenu zuba određuje za slučaj primjene radnog opterećenja u vanjskoj točki jednostrukog zahvata, pri čemu se ne uzima u obzir deformacija zuba te posljedična promjena stupnja prekrivanja profila uzrokovana tom deformacijom. Spomenuta promjena stupnja prekrivanja profila uzrokuje smanjenje opterećenja na promatranom zubu.

Iako su razlike u naprezanju u kritičnom čvoru relativno malene, vidljive su velike razlike u zamornom vijeku. Zamorni vijek u pojedinom čvoru u korijenu zuba zupčanika ovisi o vrijednosti amplitude naprezanja i vrijednosti srednjeg naprezanja. Zbog načina na koji standard izračunava naprezanje u kritičnom čvoru, nije moguće uzeti u obzir prisutnost tlačnih naprezanja. Tlačna naprezanja posljedica su djelovanja sile na susjedni zub odnosno zub koji ulazi u zahvat nakon promatranog zuba. Navedeni efekt uzrokuje smanjenje vrijednosti srednjeg naprezanja, no povećava vrijednost amplitude naprezanja. Navedeni efekt ima za posljedicu promjenu zamornog vijeka u kritičnom čvoru. U slučaju tankog vijenca taj efekt je još izraženiji. Kao što se može očitati iz rezultata, tlačno naprezanje kritičnog čvora u korijenu zuba je istog reda veličine kao i vlačno. To uzrokuje smanjenje srednjeg naprezanja koje se približava nuli, ali se amplituda naprezanja povećava. Rezultat ova dva efekta je promjena zamornog vijeka zupčanika.

## 4. ZAKLJUČAK

U radu su obrađene dvije metode određivanja naprezanja u korijenu zuba i određivanja zamornog vijeka zupčanika. Prva metoda je prema standardu Međunarodne Organizacije za Standardizaciju ISO 6336: *Proračun nosivosti cilindričnih zupčanika s ravnim ili kosim zubima* dok je drugi pristup numerički, primjenom metode konačnih elemenata. Detaljno je raspisan proračun nosivosti i zamornog vijeka prema standardu za slučaj sa i bez utjecaja tankog vijenca. Zatim je kreiran numerički model u programskom paketu *Abaqus* kod kojeg je u obzir uzet utjecaj prolaska zuba kroz zahvat. Temeljem numeričke analize dobivene su povijesti stanja naprezanja u svakoj točki u korijenu zupčanika koje su kasnije korištene za analizu zamornog vijeka zupčanika u programskom paketu *Fe-Safe*. Primjenom dvaju pristupa dobiven je različit položaj stvarnog kritičnog čvora i kritičnog čvora koji propisuje standard. U numeričkom modelu je još dodatno razmotren utjecaj trenja i centrifugalne sile na naprezanja u korijenu, čiji utjecaj nije uzet u obzir u standardu. Rezultati analize međusobno su uspoređeni te je dano obrazloženje njihove razlike. Iako se dobiveni rezultati razlikuju, oba pristupa imaju svoju primjenu. Proračun vršen prema standardu, za uobičajene geometrije zupčanika i uz adekvatne faktore sigurnosti omogućava pouzdano određivanje nosivosti zuba zupčanika. U slučaju da se koriste nestandardne geometrije ili su tražene niske vrijednosti sigurnosti, potrebno je koristiti se numeričkim metodama ili ispitivanjima u uvjetima eksploatacije.



## LITERATURA

- [1] M. Opalić: Prijenosnici snage i gibanja, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb 1998
- [2] H. Linke, J. Börner, R. Heß: Cylindrical Gears Calculation – Materials – Manufacturing, Hanser Publications, Munich 2016.
- [3] I. R. Stephens, A. Fatemi, R. R. Stephens, H. O. Fuchs: Metal Fatigue In Engineering, John Wiley & Sons, Hoboken 2000.
- [4] E. Olsson, A. Olander, M. Öberg: Fatigue of gears in the finite life regime — Experiments and probabilistic modelling, Engineering Failure Analysis, Volume 62, April 2016.
- [5] T. R. Chandrupatla, A. D. Belegundu: Introduction to Finite Elements in Engineering, Rowan University, New Jersey 2021.
- [6] J. Sorić: Metoda konačnih elemenata, Golden marketing - Tehnička knjiga, Zagreb 2004.
- [7] ISO 6336 -1;5
- [8] E. Oberšmit: Ozubljenja i zupčanci, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb 1985.
- [9] Abaqus Analysis User's Guide (6.14), 25.10.2023.
- [10] fe-safe User Guide, 05.11.2023.