

# Razvoj simulacijskoga modela za određivanje ključnih značajki linija obrade brodogradilišta

---

**Ložar, Viktor**

**Doctoral thesis / Disertacija**

**2023**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:235:190236>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-03-31**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb](#)





Sveučilište u Zagrebu

FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

Viktor Ložar

**Razvoj simulacijskoga modela za  
određivanje ključnih značajki linija  
obrade brodogradilišta**

DOKTORSKI RAD

Mentor:  
izv. prof. dr. sc. Neven Hadžić

Zagreb, 2023





Sveučilište u Zagrebu

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING AND NAVAL  
ARCHITECTURE

Viktor Ložar

**Development of a simulation model to  
determine the key performance  
indicators of shipyard's processing  
lines**

DOCTORAL DISSERTATION

Supervisor:  
associate prof. dr. sc. Neven Hadžić

Zagreb, 2023





## PODACI ZA BIBLIOGRAFSKU KARTICU

UDK: 004.825:629.5

Ključne riječi: proizvodna industrija, brodograđevna industrija, Markovljevi lanac, serijske Bernoullijeve proizvodne linije, Bernoullijeve linije s grananjem tokova materijala, metoda konačnih stanja, ključne značajke, uska grla, metoda diferencijalne evolucije

Znanstveno područje: Tehničke znanosti

Znanstveno polje: Brodogradnja

Institucija u kojoj je rad izrađen: Sveučilište u Zagrebu,  
Fakultet strojarstva i brodogradnje

Mentor rada: Izv. prof. dr. sc. Neven Hadžić

Broj stranica: 176

Broj tablica: 37

Broj slika: 79

Broj korištenih bibliografskih jedinica: 81

Datum obrane: 06.07.2023

Povjerenstvo: Prof. dr. sc. Jerolim Andrić  
doc. dr. sc. Tihomir Opetuk  
Prof. dr. sc. Marko Hadjina

Institucija u kojoj je rad pohranjen: Sveučilište u Zagrebu,  
Fakultet strojarstva i brodogradnje



## INFORMACIJE O MENTORU

Izv. prof. dr. sc. Neven Hadžić zaposlen je na Fakultetu strojarstva i brodogradnje u Zagrebu gdje je 2015. godine izabran u zvanje docenta, a 2020. u zvanje izvanrednoga profesora. Neven Hadžić djeluje kao nositelj kolegija Tehnologija brodogradnje I, Tehnologija brodogradnje II i Osnivanje brodogradilišta te kao voditelj Laboratorija za unapređenje brodograđevne proizvodnje.

U dosadašnjem je radu sudjelovao u pet međunarodnih istraživačkih projekta (EU FP6 DeLight, EU FP7 Improve, EU FP7 TULCS, GCRC-SOP i NEORION), a trenutno djeluje kao voditelj triju domaćih projekata od kojih valja istaknuti uspostavni istraživački projekt *Napredne metode za projektiranje profitabilnog, energetski efikasnog i okolišno prihvatljivog brodograđevnog proizvodnog procesa* (ANTYARD) kojeg financira Hrvatska zaklada za znanost.

Dosadašnji rad Nevena Hadžića rezultirao je objavom 5 knjiga, jedne monografije i više od 80 znanstvenih i stručnih radova u međunarodnim i domaćim časopisima te zbornicima konferencija. Neven Hadžić je član Međunarodnog udruženja inženjera brodogradnje (SNAME), član Sekcije za morsku brodogradnju Hrvatske akademije znanosti i umjetnosti te vanjski sektorski stručnjak za brodogradnju. Također, 2020. godine imenovan je za predsjednika Organizacijskog odbora renomirane konferencije *Teorija i praksa brodogradnje – SORTA 2022*.

Neven Hadžić živi u Zagrebu sa suprugom Jelenom i osmero djece.

Hadžić N. Analytical solution of the serial Bernoulli production line steady-state performance and its application in the shipbuilding process. *International Journal of Production Research*. 2019;57(4):1052-1065. doi. 10.1080/00207543.2018.150004

Hadžić N, Ložar V, Opetuk T, Andrić J. A Finite State Method in improvement and design of lean Bernoulli serial production lines. *Computers & industrial engineering*. 2021;158,107449,20 doi:10.1016/j.cie.2021.107449

Hadžić N, Tomić M. Analytical solution of steady-state behavior of Bernoulli production line with two finite buffers. *Brodogradnja/Shipbuilding Journal*. 2017;68(3):85–102. doi. 10.21278/brod68306

## ZAHVALA

Ovim putem se želim zahvaliti prije svega svojem mentoru, izvanrednom profesoru Nevenu Hadžiću, koji mi je dao priliku za rad na projektu ANTYARD, na praćenju kroz studiji, na temi doktorskog rada i za svu potporu koju mi je pružao kroz ovo vrijeme.

Veliko hvala svim članovima povjerenstva profesoru Jerolimu Andriću, profesoru Marku Hadžini i docentu Tihomiru Opetuku na svim korisnim komentarima i sugestijama kojima su doprinijeli kvaliteti ovoga rada.

Želim se zahvaliti svim zaposlenicima Brodosplita, a osobito gospodinu Zoran Kunkeri, gospodinu Darku Jankoviću, te gospođama Snježani Stefanović i Mirni Slišković na stručnim savjetima i podacima iz proizvodnje pomoću kojih je ostvarena konkretna primjena rezultata provedenog istraživanja.

Na kraju, posebno se želim zahvaliti svojoj obitelji: supruzi Ana-Mariji i sinu Juraju te svojim roditeljima i sestri za njihovu podršku, strpljenje i poticaj u svim uspjesima i lutanjima s kojima sam se susreo tijekom dosadašnjeg znanstveno-istraživačkog rada.

Zagreb, lipanj 2023

Viktor Ložar

## SAŽETAK

Povijesni razvoj proizvodne industrije i njena uloga u suvremenom gospodarstvu prikazani su u uvodnom odlomku, a u nastavku se ističe važnost brodograđevne industrije u svijetu i u Hrvatskoj. Podpoglavlje Projektiranje i analiza proizvodnih sustava podcrtava smisao proizvodnje te načine na koje se ona može unaprijediti, odnosno kategorizirati. Pregled literature daje uvid u dosadašnje istraživanje proizvodne industrije uz istaknute nedostatke vezane uz brodograđevnu industriju. Cilj ovog istraživanja je razvoj simulacijskog modela kojim će se omogućiti evaluacija ključnih značajki serijskih Bernoullijevih proizvodnih linija.

Drugo poglavlje opisuje osnovne teorije skupova i Markovljevih lanaca na kojima se temelji razvoj modela. Serijske proizvodne linije i linije s grananjem tokova materijala s nepouzdanim strojevima i konačnim kapacitetom međuskladišta pri konstantom, homogenom, vremenu izrade su opisane u trećem i četvrtom poglavlju. Pritom su detaljno objašnjeni prostor stanja, ključne značajke, analitičko rešenje i nova metoda konačnih stanja.

Peto poglavlje definira uska grla za razne ključne značajke te opisuje projektiranje proizvodnih sustava pomoću metode diferencijalne evolucije. U kratkom šestom poglavlju opisuje se novonastali simulacijski model razvijen u programskom jeziku FORTRAN, a u sedmome je prikazana njegova primjena u slučaju brodograđevnom proizvodnom sustavu.

Usporedba ključnih značajki dobivenih metodom konačnih stanja s analitičkim pristupom potvrdila je točnost metode, a primjena je potvrdila mogućnost upotrebe modela u stvarnom okruženju. Razvijena metoda konačnih stanja proširena s diferencijalnom evolucijom pokazala se kao dobar alat za projektiranje novih proizvodnih postrojenja.

## EXECUTIVE SUMMARY

The manufacturing industry is part of the global economy, and its development is closely related to modern civilization's historical progress based on science and technology. The introduction part of chapter one is highlighting these achievements and shows the relationship between the manufacturing industry and the economic growth of a country. The first subheading of chapter one shortly describes the historical tradition of the global shipbuilding industry and shows which countries are the major players. The next subheading gives a short review of the Croatian shipbuilding industry followed by a summary on design and analysis of production systems. The main goal of this doctoral thesis as well as the hypothesis are outlined after the literature review. The main goal is the development of a new simulation model which will enable the evaluation of key performance indicators of serial Bernoulli lines. The hypotheses address the possibility that a new model for serial and splitting production lines can be established using a new method named the finite state method employed to calculate the key performance indicators. As compared to conventional methods, such a new approach will result in better design solutions of manufacturing systems, especially of the ship prefabrication and fabrication lines.

The second chapter contains an overview the theory of sets and stochastic processes, namely the Markovian chains. Therefore, the basic terms on Ven diagrams, set operators, set algebra, probability theory and stochastic processes are outlined. The discrete time Markovian chains are elaborated and explained more deeply, the Chapman-Kolmogorov equation is shown and the eigenvalue problem is briefly presented.

Chapter three deals with the definition of serials lines and the necessary assumptions needed to describe a Bernoulli distribution. In the first subheading the system state space is presented and explained. The next subheading briefly presents the recently developed general analytical solution to formulate the transition matrix. However, this approach is quite challenging and time consuming due to the exceptional complexity of the system state space. Therefore, the finite state method was developed based on the proportionality of the system state space to reduce the evaluation time for lager system states. The aggregation method and a simulation approach are briefly presented for the purpose of comparison with the finite state method and the analytical approach. Such a comparison was done for the first time. The results are highlighted in a short discussion with the conclusion that the new finite state method is worth to be further developed for the case of splitting lines.

The chapter four presents the definition of splitting lines and defines the analytical approach. The finite state method for splitting lines was elaborated in the next subheading. The finite state method for splitting lines was validated against the analytical approach and via application case using various expressions for the key performance indicators. At the end, the results prove that the finite state method is capable to model a splitting line and to calculate the required key performance indicators.

The finite state method is employed to calculate the eigenvector for the entire system state. This feature enables evaluation of bottlenecks for all key performance indicators. The expressions for such operations are listed in the chapter five. At the end of this chapter the differential evolution theory, is combined with the finite state method and a new design methodology is presented.

The chapter six contains the scheme of the new simulation tool ShipProLab developed in FORTRAN using the analytical approach and the finite state method.

In chapter seven an illustrative example of a prefabrication and fabrication production line is presented. In this example, the developed theory is employed to determine the key performance indicators and to calculate the time required to complete production of two typical ship sections. Therefore, a brief description of the facility is given including the substitute models. A new facility is designed using the differential evolution theory.

The last chapter summarizes the main conclusions of the research. The newly developed finite state method is highlighted as a powerful tool to calculate the key performance indicators for serial and splitting lines that, in combination with the differential evolution theory, enables a sophisticated approach to design issues related to production system engineering.



## **KLJUČNE RIJEČI**

- proizvodna industrija
- brodograđevna industrija
- Markovljevi lanac
- serijske Bernoullijeve proizvodne linije
- Bernoullijeve linije s grananjem tokova materijala
- metoda konačnih stanja
- ključne značajke
- uska grla
- metoda diferencijalne evolucije

## **KEY WORDS**

- manufacturing industry
- shipbuilding industry
- Markovian chains
- serial Bernoulli lines
- Bernoulli splitting lines
- finite state method
- key performance indicators
- bottlenecks
- differential evolution theory

## SADRŽAJ

INFORMACIJE O MENTORU .....	i
ZAHVALA .....	ii
SAŽETAK .....	iii
EXECUTIVE SUMMARY .....	iv
KLJUČNE RIJEČI / KEY WORDS .....	vi
SADRŽAJ .....	vii
POPIS SLIKA .....	ix
POPIS TABLICA .....	xii
POPIS OZNAKA .....	xiv
<b>1. UVOD .....</b>	<b>1</b>
<b>1.1 Brodograđevna industrija u svijetu .....</b>	<b>3</b>
<b>1.2 Brodograđevna industrija u Hrvatskoj .....</b>	<b>5</b>
<b>1.3 Projektiranje i analiza proizvodnih sustava .....</b>	<b>6</b>
<b>1.4 Pregled literature .....</b>	<b>9</b>
<b>1.5 Cilj i hipoteza istraživanja .....</b>	<b>12</b>
<b>2. OSNOVE TEORIJE SKUPOVA I MARKOVLJEVI LANCI .....</b>	<b>13</b>
<b>2.1 Vennovi dijagrami i operandi skupova .....</b>	<b>14</b>
<b>2.2 Algebra skupova .....</b>	<b>15</b>
<b>2.3 Osnovne vjerojatnosti .....</b>	<b>17</b>
<b>2.4 Uvjetna vjerojatnost, nezavisnost i teorem totalne vjerojatnosti .....</b>	<b>18</b>
<b>2.5 Stohastički procesi općenito .....</b>	<b>20</b>
<b>2.5.1 Diskretni Markovljevi lanci .....</b>	<b>21</b>
<b>2.5.2 Granična distribucija vjerojatnosti .....</b>	<b>26</b>
<b>2.6 Svojstvene vrijednosti i svojstveni vektor .....</b>	<b>27</b>
<b>3. SERIJSKE LINIJE .....</b>	<b>29</b>
<b>3.1 Prostor stanja .....</b>	<b>30</b>
<b>3.2 Analitičko rešenje i formulacija opće tranzicijske matrice .....</b>	<b>33</b>
<b>3.3 Metoda konačnih stanja .....</b>	<b>35</b>
<b>3.4 Ključne značajke za analitičko rješenje i metodu konačnih stanja .....</b>	<b>39</b>
<b>3.5 Metoda agregacije .....</b>	<b>41</b>
<b>3.6 Simulacija .....</b>	<b>43</b>
<b>3.7 Teoretski primjeri .....</b>	<b>45</b>
<b>3.8 Diskusija .....</b>	<b>59</b>
<b>4. LINIJE S GRANANJEM TOKOVA MATERIJALA .....</b>	<b>60</b>

4.1 Formulacija opće tranzicijske matrice .....	61
4.2 Metoda konačnih stanja za linije s grananjem tokova materijala .....	65
4.3 Ključne značajke.....	67
4.4 Validacija metode konačnih stanja za linije s grananjem toka materijala .....	69
4.5 Primjena metode konačnih stanja za linije grananja.....	81
4.6 Zaključak.....	83
<b>5. ANALIZA USKIH GRILA I PROJEKTIRANJE PROIZVODNIH SUSTAVA .....</b>	<b>84</b>
5.1 Usko grlo s obzirom na očekivani broj gotovih proizvoda .....	84
5.2 Usko grlo s obzirom na očekivani broj poluproizvoda .....	88
5.3 Usko grlo s obzirom na vjerojatnost blokade stroja .....	92
5.4 Usko s obzirom na vjerojatnost praznog hoda stroja.....	95
5.5 Projektiranje proizvodnih linija.....	97
<b>6. OPIS PROGRAMA SHIPPROLAB.....</b>	<b>101</b>
<b>7. ILUSTRATIVNI PRIMJER .....</b>	<b>104</b>
7.1 Opis proizvodnog sustava .....	104
7.2 Modeli i ulazni podaci .....	106
7.3 Simulacija .....	109
7.4 Rezultati analize ključnih značajki .....	110
7.5 Analiza vremena trajanja proizvodnje.....	112
7.6 Projektiranje proizvodnih linija.....	112
<b>8. ZAKLJUČAK.....</b>	<b>117</b>
8.1 Smjernice za daljnja istraživanja.....	118
<b>POPIS LITERATURE.....</b>	<b>120</b>
<b>KRATKI ŽIVOTOPIS AUTORA .....</b>	<b>126</b>
<b>IZJAVA .....</b>	<b>126</b>
<b>POPIS JAVNO OBJAVLJENIH RADOVA AUTORA.....</b>	<b>127</b>
<b>PRILOG A Dokaz da je vjerojatnost složenog događaja jednaka njihovom umnošku</b>	<b>129</b>
<b>PRILOG B Analiza sekcija i određivanje faktora grananja materijala .....</b>	<b>132</b>
<b>PRILOG C Određivanje kapaciteta međuskладиšta .....</b>	<b>134</b>
<b>PRILOG D Pouzdanost rada strojeva.....</b>	<b>135</b>
<b>PRILOG E Određivanje vrijeme trajanja proizvodnje .....</b>	<b>140</b>
<b>PRILOG F Ulazni podaci za projektiranje i popis populacija 40. generacije.....</b>	<b>147</b>

## POPIS SLIKA

Slika 1.1 Udio ekonomskih sektora u bruto društvenom proizvodu za određene dijelove svijeta u 2020. godini [7].....	2
Slika 1.2 Udio pojedinih gospodarskih sektora u BDP-u pojedinih članica Europske Unije u 2020. godini [16].....	3
Slika 1.3 (a) Isporučene i (b) naručene novogradnje u CGT i broj jedinica u Hrvatskoj od 2011. godine do 2020. godine [28-33].....	6
Slika 1.4 Kategorizacija proizvodnih sustava prema pouzdanosti strojeva [41].....	8
Slika 1.5 Kategorizacija proizvodnih sustava prema matematičkim modelima [41].....	8
Slika 1.6 Kategorizacija proizvodnih sustava prema toku materijala [41].....	8
Slika 2.1 Vennovi dijagrami za (a) skup A, (b) podskup, (c) uniju, (d) presjek, (e) razliku, (f) komplement.....	14
Slika 2.2 Vennovi dijagrami za (a) disjunktne skupove i (b) particija skupa S.....	15
Slika 2.3 Uvjetna vjerojatnost.....	18
Slika 2.4 Teorem totalne vjerojatnosti.....	19
Slika 2.5 Primjer slučajnih funkcija $F(X_n, t)$ .....	20
Slika 2.6 Primjer jednostavnog tranzicijskog dijagrama.....	22
Slika 2.7 Vennov dijagram pojedinog elementa $P(X_1 = j)$ vektora distribucije vjerojatnosti.....	23
Slika 2.8 Tranzicijski dijagram za tranzicijsku vjerojatnost u drugom ciklusu $p_{ij}^{(2)}$ .....	24
Slika 2.9 Vennov dijagram za tranzicijsku vjerojatnost u drugom ciklusu $p_{ij}^{(2)}$ .....	25
Slika 2.10 Tranzicijski dijagrami koji prikazuju (a) ireducibilni lanac, (b) lanac koji se može reducirati, (c) periodični lanac (d) aperiodični lanac.....	27
Slika 3.1 Prikaz sheme opće serijske linije.....	29
Slika 3.2 Prikaz prostora stanja.....	31
Slika 3.3 Prikaz prostora stanja na primjeru serijske linije $M=4$ i $N=2$ .....	32
Slika 3.4 Prikaz tranzicijske matrice i definicija elemenata prema prostoru stanja.....	33
Slika 3.5 Prikaz distribucije vjerojatnosti pojave stanja sustava za serijsku liniju ( $p_1=0.5$ , $p_2=0.6$ , $p_3=0.7$ , $N_1=N_2=10$ ) [48].....	36
Slika 3.6 Prikaz metode konačnih stanja.....	38
Slika 3.7 Prikaz formiranja vektora distribucije vjerojatnosti na razini serijske linije.....	39
Slika 3.8 Sprezanje s kraja [34].....	41
Slika 3.9 Sprezanje s početka [34].....	42
Slika 3.10 Sučelje za unos ulaznih podataka za (a) značajke <i>setup time</i> i <i>cycle time</i> i (b) značajke MTTF i MTTR [75].....	44
Slika 3.11 Simulacijski model serijske linije sa četiri stroja i tri međuskladišta [75].....	44
Slika 3.12 Simulacijski model serijske linije sa četiri stroja i tri međuskladišta, i povezani atomi [75].....	44

Slika 3.13 Relativna greška PR ovisno o broju strojeva – AGG metoda [75] .....	49
Slika 3.14 Relativna greška WIP ovisno o broju strojeva – AGG metoda [75] .....	49
Slika 3.15 Relativna greška PR ovisno o broju strojeva – MKS metoda [75] .....	49
Slika 3.16 Relativna greška WIP ovisno o broju strojeva – MKS metoda [75] .....	49
Slika 3.17 $M = 3$ , relativna odstupanja koristeći (a,b) AGG metodu i (c,d) MKS [75] .....	50
Slika 3.18 $M = 4$ , relativna odstupanja koristeći (a,b) AGG metodu i (c,d) MKS [75] .....	51
Slika 3.19 $M = 5$ , relativna odstupanja koristeći (a,b) AGG metodu i (c,d) MKS [75] .....	51
Slika 3.20 $M = 6$ , relativna odstupanja koristeći (a,b) AGG metodu i (c,d) MKS [75] .....	52
Slika 3.21 $M = 7$ , relativna odstupanja koristeći (a,b) AGG metodu i (c,d) MKS [75] .....	52
Slika 3.22 $M = 8$ , relativna odstupanja koristeći (a,b) AGG metodu i (c,d) MKS [75] .....	53
Slika 3.23 $M = 9$ , relativna odstupanja koristeći (a,b) AGG metodu i (c,d) MKS [75] .....	53
Slika 3.24 Primjer izlaznih rezultata simulacije [75] .....	54
Slika 3.25 Relativna greška PR ovisno o broju strojeva – simulacija [75] .....	57
Slika 3.26 Relativna greška WIP ovisno o broju strojeva – simulacija [75] .....	57
Slika 3.27 $M = 3$ , relativna odstupanja koristeći simulaciju – (a) PR i (b) WIP [75] .....	57
Slika 3.28 $M = 4$ , relativna odstupanja koristeći simulaciju – (a) PR i (b) WIP [75] .....	57
Slika 3.29 $M = 5$ , relativna odstupanja koristeći simulaciju – (a) PR i (b) WIP [75] .....	58
Slika 3.30 $M = 6$ , relativna odstupanja koristeći simulaciju – (a) PR i (b) WIP [75] .....	58
Slika 3.31 $M = 7$ , relativna odstupanja koristeći simulaciju – (a) PR i (b) WIP [75] .....	58
Slika 3.32 $M = 8$ , relativna odstupanja koristeći simulaciju – (a) PR i (b) WIP [75] .....	58
Slika 3.23 $M = 9$ , relativna odstupanja koristeći simulaciju – (a) PR i (b) WIP [75] .....	59
Slika 4.1 Bernoullijeva proizvodna linija s grananjem tokova materijala [77] .....	61
Slika 4.2 Primjer strukturne sheme metode konačnih stanja: a) linija s grananjem toka materijala, b) podjela linije na glavnu granu i sporedne grane te formiranje elemenata [77] ..	66
Slika 4.3 Različiti oblici linije grananja [77] .....	69
Slika 4.4 Usporedba ključnih značajki, a) linija L3, $N_1=N_2=N$ , b) linija L3, $N_1=N$ , $N_2=1/2N$ [77] .....	71
Slika 4.5 Usporedba ključnih značajki, a) linija L4A, $N_1=N_2=N_3=N$ , b) linija L4A, $N_1=N$ , $N_2=2/3N$ , $N_3=1/3N$ [77] .....	72
Slika 4.6 Usporedba ključnih značajki, a) linija L4B, $N_1=N_2=N_3=N$ , b) linija L4B, $N_1=N$ , $N_2=2/3N$ , $N_3=1/3N$ [77] .....	73
Slika 4.7 Usporedba ključnih značajki, a) linija L4C, $N_1=N_2=N_3=N$ , b) linija L4C, $N_1=N$ , $N_2=2/3N$ , $N_3=1/3N$ [77] .....	74
Slika 4.8 Usporedba ključnih značajki, a) linija L5A, $N_1=N_2=N_3=N_4=N$ , b) linija L5A, $N_1=N$ , $N_2=3/4N$ , $N_3=1/2N$ , $N_4=1/4N$ [77] .....	75
Slika 4.9 Usporedba ključnih značajki, a) linija L5B, $N_1=N_2=N_3=N_4=N$ , b) linija L5B, $N_1=N$ , $N_2=3/4N$ , $N_3=1/2N$ , $N_4=1/4N$ [77] .....	76

Slika 4.10 Usporedba ključnih značajki, a) linija L5C, $N_1=N_2=N_3=N_4=N$ , b) linija L5C, $N_1=N$ , $N_2=3/4N$ , $N_3=1/2N$ , $N_4=1/4N$ [77] .....	77
Slika 4.11 Usporedba ključnih značajki, a) linija L5D, $N_1=N_2=N_3=N_4=N$ , b) linija L5D, $N_1=N$ , $N_2=3/4N$ , $N_3=1/2N$ , $N_4=1/4N$ [77] .....	78
Slika 4.12 Usporedba ključnih značajki, a) linija L5E, $N_1=N_2=N_3=N_4=N$ , b) linija L5E, $N_1=N$ , $N_2=3/4N$ , $N_3=1/2N$ , $N_4=1/4N$ [77] .....	79
Slika 4.13 Shematski prikaz modela pogona za preradu trupca u podne elemente .....	81
Slika 5.1 Prikaz funkcije $q(p_{M_{i-1}}, p_{M_i}, N_{M_{i-1}})$ u zadanoj domeni [79] .....	86
Slika 5.2 Prikaz funkcije $q(p_{m_i}, p_{M_i}, N_{M_{i-1}})$ u zadanoj domeni [79] .....	87
Slika 5.3 Dijagram toka algoritma diferencijalne evolucija [79] .....	100
Slika 6.1 Shema računalnog programa ShipProLab.....	101
Slika 6.2 Primjer ulazne datoteke za jedan izabrani slučaj .....	102
Slika 6.3 Primjer izlazne datoteke za jedan izabrani slučaj .....	103
Slika 7.1 Tlocrt „Brodoobrada i predmontaža“, Brodosplit.....	104
Slika 7.2 Shema predobrade limova i profila, Brodosplit [81] .....	105
Slika 7.3 Shema obrade limova i profila, Brodosplit [81] .....	106
Slika 7.4 Modeli proizvodnih linija, A1 i A2 za izradu plošnih elementa, modeli proizvodnih linija B1 i B2 za izradu profilnih elementa [81].....	107
Slika 7.5 Ilustrativni prikaz odabranih sekcija A i B .....	108
Slika 7.6 Modeli A1, A2r1, A2r2, B1 i B2r11 izrađeni u programskom paketu Enterprise Dynamics 10.3.....	109
Slika 7.7 Primjena teorije diferencijalne evolucija na Model A1, a) početna generacija, b) 10. generacija, c) 20. generacija, d) 40. generacija.....	113
Slika 7.8 Primjena teorije diferencijalne evolucija na Model A2r1, a) početna generacija, b) 10. generacija, c) 20. generacija, d) 40. generacija.....	114
Slika 7.9 Primjena teorije diferencijalne evolucija na Model A2r2, a) početna generacija, b) 10. generacija, c) 20. generacija, d) 40. generacija.....	114
Slika 7.10 Primjena teorije diferencijalne evolucija na Model B1, a) početna generacija, b) 10. generacija, c) 20. generacija, d) 40. generacija.....	115
Slika 7.11 Primjena teorije diferencijalne evolucija na Model B2, a) početna generacija, b) 10. generacija, c) 20. generacija, d) 40. generacija.....	115

## POPIS TABLICA

Tablica 2.1 Osnovne zakonitosti algebre skupova .....	15
Tablica 2.2 Podjela Markovljevih procesa .....	21
Tablica 3.1 Metoda Agregacije: srednja vrijednost, standardna devijacija i varijanca relativnog odstupanja u odnosu na analitičku metodu [75].....	47
Tablica 3.2 MKS: srednja vrijednost, standardna devijacija i varijanca relativnog odstupanja u odnosu na analitičku metodu [75] .....	48
Tablica 3.3 Simulacija: srednja vrijednost, standardna devijacija i varijanca relativnog odstupanja u odnosu na analitičku metodu [75].....	56
Tablica 4.1 Vjerojatnost rada strojeva i kapacitet međuskладиšta za različite oblike linije grananja [77] .....	70
Tablica 4.2 Prikupljeni podaci iz proizvodnje [77] .....	82
Tablica 4.3 Usporedba izmjerenih podataka sa izračunatim podacima prema metodi konačnih stanja [77].....	83
Tablica 7.1 Faktori grananja prema izabranim brodskim sekcijama .....	108
Tablica 7.2 Kapaciteti međuskладиšta, $N_i$ .....	108
Tablica 7.3 Popis strojeva, $m_i$ , vjerojatnost pojave stanja {radi}, $p_i$ , stvarni ciklusi, $\tau_i$ , i izjednačeni ciklusi, $\tau_i$ .....	108
Tablica 7.4 Ključne značajke proizvodnih linija: očekivani broj gotovih proizvoda, $PR_i$ [kom/ciklusu], očekivani broj poluproizvoda, $WIP_i$ [kom], vjerojatnost blokade stroja, $BL_i$ , vjerojatnost praznog hoda stroja, $ST_i$ .....	111
Tablica 7.5 Vrijeme trajanja proizvodnje prema metodi konačnih stanja i simulaciji.....	112
Tablica 7.6 Rezultati selekcijskog postupka projektanta .....	116
Tablica B1 Analiza sekcije međupalublja (sekcija A) i pramčane sekcije (sekcija B) .....	132
Tablica B2 Faktori grananja prema izabranim brodskim sekcijama [81] .....	133
Tablica C1 Kapaciteti međuskладиšta za predobradu limova i profila .....	134
Tablica C2 Kapaciteti međuskладиšta za obradu limova i profila .....	134
Tablica D1 Pouzdanost strojeva za predobradu limova .....	135
Tablica D2 Pouzdanost strojeva za predobradu profila .....	135
Tablica D3 Sažetak knjiga kvarova za istočnu i zapadnu plazmu .....	136
Tablica D4 Procjena pouzdanosti rada radnika.....	137
Tablica D5 Vrijednosti vjerojatnosti stanja {radi} pojedinih sudionika za $m_{11}$ i $m_{12}$ .....	138
Tablica D6 Vrijednosti vjerojatnosti stanja {radi} pojedinih sudionika za $m_{24}$ .....	138
Tablica D7 Vrijednosti vjerojatnosti stanja {radi} pojedinih sudionika za $m_{25}$ .....	139
Tablica E1 Ukupno vrijeme za rezanje i strojno označavanje svih plošnih elementa .....	142
Tablica E2 Ulazni i izlazni podaci za proračun $\tau$ , $\tau_l$ i $T$ za model A1 .....	142
Tablica E3 Ulazni i izlazni podaci za proračun $\tau$ , $\tau_l$ i $T$ za model A2 <sub>r1</sub> .....	143

Tablica E4 Ulazni i izlazni podaci za proračun $\tau$ , $\tau_l$ i $T$ za model $A2_{r2}$ .....	143
Tablica E5 Ulazni i izlazni podaci za proračun $\tau$ , $\tau_l$ i $T$ za model B1 .....	144
Tablica E6 Ulazni i izlazni podaci za proračun $\tau$ , $\tau_l$ i $T$ za model $B2_{r11}$ .....	145
Tablica F1 Ulazni podaci za projektiranje .....	147
Tablica F2 Odabir populacije model A1, 40. generacija.....	148
Tablica F3 Odabir populacije model $A2_{r1}$ , 40. generacija .....	149
Tablica F4 Odabir populacije model $A2_{r2}$ , 40. generacija .....	150
Tablica F5 Odabir populacije model B1, 40. generacija.....	151
Tablica F6 Odabir populacije model B2, 40. generacija.....	152



## POPIS OZNAKA

$A$	Skup A
$\bar{A}$	Prosječna površina jednog lima
$BL_i$	Vjerojatnost blokade $i$ -tog stroja
$B_E$	Broj ukupno izrezanih elementa
$B_e$	Ekvivalentni broj lima ili profila
$B_{euP}$	Broj ekvivalentnih ulaznih profila
$B_{iP}$	Broj profila koji su istovremeno u predobradi
$B_K$	Broj ukupnih komada lima ili profila
$B_{EL}$	Broj elementa iz limova
$B_{EV}$	Broj elementa za oblikovanje veliki valjak
$B_{EH}$	Broj elementa za oblikovanje H-preša
$B_{KL}$	Broj ulaznih limova
$B_{EP}$	Broj elementa iz profila
$B_{EPO}$	Broj elementa za oblikovanje
$B_{KP}$	Broj ulaznih profila
$\bar{B}$	Prosječna širina jednog lima
$b_i$	Međuskladište $i$
$C$	Broj ciklusa za ukupnu proizvodnju
$CP$	Trenutna populacija
$ci$	izjednačeni kapacitet stroja
$e$	Element
$F(X_n, t)$	Slučajna funkcija
$f(A)$	relativna frekvencija pojave traženog ishoda
$H_{min}$	Minimalna visina profila
$H_{max}$	Maximalna visina profila
$h_i$	Stanje na međuskladištu
$K_G$	Grupa kombinacija

$K$	Sekundarni tokovi materijala
$KZ$	Ključne značajke
$\bar{L}$	Prosječna duljina lima
$\bar{L}_p$	Prosječna duljina profila
$MG$	Vektor međugeneracije
$m_i$	Stroj
$ms$	Stroj na kojem se grana
$N_A$	Broj pojavljanja ishoda $A$
$N$	Broj svih mogućih ishoda
$N_i$	Kapacitet međuskladište
$N_{uk}$	Ukupni kapacitet svih međuskladišta
$N_{ukmin}$	Najmanji ukupni kapacitet međuskladišta
$N_{gen}$	Broj generacija
$N_P$	Broj populacije
$NL$	Ukupan broj razmatranih linija
$n$	Ukupan broj razmatranih strojeva
$PR$	Očekivani broj gotovih proizvoda
$PR_T$	Težinski očekivani broj gotovih proizvoda
$PR_{max}$	Najveći očekivani broj gotovih proizvoda
$PR_{Tmax}$	Najveći težinski očekivani broj gotovih proizvoda
$\left[ P_{ij} \right]$	Tranzicijska matrica
$P(A)$	Vjerojatnost nekog ishoda $A$
$PG$	Vektor početne generacije
$PKG$	Vektor pokusne generacije
$p_{ij}$	Tranzicijska vjerojatnost
$p_i$	Pouzdanost stroja, vjerojatnost pojave stanja {radi}
$p_m$	Naj nepouzdaniji stroj
$p_{SO}$	Vjerojatnost stanja {radi} stroj za oblikovanje
$p_D$	Vjerojatnost stanja {radi} dizalice
$p_{Ri}$	Vjerojatnost stanja {radi} $i$ -tog radnika

$p_{SRR}$	Vjerojatnost stanja {radi} stroj za ručno rezanje
$q$	Ukupan broj strojeva s ekvivalentnim vremenom ciklusa
$R_i$	Ukupan broj strojeva u i-toj grani
$r_i$	Faktor grananja
$S$	Univerzalni skup, prostor stanja, redni broj stroja od kojeg počinje grananje
$ST_i$	Vjerojatnost praznog hoda i-tog stroja
$T$	Ukupno vrijeme proizvodnje
$T_{MKS}$	Vrijeme trajanja proizvodnje primjenom metode konačnih stanja
$T_{SIM}$	Vrijeme trajanja proizvodnje simulacije
$T_{WPSIM}$	Vrijeme trajanja dok se bilježi prvi element u atomu ponor
$T_{ukSIM}$	Vrijeme trajanja ukupne simulacije
$T_{ukupno}$	Ukupno trajanje razmatranog perioda
$T_{zastoj}$	Vrijeme koje je stroj proveo u zastoju
$T_{ri}$	Vrijeme trajanja proizvodnje po grani
$T_{\{radi\}}$	Vrijeme trajanja stanja radi
$T_{\{ne\ radi\}}$	Vrijeme trajanja stanja ne radi
$T_{\{Total\}}$	Ukupno vrijeme opservacije pojedinog stroja
$T_{\{kvar\}}$	Vrijeme trajanja kvara
$TP$	Propusnost proizvodne linije
$t_i$	Ukupno vrijeme trajanja $i$ -te operacije
$t_{st}$	Prosječno vrijeme postavljanja jednog lima ili profila
$t_{min}$	Minimalna debljina lima
$t_{max}$	Maksimalna debljina lima
$\bar{t}$	Prosječna debljina lima
$v$	Brzina kretanja limova
$WIP$	Očekivani broj poluproizvoda na međuskладиštima
$w$	Ukupan broj strojeva s stvarnim vremenom ciklusa
$\lambda_L$	Broj elementa iz jednog lima
$\lambda_P$	Broj elementa iz jednog profila

$\lambda r$	Broj izrezanih elementa po grani
$\mu$	Srednja vrijednost
$\pi$	Element vektora distribucije vjerojatnosti
$\pi_i$	Vektor distribucije vjerojatnosti
$\langle \pi^{(1)} \rangle$	Vektor distribucija vjerojatnosti u prvom ciklusu Markovljevog lanca
$\sigma$	Standardna devijacija
$\sigma^2$	Varianca
$\tau_i$	Stvarno trajanje ciklusa
$\tau_{ei}$	Ekvivalentno trajanje ciklusa
$\tau_l$	Izjednačeno trajanje ciklusa
$\Omega$	Svojtvena vrijednost

ANTYARD	Napredne metode za projektiranje profitabilnog, energetski efikasnog i okolišno prihvatljivog brodograđevnog proizvodnog procesa
AN	Analitička metoda
AGG	Metoda agregacije
BDP	Bruto društveni proizvod
BN	Usko grlo
CGT	Kompenzirana bruto tonaža
CNC	Računalno numeričko upravljanje
DE	Diferencijalna evolucija
DVML	Diskretni vremenski Markovljevi lanci
DVMP	Diskretni vremenski Markovljevi procesi
KAIST	Korejski institut za znanost i tehnologiju
KVML	Kontinuirani vremenski Markovljevi lanci
KVMP	Kontinuirani vremenski Markovljevi procesi
MTTF	Srednje vrijeme do kvara
MTTR	Srednje vrijeme popravaka
MKS	Metoda konačnih stanja
RB	Redni broj



## 1 UVOD

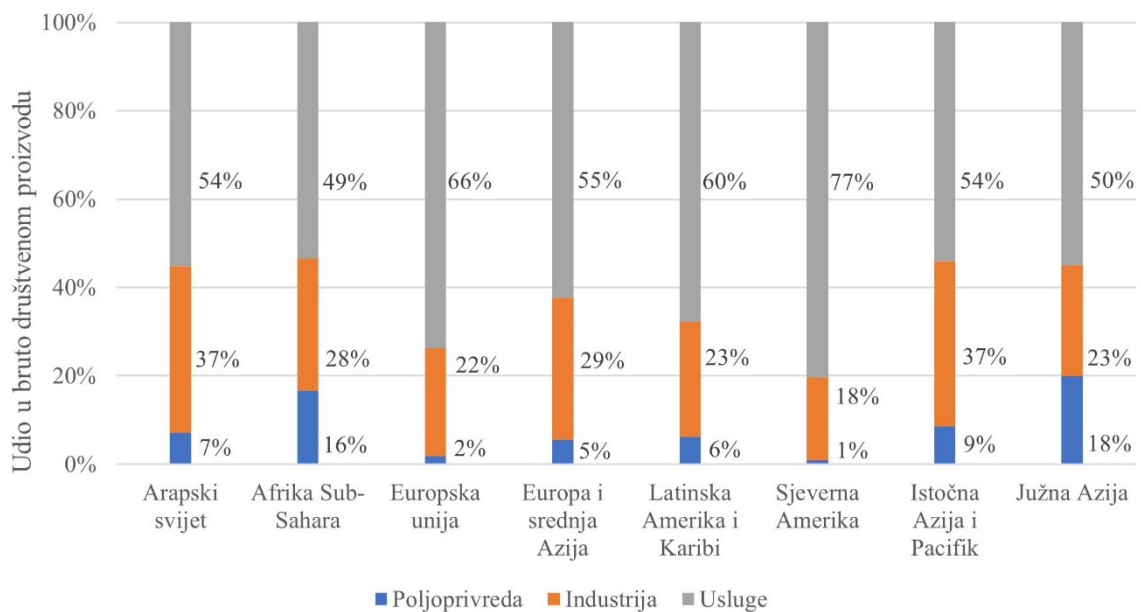
Pogled na razvoj društva od njegovog začetka pa do danas, otkriva kako je napredak čovječanstva usko povezan s razvojem proizvodnje. Suvremeno društvo utemeljeno na gradovima i birokraciji počelo se razvijati prije 5000 godina nakon što se poljoprivreda orijentirala na proizvodnju viška. Generirani višak hrane je bio pokretač za zatvaranje prapovijesti i razvoj moderne povijesti, u kojoj su se razvijale, transformirale ili su propale razne civilizacije [1].

Suvremena civilizacija svoj početak ima u 16. i 17. stoljeću i temelji se na razvoju znanosti i tehnologije kao što su mikroskop, teleskop, toplomjer, barometar, zračna pumpa, poboljšanja sata, magneta i sl. Njeno značajno oblikovanje dogodilo se u 18. stoljeću u kojem su se pojavili pokret prosvjetiteljstva, te francuska i industrijska revolucija [2].

Industrijska revolucija započela je u Velikoj Britaniji i od tamo se proširila po ostatku svijeta. Prvi put se zamjenjuje ljudski i životinjski rad sa strojevima koji su mehanički pogonjeni, što do tada ni jedna visoko razvijena civilizacija, s razvijenom poljoprivredom i trgovinom poput kineske, grčke, rimske ili indijske nije činila. Industrijska revolucija u samom početku nije generirala veće prihode i bolji standard života, ali je generirala vrijedno znanje i razvijala razne grane industrije poput tekstilne, metaloprerađivačke i kemijske [3,4].

Kako je znanost napredovala, u filozofiji, fizici, kemiji i matematici [2], tako se razvijao i pogled na ekonomiju. U 17. stoljeću William Petty (1623.-1687.) polaže temelje moderne ekonomije s obilježjem razgraničenja pojedinih djelatnosti poput poljoprivrede, rudarstva i proizvodnje [5]. Kako je industrija postala sve kompleksnija tako je i gospodarstvo zahtijevalo sve širu definiciju. Allan G. B. Fisher (1895.-1976.) po prvi put 1939. godine spominje podjelu gospodarstva na tri djela [5] koju Colin Clark (1905.-1989.) 1940. godine pominje definira u svom dijelu *Uvjeti gospodarskog napretka*. Time je nastala teorija triju sektora djelatnosti gospodarstva: primarno, sekundarno i tercijarno. Primarna djelatnost obuhvaća sve aktivnosti vezane uz eksploataciju sirovina, a to su poljoprivreda, rudarstvo, šumarstvo i uzgoj ribe, te je ograničena prirodnim resursima. Sekundarna djelatnost objedinjuje sve što je vezano uz proizvodnju i građevinske djelatnosti, te je ograničena mehaničkim faktorima. Tercijarna djelatnost uglavnom sažima sve uslužne aktivnosti, obrazovanje i turizam, te ovisi o iskustvu i znanju pojedinaca. Clark je zaključio da tehnološki napredak smanjuje udio primarne i sekundarne djelatnosti i povećava udio tercijarne djelatnosti u ukupnom gospodarstvu [5]. Takav trodijelni model, iako ima svoje manjkavosti, usvojen je za praćenje nacionalnog i globalnog gospodarstva, te je omogućio prepoznavanje strukturalnih promjena [6]. Primjer

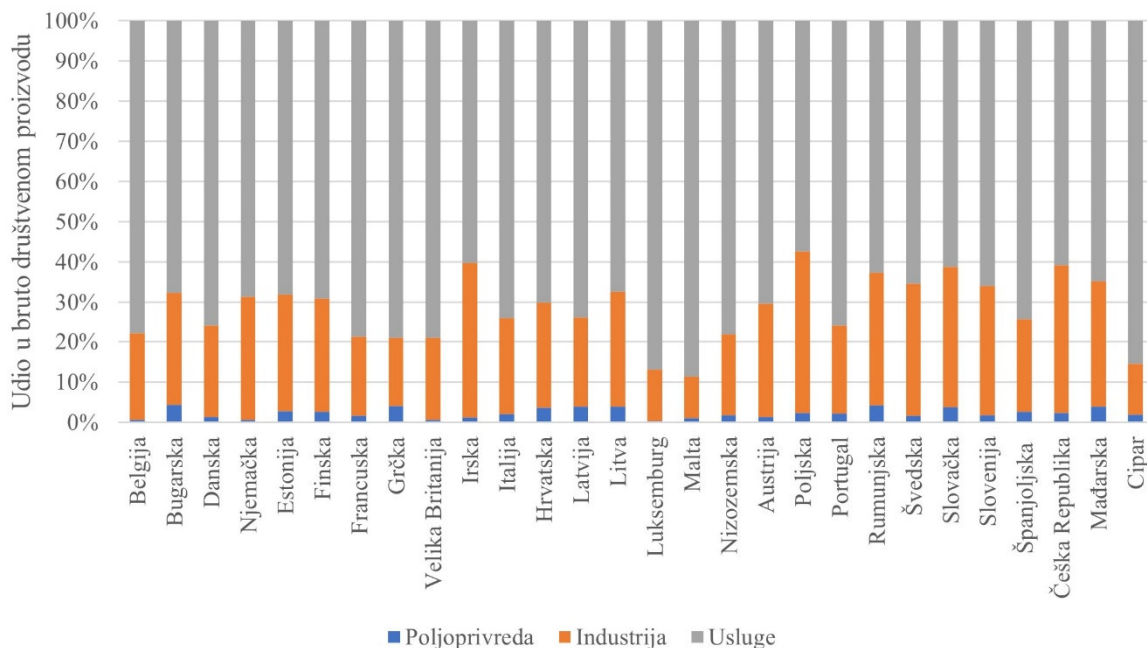
strukture gospodarstva raznih svjetskih regija uzimajući u obzir teoriju triju sektora prikazan je slikom 1.1.



Slika 1.1 Udio ekonomskih sektora u bruto društvenom proizvodu za određene dijelove svijeta u 2020. godini [7]

Razvijene zemlje koje su prošle tranziciju s poljoprivrednog sektora na industrijski i zatim do značajnog razvoja uslužnih djelatnosti i dalje ovise o proizvodnoj industriji koja potiče razvoj i istraživanje i naposljetku rast broja zaposlenih u uslužnim djelatnostima [8]. Prema tome proizvodna industrija je pokretač suvremene ekonomije, jer svako radno mjesto u razvijenoj proizvodnoj industriji generira pet do sedam radnih mjesta u pratećem gospodarstvu [9]. Danas, proizvedeni proizvodi čine oko 70% robnog izvoza [10]. To posebno vrijedi za proizvodnju računala i elektronike, kemikalija, strojeva i transportne opreme [11]. Industrija ima značajan utjecaj na nacionalni bruto domaći proizvod (BDP) koji u nekim slučajevima (npr. Kina, Irska, Portoriko, Lihtenštajn) premašuje 25% vlastitog BDP-a [12]. Za usporedbu, udio industrije u globalnom BDP-u 2019. godine u prosjeku je iznosilo 24,79% [13].

U Europskoj uniji je udio industrije u ukupnom BDP-u za 2020. godinu iznosio 21,9%, slika 1.1, [7], a broj zaposlenih radnika u industriji je iznosio oko 47,56 miliona [14,15]. Udio poljoprivrednog, industrijskog i uslužnog sektora po članicama Europske Unije u 2020. godini prikazan je slikom 1.2. Prema navedenim podacima u Hrvatskoj je poljoprivreda sudjelovala sa 3,7%, industrija sa 26,2% i uslužna djelatnost sa 70,1% u ukupnom hrvatskom BDP-u [16].



Slika 1.2 Udio pojedinih gospodarskih sektora u BDP-u pojedinih članica Europske Unije u 2020. godini [16]

## 1.1 Brodograđevna industrija u svijetu

Brodogradnja ima dugačku tradiciju i povijesnu ulogu u čovječanstvu. Osnovni razlog tome je prekrivenost Zemljine površine vodom s dominantnim udjelom od oko 71%. Na početku su oceani i mora bila prepreka kretanju ljudi da bi se tijekom povijesti morska prostranstva razvila u glavne trgovinske puteve [17]. Niz stoljeća su drveni brodovi s pogonom na jedra dominirali trgovačkim i ratnim flotama svijeta, te su se do 19. stoljeća promjene u brodogradnji događale vrlo sporo. Industrijska revolucija je označila kraj toj dominaciji, te su se počeli graditi prvi jedrenjaci od kovanog željeza i ubrzo od čelika, a na kraju su parni strojevi zamijenili jedra. Pojavila se potreba za novim proračunima čvrstoće, brzine i ostalih karakteristika brodova. Od sredine 20. stoljeća, uvođenjem tehnologije zavarivanja, dolazi do značajne promjene u načinu projektiranja i gradnje plovila, što je rezultiralo povećanjem njihove veličine i pojave novih tipova plovila kao što su tankeri za sirovu naftu, plin i kemikalije, trajekti ili specijalne plovne jedinice [18].

Brodogradnja je tako postala vrlo kompleksna djelatnost kojoj je svrha izgraditi brod odnosno specijalne plovne/plutajuće jedinice uz izrazitu ovisnost o međunarodnom tržištu, pomorskom prometu i industrijskom okruženju [19]. Međunarodno tržište se mijenja ciklični,



jer je usko povezano s rastom i padom svjetske ekonomije koja stvara potražnju za pomorskim prijevozom robe [20]. Pomorski promet odvija se putem svjetske flote trgovačkih brodova i luka, čija starost i veličina izravno utječe na brodogradnju. Izgradnja samog broda ili plovnog/plutajućeg objekta ovisno o njegovoj složenosti može trajati godinu do dvije od potpisivanja ugovora, te zahtijeva angažman raznih industrija poput industrije boje i lakova, strojogradnje, te crne i obojene metalurgije. Također, usko je vezana i uz elektroničku, drvoprerađivačku, kovinoprerađivačku i izolatorsku industriju te energetiku. Nadalje, brodovi su uobičajeno u eksploataciji više od dvadeset i pet godina, stoga se inovacije sporo probijaju na tržište [19].

Svjetsko gospodarstvo se od 1995. godine do 2018. godine udvostručilo zahvaljujući Azijskom gospodarstvu [20], koje je profitiralo od migracije industrije iz razvijenih zemalja poput Velike Britanije, Sjedinjenih Američkih Država, Kanade, Japana, Njemačke, Francuske, Italije i o ostalih članica Europske unije. Njihov je udio u svjetskoj proizvodnji u razdoblju od 1970. do 2010. godine pao sa 71% na 46% [21]. Glavni dobitnik u ovoj preraspodjeli je Kina, koja je u tom razdoblju preuzela 18% udjela, dok ostalih 7% otpada na Koreju, Indiju, Indoneziju, Thailand, Tursku i Poljsku [22]. Posljedica takve preraspodjele je razvitak globalnog logističkog lanaca, selidbe radnih mjesta i rast standarda u zemljama u koje se industrija preselila. Takav rast generirao je veliku potražnju za novogradnjama raznih namjena i povećao globalni brodograđevni kapacitet [19]. Početkom gospodarske krize 2008. godine ta potražnja biva naglo prekinuta uslijed čega je za mnoga brodogradilišta pokrenut stečajni postupak. Tako se u svijetu u razdoblju između 2014. i 2021. godine bilježi zatvaranje 229 aktivnih brodogradilišta, odnosno od 514 preostalo ih je samo 285 [23]. Na globalnom tržištu novogradnje u 2020. godini dominirala je Kina s naručenih 26,593 miliona CGT, koju slijedi Južna Koreja s 19,149 miliona CGT, dok je na trećem mjestu Europska unija s 11,272 miliona CGT [24].

Budućnost same brodogradnje po sebi nije upitna, poglavito zbog dominantne isplativosti pomorskog prometa u odnosu na druge vidove transporta. Međutim upitno je u kojoj mjeri će se sama brodogradnja zadržati u okvirima Hrvatskog i općenito Europskog gospodarstva s obzirom na trend odljeva industrijske djelatnosti u dalekoistočne zemlje [19].

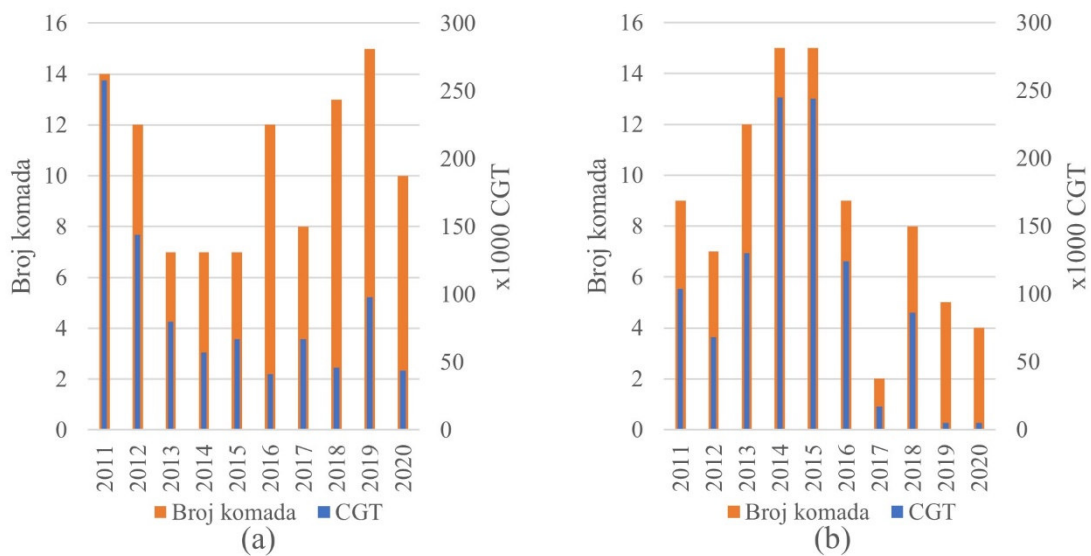
## 1.2 Brodograđevna industrija u Hrvatskoj

Brodograđevna industrija u Hrvatskoj ima dugu tradiciju prije svega zbog činjenice da je Hrvatska pomorska država s 31000 km<sup>2</sup> teritorijalnog mora i više od 5835 km obale, uključujući više od 1200 otoka [25]. Godine 2007. u Hrvatskoj se nalazilo 5 velikih, 14 srednjih i 352 malih brodogradilišta za novogradnju, održavanje ili popravak plovnih jedinica [26]. Godine 2019. je uslijed nepovoljnih poslovnih okolnosti za brodogradilište Uljanik pokrenut stečajni postupak [27], tako da su danas preostala samo 4 velika Brodogradilišta odnosno „3.Maj“ i „Viktor Lenac“ u Rijeci, „Brodotrogir“ u Trogiru i „Brodosplit“ u Splitu. Uz Brodogradilišta u Hrvatskoj postoje tri studija brodogradnje, Brodarski institut i jedno klasifikacijsko društvo [25]. Sve ove institucije sudjeluju u gradnji brodova kao najsloženijih proizvoda koje hrvatsko gospodarstvo u ovom trenutku može proizvesti [27]. Tržišne niše hrvatskih brodogradilišta obuhvaćaju gradnju tankera za prijevoz sirove nafte, naftnih prerađevina i kemikalija, brodova za rasuti teret, Ro-Ro brodova, jedrenjaka, trajekta, brodova za kružna putovanja i manjih vojnih brodova [19]. Također brodogradilišta „3. Maj“ i „Brodosplit“ se ističu vlastitom gradnjom pomoćnih i glavnih diesel motora prema stranim licencijama [26]. Često se ističe kako je hrvatska brodogradnja teret za hrvatski proračun, međutim pri tome se zanemaruje višestruko povećanje gospodarske aktivnosti kojom svaka kuna državne potpore generira 5,77 kuna u pratećem gospodarstvu [27]. Stoga, premda velika hrvatska brodogradilišta mogu poslovati i s gubicima, ekonomske analize ukazuju da su brodogradilišta zamašnjaci razvoja prateće industrije koja posljedično posluje s dobitkom zapošljavajući pri tom oko 25000 radnika [27].

Ulaskom Hrvatske u Europsku Uniju 2013. godine, ograničava se subvencioniranje velikih domaćih brodogradilišta koja od tada ne smiju proizvoditi više od 292358 CGT godišnje [19]. Kako bi se zadovoljili takvi novi kriteriji velika brodogradilišta imaju dvije opcije, prva je gradnja puno jednostavnih plovila s malim CGT-om ili mali broji složenijih plovila s velikim CGT-om [19]. Uspješnost izbora strategije ovisi o stanju na tržištu. Konačno, može se zaključiti kako će uspješnost poslovanja na tržištu ovisiti o odnosu ponuđene cijene, kvalitete, potražnje i inovativnost. Zbog navedenog, nužno je brod promatrati ne samo kao projektni zadatak, već u kontekstu cjelokupnog proizvodnog procesa.

U razdoblju između 2011. i 2020. godine u Hrvatskoj se broj isporučenih brodova kretao između sedam i petnaest brodova godišnje. Kompenzirana bruto tonaža ukazuje da su 2011. isporučeni veći brodovi naspram godina koje slijede, slika 1.3 a [28-33]. Broj naručenih brodova ukazuje kako su 2014. i 2015. trebale biti znatno povoljnije godine te se očekivao

povratak Hrvatske brodogradnje na razinu od 2011. godine, ali na žalost to se nije ostvarilo, slika 1.3 b [28-33].



Slika 1.3 (a) Isporučene i (b) naručene novogradnje u CGT i broj jedinica u Hrvatskoj od 2011. godine do 2020. godine [28-33]

### 1.3 Projektiranje i analiza proizvodnih sustava

Glavna uloga proizvodnih sustava je pretvorba ulaznih sirovina u poluproizvode ili gotove proizvode posredstvom proizvodnih procesa koji moraju biti efikasni, pouzdani i kvalitetni. Pri tome vanjski i unutarnji čimbenici utječu na rad takvih sustava. Vanjski faktori podrazumijevaju opskrbu s ulaznim sirovinama, zahtjeve kupaca, cijene energenata, tržište kapitala i tokove informacija. Unutarnji faktori su vezani uz pouzdanost rada strojeva i transportnih sredstava, kapacitete međuskладиšta te radnu snagu. Pritom vanjske i unutarnje čimbenike karakteriziraju stohastička svojstva koja se mogu analizirati u okviru proizvodnog inženjerstva [34].

Analiza se može provesti pojedinačno za svaki čimbenik proizvodnog procesa, koristeći ključne značajke ili općenito na razini ukupnog proizvodnog procesa uz pokazatelj ukupne učinkovitost proizvodne opreme [35]. Za određivanje ključnih značajki potrebo je dobro poznavanje pojedinih elementa proizvodnog procesa. Ključne značajke mogu se razlikovati kao kvantitativne i kvalitativne vrijednosti. Kvalitativne ključne značajke su subjektivne vrijednosti poput mišljenja ili doživljaja koji se izražavaju opisno. Kvantitativne ključne značajke su pokazatelji koji se mogu izraziti broječanim vrijednostima te su kao takve i predmet ovog

doktorskog rada. Kvantitativne ključne značajke se mogu podijeliti u četiri kategorije; odnosno profit, proizvodni troškovi, ukupno vrijeme izrade i zadovoljstvo kupaca. S druge strane ukupna učinkovitost proizvodne opreme iskazuje cjelokupnu iskoristivost proizvodnog sustava. Najjednostavniji način određivanja te značajke je omjer idealnog vremena proizvodnje u odnosu na njeno stvarno trajanje. Idealno vrijeme proizvodnje se pritom određuje kao umnožak ciklusa izrade s brojem ispravnih proizvoda. Dok stvarno vrijeme proizvodnje uzima u obzir vremenske gubitke nastale uslijed kvarova, održavanja, dorade, zastoja opskrbe i sl. [36].

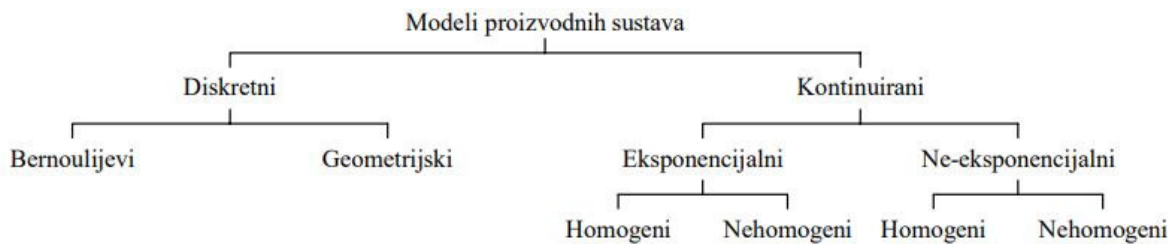
Problemu projektiranja i racionalizacije proizvodnih procesa može se pristupiti heuristički ili sistematično. Heuristički pristup temelji se na metodi pokušaja i pogrešaka kojom se u proizvodni sustav unose određene promjene tijekom određenog vremena s ciljem poboljšanja njegove efikasnosti. Takvim pristupom se može utjecati na svojstva procesa uz ograničeni doseg poboljšanja što svaku investiciju u tom smislu čini upitnom. S druge strane, sistematični pristup podrazumijeva primjenu metoda proizvodnog inženjerstva koje omogućuju sustavno praćenje i unaprjeđenje proizvodnje s ciljem povećanja profita i skraćivanja povratnog perioda uloženi sredstava. Proizvodno inženjerstvo se postepeno razvijalo tijekom zadnjih pet desetljeća što dokazuju brojna istraživanja na tom polju [37]. Dosezi suvremenog proizvodnog inženjerstva sežu od projektiranja do svakodnevne evaluacije i poboljšanja svojstava proizvodnih procesa [38], analize utroška energije i proizvodnih troškova [39], te mjerenja i analize utjecaja pojedinih procesa na okoliš [40].

Proizvodni sustavi se mogu podijeliti s obzirom na pouzdanost strojeva, tehnološko vrijeme i tokove materijala. Podjela prema pouzdanosti obuhvaća pouzdane i nepouzdanе strojeve. Budući da u naravi ne postoje potpuno pouzdani strojevi, glavni naglasak svih istraživanja je na modeliranju rada nepouzdanih strojeva s konačnim kapacitetima međuskladišta, slika 1.4. Takvi se pak proizvodni sustavi mogu razmatrati kao sustavi s konstantnim ili slučajnim vremenom izrade. Ukoliko se radi o konstantnom vremenu izrade, tada se takvi proizvodni sustavi mogu dodatno podijeliti na homogene i nehomogene proizvodne linije. Pritom se u homogenom slučaju pretpostavlja da pouzdanost rada strojeva ne ovisi o vremenu, što nije slučaj za nehomogene sustave [41].



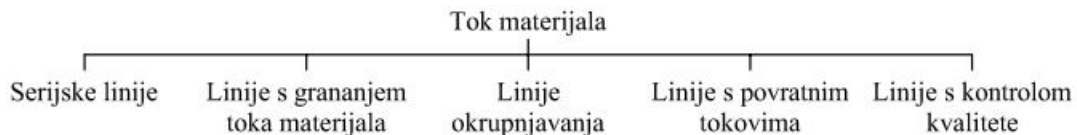
Slika 1.4 Kategorizacija proizvodnih sustava prema pouzdanosti strojeva [41]

Nadalje, matematički modeli nepouzdanih strojeva se mogu klasificirati u diskretne i kontinuirane modele. Diskretni modeli se temelje na Bernoulijevoj ili geometrijskoj distribuciji vjerojatnosti, a kontinuirani modeli na eksponencijalnoj i ne-eksponencijalnim distribucijama, slika 1.5 [41].



Slika 1.5 Kategorizacija proizvodnih sustava prema matematičkim modelima [41]

Konačno, proizvodni sustavi se prema toku materijala mogu klasificirati kao serijske linije, linije s grananjem tokova materijala, linije okrupnjavanja, linije s povratnim tokovima i linije s kontrolom kvalitete, slika 1.6 [41].



Slika 1.6 Kategorizacija proizvodnih sustava prema toku materijala [41]

U ovom doktorskom radu će se razmatrati serijske proizvodne linije i linije s grananjem tokova materijala s nepouzdanim strojevima i konačnim kapacitetom međuskладиšta pri konstantom i homogenom vremenu izrade. Primijenjeni matematički modeli će biti diskretne prirode s Bernoulijevom raspodjelom vjerojatnosti, odnosno pretpostavit će se da stoj radi ili je van funkcije zbog kvara.

## 1.4 Pregled literature

Prikazani proizvodni sustavi mogu se matematički opisati kao dinamički, stacionarni, nestacionarni, linearni, nelinearni, diskretni, kontinuirani, stohastički ili deterministički. Pritom se u praksi najčešće susreću simulacije diskretnim događajima koji svoju primjenu uz proizvodne sustave nalaze i u širokom spektru problema poput računalnih, telekomunikacijskih, prometnih i sličnih sustava. Proizvodni sustavi se u vremenskoj domeni mogu opisati primjenom Markovljevih lanaca [42], [43] ili drugim manje zastupljenim metodama poput Petrijevih mreža, procesne algebre i sl. [37]. Glavni doprinos takvih matematičkih modela je mogućnost evaluacije ključnih značajki proizvodnih sustava poput očekivanog broja gotovih proizvoda, očekivanog broja poluproizvoda na međuskladištima, vjerojatnosti blokade i praznog hoda strojeva te očekivanog trajanja proizvodnje [44].

Temelj primjene Markovljevih lanaca je postavio Sevast'yanov 1962. godine analitičkim rješenjem najjednostavnijeg problema odziva serijske Bernoullijeve proizvodne linije s dva stroja i jednim međuskladištem [45]. Analitičko rješenje temelji se na integralnim jednadžbama zbog čije složenosti nije bilo moguće formulirati rješenje problema odziva serijske Bernoullijeve proizvodne linije s proizvoljnim brojem strojeva i pripadnim međuskladištima proizvoljnog kapaciteta. Stoga je do nedavno postojalo analitičko rješenje problema za vrlo ograničeno područje prostora stanja sustava s dva ili tri stroja jednake vjerojatnosti pojave kvara. Problem je riješen nedavno upotrebom koncepta generalizirane prijelazne matrice kojom je moguće na jednostavan način formulirati analitičko rješenje problema odziva serijske Bernoullijeve proizvodne linije s proizvoljnim brojem strojeva i pripadnim međuskladištima proizvoljnog kapaciteta [46]. Time je evaluacija ključnih značajki proizvodnih sustava svedena na problem svojstvenih vrijednosti i analize svojstvenih vektora [47]. Međutim, osnovni nedostatak analitičkog pristupa je iznimno procesorski zahtjevno formiranje prijelazne matrice u slučaju serijskih linija s više strojeva i međuskladišta s velikim kapacitetom. Zbog navedenoga analitičko rješenje problema još uvijek nije prikladno za praktičnu, svakodnevnu upotrebu niti za projektiranje proizvodnih sustava. U tom je smislu nedavno predstavljena nova metoda nazvana metoda konačnih stanja koja diskretizacijom prostora stanja sustava omogućuje značajno smanjenje proračunske zahtjevnosti problema [48]. Ograničena primjena analitičkog rješenja koje je formulirao Sevast'yanov 1962. godine potaknula je razvoj poluanalitičkog pristupa odnosno metoda dekompozicije i agregacije. U sklopu metode dekompozicije proizvodna linija se dijeli na više jednostavnih linija sastavljenih od dva stroja i jednog međuskladišta. Za svaku pojednostavljenu liniju se potom generiraju

dekompozicijske jednadžbe koje se temelje na geometrijskoj distribuciji vjerojatnosti i zakonu očuvanja toka materijala. Formirani sustav jednadžbi rješava se do postizanja konvergencije očekivanog broja gotovih proizvoda [49]. S druge strane metoda agregacije se temelji na iterativnom objedinjavanju dva stroja i pripadnog međuskladišta počevši s jednog kraja linije prema drugom i obratno do postizanja konvergencije očekivanog broja gotovih proizvoda [50]. Osnovni nedostatak poluanalitičkih metoda je nepotpuna validacija koja je trenutno ograničena na izabrane primjere numeričkih simulacija [51].

Proizvodno inženjerstvo svoju primjenu nalazi u suvremenoj automobilskoj, prehrambenoj i općenito prerađivačkoj industriji. Pritom je interes za projektiranje procesa u uskoj korelaciji sa stupnjem automatizacije, a tijekom projektiranja posebno se vodi računa o analizi prolaznog i ustaljenog odziva proizvodnih linija. Produktivnost pogonske linije za sklapanje automobilskih motora uspješno je povećana primjenom poluanalitičkih metoda i identifikacijom uskog grla linije. Primjenom iste metode je također omogućeno smanjenje kapaciteta međuskladišta linije za izradu diferencijala. Rezultati navedenih analiza popraćeni su rijetko prisutnim mjerenjima u naravi [52]. Linija prešanih limenih dijelova u automobilskoj industriji analizirana je u [53]. Radom je prikazana ovisnost kvalitete prešanih limenih dijelova automobila o vremenu trajanja proizvodnje. Stoga su određeni optimalni broj međuskladišta i optimalno vrijeme proizvodnje s ciljem osiguranja kvalitete proizvoda. Slično tome, kvaliteta i svježina prehrambenih proizvoda ovisi o trajanju prerade zbog čega je provedena analiza rada linije za rezanje i pakiranje mesa uz uspješno povećanje produktivnosti primjenom poluanalitičkog pristupa [54]. Ključan korak pri tome je identifikacija uskog grla linije koje uzrokuje prazni hod ostalih strojeva. Drvoprerađivačka industrija, poput tvornice namještaja, zahtijeva određenu fleksibilnost proizvodne linije kako bi se efikasno mogla prilagoditi izradi svakog novog proizvoda. Stoga je primjenom poluanalitičkog pristupa provedena analiza odziva proizvodne linije nakon promjene alata na pojedinim strojevima [55].

Projektiranje proizvodnih procesa u brodogradnji nalazi se tek u začetima te se vrlo sporo razvija, a glavni uzrok tome je složenost te industrijske grane. Stoga se unapređenje brodograđevnog proizvodnog procesa mahom oslanja na heuristički pristup ili iznimno na numeričke metode, koje nerijetko rezultiraju teško mjerljivim podacima. Tako je na primjer američka radna brodogradnja, suočena s probijanjem budžeta i rokova, nastojala povećati efikasnost podprocesa opremanja broda primjenom teorije redova i Markovljevog procesa odlučivanja [56]. Drugi iznimno važan podproces je proizvodnja različitih ukrepljenih panela. Stoga je od iznimnog interesa povećanje efikasnosti linija za izradu ukrepljenih panela što je

razmotreno numeričkom evaluacijom. Planiranje proizvodnje raznih panela je zahtjevan i nužan pothvat za svakodnevni rad brodogradilišta. Kako bi proizvodnost ukepljenih panela bila što veća razvijen je novi numerički pristup koji u obzir uzima nesigurnosti nabave sirovine i isporuke proizvoda [57]. Brodogradilište Daewoo je u suradnji sa Korejskim institutom za znanost i tehnologiju, KAIST, razvilo sustav za praćenje proizvodnje pod nazivom DAS (DAewoo Shipbuilding Scheduling). Razvoj sustava je trajao tri godine i obuhvaća cjelokupno planiranje proizvodnje, te je uspješno pušten u rad 1994. godine [58]. Posebni algoritam za pronalaženje limova na ulaznom skladištu predstavljen je nedavno na konferenciji za proizvodne sustave, a temelji se na podjeli ulaznog skladišta na unaprijed zadane cjeline [59]. Principi vitke proizvodnje poput mapiranja toka vrijednosti primijenjeni su pri optimizaciji pogona za proizvodnju malih i robotiziranih ukepljenih panela. Takav pristup zorno prikazuje svaki korak proizvodnje i razotkriva mjesta na kojima dolazi do pada kvalitete [60]. Jedan drugi alat, SimYard je u mogućnosti simulirati bilo koju operaciju sa raznim ulaznim podacima i time projektantu dati informaciju koji raspored je najbolji za promatranu operaciju [61]. Simulacijskim alatom eM-Plant je modelirana robotizirana proizvodnja profila te je provedena analiza postojećeg pogona, što otvara mogućnost boljeg planiranja novih proizvodnih kapaciteta [62]. Razvijen je alat za simulaciju slaganja blokova trupa u suhom doku, konvertirajući metodu za prikazivanje procesa u grafički jezik [63]. Isti problem je riješen sa simulacijskim alatom s diskretnim događajima koji omogućuje usporedbu strategija gradnje broda upotrebom većih i manjih blokova [64]. Korištenjem simulacijskog programa Taylor ED, autori su izgradili virtualnu radionicu predobrade i obrade limova i profila i time istakli prednosti numeričkog pristupa [65].

Svakom pristupu modeliranja proizvodnog procesa, bilo da je riječ o analitičkom, poluanalitičkom ili numeričkom, potrebna je validacija koja se temelji na prikupljenim podacima iz stvarne proizvodnje. Na žalost, ni jedan od navedenih radova ne pristupa sustavno tom problemu.

Prema tome, može se zaključiti da efikasno i održivo gospodarstvo ovisi o efikasnoj i održivoj proizvodnji. Stoga, projektiranje, racionalizacija i poboljšanje proizvodnih procesa mogu značajno doprinijeti razvoju gospodarstva i društva u cijelosti.



## **1.5 Cilj i hipoteza istraživanja**

Cilj ovog istraživanja je razvoj simulacijskog modela kojim će se omogućiti evaluacija ključnih značajki serijskih Bernoullijevih proizvodnih linija.

Primjenom metode konačnih stanja moguće je razviti simulacijski model za efikasnu evaluaciju ključnih značajki serijskih Bernoullijevih proizvodnih linija i Bernoullijevih linija s grananjem tokova materijala koji će rezultirati boljim projektnim rješenjima proizvodnih sustava u odnosu na konvencionalne metode te će značajno utjecati na efikasnost linija obrade brodogradilišta.

## 2. OSNOVE TEORIJE SKUPOVA I MARKOVLJEVI LANCI

Teorija skupova je temelj teorije vjerojatnosti i razumijevanja slučajnih procesa koji su u fokusu ovog doktorskog rada. Matematički skup je zbir nekih elemenata, [66], uobičajeno označen velikom slovom, pri čemu redosljed navođenja elemenata nije važan, odnosno za neki skup  $A$  vrijedi:

$$A = \{\Delta, \spadesuit, \heartsuit\} = \{\spadesuit, \Delta, \heartsuit\}. \quad (2.1)$$

Ako se želi istaknuti jedan element iz skupa  $A$  onda se može pisati,  $\Delta \in A$ , što se čita „element  $\Delta$  iz skupa  $A$ “. Ako neki element ne pripada skupu  $A$  onda se piše  $\blacktriangle \notin A$ .

Skupovi se također mogu definirati i pomoću elementa s jednim ili više svojstva. Općenito se može reći da je skup  $A$  sastavljen od elemenata  $x$  koji zadovoljavaju neke uvjete, a piše se:

$$A = \{x \mid x \text{ zadovoljava neke uvjete}\}. \quad (2.2)$$

Tako se na primjer skup  $C$  može definirati kao skup elemenata  $x$  gdje je  $x$  cijeli broj veći ili jednak  $-2$  i manji ili jednak  $10$ , donosno vrijedi:

$$C = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, -2 \leq x \leq 10\}. \quad (2.3)$$

Na taj način je definiran sadržaj skupa  $C$  kao:

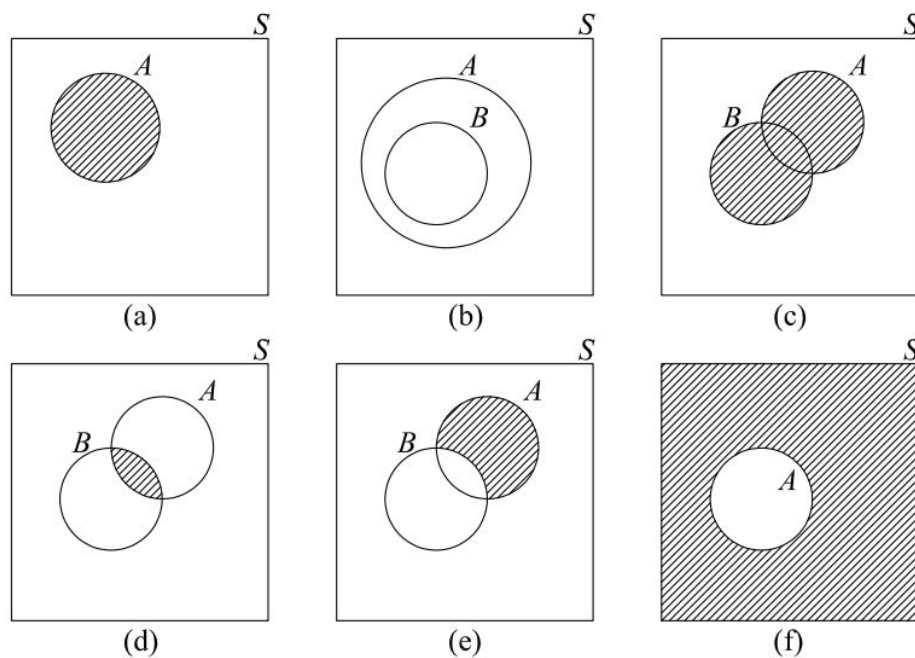
$$C = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}. \quad (2.4)$$

Skup  $A$  je podskup skupa  $B$  ako su svi elementi sadržani u  $A$  ujedno dio  $B$ , što se piše  $A \subset B$ . Skup  $B$  je tada nadskup skupa  $A$ ,  $B \supset A$ . Tako na primjer vrijedi da su svi prirodni brojevi podskup svih cijelih brojeva,  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ . Ili svi realni brojevi su nadskup svih cijelih brojeva,  $\mathbb{R} \supset \mathbb{Z}$ . Dva skupa su jednaka samo ako su ispunjeni uvjeti  $A \subset B$  i  $B \subset A$ . Tada vrijedi  $A = B$ .

Prazan skup je skup bez elemenata,  $\emptyset = \{ \}$ . Univerzalni skup  $S$  je skup svih elemenata koji se razmatraju. Takav se skup još naziva prostor događaja ili prostor uzoraka. Univerzalni skup  $S$  za primjerice bacanje kocke je  $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , a skup događaja u dva bacanja kocke može biti novi skup  $A$ ,  $A = \{2, 5\}$ .

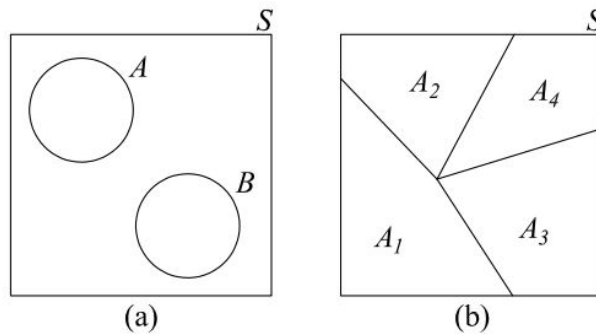
## 2.1 Vennovi dijagrami i operandi skupova

Skupovi se mogu predočiti pomoću Vennovih dijagrama, [67]. Pritom pravokutnik uobičajeno predstavlja univerzalni skup, a kružnice ili elipse unutar njega su skupovi određenih događaja, slika 2.1 (a). Na taj se način slučaj  $B \subset A$  može prikazati kao dvije kružnice od kojih je kružnica  $B$  smještena unutar kružnice  $A$ , slika 2.1 (b). Operacijom unija,  $\cup$ , obuhvaćaju se svi elementi promatranih skupova  $A$  i  $B$  što se može prikazati Vennovim dijagramom kao dvije kružnice s isjenčanom površinom, slika 2.1 (c). Operacijom presjek,  $\cap$ , uzimaju se u obzir samo elementi koji pripadaju skupu  $A$  i skupu  $B$ , što je prikazano isjenčanom površinom na slici 2.1 (d). Za presjek i uniju vrijedi zakon komutativnost. Stoga redoslijed navođenja skupova u izrazima nema utjecaja na rezultat. To ne vrijedi za operaciju razlika,  $/$ , gdje elementi koji se nalaze samo u prvom skupu izraza, ali ne i u drugim skupovima izraza, tvore novi skup. Razlika skupova  $A$  i  $B$ ,  $A/B$ , prikazana je isjenčanom površinom na slici 2.1 (e). Komplement nekog skupa  $A$ ,  $A^c$ , obuhvaća sve elemente koji se nalaze u univerzalnom skupu  $S$  ali ne i u tom jednom skupu. Komplement skupa  $A$ ,  $A^c$ , prikazan je isjenčanom površinom na slici 2.1 (f).



Slika 2.1 Vennovi dijagrami za (a) skup  $A$ , (b) podskup  $B \subset A$ , (c) uniju  $A \cup B$ ,  
(d) presjek  $A \cap B$ , (e) razliku  $A \setminus B$ , (f) komplement  $A^c$

Skupovi koji ne dijele ni jedan zajednički element  $x$  nazivaju se disjunktni skupovi. Presjek takvih skupova je prazan skup,  $\bigcap_{i=1}^n A_i = \{ \}$ . Primjer disjunktnih skupova prikazan je Vennovim dijagramom na slici 2.2 (a). Neprazni i disjunktni podskupovi  $A_1, A_2, A_3, A_4$  nekog univerzalnog skupa  $S$  za koje vrijedi  $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 = S$  tvore particiju skupa  $S$ , slika 2.2 (b)



Slika 2.2 Vennovi dijagrami za (a) disjunktnu skupove i (b) particiju skupa  $S$

## 2.2 Algebra skupova

Slično klasičnoj algebri, algebrom skupova zadane su zakonitosti prema kojima se mogu provoditi različite operacije sa skupovima, [67]. Sažetak zakonitosti naveden je u tablici 2.1.

Tablica 2.1 Osnovne zakonitosti algebre skupova

Asocijativnost	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
Komutativnost	$A \cap B = B \cap A$ $A \cup B = B \cup A$
Distributivnost	$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
Apsorpcija	$A \cap (A \cup B) = A$ $A \cup (A \cap B) = A$
Idempotencija	$A \cup A = A$ $A \cap A = A$

Od velikog značajna je i de Morganovo pravilo koje povezuje operacije uniju i presjek s komplementom, odnosno vrijedi:

$$\begin{aligned}(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots A_n)^C &= A_1^C \cap A_2^C \cap A_3^C \dots \cap A_n^C \\ (A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots A_n)^C &= A_1^C \cup A_2^C \cup A_3^C \dots \cup A_n^C.\end{aligned}\tag{2.5}$$

Također, Kartezijev produkt dva skupa  $A$  i  $B$  definira novi skup  $C$  koji se sastoji od uređenih parova  $x$  i  $y$ , gdje su  $x \in A$  i  $y \in B$  i piše se:

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ i } y \in B\}.\tag{2.6}$$

Redosljed elementa  $x$  i  $y$  je zadan. Ako je na primjer  $A = \{R, B, D\}$  i  $B = \{3, 4\}$  onda njihov Kartezijev produkt glasi

$$A \times B = \{(R, 3), (R, 4), (B, 3), (B, 4), (D, 3), (D, 4)\}.\tag{2.7}$$

Principom produkta može se izračunati broj mogućih kombinacija koji se dobiva Kartezijevim produktom. Potrebno je pritom znati broj elemenata svakog skupa, odnosno modul skupa. Tako na primjer za  $A = \{R, B, D\}$  i  $B = \{3, 4\}$  vrijedi  $|A| = M = 3$  i  $|B| = N = 2$  što daje

$$|A \times B| = MN = 3 \cdot 2 = 6.\tag{2.8}$$

Iz čega se zaključuje da je elemente skupova  $A$  i  $B$  moguće poredati u 6 različitih kombinacija.

Kardinalni broj skupa se izražava modulom skupa te predstavlja ukupni broj elementa u nekom skupu. Ako je na primjer skup  $A = \{2, 5, 6, 7, 8, 10, 9\}$  tada je njegov kardinalni broj  $|A| = 7$ . Princip uključenja i isključenja se može primijeniti u slučaju kardinalnih brojeva skupova. Za dva konačna skupa tako vrijedi

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|,\tag{2.9}$$

odnosno za  $n$  konačnih skupova može se pisati

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{i < j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i < j < k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \dots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap \dots \cap A_n|.\tag{2.10}$$

## 2.3 Osnovne vjerojatnosti

Vjerojatnost se može definirati kao mjera izvjesnosti nekog događaja i označava se na sljedeći način,  $P(\text{događaj})$ . Ta mjera se može izraziti u postocima, razlomcima ili decimalnim brojevima. Tokom povijesti su se razvile razne teorije vjerojatnosti, tako da se danas u glavnom razlikuje klasični, frekventni i aksiomatski pristup.

Klasični pristup se temelji na pretpostavci da svaki ishod ima jednaku mogućnost pojave. Za određivanje vjerojatnosti nekog ishoda  $A$  potrebno je odrediti pripadni broj pojavljivanja,  $N_A$ , i zatim taj iznos podijeliti s ukupnim brojem svih mogućih ishoda  $N$ , [68], odnosno vrijedi da je

$$P(A) = \frac{N_A}{N}. \quad (2.11)$$

Frekventni pristup, u literaturi poznat i kao statistički pristup, definira vjerojatnost nekog ishoda na temelju pokusa. Tijekom pokusa se bilježi broj traženih ishoda  $N_A$  koji se potom dijeli sa ukupnim brojem ponavljanja pokusa  $n$ . Takav omjer predstavlja relativnu frekvenciju pojave traženog ishoda, odnosno

$$f(A) = \frac{N_A}{n}. \quad (2.12)$$

Ako se u obzir uzme veliki broj ponavljanja pokusa tada relativna frekvencija konvergira prema jednoj vrijednosti i govori se o statističkoj stabilnosti relativnih frekvencija, [68].

Suvremena teorija vjerojatnosti se temelji na odgovarajućim aksiomima koja u sebi sadrži elemente klasičnog pristupa. Prvi aksiom vjerojatnosti definira vjerojatnost kao veličinu koja je uvijek veća ili jednaka nuli, odnosno:

$$P(A) \geq 0. \quad (2.13)$$

Drugi aksiom vjerojatnosti odnosi se na univerzalni skup  $S$  i njime se definira ukupna vjerojatnost pojave svih događaja iz  $S$ , odnosno vrijedi:

$$P(S) = 1. \quad (2.14)$$

Treći aksiom vjerojatnosti se odnosi na disjunktne i prebrojive skupove za čiju uniju vrijedi:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \dots) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) \dots \quad (2.15)$$

Vjerojatnost nekog događaja  $P(A)$  se može odrediti pomoću odnosa kardinalnih brojeva  $|A|$  i  $|S|$ ,

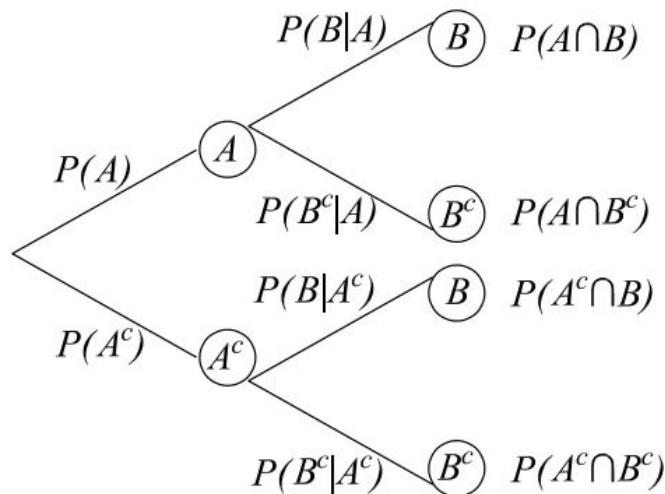
$$P(A) = \frac{|A|}{|S|}, \quad (2.16)$$

gdje je  $|A|$  broj svih promatranih događaja, a  $|S|$  broj svih mogućih događaja.

## 2.4 Uvjetna vjerojatnost, nezavisnost i teorem totalne vjerojatnosti

Uvjetna vjerojatnost definira vjerojatnost pojave nekog događaja  $B$  u ovisnosti o prethodnom događaju  $A$ ,  $P(B|A)$ , te se izražava kao omjer vjerojatnosti presjeka dvaju događaja i vjerojatnosti pojave događaja  $A$ , odnosno

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, P(A) > 0. \quad (2.17)$$



Slika 2.3 Uvjetna vjerojatnost

Ako je  $B \subset A$  tada vrijedi:

$$P(B|A) = \frac{P(B)}{P(A)}, P(A) > 0. \quad (2.18)$$

Za disjunkte skupove  $A_i$  vrijedi odnos

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \dots | B) = P(A_1|B)P(A_2|B)P(A_3|B) \dots \quad (2.19)$$

U slučaju uvjetne vjerojatnosti i presjeka većeg broja događaja može se koristiti tzv. lančano pravilo, odnosno vrijedi da je:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_2, A_1) \dots P(A_n|A_{n-1}, A_{n-2} \dots A_1). \quad (2.20)$$

Dva su događaja nezavisna ako događaj  $A$  ne utječe na događaj  $B$  i obrnuto što se može pisati:

$$\begin{aligned} P(A|B) &= P(A), \\ P(B|A) &= P(B). \end{aligned} \quad (2.21)$$

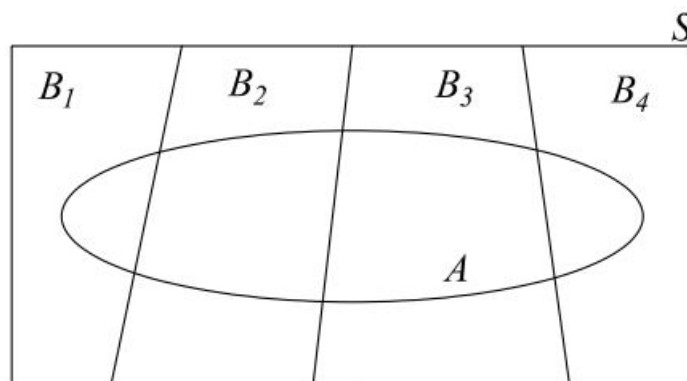
Ako su dva ili više događaja nezavisna onda je vjerojatnost njihovog presjeka jednak umnošku pojedinih vjerojatnosti pa vrijede izrazi:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B), \quad (2.22)$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \dots) = \prod_{i=1}^N P(A_i). \quad (2.23)$$

Za skupove  $B_i$  koji tvore particiju univerzalnog prostora  $S$  i skup  $A$ , slika 2.4, vrijedi teorem totalne vjerojatnosti, odnosno vjerojatnost  $P(A)$  se može odrediti kao suma presjeka događaja  $P(A \cap B_i)$  koji su jednaki umnošku vjerojatnosti  $P(A|B_i)$  i vjerojatnosti  $P(B_i)$ , te prema izrazu (2.17) vrijedi:

$$P(A) = \sum_{i=1}^N P(B_i)P(A|B_i) = \sum_{i=1}^N P(A \cap B_i). \quad (2.24)$$

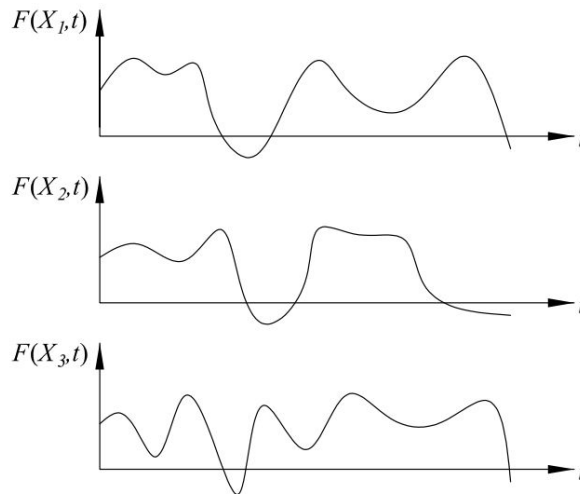


Slika 2.4 Teorem totalne vjerojatnosti



## 2.5 Stohastički procesi općenito

Stohastički proces je skup slučajnih funkcija  $F(X_n, t)$  koji obuhvaća sva moguća stanja slučajne varijable  $X_n$  u univerzalnom prostoru  $S$ . Primjeri slučajnih funkcija  $F(X_n, t)$  u ovisnosti o vremenu  $t$  prikazane su slikom 2.5.



Slika 2.5 Primjer slučajnih funkcija  $F(X_n, t)$

Slučajna varijabla,  $X_n$ , i vrijeme  $t$ , mogu biti diskretne ili kontinuirane veličine, te se stoga stohastički procesi mogu razlikovati prema:

- diskretnim slučajnim varijablama
- kontinuiranim slučajnim varijablama
- diskretnom vremenu
- kontinuiranom vremenu.

Kombinacijom navedenih karakteristika mogu se formulirati neki klasični stohastički procesi poput Poissonovih procesa, Brownova gibanja, obojanog šuma, bijelog šuma ili Markovljevih procesa, [69]. Poissonovi procesi su prikladni za opisivanje pojave slučajnih događaja poput broja nezgoda na cesti ili broja potresa. Brownovo gibanje se koristi u području inženjerstva, financija i fizike kako bi se pomoću Gausovih slučajnih varijabli modelirala gibanja čestica ili kretanje tržišnih cijena. Obojani šum pretežito se koristi u audio tehnici, elektronicima ili fizici a najpoznatiji proces te vrste je bijeli šum koji se često koristi u modeliranju toplinskih šumova u elektronicima. Radi svoje jednostavnosti Markovljevi procesi imaju široku primjenu u fizici, kemiji, biologiji, inženjerstvu, ekonomiji i medicini, te se mogu podijeliti u četiri podskupine koje se također razlikuju prema karakteristikama slučajnih varijabli i vremena, tablica 2.2, [34]. Ako je slučajna varijabla diskretna tada je riječ o Markovljevim lancima (ML) koji se mogu

dodatno razlikovati s obzirom na vrijeme. Tako postoje diskretni vremenski Markovljevi lanci (DVML) i kontinuirani vremenski Markovljevi lanci (KVML). Ako je slučajna varijabla kontinuirana onda je riječ o Markovljevim procesima (MP) koji se također mogu razlikovati s obzirom na vrijeme. Tako postoje diskretni vremenski Markovljevi procesi (DVMP) i kontinuirani vremenski Markovljevi procesi (KVMP).

Tablica 2.2 Podjela Markovljevih procesa

Vrijeme, $t$	Slučajna varijabla, $X_n$	
	Diskretna	Kontinuirana
Diskretni	DVML	DVMP
Kontinuirani	KVML	KVMP

### 2.5.1 Diskretni Markovljevi lanci

Osnovno svojstvo Markovljevih lanaca je da buduće stanje slučajne varijable  $X_{m+1}$  ovisi samo o njenom trenutnom stanju  $X_m$ , [69], zato vrijedi:

$$P(X_{m+1} = j | X_m = i, X_{m-1} = i_{m-1}, \dots, X_0 = i_0) = P(X_{m+1} = j | X_m = i), \quad (2.25)$$

gdje  $m$  označava diskretno vrijeme,  $X_m$  trenutno stanje varijable, a  $X_{m+1}$  njeno buduće stanje. Vjerojatnost promjene slučajne varijable iz trenutnog stanja  $X_m = i$  u novo stanje  $X_{m+1} = j$  naziva se prijelazna ili tranzicijska vjerojatnost,  $p_{ij}$ ,

$$p_{ij} = P(X_{m+1} = j | X_m = i). \quad (2.26)$$

Također Markovljevi lanci posjeduju i svojstvo homogenosti, odnosno prijelazna vjerojatnost se stabilizira nakon početnog (tranzijentnog) razdoblja te za cikluse  $n$  i  $m$ , gdje su  $n, m \gg 0$  vrijedi

$$p_{ij} = P(X_{n+1} = j | X_n = i) = P(X_{m+1} = j | X_m = i), m \neq n, \quad (2.27)$$

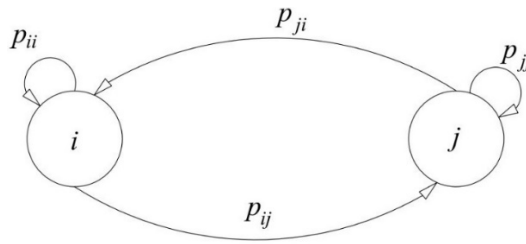
pri čemu duljina početnog razdoblja ovisi o karakteristikama promatranog sustava. Budući da su stanja konačna i vremenski neovisna, sve se vrijednosti tranzicijske vjerojatnosti mogu zapisati u obliku matrice koja se naziva tranzicijska matrica,  $[P_{ij}]$ . Ako pretpostavimo da su stanja slučajne varijable 1, 2, 3 ...  $r$  tada vrijedi

$$[P_{ij}] = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1r} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{r1} & p_{r2} & \cdots & p_{rr} \end{bmatrix}. \quad (2.28)$$

Suma svih tranzicijskih vjerojatnosti u jednom redu jednaka je 1, jer se u svakom redu nalaze sva moguća stanja koja proizlaze iz početnog stanja  $X_i$ . Takve matrice se u literaturi nazivaju i stohastičke matrice za koje vrijedi svojstvo:

$$\sum_{k=1}^r p_{ik} = \sum_{k=1}^r P(X_{m+1} = k | X_m = i) = 1. \quad (2.29)$$

Markovljevi lanci se mogu prikazati pomoću tranzicijskog dijagrama, slika 2.6. Kružnice pritom označavaju pojedina stanja sustava, a strelice trajektorije prelaska sustava iz određenog stanja u neko novo stanje sustava. Uz svaku strijelcu se uobičajeno navodi tranzicijska vjerojatnost,  $p_{ij}$ .



Slika 2.6 Primjer jednostavnog tranzicijskog dijagrama

Vektor distribucije vjerojatnosti  $\langle \pi^{(1)} \rangle$  u prvom ciklusu Markovljevog lanca  $\{X_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ ,  $X_n \in S = \{1, 2, \dots, r\}$ ,

$$\langle \pi^{(1)} \rangle = \langle P(X_1 = 1) \ P(X_1 = 2) \ \cdots \ P(X_1 = r) \rangle \quad (2.30)$$

može se odrediti umnoškom (tzv. jednađbom ravnoteže),

$$\langle \pi^{(1)} \rangle = \langle \pi^{(0)} \rangle [P_{ij}] \quad (2.31)$$

koristeći poznati vektor distribucije vjerojatnosti u početnom stanju,  $\langle \pi^{(0)} \rangle$ ,

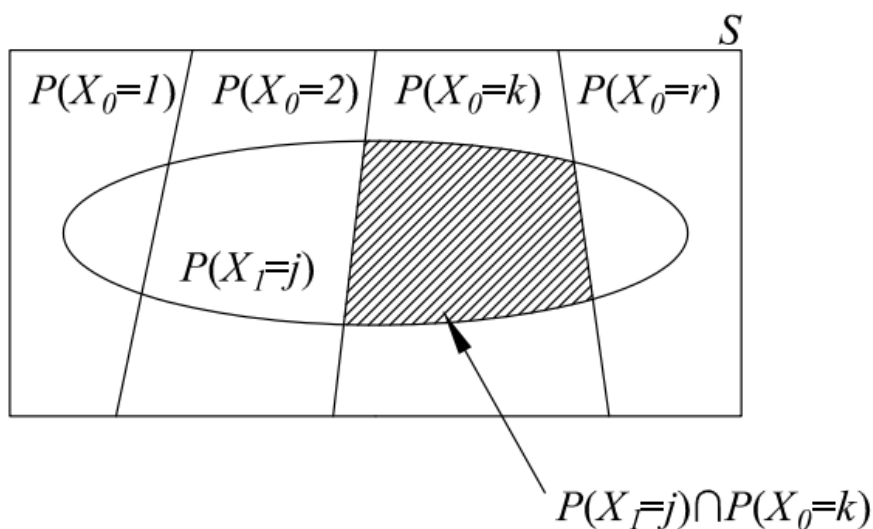
$$\langle \pi^{(0)} \rangle = \langle P(X_0 = 1) \ P(X_0 = 2) \ \cdots \ P(X_0 = r) \rangle \quad (2.32)$$

i tranzicijsku matricu  $[P_{ij}]$ .

Izraz (2.31) se temelji na totalnoj vjerojatnosti i zakonu uvjetne vjerojatnosti, izraz (2.17), čijom primjenom se određuju pojedini elementi,  $P(X_1 = j)$ , vektora distribucije vjerojatnosti prvog ciklusa,  $\langle \pi^{(1)} \rangle$ . Uvjetna vjerojatnosti prema izrazu (2.17) definira segment iz presjeka događaja isjenčanog na slici 2.7, a suma takvih presjeka prema izrazu (2.24) određuje jedan element  $P(X_1 = j)$ , odnosno.

$$\begin{aligned}
 P(X_1 = j) &= \sum_{k=1}^r P(X_1 = j \cap X_0 = k) \\
 &= \sum_{k=1}^r P(X_1 = j | X_0 = k) P(X_0 = k) \\
 &= \sum_{k=1}^r p_{kj} P(X_0 = k)
 \end{aligned} \tag{2.33}$$

gdje je  $j \in S$ . Dobiveni izraz (2.33) je umnožak poznatog vektora distribucije vjerojatnosti u početnom stanju,  $\langle \pi^{(0)} \rangle$ , sa  $j$ -tim stupcem tranzicijske matrice što je u skladu s izrazom (2.31).



Slika 2.7 Vennov dijagram pojedinih elemenata  $P(X_1 = j)$  vektora distribucije vjerojatnosti

Sličnim izrazom može se odrediti i vektor distribucije vjerojatnosti u drugom ciklusu, stoga vrijedi,

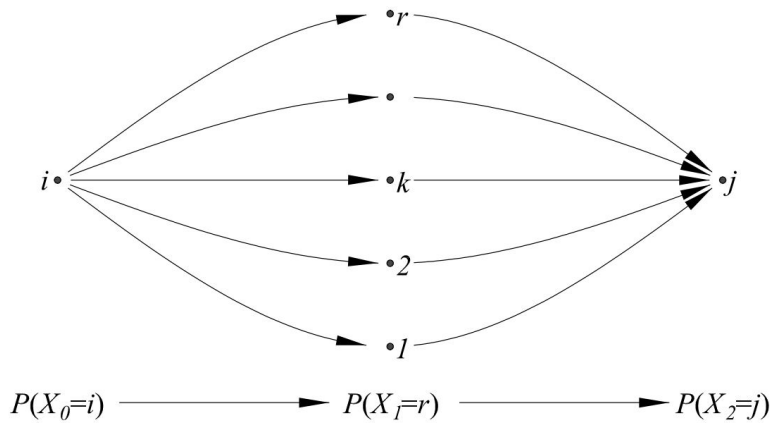
$$\langle \pi^{(2)} \rangle = \langle \pi^{(1)} \rangle [P_{ij}] = \langle \pi^{(0)} \rangle [P_{ij}]^2. \tag{2.34}$$

Supstitucija  $\langle \pi^{(1)} \rangle = \langle \pi^{(0)} \rangle [P_{ij}]$  potvrđuje kako su vektor distribucije vjerojatnosti početnog stanja i tranzicijska matrica dostatni za određivanje bilo kojeg vektora distribucije n-tog ciklusa. Stoga u općem slučaju vrijedi,

$$\langle \pi^{(n+1)} \rangle = \langle \pi^{(n)} \rangle [P_{ij}], \text{ za } n = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.35)$$

gdje je  $\langle \pi^{(n)} \rangle = \langle \pi^{(0)} \rangle [P_{ij}]^n$ , za  $n = 0, 1, 2, \dots$ .

Tranzicijska vjerojatnost u drugom ciklusu  $p_{ij}^{(2)}$  Markovljevog lanca  $\{X_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$  gdje je  $X_n \in S = \{1, 2, \dots, k, \dots, r\}$ , prikazana je tranzicijskim dijagramom na slici 2.8 te je jednaka odgovarajućem elementu iz kvadrirane tranzicijske matrice,  $[P_{ij}]^2$ . Do tog zaključka se dolazi analizom elemenata tranzicijske matrice drugog ciklusa,  $[P_{ij}]$ , koristeći zakon totalne vjerojatnosti, uvjetne vjerojatnosti i lančanog pravila, izrazi (2.24, 2.17, 2.20).



Slika 2.8 Tranzicijski dijagram za tranzicijsku vjerojatnost u drugom ciklusu  $p_{ij}^{(2)}$

Koristeći izraz (2.17) za uvjetnu vjerojatnost može se pisati:

$$p_{ij}^{(2)} = P(X_2 = j | X_0 = i) = \frac{P(X_0 = i) \cap P(X_2 = j)}{P(X_0 = i)}. \quad (2.36)$$

Lančano pravilo prema izrazu (2.20) definira segment iz presjeka događaja isjenčanog na slici 2.9,

$$\begin{aligned} P(X_2 = j \cap X_1 = k \cap X_0 = i) \\ = P(X_2 = j | X_1 = k, X_0 = i) P(X_1 = k | X_0 = i) P(X_0 = i), \end{aligned} \quad (2.37)$$

a putem totalne vjerojatnosti, izrazom (2.24) se definira suma takvih presjeka koja daje ukupnu površinu presjeka  $P(X_0 = i) \cap P(X_2 = j)$ . Prema tome za izraz (2.37) vrijedi:

$$\begin{aligned} P(X_0 = i) \cap P(X_2 = j) &= \sum_{k=1}^r P(X_2 = j \cap X_1 = k \cap X_0 = i) \\ &= \sum_{k=1}^r P(X_2 = j | X_1 = k, X_0 = i) P(X_1 = k | X_0 = i) P(X_0 = i) \end{aligned} \quad (2.38)$$

Ako se izraz (2.38) podijeli sa vjerojatnošću početnog stanja  $P(X_0 = i)$  dobiva se veza između lančanog pravila i uvjetne vjerojatnosti i totalne vjerojatnosti,

$$\begin{aligned} \frac{P(X_0 = i) \cap P(X_2 = j)}{P(X_0 = i)} &= \frac{\sum_{k=1}^r P(X_2 = j \cap X_1 = k \cap X_0 = i)}{P(X_0 = i)} \\ &= \sum_{k=1}^r P(X_2 = j | X_1 = k, X_0 = i) P(X_1 = k | X_0 = i). \end{aligned} \quad (2.39)$$

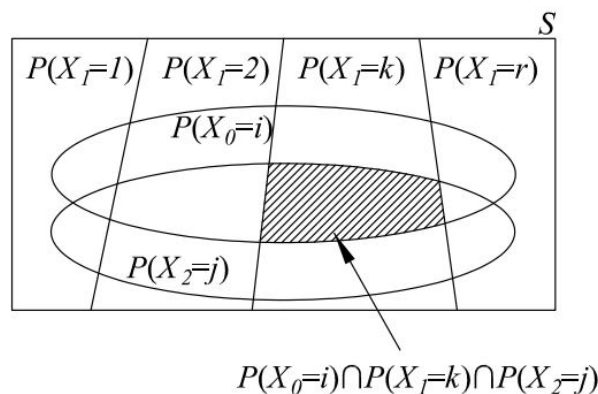
Primjenjujući Markovljevo svojstvo izraz (2.39) može se pojednostaviti na sljedeći način,

$$\sum_{k=1}^r P(X_2 = j | X_1 = k) P(X_1 = k | X_0 = i) = \sum_{k=1}^r p_{kj} p_{ik}, \quad (2.40)$$

gdje su  $X_1=k$  međustanja prvog ciklusa kroz koja sustav prolazi kako bi iz početnog stanja  $X_0=i$  dospio u stanje  $X_2=j$ . Konačno se iz priloženog može vidjeti

$$p_{ij}^{(2)} = P(X_2 = j | X_0 = i) = \frac{P(X_0 = i) \cap P(X_2 = j)}{P(X_0 = i)} = \sum_{k=1}^r p_{kj} p_{ik} \quad (2.41)$$

gdje je  $\sum_{k=1}^r p_{kj} p_{ik}$  umnožak dviju matrica.



Slika 2.9 Vennov dijagram za tranzicijsku vjerojatnost u drugom ciklusu  $p_{ij}^{(2)}$

Nadalje, proširujući izraz (2.41) za proizvoljni ciklus  $n+m$ , te uzimajući u obzir homogenost Markovljeveg lanca, izraz (2.27), vrijedi

$$\begin{aligned}
 p_{ij}^{(n+m)} &= P(X_{n+m} = j | X_0 = i) \\
 &= \sum_{k=1}^r P(X_{n+m} = j | X_n = k, X_0 = i) P(X_n = k | X_0 = i) \\
 &\quad \text{(koristeći Markovljevo svjostvo)} \\
 &= \sum_{k=1}^r P(X_m = j | X_n = k) P(X_n = k | X_0 = i) \\
 &\quad \text{(koristeći vremensku homogenost)} \\
 &= \sum_{k=1}^r p_{kj}^{(m)} p_{ik}^{(n)}.
 \end{aligned} \tag{2.42}$$

Izraz (2.46) ima veliku važnost za analizu Markovljevih lanaca i naziva se Chapman-Kolmogorovljeva jednačba koja se u matičnom obliku može zapisati kao:

$$\left[ P_{ij}^{(n+m)} \right] = \left[ P_{ij}^{(n)} \right] \cdot \left[ P_{ij}^{(m)} \right]. \tag{2.43}$$

## 2.5.2 Granična distribucija vjerojatnosti

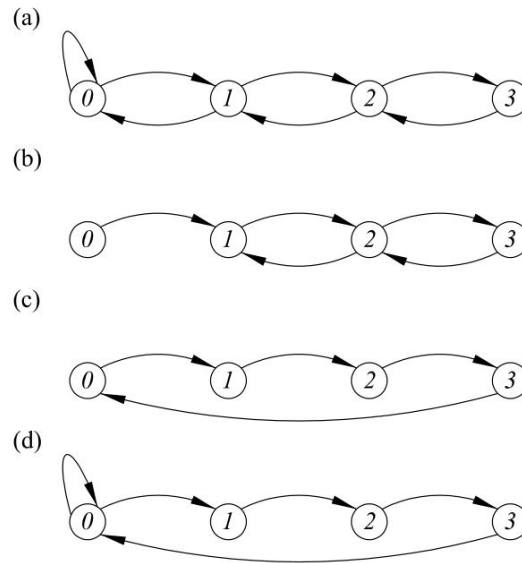
Ustaljeni odziv sustava od posebnog je značaja za inženjersku primjenu Markovljevih lanaca u slučaju analize proizvodnih sustava, te je vezan uz određivanje granične distribucije vjerojatnosti. Granična distribucija vjerojatnosti Markovljeveg lanca,  $\langle \pi^{(n)} \rangle$ ,  $n \rightarrow \infty$ , izraz (2.35), je jedinstvena ukoliko je promatrani Markovljev lanac ireducibilan, rekurentan i aperiodičan, u jedno to je stacionarna distribucija.

Ako sva stanja jednog Markovljeveg lanca međusobno komuniciraju onda se govori o ireducibilnom lancu, što znači da je svako stanje sustava dostupno iz bilo kojeg stanja, slika 2.10 (a).

Ako postoji sigurna mogućnost da se početno stanje ponovno pojavi nakon  $n$  promjena onda je riječ o rekurentnom stanju. Sva druga stanja koja ne ispunjavaju taj uvjet su tranzijentna ili prolazna stanja. Na slici 2.10 (b) je stanje 0 tranzijentno, a preostala stanja su rekurentna i ireducibilna.

Ireducibilan Markovljev lanac je periodičan ako se u stanje  $i$  može vratiti nakon određenog broja promjena stanja, slika 2.10 (c). Ukoliko je Markovljev lanac karakterističan

po najmanje jednoj povratnoj vezi  $i$  tog stanja (npr. stanje 0, slika 2.10 (d)), tada je on ujedno i aperiodičan.



Slika 2.10 Tranzicijski dijagrami koji prikazuju (a) ireducibilni lanac, (b) lanac koji se može reducirati, (c) periodični lanac (d) aperiodični lanac

Markovljev lanac koji zadovoljava navedene uvjete rekurentnosti, ireducibilnosti i aperiodičnosti, uz uvjet homogenosti, je ergodičan. U tom slučaju se stacionarna distribucija može odrediti rješavanjem jednadžbe ravnoteže (2.31) ciklus po ciklus ili alternativno rešenjem problema svojstvene vrijednosti. Budući da je prvi pristup izrazito zahtjevan u nastavku ovog rada primijeniti će se drugi pristup.

## 2.6 Svojstvene vrijednosti i svojstveni vektor

Svojstvene vrijednosti i vektori imaju široku primjenu u današnjoj znanosti. Koriste se u inženjerstvu, fizici, geometriji, matematici, biologiji i drugim granama [70]. Opći izgled takve vektorske jednadžbe glasi,

$$\langle \pi \rangle [P] = \langle \pi \rangle \Omega, \quad (2.45)$$

gdje je  $[P]$  zadana tranzicijska matrica,  $\langle \pi \rangle$  nepoznati svojstveni vektor matrice  $[P]$ , a  $\Omega$  nepoznata svojstvena vrijednost matrice  $[P]$ . Za rješavanje takve jednadžbe potrebno je prvo odrediti  $\Omega$  pomoću determinante (2.46),



$$\det([P] - \Omega[I]) = 0, \quad (2.46)$$

gdje je  $[I]$  jedinična matrica. Ako je svojstvena vrijednost  $\Omega$  poznata onda se nepoznati svojstveni vektor može odrediti pomoću izraza

$$\langle \pi \rangle ([P] - \Omega[I]) = \langle 0 \rangle. \quad (2.47)$$

Izraz (2.47) se može prepoznati u izrazu (2.35) pod uvjetom da je Markovljevi lanac ergodičan a broj ciklusa  $n$  beskonačan, onda vrijedi da je vektor distribucije vjerojatnosti u sljedećem ciklusu  $\langle \pi^{(n+1)} \rangle$  jednak vektoru distribucije vjerojatnosti u trenutnom ciklusu  $\langle \pi^{(n)} \rangle$  što odgovara prvom svojstvenom vektoru  $\langle \pi \rangle$  tranzicijske matrice uz najveću svojstvenu vrijednost  $\Omega = 1$ .

### 3. SERIJSKE LINIJE

Bernoullijeva serijska linija, slika 3.1, je proizvodna linija sastavljena od  $M$  strojeva  $m_i$ ,  $i=1, 2, 3 \dots M$ , pri čemu je svakom stroju pridružena vjerojatnost pojave stanja {radi},  $p_i$ , i stanja {kvar},  $1-p_i$ . Između strojeva se nalazi  $M-1$  međuskладиšte,  $b_i$ ,  $i=1, 2, 3 \dots M-1$  s kapacitetom  $N_i$ ,  $i=1, 2, \dots M-1$ , gdje je  $N_i \in \mathbb{N}^0$ . Takva se serijska linija može prikazati nizom kružnica i pravokutnika koji predstavljaju pojedine strojeve, odnosno međuskладиšta. Pritom smjer strelica prikazuje smjer toka materijala [46].



Slika 3.1 Prikaz sheme opće serijske linije

Odziv Bernoullijeve proizvodne linije može se matematički opisati Markovljevim lancem u općenitom slučaju uz sljedeće pretpostavke [34]:

- Stanje svakog stroja ({radi} ili {kvar}) određeno je neovisno o stanju drugih strojeva linije.
- Vrijeme koje pojedini stroj provede u stanju {kvar} je višekratnik proizvodnog ciklusa
- Ciklus rada svih strojeva je jednak ili približno jednak
- Kvar pojedinog stroja se može javiti isključivo na početku ciklusa
- Prvi stroj linije nije nikada u praznom hodu (pretpostavka beskonačnog ulaznog skladišta)
- Zadnji stroj linije nije nikada u stanju blokade (pretpostavka beskonačnog izlaznog skladišta)
- Tijekom procesa nužno vrijedi zakon očuvanja mase, tj. materijal ulazi u proces isključivo na stroju  $m_1$ , a izlazi isključivo na stroju  $m_M$ .

Uvođenjem navedenih pretpostavki serijska linija se može matematički opisati kao ergodički Markovljev lanac, stoga je od velike važnosti definicija prostora stanja ovog problema.

### 3.1 Prostor stanja

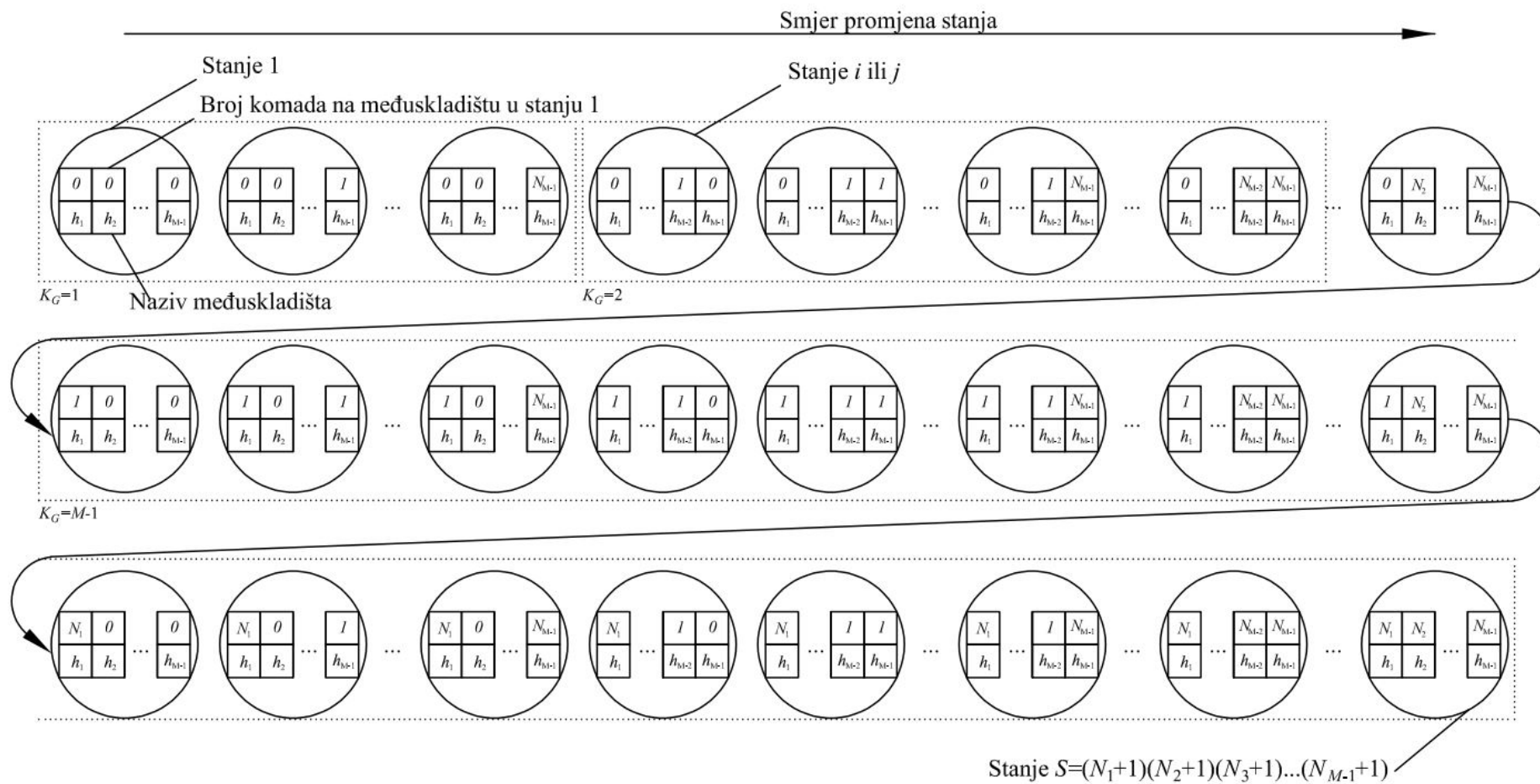
Prostor stanja  $S$ , je skup svih mogućih kombinacija stanja međuskladišta, čiji ukupni broj iznosi

$$S = (N_1 + 1)(N_2 + 1)(N_3 + 1) \dots (N_{M-1} + 1) = \prod_{i=1}^{M-1} (N_i + 1). \quad (3.1)$$

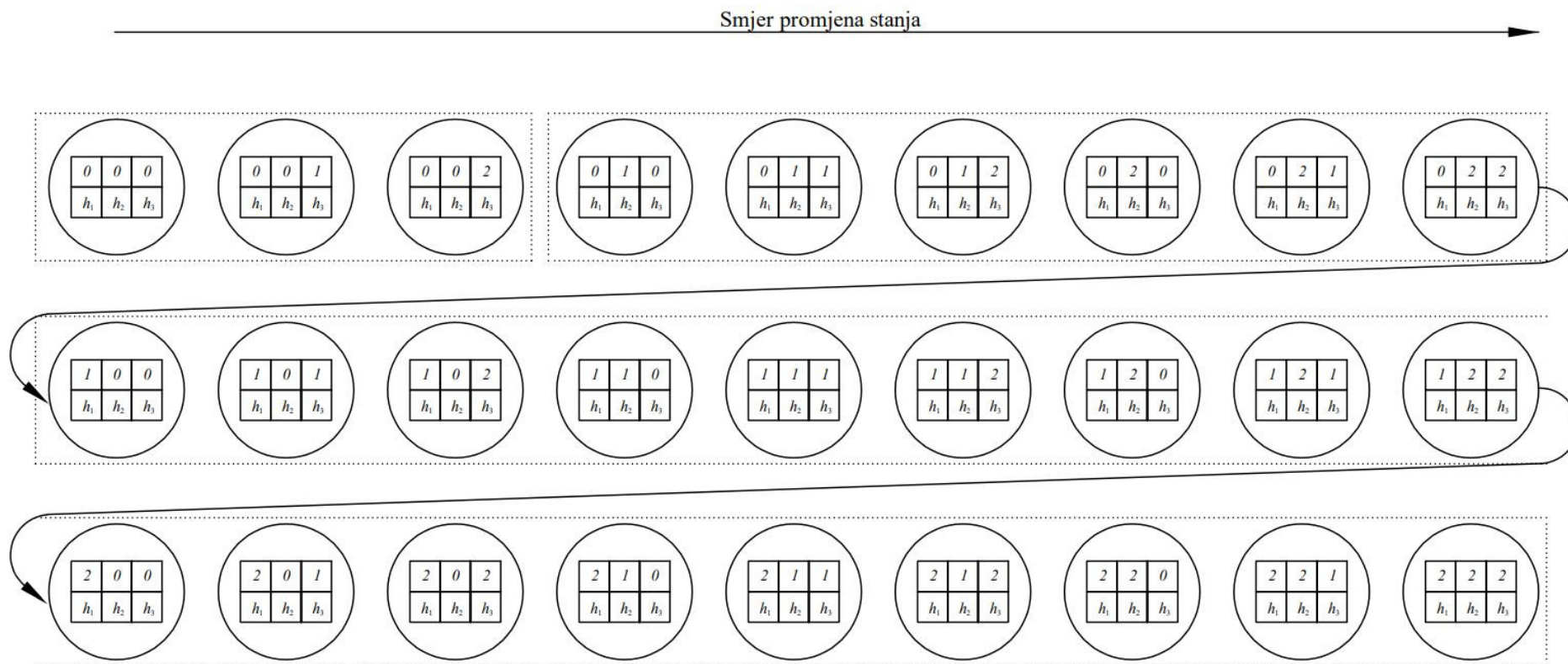
Iz navedenog proizlazi da ukupan broj međuskladišta,  $M-1$ , sa odgovarajućem kapacitetom  $N_i$ , eksponencijalno utječe na broj mogućih stanja.

Na slici 3.2 prikazana je konvencija o definiciji stanja na međuskladištima i njihovog redosljeda. Svaki krug predstavlja ukupni prostor stanja u jednom trenutku, a unutar kruga se nalazi informacija o popunjenosti pojedinih međuskladišta  $h_1, h_2, \dots, h_{M-1}$ . Isprekidani pravokutnici označavaju promjene stanja unutar jedne grupe kombinacija,  $K_G$ , a strelica pokazuje smjer promjene stanja. Grupa kombinacija,  $K_G$ , ima koliko i međuskladišta,  $K_G=M-1$ . Prema tome, prva grupa kombinacija,  $K_G=1$ , obuhvaća sve promjene na zadnjem međuskladištu,  $h_{M-1}$ , i kreće sa prvim stanjem u kojem su sva međuskladišta prazna,  $h_1=0, h_2=0, \dots, h_{M-1}=0$ . Drugo stanje poprima oblik  $h_1=0, h_2=0, \dots, h_{M-1}=1$ , a svako sljedeće stanje na međuskladištu  $h_{M-1}$  se povećava za jedan, sve do njegovog punog kapaciteta  $N_{M-1}$ ,  $h_1=0, h_2=0, \dots, h_{M-1}=N_{M-1}$ . Promjena stanja se nastavlja u drugoj grupi kombinacija,  $K_G=2$ , koja je vezana uz promjene na predzadnjem međuskladištu,  $h_{M-2}$ , tako za sljedeće stanje vrijedi  $h_1=0, \dots, h_{M-2}=1, h_{M-1}=0$ . Stanje na međuskladištu  $h_{M-2}$  se mijenja tek nakon što se prva grupa kombinacija  $K_G=1$  izmijenila na međuskladištu  $h_{M-1}$  i stanje poprima oblik  $h_1=0, \dots, h_{M-2}=1, h_{M-1}=N_{M-1}$ . Završni pravokutnik,  $K_G=M-1$ , je u jedno i zadnja grupa kombinacija koja nastavlja niz stanja sa stanjem:  $h_1=1, h_2=0, \dots, h_{M-1}=0$ . Stanje na međuskladištu  $h_1$  mijenja se tek kada se sve grupe kombinacija izmjene. Posljednje stanje poprima oblik  $h_1=N_1, \dots, h_{M-2}=N_{M-2}, h_{M-1}=N_{M-1}$  te time označava da su sva skladišta popunjena. Svakom stanju je potrebno odrediti vjerojatnost pojavljivanja što će se detaljno prikazati u nastavku ovog rada.

Na slici 3.3 je prikazan ilustrativni primjer sustava stanja za serijsku liniju koja se sastoji od četiri stroja i tri međuskladišta s istim kapacitetom  $N=2$ . Prema izrazu (3.1), prostor stanja obuhvaća 27 različitih kombinacija.



Slika 3.2 Prikaz prostora stanja

Slika 3.3 Prikaz prostora stanja na primjeru serijske linije  $M=4$  i  $N=2$

### 3.2 Analitičko rešenje i formulacija opće tranzicijske matrice

Prema izrazima prikazanim ranije u poglavlju 2.5.1 Diskretni Markovljevi lanci, analitičko rješenje problema se temelji na jednažbi ravnoteže,

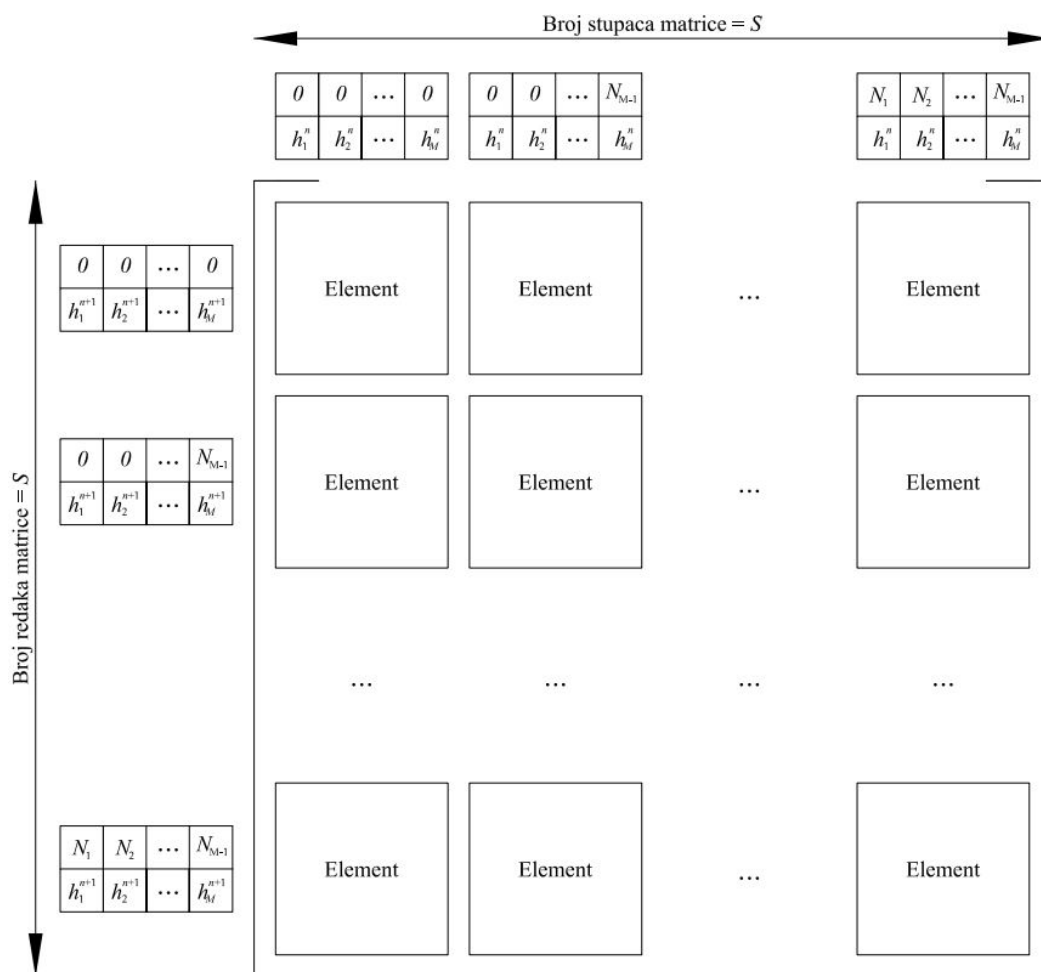
$$\pi_i = \sum_{j=1}^S P_{ij} \pi_j, \quad i = 1, 2, \dots, S, \quad (3.2)$$

gdje je

$$\sum_{i=1}^S \pi_i = 1, \quad (3.3)$$

a  $\pi_i$  i  $\pi_j$  vjerojatnosti da se sustav nalazi u stanju  $i$ , odnosno  $j$ .  $S$  je broj svih mogućih stanja, a  $P_{ij}$  je tranzicijska matrica.

Tranzicijska matrica je kvadratna stohastička matrica, čiji je broj redaka i stupaca određen brojem svih mogućih stanja  $S$ , slika 3.4.



Slika 3.4 Prikaz tranzicijske matrice i definicija elemenata prema prostoru stanja

Svaka tranzicijska matrica koja definira ergodičke procese može se opisati umnoškom novih stohastičkih matrica koje se još nazivaju i konstitutivnim matricama [46,72,73]. Stoga, primjenom separacije varijabli slijedi

$$[P(p_1, p_2, \dots, p_M)] = [P_1(p_1)][P_2(p_1)][P_3(p_3)] \dots [P_M(p_M)] = \prod_{i=1}^M [P_i(p_i)]. \quad (3.4)$$

Svaka konstitutivna matrica  $[P_i(p_i)]$  ima iste dimenzije kao i tranzicijska matrica, slika 3.4, te ovisi samo o vjerojatnosti pojave stanja  $\{radi\}$ ,  $p_i$ , promatranog stroja  $i$ . Elementi pojedine konstitutivne matrice određuju se na temelju odnosa stanja međuskладишта  $h_i$  u ciklusima  $n$  i  $n+1$  za cijeli skup  $S$ , te mogu poprimiti četiri vrijednosti:  $(1-p_i)$ ,  $p_i$ , 1 i 0. Pozicija svakog elementa konstitutivne matrice se definira kroz određene uvjete koje se mogu razlikovati za matrice: prvog stroja  $p_1$ , međustrojeva  $p_i$  i zadnjeg stroja u liniji  $p_M$ .

Stoga u slučaju opće Bernoullijeve serijske linije s proizvoljnim brojem strojeva,  $M$ , i međuskладиštima proizvoljnog kapaciteta,  $N_i$ , vrijede sljedeći uvjeti za popunjavanje prve konstitutivne matrice  $[P_1(p_1)]$ ,

$$[P_1(p_1)] = \begin{cases} 1 - p_1 & \text{ako } h_1^{n+1} = h_1^n, h_2^{n+1} = h_2^n, \dots, h_{M-1}^{n+1} = h_{M-1}^n, h_1^1 < N_1, \\ p_1 & \text{ako } h_1^{n+1} = h_1^n + 1, h_2^{n+1} = h_2^n, \dots, h_{M-1}^{n+1} = h_{M-1}^n, h_1^1 < N_1, \\ 1 & \text{ako } h_1^{n+1} = h_1^n, h_2^{n+1} = h_2^n, \dots, h_{M-1}^{n+1} = h_{M-1}^n, h_1^1 = N_1, \\ 0, & \text{ostalo.} \end{cases} \quad (3.5)$$

Slično, za strojeve  $m_i$ ,  $i=2, 3 \dots, M-1$  vrijedi

$$[P_i(p_i)] = \begin{cases} 1 - p_i & \text{ako } h_1^{n+1} = h_1^n, h_2^{n+1} = h_2^n, \dots, \\ & h_{M-1}^{n+1} = h_{M-1}^n, h_{i-1}^n > 0, h_i^n < N_i, \\ p_i & \text{ako } \dots, h_{i-2}^{n+1} = h_{i-2}^n, h_{i-1}^{n+1} = h_{i-1}^n - 1, h_i^{n+1} = h_i^n + 1, h_{i+1}^{n+1} = h_{i+1}^n, \dots, \\ & h_{M-1}^{n+1} = h_{M-1}^n, h_{i-1}^n > 0, h_i^n < N_i, \\ 1 & \text{ako } h_1^{n+1} = h_1^n, h_2^{n+1} = h_2^n, \dots, \\ & h_{M-1}^{n+1} = h_{M-1}^n, h_{i-1}^n = 0 \text{ or } h_i^n = N_i, \\ 0, & \text{ostalo.} \end{cases} \quad (3.6)$$

Konačno za stroj  $m_M$  vrijedi da je konstitutivna matrica jednaka

$$[P_M(p_M)] = \begin{cases} 1 - p_M & \text{ako } h_1^{n+1} = h_1^n, h_2^{n+1} = h_2^n, \dots, h_{M-1}^{n+1} = h_{M-1}^n, h_{M-1}^n > 0, \\ p_M & \text{ako } h_1^{n+1} = h_1^n, h_2^{n+1} = h_2^n, \dots, h_{M-2}^{n+1} = h_{M-2}^n, h_{M-1}^{n+1} = h_{M-1}^n - 1, h_{M-1}^n > 0, \\ 1 & \text{ako } h_1^{n+1} = h_1^n, h_2^{n+1} = h_2^n, \dots, h_{M-1}^{n+1} = h_{M-1}^n, h_{M-1}^n = 0, \\ 0, & \text{ostalo.} \end{cases} \quad (3.7)$$

Na temelju tako definirane tranzicijske matrice moguće je rješenjem problema svojstvenih vrijednosti, izraz (2.47), odrediti vektor distribucije vjerojatnosti  $\pi_i$ , kojim se izražava vjerojatnost da se parametri sustava nalaze u pojedinom stanju iz skupa  $S$ . Takav proračun je računalno vrlo zahtjevan te s određenim brojem stanja,  $S$ , vrijeme za izračunavanje prelazi u tjedne. Prema tome analitička metoda nije prikladna za svakodnevnu uporabu ali je izuzetno važna za validaciju poluanalitičkih metoda ili simulacijskih alata.

### 3.3 Metoda konačnih stanja

Metoda konačnih stanja (MKS) razvijena je kroz ovaj doktorski rad sa svrhom značajnog smanjenja proračunskog vremena i temelji se na proporcionalnosti stanja sustava. Proporcionalnost sustava se najbolje može uočiti na jednostavnom primjeru serijske linije sa tri stroja čija je pouzdanost  $p_1=0.5$ ,  $p_2=0.6$ , i  $p_3=0.7$  i dva međuskladišta kapaciteta  $N_1=N_2=10$ . Primjenom analitičkog pristupa može se odrediti svojstveni vektor,  $\langle \pi_{h_1 h_2} \rangle$  tj. vektor distribucije vjerojatnosti pojave pojedinog stanja sustava. Njegovim prikazom u stupčastom dijagramu do izražaja dolazi proporcionalnost elementa vektora, slika 3.5, odnosno uočavaju se geometrijske sličnosti u 11 blokova od kojih svaki obuhvaća 11 različitih stanja. Prvi blok se sastoji od sljedećih omjera,

$$\frac{\pi_{01}}{\pi_{00}}, \frac{\pi_{02}}{\pi_{00}}, \frac{\pi_{03}}{\pi_{00}}, \frac{\pi_{04}}{\pi_{00}}, \frac{\pi_{05}}{\pi_{00}}, \frac{\pi_{06}}{\pi_{00}}, \frac{\pi_{07}}{\pi_{00}}, \frac{\pi_{08}}{\pi_{00}}, \frac{\pi_{09}}{\pi_{00}}, \frac{\pi_{010}}{\pi_{00}}. \quad (3.8)$$

Slično za svaki naredni blok se mogu formirati sljedeći omjeri

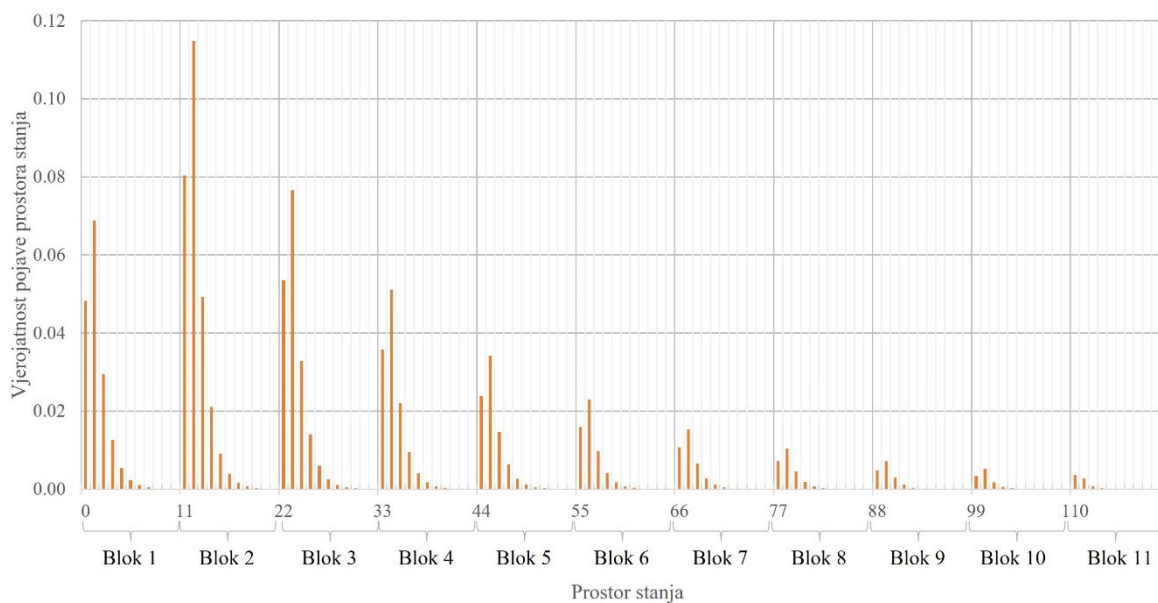
$$\begin{aligned} & \frac{\pi_{11}}{\pi_{10}}, \frac{\pi_{12}}{\pi_{10}}, \frac{\pi_{13}}{\pi_{10}}, \frac{\pi_{14}}{\pi_{10}}, \frac{\pi_{15}}{\pi_{10}}, \frac{\pi_{16}}{\pi_{10}}, \frac{\pi_{17}}{\pi_{10}}, \frac{\pi_{18}}{\pi_{10}}, \frac{\pi_{19}}{\pi_{10}}, \frac{\pi_{110}}{\pi_{10}} \\ & \vdots \\ & \frac{\pi_{51}}{\pi_{50}}, \frac{\pi_{52}}{\pi_{50}}, \frac{\pi_{53}}{\pi_{50}}, \frac{\pi_{54}}{\pi_{50}}, \frac{\pi_{55}}{\pi_{50}}, \frac{\pi_{56}}{\pi_{50}}, \frac{\pi_{57}}{\pi_{50}}, \frac{\pi_{58}}{\pi_{50}}, \frac{\pi_{59}}{\pi_{50}}, \frac{\pi_{510}}{\pi_{50}} \\ & \vdots \\ & \frac{\pi_{101}}{\pi_{100}}, \frac{\pi_{102}}{\pi_{100}}, \frac{\pi_{103}}{\pi_{100}}, \frac{\pi_{104}}{\pi_{100}}, \frac{\pi_{105}}{\pi_{100}}, \frac{\pi_{106}}{\pi_{100}}, \frac{\pi_{107}}{\pi_{100}}, \frac{\pi_{108}}{\pi_{100}}, \frac{\pi_{109}}{\pi_{100}}, \frac{\pi_{1010}}{\pi_{100}}. \end{aligned} \quad (3.9)$$



Pri tome se može uočiti da su pojedini omjeri približno isti,

$$\begin{aligned}
 \frac{\pi_{01}}{\pi_{00}} &\approx \frac{\pi_{11}}{\pi_{10}} \approx \frac{\pi_{21}}{\pi_{20}} \approx \frac{\pi_{31}}{\pi_{30}} \approx \frac{\pi_{41}}{\pi_{40}} \approx \frac{\pi_{51}}{\pi_{50}} \approx \frac{\pi_{61}}{\pi_{60}} \approx \frac{\pi_{71}}{\pi_{70}} \approx \frac{\pi_{81}}{\pi_{80}} \approx \frac{\pi_{91}}{\pi_{90}} \approx \frac{\pi_{101}}{\pi_{100}}, \\
 &\vdots \\
 \frac{\pi_{05}}{\pi_{00}} &\approx \frac{\pi_{15}}{\pi_{10}} \approx \frac{\pi_{25}}{\pi_{20}} \approx \frac{\pi_{35}}{\pi_{30}} \approx \frac{\pi_{45}}{\pi_{40}} \approx \frac{\pi_{55}}{\pi_{50}} \approx \frac{\pi_{65}}{\pi_{60}} \approx \frac{\pi_{75}}{\pi_{70}} \approx \frac{\pi_{85}}{\pi_{80}} \approx \frac{\pi_{95}}{\pi_{90}} \approx \frac{\pi_{105}}{\pi_{100}}, \\
 &\vdots \\
 \frac{\pi_{010}}{\pi_{00}} &\approx \frac{\pi_{110}}{\pi_{10}} \approx \frac{\pi_{210}}{\pi_{20}} \approx \frac{\pi_{310}}{\pi_{30}} \approx \frac{\pi_{410}}{\pi_{40}} \approx \frac{\pi_{510}}{\pi_{50}} \approx \frac{\pi_{610}}{\pi_{60}} \approx \frac{\pi_{710}}{\pi_{70}} \approx \frac{\pi_{810}}{\pi_{80}} \approx \frac{\pi_{910}}{\pi_{90}} \approx \frac{\pi_{1010}}{\pi_{100}}.
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

Manja odstupanja u proporcionalnosti mogu se zbog numeričke greške pojaviti u slučaju vjerojatnosti pojave stanja koja su najmanje izvjesna, što se može zanemariti kao veličina drugog ili trećeg reda.



Slika 3.5 Prikaz distribucije vjerojatnosti pojave stanja sustava za serijsku liniju ( $p_1=0.5$ ,  $p_2=0.6$ ,  $p_3=0.7$ ,  $N_1=N_2=10$ ) [48]

Nadalje, iz prikazanog svojstvenog vektora, slika 3.5, mogu se odrediti dodatni omjeri

$$\frac{\pi_{10}}{\pi_{00}}, \frac{\pi_{20}}{\pi_{00}}, \frac{\pi_{30}}{\pi_{00}}, \frac{\pi_{40}}{\pi_{00}}, \frac{\pi_{50}}{\pi_{00}}, \frac{\pi_{60}}{\pi_{00}}, \frac{\pi_{70}}{\pi_{00}}, \frac{\pi_{80}}{\pi_{00}}, \frac{\pi_{90}}{\pi_{00}}, \frac{\pi_{100}}{\pi_{00}}, \quad (3.11)$$

koji odgovaraju približno omjerima svojstvenog vektora  $\langle \pi^A \rangle$  jednostavne linije  $A$ , sa dva stroja čija je pouzdanost  $p_1=0.5$  i  $p_2=0.6$  i jednog međuskладиšta kapaciteta  $N=10$

$$\begin{aligned} \frac{\pi_{10}}{\pi_{00}} &\approx \frac{\pi_1^A}{\pi_0^A} \\ &\vdots \\ \frac{\pi_{50}}{\pi_{00}} &\approx \frac{\pi_5^A}{\pi_0^A} \\ &\vdots \\ \frac{\pi_{100}}{\pi_{00}} &\approx \frac{\pi_{10}^A}{\pi_0^A}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Ako se promatraju omjeri svojstvenog vektora  $\langle \pi^B \rangle$  jednostavne linije  $B$ , sa dva stroja čija je pouzdanost  $p_1=0.5$  i  $p_2=0.7$  i jednog međuskладиšta kapaciteta  $N=10$

$$\frac{\pi_1^B}{\pi_0^B}, \dots, \frac{\pi_5^B}{\pi_0^B}, \dots, \frac{\pi_{10}^B}{\pi_0^B}, \quad (3.13)$$

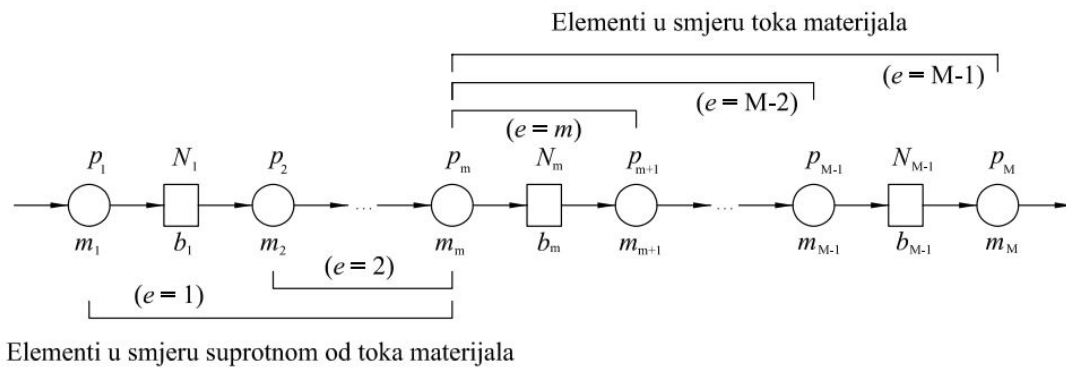
onda se uočava da su ti omjeri približno jednaki omjerima danim izrazom, (3.10)

$$\begin{aligned} \frac{\pi_1^B}{\pi_0^B} &\approx \frac{\pi_{01}}{\pi_{00}} \approx \frac{\pi_{11}}{\pi_{10}} \approx \frac{\pi_{21}}{\pi_{20}} \approx \frac{\pi_{31}}{\pi_{30}} \approx \frac{\pi_{41}}{\pi_{40}} \approx \frac{\pi_{51}}{\pi_{50}} \approx \frac{\pi_{61}}{\pi_{60}} \approx \frac{\pi_{71}}{\pi_{70}} \approx \frac{\pi_{81}}{\pi_{80}} \approx \frac{\pi_{91}}{\pi_{90}} \approx \frac{\pi_{101}}{\pi_{100}}, \\ &\vdots \\ \frac{\pi_5^B}{\pi_0^B} &\approx \frac{\pi_{05}}{\pi_{00}} \approx \frac{\pi_{15}}{\pi_{10}} \approx \frac{\pi_{25}}{\pi_{20}} \approx \frac{\pi_{35}}{\pi_{30}} \approx \frac{\pi_{45}}{\pi_{40}} \approx \frac{\pi_{55}}{\pi_{50}} \approx \frac{\pi_{65}}{\pi_{60}} \approx \frac{\pi_{75}}{\pi_{70}} \approx \frac{\pi_{85}}{\pi_{80}} \approx \frac{\pi_{95}}{\pi_{90}} \approx \frac{\pi_{105}}{\pi_{100}}, \\ &\vdots \\ \frac{\pi_{10}^B}{\pi_0^B} &\approx \frac{\pi_{010}}{\pi_{00}} \approx \frac{\pi_{110}}{\pi_{10}} \approx \frac{\pi_{210}}{\pi_{20}} \approx \frac{\pi_{310}}{\pi_{30}} \approx \frac{\pi_{410}}{\pi_{40}} \approx \frac{\pi_{510}}{\pi_{50}} \approx \frac{\pi_{610}}{\pi_{60}} \approx \frac{\pi_{710}}{\pi_{70}} \approx \frac{\pi_{810}}{\pi_{80}} \approx \frac{\pi_{910}}{\pi_{90}} \approx \frac{\pi_{1010}}{\pi_{100}}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Iz navedenog se može zaključiti da se svojstveni vektor serijske linije sa tri stroja može izraziti svojstvenim vektorima jednostavnih serijskih linija  $A$  i  $B$ , koje su sastavljene od dva stroja i jednog međuskладиšta. Određivanje tih jednostavnih linija, odnosno kreiranje takvih elemenata je temelj metode konačnih stanja (MKS), slika 3.6.

Sušтина MKS je diskretizacija prostora stanja sustava, odnosno formiranja niza particija na temelju svojstvenih vektora elemenata konačnih stanja. MKS stoga obuhvaća sljedeće korake, slika 3.5:

1. Odrediti najmanje pouzdan stroj
2. Formirati elemente konačnih stanja sastavljen od dva stroja i jednog međuskladišta u odnosu na najmanje pouzdan stroj
3. Analitičkom metodom odrediti svojstveni vektor  $\pi_e$  svakog elementa
4. Međusobno pomnožiti elemente svih svojstvenih vektora



Slika 3.6 Prikaz metode konačnih stanja

Najmanje pouzdan stroj u liniji,  $m_m$ , je stroj s najmanjom vjerojatnosti  $p_i$ , odnosno  $i$  je takav da vrijedi  $p_i = p_m = \min \{ p_1, p_2, \dots, p_M \}$ . Formiranje elementa konačnih stanja se odvija prema slici 3.6. Pritom se razlikuju elementi koji su u smjeru suprotnom od smjera toka materijala i elementi u smjeru toka materijala. Svaki element je sačinjen od dva stroja i pripadnog međuskladišta, pri čemu je jedan od strojeva stroj  $m_m$ . Svojstveni vektor ili takozvana stacionarna distribucija vjerojatnosti za element  $e$ ,  $e=1,2,\dots,M-1$  ima oblik

$$\left\langle \pi^{(e)} \right\rangle^T = \left\langle \pi_0^{(e)} \quad \pi_1^{(e)} \quad \pi_2^{(e)} \quad \dots \quad \pi_{N_e}^{(e)} \right\rangle^T = \left\langle \pi_{h_e}^{(e)} \right\rangle^T, \quad (3.15)$$

gdje je  $h_e$  stanje na međuskladištu,  $h_e=0,1,2,\dots,N_e$ , a  $N_e$  je kapacitet odgovarajućeg međuskladišta.

U slučaju elementa u smjeru suprotnom od smjera protoka materijala svojstveni vektor poprima oblik

$$\left\langle \pi^{(e)} \right\rangle^T = \pi_0^{(e)} \left\langle 1 \quad \frac{\alpha_e^1}{1-p_{e+1}} \quad \frac{\alpha_e^2}{1-p_{e-1}} \quad \dots \quad \frac{\alpha_e^{N_e}}{1-p_{e-1}} \right\rangle, \quad e=1,2,\dots,m-1, \quad (3.16)$$

gdje su  $\pi_0^{(e)} = \frac{(1-p_e)(1-\alpha_e)}{1-\frac{p_e}{p_m}\alpha_e^{N_e}}$ ,  $\alpha_e = \frac{p_e(1-p_m)}{p_m(1-p_e)}$ .

Slično, za elemente u smjeru protoka materijala svojstveni vektor poprima oblik

$$\langle \pi^{(e)} \rangle^T = \pi_0^{(e)} \left\langle 1 \quad \frac{\alpha_e^1}{1-p_{e+1}} \quad \frac{\alpha_e^2}{1-p_{e-1}} \quad \dots \quad \frac{\alpha_e^{N_e}}{1-p_{e-1}} \right\rangle, \quad e = m, m+1, \dots, M-1 \quad (3.17)$$

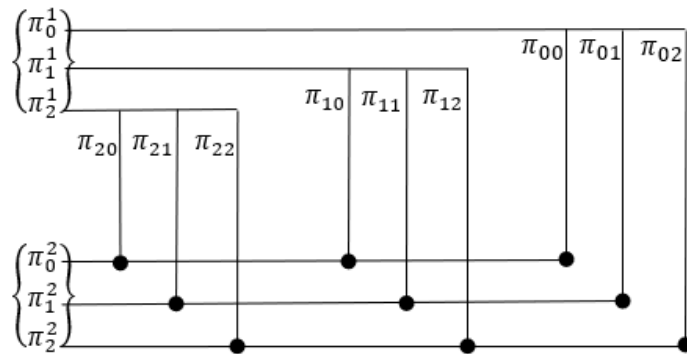
gdje su  $\pi_0^{(e)} = \frac{(1-p_m)(1-\alpha_e)}{1-\frac{p_m}{p_{e+1}}\alpha_e^{N_e}}$ ,  $\alpha_e = \frac{p_m(1-p_{e+1})}{p_{e+1}(1-p_m)}$ .

Navedeni izrazi (3.16) i (3.17) odgovaraju analitičkom rješenju za slučaj serijske linije s dva stroja i jednim međuskладиštem [34].

Budući da je događaj na svakom skladištu nezavisan događaj može se tvrditi da je vjerojatnost složenog događaja jednaka njihovom umnošku, stoga za opći slučaj vrijedi

$$\pi_{h_1 h_2 h_3 \dots h_{M-1}} = \pi_{h_1}^{(1)} \pi_{h_2}^{(2)} \pi_{h_3}^{(3)} \dots \pi_{h_{M-1}}^{(M-1)}. \quad (3.18)$$

Detaljan izvod izraza (3.18) prikazan je u prilogu A. Grafički prikaz formiranja svojstvenog vektora u slučaju linije s tri stroja i dva međuskладиšta prikazan je slikom 3.7.



Slika 3.7 Prikaz formiranja vektora distribucije vjerojatnosti na razini serijske linije

### 3.4 Ključne značajke za analitičko rješenje i metodu konačnih stanja

Ključne značajke ustaljenog odziva proizvoljne serijske linije se mogu opisati elementima svojstvenog vektora, koji obuhvaća vjerojatnosti da se sustav nalazi u nekom određenom stanju. Ključne značajke koje su od posebnog interesa za ovaj rad su očekivani broj gotovih proizvoda,

$PR$ , očekivani broj poluproizvoda na međuskладиštima,  $WIP$ , vjerojatnost blokade  $i$ -tog stroja,  $BL_i$  i vjerojatnost praznog hoda  $i$ -tog stroja,  $ST_i$ .

Ključna značajka očekivani broj gotovih proizvoda,  $PR$ , određena je presjekom događaja

$$PR = P[\{m_M \text{ radi}\} \cap \{b_{M-1} \text{ nije prazan}\}] = p_M \left( 1 - \sum_{h_1=0}^{N_1} \sum_{h_2=0}^{N_2} \dots \sum_{h_{M-1}=0}^{N_{M-1}} P_{h_1 h_2 h_3 \dots h_{M-1}} \right), \quad (3.19)$$

gdje je  $P_{h_1 h_2 h_3 \dots h_{M-1}}$  vjerojatnost stacionarnog stanja  $h_1 h_2 h_3 \dots h_{M-1}$ .

Ključna značajka očekivani broj poluproizvoda na  $i$ -tom međuskладиštu,  $WIP_i$ , se određuje množenjem broja poluproizvoda s odgovarajućom vjerojatnosti, te sumom svih njihovih mogućih kombinacija [46,71]. Na taj način  $WIP_i$  poprima vrijednosti

$$WIP_i = \sum_{h_1=0}^{N_1} \sum_{h_2=0}^{N_2} \dots \sum_{h_{M-1}=0}^{N_{M-1}} h_i P_{h_1 h_2 h_3 \dots h_{M-1}}, \quad (3.20)$$

a sumiranjem izraza (3.20) slijedi ukupni  $WIP$

$$WIP = \sum_{i=1}^{M-1} WIP_i. \quad (3.21)$$

Ključna značajka vjerojatnosti blokade  $i$ -tog stroja  $BL_i$  za strojeve  $m_i, i=1,2,\dots,M-1$  glasi,

$$BL_i = P[\{m_i \text{ radi}\} \cap \{b_i \text{ pun}\} \cap \{m_{i+1} \text{ kvar}\} \cup \{m_i \text{ radi}\} \cap \{b_i \text{ pun}\} \cap \{b_{i+1} \text{ blokiran}\}] =$$

$$p_i \sum_{h_1=0}^{N_1} \sum_{h_2=0}^{N_2} \dots \sum_{h_{M-1}=0}^{N_{M-1}} P_{h_1 h_2 h_3 \dots (h_i=N_i) \dots h_{M-1}} (1 - p_{i+1} + BL_{i+1}), \quad i = 1, 2, \dots, M-2. \quad (3.22)$$

Budući da vrijedi  $BL_M=0$ , izraz (3.22) se za  $M-1$  stroj može pojednostaviti u oblik

$$BL_{M-1} = P[\{m_{M-1} \text{ radi}\} \cap \{b_{M-1} \text{ pun}\} \cap \{m_M \text{ kvar}\}] =$$

$$p_{M-1} (1 - p_M) \sum_{h_1=0}^{N_1} \sum_{h_2=0}^{N_2} \dots \sum_{h_{M-2}=0}^{N_{M-2}} P_{h_1 h_2 h_3 \dots h_{M-2} (h_{M-1}=N_{M-1})}. \quad (3.23)$$

Ključna značajka vjerojatnosti praznog hoda stroja  $ST_i$  za strojeve  $m_i, i=2,3,\dots,M$  glasi,

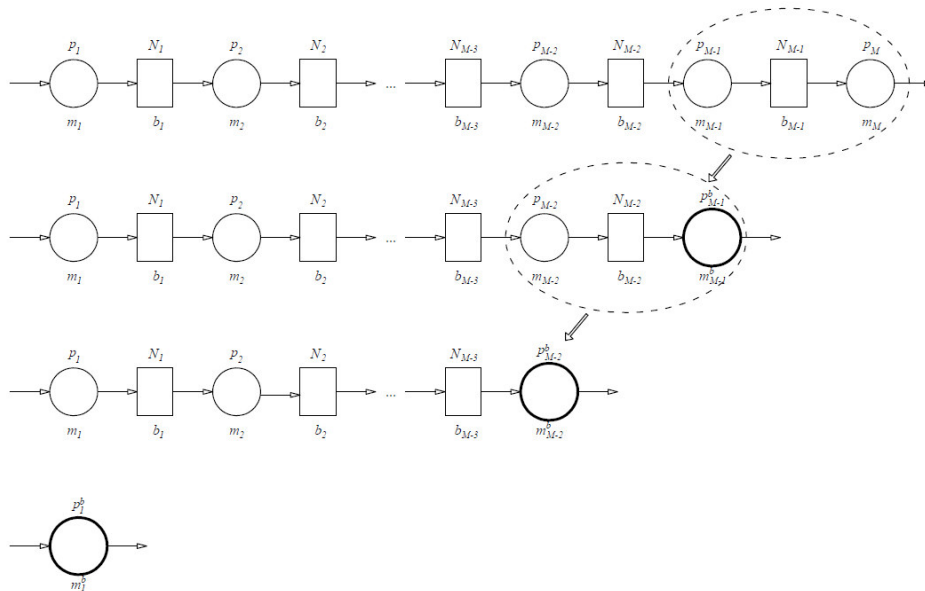
$$ST_i = P[\{b_{i-1} \text{ prazno}\} \cap \{m_i \text{ radi}\}] = p_i \sum_{h_1=0}^{N_1} \sum_{h_2=0}^{N_2} \dots \sum_{h_{M-1}=0}^{N_{M-1}} P_{h_1 h_2 h_3 \dots (h_{i-1}=0) \dots h_{M-1}}, \quad i = 2, 3, \dots, M. \quad (3.24)$$

### 3.5 Metoda agregacije

Metoda agregacije (AGG) se kao poluanaliitička metoda temelji na postupnom sprezanju cjelokupne linije u jedan stroj, što se može svesti na tri koraka:

1. Sprezanje serijske linije s kraja
2. Sprezanje serijske linije s početka
3. Ponavljanje oba koraka do postizanja odgovarajuće konvergencije rezultata

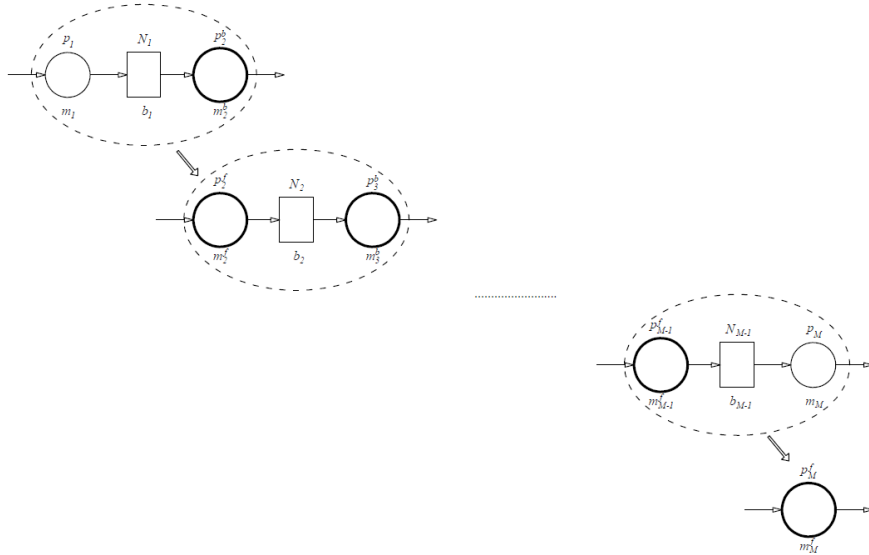
U prvom se koraku zadnja dva stroja  $m_M, m_{M-1}$  i međuskladište  $b_{M-1}$  sprežu u novi virtualni stroj  $m_{M-1}^b$ , gdje  $b$  (*backward*) označava sprezanje s kraja, slika 3.8. Vjerojatnosti pojave stanja  $\{radi\}$  novog virtualnog stroja  $p_{M-1}^b$ , je jednaka očekivanom broju gotovih proizvoda,  $PR$ , u slučaju linije s dva stroja i jednim međuskladištem [34]. U sljedećem međukoraku se taj virtualni stroj  $m_{M-1}^b$  spreže sa strojem  $m_{M-2}$  i međuskladištem  $b_{M-2}$  u novi virtualni stroj  $m_{M-2}^b$ . Vjerojatnosti rada tog novog virtualnog stroja  $p_{M-2}^b$  se određuje također putem očekivanog broja gotovih proizvoda. Ti međukoraci se primjenjuju tako dugo dok cijela linija nije spregnuta u jedan virtualni stroj  $m_1^b$  s vjerojatnošću rada  $p_1^b$ , slika 3.8.



Slika 3.8 Sprezanje s kraja [34]

Nakon toga slijedi drugi korak u kojem se strojevi sprežu s početka uzimajući prvi stroj  $m_1$ , spregnuti ostatak linije  $m_2^b$  i međuskladište  $b_1$  kako bi se napravio novi virtualni stroj  $m_2^f$ , gdje  $f$  (*forward*) označava sprezanje s početka linije, slika 3.9. Vjerojatnost rada tog virtualnog

stroja  $p_2^f$ , je jednaka očekivanom broju gotovih proizvoda,  $PR$ , za liniju s dva stroja i jednim međuskладиštem. Takvo sprezanje se ponavlja sve dok cijela linija nije spregnuta u jedan stroj  $m_M^f$  s vjerojatnošću rada  $p_M^f$ . Koraci jedan i dva se ponavljaju sve dok vrijednosti  $p_1^b$  i  $p_M^f$  ne konvergiraju k približno jednakoj vrijednosti.



Slika 3.9 Sprezanje s početka [34]

Budući da metoda agregacije ne rezultira svojstvenim vektorom ustaljenog odziva, ključne značajke se ne mogu odrediti izrazima (3.12) - (3.17), već je potrebno upotrijebiti specifične izraze. Stoga, prema [34], za očekivani broj gotovi proizvoda,  $PR$ , vrijedi

$$PR = p_i^f [1 - Q(p_{i+1}^b, p_i^f, N_i)], \quad i = 1, 2, \dots, M - 1, \quad (3.25)$$

gdje je

$$Q(p_{i+1}^b, p_i^f, N_i) = \begin{cases} \frac{(1 - p_{i+1}^b)(1 - \alpha)}{1 - \frac{p_{i+1}^b}{p_i^f} \alpha^{N_i}}, & \text{if } p_{i+1}^b \neq p_i^f, \\ \frac{1 - p_{i+1}^b}{N_i + 1 - p_{i+1}^b}, & \text{if } p_{i+1}^b = p_i^f, \end{cases} \quad (3.26)$$

$$\alpha = \frac{p_{i+1}^b (1 - p_i^f)}{p_i^f (1 - p_{i+1}^b)}. \quad (3.27)$$

Slično, očekivani broj poluproizvoda na  $i$ -tom međuskladištu,  $WIP_i$ , je jednak

$$WIP_i = \begin{cases} \frac{p_i^f}{p_{i+1}^b - p_i^f \alpha^{N_i}} \left[ \frac{1 - \alpha^{N_i}}{1 - \alpha} - N_i \alpha^{N_i} \right], & \text{if } p_{i+1}^b \neq p_i^f, \\ \frac{N_i(N_i + 1)}{2(N_i + 1 - p_i^f)}, & \text{if } p_{i+1}^b = p_i^f, \end{cases} \quad (3.28)$$

dok su vjerojatnosti blokade stroja  $BL_i$  i vjerojatnosti praznog hoda stroja  $ST_i$  za strojeve  $m_i$  jednaki

$$BL_i = p_i Q(p_{i+1}^b, p_i^f, N_i), \quad i = 1, 2, \dots, M - 1. \quad (3.29)$$

$$ST_i = p_i Q(p_{i+1}^b, p_i^f, N_i), \quad i = 2, 3, \dots, M. \quad (3.30)$$

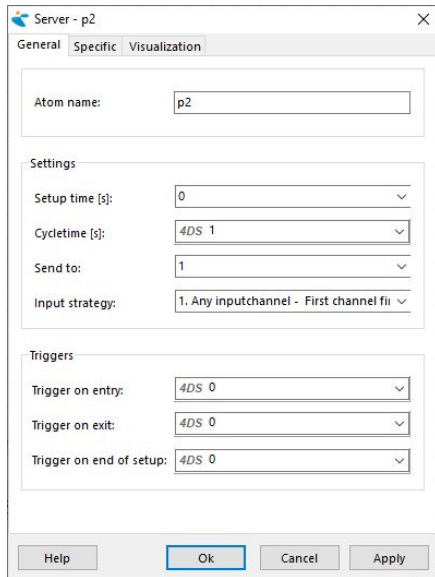
### 3.6 Simulacija

Simulacija proizvodnih procesa se temelji na diskretnim događajima koji su poredani i povezani, te opisuju stvarni proces. U ovom poglavlju doktorskog rada koristiti će se programski alat Enterprise Dynamics 10.3, za potrebe modeliranja serijskih proizvodnih linija kako bi se dobivene vrijednosti mogle usporediti s odgovarajućim vrijednostima određenim analitičkim pristupom [74,75].

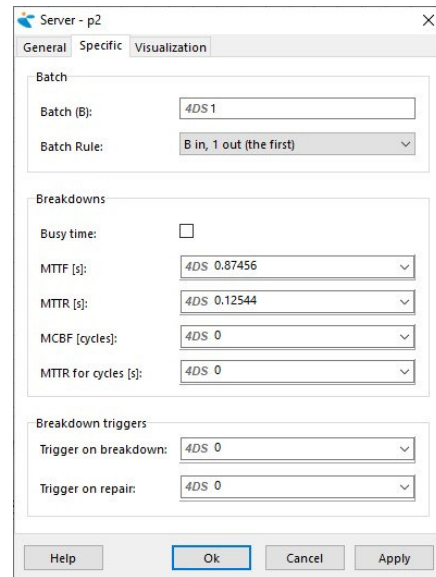
Programski paket Enterprise Dynamics raspolaže širokim spektrom elementa poput strojeva, dizalica, dizaličara, redova čekanja, skladišta, itd., koji se nazivaju atomi. Za modeliranje serijskih linija, poput one prikazane slikom 3.1, dovoljne su četiri različite vrste atoma: izvor (*source*), stroj (*server*), red (*queue*) i ponor (*sink*) [76]. Atom izvor se koristi za generiranje broja komada koji u jednom ciklusu ulaze u proizvodnu liniju. Atom stroj definira generalne i specifične podatke pojedinog stroja. U kartici “*General*“, slika 3.10 (a), se definira setup time i cycle time za svaki stroj, a u kartici “*Specific*“, slika 3.10 (b), se unose podaci vjerojatnost stanja {radi} putem značajke „srednje vrijeme do kvara“ (MTTF – *Mean Time to failure*), a vjerojatnost da stroj {ne radi} putem značajke „srednje vrijeme popravaka“ (MTTR – *Mean time to repair*). Budući da je riječ o Bernoullijevoj serijskoj liniji, značajka MTTF poprima vrijednost  $pT$  a značajka MTTR vrijednost  $(1-p)T$ , gdje je  $T$  vrijeme ciklusa. Atom red se koristi za prikaz međuskladišta gdje se značajka kapaciteta podešava na odgovarajući najveći iznos. Atom ponor služi prebrojavanju svih proizvoda koji izlaze iz linije te na taj način predstavlja ukupni protok materijala. Jedan primjer proizvodne linije sastavljene od četiri stroja



i tri međuskладиšta je prikazan na slici 3.11 a na slici 3.12 je prikazana povezanost između atoma.

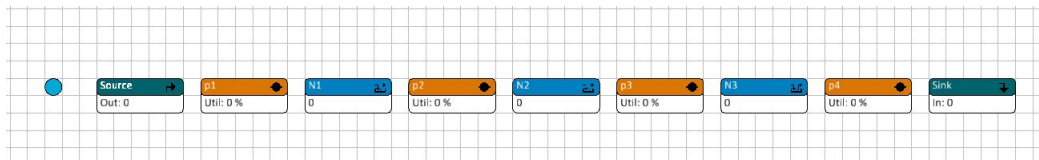


(a)

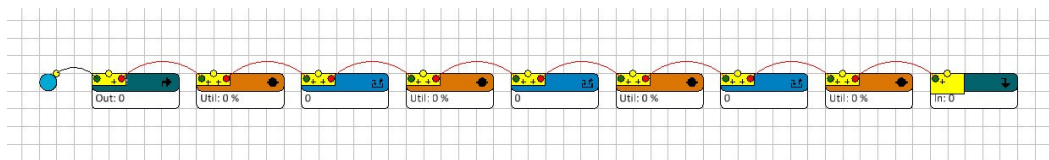


(b)

Slika 3.10 Sučelje za unos ulaznih podataka za (a) značajke *setup time* i *cycle time* i (b) značajke MTTF i MTTR [75]



Slika 3.11 Simulacijski model serijske linije sa četiri stroja i tri međuskладиšta [75]



Slika 3.12 Simulacijski model serijske linije sa četiri stroja i tri međuskладиšta, i povezani atomi [75]

### 3.7 Teoretski primjeri

U ovom poglavlju će se na teoretskim primjerima provesti usporedba i validacija prethodno opisanih metoda, odnosno prikazat će se usporedba rezultata dobivenih metodom konačnih stanja, metodom agregacije i simulacijom s odgovarajućim vrijednostima određenim analitičkim rješenjem. Teoretski primjeri su podijeljeni u sedam skupina serijskih linija od 3 do 9 strojeva, a pojedina skupina čini 200 različito konfiguriranih serijskih linija, što čini bazu od 1400 različitih slučajeva. Linije koje obuhvaćaju više od 9 strojeva nisu uzete u obzir radi dugotrajnog proračunskog vremena vezanog uz analitičko rješenje. Takvo ograničenje, međutim, ne utječe na valjanost usporedbe jer je za validaciju mjerodavna veličina prostora stanja koji uz ukupni broj međuskladišta ovisi i o njihovim kapacitetima, izraz (3.1). Stoga se odgovarajući prostor stanja može zadati linijom s malim brojem strojeva i međuskladištima velikog kapaciteta kao i s velikom brojem strojeva i međuskladišta malog kapaciteta.

Ulazni parametri su za svaku liniju određeni pomoću generatora slučajnih brojeva u rasponu  $p_i = \text{rand}(0.5, 1)$  i  $N_i = \text{rand}(1, 10)$ . Pomoću računalnog programa ShipProLab, koji je razvijen u okviru projekta ANTYARD, određene su ključne značajke koristeći prethodno prikazane izraze. Radi velikog obujma podataka u ovom su radu prikazane samo tablice 3.1 i 3.2 s prikazom srednje vrijednosti  $\mu$ , standardne devijacije  $\sigma$  i varijance  $\sigma^2$  relativnog odstupanja svake metode u odnosu na referentnu analitičku metodu. Detaljan prikaz svih ključnih značajki dostupan je u [75]. Srednja vrijednost  $\mu_{PR}^{AGG}$  relativnog odstupanja ključne značajke očekivanog broja gotovih proizvoda ( $PR$ ) određuje se pomoću izraza,

$$\mu_{PR}^{AGG} = \frac{\sum_{i=1}^{NL} (PR_{A,i} - PR_{AGG,i})}{NL}, \quad (3.31)$$

gdje su  $PR_A$  i  $PR_{AGG}$  očekivani broj gotovih proizvoda određeni analitičkom metodom (A) i metodom agregacije (AGG), a  $NL$  je ukupan broj razmatranih linija koji u svakom slučaju iznosi 200. Sličnim izrazima određene su i standardna devijacija i varijanca relativnog odstupanja, odnosno

$$\sigma_{PR}^{AGG} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{NL} [(PR_{A,i} - PR_{AGG,i}) - \mu_{PR}^{AGG}]^2}{NL}}, \quad (3.32)$$

$$(\sigma_{PR}^{AGG})^2 = \frac{\sum_{i=1}^{NL} [(PR_{A,i} - PR_{AGG,i}) - \mu_{PR}^{AGG}]^2}{NL}.$$

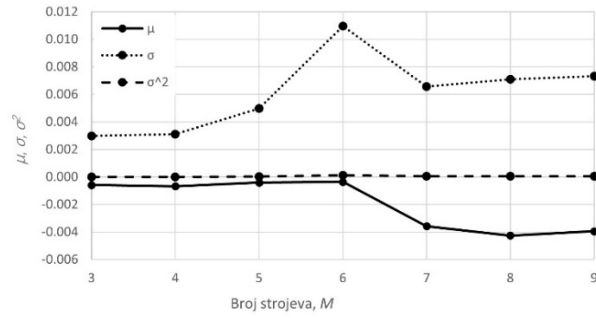
U tablicama 3.1 i 3.2, te na slikama 3.9 – 3.12 su prikazane srednja vrijednost, standardna devijacija i varijanca relativnog odstupanja ključnih značajki očekivanog broja gotovih proizvoda,  $PR$ , očekivanog broja poluproizvoda na međuskladištima,  $WIP$ , vjerojatnosti blokade strojeva.  $BL$  i vjerojatnosti praznog hoda strojeva,  $ST$ , u ovisnosti o duljini proizvodne linije, tj. broju strojeva  $M$  u svakoj liniji. Na slikama 3.13 do 3.19 su prikazana relativna odstupanja  $PR$  i  $WIP$  u ovisnosti o prostoru stanja.

Tablica 3.1 Metoda Agregacije: srednja vrijednost, standardna devijacija i varijanca relativnog odstupanja u odnosu na analitičku metodu [75]

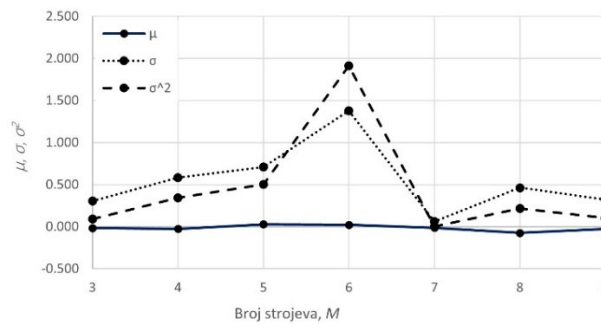
		<i>PR</i>	<i>WIP</i>	<i>BL</i> <sub>1</sub>	<i>BL</i> <sub>2</sub>	<i>BL</i> <sub>3</sub>	<i>BL</i> <sub>4</sub>	<i>BL</i> <sub>5</sub>	<i>BL</i> <sub>6</sub>	<i>BL</i> <sub>7</sub>	<i>BL</i> <sub>8</sub>	<i>ST</i> <sub>2</sub>	<i>ST</i> <sub>3</sub>	<i>ST</i> <sub>4</sub>	<i>ST</i> <sub>5</sub>	<i>ST</i> <sub>6</sub>	<i>ST</i> <sub>7</sub>	<i>ST</i> <sub>8</sub>	<i>ST</i> <sub>9</sub>		
Broj strojeva	3	$\mu$	-0.001	-0.016	0.000	0.000							0.000	0.001							
		$\sigma$	0.003	0.304	0.003	0.012							0.011	0.003							
		$\sigma^2$	0.000	0.093	0.000	0.000							0.000	0.000							
	4	$\mu$	-0.001	-0.026	0.000	-0.001	-0.001						0.000	0.001	0.001						
		$\sigma$	0.003	0.583	0.004	0.014	0.013						0.014	0.013	0.003						
		$\sigma^2$	0.000	0.341	0.000	0.000	0.000						0.000	0.000	0.000						
	5	$\mu$	0.000	0.030	0.001	0.000	-0.001	0.001					0.000	0.001	-0.002	0.000					
		$\sigma$	0.005	0.709	0.005	0.014	0.016	0.015					0.012	0.016	0.018	0.005					
		$\sigma^2$	0.000	0.505	0.000	0.000	0.000	0.000					0.000	0.000	0.000	0.000					
	6	$\mu$	0.000	0.022	0.000	-0.003	-0.003	0.000	0.003				0.001	0.002	-0.001	-0.003	0.000				
		$\sigma$	0.011	1.379	0.006	0.026	0.024	0.016	0.022				0.021	0.026	0.019	0.027	0.011				
		$\sigma^2$	0.000	1.912	0.000	0.001	0.001	0.000	0.000				0.000	0.001	0.000	0.001	0.000				
	7	$\mu$	-0.004	-0.014	0.033	0.002	-0.001	-0.001	-0.001	0.001			0.001	0.000	0.001	-0.001	0.000	0.000			
		$\sigma$	0.007	0.061	0.503	0.007	0.013	0.025	0.023	0.017			0.017	0.010	0.008	0.020	0.024	0.023			
		$\sigma^2$	0.000	0.004	0.254	0.000	0.000	0.001	0.001	0.000			0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.001			
	8	$\mu$	-0.004	-0.074	0.002	-0.002	-0.004	-0.003	-0.002	-0.002	-0.001		0.001	0.002	0.002	0.002	0.003	0.003	0.004		
		$\sigma$	0.007	0.463	0.007	0.019	0.025	0.024	0.018	0.015	0.009		0.009	0.020	0.025	0.020	0.019	0.014	0.007		
		$\sigma^2$	0.000	0.216	0.000	0.000	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000		0.000	0.000	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000		
	9	$\mu$	-0.004	-0.025	0.002	-0.002	-0.005	-0.004	-0.003	-0.001	0.000	-0.001	0.000	0.002	0.003	0.001	0.001	0.001	0.003	0.004	
		$\sigma$	0.007	0.323	0.008	0.013	0.024	0.019	0.018	0.014	0.012	0.004	0.005	0.014	0.022	0.022	0.022	0.019	0.010	0.007	
		$\sigma^2$	0.000	0.105	0.000	0.000	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

Tablica 3.2 MKS: srednja vrijednost, standardna devijacija i varijanca relativnog odstupanja u odnosu na analitičku metodu [75]

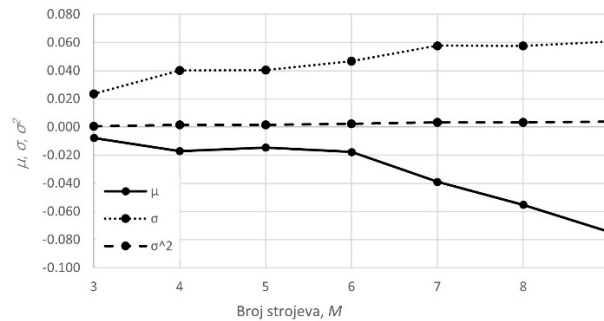
		<i>PR</i>	<i>WIP</i>	<i>BL<sub>1</sub></i>	<i>BL<sub>2</sub></i>	<i>BL<sub>3</sub></i>	<i>BL<sub>4</sub></i>	<i>BL<sub>5</sub></i>	<i>BL<sub>6</sub></i>	<i>BL<sub>7</sub></i>	<i>BL<sub>8</sub></i>	<i>ST<sub>2</sub></i>	<i>ST<sub>3</sub></i>	<i>ST<sub>4</sub></i>	<i>ST<sub>5</sub></i>	<i>ST<sub>6</sub></i>	<i>ST<sub>7</sub></i>	<i>ST<sub>8</sub></i>	<i>ST<sub>9</sub></i>	
Broj strojeva	3	$\mu$	-0.008	0.014	0.004	-0.004							-0.004	0.008						
		$\sigma$	0.024	0.630	0.020	0.031							0.026	0.024						
		$\sigma^2$	0.001	0.398	0.000	0.001							0.001	0.001						
	4	$\mu$	-0.017	-0.163	0.001	-0.008	-0.006							-0.004	0.007	0.017				
		$\sigma$	0.040	1.576	0.034	0.053	0.031						0.037	0.044	0.040					
		$\sigma^2$	0.002	2.498	0.001	0.003	0.001						0.001	0.002	0.002					
	5	$\mu$	-0.015	-0.120	0.009	-0.003	-0.003	-0.007						-0.002	-0.001	0.003	0.015			
		$\sigma$	0.040	1.859	0.037	0.049	0.040	0.034					0.027	0.039	0.056	0.040				
		$\sigma^2$	0.002	3.472	0.001	0.002	0.002	0.001					0.001	0.002	0.003	0.002				
	6	$\mu$	-0.018	0.264	0.005	-0.006	-0.001	0.001	0.000					-0.007	-0.002	0.001	0.002	0.018		
		$\sigma$	0.047	2.696	0.039	0.057	0.056	0.060	0.040				0.040	0.051	0.063	0.069	0.047			
		$\sigma^2$	0.002	7.303	0.002	0.003	0.003	0.004	0.002				0.002	0.003	0.004	0.005	0.002			
	7	$\mu$	-0.039	0.105	0.019	0.008	0.003	0.003	-0.004	-0.006				-0.015	-0.005	0.000	0.009	0.014	0.039	
		$\sigma$	0.058	2.224	0.051	0.089	0.097	0.083	0.081	0.034			0.049	0.070	0.091	0.100	0.085	0.058		
		$\sigma^2$	0.003	4.969	0.003	0.008	0.009	0.007	0.007	0.001			0.002	0.005	0.008	0.010	0.007	0.003		
	8	$\mu$	-0.055	0.157	0.024	0.011	0.006	0.008	0.001	-0.001	-0.006			-0.017	-0.006	-0.003	-0.003	0.005	0.020	0.055
		$\sigma$	0.058	2.046	0.055	0.090	0.096	0.088	0.088	0.070	0.028			0.054	0.074	0.087	0.098	0.093	0.076	0.058
		$\sigma^2$	0.003	4.208	0.003	0.008	0.009	0.008	0.008	0.005	0.001			0.003	0.006	0.008	0.010	0.009	0.006	0.003
	9	$\mu$	-0.074	0.026	0.031	0.012	0.012	0.006	-0.003	-0.006	-0.011	-0.016	-0.021	-0.009	-0.004	-0.001	0.008	0.017	0.042	0.074
		$\sigma$	0.061	1.698	0.051	0.072	0.099	0.112	0.107	0.089	0.056	0.039	0.046	0.070	0.094	0.103	0.107	0.090	0.081	0.061
		$\sigma^2$	0.004	2.899	0.003	0.005	0.010	0.013	0.011	0.008	0.003	0.002	0.002	0.005	0.009	0.011	0.011	0.008	0.007	0.004



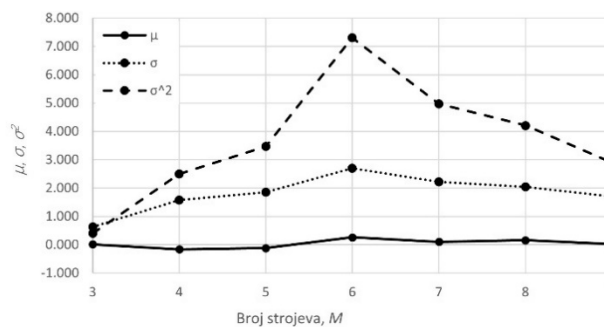
Slika 3.13 Relativna greška *PR* ovisno o broju strojeva – AGG metoda [75]



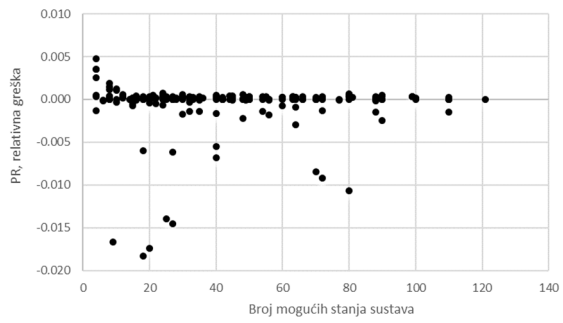
Slika 3.14 Relativna greška *WIP* ovisno o broju strojeva – AGG metoda [75]



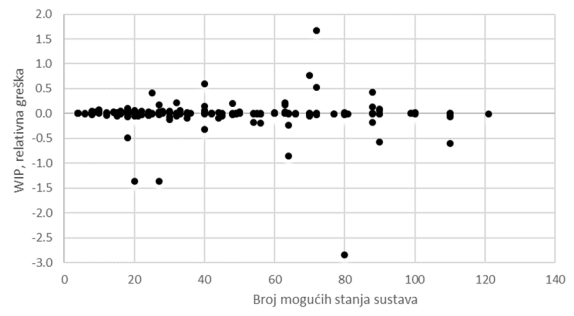
Slika 3.15 Relativna greška *PR* ovisno o broju strojeva – MKS metoda [75]



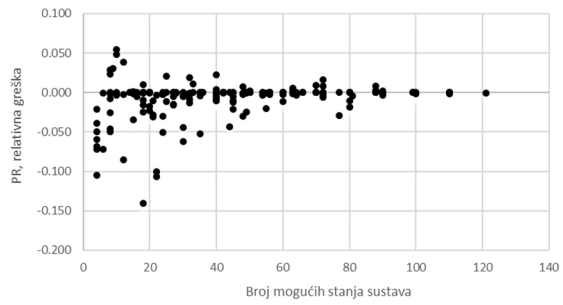
Slika 3.16 Relativna greška *WIP* ovisno o broju strojeva – MKS metoda [75]



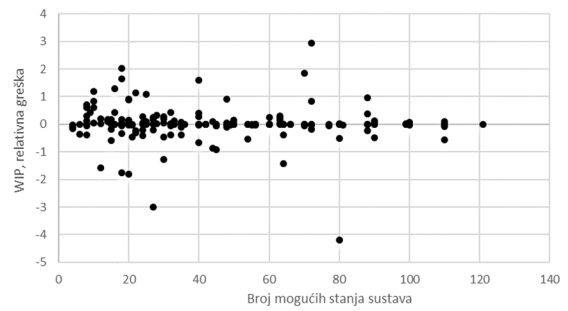
(a)



(b)

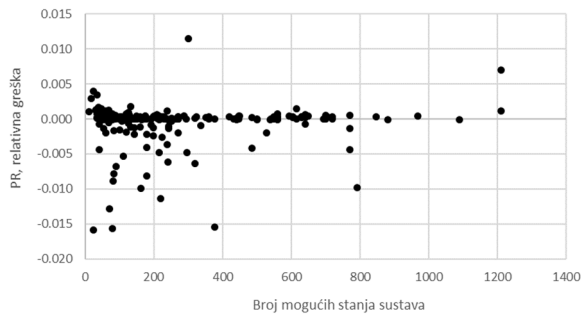


(c)

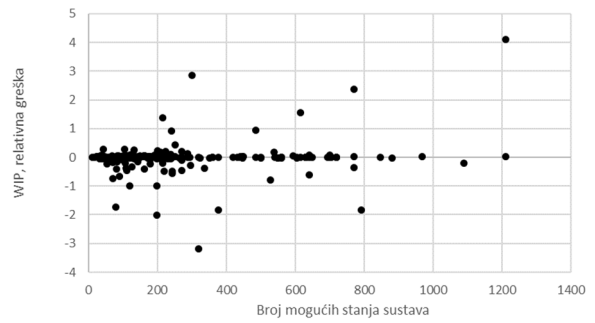


(d)

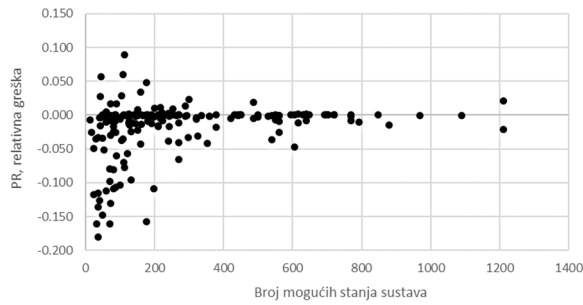
Slika 3.17  $M = 3$ , relativna odstupanja koristeći (a,b) AGG metodu i (c,d) MKS [75]



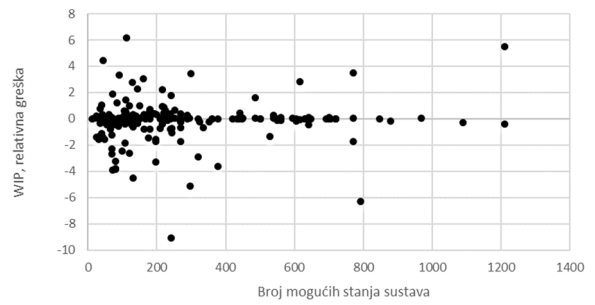
(a)



(b)

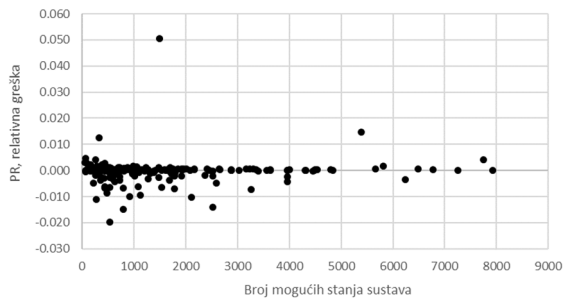


(c)

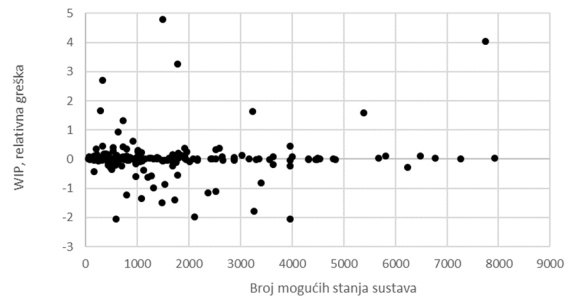


(d)

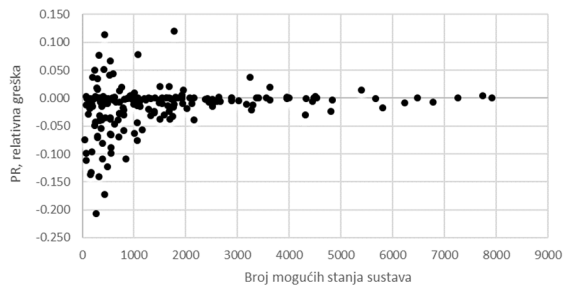
Slika 3.18  $M = 4$ , relativna odstupanja koristeći (a,b) AGG metodu i (c,d) MKS [75]



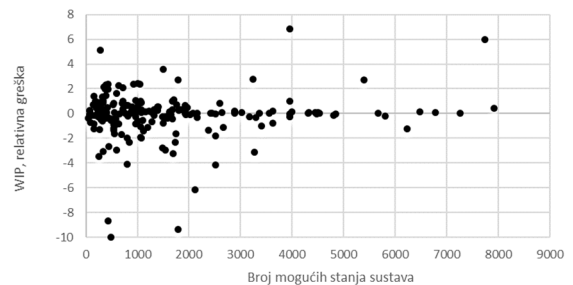
(a)



(b)



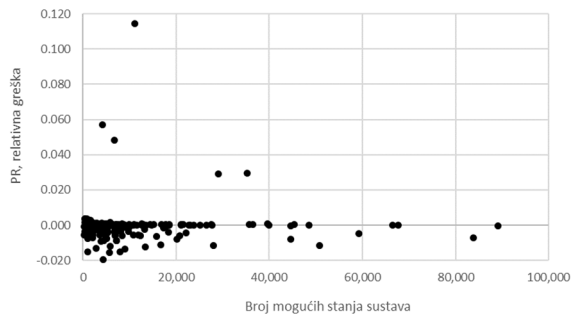
(c)



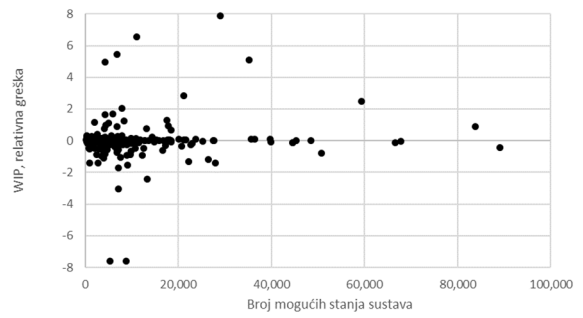
(d)

Slika 3.19  $M = 5$ , relativna odstupanja koristeći (a,b) AGG metodu i (c,d) MKS [75]

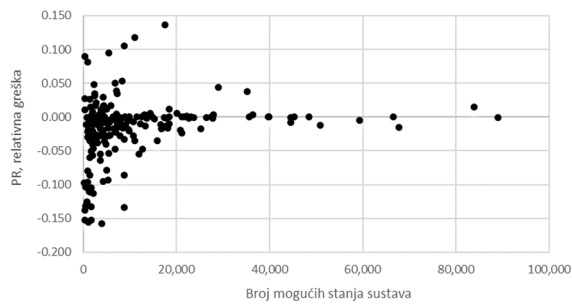




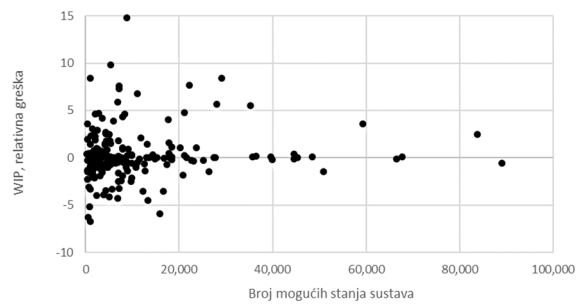
(a)



(b)



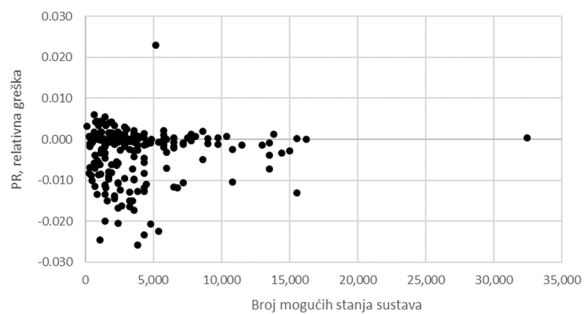
(c)



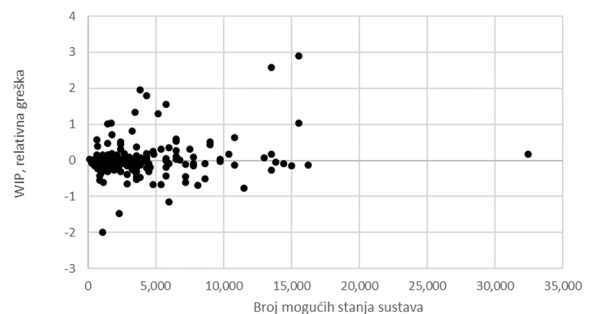
(d)

Slika 3.20  $M = 6$ , relativna odstupanja koristeći (a,b) AGG metodu i (c,d)

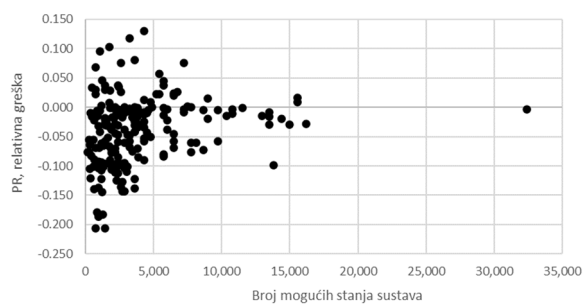
MKS [75]



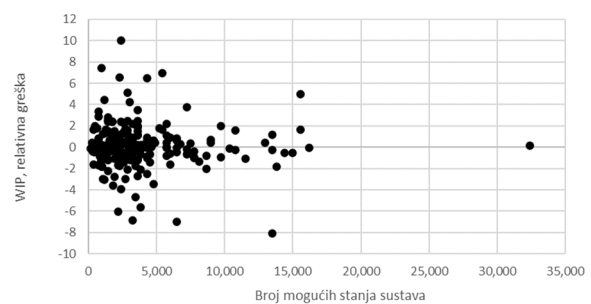
(a)



(b)



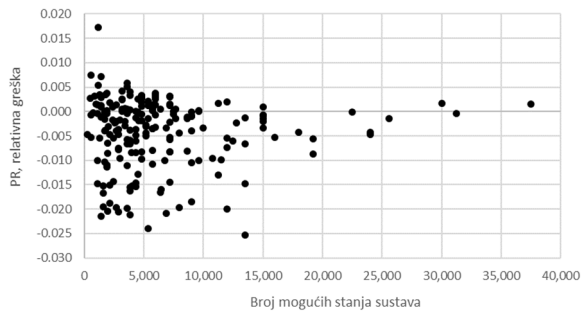
(c)



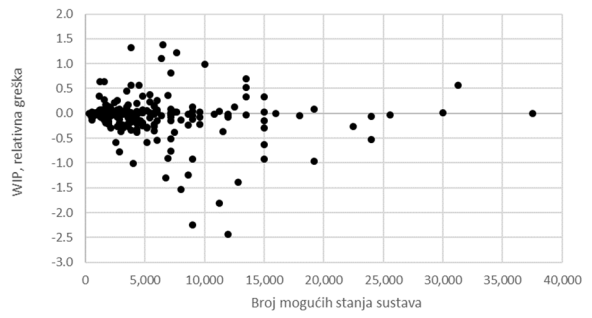
(d)

Slika 3.21  $M = 7$ , relativna odstupanja koristeći (a,b) AGG metodu i (c,d)

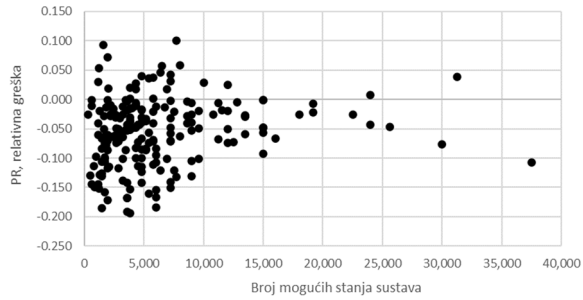
MKS [75]



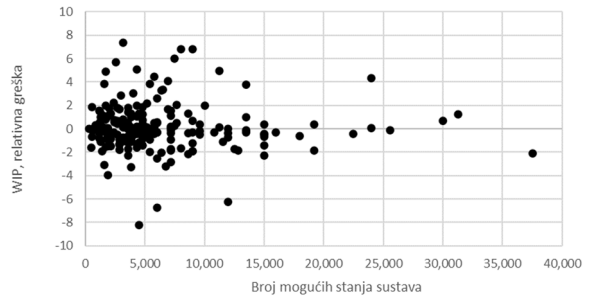
(a)



(b)

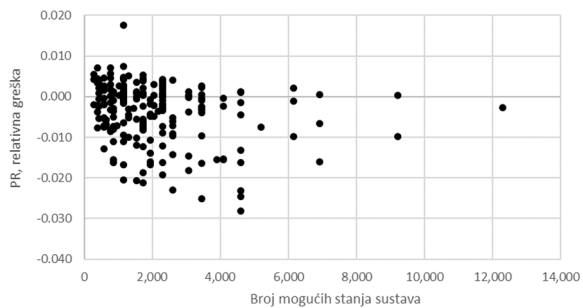


(c)

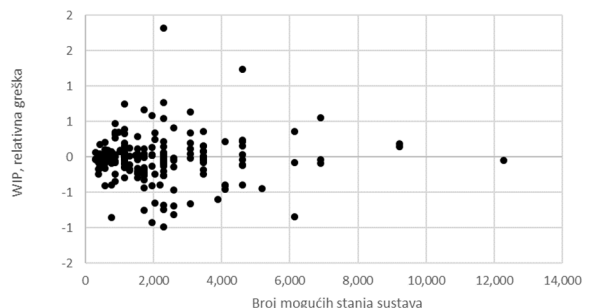


(d)

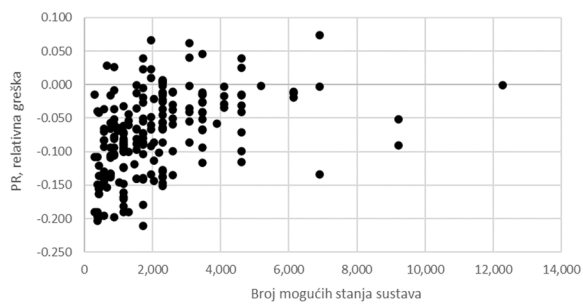
Slika 3.22  $M = 8$ , relativna odstupanja koristeći (a,b) AGG metodu i (c,d) MKS [75]



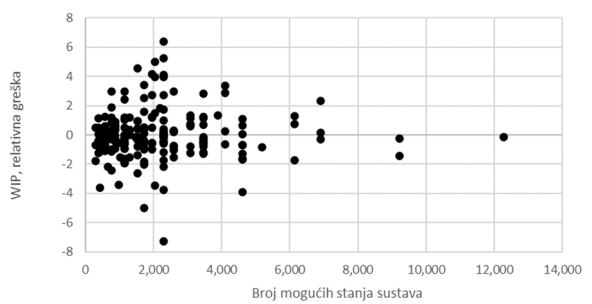
(a)



(b)



(c)



(d)

Slika 3.23  $M = 9$ , relativna odstupanja koristeći (a,b) AGG metodu i (c,d) MKS [75]

Rezultati dobiveni simulacijom na jednak su način uspoređeni s rezultatima dobivenim analitičkim pristupom. Međutim, u navedenom je slučaju broj linija u svakoj skupini smanjen na 12 zbog velike zahtjevnosti u prikupljanju rezultata simulacije. Stoga su sljedeće linije u svakoj skupini izabrane kao reprezentativne:

Linija 1: linija sa najmanjim  $PR$ ;

Linija 2: linija sa najvećim  $PR$ ;

Linija 3: linija kojoj je  $PR$  približno jednak srednjoj vrijednosti  $PR$  linije 1 i 2;

Linija 4: linija sa najmanjim  $WIP$ ;

Linija 5: linija sa najvećim  $WIP$ ;

Linija 6: linija kojoj je  $WIP$  približno jednak srednjoj vrijednosti  $WIP$  linije 4 i 5;

Linija 7: linija sa najmanjim  $BL_{M-1}$ ;

Linija 8: linija sa najvećim  $BL_{M-1}$ ;

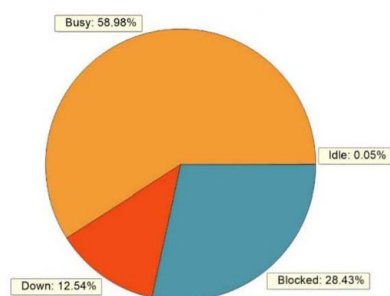
Linija 9: linija kojoj je  $BL_{M-1}$  približno jednak srednjoj vrijednosti  $BL_{M-1}$  linije 7 i 8;

Linija 10: linija sa najmanjim  $ST_M$ ;

Linija 11: linija sa najvećim  $ST_M$ ;

Linija 12: linija kojoj je  $ST_M$  približno jednak srednjoj vrijednosti  $ST_M$  linije 10 i 11.

Ukupno je, dakle, izabrano 84 serijskih linija čiji odziv je analiziran pomoću programskog paketa Enterprise Dynamics 10.3. Ulazni podaci, poput vjerojatnosti  $p_i$  i kapaciteta međuskladišta  $N_i$ , odgovaraju izoliranim slučajevima. Vrijeme ciklusa za svaki stroj iznosi jedan, a ukupno vrijeme simulacije 36,000 sekundi. Takvo vrijeme omogućuje zanemarivanje početne prolazne faze „zagrijavanja“ proizvodne linije koja iznosi manje od 0,02% vremena. Na slici 3.24 prikazan je jedan primjer izlaznih rezultata za jedan stroj. Od prikazanih podataka se koristi postotka blokade stroja,  $BL$ , i praznog hoda stroja,  $ST$ . Očekivani broj gotovih proizvoda,  $PR$ , za svaku liniju se računa kao omjer između broja gotovih proizvoda u atomu „sink“ i ukupnog vremena rada. Očekivani broj poluproizvoda za svako međuskladište,  $WIP$ , je zahtijevao analizu svakog skladišta sa kratkim proračunom srednje vrijednosti.



Legenda:

Busy – stroj je u stanju {radi}

Down – stroj je u stanju {ne radi}

Blocked – stroj je blokiran

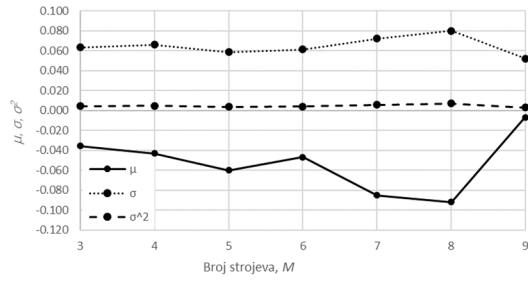
Idle – stroj je u praznom hodu

Slika 3.24 Primjer izlaznih rezultata simulacije [75]

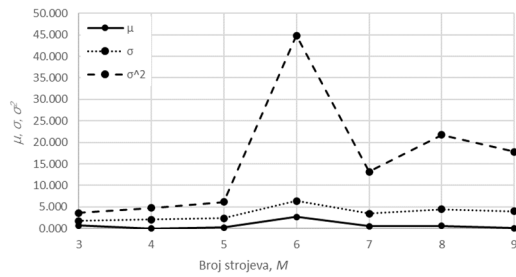
U tablici 3.3 i na slikama 3.25 i 3.26 su prikazane srednja vrijednost, standardna devijacija i varijanca relativnog odstupanja ključnih značajki očekivanog broja gotovih proizvoda,  $PR$ , očekivanog broja poluproizvoda na međuskladištima,  $WIP$ , vjerojatnost blokade strojeva,  $BL$  i vjerojatnost praznog hoda strojeva,  $ST$ , u ovisnosti o duljini proizvodne linije, tj. broju strojeva  $M$  u liniji. Na slikama 3.23 do 3.29 su prikazana relativna odstupanja  $PR$  i  $WIP$  u ovisnosti o veličini prostora stanja.

Tablica 3.3 Simulacija: srednja vrijednost, standardna devijacija i varijanca relativnog odstupanja u odnosu na analitičku metodu [75]

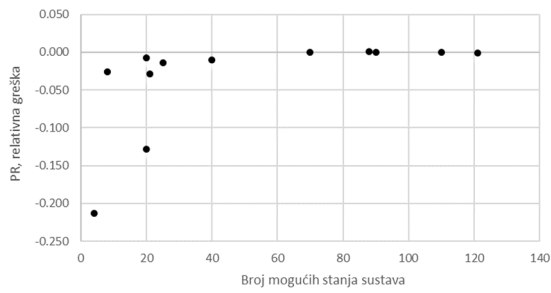
		<i>PR</i>	<i>WIP</i>	<i>BL</i> <sub>1</sub>	<i>BL</i> <sub>2</sub>	<i>BL</i> <sub>3</sub>	<i>BL</i> <sub>4</sub>	<i>BL</i> <sub>5</sub>	<i>BL</i> <sub>6</sub>	<i>BL</i> <sub>7</sub>	<i>BL</i> <sub>8</sub>	<i>ST</i> <sub>2</sub>	<i>ST</i> <sub>3</sub>	<i>ST</i> <sub>4</sub>	<i>ST</i> <sub>5</sub>	<i>ST</i> <sub>6</sub>	<i>ST</i> <sub>7</sub>	<i>ST</i> <sub>8</sub>	<i>ST</i> <sub>9</sub>		
Broj stojeva	3	$\mu$	-0.036	0.686	0.036	0.033						0.007	0.036								
		$\sigma$	0.063	1.819	0.066	0.056							0.042	0.063							
		$\sigma^2$	0.004	3.609	0.005	0.003							0.002	0.004							
	4	$\mu$	-0.043	0.013	0.043	0.008	-0.001						0.039	0.011	0.043						
		$\sigma$	0.066	2.100	0.067	0.030	0.002						0.055	0.138	0.066						
		$\sigma^2$	0.005	4.812	0.005	0.001	0.000						0.003	0.021	0.005						
	5	$\mu$	-0.060	0.274	0.064	0.055	0.027	0.023					0.008	0.041	0.038	0.060					
		$\sigma$	0.059	2.386	0.061	0.056	0.043	0.044					0.037	0.059	0.056	0.059					
		$\sigma^2$	0.004	6.212	0.004	0.003	0.002	0.002					0.001	0.004	0.003	0.004					
	6	$\mu$	-0.047	2.699	0.048	0.034	0.014	0.011	0.019				0.015	0.035	0.037	0.029	0.047				
		$\sigma$	0.061	6.409	0.063	0.060	0.054	0.054	0.071				0.032	0.060	0.070	0.096	0.061				
		$\sigma^2$	0.004	44.810	0.004	0.004	0.003	0.003	0.005				0.001	0.004	0.005	0.010	0.004				
	7	$\mu$	-0.085	0.542	0.084	0.089	0.029	0.040	0.040	0.006			0.002	0.062	0.053	0.053	0.087	0.085			
		$\sigma$	0.072	3.477	0.078	0.086	0.054	0.062	0.082	0.042			0.056	0.066	0.090	0.104	0.075	0.072			
		$\sigma^2$	0.006	13.186	0.007	0.008	0.003	0.004	0.007	0.002			0.003	0.005	0.009	0.012	0.006	0.006			
	8	$\mu$	-0.092	0.654	0.086	0.017	-0.020	0.015	0.050	0.046	0.014		0.081	0.115	0.082	0.048	0.053	0.087	0.092		
		$\sigma$	0.080	4.465	0.089	0.112	0.156	0.108	0.089	0.100	0.054		0.065	0.153	0.114	0.108	0.118	0.080	0.080		
		$\sigma^2$	0.007	21.750	0.009	0.014	0.026	0.013	0.009	0.011	0.003		0.005	0.025	0.014	0.013	0.015	0.007	0.007		
	9	$\mu$	-0.007	0.070	0.007	0.072	0.072	0.078	0.090	0.064	0.064	0.064	0.055	0.050	0.051	0.037	0.060	0.066	0.077	0.113	
		$\sigma$	0.052	4.043	0.057	0.067	0.050	0.111	0.123	0.068	0.113	0.100	0.048	0.060	0.089	0.115	0.077	0.119	0.112	0.052	
		$\sigma^2$	0.003	17.829	0.003	0.005	0.003	0.013	0.016	0.005	0.014	0.011	0.003	0.004	0.009	0.014	0.006	0.016	0.014	0.003	



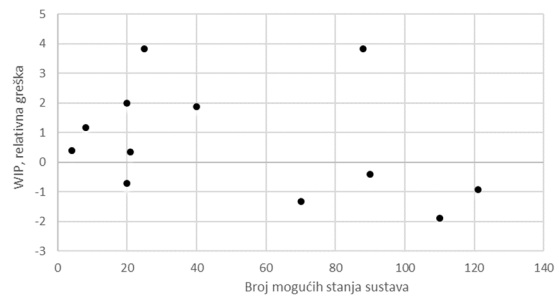
Slika 3.25 Relativna greška *PR* ovisno o broju strojeva – simulacija [75]



Slika 3.26 Relativna greška *WIP* ovisno o broju strojeva – simulacija [75]

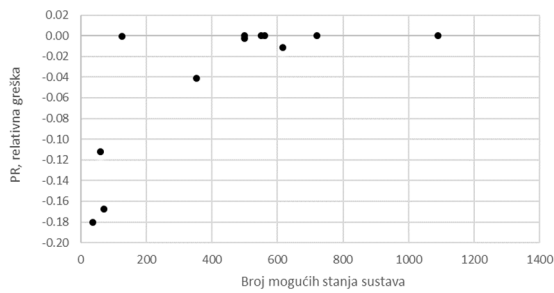


(a)

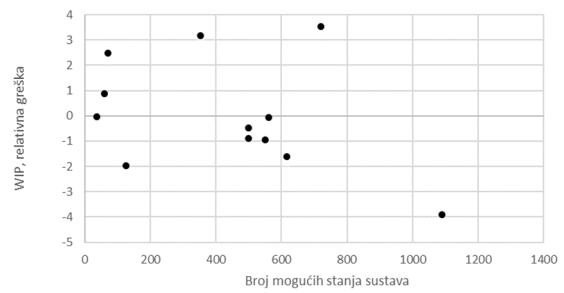


(b)

Slika 3.27  $M = 3$ , relativna odstupanja koristeći simulaciju – (a) *PR* i (b) *WIP* [75]

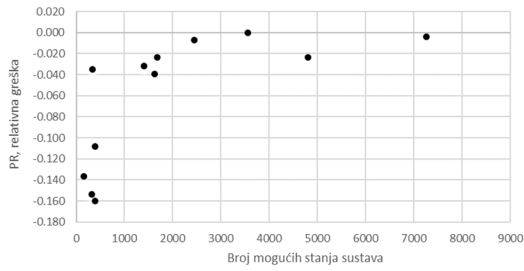


(a)

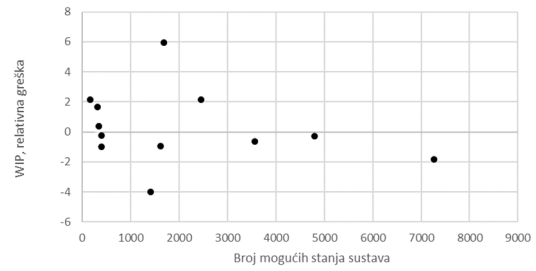


(b)

Slika 3.28  $M = 4$ , relativna odstupanja koristeći simulaciju – (a) *PR* i (b) *WIP* [75]

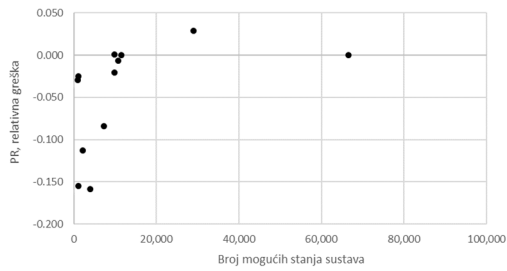


(a)

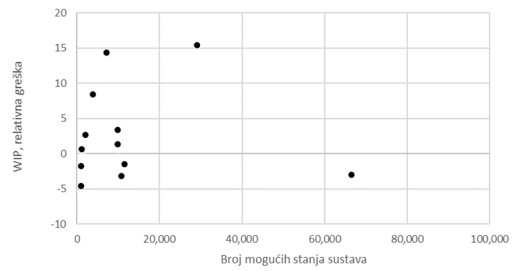


(b)

Slika 3.29  $M = 5$ , relativna odstupanja koristeći simulaciju – (a) *PR* i (b) *WIP* [75]

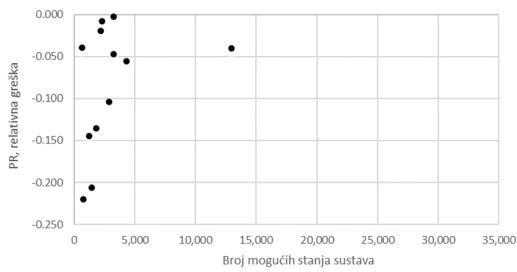


(a)

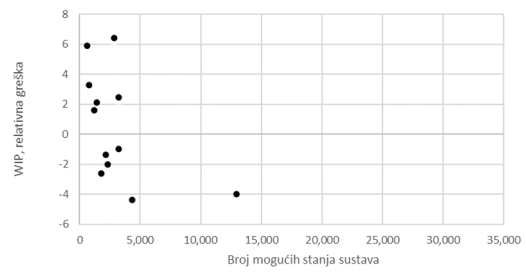


(b)

Slika 3.30  $M = 6$ , relativna odstupanja koristeći simulaciju – (a) *PR* i (b) *WIP* [75]

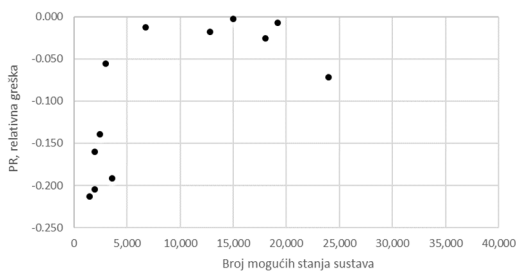


(a)

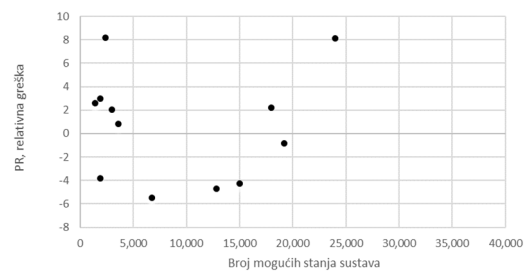


(b)

Slika 3.31  $M = 7$ , relativna odstupanja koristeći simulaciju – (a) *PR* i (b) *WIP* [75]

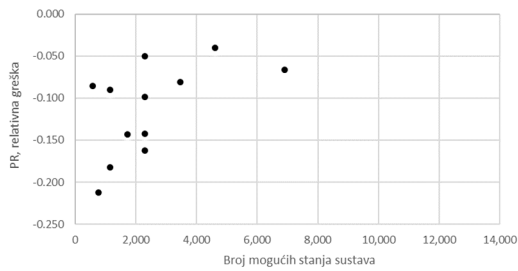


(a)

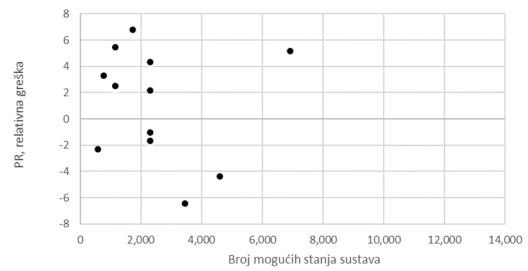


(b)

Slika 3.32  $M = 8$ , relativna odstupanja koristeći simulaciju – (a) *PR* i (b) *WIP* [75]



(a)



(b)

Slika 3.23  $M = 9$ , relativna odstupanja koristeći simulaciju – (a)  $PR$  i (b)  $WIP$  [75]

### 3.8 Diskusija

Prikazani rezultati pokazuju da za izračun ključnih značajki ustaljenog odziva Bernoullijevih serijskih linija poput očekivanog broja gotovih proizvoda ( $PR$ ), vjerojatnost blokade strojeva ( $BL$ ) i vjerojatnost praznog hoda strojeva ( $ST$ ) metode agregacije, konačnih stanja i simulacije daju dobre rezultate u usporedbi sa analitičkom metodom. Odstupanje relativnih grešaka, njihova srednja vrijednost, standardna devijacija i varijanca je zanemarivo.

Ključna značajka očekivanog broja poluproizvoda na međuskladištu ( $WIP$ ) pokazuje odstupanja u svim metodama, što je posljedica zbrajanja greške na razini ustaljenog odziva kroz jednadžbu (3.20). Metoda konačnih stanja, u slučaju malih kapaciteta međuskladišta, bilježi veća odstupanja nego metoda agregacije, što je posljedica grube diskretizacije prostora stanja. Značajnije odstupanje može se primijetiti u slučaju simulacije, što je posljedica iščitavanja rezultata. Naime, Enterprise Dynamics 10.3 prikazuje rezultate u obliku ovisnosti pojedinog stanja na skladištu i vremenskog udjela tog stanja u ukupnom trajanju simulacije.

Potrebno računalno vrijeme u slučaju poluanalitičkih metoda iznosi svega nekoliko sekundi dok je analitička metoda za dulje linije zahtijevala više tjedana. Simulacija u Enterprise Dynamics zahtijeva nekoliko desetaka sekundi računalnog vremena kao i školovanog i vještog operatera za potrebe tumačenja i brze prilagodbe postojećih modela.

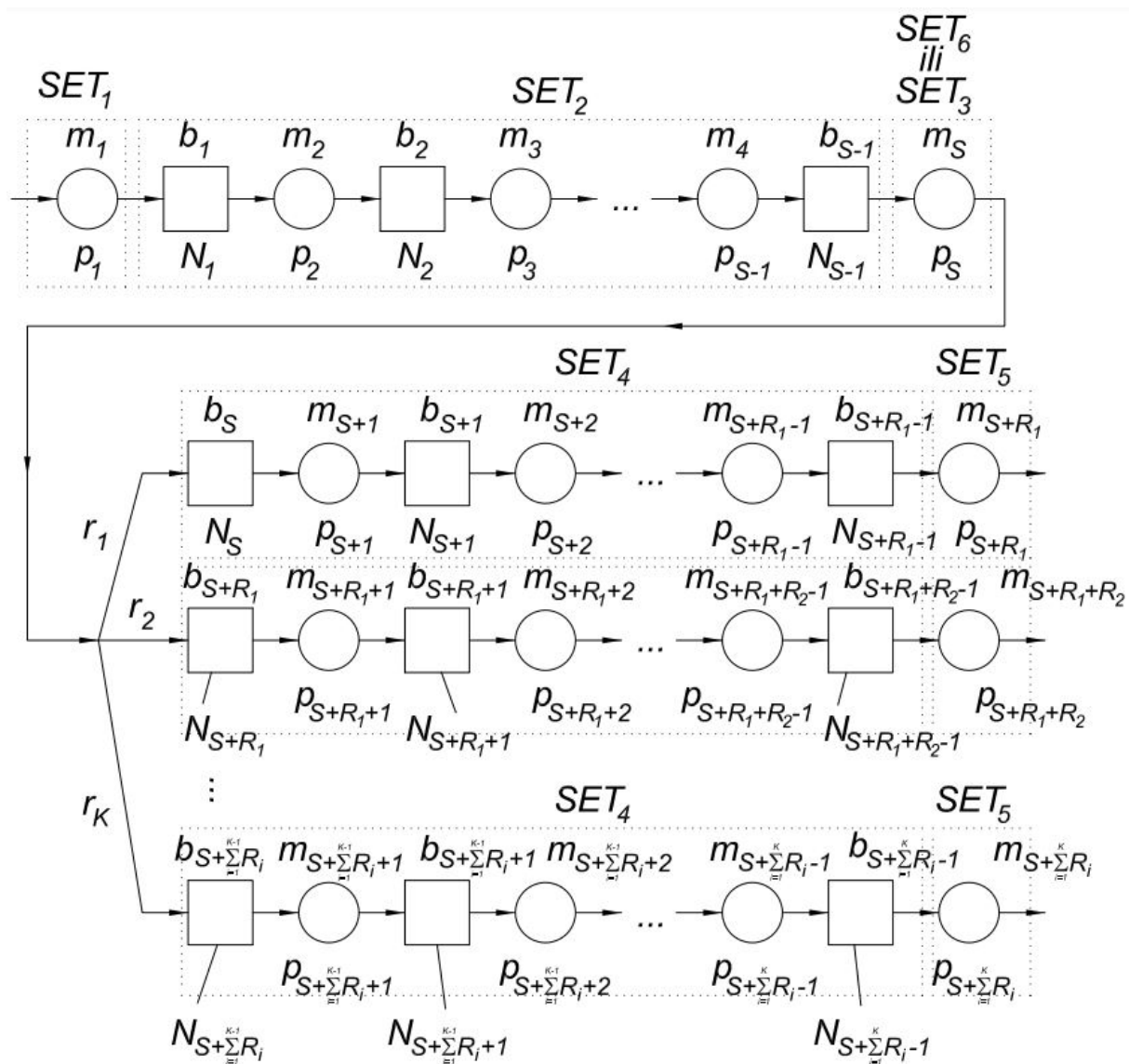
Navedeni teoretski primjeri predstavljaju vrijedan skup referentnih mjera za Bernoullijeve serijske linije. Dokazano je da je nova metoda konačnih stanja vrijedna daljnjeg razvoja za linije grananja.



#### 4. LINIJE S GRANANJEM TOKOVA MATERIJALA

Linija s grananjem tokova materijala je proizvodni sustav u kojem se jedan tok materijala grana u sekundarne tokove. Ako takva linija zadovoljava pretpostavke navedene u Poglavlju 3 onda se njeno ponašanje može opisati kao ergodički Markovljev lanac za koji vrijedi konvencija o prostoru stanja, Poglavlje 3.1, i jednačba ravnoteže, izraz (3.2). Analitičko rješenje te jednačbe se može formulirati na isti način kao i za serijske linije koristeći pristup svojstvene vrijednosti i svojstvenog vektora, podpoglavlje 2.6. Stoga će se u ovom poglavlju prikazati formulacija opće tranzicijske matrice za Bernoullijevu proizvodnu liniju s grananjem tokova materijala. Također, za isti će se slučaj prikazati i formulacija elemenata konačnih stanja.

Na slici 4.1 prikazana je Bernoullijeva proizvodna linija s grananjem tokova materijala koja se sastoji od jednog glavnog toka i  $K$  sekundarnih tokova materijala. Svako grananje je popraćeno s faktorom grananja  $r_i$ ,  $i=1, 2, \dots, K$ , koji definira udio materijala koji se preusmjerava u drugi tok, s time da vrijedi,  $\sum_{i=1}^K r_i = 1$ . Glavni tok se sastoji od  $S$  strojeva i  $S-1$  međuskladišta gdje  $S$  označava redni broj stroja od kojeg započinje grananje. Svaka grana se sastoji od ukupno  $R_i$  strojeva i  $R_i - 1$  međuskladišta. Ukupni broj strojeva u cjelokupnom sustavu grananja je jednak  $M = S + \sum_{i=1}^K R_i$ , a ukupan broj međuskladišta iznosi  $M - 1 = \left( S + \sum_{i=1}^K R_i \right) - 1$ . Svaki stroj  $m_i$ ,  $i=1, 2, \dots, M$  ima Bernoullijevu distribuciju vjerojatnosti, tj. u stanju {radi} se nalazi s vjerojatnošću  $p_i$ , a u stanju {kvar} s vjerojatnošću  $1-p_i$ . Svako međuskladište  $b_i$ ,  $i=1, 2, \dots, M-1$  ima kapacitet  $N_i$ , gdje je  $N_i \in \mathbb{N}^0$ .



Slika 4.1 Bernoullijeva proizvodna linija s grananjem tokova materijala [77]

#### 4.1 Formulacija opće tranzicijske matrice

Određivanje tranzicijske matrice za Bernoullijevu proizvodnu liniju grananja  $[P(p_1, p_2, \dots, p_S, \dots, p_M)]$  može se također opisati pristupom konstitutivnih matrica, odnosno vrijedi

$$\begin{aligned}
 & [P(p_1, p_2, \dots, p_S, \dots, p_M)] = \\
 & [P_1(p_1)][P_2(p_2)][P_3(p_3)] \dots [P_S(p_S)] \dots [P_M(p_M)] = \prod_{i=1}^M [P_i(p_i)].
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Svaka konstitutivna matrica uzima u obzir djelovanja pojedinih strojeva na ukupni sustav stanja skladišta i ima isti broj redaka i stupaca. Za općeniti slučaj proizvodne linije grananja, kao na slici 4.1, konstitutivne matrice se mogu podijeliti u šest različitih setova uvjeta:

- SET 1 opisuje konstitutivnu matricu prvog stroja u glavnoj grani
- SET 2 opisuje konstitutivnu matricu stroja koji se nalazi između prvog stroja i stroja  $S$
- SET 3 opisuje konstitutivnu matricu stroja  $S$
- SET 4 opisuje konstitutivnu matricu stroja koji se nalazi u grani između stroja  $S$  i zadnjeg stroja u grani
- SET 5 opisuje konstitutivnu matricu zadnjeg stroj u određenoj grani
- SET 6 opisuje konstitutivnu matricu prvog stroja ukoliko je on ujedno i stroj na kojem se grana tok materijala

SET 1 uključuje sljedeće uvjete:

$$[P_1(p_1)] = \begin{cases} 1 - p_1, & \text{ako } h_1^{n+1} = h_1^n, h_2^{n+1} = h_2^n, \dots, h_{M-1}^{n+1} = h_{M-1}^n, h_1^n < N_1 \\ p_1, & \text{ako } h_1^{n+1} = h_1^n + 1, h_2^{n+1} = h_2^n, \dots, h_{M-1}^{n+1} = h_{M-1}^n, h_1^n < N_1 \\ 1, & \text{ako } h_1^{n+1} = h_1^n, h_2^{n+1} = h_2^n, \dots, h_{M-1}^{n+1} = h_{M-1}^n, h_1^n = N_1 \\ 0, & \text{ostalo (inače),} \end{cases} \quad (4.2)$$

gdje  $h_i^n$  i  $h_i^{n+1}$  označava stanje  $i$ -tog međuskladišta u  $n$ -tom odnosno  $n+1$  ciklusu.

SET 2 uključuje sljedeće uvjete:

$$[P_i(p_i)] = \begin{cases} 1 - p_i, & \text{ako } h_1^{n+1} = h_1^n, h_2^{n+1} = h_2^n, \dots, h_{M-1}^{n+1} = h_{M-1}^n, h_{i-1}^n > 0, h_i^n < N_i \\ p_i, & \text{ako } \dots h_{i-2}^{n+1} = h_{i-2}^n, h_{i-1}^{n+1} = h_{i-1}^n - 1, h_i^{n+1} = h_i^n + 1, h_{i+1}^{n+1} = h_{i+1}^n, \dots, h_{i-1}^n > 0, h_i^n < N_i \\ 1, & \text{ako } h_1^{n+1} = h_1^n, h_2^{n+1} = h_2^n, \dots, h_{M-1}^{n+1} = h_{M-1}^n, h_{i-1}^n = 0 \text{ or } h_i^n = N_i \\ 0, & \text{ostalo (inače),} \end{cases} \quad (4.3)$$

gdje je  $i=2,3,\dots,S-1$ .

SET 3 ima dva uvjeta, jedan vrijedi za dijagonalu, a drugi za ostatak matrice:

$$\text{diag}[P_S(p_S, K, r_i, R_i)] = \begin{cases} 1 - p_S, & \text{ako } h_{S-1}^n > 0, h_j^n < N_j, j \in \zeta \\ 1 - p_S r_i, & \text{ako } h_{S-1}^n > 0, h_{\zeta_i}^n < N_{\zeta_i}, h_j^n = N_j, j \in \zeta \setminus \zeta_i \\ 1 - p_S(r_1 + r_2), & \text{ako } h_{S-1}^n > 0, h_{\zeta_1}^n < N_{\zeta_1}, h_{\zeta_2}^n < N_{\zeta_2}, h_j^n = N_j, \\ & j \in \zeta \setminus \zeta_1, \zeta_2 \\ \vdots \\ 1 - p_S(r_1 + r_K), & \text{ako } h_{S-1}^n > 0, h_{\zeta_1}^n < N_{\zeta_1}, h_{\zeta_K}^n < N_{\zeta_K}, h_j^n = N_j, \\ & j \in \zeta \setminus \zeta_1, \zeta_K \\ 1 - p_S(r_2 + r_3), & \text{ako } h_{S-1}^n > 0, h_{\zeta_2}^n < N_{\zeta_2}, h_{\zeta_3}^n < N_{\zeta_3}, h_j^n = N_j, \\ & j \in \zeta \setminus \zeta_2, \zeta_3 \\ \vdots \\ 1 - p_S(r_2 + r_K), & \text{ako } h_{S-1}^n > 0, h_{\zeta_2}^n < N_{\zeta_2}, h_{\zeta_K}^n < N_{\zeta_K}, h_j^n = N_j, \\ & j \in \zeta \setminus \zeta_2, \zeta_K \\ \vdots \\ 1 - p_S(r_{K-1} + r_K), & \text{ako } h_{S-1}^n > 0, h_{\zeta_{K-1}}^n < N_{\zeta_{K-1}}, h_{\zeta_K}^n < N_{\zeta_K}, \\ & h_j^n = N_j, j \in \zeta \setminus \zeta_{K-1}, \zeta_K \\ \vdots \\ 1 & \text{ako } h_{S-1}^n = 0 \text{ ili } h_j^n = N_j, j \in \zeta, \end{cases} \quad (4.4)$$

$$[P_S(p_S, K, r_i, R_i)] = \begin{cases} p_S r_i, & \text{ako } \dots h_{S-2}^{n+1} = h_{S-2}^n, h_{S-1}^{n+1} = h_{S-1}^n - 1, h_{\zeta_i}^{n+1} = h_{\zeta_i}^n + 1, h_{\zeta_{i+1}}^{n+1} = h_{\zeta_{i+1}}^n, \dots, \\ & h_{S-1}^n > 0, h_j^n < N_j, j \in \zeta \\ 0, & \text{ostalo (inače)}. \end{cases} \quad (4.5)$$

gdje  $\zeta = \{\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_K\}$  označava skup  $K$  međuskладишта  $b_i, i=S, S+R_1, S+R_1+R_2, \dots, S + \sum_{i=1}^{K-1} R_i$

koji se nalaze odmah iza stroja grananja  $S$ , a simbol  $\setminus$  označava negaciju elemenata koji nisu u tom skupu  $\zeta$ .

SET 4 ima sljedeće uvjete:

$$[P_i(p_i)] = \begin{cases} 1 - p_i, & \text{ako } h_1^{n+1} = h_1^n, h_2^{n+1} = h_2^n, \dots, h_{M-1}^{n+1} = h_{M-1}^n, h_{i-1}^n > 0, h_i^n < N_i \\ p_i, & \text{ako } \dots h_{i-2}^{n+1} = h_{i-2}^n, h_{i-1}^{n+1} = h_{i-1}^n - 1, h_i^{n+1} = h_i^n + 1, h_{i+1}^{n+1} = h_{i+1}^n, \dots, h_{i-1}^n > 0, h_i^n < N_i \\ 1, & \text{ako } h_1^{n+1} = h_1^n, h_2^{n+1} = h_2^n, \dots, h_{M-1}^{n+1} = h_{M-1}^n, h_{i-1}^n = 0 \text{ or } h_i^n = N_i \\ 0, & \text{ostali (inače)}, \end{cases} \quad (4.6)$$

gdje je  $i=S+1, S+2, \dots, S+R_1-1, S+R_1+1, S+R_1+2, \dots, S+R_1+R_2-1, \dots, S + \sum_{i=1}^K R_i - 1$ .

SET 5 ima sljedeće uvjete:

$$[P_i(p_i)] = \begin{cases} 1-p_i, & \text{ako } h_1^{n+1} = h_1^n, h_2^{n+1} = h_2^n, \dots, h_{M-1}^{n+1} = h_{M-1}^n, h_{i-1}^n > 0 \\ p_i, & \text{ako } \dots h_{i-2}^{n+1} = h_{i-2}^n, h_{i-1}^{n+1} = h_{i-1}^n - 1, h_i^{n+1} = h_i^n, h_{i+1}^{n+1} = h_{i+1}^n, \dots, h_{i-1}^n > 0 \\ 1, & \text{ako } h_1^{n+1} = h_1^n, h_2^{n+1} = h_2^n, \dots, h_{M-1}^{n+1} = h_{M-1}^n, h_{i-1}^n = 0 \\ 0, & \text{ostalo (inače)}. \end{cases} \quad (4.7)$$

gdje je  $i = S+R_1, S+R_1+R_2, \dots, S + \sum_{i=1}^K R_i$ .

SET 6 ima dva uvjeta, jedan vrijedi za dijagonalu, odnosno  $h_1^n = h_1^{n+1}$  i  $h_2^n = h_2^{n+1}$ , a drugi za ostatak matrice:

$$\text{diag}[P_1(p_1, K, r_i, R_i)] = \begin{cases} 1-p_1, & \text{ako } h_j^n < N_j, j \in \bar{\zeta} \\ 1-p_1 r_i, & \text{ako } h_{\bar{\zeta}_i}^n < N_{\bar{\zeta}_i}, h_j^n = N_j, j \in \bar{\zeta} - \bar{\zeta}_i \\ 1-p_1(r_1+r_2), & \text{ako } h_{\bar{\zeta}_1}^n < N_{\bar{\zeta}_1}, h_{\bar{\zeta}_2}^n < N_{\bar{\zeta}_2}, h_j^n = N_j, \\ \vdots & j \in \bar{\zeta} - \bar{\zeta}_1, \bar{\zeta}_2 \\ 1-p_1(r_1+r_K), & \text{ako } h_{\bar{\zeta}_1}^n < N_{\bar{\zeta}_1}, h_{\bar{\zeta}_K}^n < N_{\bar{\zeta}_K}, h_j^n = N_j, \\ \vdots & j \in \bar{\zeta} - \bar{\zeta}_1, \bar{\zeta}_K \\ 1-p_1(r_2+r_3), & \text{ako } h_{\bar{\zeta}_2}^n < N_{\bar{\zeta}_2}, h_{\bar{\zeta}_3}^n < N_{\bar{\zeta}_3}, h_j^n = N_j, \\ \vdots & j \in \bar{\zeta} - \bar{\zeta}_2, \bar{\zeta}_3 \\ 1-p_1(r_2+r_K), & \text{ako } h_{\bar{\zeta}_2}^n < N_{\bar{\zeta}_2}, h_{\bar{\zeta}_K}^n < N_{\bar{\zeta}_K}, h_j^n = N_j, \\ \vdots & j \in \bar{\zeta} - \bar{\zeta}_2, \bar{\zeta}_K \\ 1-p_1(r_{K-1}+r_K), & \text{ako } h_{\bar{\zeta}_{K-1}}^n < N_{\bar{\zeta}_{K-1}}, h_{\bar{\zeta}_K}^n < N_{\bar{\zeta}_K}, h_j^n = N_j, \\ \vdots & j \in \bar{\zeta} - \bar{\zeta}_{K-1}, \bar{\zeta}_K \\ 1 & \text{ako } h_j^n = N_j, j \in \bar{\zeta}, \end{cases} \quad (4.8)$$

$$[P_1(p_1, K, r_i, R_i)] = \begin{cases} p_1 r_i, & \text{ako } \dots h_i^{n+1} = h_i^n + 1, h_j^{n+1} = h_j^n, j \in \bar{\zeta} - i, h_j^n < N_j, j \in \bar{\zeta} \\ 0, & \text{ostalo (inače)}. \end{cases} \quad (4.9)$$

gdje je skup  $\bar{\zeta} = \{\bar{\zeta}_1, \bar{\zeta}_2, \dots, \bar{\zeta}_K\}$  od  $K$  međuskладиšta  $b_i, i=1, 1+R_1, 1+R_1+R_2, \dots, 1 + \sum_{i=1}^{K-1} R_i$  koji

se nalaze odmah iza stroja grananja  $S$ .

## 4.2 Metoda konačnih stanja za linije s grananjem tokova materijala

Glavna prednost ove metode u odnosu na analitičko rešenje, je brza rekonstrukcija tranzicijske matrice i time svojstvenog vektora koji opisuje stacionarno stanje na međuskladištima. Ova metoda se može primijeniti i na proizvodne linije s grananjem tokova materijala i obuhvaća sljedeće korake:

1. Odrediti najlošiji stroj u glavnoj grani, odnosno stroj sa najmanjom pouzdanosti,  $p_m$ .
2. Formirati linije grananja s dodatnim strojem čija pouzdanost je umnožak pouzdanosti najlošijeg stroja glavne grane i faktora grananja,  $p_m r_i$ , slika 4.2a.
3. Odrediti najmanje pouzdan stroj u sporednim granama,  $p_m^i$ ,

$$p_m^i = \begin{cases} \min \{ p_1^1 = p_m r_1, p_2^1 = p_{S+1}, p_3^1 = p_{S+2}, \dots, p_{R_1+1}^1 = p_{S+R_1} \} & \text{ako } i = 1 \\ \min \{ p_1^2 = p_m r_2, p_2^2 = p_{S+R_1+1}, p_3^2 = p_{S+R_1+2}, \dots, p_{R_2+1}^2 = p_{S+R_1+R_2} \} & \text{ako } i = 2 \\ \vdots \\ \min \{ p_1^K = p_m r_K, p_2^K = p_{M-R_K+1}, p_3^K = p_{M-R_K+2}, \dots, p_{R_K+1}^K = p_M \} & \text{ako } i = K, \end{cases} \quad (4.10)$$

gdje je  $p_j^i$ ,  $i=1, 2, \dots, K, j=1, 2, \dots, R_K$ , pouzdanost strojeva u  $i$ -toj grani.

4. Formirati elemente konačnih stanja u glavnoj grani i u sporednim granama prema prethodno određenim najmanje pouzdanim strojevima, slika 4.2b.
5. Odrediti analitičkom metodom svojstveni vektor za svaki element, [34]
6. Međusobno pomnožiti elemente svih svojstvenih vektora, odnosno vrijedi da je

$$P_{i_1 i_2 i_3 \dots i_{M-1}} = P \left[ \{i_1 = h_1\} \cap \{i_2 = h_2\} \cap \dots \cap \{i_{M-1} = h_{M-1}\} \right] = \prod_{e=1}^{S-1} P_{Z_e}^{(e)} \prod_{i=1}^K \prod_{e_i=1}^{R_i-1} P_{Z_{e_i}}^{(e_i)}, \quad (4.11)$$

gdje je  $P_{Z_e}^{(e)}$  skup svojstvenih vektora glavne grane, a  $P_{Z_{e_i}}^{(e_i)}$  skup svojstvenih vektora sporednih grana.

Prilikom formiranja elemenata konačnih stanja možemo razlikovati elemente u smjeru protoka materijala i elemente u smjeru suprotnom od smjera protoka materijala. Svaki element se sastoji od dva stroja i jednog međuskladišta, slika 4.2b. Tako za elemente u smjeru suprotnom od smjera protoka materijala vrijedi distribucija vjerojatnosti pojave svakog stanja na međuskladištu obuhvaćenog elementom  $e_i$

$$P_0^{(e_i)} = \frac{(1-p_{e_i}^i)(1-\alpha_{e_i})}{1-\frac{p_{e_i}^i}{p_m^i}\alpha_{e_i}^{N_{e_i}}}, P_{Z_{e_i}}^{(e_i)} = \frac{\alpha_{e_i}^{Z_{e_i}}}{1-p_m^i}, Z_{e_i} = 1, 2, \dots, N_{e_i}, \quad (4.12)$$

gdje je

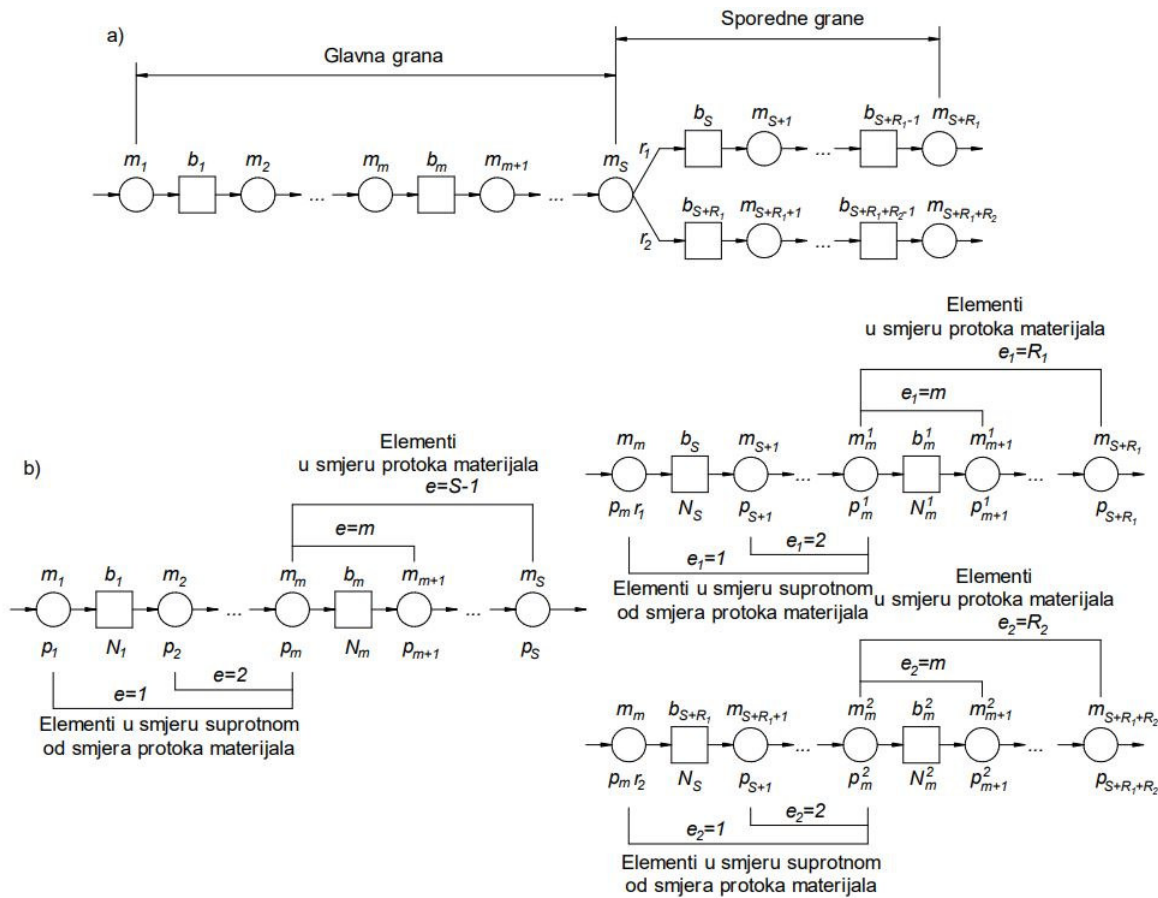
$$\alpha_{e_i} = \frac{p_{e_i}^i(1-p_m^i)}{p_m^i(1-p_{e_i}^i)}. \quad (4.13)$$

Slično, distribucija vjerojatnosti pojave svakog stanja na međuskладишту obuhvaćenog sa elementom  $e_i$  vrijedi i za elemente u smjeru protoka materijala.

$$P_0^{(e_i)} = \frac{(1-p_m^i)(1-\alpha_{e_i})}{1-\frac{p_m^i}{p_{e_i+1}^i}\alpha_{e_i}^{N_{e_i}}}, P_{Z_{e_i}}^{(e_i)} = \frac{\alpha_{e_i}^{Z_{e_i}}}{1-p_{e_i+1}^i}, Z_{e_i} = 1, 2, \dots, N_{e_i}, \quad (4.14)$$

gdje je

$$\alpha_{e_i} = \frac{p_m^i(1-p_{e_i+1}^i)}{p_{e_i+1}^i(1-p_m^i)}. \quad (4.15)$$



Slika 4.2 Primjer strukturne sheme metode konačnih stanja: a) linija s grananjem toka materijala, b) podjela linije na glavnu granu i sporedne grane te formiranje elemenata [77]

### 4.3 Ključne značajke

Ključne značajke ustaljenog odziva jedne linije s grananjem toka materijala se mogu opisati elementima svojstvenog vektora, koji obuhvaća vjerojatnosti da se sustav nalazi u nekom mogućem stanju. Ključne značajke su očekivani broj gotovih proizvoda ( $PR$ ), očekivani broj poluproizvoda na međuskladištima ( $WIP$ ), vjerojatnost blokade strojeva ( $BL$ ) i vjerojatnost praznog hoda strojeva ( $ST$ ).

Ključna značajka očekivani broj gotovih proizvoda,  $PR$ , mora se definirati za svaku granu koja uključuje neku vrstu izlaza (proizvoda, poluproizvod, otpad). Pri tome je očekivani broj gotovih proizvoda  $PR_i$  u  $i$ -toj grani jednak presjeku događaja

$$PR_i = P[\{m_i \text{ radi}\} \cap \{b_{i-1} \text{ nije prazan}\}], \quad (4.16)$$

gdje je  $i \in \{S + R_1, S + R_1 + R_2, \dots, M\}$ , odnosno vrijedi da je

$$PR_i = p_i \left( 1 - \sum_{h_1=0}^{N_1} \sum_{h_2=0}^{N_2} \dots \sum_{h_{i-2}=0}^{N_{i-2}} \sum_{h_{i-1}=0}^{N_{i-1}} \dots \sum_{h_{M-1}=0}^{N_{M-1}} P_{h_1 h_2 \dots h_{i-2} 0 h_i \dots h_{M-1}} \right) \quad (4.17)$$

Ključna značajka očekivani broj poluproizvoda na  $i$ -tom međuskladištu,  $WIP_i$ , se određuje na isti način kao i za serijske linije [46,34],

$$WIP_i = \sum_{h_1=0}^{N_1} \sum_{h_2=0}^{N_2} \dots \sum_{h_{M-1}=0}^{N_{M-1}} h_i P_{h_1 h_2 h_3 \dots h_{M-1}}. \quad (4.18)$$

Ključna značajka vjerojatnosti blokade  $i$ -tog stroja u svakoj grani,  $BLG_i$ , računa se na isti način kao i za serijsku liniju, [34,46] te vrijedi,

$$\begin{aligned} BLG_i &= P[\{m_i \text{ radi}\} \cap \{b_i \text{ pun}\} \cap \{m_{i+1} \text{ kvar}\} \cup \{m_i \text{ radi}\} \cap \{b_i \text{ pun}\} \cap \{b_{i+1} \text{ blokiran}\}] \\ &= p_i \sum_{h_1=0}^{N_1} \sum_{h_2=0}^{N_2} \dots \sum_{h_{M-1}=0}^{N_{M-1}} P_{h_1 h_2 h_3 \dots (h_i=N_i) \dots h_{M-1}} (1 - p_{i+1} + BL_{i+1}), \quad i = 1, 2, \dots, M-2. \\ BLG_M &= P[\{m_{M-1} \text{ radi}\} \cap \{b_{M-1} \text{ pun}\} \cap \{m_M \text{ kvar}\}] \\ &= p_{M-1} (1 - p_M) \sum_{h_1=0}^{N_1} \sum_{h_2=0}^{N_2} \dots \sum_{h_{M-2}=0}^{N_{M-2}} P_{h_1 h_2 h_3 \dots h_{M-2} (h_{M-1}=N_{M-1})} \end{aligned} \quad (4.19)$$

Iznimno u slučaju stroja  $ms$  vrijedi,

$$BL_S = P \left[ \bigcup_{i=1}^K (\{m_s \text{ radi}\} \cap \{r_i\} \cap \{b_{\zeta_i} \text{ pun}\}) \cap (\{m_{\zeta_i+1} \text{ kvar}\} \cup \{m_{\zeta_i+1} \text{ u blokadi}\}) \right] \quad (4.20)$$

gdje je  $\zeta = \zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_K$  skup međuskladište iza stroja grananja.



Kao i sve ostale značajke, blokada stroja  $BL_S$  može se izraziti pomoću elemenata svojstvenog vektora kao

$$BL_S = \sum_{i=1}^K p_S r_i (1 - p_{\zeta_{i+1}} + BL_{\zeta_{i+1}}) \sum_{h_1=0}^{N_1} \sum_{h_2=0}^{N_2} \cdots \sum_{h_{\zeta_i-1}=0}^{N_{\zeta_i-1}} \sum_{h_{\zeta_i+1}=0}^{N_{\zeta_i+1}} \cdots \sum_{h_{M-1}=0}^{N_{M-1}} P_{h_1 h_2 \dots h_{\zeta_i-1} N_{\zeta_i} h_{\zeta_i+1} \dots h_{M-1}} \quad (4.21)$$

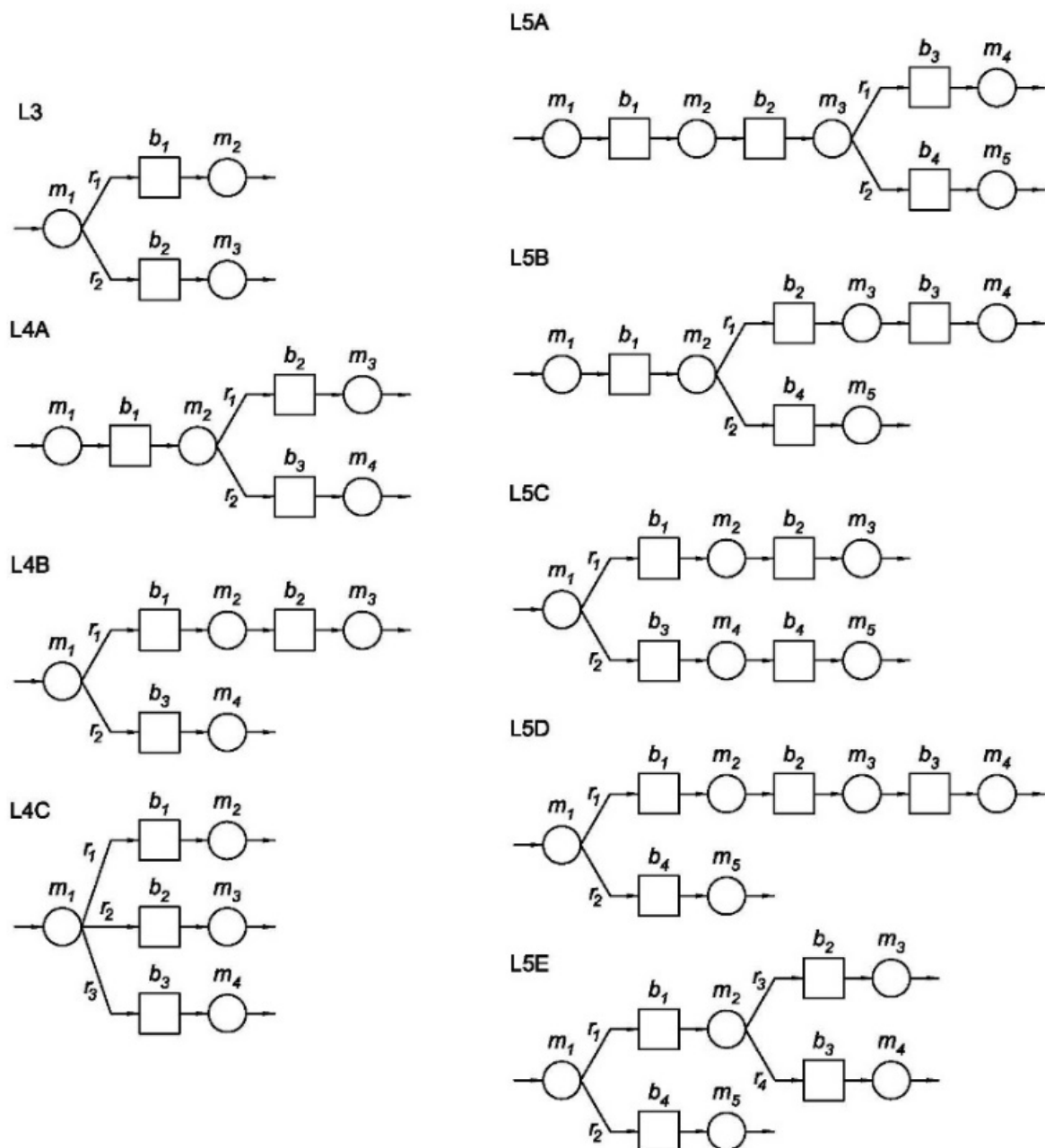
Ključna značajka vjerojatnosti praznog hoda  $i$ -tog stroja,  $ST_i$ , se može izraziti na isti način kao i kod serijske linije gdje se zbrajaju sve vjerojatnosti u kojima je skladište  $b_{i-1}$  prazno. Tu je sumu potom potrebno pomnožit s vjerojatnoću rada  $i$ -tog stroja, odnosno

$$ST_i = P(\{m_i \text{ radi}\} \cap \{b_{i-1} \text{ prazan}\}) = p_i \sum_{i_1=0}^{N_1} \sum_{i_2=0}^{N_2} \sum_{i_3=0}^{N_3} \cdots \sum_{i_{M-1}=0}^{N_{M-1}} P_{i_1 i_2 i_3 \dots (i_i=0) \dots i_{M-1}} \quad (4.22)$$

$i = 2, 3, \dots, M$

#### 4.4 Validacija metode konačnih stanja za linije s grananjem toka materijala

Prethodno prikazana metoda konačnih stanja (MKS) će se usporediti s analitičkom metodom (AN) za slučaj linija s grananjem toka materijala uzimajući u obzir linije s 3, 4 i 5 strojeva koje su različito raspoređeni i opremljeni međuskladištima različitih kapaciteta. Različiti oblici linija pod nazivima L3, L4A, L4B, L4C, L5A, L5B, L5C, L5D i L5E su prikazani na slici 4.3. Tablica 4.1 prikazuje pouzdanosti rada pojedinih strojeva, strukture grananja i kapacitet međuskladišta [77].

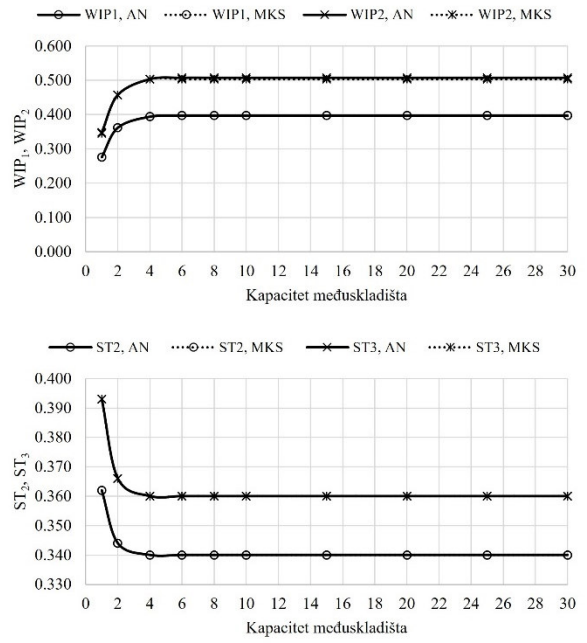
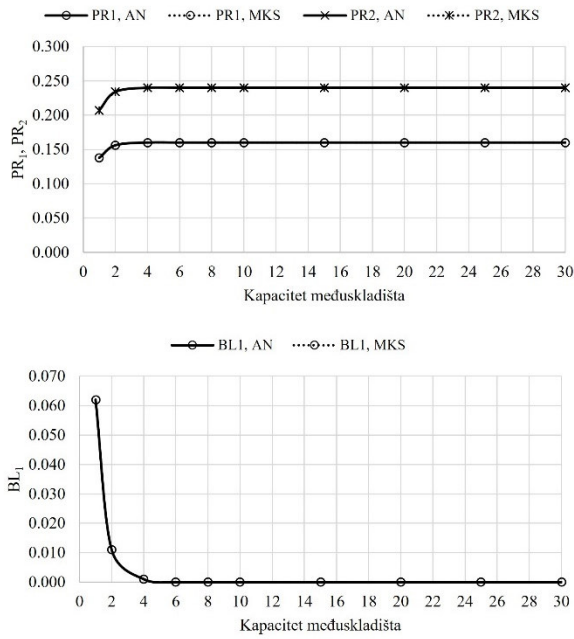


Slika 4.3 Različiti oblici linije grananja [77]

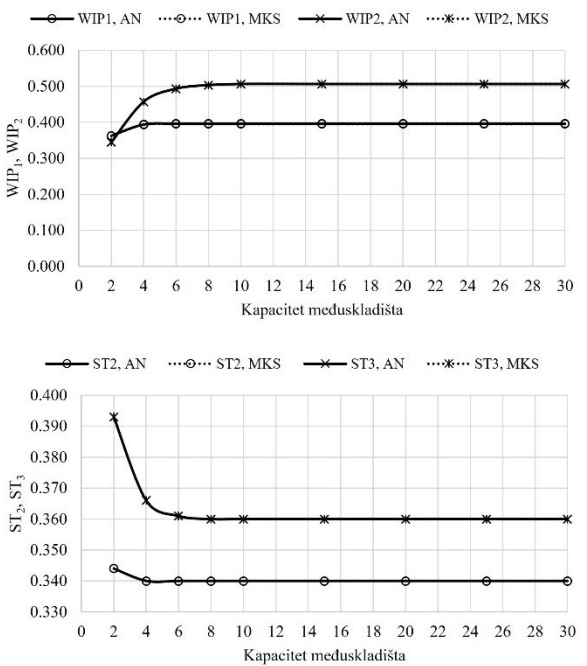
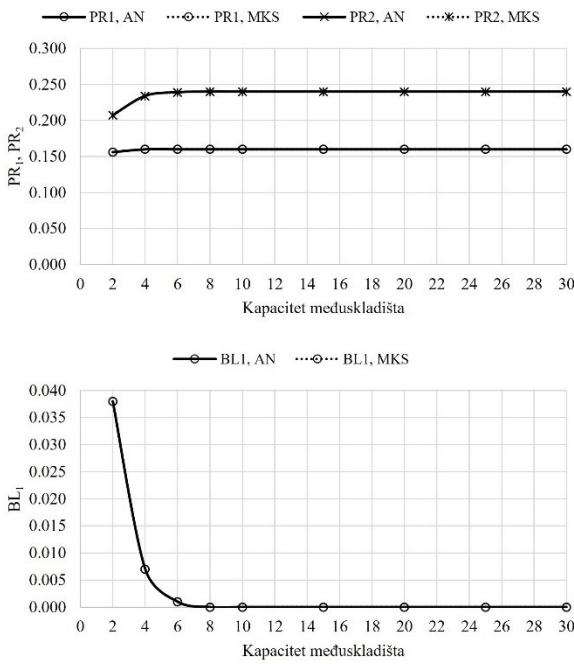
Tablica 4.1 Vjerojatnost rada strojeva i kapacitet međuskладиšta za različite oblike linije grananja [77]

Linija	$p_1$	$p_2$	$p_3$	$p_4$	$p_5$	$N_1$	$N_2$	$N_3$	$N_4$	$r_1$	$r_2$	$r_3$	$r_4$
L3	0.4	0.5	0.6	/	/	$N$	$N$	/	/	0.4	0.6	/	/
	0.4	0.5	0.6	/	/	$N$	$\frac{1}{2}N$	/	/	0.4	0.6	/	/
L4A	0.4	0.5	0.6	0.7	/	$N$	$N$	$N$	/	0.4	0.6	/	/
	0.4	0.5	0.6	0.7	/	$N$	$\frac{2}{3}N$	$\frac{1}{3}N$	/	0.4	0.6	/	/
L4B	0.4	0.5	0.6	0.7	/	$N$	$N$	$N$	/	0.4	0.6	/	/
	0.4	0.5	0.6	0.7	/	$N$	$\frac{2}{3}N$	$\frac{1}{3}N$	/	0.4	0.6	/	/
L4C	0.4	0.5	0.6	0.7	/	$N$	$N$	$N$	/	0.2	0.3	0.5	/
	0.4	0.5	0.6	0.7	/	$N$	$\frac{2}{3}N$	$\frac{1}{3}N$	/	0.2	0.3	0.5	/
L5A	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	$N$	$N$	$N$	$N$	0.4	0.6	/	/
	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	$N$	$\frac{3}{4}N$	$\frac{1}{2}N$	$\frac{1}{4}N$	0.4	0.6	/	/
L5B	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	$N$	$N$	$N$	$N$	0.4	0.6	/	/
	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	$N$	$\frac{3}{4}N$	$\frac{1}{2}N$	$\frac{1}{4}N$	0.4	0.6	/	/
L5C	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	$N$	$N$	$N$	$N$	0.4	0.6	/	/
	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	$N$	$\frac{3}{4}N$	$\frac{1}{2}N$	$\frac{1}{4}N$	0.4	0.6	/	/
L5D	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	$N$	$N$	$N$	$N$	0.4	0.6	/	/
	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	$N$	$\frac{3}{4}N$	$\frac{1}{2}N$	$\frac{1}{4}N$	0.4	0.6	/	/
L5E	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	$N$	$N$	$N$	$N$	0.4	0.6	0.4	0.6
	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	$N$	$\frac{3}{4}N$	$\frac{1}{2}N$	$\frac{1}{4}N$	0.4	0.6	0.4	0.6

Svojstveni vektor svake linije se računa za različiti broj kapaciteta međuskладиšta koji iznosi između  $N=1$  i  $N=30$ . U slučaju analitičkog proračuna svojstvenog vektora koristi se analitička tranzicijska matrica koja je definirana izrazima (4.1) do (4.9). Za izračun svojstvenog vektora prema metodi konačnih stanja koriste se izrazi (4.11) do (4.15). Nakon što su svojstveni vektori za sve linije određeni, moguće je odrediti ključne značajke poput očekivanog broja gotovih proizvoda u svakoj grani  $i$ ,  $PR_i$ , očekivani broj poluproizvoda na  $i$ -tom međuskладиštu,  $WIP_i$ , vjerojatnosti blokade  $i$ -tog stroja,  $BL_i$ , te vjerojatnosti praznog hoda  $i$ -tog stroja,  $ST_i$ , prema izrazima iz prethodnog poglavlja 4.3. Rezultati usporedbe su prikazane na slikama 4.4 do 4.12.

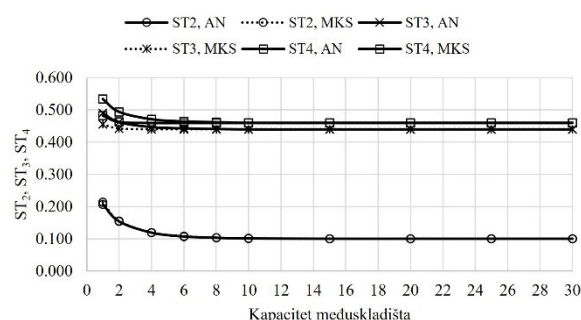
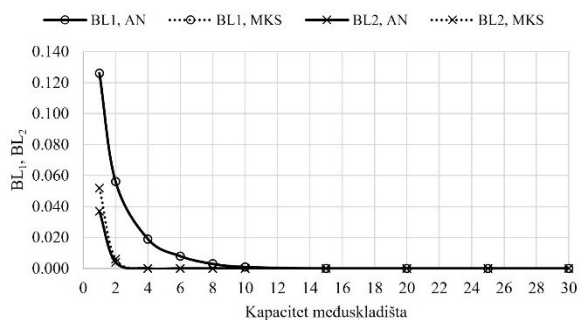
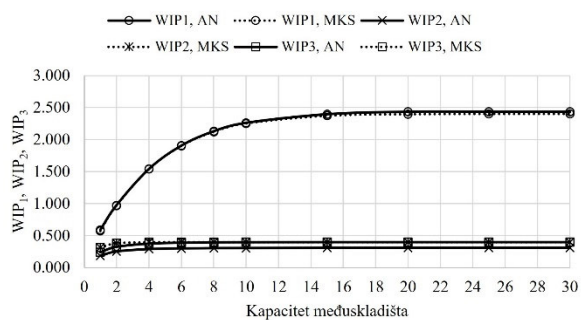
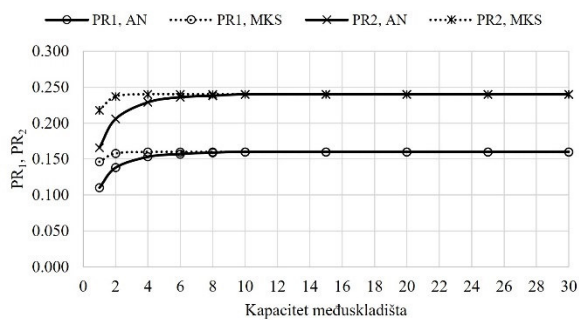


a)

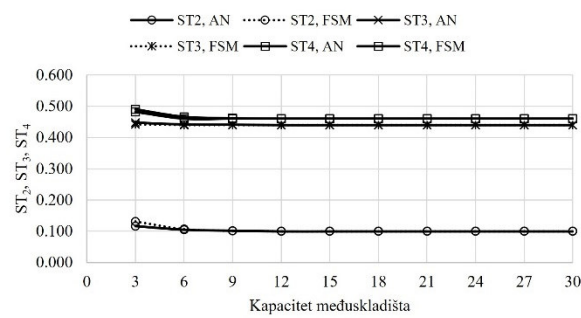
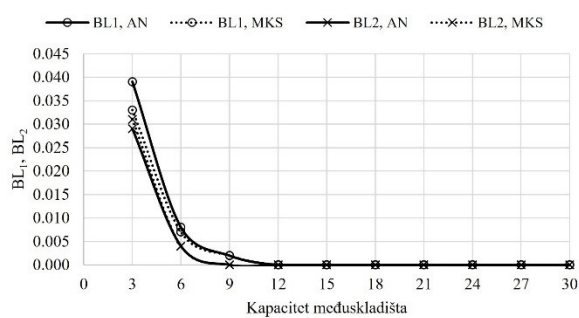
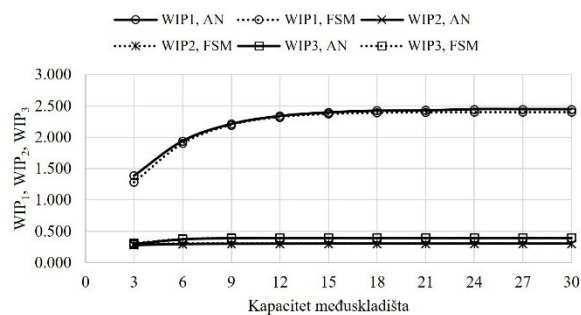
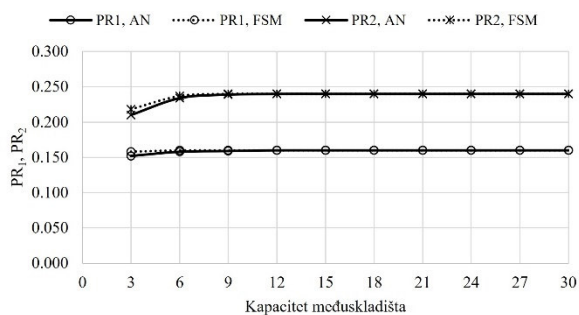


b)

Slika 4.4 Usporedba ključnih značajki, a) linija L3,  $N_1=N_2=N$ , b) linija L3,  $N_1=N$ ,  $N_2=1/2N$  [77]

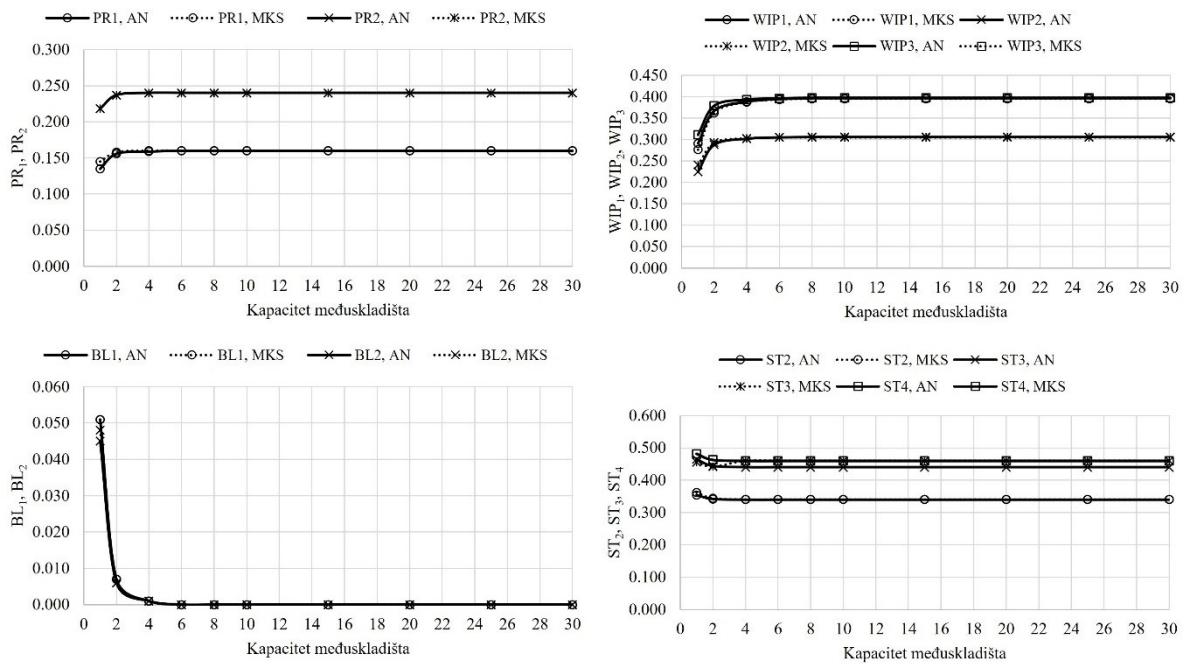


a)

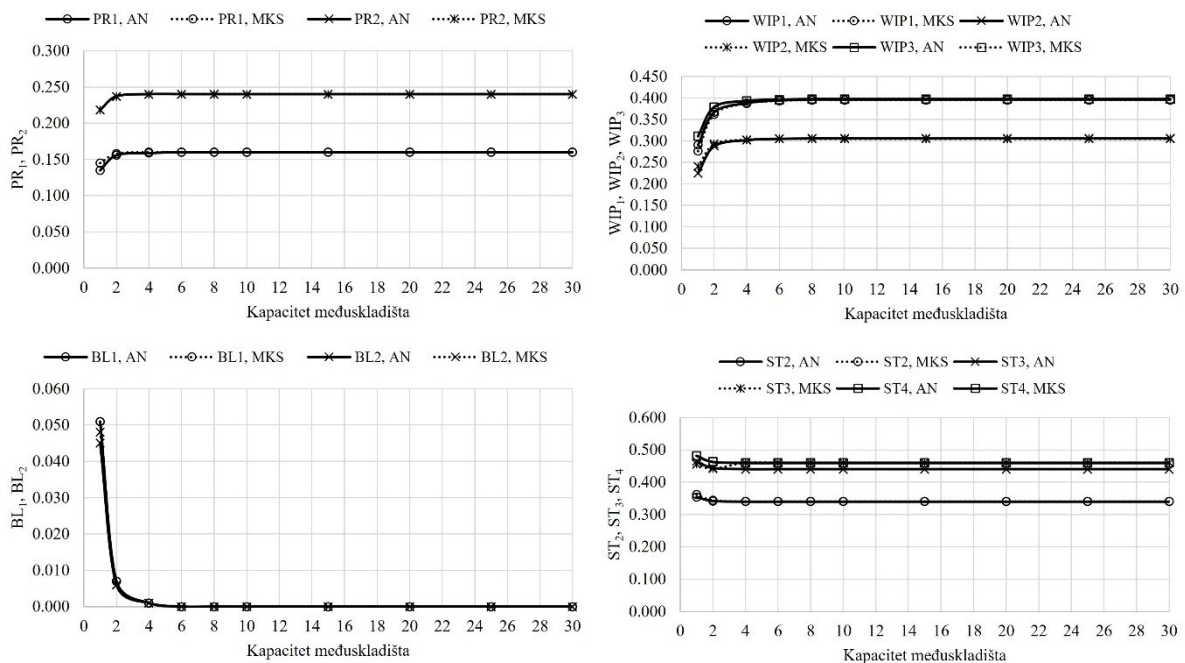


b)

Slika 4.5 Usporedba ključnih značajki, a) linija L4A,  $N_1=N_2=N_3=N$ , b) linija L4A,  $N_1=N$ ,  $N_2=2/3N$ ,  $N_3=1/3N$  [77]

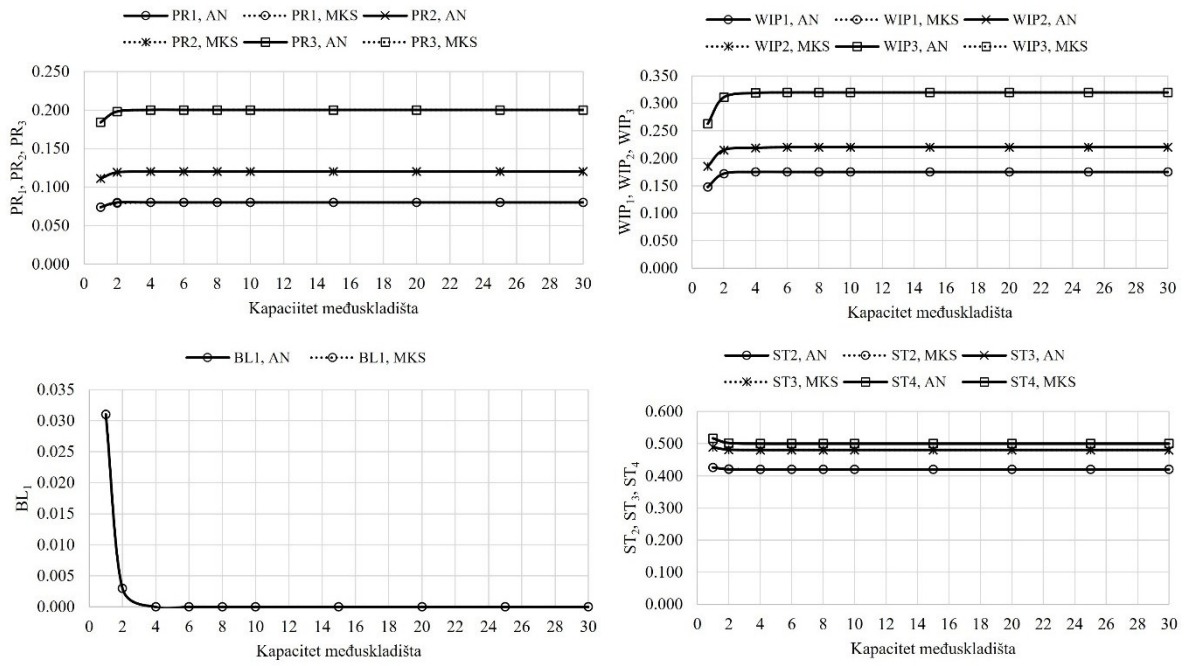


a)

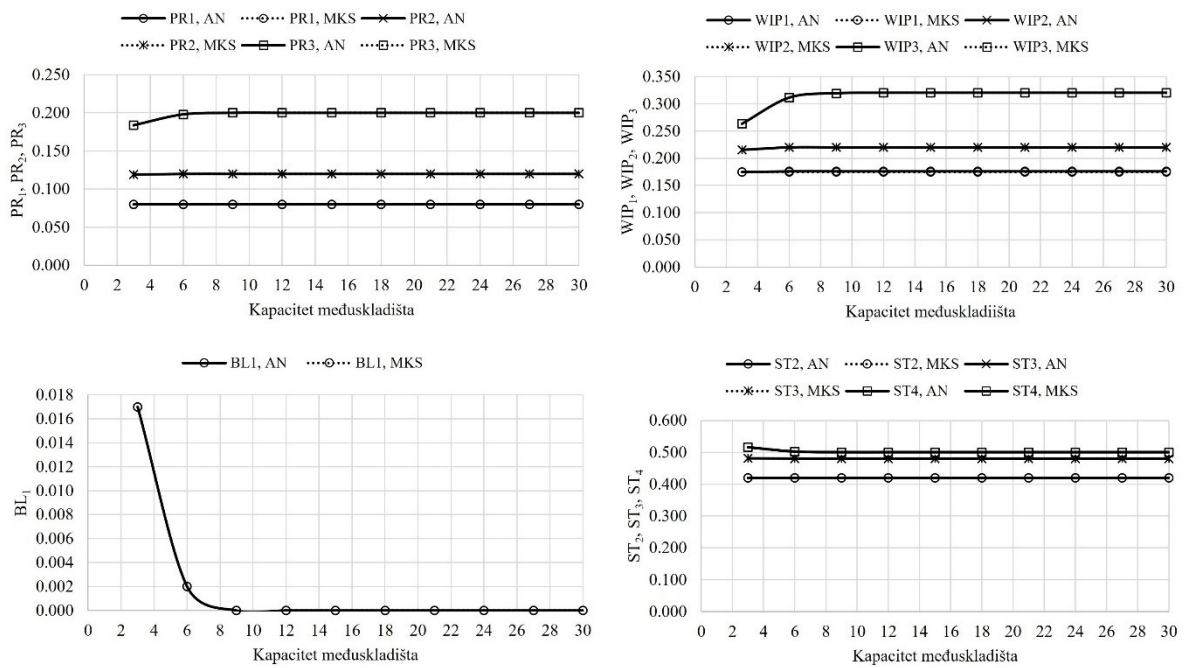


b)

Slika 4.6 Usporedba ključnih značajki, a) linija L4B,  $N_1=N_2=N_3=N$ , b) linija L4B,  $N_1=N$ ,  $N_2=2/3N$ ,  $N_3=1/3N$  [77]



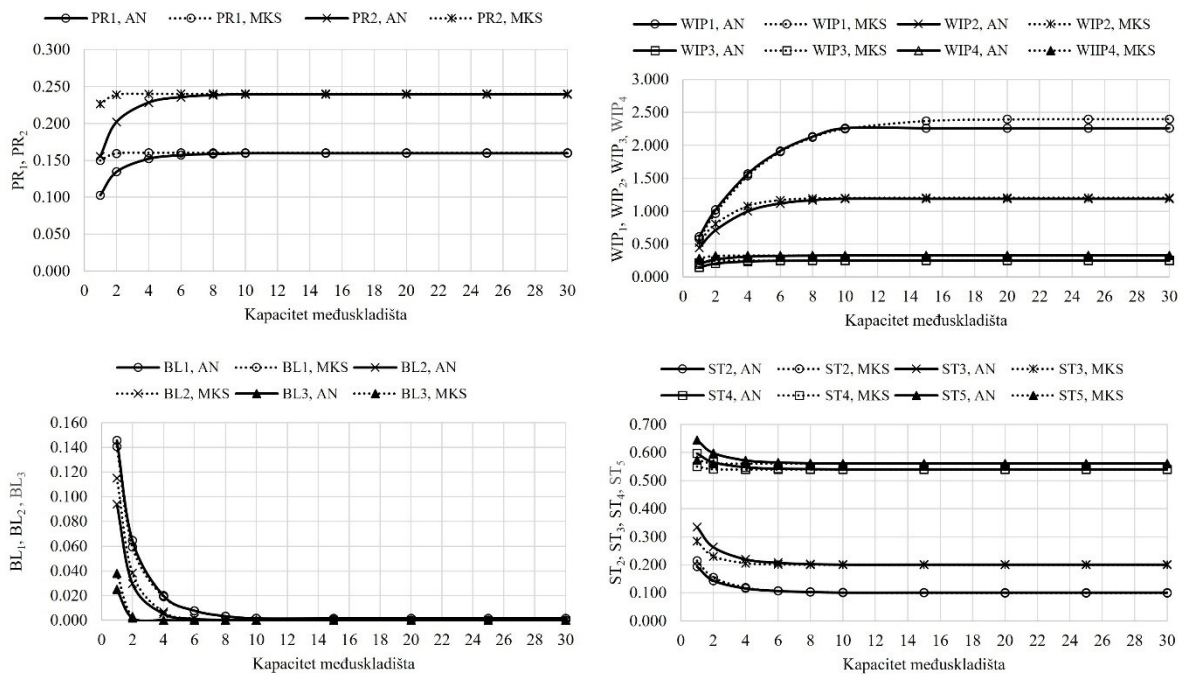
a)



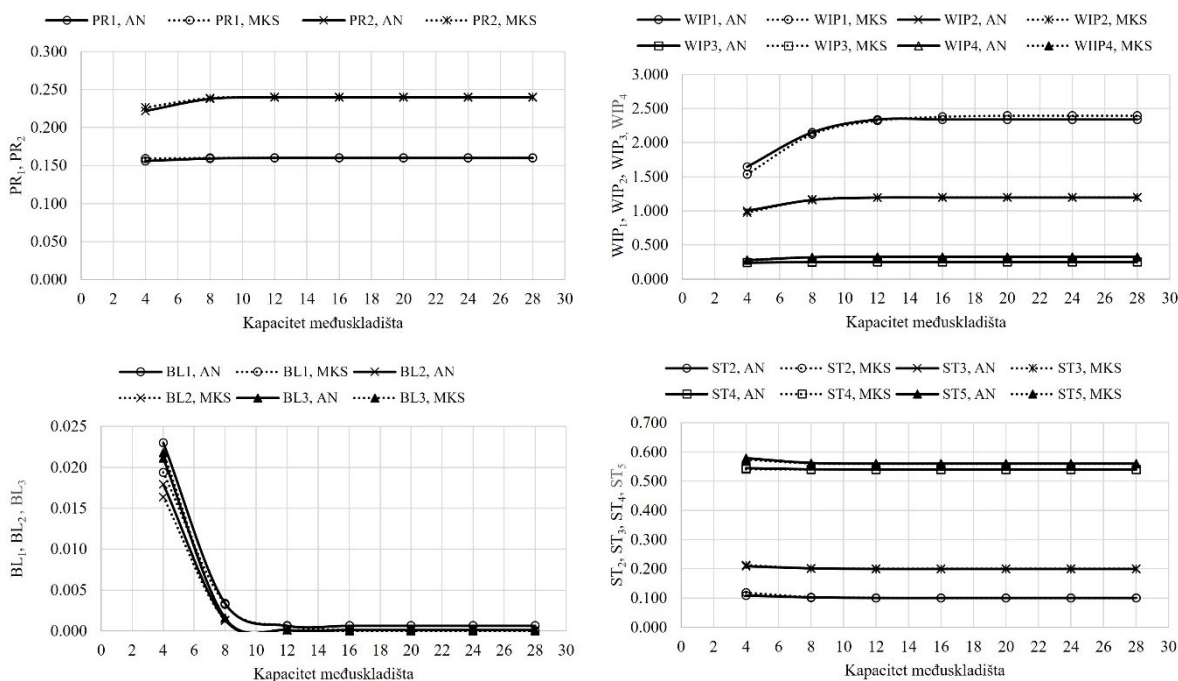
b)

Slika 4.7 Usporedba ključnih značajki, a) linija L4C,  $N_1=N_2=N_3=N$ , b) linija L4C,  $N_1=N$ ,  $N_2=2/3N$ ,  $N_3=1/3N$  [77]





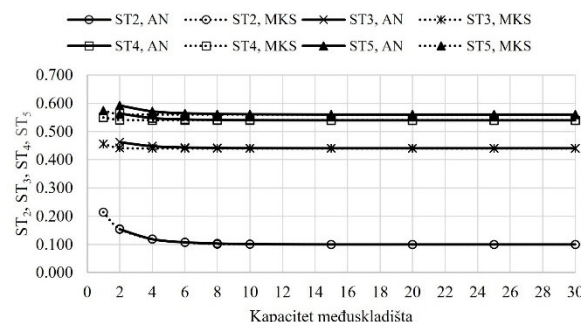
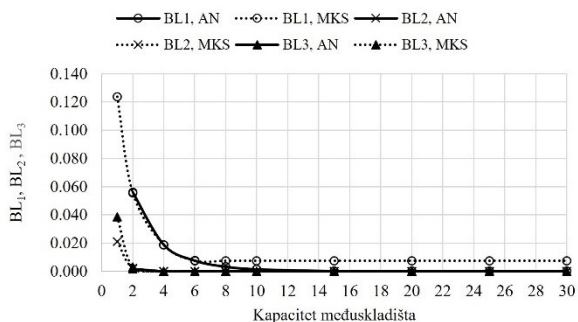
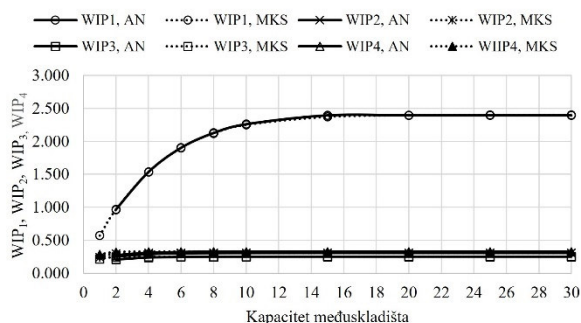
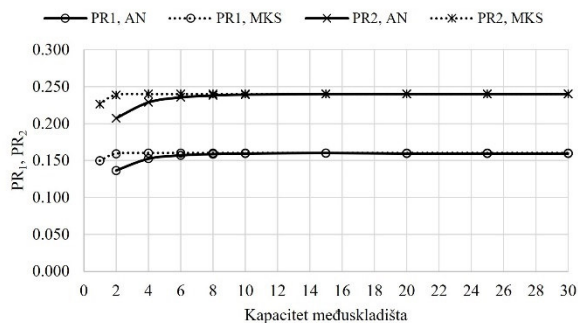
a)



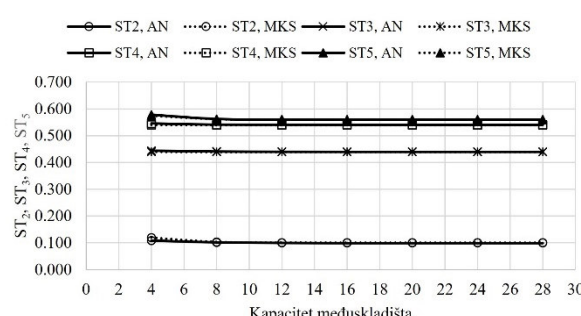
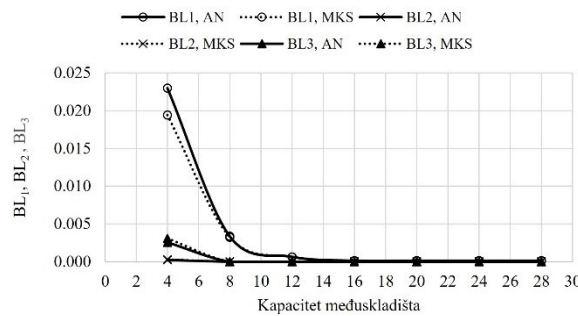
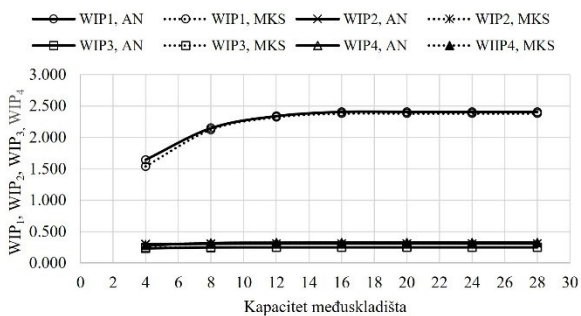
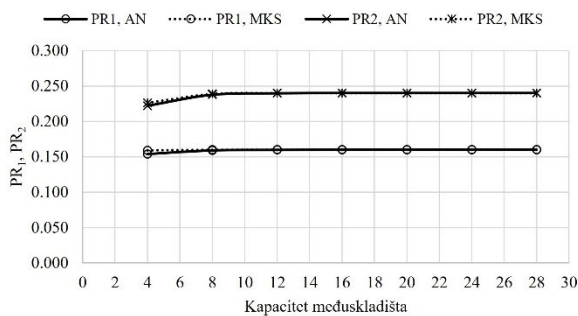
b)

Slika 4.8 Usporedba ključnih značajki, a) linija L5A,  $N_1=N_2=N_3=N_4=N$ , b) linija L5A,  $N_1=N$ ,  $N_2=3/4N$ ,  $N_3=1/2N$ ,  $N_4=1/4N$  [77]



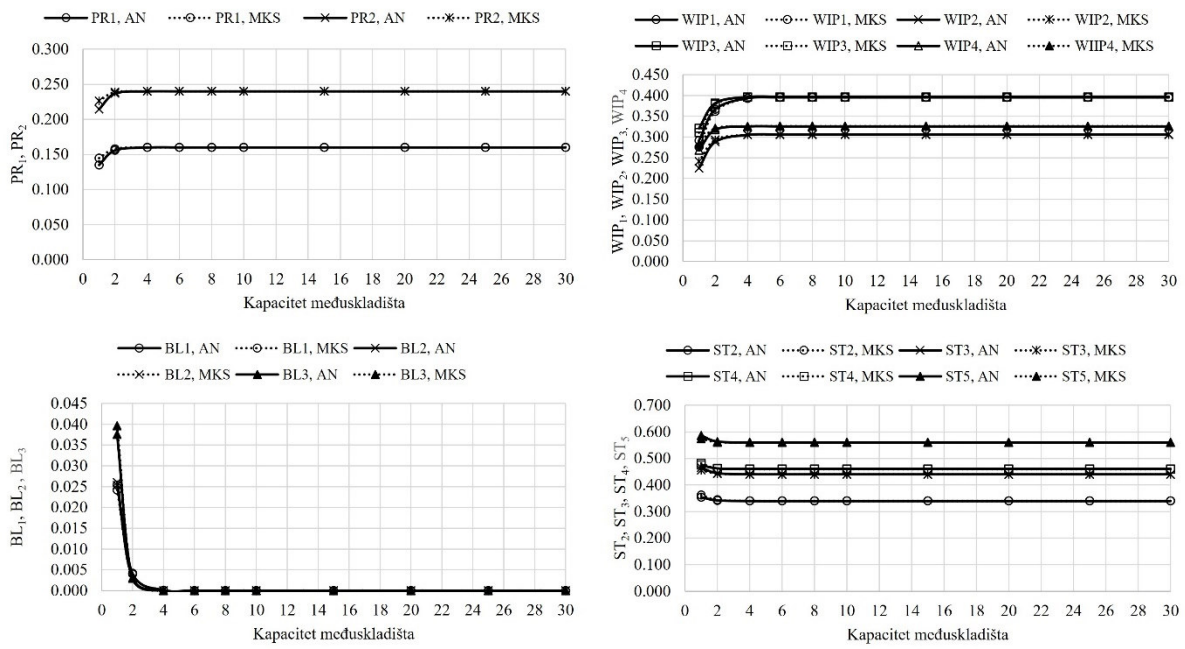


a)

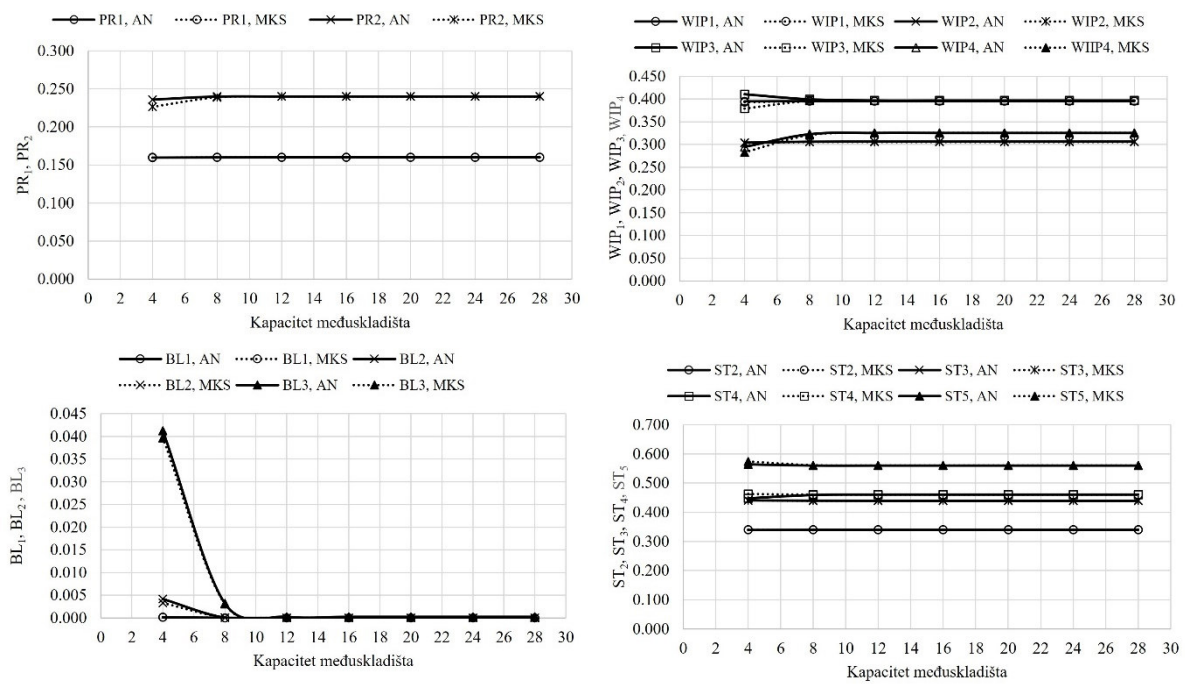


b)

Slika 4.9 Usporedba ključnih značajki, a) linija L5B,  $N_1=N_2=N_3=N_4=N$ , b) linija L5B,  $N_1=N$ ,  $N_2=3/4N$ ,  $N_3=1/2N$ ,  $N_4=1/4N$  [77]

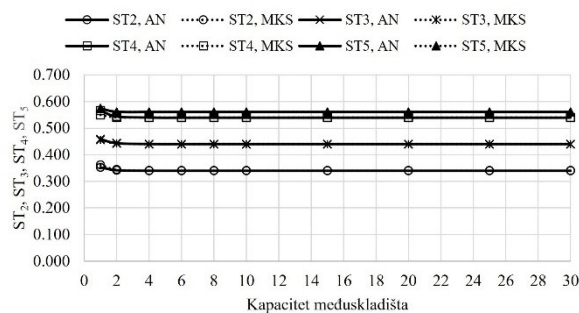
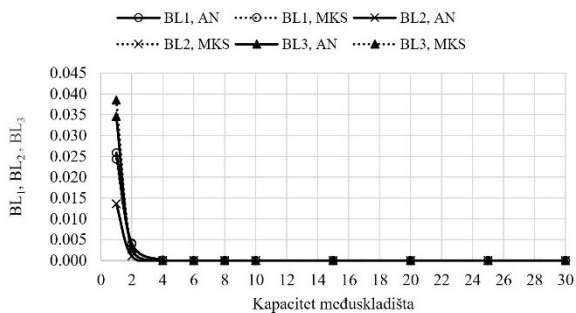
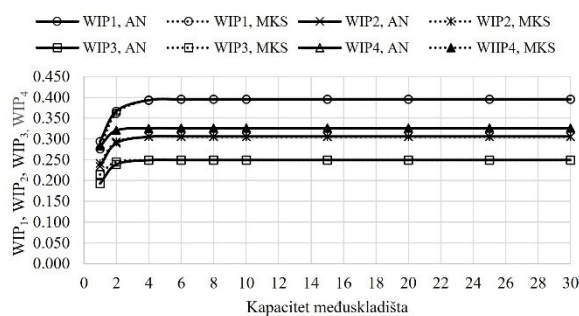
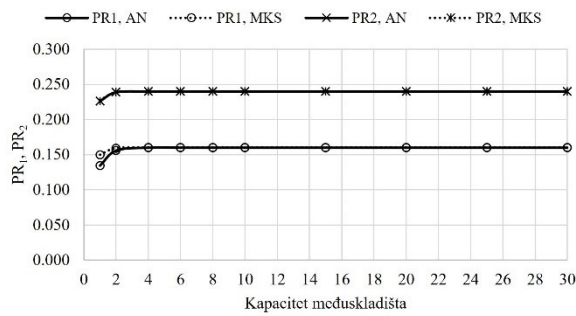


a)

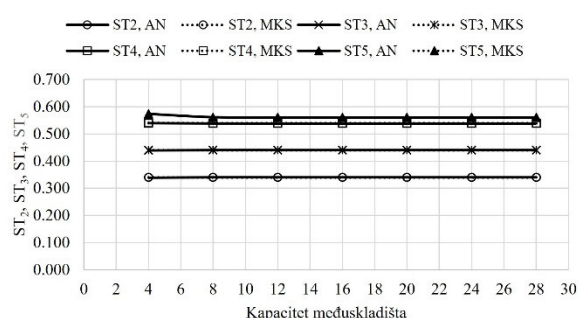
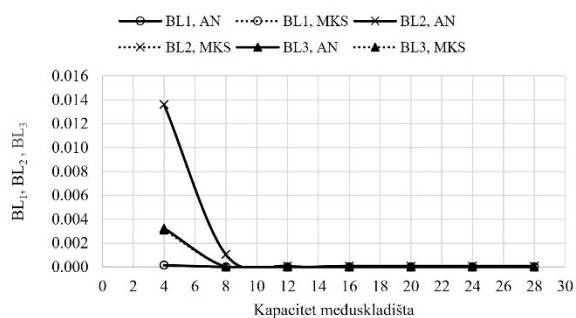
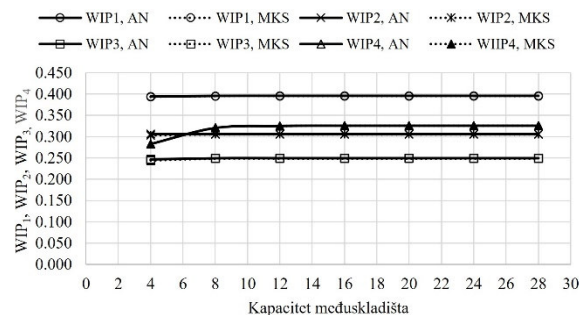
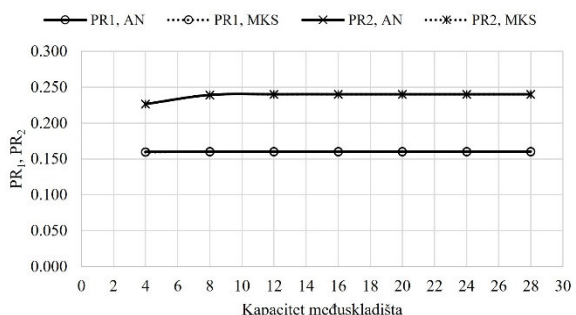


b)

Slika 4.10 Usporedba ključnih značajki, a) linija L5C,  $N_1=N_2=N_3=N_4=N$ , b) linija L5C,  $N_1=N$ ,  $N_2=3/4N$ ,  $N_3=1/2N$ ,  $N_4=1/4N$  [77]

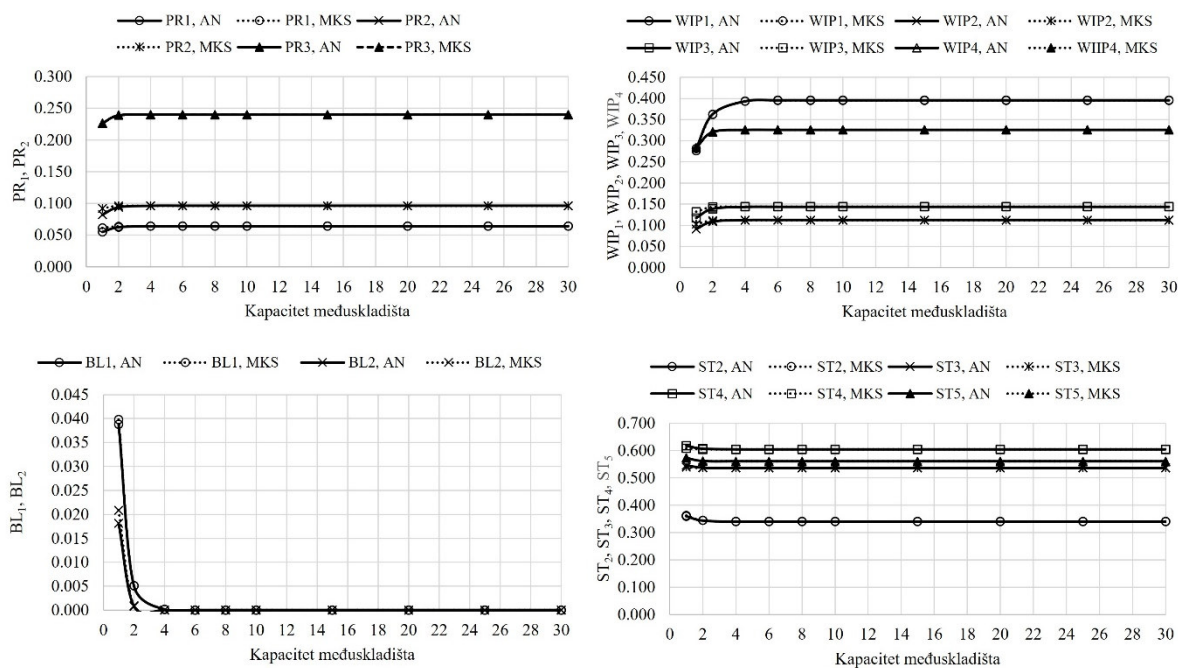


a)

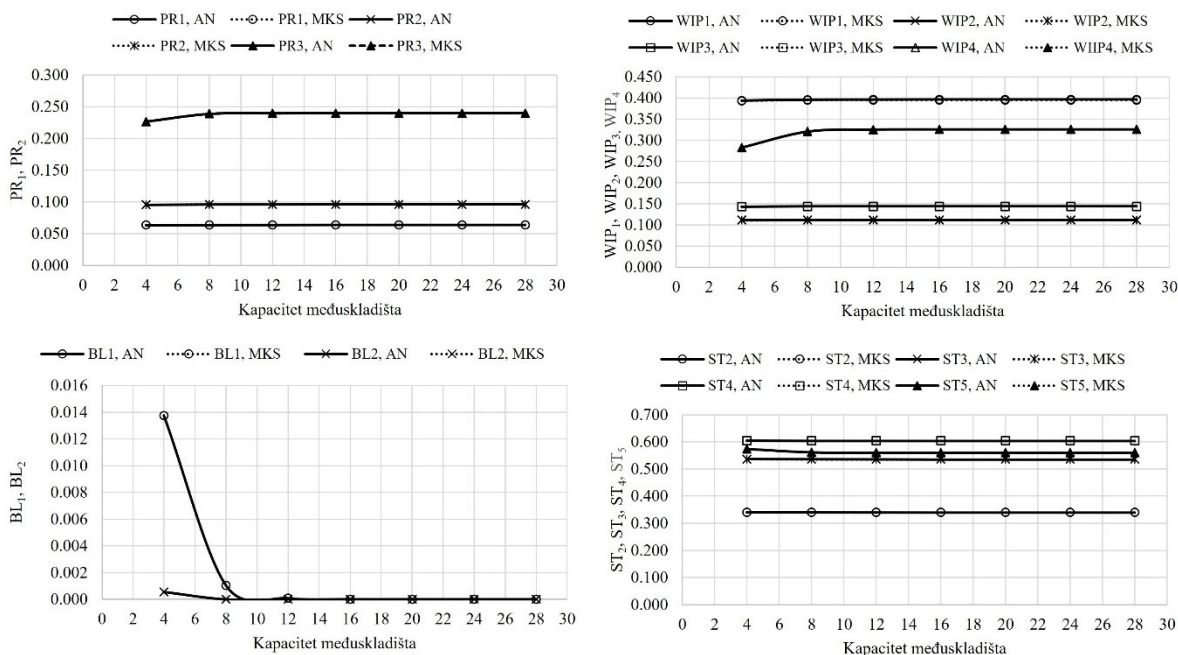


b)

Slika 4.11 Usporedba ključnih značajki, a) linija L5D,  $N_1=N_2=N_3=N_4=N$ , b) linija L5D,  $N_1=N$ ,  $N_2=3/4N$ ,  $N_3=1/2N$ ,  $N_4=1/4N$  [77]



a)



b)

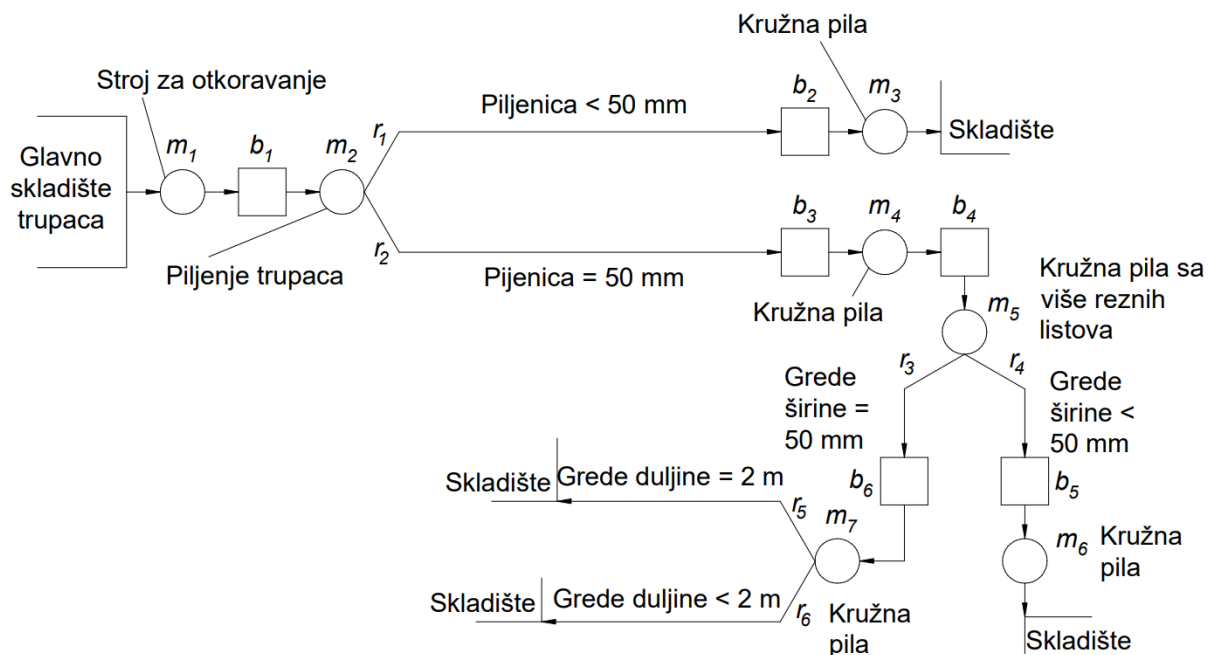
Slika 4.12 Usporedba ključnih značajki, a) linija L5E,  $N_1=N_2=N_3=N_4=N$ , b) linija L5E,  $N_1=N$ ,  $N_2=3/4N$ ,  $N_3=1/2N$ ,  $N_4=1/4N$  [77]

Navedeni teoretski primjeri linija s grananjem toka materijala s različitim konfiguracijama strojeva i međuskladištima služili su za usporedbu ključnih značajki dobiveni analitičkim putem i metodom konačnih stanja. Iz navedenih rezultata je vidljivo da poluanalitička metoda konačnih stanja daje gotovo jednake rezultate kao i analitičko rješenje problema. Razlike postoje u područjima malih kapaciteta međuskladišta radi grube diskretizacije malih sustava stanja. Međutim, slično serijskim linijama, povećavanjem kapaciteta međuskladišta vrijednosti ključnih značajki brzo konvergiraju prema najvećim odnosno najmanjim vrijednostima [34].

U prikazanim primjerima očekivani broj gotovih proizvoda u svakoj grani  $i$ ,  $PR_i$ , brzo konvergira prema  $p_m^i$ , izraz (4.16), što omogućuje predviđanje najvećeg broja gotovih proizvoda u svakoj grani  $i$ . Očekivani broj poluproizvoda na  $i$ -tom međuskladištu,  $WIP_i$ , također konvergira prema konstantnoj vrijednosti kako kapacitet međuskladišta raste. Uočljivo je da je  $WIP_i$  u slučaju linija L4A, L5A i L5B znatno veći nego u ostalim slučajevima, što je posljedica toga što se to skladište nalazi u glavnoj grani odnosno prije grananja toka materijala. Vjerojatnosti blokade  $i$ -tog stroja,  $BL_i$ , se u svim slučajevima i za svaki stroj  $i$ , približavaju vrijednosti nula s porastom kapaciteta međuskladišta, jer se time smanjuje vjerojatnost pojave potpune popunjenosti međuskladišta. Vjerojatnosti praznog hoda  $i$ -tog stroja,  $ST_i$ , konvergiraju prema vrijednosti koja je jednaka razlici između pouzdanosti  $i$ -tog stroja i najmanje pouzdan stroja u glavnoj grani odnosno umnošku faktora grananja i najmanje pouzdanog stroja u glavnoj grani, ovisno gdje se  $i$ -ti stroj nalazi.

#### 4.5 Primjena metode konačnih stanja za linije grananja

Metoda konačnih stanja za linije grananja bit će primijenjena u slučaju analize ključnih značajki pogona za preradu trupca u podne elemente, slika 4.13. Svrha ovog primjera je validacija metode konačnih stanja koristeći podatke prikupljene u naravi. Prvi stroj u liniji obrade trupca u podne elemente je stroj za otkoravanje  $m_1$ . Nakon otkoravanja trupci se transportiraju na međuskladište,  $b_1$ . Skladište je u naravi lančani transporter koji pomiče debla do stroja za rezanje piljenica različitih debljina,  $m_2$ . Piljenice debljine manje od 50 mm transportiraju se na međuskladište  $b_2$ , koje je u naravi lančani transporter koji prenosi piljenice na stroj za rezanje cirkularom,  $m_3$ , gdje operater piljenice reže na razne duljine za daljnju preradu. Piljenice debljine 50 mm usmjeravaju se na međuskladište  $b_3$  koje je također u naravi lančani transporter koji opskrbljuje cirkularnu pilu  $m_4$  gdje operater reže piljenice na različite duljine za međuskladište  $b_4$ . Operater na kružnoj pili  $m_5$  uzdužno reže piljenice na različite širine. Grede širine manje od 50 mm putuju na valjcima i lančanicima do međuskladišta  $b_5$  gdje se na poprečnoj kružnoj pili  $m_6$  režu na razne duljine za skladište. Grede širine 50 mm putuju na valjcima i lančanicima do međuskladišta  $b_6$  s kojeg se opskrbljuje CNC kružna pila koja prema uputama operatera reže grede na duljinu od 2 m ili manje. Grede duljine 2 m smještaju se na pripadnim paletama na jednom skladištu, a ostaci na drugom.



Slika 4.13 Shematski prikaz modela pogona za preradu trupca u podne elemente



Kako bi se omogućila potvrda matematičkog modela linija s grananjem tokova materijala, glavni izvršni direktor tvornice PPS Galeković je omogućio praćenje izrade podnih elemenata tijekom rujana 2020. godine. Na taj način su prikupljeni nužni tvornički podaci poput pouzdanost strojeva, kapaciteta međuskladišta, faktora grananja  $r_1 - r_6$ , trajanja ciklusa, broja gotovih proizvoda i broja poluproizvoda na međuskladištima. Pouzdanost stroja određena je omjerom vremena koje stroj provede u zastoju i ukupnog teoretskog vremena rada stroja. Ukupno teoretsko vrijeme rada stroja uključuje 5 radnih dana s jednom smjenom od 8 sati. Vrijeme ciklusa iznosi 13,3 s što je prosječno vrijeme potrebno za piljenje 1m duljine reza. Podaci prikupljeni iz proizvodnje su objedinjeni u Tablici 4.2.

Tablica 4.2 Prikupljeni podaci iz proizvodnje [77]

Postrojenje za preradu trupca							
Vrijeme ciklusa, [s]	13.3 s						
Vrijeme stanje {kvar}, [h]	$m_1$	$m_2$	$m_3$	$m_4$	$m_5$	$m_6$	$m_7$
	/	7	2.33	1.33	6	3.33	2.33
Pouzdanost strojeva	$p_1$	$p_2$	$p_3$	$p_4$	$p_5$	$p_6$	$p_7$
	1	0.956	0.985	0.992	0.962	0.979	0.985
Kapacitet međuskladišta	$N_1$	$N_2$	$N_3$	$N_4$	$N_5$	$N_6$	/
	13	6	4	6	11	6	
Faktori grananja	$r_1$	$r_2$	$r_3$	$r_4$	$r_5$	$r_6$	
	0.4	0.6	0.8	0.2	0.7	0.3	

Razmatrani pogon za preradu trupca u podne elemente je modeliran pomoću Bernoullijevih proizvodnih linija s grananjem toka materijala sastavljenih od šest strojeva, pet međuskladišta i tri točke grananja, koristeći metodu konačnih stanja. Stroj 1 će biti izuzet iz razmatranja s obzirom da njegova pouzdanost iznosi 1 i time ne utječe na svojstva linije. Svojtveni vektor za ustaljeni odziv cjelokupnog pogona se računao pomoću programa ShipProLab koji je izrađen u programskom jeziku Fortran [78]. Određene ključne značajke se uspoređuju s izmjerenim podacima u Tablici 4.3, iz koje je vidljivo da se podaci za očekivani broj gotovih proizvoda  $PR_{7A}$  i  $PR_{7B}$  poprilično dobro poklapaju. Odstupanja su vidljiva u slučaju očekivanog broja poluproizvoda ( $WIP$ ) na međuskladištima 2, 4, 5 i 6 kao posljedica pribrojavanja manjih pločastih i otpadnih elemenata. Uzimajući u obzir da su dobivene vrijednosti daleko od kapaciteta međuskladišta može se zaključiti da su dobivena odstupanja relativno mala. Dodatna odstupanja rezultata uzrokuju faktori grananja koji utječu na ključne značajke pojedinih tokova, a teško se mogu odrediti jer ovise o kvaliteti pojedinog trupca.

Tablica 4.3 Usporedba izmjerenih podataka sa izračunatim podacima prema metodi konačnih stanja [77]

Ključne značajke					
<i>PR</i>	<i>PR<sub>3</sub></i>	<i>PR<sub>6</sub></i>	<i>PR<sub>7A</sub></i>	<i>PR<sub>7B</sub></i>	
Tvornički podaci	/	/	0.331	0.176	
MKS	0.382	0.114	0.321	0.138	
<i>WIP</i>	<i>WIP<sub>2</sub></i>	<i>WIP<sub>3</sub></i>	<i>WIP<sub>4</sub></i>	<i>WIP<sub>5</sub></i>	<i>WIP<sub>6</sub></i>
Tvornički podaci	0.392	0.585	0.630	0.117	0.472
MKS	1.093	0.506	0.909	0.695	0.283
<i>BL</i>	<i>BL<sub>2</sub></i>	<i>BL<sub>4</sub></i>	<i>BL<sub>5</sub></i>		
Tvornički podaci*	n/a	n/a	n/a		
MKS	0	0	0		
<i>ST</i>	<i>ST<sub>3</sub></i>	<i>ST<sub>4</sub></i>	<i>ST<sub>5</sub></i>	<i>ST<sub>6</sub></i>	<i>ST<sub>7</sub></i>
Tvornički podaci*	n/a	n/a	n/a	n/a	n/a
MKS	0.603	0.418	0.388	0.865	0.526

\*nedostupni podaci iz proizvodnje za *BL* i *ST*

#### 4.6 Zaključak

Linija grananja toka materijala je kombinacija serijskih linija. Rješenje takvog sustava moguće je na analitički način i sa prilagođenom metodom konačnih stanja. Primjenom metoda konačnih stanja potrebno je sporedne grane povezati s dodatnim strojem koji je umnožak najmanje pouzdanog stroja glavne grane i faktora grananja,  $p_{m^i}$ . Analitičko rješenje se temelji na formiranju tranzicijske matrice putem konstitutivnih matrica, a metoda konačnih stanja na formiranju elemenata sa najmanje pouzdanim strojem u glavnoj grani ili sporednoj grani. Oboje metode na kraju rješavaju problem svojstvenog vektora za cijeli sustav putem kojeg se računaju ključne značajke. Iz prikazanog primjera je vidljivo da je metoda konačnih stanja primjenljiva također i na linije s grananjem toka materijala. Velika prednost te metode naspram analitičke je manje računalno opterećenje i značajno manja potreba za računalnom memorijom što je vrlo bitno za linije grananja toka materijala sa više strojeva i velikih kapaciteta međuskладиšta. Proračunsko vrijeme metode konačnih stanja se može izraziti u sekundama dok je kod analitičke metode potrebno u obzir uzeti tjedne, osobito za slučaj većih prostora stanja.



## 5. ANALIZA USKIH GRILA I PROJEKTIRANJE PROIZVODNIH SUSTAVA

Usko grlo je onaj stroj ili skladište čija diferencijalna promjena pripadnog svojstva uzrokuje najveći gradijent određene ključne značajke,  $KZ$ , odnosno vrijedi:

$$\frac{\partial KZ}{\partial \text{variabla}_i} > \frac{\partial KZ}{\partial \text{variabla}_j}, \forall j \neq i. \quad (5.1)$$

Stoga se uska grla mogu definirati s obzirom na očekivani broj gotovih proizvoda,  $PR$ , očekivani broj poluproizvoda na međuskladištima,  $WIP$ , vjerojatnost blokade strojeva,  $BL$ , i vjerojatnost praznog hoda strojeva,  $ST$ .

Analiza uskih grla linija s grananjem tokova materijala može se svesti na analizu uskih grla serijskih linija, [79], jer je takva linija u svojoj biti kombinacija više serijskih linija od kojih je jedna glavna grana, a ostale grane su sporedne. Pritom se faktor grananja  $r_i$  u sporednim granama smatra konstantom, jer je vezan uz svojstva proizvoda. Prema tome, izrazi vezani uz analizu uskih grla linija s grananjem tokova materijala slični su onima za serijske linije [79].

### 5.1 Usko grlo s obzirom na očekivani broj gotovih proizvoda

Ključna značajka očekivani broj gotovih proizvoda,  $PR$ , određuje se za svaku granu proizvodnog sustava koristeći izraze (4.16) i (4.17), odnosno prema metodi konačnih stanja vrijedi,

$$PR_i = p_{M_i} \left[ 1 - P_0^{(M_i-1)} \right], \quad M_i = \left( S + \sum_{i=1}^k R_i \right), \quad (5.2)$$

gdje  $i$  predstavlja redni broj grane koja se promatra,  $p_{M_i}$  pouzdanost zadnjeg stroja u  $i$ -toj grani,  $S$  ukupan broj strojeva u glavnoj grani,  $R_i$  ukupan broj strojeva u  $i$ -toj grani, a  $P_0^{(M_i-1)}$  je vjerojatnost pojave praznog skladišta zadnjeg elementa  $e=(M_i-1)$  u  $i$ -toj grani. Vjerojatnost pojave praznog skladišta zadnjeg elementa,  $P_0^{(M_i-1)}$ , zadana je izrazima (4.12) do (4.15) ovisno o tome je li riječ o elementima u smjeru suprotnom od smjera protoka materijala ili o elementima u smjeru protoka materijala. Prema tome za elemente u smjeru suprotnom od smjera protoka materijala vrijedi

$$PR_i = p_{M_i} \left[ 1 - \frac{(1-p_{M_{i-1}})(1-\alpha_{M_{i-1}})}{1 - \frac{p_{M_{i-1}}}{p_{M_i}} \alpha_{M_{i-1}}^{N_{M_{i-1}}}} \right], \quad \alpha_{M_{i-1}} = \frac{p_{M_{i-1}}(1-p_{M_i})}{p_{M_i}(1-p_{M_{i-1}})}, \quad (5.3)$$

gdje  $p_{M_{i-1}}$  može poprimiti vrijednost  $p_{m_i}$  u slučaju da se grana sastoji od samo jednog stroja.

Prema izrazu (5.3) ključna značajka broj gotovih proizvoda za  $i$ -tu granu,  $PR_i$ , je funkcija s tri varijable,  $PR_i = PR(p_{M_{i-1}}, p_{M_i}, N_{M_{i-1}})$  po kojima se stoga može derivirati, odnosno diferencirati, te vrijedi

$$\begin{aligned} \frac{\partial PR_i}{\partial p_{M_{i-1}}} &= \frac{p_{M_i}^2 (1-p_{M_{i-1}}) - p_{M_i} \alpha_{M_{i-1}}^{N_{M_{i-1}}} [N_{M_{i-1}}(p_{M_i} - p_{M_{i-1}}) + p_{M_i}(1-p_{M_{i-1}})]}{(1-p_{M_{i-1}})(p_{M_i} - p_{M_{i-1}} \alpha_{M_{i-1}}^{N_{M_{i-1}}})^2}, \\ \frac{\partial PR_i}{\partial p_{M_i}} &= \frac{p_{M_{i-1}} \alpha_{M_{i-1}}^{N_{M_{i-1}}} [N_{M_{i-1}}(p_{M_i} - p_{M_{i-1}}) - p_{M_{i-1}}(1-p_{M_i})(1-\alpha_{M_{i-1}}^{N_{M_{i-1}}})]}{(1-p_{M_i})(p_{M_i} - p_{M_{i-1}} \alpha_{M_{i-1}}^{N_{M_{i-1}}})^2}, \\ \Delta N_{M_{i-1}}(PR) &= p_{M_i} \left[ \frac{(1-p_{M_{i-1}})(1-\alpha_{M_{i-1}})}{1 - \frac{p_{M_{i-1}}}{p_{M_i}} \alpha_{M_{i-1}}^{N_{M_{i-1}}}} - \frac{(1-p_{M_{i-1}})(1-\alpha_{M_{i-1}})}{1 - \frac{p_{M_{i-1}}}{p_{M_i}} \alpha_{M_{i-1}}^{N_{M_{i-1}}+1}} \right]. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Prikladan način usporedbe izraza (5.4), je oduzimanje jedne funkcije od druge, što rezultira funkcijom razlika koja je preslik ranga veličine. Prva takva funkcija je razlika između  $\frac{\partial PR}{\partial p_{M_{i-1}}}$

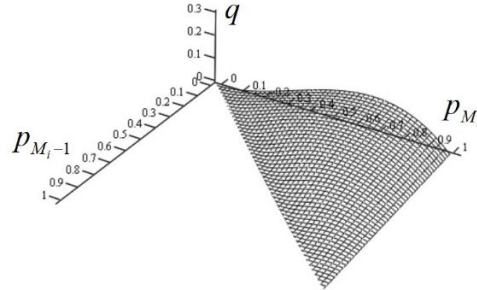
i  $\frac{\partial PR}{\partial p_{M_i}}$  što daje

$$\begin{aligned} q(p_{M_{i-1}}, p_{M_i}, N_{M_{i-1}}) &= \frac{\partial PR}{\partial p_{M_{i-1}}} - \frac{\partial PR}{\partial p_{M_i}} = \\ &= \left\{ p_{M_i}^2 (1-p_{M_{i-1}})(1-\alpha_{M_{i-1}}^{N_{M_{i-1}}}) - N_{M_{i-1}} p_{M_i} \alpha_{M_{i-1}}^{N_{M_{i-1}}} (p_{M_i} - p_{M_{i-1}}) \right\} (1-p_{M_i}) - \\ &= p_{M_{i-1}} \alpha_{M_{i-1}}^{N_{M_{i-1}}} \left[ N_{M_{i-1}} (p_{M_i} - p_{M_{i-1}}) - p_{M_{i-1}} (1-p_{M_i})(1-\alpha_{M_{i-1}}^{N_{M_{i-1}}}) \right] (1-p_{M_{i-1}}). \end{aligned} \quad (5.5)$$

Iz jednadžbe (5.5) vidljivo je da je član  $p_{M_i}^2 (1-p_{M_{i-1}})(1-\alpha_{M_{i-1}}^{N_{M_{i-1}}})$  značajno veći u usporedbi s ostatkom izraza. Također se može ustanoviti da je izraz (5.5) uvijek pozitivan u području  $0 < p_{M_{i-1}} < 1$ ,  $0 < p_{M_i} < 1$ ,  $p_{M_i} \geq p_{M_{i-1}}$ , i  $N_{M_{i-1}} \geq 0$ , vidi sliku 5.1, prema tome, može se zaključiti

da je funkcija  $q(p_{M_i-1}, p_{M_i}, N_{M_i-1})$  uvijek pozitivna u razmatranom području, odnosno da je

$$\frac{\partial PR}{\partial p_{M_i-1}} > \frac{\partial PR}{\partial p_{M_i}}.$$



Slika 5.1 Prikaz funkcije  $q(p_{M_i-1}, p_{M_i}, N_{M_i-1})$  u zadanoj domeni [79]

Do jednakog zaključka dolazi se oduzimanjem  $\Delta N_{M_i-1}(PR)$  od  $\frac{\partial PR}{\partial p_{M_i-1}}$  prije svega zbog dominacije člana  $p_{M_i}^2(1-p_{M_i-1})$  u izrazima.

Za elemente u smjeru protoka materijala vrijedi sličan izraz,

$$PR_i = p_{M_i} \left[ 1 - \frac{(1-p_{m_i})(1-\alpha_{M_i-1})}{1 - \frac{p_{m_i}}{p_{M_i}} \alpha_{M_i-1}^{N_{M_i-1}}} \right], \quad \alpha_{M_i-1} = \frac{p_{m_i}(1-p_{M_i})}{p_{M_i}(1-p_{m_i})}, \quad (5.6)$$

gdje  $p_{m_i}$  može poprimiti vrijednost  $p_{m_i}$  u slučaju da se grana sastoji od samo jednog stroja ili da je taj umnožak ujedno i najmanje pouzdan stroj u toj grani. Kao i u prethodnom slučaju vrijedi

$$\begin{aligned} \frac{\partial PR_i}{\partial p_{m_i}} &= \frac{p_{M_i}^2(1-p_{m_i}) - p_{M_i} \alpha_{M_i-1}^{N_{M_i-1}} [N_{M_i-1}(p_{M_i} - p_{m_i}) + p_{M_i}(1-p_{m_i})]}{(1-p_{m_i})(p_{M_i} - p_{m_i} \alpha_{M_i-1}^{N_{M_i-1}})^2}, \\ \frac{\partial PR_i}{\partial p_{M_i}} &= \frac{p_{m_i} \alpha_{M_i-1}^{N_{M_i-1}} [N_{M_i-1}(p_{M_i} - p_{m_i}) - p_{m_i}(1-p_{M_i})(1-\alpha_{M_i-1}^{N_{M_i-1}})]}{(1-p_{M_i})(p_{M_i} - p_{m_i} \alpha_{M_i-1}^{N_{M_i-1}})^2}, \\ \Delta N_{M_i-1}(PR) &= p_{M_i} \left[ \frac{(1-p_{m_i})(1-\alpha_{M_i-1})}{1 - \frac{p_{m_i}}{p_{M_i}} \alpha_{M_i-1}^{N_{M_i-1}}} - \frac{(1-p_{m_i})(1-\alpha_{M_i-1})}{1 - \frac{p_{m_i}}{p_{M_i}} \alpha_{M_i-1}^{N_{M_i-1}+1}} \right]. \end{aligned} \quad (5.7)$$

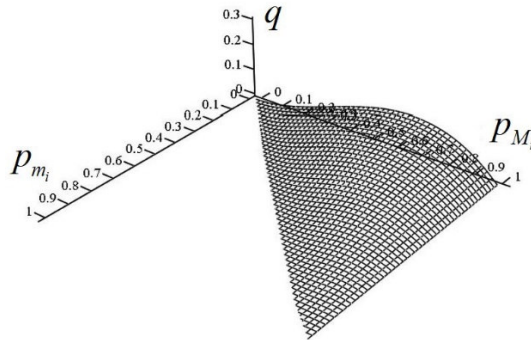
Ponovno, prikladan način usporedbe, izraza (5.7), je oduzimanje jedne funkcije od druge, što rezultira funkcijom razlika koja je preslik ranga veličine. Prva takva funkcija je razlika između

$$\frac{\partial PR}{\partial p_{m_i}} \text{ i } \frac{\partial PR}{\partial p_{M_i}} \text{ što daje}$$

$$q(p_{m_i}, p_{M_i}, N_{M_i-1}) = \frac{\partial PR}{\partial p_{m_i}} - \frac{\partial PR}{\partial p_{M_i}} = \left\{ p_{M_i}^2 (1 - p_{m_i}) - p_{M_i} \alpha_{M_i-1}^{N_{M_i-1}} \left[ N_{M_i-1} (p_{M_i} - p_{m_i}) + p_{M_i} (1 - p_{m_i}) \right] \right\} (1 - p_{M_i}) - p_{m_i} \alpha_{M_i-1}^{N_{M_i-1}} \left[ N_{M_i-1} (p_{M_i} - p_{m_i}) - p_{m_i} (1 - p_{M_i}) (1 - \alpha_{M_i-1}^{N_{M_i-1}}) \right] (1 - p_{m_i}). \quad (5.8)$$

Iz jednadžbe (5.8) vidljivo je da je član  $p_{M_i}^2 (1 - p_{m_i})$  značajno veći u usporedbi s ostatkom izraza. Također se može ustanoviti da je izraz (5.8) uvijek pozitivan u području  $0 < p_{m_i} < 1$ ,  $0 < p_{M_i} < 1$ ,  $p_{M_i} \geq p_{m_i}$ , i  $N_{M_i-1} \geq 0$ , vidi sliku 5.2, prema tome, može se zaključiti da je funkcija

$q(p_{m_i}, p_{M_i}, N_{M_i-1})$  uvijek pozitivna u razmatranom području, odnosno da je  $\frac{\partial PR}{\partial p_{m_i}} > \frac{\partial PR}{\partial p_{M_i}}$ .



Slika 5.2 Prikaz funkcije  $q(p_{m_i}, p_{M_i}, N_{M_i-1})$  u zadanoj domeni [79]

Do jednakog zaključka dolazi se oduzimanjem  $\Delta N_{M_i-1}(PR)$  od  $\frac{\partial PR}{\partial p_{m_i}}$  prije svega zbog

dominacije člana  $p_{M_i}^2 (1 - p_{m_i})$  u izrazima.

Iz svega navedenoga se može zaključiti da je najmanje pouzdan stroj u promatranoj grani, bilo u smjeru suprotno od toka materijala ili u smjeru toka materijala, ujedno i usko grlo te grane s obzirom na očekivani broj gotovih proizvoda,  $BN_{PR}$ .

## 5.2 Usko grlo s obzirom na očekivani broj poluproizvoda

Ključna značajka očekivanog broja poluproizvoda na međuskladištima određuje se za svako međuskladište prema izrazu (4.18) koristeći elemente svojstvenog vektora, a prema metodi konačnih stanja vrijedi,

$$WIP_i = WIP_e = \sum_{i_e=1}^{N_e} i_e P_{Z_{e_i}}^{(e_i)}, \quad (5.9)$$

gdje je  $i_e$  broj poluproizvoda na međuskladištu elementa  $e$  i  $P_{Z_{i_e}}^{(e_i)}$  vjerojatnost da se na tom međuskladištu nalazi  $i_e$  poluproizvoda. Vjerojatnost pojave  $i_e$ -tog stanja na promatranom skladištu,  $P_{Z_{i_e}}^{(e_i)}$ , može se opisati izrazima (4.12) do (4.15) ovisno o tome je li riječ o elementima u smjeru suprotnom od smjera protoka materijala ili o elementima u smjeru protoka materijala. Zbrajanje očekivanog broja poluproizvoda na međuskladištima,  $WIP_i$ , odvija se po glavnoj grani i sporednim granama, što omogućuje primjenu izraza za serijsku liniju [79]. Prema tome ukupni broj poluproizvoda na međuskladištima u glavnoj grani,  $WIP_{GL}$ , iznosi

$$WIP_{GL} = \sum_{i=1}^{S-1} WIP_i = \sum_{i=1}^{S-1} \sum_{i_e=1}^{N_e} i_e P_{Z_{e_i}}^{(e_i)}, \quad (5.10)$$

uzimajući smjer elemenata u obzir onda se može pisati,

$$WIP_{GL} = \sum_{e=1}^m \frac{(1-p_e)(1-\alpha_e)}{1-\frac{p_e}{p_m}(\alpha_e)^{N_e}} \left( \sum_{i_e=0}^{N_e} i_e \frac{\alpha_e^{i_e}}{1-p_m} \right) + \sum_{e=m}^{S-1} \frac{(1-p_m)(1-\alpha_e)}{1-\frac{p_m}{p_{e+1}}(\alpha_e)^{N_e}} \left( \sum_{i_e=0}^{N_e} i_e \frac{\alpha_e^{i_e}}{1-p_{e+1}} \right). \quad (5.11)$$

Ukupni broj poluproizvoda na međuskladištima u prvoj sporednoj grani,  $WIP_{R_1}$ , iznosi

$$WIP_{R_1} = \sum_{i=S}^{S+R_1-1} WIP_i = \sum_{i=S}^{S+R_1-1} \sum_{i_e=1}^{N_e} i_e P_{Z_{e_i}}^{(e_i)}. \quad (5.12)$$

Vodeći računa o smjerovima elementa vrijedi,

$$WIP_{R_1} = \sum_{e=S}^{m_i} \frac{(1-p_e)(1-\alpha_e)}{1-\frac{p_e}{p_{m_i}}(\alpha_e)^{N_e}} \left( \sum_{i_e=0}^{N_e} i_e \frac{\alpha_e^{i_e}}{1-p_{m_i}} \right) + \sum_{e=m_i}^{S+R_1-1} \frac{(1-p_{m_i})(1-\alpha_e)}{1-\frac{p_{m_i}}{p_{e+1}}(\alpha_e)^{N_e}} \left( \sum_{i_e=0}^{N_e} i_e \frac{\alpha_e^{i_e}}{1-p_{e+1}} \right). \quad (5.13)$$

Primjenjujući isti pristup za ostale grane slijedi da je ukupni broj poluproizvoda u međuskladištima cijelog sustava jednak,

$$WIP = WIP_{GL} + WIP_{R_1} + WIP_{R_2} + \dots + WIP_{R_i}. \quad (5.14)$$

S obzirom da je za opći slučaj izraz (5.12) vrlo složen, te uključuje značajan broj varijabli, nije moguće odrediti jedinstveno rješenje problema uskog grla. Ipak, detaljnijom analizom parcijalnih derivacija, moguće je donijeti smjernice za identifikaciju uskih grla s obzirom na ukupni broj poluproizvoda. Stoga za slučaj glavne grane slijedi,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial WIP_{GL}}{\partial p_m} &= \sum_{e=1}^{m-1} \sum_{i_e=1}^{N_e} \frac{i_e \alpha_e^{i_e} \left\{ p_m \left[ p_m (p_m - i_e) + p_e (1 - 2p_m - \alpha_e^{N_e} + i_e) \right] + \alpha_e^{N_e} p_e \left[ p_e (N_e - i_e) + p_m (p_e - N_e + i_e) \right] \right\}}{p_m (1 - p_m)^2 (p_m - p_e \alpha_e^{N_e})^2} + \\
&\quad \sum_{e=m}^{S-1} \sum_{i_e=1}^{N_e} \frac{i_e \alpha_e^{i_e} \left\{ p_{e+1} \left[ i_e p_{e+1} + p_m (p_m + \alpha_e^{N_e} - i_e - 1) + \alpha_e^{N_e} p_m \left[ p_m (i_e - N_e) - p_{e+1} (p_m - N_e + i_e) \right] \right] \right\}}{p_m (1 - p_m) (1 - p_{e+1}) (p_{e+1} - p_m \alpha_e^{N_e})^2}, \\
\frac{\partial WIP_{GL}}{\partial p_e} &= \sum_{i_e=1}^{N_e} \frac{i_e \alpha_e^{i_e} \left\{ p_{e+1} \left[ p_{e+1} (p_{e+1} - i_e) + p_m (1 - 2p_{e+1} - \alpha_e^{N_e} + i_e) \right] + \alpha_e^{N_e} p_m \left[ p_m (N_e - i_e) + p_{e+1} (p_m - N_e + i_e) \right] \right\}}{p_{e+1} (1 - p_{e+1})^2 (p_{e+1} - p_m \alpha_e^{N_e})^2}, \quad e > m, \\
\Delta_{N_e} (WIP_{GL}) &= \frac{(1 - p_e)(1 - \alpha_e)}{1 - \frac{p_e}{p_m} (\alpha_e)^{N_e+1}} \left( \sum_{i_e=0}^{N_e+1} i_e \frac{\alpha_e^{i_e}}{1 - p_m} \right) - \frac{(1 - p_e)(1 - \alpha_e)}{1 - \frac{p_e}{p_m} (\alpha_e)^{N_e}} \left( \sum_{i_e=0}^{N_e} i_e \frac{\alpha_e^{i_e}}{1 - p_m} \right), \quad e < m, \\
\Delta_{N_e} (WIP_{GL}) &= \frac{(1 - p_m)(1 - \alpha_e)}{1 - \frac{p_m}{p_{e+1}} (\alpha_e)^{N_e+1}} \left( \sum_{i_e=0}^{N_e+1} i_e \frac{\alpha_e^{i_e}}{1 - p_{e+1}} \right) - \frac{(1 - p_m)(1 - \alpha_e)}{1 - \frac{p_m}{p_{e+1}} (\alpha_e)^{N_e}} \left( \sum_{i_e=0}^{N_e} i_e \frac{\alpha_e^{i_e}}{1 - p_{e+1}} \right), \quad e \geq m,
\end{aligned} \tag{5.15}$$

gdje je  $\alpha_e = p_e(1 - p_m) / p_m(1 - p_e)$  ako je  $e < m$  ili  $\alpha_e = p_m(1 - p_{e+1}) / p_{e+1}(1 - p_m)$  ako je  $e \geq m$ .

Daljnja pojednostavljenja izraza (5.13) nisu moguća radi njegove složenosti, ali je moguće dati sljedeće napomene [79]:

- $\partial WIP_{GL} / \partial p_e$ ,  $e < m$ , izraz je uvijek pozitivan za promatranu domenu, sva poboljšanja  $p_e$  rezultiraju s povećanjem očekivanog broja poluproizvoda na svim skladištima u glavnoj grani.
- $\partial WIP_{GL} / \partial p_e$ ,  $e > m$ , izraz je uvijek negativan za promatranu domenu, sva poboljšanja  $p_e$  rezultiraju sa smanjenjem očekivanog broja poluproizvoda na svim skladištima u glavnoj grani
- bilo koje poboljšanje najmanje pouzdanog stroja  $m_m$  će povećati ili smanjiti ukupni broj poluproizvoda u međuskladištima u glavnoj grani ovisno o prevladavajućem doprinosu elemenata u smjeru suprotnom od smjera protoka materijala ili u smjeru protoka materijala.
- $\Delta_{N_e}(WIP_{GL})$  je uvijek pozitivan u slučaju elementa u suprotnom smjeru protoka materijala ( $e < m$ ), svako povećanje kapaciteta međuskladišta pridonosi povećanju broja poluproizvoda u međuskladištima
- $\Delta_{N_e}(WIP_{GL})$  je uvijek pozitivan u slučaju elementa u smjeru protoka materijala ( $e > m$ ), bilo koje povećanje kapaciteta međuskladišta povećava broj poluproizvoda na međuskladištima. Međutim kako se  $N_e$  povećava tako se konačna razlika smanjuje prema vrijednosti nula i ukupni broj poluproizvoda u glavnoj grani postaje nezavisan od kapaciteta međuskladišta.

Prema tome može se zaključiti da postoje dvije vrste uskih grla s obzirom na očekivani broj poluproizvoda, ono pozitivno i negativno: usko grlo s obzirom na očekivani broj poluproizvoda s najvećom pozitivnom parcijalnom derivacijom odnosno diferencijom,  $BN_{WIP}^+$ , i usko grlo s obzirom na očekivani broj poluproizvoda s najvećom negativnom parcijalnom derivacijom odnosno diferencijacijom,  $BN_{WIP}^-$ . Svi zaključci doneseni za glavnu granu, zbog sličnosti vrijede i za ostale grane sustava.



### 5.3 Usko grlo s obzirom na vjerojatnost blokade stroja

Ključna značajka vjerojatnosti blokade pojedinog stroja određuje se prema izrazu (4.19) koristeći elemente svojstvenog vektora. Primjenom metode konačnih stanja taj izraz se može pojednostaviti na sljedeći način,

$$BL_i = p_i (1 - p_{i+1} + BL_{i+1}) P_{N_e}^{(e=i)}, \quad (5.16)$$

gdje je  $p_i$  pouzdanost rada  $i$ -tog stroja,  $p_{i+1}$  pouzdanost rada  $i+1$ -og stroja,  $P_{N_e}^{(e=i)}$  vjerojatnost da je skladište elemente  $e=i$  popunjeno, a  $BL_{i+1}$ , vjerojatnost da je stroj  $i+1$  u blokadi. Kao i kod serijskih linija, postupak određivanja vjerojatnosti blokade započinje od zadnjeg stroja u svakoj grani, pri tome važi pretpostavka da je vjerojatnost blokade zadnjeg stroja  $m_{M_i}$  jednaka nuli,  $BL_{M_i} = 0$ , [79]. Ukupna razina vjerojatnosti blokade jedne grane može se odrediti kao suma svih blokada u toj grani. Stoga za, primjerice, granu 1 vrijedi:

$$BL_{R_1} = \sum_{i=S+1}^{S+R_1-1} p_i (1 - p_{i+1} + BL_{i+1}) P_{N_e}^{(e=i)}, \quad (5.17)$$

raspisivanjem izraza (5.17) sljedi,

$$\begin{aligned} BL_{R_1} = & \sum_{i=S+1}^{S+R_1-1} P_{N_i}^{(i)} p_i - \sum_{i=S+1}^{S+R_1-1} P_{N_i}^{(i)} p_i p_{i+1} + \\ & \sum_{i=S+1}^{S+R_1-2} P_{N_i}^{(i)} P_{N_i}^{(i+1)} p_i p_{i+1} - \sum_{i=S+1}^{S+R_1-2} P_{N_i}^{(i)} P_{N_i}^{(i+1)} p_i p_{i+1} p_{i+2} + \\ & \sum_{i=S+1}^{S+R_1-3} P_{N_i}^{(i)} P_{N_i}^{(i+1)} P_{N_i}^{(i+2)} p_i p_{i+1} p_{i+2} - \sum_{i=S+1}^{S+R_1-3} P_{N_i}^{(i)} P_{N_i}^{(i+1)} P_{N_i}^{(i+2)} p_i p_{i+1} p_{i+2} p_{i+3} + \dots \end{aligned} \quad (5.18)$$

Budući da su  $P_{N_i}^{(i)} < 1$  i  $p_i < 1$ , sve sume u izrazu (5.18) se mogu smatrati kao veličine manjeg reda u odnosu na prvu, te vrijedi da je ukupna razina vjerojatnost blokade u prvoj grani  $BL_{R_1}$  približno jednaka

$$BL_{R_1} \approx \sum_{i=S+1}^{S+R_1-1} P_{N_i}^{(i)} p_i. \quad (5.19)$$

Primjenom izraza (5.19) na sve grane proizvodnog sustava, slijedi da je

$$\begin{aligned}
BL &\approx BL_{GL} + BL_S + BL_{R_1} + BL_{R_2} \dots, \\
BL &\approx \sum_{i=1}^{S-1} P_{N_i}^{(i)} p_i + \sum_{ik=1}^{ik} P_{N_{ik}}^{(S+1)} p_s r_{ik} + \sum_{i=S+1}^{S+R_1-1} P_{N_i} p_i + \sum_{i=S+1+R_1}^{S+R_1+R_2-1} P_{N_i} p_i + \dots,
\end{aligned} \tag{5.20}$$

gdje je  $P_{N_{ik}}^{(S+1)}$  vjerojatnost da je prvo skladište u svakoj  $i$ -toj grani puno.

Analiza uskog grla s obzirom na blokadu strojeva može se svesti na analizu uskih grla za glavnu granu ili sporedne grane [79]. Radi preglednosti ovdje će se prikazati parcijalna derivacija i diferencijacija samo za slučaj sporedne grane,  $BL_{R_1}$ . Stoga slijedi,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial BL_{R_1}}{\partial p_i} &= \frac{\alpha_i^{N_i} \left\{ p_i^2 \alpha_i^{N_i} (1-p_i) + p_{m_i} \left[ N_i (p_{m_i} - p_i) - p_i (p_{m_i} + 2) \right] - 2p_i^2 - p_{m_i} \right\}}{(1-p_i)(1-p_{m_i})(p_{m_i} - p_i \alpha_i^{N_i})^2}, \quad i < m_i, \\
\frac{\partial BL_{R_1}}{\partial p_{m_i}} &= \sum_{i=S+1}^{m_i-1} \frac{p_i \alpha_i^{N_i} \left[ p_i + p_i \alpha_i^{N_i} (p_i - 1) + N_i (p_i - p_{m_i}) + p_{m_i} (p_{m_i} - 2p_i) \right]}{(1-p_{m_i})^2 (p_{m_i} - p_i \alpha_i^{N_i})^2} + \\
&\quad \frac{\alpha_{m_i}^{N_{m_i}} \left\{ p_{m_i} \alpha_{m_i}^{N_{m_i}} (1-p_{m_i}) + N_{m_i} p_{m_i+1} (p_{m_i+1} - p_{m_i}) - p_{m_i+1} \left[ p_{m_i} (p_{m_i+1} + 2) + 2p_{m_i}^2 + p_{m_i+1} \right] \right\}}{(1-p_{m_i})(1-p_{m_i+1})(p_{m_i+1} - p_{m_i} \alpha_{m_i}^{N_{m_i}})^2} + \\
&\quad \sum_{i=m_i+1}^{S+R_1-1} \frac{p_i p_{i+1} \alpha_i^{N_i} \left[ p_m (1-p_m) (\alpha_i^{N_i} - 1) - N_i (p_{m_i} - p_{i+1}) \right]}{p_{m_i} (1-p_{m_i}) (1-p_{i+1}) (p_{i+1} - p_{m_i} \alpha_i^{N_i})^2}, \\
\frac{\partial BL_{R_1}}{\partial p_i} &= \frac{p_{i-1} \alpha_{i-1}^{N_{i-1}} \left\{ p_{m_i} \left[ \alpha_{i-1}^{N_{i-1}} (p_{m_i} - 1) + 1 \right] + p_i (p_i - 2p_{m_i}) - N_{i-1} (p_i - p_{m_i}) \right\}}{(1-p_i)^2 (p_i - p_{m_i} \alpha_{i-1}^{N_{i-1}})^2} + P_{N_i}^{(i)}, \quad i = m_i + 1, m_i + 2, \dots, M_i - 1, \\
\frac{\partial BL_{R_1}}{\partial p_{M_i}} &= \frac{p_{M_i-1} \alpha_{M_i-1}^{N_{M_i-1}} \left\{ p_{m_i} \left[ \alpha_{M_i-1}^{N_{M_i-1}} (p_{m_i} - 1) + 1 \right] + p_{M_i} (p_{M_i} - 2p_{m_i}) - N_{M_i-1} (p_{M_i} - p_{m_i}) \right\}}{(1-p_{M_i})^2 (p_{M_i} - p_{m_i} \alpha_{M_i-1}^{N_{M_i-1}})^2}, \\
\Delta_{N_i} (BL_{R_1}) &= \frac{p_i (1-p_i) (1-\alpha_1)}{(1-p_{m_i})} \left( \frac{\alpha_i^{N_i+1}}{1 - \frac{p_i}{p_{m_i}} \alpha_i^{N_i+1}} - \frac{\alpha_i^{N_i}}{1 - \frac{p_i}{p_{m_i}} \alpha_i^{N_i}} \right), \quad i < m_i, \\
\Delta_{N_i} (BL_{R_1}) &= \frac{p_i (1-p_{m_i}) (1-\alpha_1)}{(1-p_{i+1})} \left( \frac{\alpha_i^{N_i+1}}{1 - \frac{p_{m_i}}{p_{i+1}} \alpha_i^{N_i+1}} - \frac{\alpha_i^{N_i}}{1 - \frac{p_{m_i}}{p_{i+1}} \alpha_i^{N_i}} \right), \quad i = m_i, m_i + 1, \dots, M_i - 1.
\end{aligned} \tag{5.21}$$

Daljnja pojednostavljenja izraza (5.21) nisu moguća radi njihove složenosti, odnosno za određivanje uskog grla s obzirom na blokadu strojeva, potreban je proračun za svaku konfiguraciju zasebno. Međutim, moguće je donijeti sljedeće zaključke za prvu granu, koje važe i za sve ostale sporedne grane ili glavnu granu [79]:

- $\partial BL_{R_l} / \partial p_i$  je uvijek pozitivan za  $i < m$ , bilo koje poboljšanje  $p_i$  će povećati ukupnu vjerojatnost blokade u sporednoj grani  $R_l$ .
- $\partial BL_{R_l} / \partial p_{M_i}$  i  $\Delta_{N_i}(BL_{R_l})$  su uvijek negativni, bilo koje poboljšanje  $p_{M_i}$  i/ili  $N_i$  će smanjiti ukupnu vjerojatnost blokade u sporednoj grani  $R_l$ .
- Bilo koje poboljšanje  $p_{m_i}$  i/ili  $p_i$ ,  $i=m+1, m+2, \dots, M-1$ , će smanjiti ili povećati ukupnu vjerojatnost blokade u sporednoj grani  $R_l$  ovisno o prevladavajućem doprinosu konačnih elementa uzduž sporedne grane  $R_l$ .

Prema tome može se zaključiti da postoje dvije vrste uskih grla s obzirom na vjerojatnost blokade stroja, pozitivno i negativno: usko grlo s obzirom na vjerojatnost blokade stroja s najvećom pozitivnom parcijalnom derivacijom odnosno diferencijacijom,  $BN_{BL}^+$ , i usko grlo s obzirom na vjerojatnost blokade stroja s najvećom negativnom parcijalnom derivacijom odnosno diferencijacijom,  $BN_{BL}^-$ .

#### 5.4 Usko s obzirom na vjerojatnost praznog hoda stroja

Ključna značajka vjerojatnosti praznog hoda stroja određuje se prema izrazu (4.22) koristeći elemente svojstvenog vektora. Primjenom metode konačnih stanja taj izraz se može pojednostaviti na sljedeći način,

$$ST_i = p_i P_0^{(e=i-1)}, \quad (5.22)$$

gdje je  $p_i$  vjerojatnost da stroj  $i$  radi, a  $P_0^{(e=i-1)}$  vjerojatnost da je skladište prethodnog elementa  $e=i-1$  prazno. Ukupna razina vjerojatnosti praznog hoda linije grananja je suma pojedinih vjerojatnosti,

$$ST = \sum_{i=2}^M p_i P_0^{(e=i-1)}, \quad (5.23)$$

a pripadne parcijalne derivacije i diferencije glase:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial ST}{\partial p_1} &= \frac{-p_2 \left[ p_m (1-p_1)(1-\alpha_1^{N_1}) + N_1 \alpha_1^{N_1} (p_1 - p_m) \right]}{(1-p_1)(p_m - p_1 \alpha_1^{N_1})^2}, \\
\frac{\partial ST}{\partial p_i} &= P_0^{(e=i-1)} + \frac{p_i \left[ p_m (1-p_{i-1})(1-\alpha_{i-1}^{N_{i-1}}) + N_{i-1} \alpha_{i-1}^{N_{i-1}} (p_{i-1} - p_m) \right]}{(1-p_{i-1})(p_m - p_{i-1} \alpha_{i-1}^{N_{i-1}})^2}, \quad i = 2, 3, \dots, m-1, \\
\frac{\partial ST}{\partial p_m} &= \sum_{i=2}^{m-1} \frac{p_{i-1} p_i \left[ p_m (1-p_m)(1-\alpha_{i-1}^{N_{i-1}}) + N_{i-1} \alpha_{i-1}^{N_{i-1}} (p_{i-1} - p_m) \right]}{p_m (1-p_m)(p_m - p_{i-1} \alpha_{i-1}^{N_{i-1}})^2} + \\
&\quad \frac{p_m^2 (1-p_m) + p_{m-1} \alpha_{m-1}^{N_{m-1}} \left[ (p_{m-1} - 2p_m)(1-p_m) + N_{m-1} (p_{m-1} - p_m) \right]}{(1-p_m)(p_m - p_{m-1} \alpha_{m-1}^{N_{m-1}})^2} + \\
&\quad \sum_{i=m+1}^M \frac{p_i \left[ p_i (1-p_m)(1-\alpha_{i-1}^{N_{i-1}}) - N_{i-1} \alpha_{i-1}^{N_{i-1}} (p_i - p_m) \right]}{(1-p_m)(p_i - p_m \alpha_{i-1}^{N_{i-1}})^2}, \\
\frac{\partial ST}{\partial p_i} &= \frac{p_i^2 (1-p_i) + p_m \alpha_{i-1}^{N_{i-1}} \left[ (p_m - 2p_i)(1-p_i) + N_{i-1} (p_m - p_i) \right]}{(1-p_i)(p_i - p_m \alpha_{i-1}^{N_{i-1}})^2}, \quad i > m, \\
\Delta_{N_i}(ST) &= p_i (1-p_{i-1})(1-\alpha_{i-1}) \left( \frac{1}{1 - \frac{p_{i-1}}{p_m} \alpha_{i-1}^{N_{i-1}+1}} - \frac{1}{1 - \frac{p_{i-1}}{p_m} \alpha_{i-1}^{N_{i-1}}} \right), \quad i = 1, 2, \dots, m-1, \\
\Delta_{N_i}(ST) &= p_i (1-p_m)(1-\alpha_{i-1}) \left( \frac{1}{1 - \frac{p_m}{p_i} \alpha_{i-1}^{N_{i-1}+1}} - \frac{1}{1 - \frac{p_m}{p_i} \alpha_{i-1}^{N_{i-1}}} \right), \quad i = m, m+1, \dots, M-1.
\end{aligned} \tag{5.24}$$

Jednadžbe (5.24) se ne mogu dalje pojednostaviti, zato je potrebno za svaku konfiguraciju izračunati zasebno uska grla, odnosno u općem slučaju vrijedi:

- $\partial ST / \partial p_1$ , je uvijek negativna, povećanje  $p_1$  smanjuje ukupnu vjerojatnost praznog hoda linije.
- $\partial ST / \partial p_i$ ,  $i=m+1, m+2, \dots, M$  je uvijek pozitivna, ako se  $p_i$  poveća onda će se i vjerojatnost praznog hoda tog stroja povećati.
- Diferencije po kapacitetu međuskладишта su uvijek negativne, bilo koje povećanje kapaciteta  $N_i$  rezultira sa smanjenjem vjerojatnosti praznog hoda.
- Bilo koje povećanje  $p_i$ ,  $i=2,3,\dots, m$  će povećati ili smanjiti ukupnu vjerojatnosti praznog hoda ovisno o prevladavajućem utjecaju elementa.

Konačno, može se zaključiti da je stroj ili međuskладиšte sa najvećom pozitivnom parcijalnom derivacijom ili diferencijom (5.24) ujedno i usko grlo vjerojatnosti praznog hoda stroja  $BN_{ST}^+$ . Također, stroj ili međuskладиšte s najvećom negativnom derivacijom ili diferencijom, je usko grlo vjerojatnosti praznog hoda stroja,  $BN_{ST}^-$ .

## 5.5 Projektiranje proizvodnih linija

Detekcija uskih grla je važan alat za unapređenje i održavanje postojećih proizvodnih sustava te je prikladan za svakodnevnu uporabu. Međutim ako je potrebno planirati novi ili ciljano unaprijediti cjelokupni proizvodni sustav prema nekim ulaznim parametrima, onda je projektiranje proizvodnih linija pravo rješenje. Stoga će se ovdje predstaviti pristup koji kombinira metodu konačnih stanja s teorijom diferencijalne evolucije, (DE), [70,80].

Teorija DE je jednostavan i svestran algoritam koji se temelji na vektorima početne generacije,  $PG$ , međugeneracije,  $MG$ , i pokusne generacije,  $PKG$ . Svaka generacija sadržava isti broj populacija,  $N_p$ , koji se definira kao ulazni podatak, a svaka populacija predstavlja jednu kombinaciju pouzdanosti rada strojeva i kapaciteta međuskладиšta.

Početna generaciju strojeva  $[PG_M]$  i međuskладиšta  $[PG_B]$  zapisuje se na sljedeći način,

$$\begin{aligned}
 [PG_M] &= \left[ \begin{array}{c} \left\{ \begin{array}{c} P_{1,1}^{PG} \\ P_{2,1}^{PG} \\ \vdots \\ P_{M,1}^{PG} \end{array} \right\} \\ \left\{ \begin{array}{c} P_{1,2}^{PG} \\ P_{2,2}^{PG} \\ \vdots \\ P_{M,2}^{PG} \end{array} \right\} \\ \dots \\ \left\{ \begin{array}{c} P_{1,N_p}^{PG} \\ P_{2,N_p}^{PG} \\ \vdots \\ P_{M,N_p}^{PG} \end{array} \right\} \end{array} \right], \\
 [PG_B] &= \left[ \begin{array}{c} \left\{ \begin{array}{c} N_{1,1}^{PG} \\ N_{2,1}^{PG} \\ \vdots \\ N_{M-1,1}^{PG} \end{array} \right\} \\ \left\{ \begin{array}{c} N_{1,2}^{PG} \\ N_{2,2}^{PG} \\ \vdots \\ N_{M-1,2}^{PG} \end{array} \right\} \\ \dots \\ \left\{ \begin{array}{c} N_{1,N_p}^{PG} \\ N_{2,N_p}^{PG} \\ \vdots \\ N_{M-1,N_p}^{PG} \end{array} \right\} \end{array} \right],
 \end{aligned} \tag{5.25}$$

gdje  $PG$  označava pripadnost elementa početnoj generaciji. Vrijednosti u izrazu (5.25) potrebno je na početku odrediti na temelju pristranih procjena ili nasumično koristeći izraze

$$\begin{aligned} p_{i,j}^{CP} &= \text{rand}(0,1)(p_{\max} - p_{\min}) + p_{\min}, \quad i = 1, 2, \dots, M; \quad j = 1, 2, \dots, N_p, \\ N_{i,j}^{CP} &= \text{truncate}[\text{rand}(0,1)(N_{\max} - N_{\min})] + N_{\min}, \quad i = 1, 2, \dots, M-1; \quad j = 1, 2, \dots, N_p, \end{aligned} \quad (5.26)$$

gdje su  $p_{\max}$  i  $p_{\min}$ , i  $N_{\max}$  i  $N_{\min}$  ograničenja pouzdanosti rada stroja i kapaciteta međuskладишта zadana sa strane projektanta.

Elementi skupa vektora međugeneracije se određuju sljedećim izrazom,

$$\begin{aligned} \{P_j^{MG}\} &= \{P_{\text{rand},1}^{PG}\} + S(\{P_{\text{rand},2}^{PG}\} - \{P_{\text{rand},3}^{PG}\}), \\ \{N_j^{MG}\} &= \{N_{\text{rand},1}^{PG}\} + (\{N_{\text{rand},2}^{PG}\} - \{N_{\text{rand},3}^{PG}\}), \quad j = 1, 2, \dots, N_p, \end{aligned} \quad (5.27)$$

gdje  $\{P_{\text{rand},k}^{PG}\}$  i  $\{N_{\text{rand},k}^{PG}\}$  predstavljaju nasumce izabrane vektore iz početne generacije, a  $S$  faktor skaliranja. Faktor skaliranja zadaje projektant, izabirući njegovu vrijednost u rasponu između 0 i 1. Prema tome, skup međugeneracije vektora strojeva i međuskладишта glasi,

$$\begin{aligned} [MG_M] &= \left[ \begin{array}{ccc} \begin{Bmatrix} P_{1,1}^{MG} \\ P_{2,1}^{MG} \\ \vdots \\ P_{M,1}^{MG} \end{Bmatrix} & \begin{Bmatrix} P_{1,2}^{MG} \\ P_{2,2}^{MG} \\ \vdots \\ P_{M,2}^{MG} \end{Bmatrix} & \dots & \begin{Bmatrix} P_{1,N_p}^{MG} \\ P_{2,N_p}^{MG} \\ \vdots \\ P_{M,N_p}^{MG} \end{Bmatrix} \end{array} \right], \\ [MG_B] &= \left[ \begin{array}{ccc} \begin{Bmatrix} N_{1,1}^{MG} \\ N_{2,1}^{MG} \\ \vdots \\ N_{M-1,1}^{MG} \end{Bmatrix} & \begin{Bmatrix} N_{1,2}^{MG} \\ N_{2,2}^{MG} \\ \vdots \\ N_{M-1,2}^{MG} \end{Bmatrix} & \dots & \begin{Bmatrix} N_{1,N_p}^{MG} \\ N_{2,N_p}^{MG} \\ \vdots \\ N_{M-1,N_p}^{MG} \end{Bmatrix} \end{array} \right]. \end{aligned} \quad (5.28)$$

Pokusna generacija nastaje slučajnim križanjem elemenata vektora početne generacije s elementima vektora međugeneracije koristeći faktor križanja  $K \in [0,1]$ , kojeg zadaje projektant,

$$p_{i,j}^{PKG} = \begin{cases} p_{i,j}^{PG}, & \text{ako } (\text{rand}(0,1) \leq K), \\ p_{i,j}^{MG}, & \text{inače,} \end{cases} \quad N_{i,j}^{PKG} = \begin{cases} N_{i,j}^{PG}, & \text{ako } (\text{rand}(0,1) \leq K), \\ N_{i,j}^{MG}, & \text{inače.} \end{cases} \quad (5.29)$$

Prema tome skup vektora pokusne generacija glasi,

$$\begin{aligned}
[PKG_M] &= \left[ \begin{array}{ccc} \left\{ \begin{array}{c} p_{1,1}^{PKG} \\ p_{2,1}^{PKG} \\ \vdots \\ p_{M,1}^{PKG} \end{array} \right\} & \left\{ \begin{array}{c} p_{1,2}^{PKG} \\ p_{2,2}^{PKG} \\ \vdots \\ p_{M,2}^{PKG} \end{array} \right\} & \dots & \left\{ \begin{array}{c} p_{1,N_p}^{PKG} \\ p_{2,N_p}^{PKG} \\ \vdots \\ p_{M,N_p}^{PKG} \end{array} \right\} \end{array} \right], \\
[PKG_B] &= \left[ \begin{array}{ccc} \left\{ \begin{array}{c} N_{1,1}^{PKG} \\ N_{2,1}^{PKG} \\ \vdots \\ N_{M-1,1}^{PKG} \end{array} \right\} & \left\{ \begin{array}{c} N_{1,2}^{PKG} \\ N_{2,2}^{PKG} \\ \vdots \\ N_{M-1,2}^{PKG} \end{array} \right\} & \dots & \left\{ \begin{array}{c} N_{1,N_p}^{PKG} \\ N_{2,N_p}^{PKG} \\ \vdots \\ N_{M-1,N_p}^{PKG} \end{array} \right\} \end{array} \right].
\end{aligned} \tag{5.30}$$

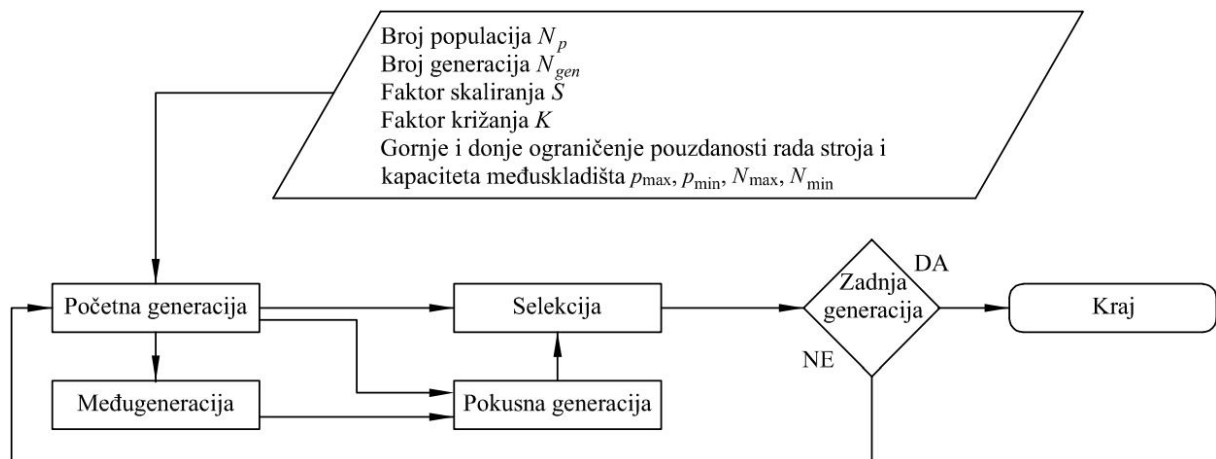
Slijedi odabir nove početne generacije koji se temelji na usporedbu dviju funkcija cilja

$$f(\{p_j^{PG}\}, \{N_j^{PG}\}) \text{ i } f(\{p_j^{PKG}\}, \{N_j^{PKG}\})$$

$$\begin{aligned}
\{p_j^{PG}\}_{\text{nova generacija}} &= \begin{cases} \{p_j^{PKG}\} & \text{ako } f(\{p_j^{PKG}\}, \{N_j^{PKG}\}) \geq f(\{p_j^{PG}\}, \{N_j^{PG}\}), \\ \{p_j^{PG}\} & \text{inače,} \end{cases} \\
\{N_j^{PG}\}_{\text{nova generacija}} &= \begin{cases} \{N_j^{PKG}\} & \text{ako } f(\{p_j^{PKG}\}, \{N_j^{PKG}\}) \geq f(\{p_j^{PG}\}, \{N_j^{PG}\}), \\ \{N_j^{PG}\} & \text{inače.} \end{cases}
\end{aligned} \tag{5.31}$$

Funkcije cilja predstavljaju ključne značajke određene pomoću vektora početne generacije,  $KZ(PG)$ , i vektora pokusne generacije,  $KZ(PKG)$ . Nakon što je definirana nova početna generacija, započinje nova iteracija određivanja vektora međugeneracije, i pokusne generacije koja ponovno završava usporedbom funkcija. Ukupni broj takvih iteracija naziva se broj generacija,  $N_{gen}$ , koji mora biti zadan sa strane projektanta. Na taj se način svaka nova generacija sastoji od sve sličnijih populacija sve do postizanja konvergencije ili do postizanja najvećeg zadanog broja generacija. Opisani algoritam je prikazan kao dijagram toka na slici 5.2.

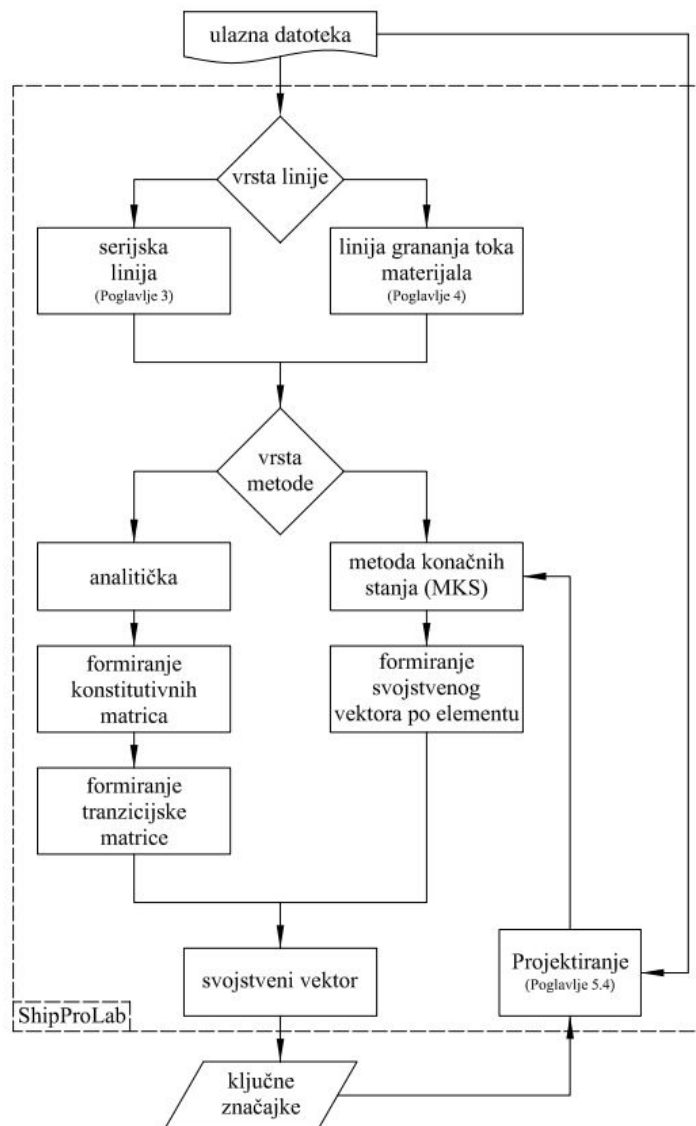




Slika 5.3 Dijagram toka algoritma diferencijalne evolucija [79]

## 6. OPIS PROGRAMA SHIPPROLAB

Računalni program ShipProLab, SHIP PROduction LABaratory, kodiran u programskom jeziku FORTRAN, je alat za proračun ključnih značajki proizvodnih sustava. Razvoj alata se odvijao u fazama, počevši od ključnih značajki serijskih linija putem analitičke metode, zatim putem metode konačnih stanja (poglavlje 3). Slijedila je nadogradnja za projektiranje serijskih proizvodnih sustava putem teorije diferencijalne evolucije (poglavlje 5.4), te proširenje proračuna na ključne značajke predodređenih linija grananja toka materijala, uz analitički i poluanalitički pristup (poglavlje 4). Daljnja nadogradnja je projektiranje proizvodnih sustava linija grananja toka materijala koristeći teoriju diferencijalne evolucije. Dijelove programskog koda ShipProLaba potrebno je prilagoditi svakoj radionici, međutim sama shema cijelog programa, slika 6.1, ostaje ista.

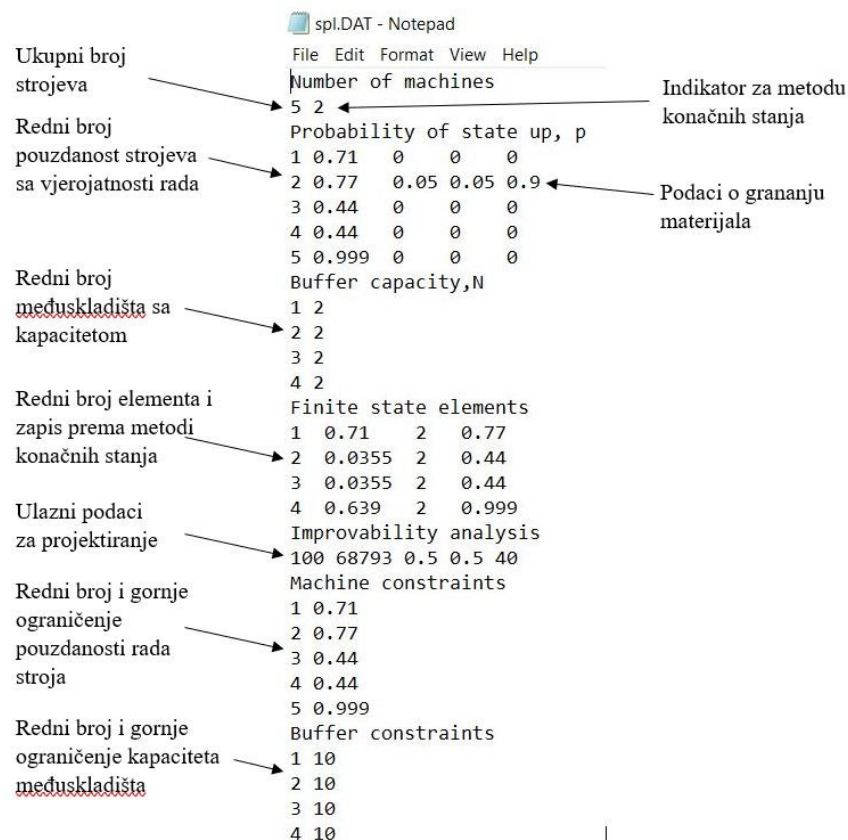


Slika 6.1 Shema računalnog programa ShipProLab

Ulazna datoteka, neovisno o vrsti metode, vrsti linije i opcije projektiranja linije, uvijek sadržava broj ukupnih strojeva,  $M$ , i pripadne pouzdanosti,  $p_i$ , te kapacitete međuskладиšta. Vjerojatnost  $p_i$  jednaka je

$$p_i = \frac{T_{zastoj}}{T_{ukupno}} \quad (6.1)$$

gdje je  $T_{zastoj}$  vrijeme koje je stroj proveo u zastoju zbog kvara tijekom razmatranog perioda, a  $T_{ukupno}$  ukupno trajanje razmatranog perioda. Navedene podatke je potrebno prikupljati iz proizvodnje kroz dulji period (nekoliko tjedana ili mjeseci). Metoda konačnih stanja zahtijeva dodatni zapis svih elemenata u obliku  $RE p_1 N_i p_2$ , gdje  $RE$  predstavlja redni broj elementa. Takav zapis vrijedi za serijske linije i linije s grananjem toka materijala. Kod proizvodnih linije sa grananjem toka materijala potrebno je dodatno navesti faktor grananja. Izbor opcije projektiranja zahtijeva da se u jednom dijelu ulazne datoteke definira broj populacije, broj generacija, faktor skaliranja i faktor križanja. Primjer ulazne datoteke za jedan izabrani slučaj linije s grananjem toka materijala dan je slikom 6.2.



Slika 6.2 Primjer ulazne datoteke za jedan izabrani slučaj

Nakon što se podaci učitaju u ShipProLab, rezultati proračuna se pohranjuju u izlaznu datoteku prikazana na slici 6.3.

fort.103 - Notepad  
File Edit Format View Help

3.5428394E-02	3.5428394E-02	0.6389993		
1.203731	8.4122129E-02	8.4122129E-02	0.6407701	2.012746
5.8373831E-02	1.5646701E-04			
0.1183739	0.4045716	0.4045716	0.3600007	

Očekivani broj gotovih proizvoda  
Očekivani broj poluproizvoda na međuskladištima  
Vjerojatnost blokade stroja  
Vjerojatnost praznog hoda stroja

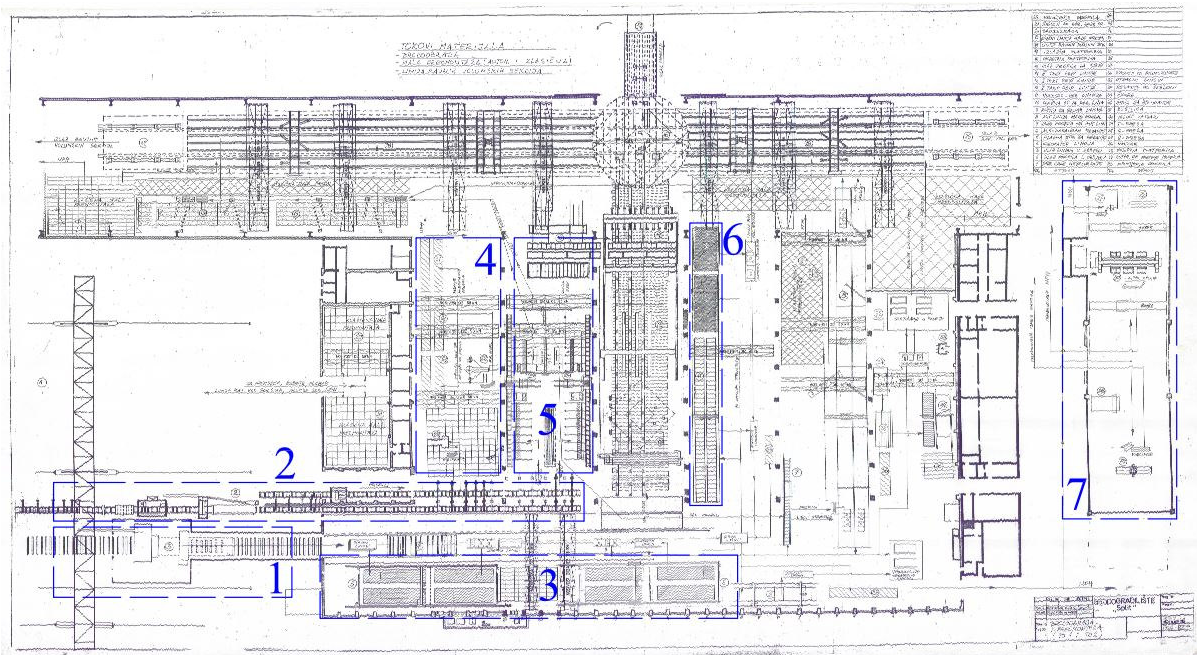
Slika 6.3 Primjer izlazne datoteke za jedan izabrani slučaj

## 7. ILUSTRATIVNI PRIMJER

Ovo poglavlje obuhvaća praktičnu primjenu prethodno opisane metode konačnih stanja za serijske linije i linije s grananjem tokova materijala. Opisat će se stvarni proizvodni pogon za predobradu i obradu limova i profila u jednom brodogradilištu te će se prikazati odgovarajući modeli pomoću kojih će se odrediti ključne značajke za slučaj dviju sekcija broskog trupa. Rezultati dobiveni poluanalitičkom metodom biti će uspoređeni s rezultatima dobivenim pomoću simulacije, odnosno upotrebom programskog paketa Enterprise Dynamics 10.3. Nakon analize istih slijedi primjena teorije diferencijalne evolucije za potrebe projektiranja novog proizvodnog pogona.

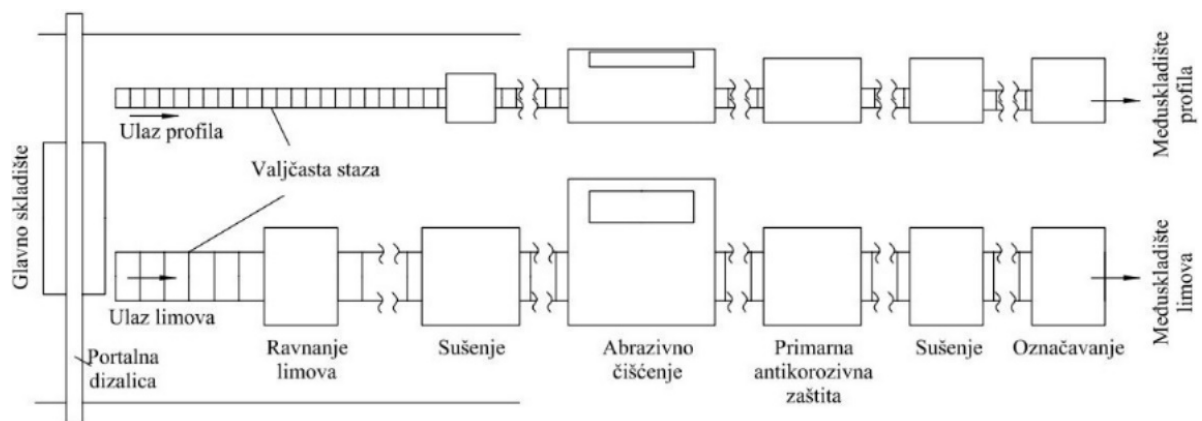
### 7.1 Opis proizvodnog sustava

Ilustrativni primjer na kojem će se primijeniti pristup modeliranja proizvodnog sustava su proizvodne linije predobrade i obrade limova i profila u brodogradilištu Brodosplit. Proizvodne linije su prostorno smještene u odjelu „Brodoobrada i predmontaža“, slika 7.1, te obuhvaćaju sedam radionica: predobrada limova (1), predobrada profila (2), rezanje limova plazmom (3), ručno rezanje i oblikovanje profila (4), robotizirano rezanje profila (5), plinsko rezanje limova (6) te oblikovanje limova (7).



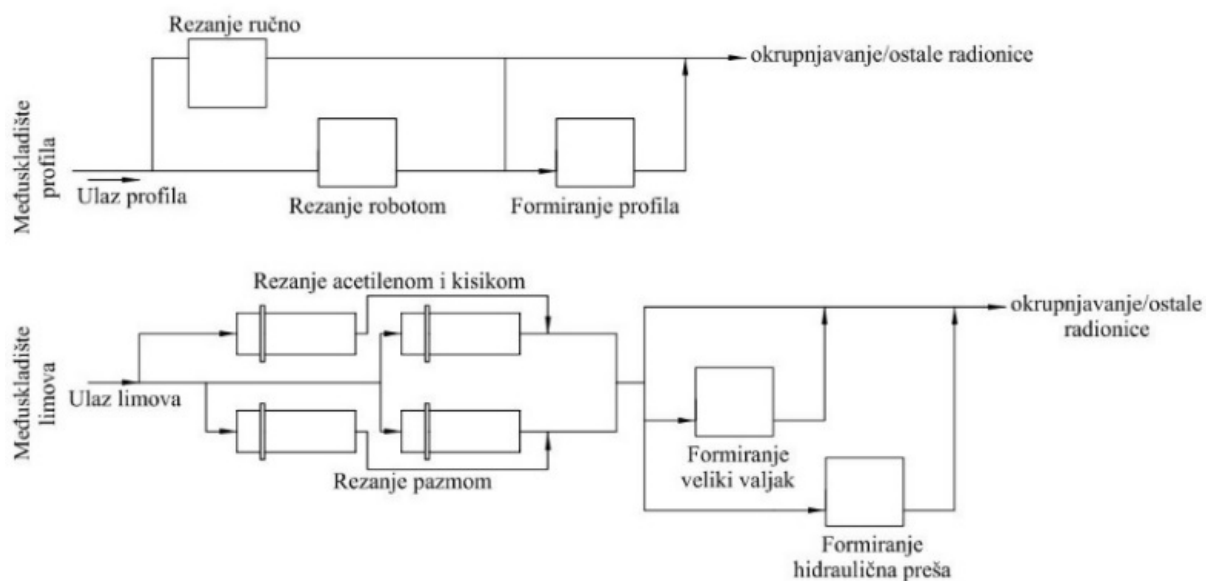
Slika 7.1 Tlocrt „Brodoobrada i predmontaža“, Brodosplit

Radionice predobrade služe za adekvatnu pripremu limova i profila za daljnju strojnu obradu. Pritom su opremljene sa strojevima poput valjaka za ravnanje, sušenje, abrazivno čišćenje i nanošenje primarne antikorozivne zaštite. Na kraju slijedi ručno označavanje limova i profila radioničkim brojem. Glavno transportno sredstvo je valjkasta staza koja se kreće konstantnom brzinom i pri tome povezuje sve strojeve, dok po jedna portalna dizalica na početku i na kraju opslužuje ulazno i izlazno skladište, slika 7.2. Izlazno skladište limova i profila može se smatrati beskonačnim pošto je toliko veliko da ne može uzrokovati blokadu prethodnog koraka označavanja niti prouzročiti prazni hod u operacijama rezanja koje slijede.



Slika 7.2 Shema predobrade limova i profila, Brodosplit [81]

Ostale radionice su opremljene sa strojevima za rezanje i oblikovanje limova, odnosno profila. Limovi i profili sa izlaznog skladišta predobrade opskrbljuju strojeve za rezanje isključivo prema radioničkoj specifikaciji. Tako se limovi do debljine 25 mm režu na strojevima za rezanje plazmom, dok se deblji limovi režu na strojevima za plinsko rezanje. Nakon rezanja, većina plošnih elemenata se usmjerava na skladišta za linije okrupnjavanja dok je neke elemente potrebno oblikovati na stroju s velikim valjkom ili hidrauličkom prešom. Profili manjih dimenzija se režu ručno, dok se veći profili režu na robotskoj stanici. Većina izrezanih profila odlaže se na međuskladištu za linije okrupnjavanja, a ostatak se preusmjerava na strojeve za oblikovanje profila. Dominantno transportno sredstvo su portalne dizalice koje se nalaze u pojedinim radionicama uz razna industrijska vozila. Shematski prikaz obrade limova i profila dan je slikom 7.3.



Slika 7.3 Shema obrade limova i profila, Brodosplit [81]

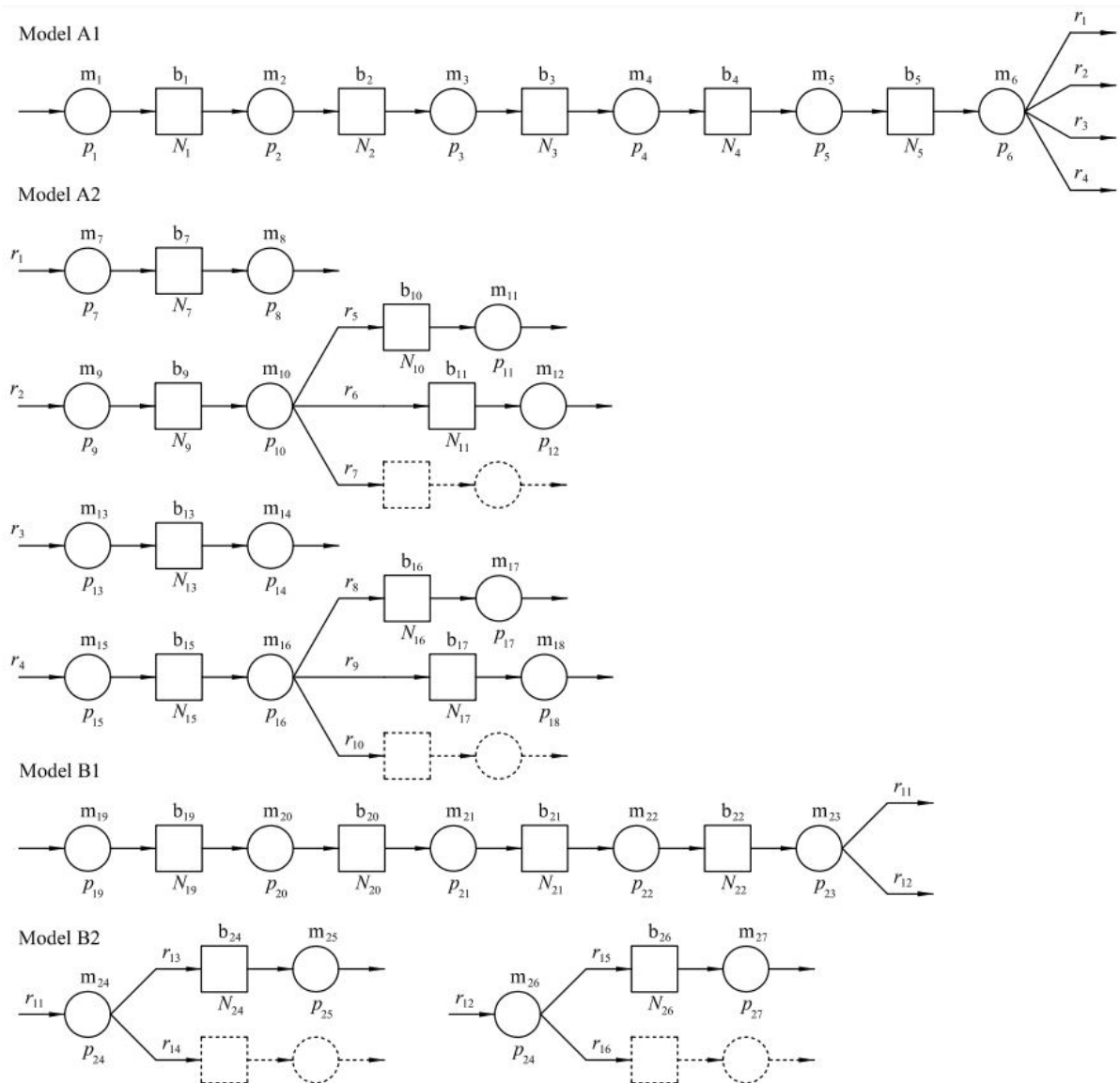
## 7.2 Modeli i ulazni podaci

Prema navedenim shemama moguće je identificirati ukupno osam proizvodnih linija, od kojih pet čine model A (predobrada i obrada limova) i tri model B (predobrada i obrada profila), slika 7.4. Modeli A1 i B1 odnose se na predobradu limova i profila, a modeli A2 i B2 na njihovu obradu.

Crtnani kružići i pravokutnici na slici 7.4 označavaju virtualne strojeve koji su uvijek u stanju {radi}, odnosno međuskladišta s jako velikim kapacitetom koji kao takvi ne postoje u proizvodnji, nego služe samo za rad metode konačnih stanja koja na taj način simulira grananje toka materijala koji se dalje ne obrađuje. Radi jednoznačnog opisa prostora stanja morali su sljedeći strojevi dobiti različite nazive iako su u naravi zapravo isti:  $m_{11}=m_{17}$ ,  $m_{12}=m_{18}$  i  $m_{25}=m_{27}$ .

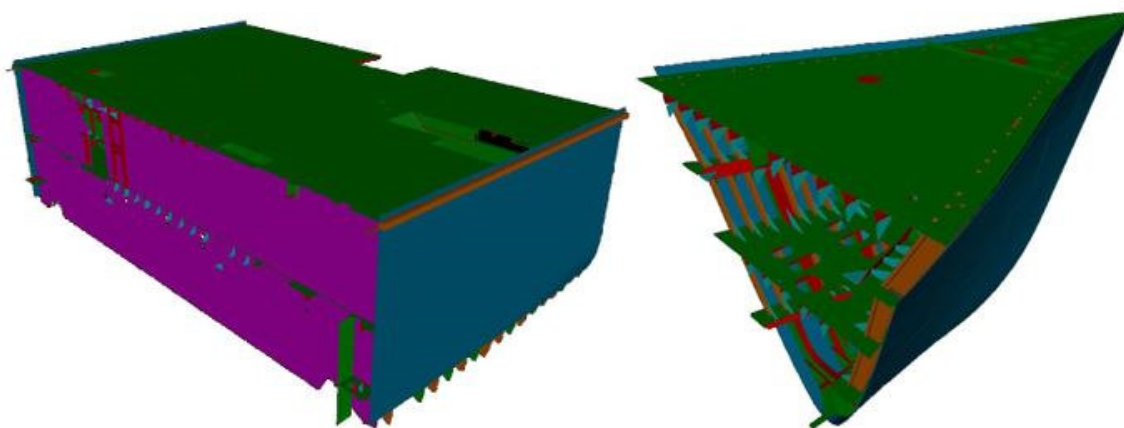
Ulazni podaci za navedene modele su faktor grananja,  $r_i$ , kapacitet međuskladišta,  $b_i$  i vjerojatnost da je stroj u stanju {radi},  $p_i$ , pritom faktori grananja ovise o konačnom proizvodu. U ovom se slučaju u obzir uzimaju elementi dviju sekcija putničkog borda, jedna vezana uz glavno rebro, sekcija A, a druga vezana uz pramac, sekcija B, slika 7.5. Detaljni popis karakteristika prikazanih sekcija naveden je u tablici B1 u prilogu B u kojem je izvršena analiza grananja toka materijala, odnosno faktora grananja  $r_i$ , čiji rezultati su objedinjeni u tablici 7.1. Prema provedenoj analizi broj modela se može smanjiti na pet. Sukladno tome, tablica 7.2 prikazuje kapacitete međuskladišta,  $b_i$ , čije određivanje je detaljno opisano u prilogu C. Tablica

7.3 prikazuje vjerojatnost pojave stanja  $\{radi\}$ ,  $p_i$ , svih razmatranih strojeva, te stvarno i izjednačeno trajanje ciklusa,  $\tau_i$  i  $\tau_i$ . Pritom je pouzdanost strojeva detaljno analizirana u prilogu D, a trajanje ciklusa u prilogu E.



Slika 7.4 Modeli proizvodnih linija, A1 i A2 za izradu plošnih elementa, modeli proizvodnih linija B1 i B2 za izradu profilnih elementa [81]





Slika 7.5 Ilustrativni prikaz odabranih sekcija A i B

Tablica 7.1 Faktori grananja prema izabranim brodskim sekcijama

Faktor grananja	$r_1$	$r_2$	$r_5$	$r_6$	$r_7$	$r_{11}$	$r_{13}$	$r_{14}$
$r_i$	0.5	0.5	0.05	0.05	0.9	1	0.2	0.8

Tablica 7.2 Kapaciteti međuskladišta,  $N_i$

	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$b_4$	$b_5$	$b_{7*}$	$b_{9*}$	$b_{10*}$	$b_{11*}$	$b_{19**}$	$b_{20**}$	$b_{21**}$	$b_{22**}$	$b_{24*}$
$N_i$	4	1	1	1	1	2	2	2	2	1	1	1	1	4

\* ekvivalentno skladište \*\* 8 profila paralelno

Tablica 7.3 Popis strojeva,  $m_i$ , vjerojatnost pojave stanja {radi},  $p_i$ , stvarni ciklusi,  $\tau_i$ , i izjednačeni ciklusi,  $\tau_i$ .

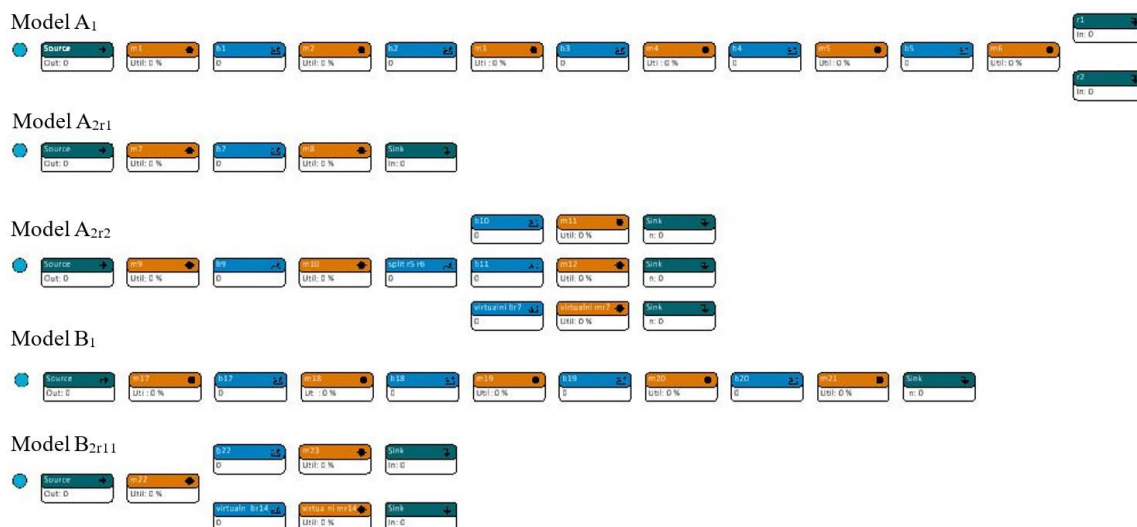
$i$	$m_i$	Model	Naziv operacije	$p_i$	$\tau^*$	$\tau_i^*$
1	$m_1$	A1	Ravnanje lima	0.90	262	262
2	$m_2$		Sušenje	0.91	262	
3	$m_3$		Abrazivno čišćenje	0.90	262	
4	$m_4$		Primarna antikoroziivna zaštita	0.80	262	
5	$m_5$		Sušenje	0.91	262	
6	$m_6$		Ručno označavanje	0.96	262	
7	$m_7$	A2	Rezanje i označavanje limova plazmom	0.71	1556	1637
8	$m_8$		Ručno označavanje	0.77	90	
9	$m_9$		Rezanje i označavanje limova plazmom	0.71	1556	
10	$m_{10}$		Ručno označavanje	0.77	1719	
11	$m_{11}$		Oblikovanje lima – veliki valjak	0.44	3600	
12	$m_{12}$		Oblikovanje lima – hidraulička preša	0.44	5400	

13	m13		Plinsko rezanje i označavanje limova	np**	-	-
14	m14		Ručno označavanje	np**	-	-
15	m15		Plinsko rezanje i označavanje limova	np**	-	-
16	m16		Ručno označavanje	np**	-	-
17	m17		Oblikovanje lima – veliki valjak	np**	-	-
18	m18		Oblikovanje lima – hidraulička preša	np**	-	-
19	m19		Sušenje	0.91	596	
20	m20		Abrazivno čišćenje	0.90	596	
21	m21	B1	Primarna antikorozivna zaštita	0.80	596	596
22	m22		Sušenje	0.91	596	
23	m23		Ručno označavanje	0.96	596	
24	m24		Ručno rezanje profila	0.76	1200	2201
25	m25	B2	Oblikovanje profila	0.58	600	
26	m26		Robotizirano rezanje profila	np**	-	-
27	m27		Oblikovanje profila	np**	-	-

\*[sek/ciklusu] \*\*np-nije potrebno

### 7.3 Simulacija

Simulacija razmatranih modela vrši se pomoću programskog paketa Enterprise Dynamics 10.3 koristeći pet osnovnih atoma kao što je opisano u pod poglavlju 3.6, slika 7.6, vodeći pritom brigu o grananju toka materijala. Glavni cilj i svrha ove simulacije je validacija dobivenih rezultata dobiveni putem metode konačnih stanja.



Slika 7.6 Modeli A<sub>1</sub>, A<sub>2r1</sub>, A<sub>2r2</sub>, B<sub>1</sub> i B<sub>2r11</sub> izrađeni u programskom paketu Enterprise Dynamics 10.3

## 7.4 Rezultati analize ključnih značajki

Ključne značajke navedenih proizvodnih linija za proizvodnju spomenutih sekcija određene su putem metode konačnih stanja (MKS) i simulacijom (SIM) a rezultati su prikazani u tablici 7.4.

Usporedba različito dobivenih rezultata pokazuje vrlo dobro poklapanje ključnih značajki poput očekivanog broja gotovih proizvoda, vjerojatnosti blokade stroja i praznog hoda stroja. Očekivani broj poluproizvoda ukazuje na različitost, koja je posljedica zaokruživanja rezultata prilikom simulacije. Uzimajući to sve u obzir može se, kao i pri usporedbi serijskih linija u podpoglavlju 3.7, zaključiti da je metoda konačnih stanja pouzdana, brza i efikasna metoda za određivanje ključnih značajki.

Prema navedenim rezultatima može se zaključiti da očekivani broj gotovih proizvoda,  $PR$ , u modelu A1 i B1 iznosi 0,77 komada po ciklusu za limove i profile, pritom je vjerojatnost blokade stroja,  $BL_i$ , i praznog hoda,  $ST_i$ , vrlo niska. Iznimku čine strojevi za sušenje,  $m_2$ ,  $m_{19}$  i abrazivno čišćenje,  $m_3$ ,  $m_{20}$  gdje se može očekivati blokada ili strojevi za sušenje  $m_3$ ,  $m_{22}$  i ručno označavanje,  $m_6$ ,  $m_{23}$  gdje se može očekivati prazni hod. Očekivani broj poluproizvoda,  $WIP_i$ , u modelu A1 se dobro poklapa sa postojećem kapacitetom međuskладиšta što se može reći i za model B1.

Modeli A2 i B2 su podložni faktorima grananja, zato očekivani broj gotovih proizvoda,  $PR$ , za svaku granu ispada manji u odnosu na A1 i B1. Rezultati također pokazuju veću vjerojatnost praznog hoda prilikom oblikovanja limova i profila što je uzrokovano malim brojem strukturnih elementa kojima je potrebno oblikovanje. Kapaciteti međuskладиšta modela A2 i B2 su djelomično dobro usklađeni s očekivanim brojem poluproizvoda. Iznimke čine međuskладиšta  $b_{10}$ ,  $b_{11}$ , i  $b_{24}$ , što sugerira mogućnost smanjenja kapaciteta istih.

Analiza kapaciteta međuskладиšta je bitna za razvoj dugoročnih strategija upravljanjem proizvodnih linija vodeći pritom brigu o proizvodnom programu. Određivanje uskih grla s druge strane daje mogućnost poboljšavanja cjelokupnog pogona na operativnoj, svakodnevnoj razini. Tako je, prema zaključcima iz poglavlja 5, očekivani broj gotovih proizvoda moguće povećati na način da se poveća pouzdanost rada najmanje učinkovitih strojeva u modelima, pritom se mora voditi računa radi li se o serijskim linijama ili linijama s grananjem toka materijala. Najmanje učinkovitiji strojevi za serijske linije poput A1, A2r1 i B1 mogu se izravno iz čitati iz tablice 7.3, to su  $m_4$ ,  $m_7$ ,  $m_{21}$ , a za linije s grananjem toka materijala poput A2r2 i B2 potrebni je umnožak najmanje učinkovitijeg stroja glavne grane i faktora grananja,  $p_m \cdot r_i$ ,

usporediti sa zadnjim strojem u pripadajućoj grani. Prema tome, radi malenih faktora grananja, najmanje učinkovit stroj u modelu A2r2 je zapravo  $p_9 \cdot r_6$  i  $p_9 \cdot r_7$  što vrijedi i za model B2 gdje je  $p_{24} \cdot r_{13}$  manji od  $p_{25}$ . Budući da su faktori grananja ovisni o proizvodu, povećanje očekivanog broja gotovih proizvoda u tim granama nije izvjesno, za razliku od serijskih linija gdje se kroz bolju strategiju održavanja strojeva, investicije ili bolje radne uvjete može očekivati povećanje. Takvo poboljšanje će pozitivno utjecati i na smanjenje vjerojatnosti blokade ostalih strojeva. Pri tome se može očekivati blago povećanje vjerojatnosti praznog hoda, što neće imati značajan utjecaj budući je trenutna razina praznog hoda vrlo niska.

Tablica 7.4 Ključne značajke proizvodnih linija: očekivani broj gotovih proizvoda,  $PR_i$  [kom/ciklusu], očekivani broj poluproizvoda,  $WIP_i$  [kom], vjerojatnost blokade stroja,  $BL_i$ , vjerojatnost praznog hoda stroja,  $ST_i$

					MKS*				SIM*				
		$m_i$	$b_i$	$p_i$	$N_i$	$PR$	$WIP_i$	$BL_i$	$ST_i$	$PR$	$WIP_i$	$BL_i$	$ST_i$
A1	m <sub>1</sub>	$b_1$	0.90	4	-	3.35	0.19	-	-	4.00	0.10	-	
	m <sub>2</sub>	$b_2$	0.91	1	-	0.93	0.28	0.00	-	1.00	0.11	0.00	
	m <sub>3</sub>	$b_3$	0.90	1	-	0.92	0.23	0.07	-	1.00	0.10	0.00	
	m <sub>4</sub>	$b_4$	0.80	1	-	0.81	0.08	0.07	-	0.00	0.00	0.00	
	m <sub>5</sub>	$b_5$	0.91	1	-	0.81	0.03	0.17	-	0.00	0.00	0.11	
	m <sub>6</sub>		0.96		0.77	-	-	0.19	0.80	-	-	0.16	
A2r1	m <sub>7</sub>	$b_7$	0.71	2	-	1.20	0.06	-	-	1.20	0.00	-	
	m <sub>8</sub>		0.77		0.65	-	-	0.12	0.71	-	-	0.06	
A2r2	m <sub>9</sub>	$b_9$	0.71	2	-	1.20	0.06	-	-	0.00	0.00	-	
	m <sub>10</sub>	$b_{10}$	0.77	2	-	0.08	0.00	0.12	-	0.01	0.00	0.06	
	m <sub>11</sub>	$b_{11}$	0.44	2	0.04	0.08	-	0.40	0.04	0.01	-	0.40	
	m <sub>12</sub>		0.44		0.04	-	-	0.40	0.04	-	-	0.40	
	r <sub>7</sub>				0.64	-	-	-	0.64	-	-	-	
B1	m <sub>19</sub>	$b_{19}$	0.91	1	-	0.93	0.28	-	-	1.00	0.11	-	
	m <sub>20</sub>	$b_{20}$	0.90	1	-	0.92	0.23	0.07	-	1.00	0.10	0.00	
	m <sub>21</sub>	$b_{21}$	0.80	1	-	0.81	0.08	0.07	-	0.00	0.00	0.00	
	m <sub>22</sub>	$b_{22}$	0.91	1	-	0.81	0.03	0.17	-	0.00	0.00	0.11	
	m <sub>23</sub>		0.96		0.77	-	-	0.19	0.80	-	-	0.16	
B2	m <sub>24</sub>	$b_{24}$	0.76	4	-	0.30	0.00	-	-	0.17	0.00	-	
	m <sub>25</sub>		0.58		0.15	-	-	0.43	0.15	-	-	0.43	
	r <sub>14</sub>				0.61	-	-	-	0.61	-	-	-	

\*MKS (Metoda konačnih stanja), SIM (Simulacija)

## 7.5 Analiza vremena trajanja proizvodnje

Analiza vremena trajanja proizvodnje se provodi metodom konačnih stanja i simulacijskim pristupom, koristeći računalni program Enterprise Dynamics 10.3. Vrijeme trajanja svakog modela primjenom metode konačnih stanja,  $T_{MKS}$ , je detaljno prikazana u tablicama E2 do E6 u prilogu E, a tablica 7.5 objedinjuje sve rezultate i uspoređuje ih s rezultatima simulacije.

Simulacija se temelji na modelima iz podpoglavlja 7.3, slika 7.6, u kojima se umjesto trajanje ciklusa od 1 sekunde koristi izjednačeno trajanje ciklusa,  $\tau$ , prema tablici 7.3. Konačno simulacijsko vrijeme,  $T_{SIM}$ , računa se oduzimanjem vremena u kojem se bilježi prvi element u atomu ponor (*sink*),  $T_{WPSIM}$ , od ukupnog vremena simulacije,  $T_{ukSIM}$ , u kojem se bilježi potreban izlazni broj elementa u atomu ponor (*sink*) uvećan za jedan. Na taj način se osigurava da vrijeme trajanja simulacije,  $T_{SIM}$ , odgovara ustaljenom odzivu.

Usporedba rezultata, tablica 7.6, pokazuje dobro poklapanje rezultata i potvrđuje da je metoda konačnih stanja vrijedan alat za brzo određivanje vremena trajanja proizvodnje. Blaga odstupanja u rezultatima su zanemariva i uzrokovana su ručnim mjerenjem vremena trajanja simulacije.

Tablica 7.5 Vrijeme trajanja proizvodnje prema metodi konačnih stanja i simulaciji

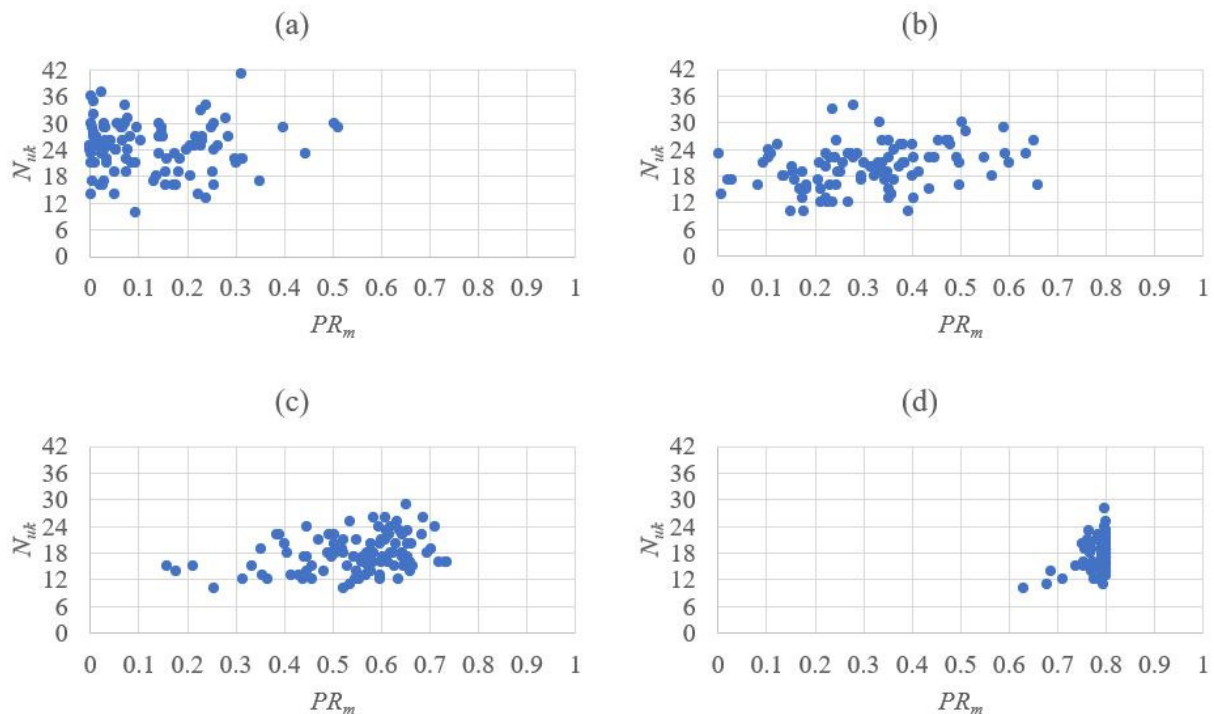
		A1	A2 <sub>r1</sub>	A2 <sub>r2</sub>	B1	B2
$T_{MKS}$	[h:m:s]	7:30:39	27:55:02	685:29:08	4:54:54	148:01:57
$T_{SIM}$	[h:m:s]	7:16:39	25:37:06	684:35:28	4:45:35	148:15:00
$T_{WPSIM}$	[sek]	1760	4432	180125	3340	5100
$T_{ukSIM}$	[sek]	27959	96658	2644653	20475	538800
$T_{ukSIM}-T_{WPSIM}$	[sek]	26199	92226	2464528	17135	533700

## 7.6 Projektiranje proizvodnih linija

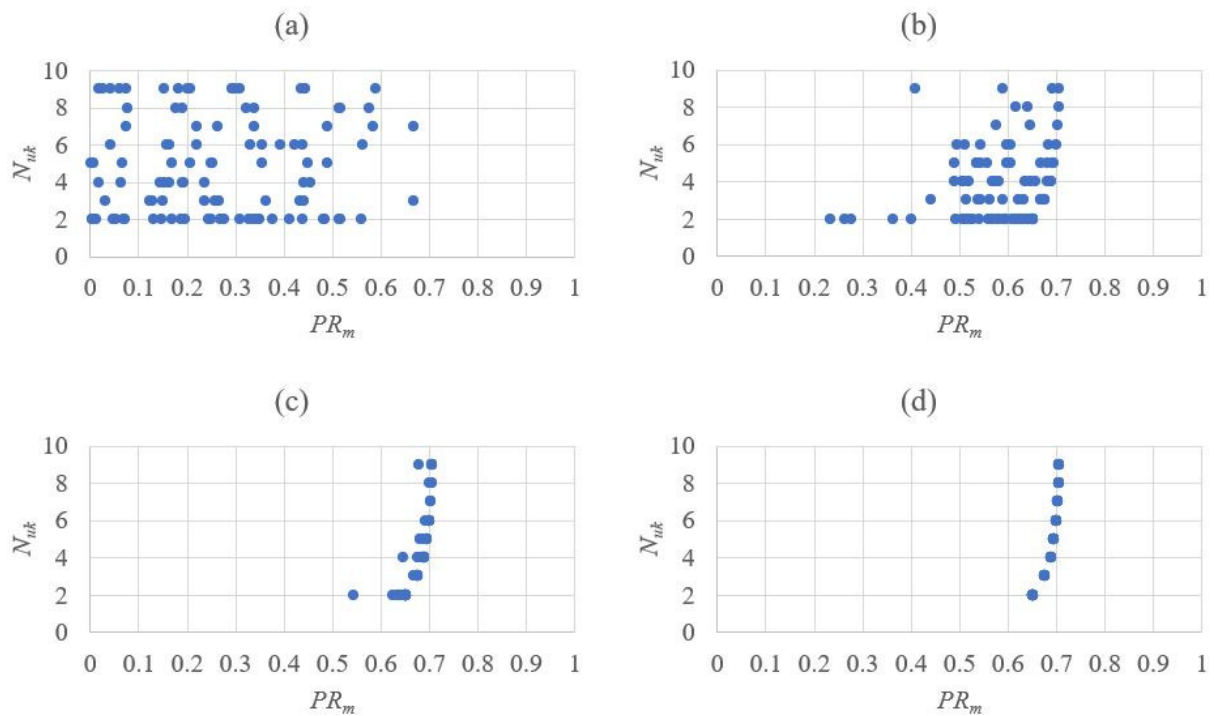
Pristup projektiranju proizvodnih linija opisan u podpoglavlju 5.4 bit će primijenjen na proizvodne linije predobrade i obrade limova i profila, pod pretpostavkom da postojeće postrojenje ne postoji. Projektant u tom slučaju raspolaže s modelima A1, A2<sub>r1</sub>, A2<sub>r2</sub>, B1 i B2, slika 7.4, a podaci o pouzdanosti rada strojeva,  $p_i$ , tablica 7.3, služe kao gornje ograničenje.

Prikazani algoritam diferencijalne evolucije, slika 5.2, je pokrenut u programskom jeziku FORTRAN, kako bi se za svaku generaciju,  $N_{gen}$ , generirali ulazni podaci potrebni za proračun očekivanog broja gotovih proizvoda,  $PR$ , za sve populacije,  $N_p$ . Seleksijski postupak

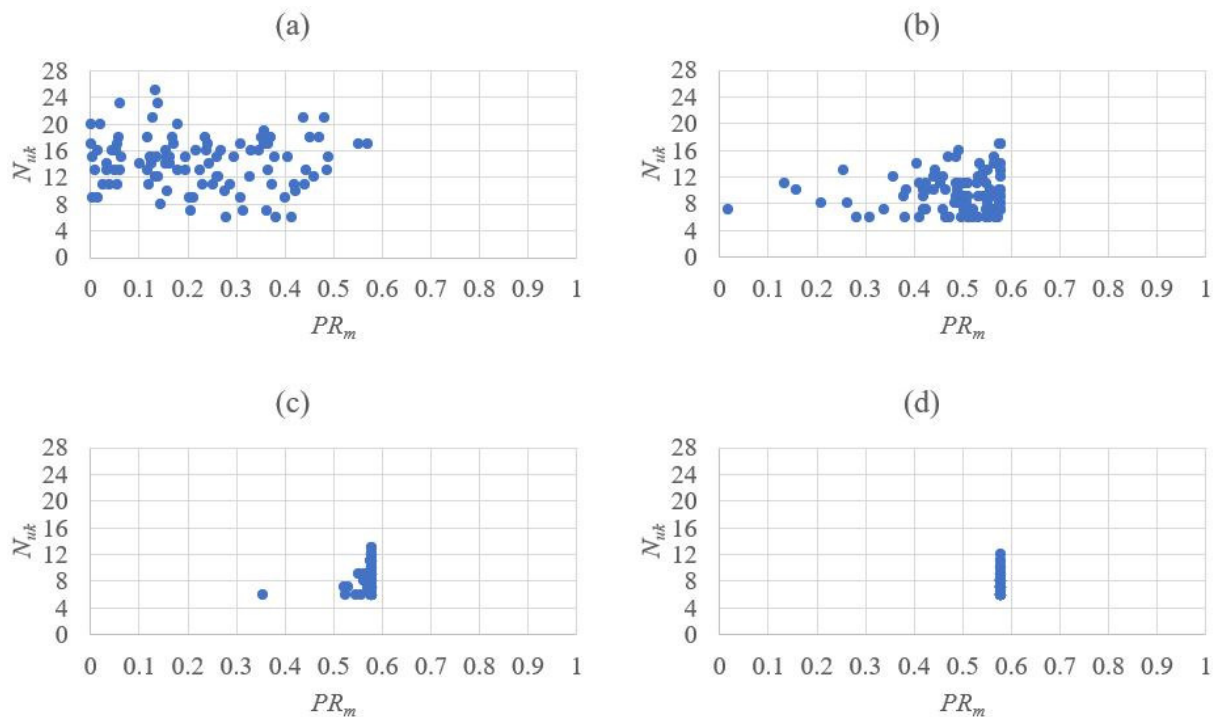
se temelji na odabiru one populacije koja daje najveći očekivani broj gotovih proizvoda,  $PR$ , uz najmanji ukupni kapacitet međuskladišta,  $N_{uk}$ . Kod modela s grananjem toka materijala koristio se težinski očekivani broj gotovih proizvoda,  $PR_T$ , koji uzima faktore grananja u obzir. Detaljan opis ulaznih podataka nalazi se u prilogu F, tablica F1, dok slike 7.7 do 7.11 prikazuju kako sa svakim brojem generacije populacije postaju međusobno sve sličnije. Projektant može povećanjem broja generacija postići da se populacije približe jednoj točki, ili dodatnim selekcijskim postupkom unutar jedne generacije odrediti tražene proizvodne linije. Kao što je vidljivo na slikama 7.7 do 7.11, populacije konvergiraju prema određenom očekivanom broju gotovih proizvoda  $PR$ , odnosno očekivanom težinskom broju gotovih proizvoda,  $PR_T$ . Populacije unutar 40. generacije služe kao baza za daljnji selekcijski postupak, tablice F2 do F6, koji uzima u obzir dva kriterija, linije s najvećim očekivanim brojem gotovih proizvoda,  $PR_{max}$ , odnosno  $PR_{Tmax}$ , ili linije s najmanjim ukupnim kapacitetom međuskladišta,  $N_{ukmin}$ . Rezultati tog selekcijskog postupka su prikazani u tablici 7.6 i obuhvaćaju ključne značajke poput očekivanog broja gotovih proizvoda,  $PR$ , očekivani broj poluproizvoda po skladištu,  $WIP_i$ , vjerojatnost blokade strojeva,  $BL_i$ , vjerojatnost praznog hoda strojeva,  $ST_i$ , i ukupno vrijeme proizvodnje,  $T$ .



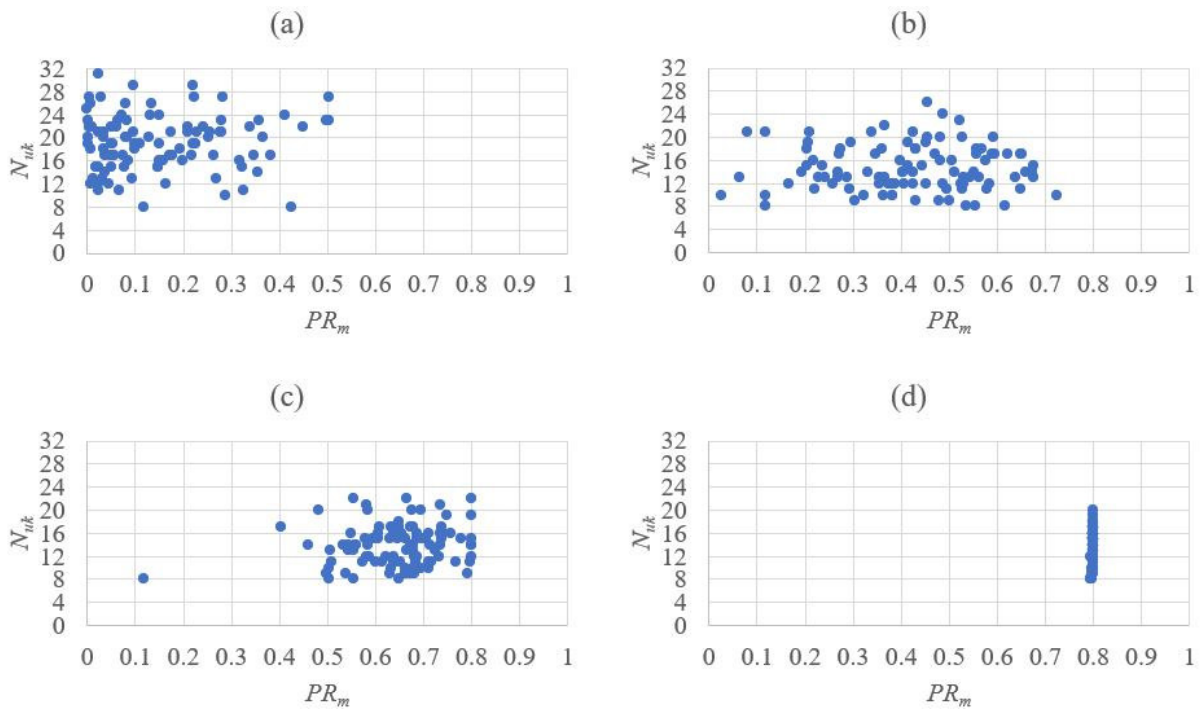
Slika 7.7 Primjena teorije diferencijalne evolucija na Model A1, a) početna generacija, b) 10. generacija, c) 20. generacija, d) 40. generacija



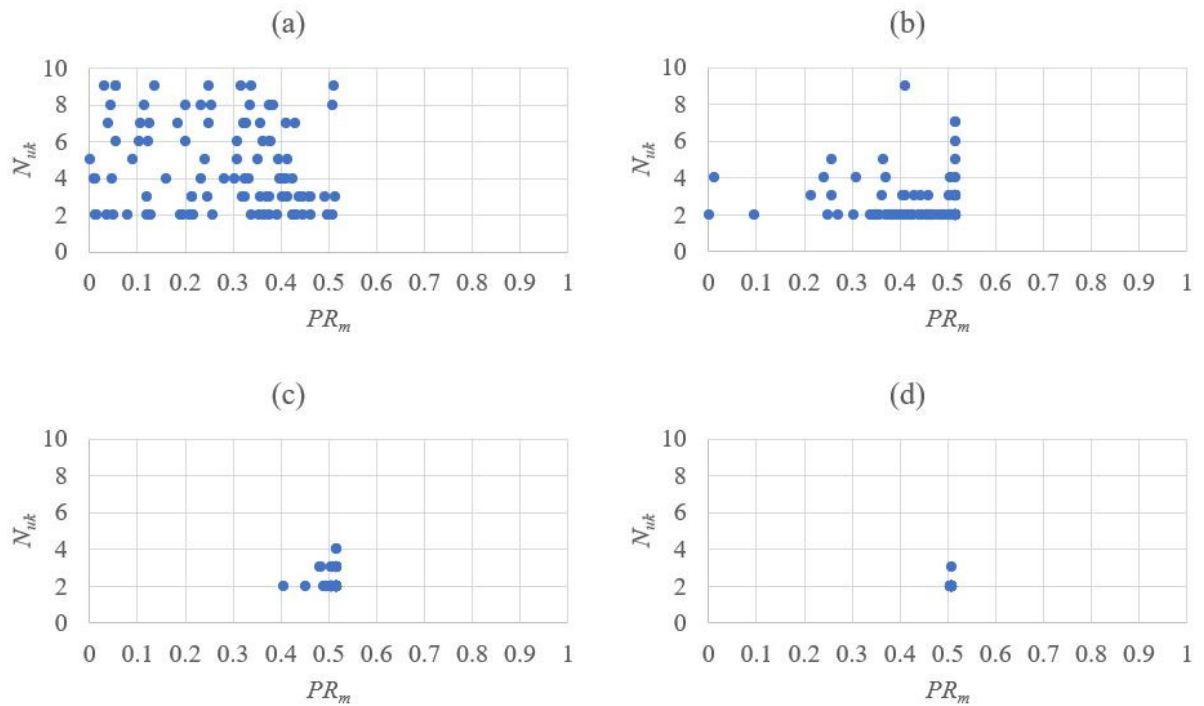
Slika 7.8 Primjena teorije diferencijalne evolucija na Model A2<sub>r1</sub>, a) početna generacija, b) 10. generacija, c) 20. generacija, d) 40. generacija



Slika 7.9 Primjena teorije diferencijalne evolucija na Model A2<sub>r2</sub>, a) početna generacija, b) 10. generacija, c) 20. generacija, d) 40. generacija



Slika 7.10 Primjena teorije diferencijalne evolucija na Model B1, a) početna generacija, b) 10. generacija, c) 20. generacija, d) 40. generacija



Slika 7.11 Primjena teorije diferencijalne evolucija na Model B2, a) početna generacija, b) 10. generacija, c) 20. generacija, d) 40. generacija



Tablica 7.6 Rezultati selekcijskog postupka projektanta

$N_{gen} 40.$			$PR_{max}$ odnosno $PR_{Tmax}$						$N_{ukmin}$					
			$p_i$	$N_i$	$PR$	$WIP_i$	$BL_i$	$ST_i$	$p_i$	$N_i$	$PR$	$WIP_i$	$BL_i$	$ST_i$
A1	m1	$b_1$	0.89	3	-	2.41	0.14	-	0.691	2	-	1.39	0.13	-
	m2	$b_2$	0.82	2	-	1.41	0.09	0.01	0.632	2	-	0.81	0.02	0.07
	m3	$b_3$	0.89	6	-	5.09	0.10	0.07	0.900	2	-	1.23	0.13	0.28
	m4	$b_4$	0.80	2	-	1.19	0.03	0.00	0.652	2	-	0.85	0.01	0.11
	m5	$b_5$	0.88	10	-	1.01	0.00	0.11	0.872	2	-	0.70	0.00	0.25
	m6		0.96		0.80	-	-	0.16	0.960		0.63	-	-	0.33
	$T^*$		7:16:06						9:13:47					
A2r1	m7	$b_7$	0.71	9	-	2.89	0.00	-	0.710	2	-	1.20	0.06	-
	m8		0.77		0.71	-	-	0.06	0.770		0.65	-	-	0.12
	$T^*$		25:37:19						27:55:02					
A2r2	m9	$b_9$	0.71	2	-	1.20	0.06	-	0.710	2	-	1.28	0.08	-
	m10	$b_{10}$	0.77	4	-	0.08	0.00	0.12	0.728	2	-	0.08	0.00	0.10
	m11	$b_{11}$	0.44	2	0.04	0.08	-	0.40	0.440	2	0.04	0.08	-	0.40
	m12		0.44		0.04	0.64	-	0.40	0.440		0.04	0.64	-	0.40
	r7		-		0.64	-	-	-			0.64	-	-	-
	$T^*$		685:29:08						685:29:08					
B1	m19	$b_{19}$	0.91	2	-	1.68	0.15	-	0.856	2	-	1.68	0.14	-
	m20	$b_{20}$	0.89	2	-	1.62	0.12	0.02	0.900	2	-	1.62	0.13	0.02
	m21	$b_{21}$	0.80	4	-	1.66	0.01	0.02	0.800	2	-	1.19	0.03	0.02
	m22	$b_{22}$	0.88	10	-	1.00	0.00	0.08	0.884	2	-	0.95	0.00	0.11
	m23		0.96		0.80	-	-	0.16	0.960		0.80	-	-	0.16
	$T^*$		4:45:23						4:45:23					
B2	m24	$b_{24}$	0.76	3	-	0.30	0.00	-	0.760	2	-	1.08	0.05	-
	m25		0.15		0.04	-	-	0.11	0.147		0.10	-	-	0.04
	r14				0.61	-	-	-			0.61	-	-	-
	$T^*$		230:55:16						163:25:16					

\* [hh:mm:ss]

Uspoređivanjem ključnih značajki dobivenih prema zadanim kriterijima može se zaključiti da su proizvodne linije prema kriteriju najmanjeg broja ukupnog kapaciteta najbolje rješenje za modele A2r2, B1 i B2, jer daju isti broj gotovih proizvoda uz minimalne kapacitete. Modeli A1 i A2r1 prema kriterijima najvećeg broja gotovih proizvoda daju bolje rezultate uz veće kapacitete međuskладиšta.

## 8. ZAKLJUČAK

Proizvodnja i proizvodni pogoni su kroz povijest postepeno postajali sve složeniji, a njihova analiza i projektiranje je predmet proučavanja proizvodnog inženjerstva. Pritom su se razvili razni pristupi koji se mogu kategorizirati kao analitički, poluanalitički i numerički, odnosno simulacijski pristup. Svaki pristup omogućava evaluaciju ključnih značajki poput broja gotovih proizvoda, broja poluproizvoda na međuskladištima, vjerojatnosti blokade i praznog hoda pojedinih strojeva.

U ovom doktorskom radu su proučavane Bernoullijeve serijske linije i linije s grananjem tokova materijala, te je za iste razvijena nova metoda konačnih stanja, koja za razliku od agregacijske metode obuhvaća cjelokupni prostor stanja. Evaluacija ključnih značajki takvih proizvodnih sustava provedena je za područje njihovog ustaljenog odziva. Na primjeru nasumce generiranih serijskih linija izvršena je jedinstvena analiza točnosti dobivenih ključnih značajki određenih metodom agregacije, metodom konačnih stanja i simulacijom koristeći nedavno razvijen analitički pristup kao referentnu metodu. Točnost evaluacije ključnih značajki linija s grananjem tokova materijala određenih metodom konačnih stanja potvrdila se usporedbom s analitičkim pristupom te mjerenjem u naravi u jednom pogonu za preradu trupaca. Metodu konačnih stanja pritom karakteriziraju odstupanja u manjim prostorima stanja, o čemu je potrebno voditi računa prilikom projektiranja novih proizvodnih linija.

Na temelju toga, metoda konačnih stanja je uspješno ugrađena u programski kod simulacijskog modela koji omogućuje brzu i jednostavnu evaluaciju ključnih značajki Bernoullijevih serijskih linija i linija s grananjem tokova materijala. Kroz primjenu istoga, po prvi put je korištena jedna poluanalitička metoda za rekonstruiranje stvarnog brodograđevnog pogona predobrade i obrade limova i profila, te su određene ključne značajke i vremena trajanja proizvodnje za slučaj dvije tipične brodske sekcije. Razvijeni matematički model je dodatno proširen pomoću metode diferencijalne evolucije koja projektantu pruža jedinstvenu potporu prilikom planiranja izrade novog postrojenja. Time je potvrđena hipoteza da je moguće razviti simulacijski model za efikasnu evaluaciju ključnih značajki serijskih Bernoullijevih proizvodnih linija i Bernoullijevih linija s grananjem tokova materijala koji će rezultirati boljim projektnim rješenjima proizvodnih sustava u odnosu na heuristički pristup rješavanja problema, koji će ujedno značajno utjecati na efikasnost linija obrade brodogradilišta.

## 8.1 Smjernice za daljnja istraživanja

Provedeno znanstveno istraživanje kao i doneseni zaključci ukazuju na značajne mogućnosti daljnjeg razvoja znanstveno-istraživačkog rada u području primjene proizvodnog inženjerstva u brodogradnji, kako s teoretskog tako i s implementacijskog gledišta. S obzirom da se prikazani matematički modeli temelje na određenim pretpostavkama, iste ukazuju na mogućnost daljnjeg razvoja.

Prva pretpostavka vezana uz razvijeni matematički model odnosi se na pouzdanost strojeva koja je zadana Bernoullijevom distribucijom vjerojatnosti. Stoga bi se u daljnjem istraživanju mogle razmotriti proizvodne linije koje uključuju strojeve čija je pouzdanost zadana geometrijskom distribucijom vjerojatnosti. U navedenom je slučaju potrebno točnost rezultata utvrditi usporedbom s odgovarajućim vrijednostima dobivenim mjerenjem u naravi. Nadalje, ovim su radom razmatrani diskretni vremenski Markovljevi lanci te bi se sličan pristup mogao primijeniti i u slučaju kontinuiranih Markovljevih procesa s pouzdanošću strojeva koja odgovara Poissonovoj ili eksponencijalnoj distribuciji vjerojatnosti. Također, prilikom razvoja matematičkog modela, pretpostavilo se da svi strojevi rade sinkrono. Stoga bi se ovo istraživanje moglo proširiti i na slučaj asinkronog rada strojeva. Osim toga, jedna od osnovnih pretpostavki matematičkog modela razvijenog u ovom radu je i homogenost Markovljevog lanca. Prema tome, uzimanje nehomogenosti sustava u obzir omogućilo bi razvoj matematičkog modela prikladnog za planiranje održavanje strojeva sa stanovišta najmanjih financijskih implikacija. Nadalje, u ovom je radu isključivo razmatran ustaljeni odziv proizvodne linije, a dodatno proširenje na tranzijentni odziv omogućilo bi evaluaciju proizvodnih gubitaka koji nastaju do postizanja ustaljenog odziva.

Matematički modeli u ovom radu bili su usmjereni na Bernoullijeve serijske linije i Bernoullieve linije s grananjem tokova materijala. Stoga je jedan od mogućih smjerova daljnjeg istraživanja i povezivanje takvih modela s modelima linija okrupnjavanja kako bi se obuhvatio cjelokupni brodograđevni proizvodni proces. K tome, u buduće istraživanje svakako treba uključiti i proizvodne linije s kontrolom kvalitete i povratnim tokovima. Konačno, skup razmatranih ključnih značajki moguće je dodatno proširiti aspektima poput očekivane potrošnje energije, očekivanih proizvodnih troškova, očekivanog ugljičnog otiska, te očekivane profitabilnosti i efektivnosti.

Osim navedenih teoretskih aspekata, buduće je istraživanje moguće usmjeriti i prema implementaciji matematičkih modela u okviru sučelja poput digitalnog blizanca proizvodnih

sustava ili pametnih tvornica. Za te je potrebe nužno razviti intuitivno korisničko sučelje kao i automatiziranu prezentaciju rezultata evaluacije. Na posljepku, predlaže se primjena razvijene metode konačnih stanja u slučaju drugih proizvodnih industrija uključujući kako proizvodnju velikih serija tako i projektno orijentiranu proizvodnju.

## POPIS LITERATURE

- [1] Dal Bó E, Hernández-Lagos P, Mayyuca S. The Paradox of Civilization: Preinstitutional Sources of Security and Prosperity. *American Political Science Review*. Cambridge University Press. 2022;116(1):213–30. doi:10.1017/S000305542100071X.
- [2] Mansour M. The fundametalns of modern civilization consequences and remedies. *IFAC Proceedings Volumes*. 2001;34(21):13-16. doi.org/10.1016/S1474-6670(17)33012-4.
- [3] Baum SD, Armstrong S, Ekenstedt T, Häggström O, Hanson R, Kuhlemann K, Maas MM, Miller JD, Salmela M, Sandberg A, Sotala K, Torres P, Turchin A, Yampolskiy RV. Long-term trajectories of human civilization. *Foresight*. 2019;21(1):53-83. doi.org/10.1108/FS-04-2018-0037.
- [4] Haradhan KM. The First Industrial Revolution: Creation of a New Global Human Era. *Journal of Social Sciences and Humanities*. 2019;5(4):377-387.
- [5] Schafran A, McDonald C, Lopez Morales E, Akyelken N, Acuto M. Replacing the services sector and three-sector theory: urbanization and control as economic sectors. *Regional Studies*. 2018;52(12):1708-1719. doi:10.1080/00343404.2018.1464136.
- [6] Krüger JJ. Productivity and structural change: A review of the literature. *Journal of Economic Surveys*. 2008;22(2):330-363. doi.org/10.1111/j.1467-6419.2007.00539.x.
- [7] Svjetska banka. Udio ekonomskih sektora u bruto društvenom proizvodu za određene dijelove svijeta. Ženeva, 30. Lipnja 2021.
- [8] Wang C, Lu Y. Can economic structural change and transition explain cross-country differences in innovative activity? *Technological Forecasting and Social Change*. 2020;159. doi.org/10.1016/j.techfore.2020.120194.
- [9] Bivens J. Updated employment multipliers for the U.S. economy. Economic Policy Institute, Washington DC. 2019 January.
- [10] IFC, International Finance Corporation. Why Manufacturing Matters: A Value Chain Reaction. IFC, Washington, 2019 November.
- [11] Helper S, Krueger T, Wiall H. Why Does Manufacturing Matter? Which Manufacturing Matters? A Policy Framework. Brookings, Washington D.C., 2012 February.
- [12] Svjetska banka. Proizvodnja, dodana vrijednost (% od bruto društvenog proizvoda). Ženeva, 31. Svibanj 2021.
- [13] Svjetska banka. Udio ekonomskih sektora u globalnom bruto društvenom proizvodu od 2009 do 2019. Ženeva, 30. Lipnja 2021.
- [14] Eurostat. Europska Unija i Euro-Zona: Broj zaposlenih od 2010 do 2020 godine. Luksemburg, 14. Srpanj 2021.
- [15] Svjetska banka. Europska unija: Raspodjela zaposlenih prema ekonomskim sektorima od 2010 do 2020 godine. Ženeva, 16. Prosinac 2020.
- [16] Svjetska banka i CIA. Europska unija: Udio pojedinih ekonomskih sektora na bruto društveni proizvod pojedinih članica u 2020 godini. Ženeva, 30. Lipanj 2021.
- [17] Ernest FC. A short history of the world's shipping industry. London: Routledge; 2005.

- [18] Murphy H. Shipbuilding and the International Journal of Maritime History. The international Journal of Maritime History. 2014;26(1):130-138. doi.10.1177/0843871413515820.
- [19] Hadžić N. Tehnologija brodogradnje 1. Zagreb: Fakultet strojarstva i brodogradnje; 2018.
- [20] Gasparotti C, Eugen R. An Overview on the Shipbuilding Market in Current Period and Forecast. Euro Economica. 2018; 37(3).
- [21] Brennan L, Ferdows K, Godsell J, Golini R, Keegan R, Kinkel S, Srari JS, Taylor M. Manufacturing in the world: where next?. International Journal of Operations & Production Management. 2015;35(9):1253-1274. doi. org/10.1108/IJOPM-03-2015-0135.
- [22] Baldwin R, Lopez-Gonzalez J. Supply-chain trade: a portrait of global pattern and several testable hypotheses. The World Economy. 2014. doi: 10.1111/twec.12189.
- [23] Danish Ship Finance. Broj aktivnih brodogradilišta u svijetu od 2014 do 2021 godine. Kopenhagen, 17. Svibanj 2021.
- [24] Udruga za brodogradnju i pomorsku tehniku VSM. Knjiga narudžbi u globalnoj brodogradnji u 2020 godini. Hamburg, 4. Svibanj 2021.
- [25] Hadžić N, Tomić M, Vladimir N, Ostojić S, Senjanović I. Current state and perspectives of the Croatian shipbuilding industry. Journal of Naval Architecture and Marine Engineering. 2015;12(1). doi.org/10.3329/jname.v12i1.21759.
- [26] Senjanović I, Hadžić N. Potencijali Hrvatske brodogradnje. In: Družić G, Družić I, editors. Zbornik radova znanstvenog skupa: Razvojni potencijalni hrvatskog gospodarstva Zagreb 2014; Zagreb, Hrvatska, 16.10.2014. Zagreb: Ekonomski fakultet; 2014.
- [27] Pavelić L, Herceg T. Development potential and future of Croatian shipbuilding industry. In: Braje IN, Jaković B, Hodak DF, editors. 12th International Odyssey Conference on Economics and Business Šibenik 2021; Šibenik, Croatia & Online, 09-12.06.2021. Zagreb: Ekonomski fakultet; 2021.
- [28] Udruga za brodogradnju i pomorsku tehniku VSM. Godišnji izvještaj 2012. Hamburg: VSM; 2013.
- [29] Udruga za brodogradnju i pomorsku tehniku VSM. Godišnji izvještaj 2013/2014. Hamburg: VSM; 2014.
- [30] Udruga za brodogradnju i pomorsku tehniku VSM. Godišnji izvještaj 2014/2015. Hamburg: VSM; 2015.
- [31] Udruga za brodogradnju i pomorsku tehniku VSM. Godišnji izvještaj 2016/2017. Hamburg: VSM; 2017.
- [32] Udruga za brodogradnju i pomorsku tehniku VSM. Godišnji izvještaj 2018/2019. Hamburg: VSM; 2019.
- [33] Udruga za brodogradnju i pomorsku tehniku VSM. Godišnji izvještaj 2020/2021. Hamburg: VSM; 2021.
- [34] Li J, Meerkov SM. Production system engineering. New York: Springer; 2009.

- [35] Hadžić N, Ložar V, Opetuk T, Kunkera Z. The Bernoulli Assembly Line: The Analytical and Semi-Analytical Evaluation of Steady-State Performance. *Applied Sciences*. 2022;12(23):12447. <https://doi.org/10.3390/app122312447>
- [36] Vyas VV. Continuous improvement of overall equipment effectiveness in production unit of automotive industry [doktorski rad]. Porto: Instituto Superior de Engenharia do Porto; 2019.
- [37] Papadopoulos CT, Li J, O’Kelly MEJ. A classification and review of timed Markov models of manufacturing. *Computers & Industrial Engineering*. 2019;128:219-244. doi 10.1016/j.cie.2018.12.019.
- [38] Wang Z, Gershwin SB. Heuristic production and sale policy for a two-product-type manufacturing system with downward substitution. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*. 2015; 929-942. doi. 10.1109/TSMC.2014.2371876.
- [39] Jia Z, Zhang L, Arinez J, Xiao G. Performance analysis for serial production lines with Bernoulli Machines and Real-time WIP-based Machine switch-on/off control. *International Journal of Production Research*. 2016;54(21):6285-6301. doi. 10.1080/00207543.2016.1197438.
- [40] Zhou W, Wang J, Zhu X. Research on Environmental Assessment Model of Shipyard Workshop Based on Green Manufacturing. *Journal of Coastal Research*. 2019;94(1):16-20. doi. 10.2112/SI94-004.1.
- [41] Li J, Blumenfeld DE, Huang N, Alden JM. Throughput analysis of production systems: recent advances and future topics. *International Journal of Production Research*. 2009;47(14):3823-3851. doi. 10.1080/00207540701829752.
- [42] Bielecki TR, Jakubowski J, Niewęglowski M. Conditional Markov chains: Properties, construction, and structured dependence. *Stochastic Processes and their Applications*. 2017;127(4):1125-1170. doi. 10.1016/j.spa.2016.07.010.
- [43] Machkouri M, Jakubowski A, Volný D. Stable limits for Markov chains via the Principle of Conditioning. *Stochastic Processes and their Applications*. 2020;130(4):1853-1878. doi. 10.1016/j.spa.2019.06.002.
- [44] Meerkov SM, Yan C. Production lead time in serial lines: Evaluation, analysis, and control. *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering*. 2016;13(2):663–675. doi. 10.1109/TASE.2014.2365108.
- [45] Sevast’yanov BA. Influence of Storage Bi Capacity on the Average Standstill Time of Production Line. *Theory of Probability Applications*. 1962;7(4):429-438.
- [46] Hadžić N. Analytical solution of the serial Bernoulli production line steady-state performance and its application in the shipbuilding process. *International Journal of Production Research*. 2019;57(4):1052-1065. doi. 10.1080/00207543.2018.1500042.
- [47] Hadžić N, Tomić M. Analytical solution of steady-state behavior of Bernoulli production line with two finite buffers. *Brodogradnja/Shipbuilding Journal*. 2017;68(3):85–102. doi. 10.21278/brod68306.
- [48] Hadžić N, Ložar V, Abdulaj F. A Finite State Method in the Performance Evaluation of the Bernoulli Serial Production Lines. *Applied Science*. 2020;10(18):6602. doi. 10.3390/app10186602.

- [49] Gershwin SB. An Efficient Decomposition Method for the Approximate Evaluation of Tandem Queues with Finite Storage Space and Blocking. *Operations Research*. 1987;35(2):291-305. doi. 10.1287/opre.35.2.291.
- [50] Li J, Meerkov SM, Zhang L. Production systems engineering: Problems, solutions, and applications. *Annual Reviews in Control*. 2010;34(1):73-88. doi. 10.1016/j.arcontrol.2010.02.003.
- [51] Zhao C, Li J. Analysis and improvement of multi-product assembly systems: an application study at a furniture manufacturing plant. *International Journal of Production Research*. 2014;52(21):6399-6413. doi. 10.1080/00207543.2014.948576.
- [52] Li J. Continuous improvement at Toyota manufacturing plant: Application of production systems engineering methods. *International Journal of Production Research*. 2013;51:7235–7249. doi. 10.1080/00207543.2012.753166.
- [53] Naebulharam R, Zhang L. Bernoulli serial lines with deteriorating product quality: performance evaluation and system-theoretic properties. *International Journal of Production Research*. 2014;52(5):1479-1494. doi. 10.1080/00207543.2013.847982.
- [54] Xie, X, i Li, J. Modeling, analysis and continuous improvement of food production systems: A case study at a meat shaving and packaging line. *Journal of Food Engineering*. 2012;113:344–350. doi. 10.1016/j.jfoodeng.2012.05.022.
- [55] Zhao C, Li J, Huang N, Horst JA. Flexible Serial Lines With Setups: Analysis, Improvement, and Application. *Ieee Robotics and Automation Letters*. 2017;2(1):120-127. doi. 10.1109/LRA.2016.2556078.
- [56] Dong F, Deglise-Hawkinson JR, Van Oyen MP, Singer DJ. Dynamic control of a closed two-stage queueing network for outfitting process in shipbuilding. *Computers & Operations Research*. 2016;72:1-11. doi. 10.1016/j.cor.2015.05.002.
- [57] Wang C, Mao P, Mao Y, Shin JG. Research on scheduling and optimization under certain conditions in panel block production line in shipbuilding. *International Journal of naval Architecture and Ocean Engineering*. 2016;8:398-408. doi. 10.1016/j.ijnaoe.2016.03.009.
- [58] Lee JK, Lee KJ, Park HK, Hong JS, Lee JS. Developing scheduling systems for Daewoo Shipbuilding: DAS project. *European Journal of Operational Research*. 1998;98:380-395.
- [59] Liyun X, Zhongyu S, Liansheng Y. Steel plate scheduling optimization in shipbuilding based on storage area partition. *Procedia CIRP*. 2020;93:1001-1006.
- [60] Kolich D, Yao YL, Fafandjel N, Hadjina M. Value stream mapping micropanel assembly with clustering to improve flow in a shipyard. *International Conference on Innovative Technologies IN-TECH Leiria 2014; Leiria, Portugal 10- 12.09.2014*.
- [61] Dain O, Ginsberg M, Keenan E, Pyle J, Smith T, Stoneman A, Pardoe I. Stochastic shipyard simulation with SIMYARD. *Proceedings of the 2006 Winter Simulation Conference Monterey 2006; Monterey, California, USA 3-6.12.2006*.
- [62] Hadjina M, Fafandjel N, Matulja T. Shipbuilding production process design methodology using computer simulation. *Brodogradnja/Shipbuilding*. 2015; Volume 66, Number2. ISSN 0007-215X, eISSN 1845-5859



- [63] Kim H, Lee S-S, Park JH, Lee J-G. A model for simulation-based shipbuilding system in a shipyard manufacturing process. *International Journal of Computer Integrated Manufacturing*. 2005;18(6):427-441.
- [64] Caprace JD, Freire MR, Assis LF, Pires M, Rigo P. Discrete Event Production Simulation in Shipyard Workshops. COPINAVAL'11 --The 22th Pan American Conference Of Naval Engineering - Maritime Transportation & Ports Engineering; Buenos Aires, Argentina 27-30.09.2011.
- [65] Ljubenkov B, Đukić G, Kuzmanić M. Simulation Methods in Shipbuilding Process Design. *Strojniški vestnik – Journal of Mechanical Engineering*. 2008;54:131-139.
- [66] Cantor G. Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre. *Math. Ann.* 1895;46:481-512. doi. 10.1007/BF02124929.
- [67] Devidé V. Moderna matematika “stara” i “nova” matematika. Zagreb: Školska knjiga; 1975.
- [68] Benšić M., Šuvak N. Uvod u vjerojatnost i statistiku. Osijek: Sveučilište J.J. Strossmayera, Odjel za matematiku; 2014.
- [69] Hossein P.-N. Introduction to Probability. Statistics and Random Processes. SAD: Kappa Research, LLC; 2014.
- [70] Kreyszig E. Advanced engineering mathematics. New York: John Wiley & Sons Inc.; 1999 .
- [71] Meerkov, S. M. and Zhang, L. (2008) Transient behaviour of serial production lines with Bernoulli machines. *IIE Transactions* 40, pp. 297-312.
- [72] Pauše, Ž. Vjerojatnost, Informacija, Stohastički procesi. Zagreb: Školska knjiga; 1985.
- [73] Gantmacher, F. R. The theory of matrices. New York: Chelsea Publishing Company; 1959.
- [74] Incontrol Simulation Solutions. Enterprise Dynamics Tutorial. Utrecht: The Netherlands; 2021.
- [75] Ložar V, Hadžić N, Opetuk T, Slapničar V. Accuracy of Semi-Analytical and Numerical Approaches in the Evaluation of Serial Bernoulli Production Lines. *Mathematics*. 2021;9(13):1461. <https://doi.org/10.3390/math9131461>.
- [76] Brandimarte P, Villa A. Advanced Models for Manufacturing Systems Management. CRC Press: Boca Raton, FL, USA, 1995.
- [77] Hadžić N, Ložar V, Opetuk T, Andrić J. The Bernoulli splitting line: analytical and semi-analytical evaluation of the steady-state performance. *International journal of production research*. 2021;1:(1),47 doi:10.1080/00207543.2021.1974115
- [78] Sun Microsystems Inc. Fortran User's Guide. Palo Alto, CA, USA; 2000.
- [79] Hadžić N, Ložar V, Opetuk T, Andrić J. A Finite State Method in improvement and design of lean Bernoulli serial production lines. *Computers & industrial engineering*. 2021;158,107449,20 doi:10.1016/j.cie.2021.107449.
- [80] Price KV, Storn RM, Lampinen JA. Differential evolution. A practical approach to global optimization. Leipzig: Springer; 2005.

- [81] Hadžić N, Ložar V, Opetuk T, Keser R. Towards Digital Twinning of Fabrication Lines in Shipyards. *Journal of Marine Science and Engineering*. 2023;11,1053, [doi.org/10.3390/jmse11051053](https://doi.org/10.3390/jmse11051053).

## **KRATKI ŽIVOTOPIS AUTORA**

Viktor Ložar rođen je 1983. godine u Friedrichshafenu, Njemačka, gdje je završio osnovnu školu i tehničku gimnaziju. 2003. godine osvojio je prvo mjestu iz fizike na regionalnom natjecanju „Jugend Forscht“ pokrajine Baden-Württemberg. Iste godine upisuje studiju brodogradnje na Fakultetu strojarstva i brodogradnje u Zagrebu na kojem 2009. godine stječe kvalifikaciju prvostupnika sa završnim radom „Analiza izrade ukrijepljenih panela na proizvodnoj liniji“, a u razdoblju od 2006. do 2007. godine bio je predsjednik udruge Inovatora na fakultetu strojarstva i brodogradnje. 2011. godine stječe kvalifikaciju magistra inženjera brodogradnje sa radom pod naslovom „Sustav za dinamičko pozicioniranje na bušačem brodu s dizalicom za teške terete”.

Prvo radno iskustvo započinje u listopadu 2011. godine u riječkom brodogradilištu 3. MAJ kao konstruktor trupa. Od siječnja 2013. godine je radio kao mlađi projektant na Brodarskom Institutu d.o.o. u Zagrebu, a od prosinca iste godine zapošljava se kao konstruktor u proizvodnji u VTR Komponente d.o.o. Nakon toga, od lipnja 2015. godine, zapošljava se kao konstruktor alata za prešanje u Parametrik d.o.o. iz kojeg prelazi, od srpnja 2017. godine, u PIA Automation Croatia d.o.o. na mjesto strojarskog projektanta u SolidWorksu. Od ožujka 2020. zaposlen je kao asistent na projektu HRZZ-a ANTYARD na Fakultetu strojarstva i brodogradnja na kojem pohađa poslijediplomski studiji brodogradnje.

Viktor Ložar živi u Zagrebu sa suprugom Ana-Marijom i sinom Jurajom.

## **IZJAVA**

Ovaj doktorski rad je u potpunosti podržan projektom Hrvatske zaklade za znanost – ANTYARD (UIP-2019-04-6573). Za ilustrativni primjer su korišteni podaci iz brodogradilišta Brodosplit d.o.o. Istraživanje ovog doktorskog rada je objavljeno i prezentirano u časopisima odnosno konferencijama navedenim na popisu javno objavljenih radova autora.

## POPIS JAVNO OBJAVLJENIH RADOVA AUTORA

### RADOVI U ČASOPISIMA

Hadžić N, Ložar V, Abdulaj F. A Finite State Method in the Performance Evaluation of the Bernoulli Serial Production Lines. *Applied Science*. 2020;10(18):6602. doi. 10.3390/app10186602.

Ložar V, Hadžić N, Opetuk T, Slapničar V. Accuracy of Semi-Analytical and Numerical Approaches in the Evaluation of Serial Bernoulli Production Lines. *Mathematics*. 2021;9(13):1461. <https://doi.org/10.3390/math9131461>.

Hadžić N, Ložar V, Opetuk T, Andrić J. A Finite State Method in improvement and design of lean Bernoulli serial production lines. *Computers & industrial engineering*. 2021;158,107449,20 doi:10.1016/j.cie.2021.107449.

Hadžić N, Ložar V, Opetuk T, Andrić J. The Bernoulli splitting line: analytical and semi-analytical evaluation of the steady-state performance. *International journal of production research*. 2021;1:(1),47 doi:10.1080/00207543.2021.1974115.

Hadžić N, Ložar V, Opetuk T, Cajner H. Improvability of the fabrication line in a shipyard. *Brodogradnja*. 2021;72:(3);13-28 doi:10.21278/brod72302

Hadžić N, Ložar V, Opetuk T, Kunkera Z. The Bernoulli Assembly Line: The Analytical and Semi-Analytical Evaluation of Steady-State Performance. *Applied Sciences*. 2022;12(23):12447. <https://doi.org/10.3390/app122312447>

Hadžić N, Ložar V, Opetuk T, Keser R. Towards Digital Twinning of Fabrication Lines in Shipyards. *Journal of Marine Science and Engineering*. 2023;11,1053, doi.org/10.3390/jmse11051053.

## KONFERENCIJSKI RADOVI

Ložar V, Abdulaj F, Opetuk T, Hadžić N, Cajner H. Application of semi-analytical methods in production systems engineering: serial lines. In: MOTSP 2020, 11th International Scientific Conference Industry 5.0 – Return to Humanity Management of Technology Step to Sustainable Production. Bol, Hrvatska Online, 30.09-02.10.2020. doi:10.31803/tg-20200720151140

Ložar V, Hadžić N, Opetuk T, Abdulaj F. An efficient method to identify bottlenecks of the ship production process: serial lines. In: Matulja T, Turk A, Legović D, Hadjina M, Degiuli N, Blagojević B, Serđo K, Vukelić G, (ur.). Zbornik radova 24. simpozija Teorija i praksa brodogradnje, in memoriam prof. Leopold Sorta (Sorta 2020). Malinska, Hrvatska Online, 15.10-16.10.2020.

Hadžić N, Ložar V, Opetuk T. Advanced Methodologies for Cost-Effective, Energy Efficient and Environmentally Friendly Ship Production Process Design. In: Matulja T, Turk A, Legović D, Hadjina M, Degiuli N, Blagojević B, Serđo K, Vukelić G, (ur.). Zbornik radova 24. simpozija Teorija i praksa brodogradnje, in memoriam prof. Leopold Sorta (Sorta 2020). Malinska, Hrvatska Online, 15.10-16.10.2020.

Ložar V, Opetuk T, Cajner H, Hadžić N, Andrić J. Statistical evaluation of semi-analytical, analytical and numerical models of the serial production lines. In: MOTSP 2021, 12th International Scientific Conference Management of Technology – Step to Sustainable Production. Poreč, Hrvatska, 08.09-10.09.2021. doi:10.31803/tg-20210806123001.

Ložar, Viktor; Hadžić, Neven; Opetuk, Tihomir; Keser, Robert Efficient algorithms for evaluation of the steel hull process. In: Nikola V. Malenica Š, Senjanović I. (ur.). PRADS 2022 Book of Abstracts. Dubrovnik, Hrvatska, 09.10-13.10.2022. Zagreb: Fakultet strojarstva i brodogradnje.

Ložar V, Hadžić N, Opetuk T, Cajner H. A simple method to estimate key performance indicators of the prefabrication and fabrication production line in a shipyard. In: Degiuli N, (ur.). SORTA 2022 PROCEEDINGS. Malinska, Hrvatska, 07.09-10.09.2022. Zagreb: Fakultet strojarstva i brodogradnje.

Ložar V, Opetuk T, Hadžić N, Cajner H. Numerical modeling of a prefabrication and fabrication production line in a shipyard. In: Degiuli N, (ur.). SORTA 2022 PROCEEDINGS. Malinska, Hrvatska, 07.09-10.09.2022. Zagreb: Fakultet strojarstva i brodogradnje.

## PRILOG A Dokaz da je vjerojatnost složenog događaja jednaka njihovom umnošku

Prema primjeru navedenom na početku poglavlja 3.3, Metoda konačnih stanja može se dokazati da se pomoću omjera svojstvenih vektora  $\langle \pi^A \rangle$  i  $\langle \pi^B \rangle$ , jednadžbe (3.12) i (3.14), može izraziti ukupni svojstveni vektor  $\langle \pi \rangle$ . Prisjetimo se da je zbroj svih elementa svojstvenog vektora  $\langle \pi \rangle$  jednak jedan,

$$1 = \pi_{00} + \pi_{01} + \dots + \pi_{010} + \pi_{10} + \pi_{12} + \dots + \pi_{110} + \pi_{20} + \pi_{21} + \pi_{22} + \pi_{23} + \dots + \pi_{210} + \dots + \pi_{1010}. \quad (\text{A.1})$$

Iz izraza (3.12) i (3.14) slijedi da se elementi

$\pi_{01}, \dots, \pi_{010}, \pi_{10}, \pi_{12}, \dots, \pi_{110}, \pi_{20}, \pi_{21}, \pi_{22}, \pi_{23}, \dots, \pi_{210}, \dots, \pi_{1010}$  mogu izraziti kao,

$$\begin{aligned} \frac{\pi_{01}}{\pi_{00}} &\approx \frac{\pi_1^B}{\pi_0^B}, & \frac{\pi_{10}}{\pi_{00}} &\approx \frac{\pi_1^A}{\pi_0^A}, & \frac{\pi_{11}}{\pi_{10}} &\approx \frac{\pi_1^B}{\pi_0^B}, & \frac{\pi_{20}}{\pi_{00}} &\approx \frac{\pi_2^A}{\pi_0^A}, & \frac{\pi_{21}}{\pi_{20}} &\approx \frac{\pi_1^B}{\pi_0^B}, \\ \pi_{01} &\approx \pi_{00} \frac{\pi_1^B}{\pi_0^B}, & \pi_{10} &\approx \pi_{00} \frac{\pi_1^A}{\pi_0^A}, & \pi_{11} &\approx \pi_{10} \frac{\pi_1^B}{\pi_0^B}, & \pi_{20} &\approx \pi_{00} \frac{\pi_2^A}{\pi_0^A}, & \pi_{21} &\approx \pi_{20} \frac{\pi_1^B}{\pi_0^B}. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Uvrštavanjem izraza (A.2) u (A.1) dobiva se

$$\begin{aligned} 1 = \pi_{00} + \pi_{00} \frac{\pi_1^B}{\pi_0^B} + \dots + \pi_{00} \frac{\pi_{10}^B}{\pi_0^B} + \pi_{00} \frac{\pi_1^A}{\pi_0^A} + \pi_{10} \frac{\pi_1^B}{\pi_0^B} + \pi_{10} \frac{\pi_2^B}{\pi_0^B} + \dots \\ + \pi_{10} \frac{\pi_{10}^B}{\pi_0^B} + \pi_{00} \frac{\pi_2^A}{\pi_0^A} + \pi_{20} \frac{\pi_1^B}{\pi_0^B} + \pi_{20} \frac{\pi_2^B}{\pi_0^B} + \pi_{20} \frac{\pi_3^B}{\pi_0^B} + \dots + \pi_{20} \frac{\pi_{10}^B}{\pi_0^B} + \dots \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Daljnjim uvrštavanjem izraza (A.2) u (A.3) mogu se elementi  $\pi_{10}, \pi_{12}, \dots, \pi_{110}, \pi_{20}, \pi_{21}, \pi_{22}, \pi_{23}, \dots, \pi_{210}, \dots, \pi_{1010}$  prikazati pomoću  $\pi_{00}$ ,

$$\begin{aligned} 1 = \pi_{00} + \pi_{00} \frac{\pi_1^B}{\pi_0^B} + \dots + \pi_{00} \frac{\pi_{10}^B}{\pi_0^B} + \pi_{00} \frac{\pi_1^A}{\pi_0^A} + \pi_{00} \frac{\pi_1^A}{\pi_0^A} \frac{\pi_1^B}{\pi_0^B} + \pi_{00} \frac{\pi_1^A}{\pi_0^A} \frac{\pi_2^B}{\pi_0^B} + \dots \\ + \pi_{00} \frac{\pi_1^A}{\pi_0^A} \frac{\pi_{10}^B}{\pi_0^B} + \pi_{00} \frac{\pi_2^A}{\pi_0^A} + \pi_{00} \frac{\pi_2^A}{\pi_0^A} \frac{\pi_1^B}{\pi_0^B} + \pi_{00} \frac{\pi_2^A}{\pi_0^A} \frac{\pi_2^B}{\pi_0^B} + \pi_{00} \frac{\pi_2^A}{\pi_0^A} \frac{\pi_3^B}{\pi_0^B} + \dots + \pi_{00} \frac{\pi_2^A}{\pi_0^A} \frac{\pi_{10}^B}{\pi_0^B} + \dots \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

što je dalje moguće pojednostavniti na sljedeći način,

$$\begin{aligned} 1 = \pi_{00} \left( 1 + \frac{\pi_1^B}{\pi_0^B} + \dots + \frac{\pi_{10}^B}{\pi_0^B} + \frac{\pi_1^A}{\pi_0^A} + \frac{\pi_1^A}{\pi_0^A} \frac{\pi_1^B}{\pi_0^B} + \frac{\pi_1^A}{\pi_0^A} \frac{\pi_2^B}{\pi_0^B} + \dots \right. \\ \left. + \frac{\pi_1^A}{\pi_0^A} \frac{\pi_{10}^B}{\pi_0^B} + \frac{\pi_2^A}{\pi_0^A} + \frac{\pi_2^A}{\pi_0^A} \frac{\pi_1^B}{\pi_0^B} + \frac{\pi_2^A}{\pi_0^A} \frac{\pi_2^B}{\pi_0^B} + \frac{\pi_2^A}{\pi_0^A} \frac{\pi_3^B}{\pi_0^B} + \dots + \frac{\pi_2^A}{\pi_0^A} \frac{\pi_{10}^B}{\pi_0^B} + \dots \right). \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Dobiveni izraz (A.5) se može modificirati izlučivanjem  $\frac{\pi_1^A}{\pi_0^A}, \frac{\pi_2^A}{\pi_0^A}, \dots, \frac{\pi_{10}^A}{\pi_0^A}$ ,

$$1 = \pi_{00} \left[ \left( 1 + \frac{\pi_1^B}{\pi_0^B} + \dots + \frac{\pi_{10}^B}{\pi_0^B} \right) + \frac{\pi_1^A}{\pi_0^A} \left( 1 + \frac{\pi_1^B}{\pi_0^B} + \frac{\pi_2^B}{\pi_0^B} + \dots + \frac{\pi_{10}^B}{\pi_0^B} \right) \right. \\ \left. + \frac{\pi_2^A}{\pi_0^A} \left( 1 + \frac{\pi_1^B}{\pi_0^B} + \frac{\pi_2^B}{\pi_0^B} + \frac{\pi_3^B}{\pi_0^B} + \dots + \frac{\pi_{10}^B}{\pi_0^B} \right) + \dots \right], \quad (\text{A.6})$$

što omogućuje supstituciju izraza unutar zagrada koristeći izraz,

$$1 - \pi_0^B = \pi_1^B + \pi_2^B + \pi_3^B + \dots + \pi_{10}^B, \quad (\text{A.7})$$

koji se temelji na svojstvu da je zbroj vjerojatnosti svih događaja jednak jedan. Uvrštavanjem izraza (A.7) u (A.6) slijedi,

$$1 = \pi_{00} \left( \left( 1 + \frac{1 - \pi_0^B}{\pi_0^B} \right) + \frac{\pi_1^A}{\pi_0^A} \left( 1 + \frac{1 - \pi_0^B}{\pi_0^B} \right) + \frac{\pi_2^A}{\pi_0^A} \left( 1 + \frac{1 - \pi_0^B}{\pi_0^B} \right) + \dots + \frac{\pi_{10}^A}{\pi_0^A} \left( 1 + \frac{1 - \pi_0^B}{\pi_0^B} \right) \right), \quad (\text{A.8})$$

odnosno,

$$1 = \pi_{00} \left( \left( 1 + \frac{1 - \pi_0^B}{\pi_0^B} \right) \left( 1 + \frac{\pi_1^A}{\pi_0^A} + \frac{\pi_2^A}{\pi_0^A} + \dots + \frac{\pi_{10}^A}{\pi_0^A} \right) \right). \quad (\text{A.9})$$

Izraz (A.9) se dalje može pojednostaviti primijenivši odnos,

$$1 - \pi_0^A = \pi_1^A + \pi_2^A + \pi_3^A + \dots + \pi_{10}^A, \quad (\text{A.7})$$

Te slijedi,

$$1 = \pi_{00} \left( \left( 1 + \frac{1 - \pi_0^B}{\pi_0^B} \right) \left( 1 + \frac{1 - \pi_0^A}{\pi_0^A} \right) \right). \quad (\text{A.10})$$

Jednostavnim matematičkom operacijama izraz (A.10) se može dalje pojednostaviti,

$$1 = \pi_{00} \left( \left( \frac{\pi_0^B}{\pi_0^B} + \frac{1 - \pi_0^B}{\pi_0^B} \right) \left( \frac{\pi_0^A}{\pi_0^A} + \frac{1 - \pi_0^A}{\pi_0^A} \right) \right), \quad (\text{A.11})$$

iz čega slijedi  $\pi_{00}$ ,

$$\pi_{00} = \frac{1}{\left( \left( \frac{1}{\pi_0^B} \right) \left( \frac{1}{\pi_0^A} \right) \right)} \quad (\text{A.12})$$

odnosno,

$$\pi_{00} = \pi_0^A \cdot \pi_0^B. \quad (\text{A.13})$$

Izraz (A.13) dokazuje da se množenjem događaja  $\pi_0^A$  i  $\pi_0^B$  dobiva vjerojatnost ukupnog događaja  $\pi_{00}$ . Uvrštavanjem izraza (A.12) u izraz (A.2) računaju se ostali elementi ukupnog svojstvenog vektora  $\langle \pi \rangle$ ,

$$\pi_{01} \approx \pi_0^A \cdot \pi_1^B, \dots, \pi_{10} \approx \pi_1^A \cdot \pi_0^B, \pi_{11} \approx \pi_1^A \cdot \pi_1^B, \dots, \pi_{20} \approx \pi_2^A \cdot \pi_0^B, \dots, \pi_{1010} \approx \pi_{10}^A \cdot \pi_{10}^B \quad (\text{A.14})$$

Iz toga je vidljivo da vrijedi opći izraz,

$$\pi_{h_1 h_2} = \pi_{h_1}^A \cdot \pi_{h_2}^B, \quad (\text{A.15})$$

odnosno za proizvoljan broj strojeva,  $M$ ,

$$\pi_{h_1 h_2 h_3 \dots h_{M-1}} = \pi_{h_1}^{(1)} \pi_{h_2}^{(2)} \pi_{h_3}^{(3)} \dots \pi_{h_{M-1}}^{(M-1)}. \quad (\text{A.16})$$



## PRILOG B Analiza sekcija i određivanje faktora grananja materijala

Tablica B1 prikazuje karakteristike dviju sekcija izrađenih u brodogradilištu Brodosplit d.o.o. prema kojima se određuju ulazni podaci  $p_i$ ,  $b_i$  i  $r_i$ . Faktori grananja određuju se pomoću analize debljine limova, visine profila i količine elemenata koje je potrebno oblikovati. Podaci o debljini limova bilježe raspon od 6 mm do 26 mm. Budući da je količina najdebljih limova zanemariva pretpostavlja se da se takvi limovi također obrađuju na stroju za rezanje plazmom. Takva pretpostavka vrijedi i za visinu profila u rasponu od 50 mm do 320 mm koji se režu ručno. Prema tome, ukupan broj potrebnih proizvodnih linija se smanjuje na pet, odnosno na modele A1, A2<sub>r1</sub>, A2<sub>r2</sub>, B1 i B2<sub>r11</sub> što se odražava na faktore grananja  $r_3$ ,  $r_4$ ,  $r_8$ ,  $r_9$ ,  $r_{10}$ ,  $r_{12}$ ,  $r_{15}$  i  $r_{16}$ , koja poprimaju vrijednost 0, a  $r_{11}$  je jednak 1, tablica B2. Preostali faktori grananja se računaju pomoću podataka iz tablice B1 vodeći pri tome brigu da limovi koji se preusmjeravaju na  $r_1$  ne zahtijevaju dodatno oblikovanje nakon rezanja. Faktori grananja  $r_5$  i  $r_6$  se zaokružuju na prikazanu vrijednost i kao takvi ulaze u izračun za  $r_7$ ,

$$\begin{aligned} r_5 &= \frac{2}{B_{KL}} \cdot B_{EV} \\ r_6 &= \frac{2}{B_{KL}} \cdot B_{EH} \\ r_7 &= 1 - r_5 - r_6. \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

Preostali faktori grananja  $r_{13}$  i  $r_{14}$  definiraju udio profila koji nakon ručnog rezanja zahtijevaju odnosno ne zahtijevaju oblikovanje,

$$\begin{aligned} r_{13} &= \frac{1}{B_{KP}} \cdot B_{EPO} \\ r_{14} &= 1 - r_{13}. \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Tablica B1 Analiza sekcije međupalublja (sekcija A) i pramčane sekcije (sekcija B)

Karateristike	Seksija A    B	Ukupno A+B	Prosjek (A+B)/2
Broj elementa iz limova	$B_{EL}$ [elem]	982    546	1528    -
Broj elementa iz jednog lima	$\lambda_L$ [e/k]	19.64    18.20	-    19.10
Broj elementa za oblikovanje veliki valjak	$B_{EV}$ [elem]	6    18	24    -
Broj elementa za oblikovanje H-preša	$B_{EH}$ [elem]	0    18	18    -
Prosječna duljina jednog lima	$\bar{L}$ [m]	8.44    7.01	-    7.72

	Prosječna širina jednog lima	$\bar{B}$	[m]	2.32	2.32	-	2.32
	Prosječna površina jednog lima	$\bar{A}$	[m <sup>2</sup> ]	19.54	16.23	-	17.88
	Minimalna debljina lima	$t_{\min}$	[mm]	6	5	-	6
	Maximalna debljina lima	$t_{\max}$	[mm]	25	26	-	26
	Prosječna debljina lima	$\bar{t}$	[mm]	11.59	15.50	-	13.55
Profili	Broj ulaznih profila	$B_{KP}$	[kom]	144	40	184	-
	Broj elementa iz profila	$B_{EP}$	[elem]	722	260	982	-
	Broj elementa iz jednog profila	$\lambda_P$	[e/k]	5.01		-	5.34
	Broj elementa za oblikovanje	$B_{EPO}$	[elem]	54	95	149	-
	Prosječna duljina jednog profila	$\bar{L}_P$	[m]	11.79	11.92	-	11.85
	Minimalna visina jednog profila	$H_{\min}$	[mm]	50	100	-	75
	Maximalna visina jednog profila	$H_{\max}$	[mm]	260	320	-	290
	Prosječna visina jednog profila	$\bar{H}$	[mm]	155	210	-	182.50

Tablica B2 Faktori grananja prema izabranim brodskim sekcijama [81]

Faktor grananja	$r_1$	$r_2$	$r_3$	$r_4$	$r_5$	$r_6$	$r_7$	$r_8$	$r_9$	$r_{10}$	$r_{11}$	$r_{12}$	$r_{13}$	$r_{14}$	$r_{15}$	$r_{16}$
$r_i$	0.5	0.5	0	0	0.05	0.05	0.9	0	0	0	1	0	0.2	0.8	0	0

## PRILOG C Određivanje kapaciteta međuskладиšta

Kapaciteti međuskладиšta za liniju predobrade limova i profila određena su prilikom terenskog istraživanja u brodogradilištu Brodosplit d.o.o. u sklopu projekta ANTYARD. Sva međuskладиšta predobrade su u naravi valjkaste staze na kojima se lim ili profil kreće konstantnom brzinom od 2 m/min. Prosječna duljina lima ili profila definira kapacitet međuskладиšta  $b_1$ ,  $b_5$ ,  $b_{17}$  i  $b_{20}$ , uz napomenu da valjkaste staza profila ima širinu od 1,5 m što omogućava obradu više profila istovremeno. Kapaciteti međuskладиšta su zaokružene na jedan komad lima odnosno jedan paket koji se sastoji od 8 profila, vidi tablica C1.

Tablica C1 Kapaciteti međuskладиšta za predobradu limova i profila

	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$b_4$	$b_5$	$b_{19}^*$	$b_{20}^*$	$b_{21}^*$	$b_{22}^*$
$N_i$	4	1	1	1	1	1	1	1	1

\* 8 profila paralelno

Kapaciteti međuskладиšta za obradu limova i profila određena su također prilikom terenskog istraživanja u brodogradilištu Brodosplit d.o.o. u sklopu projekta ANTYARD. Kapacitet međuskладиšta  $b_7=b_9$  odgovara prostoru koji stoji na raspolaganju na radnom stolu stroja za rezanje plazmom. Ostali kapaciteti međuskладиšta navedeni u tablici C2 su određeni procjenom. Pritom se treba naglasiti da navedeni kapaciteti odgovaraju ekvivalentnom broju lima ili profila,

$$b_{i^*} = B_e = \frac{\lambda r}{\lambda}, \quad (C.1)$$

gdje je  $\lambda r$  broj izrezanih elementa po grani  $r_i$ , a  $\lambda$  omjer broja ukupno izrezanih elementa,  $B_E$ , naspram ukupnog broja komada lima ili profila,  $B_K$ ,

$$\lambda = \frac{B_E}{B_K}. \quad (C.2)$$

Tablica C2 Kapaciteti međuskладиšta za obradu limova i profila

	$b_7^*$	$b_9^*$	$b_{10}^*$	$b_{11}^*$	$b_{13}^*$	$b_{15}^*$	$b_{16}^*$	$b_{17}^*$	$b_{24}^*$	$b_{26}^*$
$N_i$	2	2	2	2	np**	np**	np**	np**	4	np**

\* ekvivalentno skladište \*\* np nije potrebno

## PRILOG D Pouzdanost rada strojeva

### Pouzdanost strojeva za predobradu limova i profila

Pouzdanost strojeva linije predobrade lima određena je pomoću literature u kojoj su navedeni nominalni i operativni kapacitet svakog stroja izraženi kao [lim/h] uz napomenu da se ti podaci odnose na lim dimenzija 12x3 m, odnosno lim jednostavne površine 36 m<sup>2</sup>. Strojevi  $m_1$  i  $m_6$  ne ovise o površini lima, te se ti podaci iz literature preuzimaju bez dodatnog preračunavanja. Za strojeve  $m_2$ ,  $m_3$ ,  $m_4$  i  $m_5$  potrebno je podatke iz literature preračunati za prosječnu površinu lima određenu u tablici B1. Zato se svaki odgovarajući operativni kapacitet stroja naveden u [46] množi sa dvostrukom jednostavnom površinom i zatim se svaki produkt dijeli sa dvostrukom prosječnom površinom iz tablice B.1, time se uzima u obzir gornja i donja površina lima. Omjer operativnog i nominalnog kapaciteta pojedinog stroja daje pouzdanost rada stroja, tablica D1. Budući da je tehnologija predobrade profila ista kao i za limove, može se pretpostaviti da strojevi za predobradu profila imaju identičnu vjerojatnost pojave stanja {radi}, prema tome su podaci za  $p_{17}$ ,  $p_{18}$ ,  $p_{19}$ ,  $p_{20}$ ,  $p_{21}$ , u tablici D2 preuzeti iz tablice D1.

Tablica D1 Pouzdanost strojeva za predobradu limova

		$m_1$	$m_2$	$m_3$	$m_4$	$m_5$	$m_6$
Deklaracija stroja		2	280	185	400	280	4
		lim/h	m <sup>2</sup> /h	m <sup>2</sup> /h	m <sup>2</sup> /h	m <sup>2</sup> /h	lim/h
Nominalni kapacitet stroja*	[lim/h]	2.00	7.83	5.17	11.18	7.83	4.00
Operativni kapacitet stroja*	[lim/h]	1.80	7.13	4.63	8.96	7.13	3.82
Pouzdanost $p_i$		0.900	0.910	0.895	0.801	0.910	0.955

\* Vrijedi za dvostruku prosječnu površinu lima

Tablica D2 Pouzdanost strojeva za predobradu profila

	$m_{19}$	$m_{20}$	$m_{21}$	$m_{22}$	$m_{23}$
Vjerojatnost da stroj radi $p_i$	0.910	0.895	0.801	0.910	0.955

### Pouzdanost strojeva za obradu limova i profila

Postupci obrade limova i profila mogu se klasificirati u dvije vrste, automatizirane i ručne strojeve. U prvom slučaju operater nadzire postupak obrade, u drugom radnik izvršava potrebne operacije. Iz toga proizlazi da se za automatizirane postupke, vjerojatnost pojave stanja {radi},  $p_i$ , računa samo na temelju zabilježenih kvarova tokom određenog razdoblja, a za

ručne postupke se uzima u obzir kombinacija pouzdanosti samog stroja/uređaja i pojedinih radnika. Sama vjerojatnost da se stroj ili radnik  $m_i$  nalazi u stanju {radi},  $p_i$ , računa se putem omjera

$$p_i = \frac{T_{\{\text{radi}\}}}{T_{\{\text{Total}\}}}, \quad (\text{D.1})$$

gdje je  $T_{\{\text{radi}\}}$  vrijeme trajanja stanja {radi} a  $T_{\{\text{Total}\}}$  ukupno vrijeme opservacije pojedinog stroja odnosno vrijedi izraz

$$T_{\{\text{Total}\}} = T_{\{\text{radi}\}} + T_{\{\text{ne radi}\}}, \quad (\text{D.2})$$

gdje je  $T_{\{\text{ne radi}\}}$  vrijeme trajanja stanja {ne radi} uslijed kvarova, pauze i slično.

#### Pouzdanost strojeva $m_7$ i $m_9$

Strojevi  $m_7$  i  $m_9$  su u naravi „istočna“ plazma i „zapadna“ plazma u brodogradilištu Brodosplit za koje postoji knjiga kvarova, tablica D3. U knjigama se bilježio dan kada je došlo do kvara, vrsta kvara i vrijeme trajanje kvara. Na temelju tih podataka može se za svaku plazmu odrediti srednja vrijednost vjerojatnost pojave stanja {radi},

$$p_7 = p_9 = \frac{\sum_{n=1}^n \frac{T_{\{\text{Total}\}} - T_{\{\text{kvar}\}}}{T_{\{\text{Total}\}}}}{n}, \quad (\text{D3})$$

gdje je  $n$  ukupan broj zabilježenih kvarova.

Tablica D3 Sažetak knjiga kvarova za istočnu i zapadnu plazmu

Istočna plazma				Zapadna plazma			
n	$T_{\{\text{Total}\}}$ [sek]	$T_{\{\text{kvar}\}}$ [sek]	$p$	n	$T_{\{\text{Total}\}}$ [sek]	$T_{\{\text{kvar}\}}$ [sek]	$p$
1	28800	19800	0.313	1	28800	9000	0.688
2	28800	5400	0.813	2	28800	7200	0.750
3	28800	10800	0.625	3	28800	7200	0.750
4	28800	5400	0.813	4	28800	5400	0.813
5	28800	5400	0.813	5	28800	5400	0.813
6	28800	18000	0.375	6	28800	14400	0.500
7	28800	21600	0.250	7	28800	7200	0.750
8	28800	5400	0.813	8	28800	9000	0.688
9	28800	1800	0.938	9	28800	5400	0.813

10	28800	3600	0.875	10	28800	9900	0.656
11	28800	10800	0.625	11	28800	10800	0.625
12	28800	5400	0.813	12	28800	7200	0.750
13	28800	7200	0.750	13	28800	10800	0.625
14	28800	13200	0.542			$p_9=$	0.709
15	28800	7200	0.750				
16	28800	5400	0.813				
17	28800	17100	0.406				
18	28800	3600	0.875				
19	28800	10200	0.646				
20	28800	3600	0.875				
21	28800	3600	0.875				
22	28800	2400	0.917				
			$p_7=$				0.705

Pouzdanost strojeva  $m_8$  i  $m_{10}$

Strojevi  $m_8$  i  $m_{10}$  su u naravi operateri koji rade na „istočnoj“ i „zapadnoj“ plazmi. Nakon što  $m_7$  i  $m_9$  izrežu dijelove oni ručno označavaju svaki element s odgovarajućom radioničkom oznakom. Pouzdanost rada radnika računa se pomoću izraza D.3 i procijenjenim vremenima navedenim u tablici D4.

Tablica D4 Procjena pouzdanosti rada radnika

Procjena radnika			
$T_{\{Total\}}$	Smjena	8	h
$T_{\{ne\ radi\}}$	Pauza	0.5	h
	Odlasci WC	0.5	h
	Bolovanje	0.36	h
	Sastank	0.5	h

$$p_8=p_{10}= 0.77$$

Pouzdanost strojeva  $m_{11}$  i  $m_{12}$

Stroj  $m_{11}$  u naravi čini skup od tri radnika, jedne dizalice i jednog stroja za oblikovanje elementa lima na velikom valjku. Stroj  $m_{12}$  u naravi čini isti takav skup samo što su u tom slučaju radnici i dizalica grupirani oko H-preše. Vjerojatnost da su strojevi  $m_{11}$  i  $m_{12}$  u stanju {radi} određuje se pomoću presjeka vjerojatnosti stanja {radi} svih navedenih sudionika, odnosno vrijedi

$$p_i = p_{SO} \cap p_D \cap p_{R_1} \cap p_{R_2} \cap p_{R_3}, \quad (D.4)$$

gdje je  $i=11$  ili  $12$ ,  $p_{SO}$  vjerojatnost stanja {radi} stroja za oblikovanje,  $p_D$  vjerojatnost stanja {radi} dizalice a  $p_{R_1}$  vjerojatnost stanja {radi} radnika 1 odnosno 2 i 3. Vrijednosti vjerojatnosti stanja {radi} pojedinih sudionika navedeni su u tablici D5, a konačni rezultat je  $p_{11}=p_{12}=0.44$ .

Tablica D5 Vrijednosti vjerojatnosti stanja {radi} pojedinih sudionika za  $m_{11}$  i  $m_{12}$

Vjerojatnost stanje {radi} stroj za oblikovanje	$p_{SO}$	0.99
Vjerojatnost stanje {radi} dizalica	$p_D$	0.99
Vjerojatnost stanje {radi} radnik 1	$p_{R_1}$	0.77
Vjerojatnost stanje {radi} radnik 2	$p_{R_2}$	0.77
Vjerojatnost stanje {radi} radnik 3	$p_{R_3}$	0.77

#### Pouzdanost stroja $m_{24}$

Stroj  $m_{24}$  u naravi čini skup od jednog radnika i jednog stroja za ručno rezanje profila. Vjerojatnost da je  $m_{24}$  u stanju {radi} određuje se pomoću presjeka vjerojatnosti stanja {radi} svih navedenih sudionika, odnosno vrijedi

$$p_{24} = p_{SO} \cap p_{R_1}, \quad (D.5)$$

gdje je  $p_{SO}$  vjerojatnost stanja {radi} stroja za ručno rezanje i  $p_{R_1}$  vjerojatnost stanja {radi} radnika. Vrijednosti vjerojatnosti stanja {radi} pojedinih sudionika navedeni su u tablici D6 a konačni rezultat je  $p_{24}=0.76$ .

Tablica D6 Vrijednosti vjerojatnosti stanja {radi} pojedinih sudionika za  $m_{24}$

Vjerojatnost stanje {radi} stroj za ručno rezanje	$p_{SRR}$	0.99
Vjerojatnost stanje {radi} radnik 1	$p_{R_1}$	0.77

### Pouzdanost stroja $m_{25}$

Stroj  $m_{25}$  u naravi čini skup od dva radnika i jednog stroja za oblikovanje elementa profila. Vjerojatnost da je  $m_{25}$  u stanju {radi} određuje se pomoću presjeka vjerojatnosti stanja {radi} svih navedenih sudionika, odnosno vrijedi

$$p_{25} = p_{SO} \cap p_{R_1} \cap p_{R_2}, \quad (\text{D.6})$$

gdje je  $p_{SO}$  vjerojatnost stanja {radi} stroja za oblikovanje,  $p_{R_1}$  vjerojatnost stanja {radi} radnika 1 odnosno 2. Vrijednosti vjerojatnosti stanja {radi} pojedinih sudionika navedeni su u tablici D7 a konačni rezultat je  $p_{25}=0.58$ .

Tablica D7 Vrijednosti vjerojatnosti stanja {radi} pojedinih sudionika za  $m_{25}$

Vjerojatnost stanje {radi} stroj za oblikovanje	$p_{SO}$	0.99
Vjerojatnost stanje {radi} radnik 1	$p_{R_1}$	0.77
Vjerojatnost stanje {radi} radnik 2	$p_{R_2}$	0.77



## PRILOG E Određivanje vrijeme trajanja proizvodnje

Metoda konačnih stanja zahtijeva određene pretpostavke koje su navedene u poglavlju 3, jedna od njih se odnosi na vrijeme ciklusa, a druga na očuvanje mase. Iz tog razloga svi strojevi moraju imati isto ili približno isto vrijeme ciklusa, a broj komada koji ulazi mora odgovarati broju komada koji izlazi, što je slučaju u modelu A1. Model B1 ispunjava uvjete uz korištenje broja ekvivalentnih ulaznih profila  $Be_{uP}$ , a ostali modeli A2<sub>r1</sub>, A2<sub>r2</sub> i B2<sub>r11</sub> tek nakon što se izračunavaju izjednačeno vrijeme ciklusa,  $\tau_I$ , broj ekvivalentnih limova odnosno profila,  $Be$ , i broj izrezanih elementa po komadu lima odnosno profila,  $\lambda$ .

Broj ekvivalentnih ulaznih profila  $Be_{uP}$  opisuje koliko profila se može staviti u obradu istovremeno,

$$Be_{uP} = \frac{B_{KP}}{B_{iP}}, \quad (E.1)$$

gdje su  $B_{KP}$  ukupni broj profila, a  $B_{iP}$  broj profila koji su istovremeno u predobradi.

Izjednačeno vrijeme ciklusa je srednja vrijednost zbroja stvarnog vremena ciklusa  $\tau_i$  i ekvivalentnih vremena ciklusa,  $\tau_{ei}$ ,

$$\tau_I = \frac{\sum_{w=i}^w \tau_i + \sum_{q=i}^q \tau_{ei}}{n}, \quad (E.2)$$

gdje  $n=w+q$  ukupan broj razmatranih strojeva. Pritom se mora paziti da se dodatno ne zbrajaju realna vremena ciklusa na kojima se temelji ekvivalentno vrijeme ciklusa.

Stvarno vrijeme ciklusa,  $\tau_i$ , označava koliko jedna operacija na jednom komadu ili elementu traje, a može se izraziti kao

$$\tau_i = \frac{t_i}{B_K} = \frac{t_i}{B_E}, \quad (E.3)$$

gdje su  $t_i$ , ukupno vrijeme trajanja  $i$ -te operacije,  $B_K$  ukupni broj komada odnosno  $B_E$  ukupni broj elementa.

Ekvivalentno vrijeme ciklusa svodi stvarno vrijeme trajanja ciklusa po elementu u trajanje ciklusa po komadu,

$$\tau_{ei} = \tau_i \cdot \lambda, \quad (E.4)$$

gdje je  $\lambda$  broj izrezanih elementa po komadu lima odnosno profila te se računa kao omjer broja ukupnih elementa  $B_E$  sa brojem ukupnih komada,  $B_K$ ,

$$\lambda_L = \frac{B_E}{B_{KL}},$$

$$\lambda_P = \frac{B_E}{B_{KP}}.$$
(E.5)

Jednom kada je  $\tau_l$  određen mogu se izračunati parametri poput izjednačenog kapaciteta stroja,  $c_l$ , propusnosti proizvodne linije odnosno grane,  $TP$  i broja ciklusa za ukupnu proizvodnju,  $C$ , koristeći navedene izraze,

$$c_l = \frac{1}{\tau_l},$$

$$TP = c_l \cdot PR,$$

$$C = \frac{B_K}{PR} = \frac{Be}{PR}.$$
(E.6)

Ukupno vrijeme trajanja proizvodnje,  $T$ , za serijske linije se određuje putem broja ciklusa za ukupnu proizvodnju,  $C$ , ili putem propusnosti proizvodne linije  $TP$ ,

$$T = C \cdot \tau_l,$$

$$T = \frac{B_K}{TP} = \frac{Be}{TP}.$$
(E.7)

Ukupno vrijeme trajanja proizvodnje,  $T$ , za linije s grananjem toka materijala se računa kao zbroj udjela vremena,

$$T = \sum_{i=1}^K T_{ri} \cdot r_i$$
(E.8)

gdje je  $T_{ri}$  vrijeme trajanja proizvodnje po grani, a može se računati sa jednim od izraza (E.7).

Tablica E1 prikazuje koliko vremena je potrebno da se svi limovi navedenih sekcija označavaju i izrežu na plazma rezačicama  $m_7$  i  $m_9$ .

Tablice E2 do E5 prikazuju u prvom dijelu sve potrebne ulazne podatke za računanje ukupnog vremena trajanja

Tablica E1 Ukupno vrijeme za rezanje i strojno označavanje svih plošnih elementa

Karakteristike			Sekcija		Ukupno A+B
			A	B	
udaljenosti	Prazni hod	[m]	1622.40	1454.55	3077
	Označavanje	[m]	1547.50	1100.74	2648
	Vertikalno rezanje	[m]	2572.20	1330.96	3903
	Skošavanje	[m]	247.70	245.73	493
	Broj probijanja	[kom]	347.00	737.00	1084
brzine	Prazni hod	[m/min]	-	-	20
	Označavanje	[m/min]	-	-	14.4
	Vertikalno rezanje	[m/min]	-	-	3
	Skošavanje	[m/min]	-	-	3
	Probijanje	[min/kom]	-	-	0.25
vrijeme, $t$	Prazni hod	[min]	-	-	154
	Označavanje	[min]	-	-	184
	Vertikalno rezanje	[min]	-	-	1301
	Skošavanje	[min]	-	-	164
	Probijanje	[min]	-	-	271
Ukupno vrijeme		[min]			2074

Tablica E2 Ulazni i izlazni podaci za proračun  $\tau$ ,  $\tau_I$  i  $T$  za model A1

Ulazni podaci za model A1			
1	Broj gotovih proizvoda	$PR_6$	0.77 [kom/cik]
2	Brzina kretanja limova	$v$	2 [m/min]
3	Prosječna duljina jednog lima	$l_{pL}$	7.72 [m]
4	Prosječno vrijeme postavljanja jednog lima	$t_{st}$	30 [sek]
5	Broj ukupnih komada ulaznih limova	$B_{KL}$	80 [kom]
Izlazni podaci model A1			
1	Stvarno vrijeme ciklusa za svaki stroj	$\tau$	262 [sek/cik]
2	Izjednačeno vrijeme ciklusa	$\tau_I$	262 [sek/cik]
3	Izjednačeni kapacitet stroja	$c_I$	0.004 [cik/sek]
4	Propusnost proizvodne linije	$TP$	0.003 [kom/sek]
5	Ukupan broj ciklusa za obradu svih limova	$C$	103 [cik]
6	Vrijeme trajanja proizvodnje putem $C$	$T_{A1}$	27039 [sek]
7	Vrijeme trajanja proizvodnje putem $TP$	$T_{A1}$	27039 [sek]
		$T_{A1}$	7:30:39 [hh:mm:ss]

Tablica E3 Ulazni i izlazni podaci za proračun  $\tau$ ,  $\tau_I$  i  $T$  za model A2<sub>r1</sub>

Ulazni podaci za model A2 r1			
1	Broj gotovih proizvoda	$PR_8$	0.65 [kom/cik]
4	Broj ukupnih komada ulaznih limova na grani r <sub>1</sub>	$B_{KL}$	40 [kom]
5	Broj ukupnih elementa na grani r <sub>1</sub>	$B_E$	764 [elem]
7	Vrijeme rezanja svih elementa na m <sub>7</sub>	$t_7$	1037 [min]
8	Vrijeme ručnog označavanja po elementu na m <sub>8</sub>	$t_8$	1.5 [min/elem]
Izlazni podaci model A2 r2			
1	Broj izrezanih elementa po kom lima	$\lambda_L$	19.1 [elem/kom]
2	Stvarno vrijeme ciklusa m <sub>7</sub>	$\tau_7$	1556 [sek/kom]
3	Stvarno vrijeme ciklusa m <sub>8</sub>	$\tau_8$	90 [sek/elem]
4	Ekvivalentno vrijeme ciklusa za $\lambda$ , stroj m <sub>8</sub>	$\tau_{e8}$	1719 [sek/kom]
5	Izjednačeno vrijeme ciklusa	$\tau_I$	1637 [sek/cik]
6	Izjednačeni kapacitet stroja	$c_I$	0.000611 [cik/sek]
7	Propusnost proizvodne linije	$TP$	0.000398 [kom/sek]
8	Broj ciklusa	$C$	61 [cik]
9	Vrijeme trajanja proizvodnje putem $C$	$T_{A2r1}$	100502 [sek]
10	Vrijeme trajanja proizvodnje putem $TP$	$T_{A2r1}$	100502 [sek]
		$T_{A2r1}$	27:55:02 [hh:mm:ss]

Tablica E4 Ulazni i izlazni podaci za proračun  $\tau$ ,  $\tau_I$  i  $T$  za model A2<sub>r2</sub>

Ulazni podaci za model A2 r2			
1	Broj gotovih proizvoda u grani r <sub>5</sub>	$PR_{11}$	0.04 [kom/cik]
2	Broj gotovih proizvoda u grani r <sub>6</sub>	$PR_{12}$	0.04 [kom/cik]
3	Broj gotovih proizvoda u grani r <sub>7</sub>	$PR_{r7}$	0.64 [kom/cik]
4	Broj ukupnih komada ulaznih limova na grani r <sub>2</sub>	$B_{KL}$	40 [kom]
5	Broj ukupnih elementa na grani r <sub>2</sub>	$B_E$	764 [elem]
7	Vrijeme rezanja svih elementa na m <sub>9</sub>	$t_9$	1037 [min]
8	Vrijeme ručnog označavanja po elem na m <sub>10</sub>	$t_{10}$	1.5 [min/elem]
9	Vrijeme postavljanja elementa na stroj m <sub>11</sub>	$t_{11st}$	30 [min]
10	Vrijeme oblikovanja elementa na stroju m <sub>11</sub>	$t_{11ob}$	30 [min]
11	Vrijeme postavljanja elementa na stroj m <sub>12</sub>	$t_{12st}$	30 [min]
12	Vrijeme oblikovanja elementa na stroju m <sub>12</sub>	$t_{12ob}$	60 [min]
13	Faktor grananja grane 5	$r_5$	0.05
14	Faktor grananja grane 6	$r_6$	0.05
15	Faktor grananja grane 7	$r_7$	0.90

Izlazni podaci model A2 r2			
1	Broj izrezanih elementa po kom lima	$\lambda_L$	19.1 [elem/kom]
2	Broj izrezanih elementa po grani 5	$\lambda r_5$	38.2 [elem]
3	Broj izrezanih elementa po grani 6	$\lambda r_6$	38.2 [elem]
4	Broj izrezanih elementa po grani 7	$\lambda r_7$	687.6 [elem]
5	Broj ekvivalentnih limova po grani 5	$Be_{r5}$	2 [kom]
6	Broj ekvivalentnih limova po grani 6	$Be_{r6}$	2 [kom]
7	Broj ekvivalentnih limova po grani 7	$Be_{r7}$	36 [kom]
8	Stvarno vrijeme ciklusa po limu, stroj m9	$\tau_9$	1556 [sek/kom]
9	Stvarno vrijeme ciklusa po limu, stroj m10	$\tau_{10}$	1719 [sek/kom]
10	Stvarno vrijeme ciklusa po elementu, stroj m11	$\tau_{11}$	3600 [sek/elem]
11	Ekvivalentno vrijeme ciklusa za $\lambda$ , stroj m11	$\tau_{e11}$	68760 [sek/kom]
12	Stvarno vrijeme ciklusa po elementu, stroj m12	$\tau_{12}$	5400 [sek/elem]
13	Ekvivalentno vrijeme ciklusa za $\lambda$ , stroj m12	$\tau_{e12}$	103140 [sek/kom]
14	Izjednačeno vrijeme ciklusa uzimajući $\lambda$ u obzir	$\tau_I$	43794 [sek/cik]
15	Izjednačeni kapacitet stroja	$c_I$	0.000023 [cik/sek]
16	Propusnost proizvodne linije grana 5	$TP_{r5}$	0.000001 [kom/sek]
17	Propusnost proizvodne linije grana 6	$TP_{r6}$	0.000001 [kom/sek]
18	Propusnost proizvodne linije grana 7	$TP_{r7}$	0.000015 [kom/sek]
19	Broj ciklusa za $Be_{r5}$	$C_{r5}$	56 [cik]
20	Broj ciklusa za $Be_{r6}$	$C_{r6}$	56 [cik]
21	Broj ciklusa za $Be_{r7}$	$C_{r7}$	56 [cik]
22	Vrijeme trajanja proizvodnje putem $C_{r5}$	$T_{r5}$	2472233 [sek]
23	Vrijeme trajanja proizvodnje putem $C_{r6}$	$T_{r6}$	2472233 [sek]
24	Vrijeme trajanja proizvodnje putem $C_{r7}$	$T_{r7}$	2467249 [sek]
25	Vrijeme trajanja proizvodnje putem $TP_{r5}$	$T_{r5}$	2472233 [sek]
26	Vrijeme trajanja proizvodnje putem $TP_{r6}$	$T_{r6}$	2472233 [sek]
27	Vrijeme trajanja proizvodnje putem $TP_{r7}$	$T_{r7}$	2467249 [sek]
		$T_{A2r2}$	2467748 [sek]
		$T_{A2r2}$	685:29:08 [hh:mm:ss]

Tablica E5 Ulazni i izlazni podaci za proračun  $\tau$ ,  $\tau_I$  i  $T$  za model B1

Ulazni podaci za model B1			
1	Broj gotovi proizvoda	$PR_{23}$	0.77 [kom/cik]
2	Brzina kretanja profila	$v$	2 [m/min]
3	Prosječna duljina jednog profila	$l_{pp}$	11.85 [m]
4	Prosječno vrijeme postavljanja jednog profila	$t_{st}$	30 [sek]

5	Broj ukupnih komada ulaznih profila	$B_{KP}$	184 [kom]
6	Broj profila istovremeno u predobradi	$B_{iP}$	8 [kom]
Izlazni podaci model B1			
1	Broj ekvivalentnih ulaznih profila	$Be_{uP}$	23 [kom]
2	Stvarno vrijeme ciklusa za svaki stroj	$\tau$	596 [sek/kom]
3	Izjednačeno vrijeme ciklusa	$\tau_I$	596 [sek/cik]
4	Kapacitet stroja	$c$	0.002 [cik/sek]
5	Propusnost proizvodne linije	$TP$	0.001 [kom/sek]
6	Ukupan broj ciklusa za obradu svih profila	$C$	30 [cik]
7	Vrijeme trajanja proizvodnje putem $C$	$T_{BI}$	17694 [sek]
8	Vrijeme trajanja proizvodnje putem $TP$	$T_{BI}$	17694 [sek]
		$T_{BI}$	4:54:54 [hh:mm:ss]

Tablica E6 Ulazni i izlazni podaci za proračun  $\tau$ ,  $\tau_I$  i  $T$  za model B2<sub>r11</sub>

Ulazni podaci za model B2 r11			
1	Broj gotovih proizvoda u grani r13	$PR_{25}$	0.15 [kom/cik]
2	Broj gotovih proizvoda u grani r14	$PR_{r14}$	0.61 [kom/cik]
4	Broj ukupnih komada ulaznih profila na grani r11	$B_{KP}$	184 [kom]
5	Broj ukupnih elementa na grani r11	$B_E$	982 [elem]
9	Vrijeme postavljanja profila na stroj m24	$t_{24st}$	15 [min]
10	Vrijeme rezanja profila na stroju m24	$t_{24re}$	5 [min]
11	Vrijeme postavljanja elementa na stroj m25	$t_{25st}$	5 [min]
12	Vrijeme oblikovanja elementa na stroju m25	$t_{25ob}$	5 [min]
13	Faktor grananja grane 13	$r_{13}$	0.20
14	Faktor grananja grane 14	$r_{14}$	0.80
Izlazni podaci model B2 r11			
1	Broj izrezanih elementa po kom profila	$\lambda_P$	5.34 [elem/kom]
2	Broj izrezanih elementa po grani 13	$\lambda_{r13}$	196.4 [elem]
3	Broj izrezanih elementa po grani 14	$\lambda_{r14}$	785.6 [elem]
4	Broj ekvivalentnih profila po grani 13	$Be_{r13}$	36.8 [kom]
5	Broj ekvivalentnih profila po grani 14	$Be_{r14}$	147.2 [kom]
6	Stvarno vrijeme ciklusa stroja m24	$\tau_{24}$	1200 [sek/kom]
7	Stvarno vrijeme ciklusa stroja m25	$\tau_{25}$	600 [sek/elem]
8	Ekvivalentno vrijeme ciklusa za $\lambda$ , stroj m25	$\tau_{e25}$	3202 [sek/kom]
9	Izjednačeno vrijeme ciklusa uzimajući $\lambda$ u obzir	$\tau_I$	2201 [sek/cik]
10	Izjednačeni kapacitet stroja	$c_I$	0.000454 [cik/sek]
11	Propusnost proizvodne linije grana 13	$TP_{r5}$	0.000069 [kom/sek]
12	Propusnost proizvodne linije grana 14	$TP_{r6}$	0.000276 [kom/sek]

- 13 Broj ciklusa za  $Be_{r13}$
- 14 Broj ciklusa za  $Be_{r14}$
- 15 Vrijeme trajanja proizvodnje putem  $C_{r13}$
- 16 Vrijeme trajanja proizvodnje putem  $C_{r14}$
- 17 Vrijeme trajanja proizvodnje putem  $TP_{r13}$
- 18 Vrijeme trajanja proizvodnje putem  $TP_{r14}$

$C_{r5}$	242	[cik]
$C_{r6}$	242	[cik]
$T_{r13}$	533006	[sek]
$T_{r14}$	532895	[sek]
$T_{r13}$	533006	[sek]
$T_{r14}$	532895	[sek]
$T_{B2}$	532917	[sek]
$T_{B2}$	148:01:57	[hh:mm:ss]

## PRILOG F Ulazni podaci za projektiranje i popis populacija 40. generacije

Projektiranje se vrši pomoću ulaznih podataka, tablica F1, i prema kriteriju najvećeg očekivanog broja gotovih proizvoda pri najmanjem ukupnom kapacitetu međuskladišta. Gornja ograničenja kapaciteta međuskladišta,  $N_{\max}$ , odabrana su proizvoljno dok je donja granica postavljena na dva, kako bi se osigurala što veća točnost rezultata s obzirom da metoda konačnih stanja ne diskretizira dovoljno dobro male prostore stanja. Za svaki model će se generirati 100 članova populacije,  $N_p$ , koje predstavljaju po jednu proizvodnu liniju za koju se računa očekivani broj gotovih proizvoda,  $PR$ , odnosno težinski očekivani broj gotovih proizvoda,  $PR_T$ ,

$$PR_T = \sum_{i=1}^K PR_{ri} \cdot r_i, \quad (F.1)$$

i ukupni kapacitet međuskladišta,  $N_{uk}$ . Dobivenim podacima se ulazi u selekcijski postupak za generiranje populacije nove generacije. Faktor križanja i skaliranja su izabrani kao neutralne vrijednosti i iznose 0.5.

Tablica F1 Ulazni podaci za projektiranje

Model	Redni broj strojeva							$N_{\max}$	$N_{\min}$	$N_p$	$S$	$K$
	Najveća dopuštena pouzdanost strojeva											
A1	$m_i$	$m_1$	$m_2$	$m_3$	$m_4$	$m_5$	$m_6$	10	2	100	0.5	0.5
	$p_{imax}$	0.90	0.91	0.90	0.80	0.91	0.96					
A2r1	$m_i$	$m_7$	$m_8$									
	$p_{imax}$	0.71	0.77									
A2r2	$m_i$	$m_9$	$m_{10}$	$m_{11}$	$m_{12}$							
	$p_{imax}$	0.71	0.77	0.44	0.44							
B1	$m_i$	$m_{19}$	$m_{20}$	$m_{21}$	$m_{22}$	$m_{23}$						
	$p_{imax}$	0.91	0.90	0.80	0.91	0.96						
B2	$m_i$	$m_{24}$	$m_{25}$									
	$p_{imax}$	0.76	0.58									



Tablica F2 Odabir populacije model A1, 40. generacija

40. Generacija - Model A1											
RB	PR	$N_{uk}$	RB	PR	$N_{uk}$	RB	PR	$N_{uk}$	RB	PR	$N_{uk}$
1	0.795	19	26	0.796	17	51	0.785	22	76	0.800	19
2	0.800	19	27	0.798	20	52	0.763	21	77	0.781	21
3	0.800	19	28	0.800	20	53	0.800	14	78	0.798	14
4	0.800	21	29	0.800	13	54	0.765	15	79	0.770	19
5	0.796	17	30	0.781	21	55	0.739	15	80	0.797	28
6	0.800	14	31	0.800	23	56	0.800	19	81	0.772	15
7	0.800	18	32	0.790	12	57	0.800	19	82	0.792	15
8	0.800	15	33	0.800	20	58	0.800	20	83	0.800	16
9	0.799	13	34	0.800	17	59	0.775	12	84	0.756	19
10	0.791	15	35	0.800	23	60	0.765	20	85	0.800	22
11	0.800	19	36	0.787	12	61	0.800	17	86	0.800	17
12	0.797	24	37	0.752	20	62	0.797	20	87	0.800	13
13	0.792	18	38	0.800	16	63	0.686	14	88	0.785	16
14	0.800	18	39	0.800	18	64	0.712	12	89	0.773	16
15	0.790	19	40	0.799	18	65	0.800	16	90	0.799	18
16	0.800	19	41	0.799	16	66	0.768	18	91	0.792	12
17	0.800	17	42	0.800	22	67	0.800	23	92	0.796	21
18	0.797	14	43	0.800	15	68	0.793	13	93	0.764	23
19	0.800	17	44	0.800	18	69	0.770	14	94	0.800	16
20	0.795	11	45	0.800	16	70	0.794	13	95	0.796	17
21	0.800	17	46	0.792	17	71	0.800	14	96	0.754	16
22	0.800	21	47	0.800	14	72	0.784	21	97	0.789	15
23	0.679	11	48	0.754	15	73	0.800	25	98	0.791	14
24	0.792	14	49	0.631	10	74	0.800	16	99	0.793	16
25	0.800	20	50	0.796	13	75	0.787	15	100	0.800	18
									RB	PR	$N_{uk}$
									Populacija s $PR_{max}$ :		
									67	0.800	23
									Populacija s $N_{ukmin}$ :		
									49	0.631	10
				RB $N_p$ 67				RB $N_p$ 49			
$m_i$	$p_i$	$b_i$	$N_i$	$m_i$	$p_i$	$b_i$	$N_i$	$m_i$	$p_i$	$b_i$	$N_i$
m1	0.891	$b_1$	3	m1	0.691	$b_1$	2	m1	0.691	$b_1$	2
m2	0.818	$b_2$	2	m2	0.632	$b_2$	2	m2	0.632	$b_2$	2
m3	0.889	$b_3$	6	m3	0.900	$b_3$	2	m3	0.900	$b_3$	2
m4	0.800	$b_4$	2	m4	0.652	$b_4$	2	m4	0.652	$b_4$	2
m5	0.878	$b_5$	10	m5	0.872	$b_5$	2	m5	0.872	$b_5$	2
m6	0.959			m6	0.960			m6	0.960		

\* RB redni broj

Tablica F3 Odabir populacije model A2<sub>r1</sub>, 40. generacija

40. Generacija - Model A2 <sub>r1</sub>															
RB	PR	N <sub>uk</sub>	RB	PR	N <sub>uk</sub>	RB	PR	N <sub>uk</sub>	RB	PR	N <sub>uk</sub>				
1	0.703	7	26	0.696	5	51	0.703	7	76	0.700	6				
2	0.689	4	27	0.700	6	52	0.652	2	77	0.706	9				
3	0.696	5	28	0.689	4	53	0.652	2	78	0.696	5				
4	0.706	9	29	0.703	7	54	0.652	2	79	0.700	6				
5	0.676	3	30	0.705	8	55	0.696	5	80	0.652	2				
6	0.706	9	31	0.696	5	56	0.676	3	81	0.652	2				
7	0.652	2	32	0.689	4	57	0.652	2	82	0.652	2				
8	0.703	7	33	0.706	9	58	0.706	9	83	0.652	2				
9	0.676	3	34	0.689	4	59	0.705	8	84	0.652	2				
10	0.652	2	35	0.652	2	60	0.696	5	85	0.676	3				
11	0.652	2	36	0.676	3	61	0.700	6	86	0.703	7				
12	0.652	2	37	0.689	4	62	0.676	3	87	0.696	5				
13	0.676	3	38	0.652	2	63	0.696	5	88	0.700	6				
14	0.689	4	39	0.696	5	64	0.706	9	89	0.652	2				
15	0.676	3	40	0.652	2	65	0.705	8	90	0.696	5				
16	0.705	8	41	0.700	6	66	0.652	2	91	0.703	7				
17	0.703	7	42	0.689	4	67	0.696	5	92	0.696	5				
18	0.652	2	43	0.700	6	68	0.676	3	93	0.652	2				
19	0.676	3	44	0.652	2	69	0.652	2	94	0.689	4				
20	0.706	9	45	0.703	7	70	0.652	2	95	0.696	5				
21	0.652	2	46	0.652	2	71	0.652	2	96	0.696	5				
22	0.706	9	47	0.705	8	72	0.705	8	97	0.652	2				
23	0.705	8	48	0.676	3	73	0.676	3	98	0.700	6				
24	0.706	9	49	0.700	6	74	0.700	6	99	0.703	7				
25	0.676	3	50	0.703	7	75	0.652	2	100	0.652	2				
									RB	PR	N <sub>uk</sub>				
									4	0.706	9				
									7	0.652	2				
				RB N <sub>p</sub> 4				RB N <sub>p</sub> 7							
m <sub>i</sub>		p <sub>i</sub>		b <sub>i</sub>		N <sub>i</sub>		m <sub>i</sub>		p <sub>i</sub>		b <sub>i</sub>		N <sub>i</sub>	
m <sub>7</sub>		0.710		b <sub>7</sub>		9		m <sub>7</sub>		0.710		b <sub>7</sub>		2	
m <sub>8</sub>		0.770						m <sub>8</sub>		0.770					

\* RB redni broj

Tablica F4 Odabir populacije model A2<sub>r2</sub>, 40. generacija

40. Generacija - Model A2 <sub>r2</sub>																																																											
RB	$PR_T$	$N_{uk}$	RB	$PR_T$	$N_{uk}$	RB	$PR_T$	$N_{uk}$	RB	$PR_T$	$N_{uk}$																																																
1	0.579	6	26	0.579	7	51	0.579	10	76	0.579	8																																																
2	0.579	7	27	0.579	7	52	0.579	8	77	0.579	6																																																
3	0.579	8	28	0.579	8	53	0.579	7	78	0.579	7																																																
4	0.579	8	29	0.579	10	54	0.579	6	79	0.579	6																																																
5	0.579	10	30	0.579	7	55	0.579	8	80	0.579	7																																																
6	0.579	7	31	0.579	9	56	0.579	7	81	0.579	6																																																
7	0.579	6	32	0.579	7	57	0.579	6	82	0.579	7																																																
8	0.579	8	33	0.579	6	58	0.579	6	83	0.579	8																																																
9	0.579	8	34	0.579	11	59	0.579	7	84	0.579	7																																																
10	0.579	7	35	0.579	6	60	0.579	8	85	0.579	7																																																
11	0.579	10	36	0.579	7	61	0.579	12	86	0.579	8																																																
12	0.579	6	37	0.579	6	62	0.579	8	87	0.579	9																																																
13	0.579	6	38	0.579	6	63	0.579	6	88	0.579	8																																																
14	0.579	8	39	0.579	8	64	0.579	9	89	0.579	8																																																
15	0.579	7	40	0.579	8	65	0.579	6	90	0.579	6																																																
16	0.579	6	41	0.579	10	66	0.579	6	91	0.579	6																																																
17	0.579	11	42	0.579	8	67	0.579	7	92	0.579	6																																																
18	0.579	7	43	0.579	7	68	0.579	6	93	0.579	6																																																
19	0.579	6	44	0.579	7	69	0.579	6	94	0.579	8																																																
20	0.579	7	45	0.579	8	70	0.579	6	95	0.579	9																																																
21	0.579	7	46	0.579	8	71	0.579	7	96	0.579	6																																																
22	0.579	8	47	0.579	7	72	0.579	9	97	0.579	7																																																
23	0.579	7	48	0.579	8	73	0.579	9	98	0.579	7																																																
24	0.579	8	49	0.579	6	74	0.579	8	99	0.579	6																																																
25	0.579	7	50	0.579	7	75	0.579	7	100	0.579	6																																																
									RB	$PR_T$	$N_{uk}$																																																
									3	0.579	8																																																
									1	0.579	6																																																
<table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <thead> <tr> <th colspan="4">RB <math>N_p</math> 3</th> <th colspan="4">RB <math>N_p</math> 1</th> </tr> <tr> <th><math>m_i</math></th> <th><math>p_i</math></th> <th><math>b_i</math></th> <th><math>N_i</math></th> <th><math>m_i</math></th> <th><math>p_i</math></th> <th><math>b_i</math></th> <th><math>N_i</math></th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>m9</td> <td>0.710</td> <td><math>b_9</math></td> <td>2</td> <td>m9</td> <td>0.710</td> <td><math>b_9</math></td> <td>2</td> </tr> <tr> <td>m10</td> <td>0.770</td> <td><math>b_{10}</math></td> <td>4</td> <td>m10</td> <td>0.728</td> <td><math>b_{10}</math></td> <td>2</td> </tr> <tr> <td>m11</td> <td>0.440</td> <td><math>b_{11}</math></td> <td>2</td> <td>m11</td> <td>0.440</td> <td><math>b_{11}</math></td> <td>2</td> </tr> <tr> <td>m12</td> <td>0.440</td> <td></td> <td></td> <td>m12</td> <td>0.440</td> <td></td> <td></td> </tr> </tbody> </table>												RB $N_p$ 3				RB $N_p$ 1				$m_i$	$p_i$	$b_i$	$N_i$	$m_i$	$p_i$	$b_i$	$N_i$	m9	0.710	$b_9$	2	m9	0.710	$b_9$	2	m10	0.770	$b_{10}$	4	m10	0.728	$b_{10}$	2	m11	0.440	$b_{11}$	2	m11	0.440	$b_{11}$	2	m12	0.440			m12	0.440		
RB $N_p$ 3				RB $N_p$ 1																																																							
$m_i$	$p_i$	$b_i$	$N_i$	$m_i$	$p_i$	$b_i$	$N_i$																																																				
m9	0.710	$b_9$	2	m9	0.710	$b_9$	2																																																				
m10	0.770	$b_{10}$	4	m10	0.728	$b_{10}$	2																																																				
m11	0.440	$b_{11}$	2	m11	0.440	$b_{11}$	2																																																				
m12	0.440			m12	0.440																																																						

\* RB redni broj

Tablica F5 Odabir populacije model B1, 40. generacija

40. Generacija - Model B1											
RB	PR	$N_{uk}$	RB	PR	$N_{uk}$	RB	PR	$N_{uk}$	RB	PR	$N_{uk}$
1	0.800	18	26	0.800	15	51	0.800	14	76	0.800	14
2	0.800	16	27	0.800	14	52	0.800	16	77	0.800	13
3	0.800	11	28	0.799	10	53	0.800	15	78	0.796	10
4	0.800	18	29	0.800	14	54	0.795	8	79	0.800	17
5	0.795	12	30	0.800	15	55	0.800	15	80	0.800	12
6	0.800	15	31	0.800	16	56	0.800	18	81	0.800	13
7	0.800	16	32	0.800	13	57	0.800	16	82	0.800	15
8	0.800	14	33	0.800	17	58	0.800	14	83	0.800	15
9	0.800	13	34	0.800	15	59	0.800	15	84	0.800	14
10	0.800	11	35	0.800	15	60	0.800	18	85	0.800	17
11	0.800	17	36	0.800	17	61	0.800	15	86	0.800	17
12	0.800	18	37	0.800	14	62	0.800	17	87	0.800	16
13	0.800	15	38	0.800	13	63	0.799	9	88	0.800	15
14	0.800	16	39	0.800	16	64	0.800	15	89	0.800	16
15	0.800	15	40	0.800	15	65	0.800	16	90	0.800	16
16	0.800	16	41	0.800	13	66	0.800	20	91	0.800	16
17	0.800	16	42	0.800	12	67	0.800	17	92	0.795	8
18	0.800	13	43	0.800	15	68	0.800	15	93	0.800	14
19	0.800	16	44	0.800	16	69	0.800	12	94	0.800	16
20	0.800	10	45	0.800	11	70	0.800	11	95	0.800	15
21	0.800	15	46	0.800	17	71	0.800	14	96	0.800	19
22	0.800	15	47	0.799	17	72	0.800	14	97	0.800	15
23	0.796	9	48	0.800	16	73	0.800	17	98	0.800	17
24	0.800	16	49	0.796	8	74	0.800	14	99	0.796	8
25	0.800	16	50	0.800	15	75	0.800	17	100	0.800	12
									RB	PR	$N_{uk}$
									1	0.800	18
									49	0.796	8
				RB $N_p$ 1				RB $N_p$ 49			
$m_i$	$p_i$	$b_i$	$N_i$	$m_i$	$p_i$	$b_i$	$N_i$	$m_i$	$p_i$	$b_i$	$N_i$
m19	0.910	$b_{19}$	2	m19	0.856	$b_{19}$	2	m19	0.856	$b_{19}$	2
m20	0.891	$b_{20}$	2	m20	0.900	$b_{20}$	2	m20	0.900	$b_{20}$	2
m21	0.800	$b_{21}$	4	m21	0.800	$b_{21}$	2	m21	0.800	$b_{21}$	2
m22	0.877	$b_{22}$	10	m22	0.884	$b_{22}$	2	m22	0.884	$b_{22}$	2
m23	0.960			m23	0.960			m23	0.960		

\* RB redni broj

Tablica F6 Odabir populacije model B2, 40. generacija

40. Generacija - Model B2															
RB	$PR_T$	$N_{uk}$	RB	$PR_T$	$N_{uk}$	RB	$PR_T$	$N_{uk}$	RB	$PR_T$	$N_{uk}$				
1	0.507	2	26	0.508	2	51	0.508	2	76	0.508	2				
2	0.507	2	27	0.508	2	52	0.508	2	77	0.507	2				
3	0.508	2	28	0.508	2	53	0.508	2	78	0.508	2				
4	0.507	2	29	0.508	2	54	0.508	2	79	0.508	2				
5	0.508	2	30	0.508	2	55	0.508	2	80	0.508	2				
6	0.508	2	31	0.508	2	56	0.508	2	81	0.507	2				
7	0.508	2	32	0.508	2	57	0.507	2	82	0.508	2				
8	0.508	2	33	0.508	2	58	0.508	2	83	0.508	2				
9	0.508	2	34	0.507	2	59	0.508	2	84	0.507	2				
10	0.508	2	35	0.508	2	60	0.508	2	85	0.508	2				
11	0.507	2	36	0.508	2	61	0.508	2	86	0.508	2				
12	0.508	2	37	0.508	2	62	0.508	2	87	0.507	2				
13	0.507	2	38	0.508	2	63	0.508	2	88	0.510	3				
14	0.508	2	39	0.508	2	64	0.508	2	89	0.508	2				
15	0.508	2	40	0.508	2	65	0.508	2	90	0.508	2				
16	0.508	2	41	0.508	2	66	0.508	2	91	0.508	2				
17	0.508	2	42	0.508	2	67	0.508	2	92	0.508	2				
18	0.508	2	43	0.508	2	68	0.508	2	93	0.508	2				
19	0.508	2	44	0.508	2	69	0.508	2	94	0.508	2				
20	0.508	2	45	0.508	2	70	0.508	2	95	0.508	2				
21	0.508	2	46	0.508	2	71	0.507	2	96	0.508	2				
22	0.508	2	47	0.508	2	72	0.508	2	97	0.508	2				
23	0.508	2	48	0.508	2	73	0.507	2	98	0.508	2				
24	0.508	2	49	0.508	2	74	0.508	2	99	0.508	2				
25	0.507	2	50	0.508	2	75	0.508	2	100	0.508	2				
									RB	$PR_T$	$N_{uk}$				
									Populacija s $PR_{Tmax}$ :						
									88	0.510	3				
									Populacija s $N_{ukmin}$ :						
									1	0.507	2				
				RB $N_p$ 88				RB $N_p$ 1							
$m_i$		$p_i$		$b_i$		$N_i$		$m_i$		$p_i$		$b_i$		$N_i$	
m24		0.760		b24		3		m24		0.760		b24		2	
m25		0.151						m25		0.147					

\* RB redni broj