

# Računalno modeliranje aerodinamičkog opterećenja zgrade uz primjenu modela turbulencije Reynoldsovog tenzora naprezanja

---

Frančin, Loren

Undergraduate thesis / Završni rad

2023

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:235:529000>

Rights / Prava: [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom](#).

Download date / Datum preuzimanja: **2025-03-12**

Repository / Repozitorij:

[Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# ZAVRŠNI RAD

Loren Frančín

Zagreb, 2023.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

Računalno modeliranje aerodinamičkog  
opterećenja zgrade uz primjenu modela  
turbulencije Reynoldsovog tenzora  
naprezanja

Mentor:  
Prof. dr. sc. Hrvoje Kozmar

Student:  
Loren Frančin

Zagreb, 2023.

Izjavljujem da sam ovaj rad izradio samostalno koristeći stečena znanja tijekom studija i navedenu literaturu.

Zahvaljujem se mentoru prof. dr. sc. Hrvoju Kozmaru te asistentu dr. sc. Mihaelu Cindoriju na ukazanoj pomoći i savjetima pri izradi ovog završnog rada. Također se zahvaljujem i svojoj obitelji, prijateljima i djevojci na vjeri i potpori u dosadašnjem dijelu studiranja.

Loren Frančin



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE



Središnje povjerenstvo za završne i diplomske ispite  
Povjerenstvo za završne i diplomske ispite studija strojarstva za smjerove.

Procesno-energetski, konstrukcijski, inženjersko modeliranje i računalne simulacije i brodstrojarski

Sveučilište u Zagrebu Fakultet strojarstva i brodogradnje	
Datum	Prilog
Klasa: 602 – 04 / 23 – 6 / 1	
Ur.broj: 15 - 1703 - 23 -	

## ZAVRŠNI ZADATAK

Student: **Loren Frančin**

JMBAG: **0035216306**

Naslov rada na hrvatskom jeziku: **Računalno modeliranje aerodinamičkog opterećenja zgrade uz primjenu modela turbulencije Reynoldsovog tenzora naprezanja**

Naslov rada na engleskom jeziku: **Computational modelling of aerodynamic loads on a building using the Reynolds stress turbulence model**

Opis zadatka:

Poznavanje pravilnog opterećenja zgrada i drugih inženjerskih konstrukcija uslijed strujanja vjetra izuzetno je važno kako bi se spriječile štete uzrokovane jakim vjetrovima. Prethodna su istraživanja pokazala kako modeli turbulencije temeljeni na rješavanju vremenski osrednjenih Navier-Stokesovih jednadžbi i modeliranju turbulentne viskoznosti uzrokuju pretjerano visoke vrijednosti zaustavnog tlaka na prednjoj površini zgrade izložene vjetru. S obzirom da složeniji modeli turbulencije, poput simulacije velikih vrtloga, zahtijevaju posebnu pripremu rubnih i početnih uvjeta i korištenje izuzetno fine mreže konačnih volumena uz male vremenske korake integracije, dobru mogućnost predstavljaju modeli turbulencije kod kojih se turbulencija modelira rješavanjem transportne jednadžbe Reynoldsovog tenzora naprezanja, pri čemu nije nužno modelirati turbulentnu viskoznost.

U završnom radu je uz primjenu programskog paketa za računalnu dinamiku fluida potrebno računalno modelirati strujanje atmosferskog graničnog sloja u praznoj računalnoj domeni korištenjem modela turbulencije temeljenog na rješavanju transportne jednadžbe Reynoldsovog tenzora naprezanja. Nakon što se potvrdi da je tim pristupom moguće generirati uvjete strujanja vjetra u skladu s dostupnim eksperimentalnim rezultatima, potrebno je računalno modelirati aerodinamičko opterećenje modela zgrade oblika kocke. Postignute računalne rezultate potrebno je usporediti s vrijednostima dostupnim u literaturi.

Rad treba sadržavati:

1. Uvod s općenitim opisom teme, pregledom relevantne literature i ciljevima rada.
2. Opis strujanja vjetra u atmosferskom graničnom sloju.
3. Matematičke osnove modeliranja atmosferskog graničnog sloja.
4. Opis računalnog modela strujanja zraka oko modela zgrade.
5. Prikaz i analizu rezultata računalnih simulacija.
6. Zaključak.

Rezultate proračuna je potrebno prikazati odgovarajućim tablicama, dijagramima i slikama. U radu je potrebno navesti popis korištene literature i zahvalu na pomoći tijekom izrade rada.

Zadatak zadan:

Datum predaje rada:

Predviđeni datumi obrane:

30. 11. 2022.

1. rok: 20. 2. 2023.  
2. rok (izvanredni): 10. 7. 2023.  
3. rok: 18. 9. 2023.

1. rok: 27. 2. – 3. 3. 2023.  
2. rok (izvanredni): 14. 7. 2023.  
3. rok: 25. 9. – 29. 9. 2023.

Zadatak zadao:

Prof. dr. sc. Hrvoje Kozmar

Predsjednik Povjerenstva:

Prof. dr. sc. Vladimir Soldo

# Sadržaj

<b>Sadržaj</b>	<b>I</b>
<b>Popis slika</b>	<b>IV</b>
<b>Popis tablica</b>	<b>V</b>
<b>Popis oznaka</b>	<b>VI</b>
<b>Sažetak</b>	<b>IX</b>
<b>Summary</b>	<b>X</b>
<b>1. Uvod</b>	<b>1</b>
1.1. Metode istraživanja u aerodinamici okoliša . . . . .	1
1.2. Računalna aerodinamika okoliša . . . . .	2
<b>2. Značajke atmosferskog graničnog sloja</b>	<b>4</b>
2.1. Opće atmosfersko strujanje . . . . .	4
2.2. Atmosferski granični sloj . . . . .	7
2.2.1. Značajke strujanja u atmosferskom graničnom sloju . . . . .	8
2.2.2. Aerodinamička duljina hrapavosti površine . . . . .	9
2.2.3. Debljina istisnuća atmosferskog graničnog sloja . . . . .	10
2.2.4. Empirijski izrazi za modeliranje atmosferskog graničnog sloja . . . . .	11
2.2.4.1. Zakon potencije . . . . .	11
2.2.4.2. Logaritamski zakon . . . . .	11
<b>3. Osnove modeliranja strujanja fluida</b>	<b>13</b>
3.1. Temeljne jednadžbe mehanike kontinuuma . . . . .	13
3.2. Vremenski osrednjene Navier-Stokesove jednadžbe . . . . .	14
3.3. Modeliranje turbulencije . . . . .	16
3.3.1. Model Reynoldsovog tenzora naprezanja . . . . .	17
3.3.1.1. Prilagođeni model Reynoldsovog tenzora naprezanja . . . . .	20
3.3.2. Modeliranje turbulencije u neposrednoj blizini nepropusne stijenke . . . . .	25
3.3.2.1. Standardna zidna funkcija . . . . .	26
3.3.2.2. Zidna funkcija temeljena na aerodinamičkoj duljini hrapavosti površine . . . . .	27

---

<b>4. Računalni model</b>	<b>29</b>
4.1. Homogenost modela atmosferskog graničnog sloja . . . . .	29
4.1.1. Prazna dvodimenzijaska računalna domena . . . . .	29
4.1.2. Rubni uvjeti . . . . .	31
4.2. Računalna domena s modelom zgrade oblika kocke . . . . .	33
4.2.1. Rubni uvjeti . . . . .	34
<b>5. Rezultati</b>	<b>36</b>
5.1. Homogenost modela atmosferskog graničnog sloja . . . . .	36
5.2. Aerodinamičko opterećenje zgrade oblika kocke . . . . .	39
<b>6. Zaključak</b>	<b>45</b>

# Popis slika

<b>Slika 1.</b>	Prostorni i vremenski red veličine raznih oblika atmosferskog strujanja [1] . . . . .	4
<b>Slika 2.</b>	Ravnoteža sila na česticu fluida u slobodnoj atmosferi [11] . . . . .	6
<b>Slika 3.</b>	Ekmanova spirala, profil brzine u atmosferskom graničnom sloju [11] . . . . .	6
<b>Slika 4.</b>	Ravnoteža sila u atmosferskom graničnom sloju [11] . . . . .	7
<b>Slika 5.</b>	Atmosferski granični sloj . . . . .	7
<b>Slika 6.</b>	Podjela atmosferskog graničnog sloja [12] . . . . .	8
<b>Slika 7.</b>	Prikaz aerodinamičke duljine hrapavosti površine $z_0$ . . . . .	9
<b>Slika 8.</b>	Prikaz uzdignutog atmosferskog graničnog sloja uslijed strujanja zraka na gustom šumskom području [1] . . . . .	10
<b>Slika 9.</b>	Reynoldsovo osrednjavanje fizikalne veličine $f$ [17] . . . . .	15
<b>Slika 10.</b>	Prikaz promjene bezdimenzijske brzine paralelne sa stijenkom s bezdimenzijskom udaljenosti od stijenke [17] . . . . .	26
<b>Slika 11.</b>	Prikaz konačnog volumena uz nepropusnu stijenkicu s težištem u točki C [21] . . . . .	28
<b>Slika 12.</b>	Prikaz prazne dvodimenzijske računalne domene [22] . . . . .	30
<b>Slika 13.</b>	Mreža konačnih volumena korištena pri provjeri homogenosti modela AGS-a . . . . .	30
<b>Slika 14.</b>	Prikaz trodimenzijske domene s modelom zgrade oblika kocke [21] . . . . .	33
<b>Slika 15.</b>	Prikaz detalja mreže konačnih volumena razvijene pomoću alata cfMesh <sup>®</sup> korištene za analizu opstrujavanja modela zgrade oblika kocke unutar AGS-a [21] . . . . .	34
<b>Slika 16.</b>	Usporedba profila osrednjene brzine strujanja, kinetičke energije turbulencije i komponente $R_{zx}$ Reynoldsovog tenzora naprezanja u praznoj dvodimenzijskoj (2D) računalnoj domeni uz primjenu LRR modela sa standardnim koeficijentima i LRR modela s prilagođenim koeficijentima. Rezultati uspoređeni s eksperimentalnim rezultatima prema Kozmar i Laschka (2019) [23] i računalnim rezultatima prema Richards i Norris (2011) [10] . . . . .	37
<b>Slika 17.</b>	Usporedba komponenti Reynoldsovog tenzora naprezanja dobivenih metodom domene preteče u praznoj dvodimenzijskoj (2D) domeni uz korištenje LRR modela turbulencije sa standardnim koeficijentima i LRR modela turbulencije s prilagođenim koeficijentima. Rezultati uspoređeni s računalnim rezultatima prema Richards i Norris (2011) [10] . . . . .	38
<b>Slika 18.</b>	Prikaz modela zgrade oblika kocke s pripadajućim stranicama [21] . . . . .	39
<b>Slika 19.</b>	Usporedba linijske raspodjele koeficijenta tlaka po prednjoj stranici modela zgrade oblika kocke pri opstrujavanju u suburbanom AGS-u. Rezultati dobiveni računalnom simulacijom uspoređeni su s eksperimentalnim rezultatima prema	



- Kozmar i Laschka (2019) [23] i računalnim rezultatima postignutim  $k - \omega$  SST modelom turbulencije [21]. . . . . 40
- Slika 20.** Usporedba rezultata linijske raspodjele koeficijenta tlaka po bočnoj stranici modela zgrade oblika kocke pri opstrujavanju u suburbanom AGS-u. Rezultati dobiveni računalnom simulacijom uspoređeni su s eksperimentalnim rezultatima prema Kozmar i Laschka (2019) [23] i računalnim rezultatima postignutim  $k - \omega$  SST modelom turbulencije [21]. . . . . 42
- Slika 21.** Usporedba rezultata linijske raspodjele koeficijenta tlaka po gornjoj stranici modela zgrade oblika kocke pri opstrujavanju u suburbanom AGS-u. Rezultati dobiveni računalnom simulacijom uspoređeni su sa eksperimentalnim rezultatima prema Kozmar i Laschka (2019) [23] i računalnim rezultatima postignutim  $k - \omega$  SST modelom turbulencije [21]. . . . . 43
- Slika 22.** Usporedba rezultata linijske raspodjele koeficijenta tlaka po stražnjoj stranici modela zgrade oblika kocke pri opstrujavanju u suburbanom AGS-u. Rezultati dobiveni računalnom simulacijom uspoređeni su s eksperimentalnim rezultatima prema Kozmar i Laschka (2019) [23] i računalnim rezultatima postignutim  $k - \omega$  SST modelom turbulencije [21]. . . . . 44

## Popis tablica

<b>Tablica 1.</b> Aerodinamička duljina hrapavosti površine za različite tipove terena [14] . . .	9
<b>Tablica 2.</b> Iznos koeficijenata u izrazu za odnos tlaka i brzine deformacije za LRR-QI model [18] . . . . .	19
<b>Tablica 3.</b> Iznos koeficijenata u izrazu za odnos tlaka i brzine deformacije za LRR-IP model [18] . . . . .	20
<b>Tablica 4.</b> Rubni uvjeti korišteni pri računalnom modeliranju AGS-s u praznoj dvodimenzijskoj domeni . . . . .	31
<b>Tablica 5.</b> Rubni uvjeti korišteni pri modeliranju AGS-a u trodimenzijskoj računalnoj domeni s modelom zgrade oblika kocke . . . . .	35

# Popis oznaka

## Latinska slova

Oznaka	Jedinica	Opis
$C_1$	–	Konstanta modela turbulencije
$C_2$	–	Konstanta modela turbulencije
$C_3$	–	Konstanta modela turbulencije
$C_4$	–	Konstanta modela turbulencije
$C_s$	–	Konstanta modela turbulencije
$C_\mu$	–	Konstanta modela turbulencije
$D_{ji}$	$s^{-1}$	Tenzor brzine deformacije
$d$	m	Debljina istisnuća atmosferskog graničnog sloja
$E$	–	Parametar hrapavosti podloge
$F_c$	N	Coriolisova sila
$F_p$	$m s^{-2}$	Specifična sila gradijenta tlaka
$f_i$	$m s^{-2}$	Vektor specifične masene sile
$f_c$	$s^{-1}$	Coriolisov parametar
$k$	$\frac{m^2}{s^2}$	Kinetička energija turbulencije
$m$	kg	Masa
$p$	Pa	Tlak (Skalarno polje tlaka)
$\bar{p}$	Pa	Polje osrednjene komponente tlaka
$p'$	Pa	Polje pulzacijske komponente tlaka
$P$	$\frac{m^2}{s^3}$	Izvorski član u modelu turbulencije
$P_C$	$\frac{m^2}{s^3}$	Vrijednost turb. izvorskog člana u centru prvog volumena uz zid

Oznaka	Jedinica	Opis
$R_{ij}$	$\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$	Tenzor Reynoldsovih naprezanja
$t$	s; –	Vrijeme
$u$	m/s	Brzina strujanja u horizontalnom smjeru
$u^+$	–	Bezdimenzijska brzina
$u_\tau$	m/s	Brzina trenja
$\overline{v'_i v'_j}$	$\rho \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$	Reynoldsov tenzor naprezanja
$v_i$	m/s	Vektor polja brzine
$\bar{v}_i$	m/s	Osrednjeni vektor polja brzine
$v$	m/s	Brzina strujanja u lateralnom smjeru
$\bar{v}_{\text{ref}}$	m/s	Osrednjena brzina strujanja na referentnoj visini
$\bar{v}_t$	m/s	Osrednjena brzina paralelna sa zidom
$\bar{v}$	m/s	Srednja brzina strujanja u lateralnom smjeru
$w$	m/s	Brzina strujanja u vertikalnom smjeru
$y$	m	Koordinata visine u matematičkom modelu
$y^+$	–	Bezdimenzijska udaljenost od zida
$z$	m	Koordinata visine iznad podloge u teorijskom dijelu rada
$z_0$	m	Aerodinamička duljina hrapavosti površine
$z_{\text{ref}}$	m	Referentna visina

## Grčka slova

Oznaka	Jedinica	Opis
$\alpha$	–; –	Eksponent zakona potencije
$\kappa$	–	Von Kármánova konstanta
$\delta$	m	Debljina atmosferskog graničnog sloja
$\delta_{ij}$	-	Kroneckerov delta simbol
$\varepsilon$	$\frac{\text{m}^2}{\text{s}^3}$	Disipacija kinetičke energije turbulencije
$\varepsilon_C$	$\frac{\text{m}^2}{\text{s}^3}$	Vrijednost $\varepsilon$ u centru prvog volumena od zida
$\lambda$	°	Zemljopisna širina
$\mu$	Pa · s	Dinamička viskoznost
$\mu_V$	Pa · s	Volumenska viskoznost
$\nu$	$\frac{\text{m}^2}{\text{s}}$	Kinematička viskoznost
$\nu_T$	$\frac{\text{m}^2}{\text{s}}$	Turbulentna kinematička viskoznost
$\rho$	kg/m <sup>3</sup>	Gustoća fluida
$\sigma_{ij}$	$\frac{\text{kg}}{\text{ms}^2}$	Tenzor naprezanja
$\Sigma_{ij}$	$\frac{\text{kg}}{\text{ms}^2}$	Simetrični tenzor viskoznih naprezanja
$\sigma_k$	–	Konstanta modela turbulencije
$\sigma_\varepsilon$	–	Konstanta modela turbulencije
$\tau_w$	$\frac{\text{kg}}{\text{ms}^2}$	Naprezanje na zidu
$\omega_c$	rad/s	Kutna brzina rotacije Zemlje

## Sažetak

Cilj rada je primjena modela turbulencije Reynoldsovog tenzora naprezanja kod računalnog modeliranja opstrujavanja zgrade oblika kocke smještene u homogenom atmosferskom graničnom sloju, kako bi se utvrdilo je li spomenutim modelom moguće bolje računalno modelirati opterećenje zgrada u usporedbi s Menterovim  $k-\omega$  SST modelom. U radu je za razvoj mreže konačnih volumena i računalnu simulaciju korišten programski alat OpenFOAM<sup>®</sup>, tj. foam-extend-3.2. U radu su iz jednadžbi modela turbulencije Reynoldsovog tenzora naprezanja izvedeni rubni uvjeti koje je potrebno koristiti kako bi se pravilno računalno modeliralo strujanje homogenog atmosferskog graničnog sloja korištenjem tehnike domene preteče u praznoj dvodimenzijskoj računalnoj domeni. Pritom je strujanje u blizini nepropusne hrapave stijenke modelirano zidnom funkcijom temeljenom na aerodinamičkoj duljini hrapavosti površine. Profili fizikalnih veličina dobiveni računalnom analizom strujanja u dvodimenzijskoj domeni su potom korišteni kao rubni uvjeti na ulaznoj granici trodimenzijske računalne domene u kojoj je smješten model zgrade oblika kocke.

Računalnom analizom strujanja atmosferskog graničnog sloja oko modela zgrade je pokazano da se korištenjem modela turbulencije Reynoldsovog tenzora naprezanja ne postižu bolji rezultati računalno generirane raspodjele koeficijenta tlaka po stranicama zgrade u odnosu na dostupne eksperimentalne rezultate i računalne rezultate dobivene korištenjem ostalih RANS modela turbulencije.

Ključne riječi: *Stacionarni homogeni atmosferski granični sloj, računalna dinamika fluida, model turbulencije Reynoldsovog tenzora naprezanja*

## Summary

The goal in this thesis is the application of the Reynolds stress tensor turbulence model for modelling the flow over a model of a cubic-shaped building in the atmospheric boundary layer to determine whether it yields better results than when using Menter's  $k - \omega$  SST turbulence model. The CFD software used to generate the finite volume mesh and computationally model the given problem is a fork of OpenFOAM<sup>®</sup> called foam-extend-3.2.

Proper boundary conditions for a successful modelling of the homogeneous atmospheric boundary layer using the precursor domain technique in an empty two-dimensional computational domain were derived from the Reynolds stress transport equations. A wall function based on the aerodynamic surface roughness length was used to model the flow near the impermeable rough surface. The resulting profiles were subsequently applied onto the inlet boundary of the three-dimensional computational domain which includes the cubic-shaped building model.

It was determined that the flow over a cubic-shaped building in the atmospheric boundary layer created using the Reynolds stress transport turbulence model does not provide a better reproduction on the experimental data of the distribution of the pressure coefficient along various lines on the cubic-shaped building model compared to other RANS turbulence models.

Key words: *Steady-state neutrally-stratified atmospheric boundary layer, computational fluid dynamics, Reynolds stress turbulence model*

# 1. Uvod

## 1.1. Metode istraživanja u aerodinamici okoliša

Zbog bitnog utjecaja značajki strujanja vjetra na ljudsku svakodnevicu, važno je dobro poznavanje i razumijevanje atmosferskih strujanja od meteorologa te strojarskih i građevinskih inženjera [1], [2], [3], [4]. Aerodinamika konstrukcija (poput zgrada i mostova), disperzija čestica štetnih po ljudsko zdravlje, te pronalazak pogodnog mjesta za smještaj vjetroturbina, samo su neki od problema koji jako ovise o značajkama atmosferskog strujanja [5], [6], [7].

Istraživanja značajki atmosferskog strujanja se zasnivaju na:

- atmosferskim mjerenjima,
- eksperimentalnim metodama u zračnim tunelima,
- računalnom modeliranju.

Atmosferskim mjerenjima se mogu postići korisni podaci s obzirom na smjer i brzinu vjetra, kao i podaci o složenim atmosferskim meteorološkim pojavama. Nedostatak predstavlja nemogućnost mjerenja cjelovitih polja te nemogućnost kontroliranja uvjeta mjerenja [8].

Eksperimentalnim metodama u zračnom tunelu istraživanja se mogu provesti u kontroliranim uvjetima, no i ta metoda je ograničena u smislu prikupljanja podataka u cjelovitom polju strujanja. Osim toga je najčešće potrebno osigurati uvjete sličnosti stvarnog i eksperimentalnog strujanja, što često nije moguće u potpunosti zadovoljiti [8].

Razvoj računala tijekom posljednjih dvadesetak godina omogućio je napredak u računalnom modeliranju strujanja, pa se ono sve više primjenjuje u znanstvenim istraživanjima i u industrijskim projektima. Međutim, atmosferska mjerenja i eksperimentalne metode u zračnim tunelima ostaju neizostavan dio istraživanja značajki atmosferskog strujanja.



## 1.2. Računalna aerodinamika okoliša

Prednosti računalne dinamike fluida u usporedbi s atmosferskim mjerenjima i eksperimentalnim metodama u zračnom tunelu su mogućnost analize cjelokupnog polja strujanja i potpuna kontrola nad uvjetima strujanja.

Pri računalnom modeliranju strujanja u atmosferskom graničnom sloju od velike je važnosti točno modeliranje turbulencije kako bi numerički rezultati bili u skladu s mjerenjima u atmosferi i rezultatima koji proizlaze iz eksperimentalnog modeliranja u zračnim tunelima.

Richards i Hoxey (1993) [9] u svom radu opisuju upotrebu modela temeljenog na osrednjenim Navier-Stokesovim jednadžbama (engl. *Reynolds-averaged Navier-Stokes - RANS*) u računalnom modeliranju inženjerskog atmosferskog graničnog sloja. Horizontalnu homogenost strujanja pri uporabi standardnog  $k - \varepsilon$  modela turbulencije osiguravaju izvodeći ulazne profile za osrednjenu brzinu, kinetičku energiju turbulencije te disipaciju kinetičke energije turbulencije iz jednadžbi strujanja inženjerskog atmosferskog graničnog sloja, koristeći zidnu funkciju koja je temeljena na aerodinamičkoj duljini hrapavosti površine te zadavanjem konstantnog naprezanja na gornjoj površini računalne domene.

Iako je takvim ispitivanjima pokazano da se RANS modelima može uspješno modelirati atmosferski granični sloj unutar prazne dvodimenzijske domene, Richards i Norris (2011) [10] pokazuju da ukoliko se takvi modeli primjene u složenijim strujanjima, u nekim slučajevima ne daju dovoljno točne rezultate. Naime, pri uporabi modela turbulencije koji se temelje na Boussinesqovoj aproksimaciji i modeliranju turbulentne viskoznosti primijećene su pretjerano visoke vrijednosti zaustavnog tlaka na prednjoj površini zgrade izložene vjetru (u području pojave zaustavnog tlaka). Shodno tome, predloženo je da se turbulencija modelira modelima temeljenim na rješavanju transportne jednadžbe Reynoldsovog tenzora naprezanja.

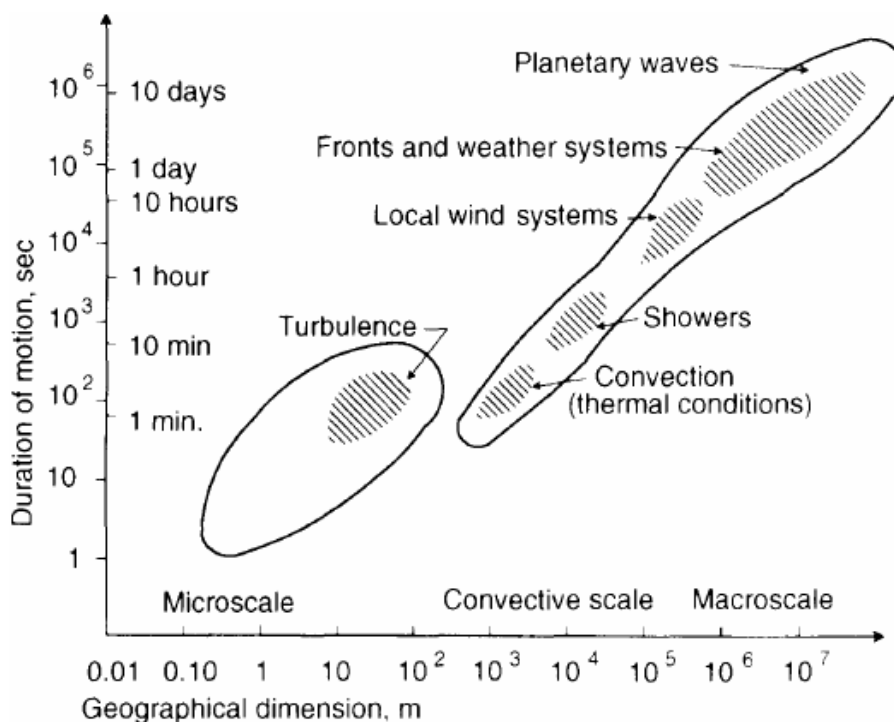
Cilj rada je analiza mogućnosti korištenja modela turbulencije Reynoldsovog tenzora naprezanja za računalno modeliranje aerodinamičkog opterećenja zgrade, usporedbom dobivenih rezultata s postojećim eksperimentalnim mjerenjima i računalnim rezultatima dobivenim korištenjem RANS modela turbulencije koji se temelje na Boussinesqovoj hipotezi i modeliranju turbu-

lentne viskoznosti. Kako bi se pravilno modeliralo strujanje homogenog atmosferskog graničnog sloja, iz jednadžbi modela turbulencije će se odrediti rubni uvjeti koje je potrebno zadati na gornjoj granici računalne domene kako bi se osigurala homogenost strujanja, a time i pravilno opterećenje modela zgrade. Rubni uvjeti se određuju na temelju jednadžbi modela turbulencije Reynoldsovog naprežanja primijenjenog u foam-extend-3.2.

## 2. Značajke atmosferskog graničnog sloja

### 2.1. Opće atmosfersko strujanje

Gibanje zraka u atmosferi uslijed razlike tlaka između dva područja je vjetar. Razlike tlakova mogu biti posljedica neravnomjernog zagrijavanja Zemljine površine, a na promjene tlaka utječe i gibanje zraka pa su te dvije pojave istovremene i ne mogu se promatrati odvojeno. Atmosferska se strujanja istovremeno i neovisno odvijaju na više razina, od lokalnog turbulentnog strujanja koje traje svega par minuta, preko lokaliziranih oluja pa sve do uragana i mlaznih struja kao što su primjerice polarna i subtropska mlazna struja koje se protežu na više tisuća kilometara. Te pojave se analiziraju na mikroskali, konvektivnoj skali i makroskali, a na slici 1 su prikazane u ovisnosti o trajanju i veličini.



Slika 1: Prostorni i vremenski red veličine raznih oblika atmosferskog strujanja [1]

Gibanje zraka uglavnom se odvija u horizontalom i vertikalnom smjeru. U horizontalnom smjeru na česticu zraka djeluju sila gradijenta tlaka, Coriolisova sila i sila trenja dok u vertikalnom smjeru djeluje sila uzgona pri razlici temperature zračnih masa. U slobodnoj će se atmosferi čestica fluida početi gibati pod utjecajem gradijenta tlaka iz područja višeg tlaka ka području nižeg tlaka, u smjeru normale na izobaru. Specifična sila kojom gradijent tlaka djeluje na česticu fluida je

$$F_p = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} \quad (2.1)$$

gdje je  $p$  tlak, a  $\rho$  gustoća zraka. Uslijed rotacije Zemlje, na česticu djeluje i Coriolisova sila okomito na smjer gibanja. Coriolisova sila

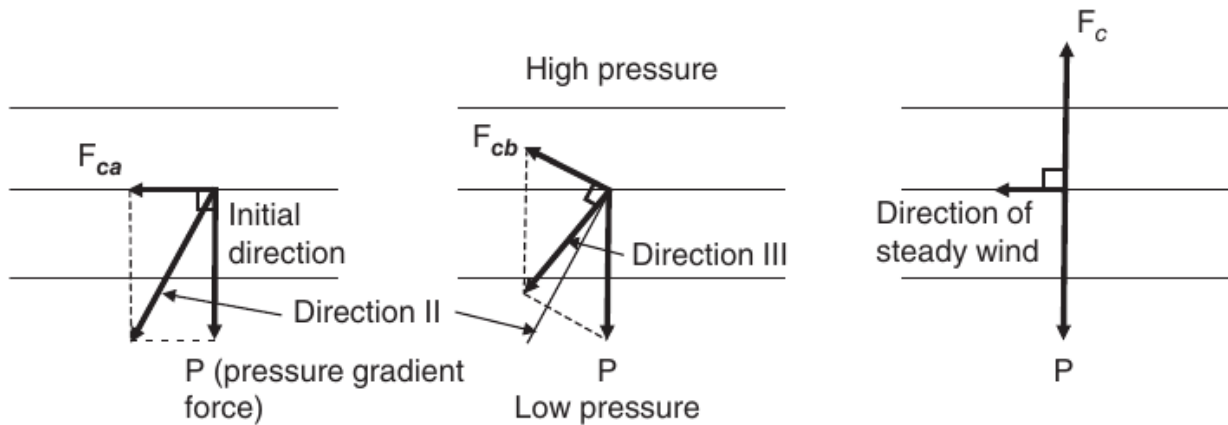
$$F_c = m f_c v \quad (2.2)$$

je inercijska sila koja djeluje na tijela koja se gibaju u odnosu na referentni sustav koji rotira, a ovisi o masi tijela  $m$ , brzini kojom se tijelo giba  $v$  te o Coriolisovom parametru  $f_c$  koji se računa kao

$$f_c = 2\omega_c \sin \lambda \quad (2.3)$$

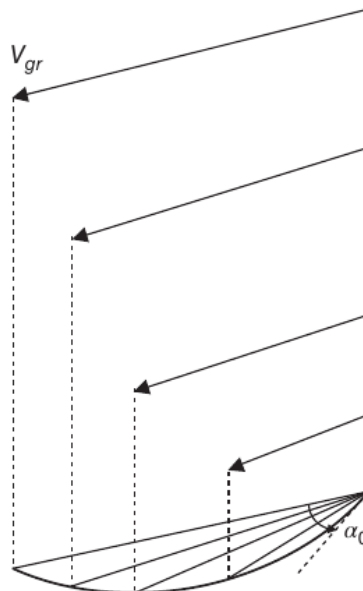
gdje je za Zemlju kao referentni sustav  $\omega_c$  kutna brzina rotacije Zemlje i iznosi  $\omega_c = 0,7292 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ , a  $\lambda$  odgovarajuća zemljopisna širina.

Coriolisova sila mijenja putanju čestice sve dok se ne uspostavi ravnoteža sila kako je prikazano na slici 2.

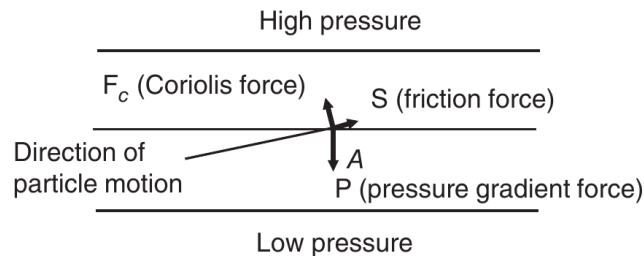


Slika 2: Ravnoteža sila na česticu fluida u slobodnoj atmosferi [11]

Na čestice fluida koje se gibaju u relativnoj blizini Zemljine površina djeluje i sila trenja u smjeru suprotnom od smjera gibanja. Sila trenja djeluje suprotno od smjera gibanja čestice, a posljedica jest da je rezultantna sila uslijed djelovanja Coriolisove sile i sile trenja uravnotežena sa silom gradijenta tlaka na česticu, tj. usmjerena je u smjeru normale na izobare. To znači da sila trenja, a i gibanje čestice više nije paralelno s izobarama već ih presjeca. Rezultirajući profil brzine prikazan je na slici 3., a naziva se Ekmanova spirala. Prikaz ravnoteže sila u atmosferskom graničnom sloju dan je na slici 4.



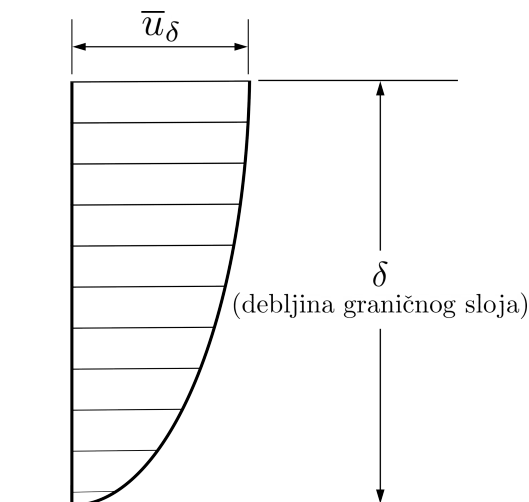
Slika 3: Ekmanova spirala, profil brzine u atmosferskom graničnom sloju [11]



**Slika 4:** Ravnoteža sila u atmosferskom graničnom sloju [11]

## 2.2. Atmosferski granični sloj

Atmosferski granični sloj (AGS) je sloj zraka u nižem dijelu troposfere tj. u najnižem dijelu cjelokupne atmosfere. U tom dijelu atmosfere Zemljina površina ima značajan utjecaj na značajke strujanja. Trenje i izmjena topline sa Zemljinom površinom u atmosferskom graničnom sloju uzrokuju promjene u količini gibanja, prijenosu energije i mase putem turbulentnog gibanja reda veličine debljine graničnog sloja ili manje. [12]



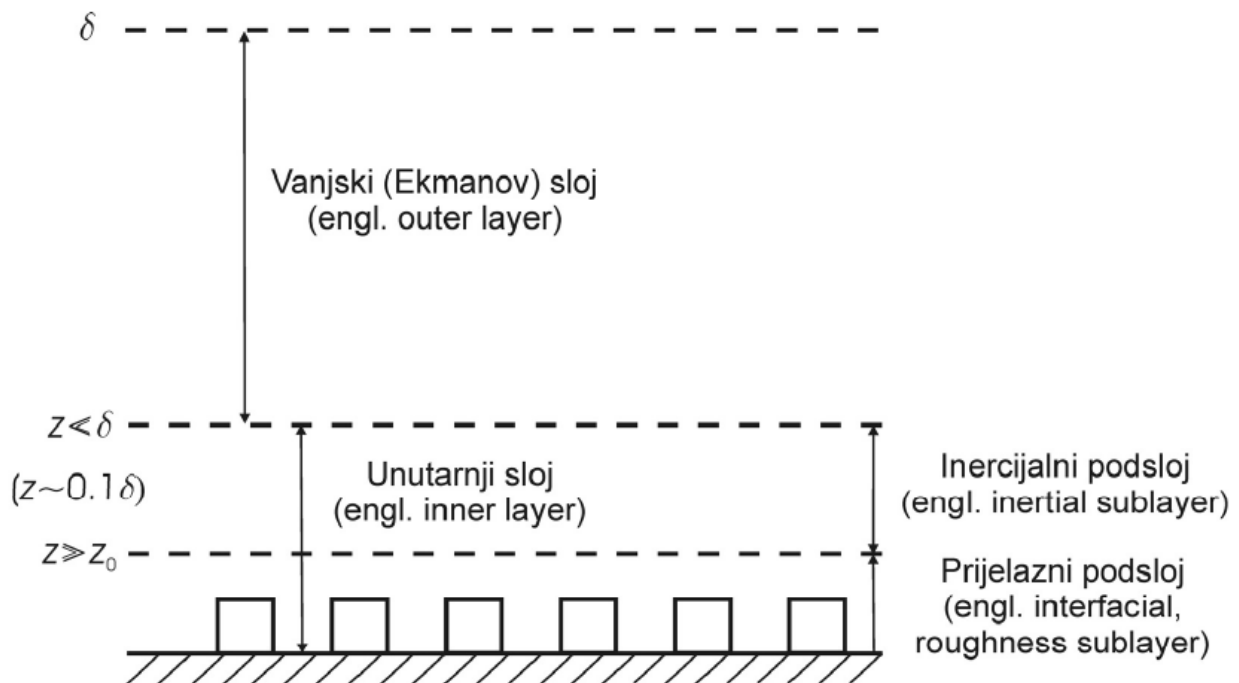
**Slika 5:** Atmosferski granični sloj

Brzina strujanja zraka zbog utjecaja trenja mijenja se od nule na Zemljinoj površini do brzine strujanja u slobodnoj atmosferi  $\bar{u}_\delta$ . Slobodnom atmosferom se naziva dio atmosfere u kojem je zanemariv utjecaj trenja. Visina AGS-a ovisi o više faktora te može varirati, a u urbanim i ruralnim područjima obično iznosi od 450 do 600 m, prema [13].

### 2.2.1. Značajke strujanja u atmosferskom graničnom sloju

AGS se može podijeliti na dva dijela: vanjski ili Ekmanov sloj (engl. *outer layer*) i unutarnji sloj (engl. *inner layer*), a unutarnji sloj se dijela na dva podsloja: inercijalni podsloj (engl. *inertial sublayer*) i prijelazni podsloj (engl. *interfacial roughness sublayer*), slika 6. U vanjskom sloju na strujanje primarno djeluje Coriolisova sila uslijed rotacije Zemlje, dok je u unutarnjem sloju ona zanemariva s obzirom na utjecaj trenja Zemljine površine.

Izraženi gradijenati fizikalnih veličina kao npr. brzina, vlažnost i temperatura se javljaju u unutarnjem sloju atmosferskog graničnog sloja.



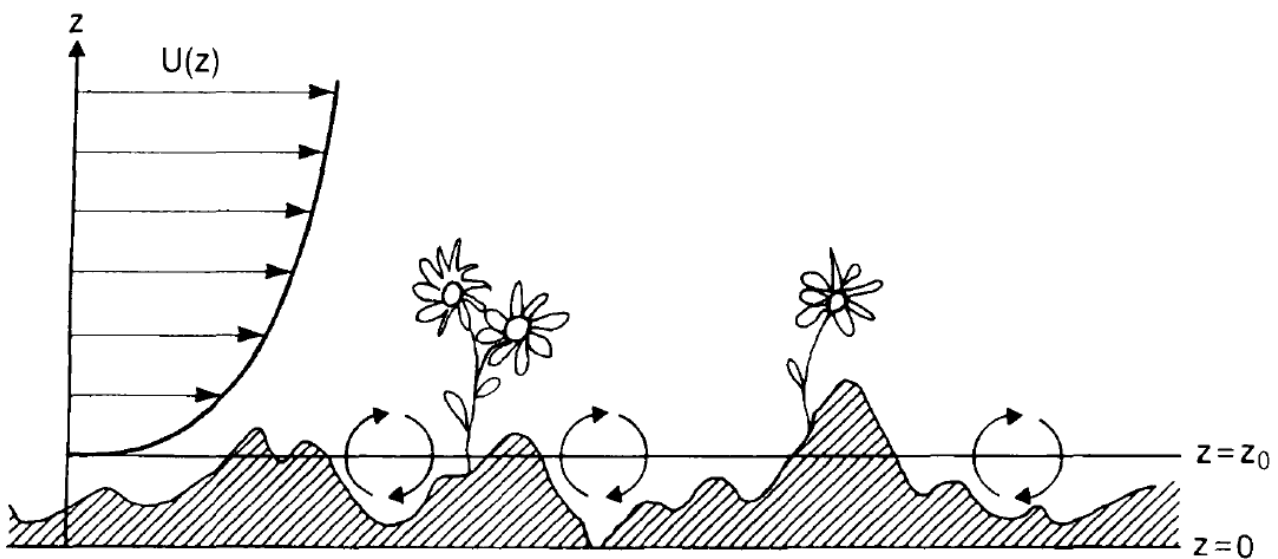
Slika 6: Podjela atmosferskog graničnog sloja [12]

## 2.2.2. Aerodinamička duljina hrapavosti površine

Aerodinamička duljina hrapavosti površine  $z_0$  je parametarska veličina koja opisuje visinu iznad tla ( $z = 0$ ) na kojoj je osrednjena brzina strujanja jednaka nuli. Empirijskog je porijekla, a može se objasniti kao veličina karakterističnih vrtloga koji nastaju kao posljedica međudjelovanja strujanja s hrapavom površinom. Prikaz aerodinamičke duljine hrapavosti površine je dan na slici 7., a u tablici 1. su dane vrijednosti aerodinamičke duljine hrapavosti površine za različite tipove terena prema Eurokodu [14].

**Tablica 1.** Aerodinamička duljina hrapavosti površine za različite tipove terena [14]

Tip terena	$z_0$ , m
More i obalna područja uz otvoreno more	0,003
Jezera i ravninska područja bez značajnog vegetacijskog pokrova i prepreka	0,01
Područja s niskim raslinjem i malim brojem izoliranih prepreka kao što su drveće ili građevine	0,05
Područja sa šumskom vegetacijom i područja s izoliranim preprekama udaljenim najviše 20 vlastitih visina (npr. naselja, predgrađa, šume)	0,30
Područja u kojima je najmanje 15% površine prekriveno građevinama prosječne visine veće od 15 m	1,0

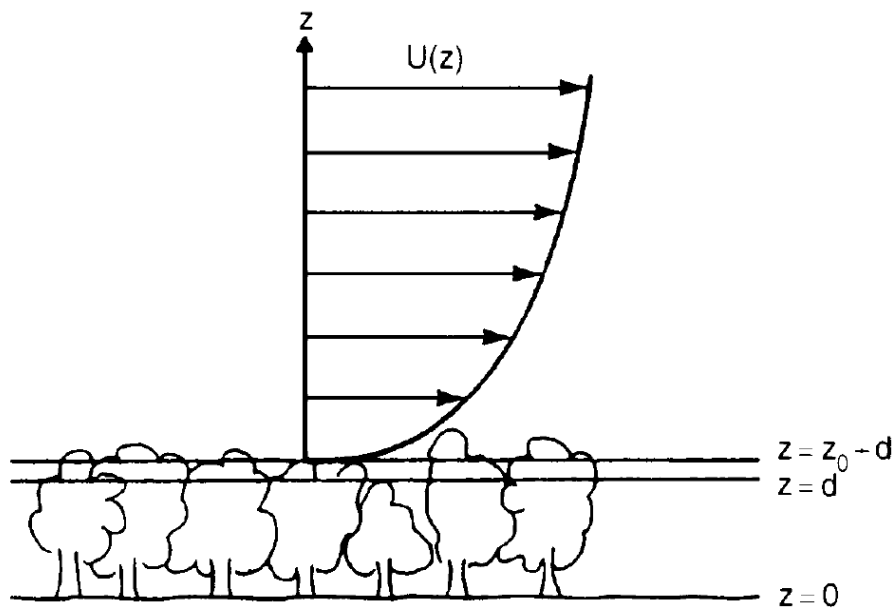


**Slika 7:** Prikaz aerodinamičke duljine hrapavosti površine  $z_0$



### 2.2.3. Debljina istisnuća atmosferskog graničnog sloja

Debljina istisnuća AGS-a  $d$  je visina za koju se atmosferski granični sloj "podiže" uslijed strujanja nad gusto raspoređenim preprekama kao što su npr. šume. To znači da je srednja brzina strujanja jednaka nuli na visini  $z = z_0 - d$ . Prikaz debljine istisnuća dan je na slici 8.



**Slika 8:** Prikaz uzdignutog atmosferskog graničnog sloja uslijed strujanja zraka na gustom šumskom području [1]

## 2.2.4. Empirijski izrazi za modeliranje atmosferskog graničnog sloja

U računalnoj aerodinamici konstrukcija obično se za opisivanje profila brzine atmosferskog graničnog sloja koristi zakon potencije (engl. *power law*) ili logaritamski zakon (engl. *logarithmic law*).

### 2.2.4.1. Zakon potencije

Zakon potencije empirijske je prirode te se njime opisuje profil brzine u cjelokupnom atmosferskom graničnom sloju. Promjenu brzine strujanja s visinom  $z$  opisuje se izrazom [15]

$$v(z) = v(z_{\text{ref}}) \left( \frac{z}{z_{\text{ref}}} \right)^{\alpha} \quad (2.4)$$

gdje je  $z_{\text{ref}}$  referentna visina, a  $v_{\text{ref}}$  brzina strujanja na referentnoj visini. Eksponent  $\alpha$  ovisi o raznim parametrima, no postoje dva najčešća načina određivanja:

- kao funkcija brzine i visine, prema Justus (1978) [16]

$$\alpha = \frac{0,37 - 0,088 \ln v_{\text{ref}}}{1 - 0,088 \ln \frac{z_{\text{ref}}}{10}} \quad (2.5)$$

- te kao funkcija aerodinamičke duljine hrapavosti površine, prema Counihan (1975) [15],

$$\alpha = 0,096 \log_{10} z_0 + 0,016(\log_{10} z_0)^2 + 0,24. \quad (2.6)$$

### 2.2.4.2. Logaritamski zakon

Logaritamski zakon opisuje strujanje u unutarnjem sloju AGS-a tj. obično od tla do 15-20 % debljine graničnog sloja. Promjena brzine strujanja s visinom, prema Counihan (1975) [15],

opisana je relacijom

$$v(z) = \frac{u_\tau}{\kappa} \ln \left( \frac{z-d}{z_0} \right) \quad (2.7)$$

gdje je  $\kappa$  von Kármánova konstanta,  $d$  debljina istisnuća te  $u_\tau$  brzina trenja definirana kao

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}, \quad (2.8)$$

gdje je  $\tau_w$  površinsko naprezanje, a  $\rho$  gustoća fluida.

## 3. Osnove modeliranja strujanja fluida

### 3.1. Temeljne jednačbe mehanike kontinuuma

Uz pretpostavku hipoteze kontinuuma te izotermnog i nestlačivog strujanja, skup parcijalnih diferencijalnih jednačbi kojima se opisuje strujanje fluida obuhvaća

- zakon očuvanja mase

$$\frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0 \quad (3.1)$$

- i zakon očuvanja količine gibanja, u nekonzervativnom obliku

$$\rho \frac{Dv_i}{Dt} = \rho f_i + \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} \quad (3.2)$$

gdje je  $\rho$  gustoća fluida,  $f_i$  gustoća masenih sila, a  $\sigma_{ji}$  tenzor naprezanja.

Jednačbe (3.2) proizlaze iz drugog Newtonovog zakona, a opisuju promjenu količine gibanja čestice uslijed djelovanja masenih i površinskih sila. Ovakav oblik jednačbe očuvanja količine gibanja vrijedi za sve fluide, no njime nije moguće jednoznačno opisati strujanje fluida pa se uvode konstitutivne jednačbe kojima se ograničava valjanost jednačbi na određene skupine fluida. Tako se fluidi kod kojih je veza između tenzora brzine deformacije i simetričnog tenzora naprezanja linearna nazivaju njutnovskim fluidima, a tenzor naprezanja  $\sigma_{ji}$  se modelira kao

$$\sigma_{ji} = -p\delta_{ji} + \Sigma_{ji} \quad (3.3)$$

gdje je  $\delta_{ji}$  Kroneckerov delta (za  $i = j$  slijedi  $\delta_{ji} = 1$  inače  $\delta_{ij} = 0$ ), a  $\Sigma_{ji}$  simetrični tenzor viskoznih naprezanja.

Simetrični tenzor viskoznih naprezanja  $\Sigma_{ji}$  uz pretpostavku izotropnosti fluida se modelira kao

$$\Sigma_{ji} = 2\mu D_{ji} + \left( \mu_V - \frac{2}{3}\mu \right) D_{kk} \delta_{ji} \quad (3.4)$$

gdje je  $\mu_V$  volumenska viskoznost,  $\mu$  dinamička viskoznost, a  $D_{ji}$  tenzor brzine deformacije.

Ukoliko je strujanje nestlačivo tada izraz (3.4) prelazi u

$$\Sigma_{ji} = 2\mu D_{ji} = \mu \left( \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right). \quad (3.5)$$

U tom slučaju tenzor naprezanja  $\sigma_{ji}$  glasi

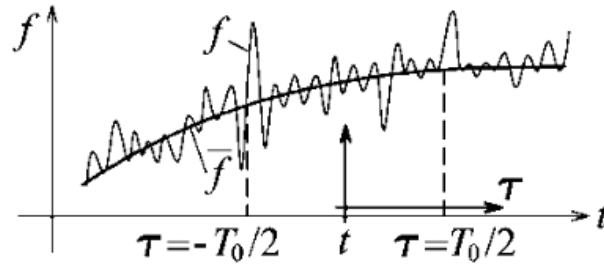
$$\sigma_{ji} = -p\delta_{ji} + \mu \left( \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right), \quad (3.6)$$

te konačno, jednažba očuvanja količine gibanja poprima oblik

$$\underbrace{\rho \frac{Dv_i}{Dt}}_{\text{konvektivni član}} = \underbrace{\rho f_i}_{\text{masene sile}} - \underbrace{\frac{\partial p}{\partial x_i}}_{\text{površinske sile}} + \underbrace{\mu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j}}_{\text{difuzijski član}}. \quad (3.7)$$

## 3.2. Vremenski osrednjene Navier-Stokesove jednažbe

Strujanja u prirodi su uglavnom turbulentna. Turbulentno strujanje je vrlo nestacionarno i stohastičke prirode pa se analizira statistički. Danas se najčešće koristi Reynoldsovo osrednjavanje, odnosno relevantne fizikalne veličine  $f$  se prikazuju kao zbroj vremenski osrednjene vrijednosti  $\bar{f}$  i pulsirajućeg dijela  $f'$ . Prikaz osrednjene veličine  $\bar{f}$  u vremenskom periodu  $T_0$  dan je na slici 9.



**Slika 9:** Reynoldsovo osrednjavanje fizikalne veličine  $f$  [17]

Primjeni li se Reynoldsovo osrednjavanje na polje brzine  $v_i$  i polje tlaka  $p$ , slijedi:

$$v_i = \bar{v}_i + v'_i, \quad (3.8)$$

$$p = \bar{p} + p'. \quad (3.9)$$

Uvrste li se jednadžbe (3.8) i (3.9) u jednadžbe (3.1) i (3.7), nakon sređivanja se postiže vremenski osrednjeni oblik Navier-Stokesovih jednadžbi (RANS) za nestlačivo strujanje:

- vremenski osrednjeni zakon očuvanja mase

$$\frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_j} = 0 \quad (3.10)$$

- vremenski osrednjeni zakon očuvanja količine gibanja

$$\rho \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \bar{v}_j \bar{v}_i) = \rho \bar{f}_i - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 \bar{v}_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} (-\rho \overline{v'_i v'_j}). \quad (3.11)$$

Član  $-\rho \overline{v'_i v'_j}$  u jednadžbi (3.11) označava turbulentnu difuziju količine gibanja, a naziva se tenzor Reynoldsovih naprezanja  $R_{ij}$ . Tenzor Reynoldsovih naprezanja je simetričan tenzor koji ima šest nepoznanica pa kao posljedica toga RANS jednadžbe sadrže više nepoznanica nego jednadžbi. Kako bi se RANS jednadžbe mogle riješiti, turbulentno naprezanje  $-\rho \overline{v'_i v'_j}$  je potrebno modelirati Boussinesqovom aproksimacijom ili je pak moguće definirati transportnu jednadžbu kojom će se turbulentna naprezanja riješiti bez potrebe za modeliranjem.

### 3.3. Modeliranje turbulencije

Za modele turbulencije postoje osnovni zahtjevi koji moraju biti zadovoljeni, a to su: univerzalnost i točnost rješenja te mogućnost ekonomičnog i jednostavnog rješavanja zadanog problema. Postoji mnogo načina modeliranja turbulencije.

Naravno, najbolju aproksimaciju realnog strujanja daje direktno rješavanje Navier-Stokesovih jednadžbi, tzv. DNS (*Direct Numerical Simulation*). Zbog nestacionarne i stohastičke prirode turbulentnog strujanja, taj pristup bi zahtijevao vrlo finu prostornu i vremensku diskretizaciju te za realne probleme DNS uz današnja računala nije izvediv.

Shodno tome se uvode pojednostavljenja. LES (*Large Eddy Simulation*) modeli strujanja opisuju superpoziciju velikih vrtloga koji se direktno simuliraju i malih vrtloga koji se modeliraju, no još uvijek su računalno zahtjevni zbog trodimenzijske mreže fine diskretizacije i malih vremenskih koraka integracije. Osim toga, u slučaju računalnog modeliranja atmosferskog strujanja, LES modeli zahtijevaju primjenu posebnih početnih i rubnih uvjeta.

Najpoznatiji i najprimjenjeniji u praksi su modeli koji se temelje na statističkom opisu turbulentnog strujanja i hipotezi Boussinesqa

$$-\rho \overline{v'_i v'_j} = \mu_t \left( \frac{\partial \overline{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{v}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \rho \overline{k} \delta_{ij}. \quad (3.12)$$

Zbog sličnosti tog izraza s Newtonovim zakonom viskoznosti takvi modeli se nazivaju njutnovskim modeli turbulencije, a u konačnici se svode na modeliranje turbulentne viskoznosti  $\mu_t$ . Newtonski modeli turbulencije u nekim realnim problemima koji uključuju npr. zakrivljenosti strujnica, odvajanje strujanja ili strujanje sa zonama recirkulacije ne daju zadovoljavajuće rezultate.

*Reynolds Stress Equation* ili RSM modeli se ne temelje na Boussinesqovoj hipotezi već rješavaju transportnu jednadžbu Reynoldsovih naprežanja

$$\frac{DR_{ij}}{Dt} = D_{ij} + P_{ij} + \Pi_{ij} + \mathbb{F}_{ij} - \varepsilon_{ij} \quad (3.13)$$

te predstavljaju najpotpuniji način statističkog modeliranja turbulencije uz prihvatljive računalne zahtjeve.

### 3.3.1. Model Reynoldsovog tenzora naprezanja

RSM modeli kao način zatvaranja, tj. usklađivanja broja jednažbi i nepoznanica u vremenski osrednjenim Navier-Stokesovim jednažbama, zasebno računaju članove Reynoldsovog tenzora naprezanja  $R_{ij}$  pomoću diferencijalnih transportnih jednažbi. Transportna jednažba Reynoldsovog tenzora naprezanja glasi

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}(\overline{\rho v'_i v'_j})}_{\text{Lokalna vremenska promjena}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_k}(\overline{\rho v_k v'_i v'_j})}_{C_{ij}} = - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \overline{\rho v'_i v'_j v'_k} + \overline{p'(\delta_{kj} v'_i + \delta_{ik} v'_j)} \right]}_{D_{T,ij}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \mu \frac{\partial}{\partial x_k}(\overline{v'_i v'_j}) \right]}_{D_{M,ij}} - \underbrace{\rho \left( \overline{v'_i v'_k} \frac{\partial v_j}{\partial x_k} + \overline{v'_j v'_k} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right)}_{P_{ij}} + \underbrace{p' \left( \frac{\partial v'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v'_j}{\partial x_i} \right)}_{\Pi_{ij}} - \underbrace{2\mu \frac{\partial v'_i}{\partial x_k} \frac{\partial v'_j}{\partial x_k}}_{\varepsilon_{ij}} \quad (3.14)$$

gdje su:

- $C_{ij}$  član koji opisuje konvektivni transport,
- $D_{T,ij}$  član koji opisuje turbulentnu difuziju,
- $D_{M,ij}$  član koji opisuje molekularnu difuziju,
- $P_{ij}$  član koji opisuje izvor Reynoldsovih naprezanja,
- $\Pi_{ij}$  član koji opisuje odnos tlaka i brzine deformacije,
- $\varepsilon_{ij}$  član koji opisuje disipaciju Reynoldsovih naprezanja.



Članovi  $C_{ij}$ ,  $D_{M,ij}$ ,  $P_{ij}$  ne zahtijevaju dodatno modeliranje te se direktno numerički rješavaju, dok članovi  $D_{T,ij}$ ,  $\Pi_{ij}$  i  $\varepsilon_{ij}$  zahtijevaju dodatno modeliranje kako bi se broj jednažbi i nepoznanica ujednačio. Modeliranje tih članova uglavnom se temelji na disipaciji kinetičke energije turbulencije  $\varepsilon$  ili pak na specifičnoj disipaciji kinetičke energije turbulencije  $\omega$ , pa time posjeduju i nedostatke uvedene pri modeliranju tih veličina. RSM modeli se u tom slučaju sastoje od sedam jednažbi, transportne jednažbe za svaku od šest komponenata simetričnog Reynoldsovog tenzora naprežanja, te transportne jednažbe disipacije kinetičke energije turbulencije  $\varepsilon$  ili pak specifične disipacije kinetičke energije turbulencije  $\omega$ . Za potrebe analize problema u ovom radu je korišten model koji se temelji na disipaciji kinetičke energije turbulencije  $\varepsilon$ , pa je taj oblik i detaljnije razrađen u nastavku.

Transportna jednažba disipacije kinetičke energije turbulencije  $\varepsilon$  glasi

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho\bar{\varepsilon})}{\partial t} + \frac{\partial(\rho\bar{v}_j\bar{\varepsilon})}{\partial x_j} = & -\frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \mu \frac{\partial\bar{\varepsilon}}{\partial x_j} \overline{\rho v'_j \varepsilon'} - 2\nu \overline{\frac{\partial v'_j}{\partial x_k} \frac{\partial p'}{\partial x_k}} \right] - \\ & - 2\rho\nu^2 \overline{\frac{\partial^2 v'_i}{\partial x_j \partial x_k} \frac{\partial^2 v'_i}{\partial x_j \partial x_k}} - 2\mu \frac{\partial\bar{v}_i}{\partial x_j} \left[ \overline{\frac{\partial v'_i}{\partial x_k} \frac{\partial v'_j}{\partial x_k}} + \overline{\frac{\partial v'_k}{\partial x_j} \frac{\partial v'_k}{\partial x_i}} \right] - \\ & - 2\mu \overline{\frac{\partial^2 \bar{v}_i}{\partial x_k \partial x_j} \frac{\partial v'_i}{\partial x_k} v'_j} - 2\mu \overline{\frac{\partial v'_i}{\partial x_k} \frac{\partial v'_j}{\partial x_k} \frac{\partial v'_i}{\partial x_j}}, \end{aligned} \quad (3.15)$$

a za LRR (Launder, Reece and Rodi) [18] model Reynoldsovog tenzora naprežanja se modelira na sljedeći način:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\bar{\varepsilon}) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho\bar{v}_j\bar{\varepsilon}) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ C_\varepsilon \frac{k}{\varepsilon} \overline{v'_i v'_j} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] - C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} \overline{v'_k v'_i} \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_k} - C_{\varepsilon 2} \rho \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (3.16)$$

gdje je  $C_\varepsilon = 0,15$ ,  $C_{\varepsilon 1} = 1,44$ , a  $C_{\varepsilon 2} = 1,92$ , prema Launder, Reece i Rodi [18].

Član koji opisuje turbulentnu difuziju Reynoldsovog tenzora naprežanja  $D_{T,ij}$  najčešće se modelira prema Daly-Harlow [19] izrazu koji glasi

$$D_{T,ij} = C_s \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \rho \frac{\overline{kv'_k v_l}}{\varepsilon} \frac{\partial v'_i v'_j}{\partial x_l} \right) \quad (3.17)$$

gdje je  $C_s = 0,22$ . Zbog karakteristika izraza (3.17) koje uzrokuju nestabilnosti, u programskom

se paketu ANSYS Fluent koristi izraz

$$D_{T,ij} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\mu_t}{\sigma_k} \frac{\partial \overline{v'_i v'_j}}{\partial x_k} \right) \quad (3.18)$$

gdje je  $\sigma_k = 0,82$ .

Član  $\Pi_{ij}$  opisuje odnos tlaka i brzine deformacije tj. raspodjelu energije među komponentama Reynoldsovog tenzora naprezanja. U sebi sadrži dva dijela, tzv. *rapid pressure-strain correlation term*  $\Pi_{ij}^R$  i *slow pressure-strain correlation term*  $\Pi_{ij}^S$ . Launder, Reece i Rodi u svom radu [18] za modeliranje odnosa tlaka i brzine deformacije dolaze do dva izraza. Prvi izraz predstavlja tzv. kvazi-izotropni model ili LRR-QI model, a glasi

$$\begin{aligned} \Pi_{ij}^{QI} = & \underbrace{-C_1^{QI} \frac{\varepsilon}{k} \left( \overline{v'_k v'_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} k \right)}_{\Pi_{ij}^S} \\ & \underbrace{-C_2^{QI} \left( P_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} P_{kk} \right) - C_3^{QI} \left( D_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} P_{kk} \right) - C_4^{QI} k \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)}_{\Pi_{ij}^R}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Standardne vrijednosti koeficijenata modela dane su u tablici 2.

**Tablica 2.** Iznos koeficijenata u izrazu za odnos tlaka i brzine deformacije za LRR-QI model [18]

$C_1^{QI}$	$C_2^{QI}$	$C_3^{QI}$	$C_4^{QI}$
1,5	0,764	0,182	0,109

Daljnjom analizom spoznaju da prvi član dijela  $\Pi_{ij}^R$  dominira nad ostalima pa dolaze do drugog, pojednostavljenog izraza za odnos tlaka i brzine deformacije

$$\Pi_{ij}^{IP} = -C_1^{IP} \frac{\varepsilon}{k} \left( \overline{v'_k v'_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} k \right) - C_2^{IP} \left( P_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} P_{kk} \right) \quad (3.20)$$

po kojemu se model još naziva i *isotropization of production model* ili LRR-IP model. Standardne vrijednosti koeficijenata za LRR-IP model dane su u tablici 3.

**Tablica 3.** Iznos koeficijenata u izrazu za odnos tlaka i brzine deformacije za LRR-IP model [18]

$$\frac{C_1^{\text{IP}}}{1,8} \quad \frac{C_2^{\text{IP}}}{0,6}$$

U graničnom sloju se ne može zanemariti utjecaj viskoznih sila pa se modelira njihov utjecaj na član  $\Pi_{ij}$ . Zbog utjecaja zida dolazi do utjecaja raspodjele energije što povećava izotropnost turbulentnog strujanja [20]. Launder, Reece i Rodi [18] dolaze do izraza

$$\Pi_{ij}^w = \left[ 0,125 \frac{\varepsilon}{k} (\overline{v'_i v'_j} - \frac{2}{3} k \delta_{ij}) + 0,015 (P_{ij} - D_{ij}) \right] \frac{k^{\frac{3}{2}}}{\varepsilon y} \quad (3.21)$$

gdje je  $y$  udaljenost od zida u smjeru normale.

Uz pretpostavku izotropnosti turbulentnog strujanja, tenzor disipacije Reynoldsovih napreznja  $\varepsilon_{ij}$  se modelira izrazom

$$\varepsilon_{ij} = \frac{2}{3} \rho \delta_{ij} \varepsilon. \quad (3.22)$$

Iako ta pretpostavka u nekim slučajevima nije točna, model se zbog svoje jednostavnosti pokazao dostatnim [18].

Uvrštavanjem izraza (3.17), (3.20), (3.21) i (3.22) u jednadžbu (3.14) se postiže konačni LRR model transportne jednadžbe Reynoldsovog tenzora napreznja koja glasi

$$\begin{aligned} \frac{D \overline{\rho v'_i v'_j}}{Dt} = & C_s \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \rho \frac{\overline{k v'_k v_l}}{\varepsilon} \frac{\partial v'_i v'_j}{\partial x_l} \right) + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \mu \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{v'_i v'_j}) \right] \\ & - \rho \left( \overline{v'_i v'_k} \frac{\partial v_j}{\partial x_k} + \overline{v'_j v'_k} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right) + \Pi_{ij}^S + \Pi_{ij}^R + \Pi_{ij}^w - \frac{2}{3} \rho \delta_{ij} \varepsilon \end{aligned} \quad (3.23)$$

gdje se članove  $\Pi_{ij}^S$  i  $\Pi_{ij}^R$  određuje ovisno o odabiru QI ili IP LRR modela turbulencije.

### 3.3.1.1. Prilagođeni model Reynoldsovog tenzora napreznja

U sklopu ovog rada, a kako bi se osigurala homogenost strujanja AGS-a pri računalnom modeliranju u programskom paketu foam-extend-3.2, izveden je oblik LRR modela turbulencije s

prilagođenim konstantama.

Naime Richards i Norris (2011) su u [10] opisali LRR-QI model turbulencije s konstantama koje su pogodne za računalno modeliranje atmosferskog graničnog sloja, no njime u programskom paketu foam-extend-3.2 ne postiže homogenost strujanja AGS-a u dvodimenzijskoj računalnoj domeni. Razlog je što postoji razlika u načinu na koji je transportna jednadžba Reynoldsovog tenzora naprezanja primijenjena u Ansys Fluentu i foam-extend 3.2. Stoga je na temelju metodologije dane u [10] potrebno izvesti rubne uvjete za računalno modeliranje strujanja homogenog atmosferskog graničnog sloja, ali iz jednadžbe Reynoldsovog tenzora naprezanja koja je primijenjena u foam-extend-3.2.

Počevši od transportne jednadžbe Reynoldsovog tenzora naprezanja (3.24) LRR-IP modela turbulencije koja je primijenjena u programski paket foam-extend-3.2

$$\begin{aligned} \frac{DR_{ij}}{Dt} = & - \left( R_{im} \frac{\partial v_j}{\partial x_m} + R_{jm} \frac{\partial v_i}{\partial x_m} \right) - \frac{2}{3} \varepsilon \delta_{ij} - C_1 \frac{\varepsilon}{k} \left( R_{ij} - \frac{2}{3} k \delta_{ij} \right) + \\ & - C_2 \left( P_{ij} - \frac{1}{3} P_{kk} \delta_{ij} \right) + \frac{\partial}{\partial x_m} \left( \frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial R_{ij}}{\partial x_m} \right) \end{aligned} \quad (3.24)$$

se mogu definirati transportne jednadžbe dijagonalnih komponenata Reynoldsovog tenzora naprezanja unutar horizontalno homogenog turbulentnog graničnog sloja,

$$\frac{DR_{11}}{Dt} = - \left( R_{13} \frac{\partial v_1}{\partial x_3} + R_{13} \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \right) - \frac{2}{3} \varepsilon - C_1 \frac{\varepsilon}{k} \left( R_{11} - \frac{2}{3} k \right) - C_2 \left( P_{11} - \frac{1}{3} P_{kk} \right) = 0, \quad (3.25)$$

$$\frac{DR_{22}}{Dt} = - \frac{2}{3} \varepsilon - C_1 \frac{\varepsilon}{k} R_{22} + \frac{2}{3} C_1 \varepsilon - \frac{2}{3} C_2 R_{13} \frac{\partial v_1}{\partial x_3} = 0, \quad (3.26)$$

$$\frac{DR_{33}}{Dt} = - \frac{2}{3} \varepsilon - C_1 \frac{\varepsilon}{k} R_{33} + \frac{2}{3} C_1 \varepsilon - \frac{2}{3} C_2 R_{13} \frac{\partial v_1}{\partial x_3} = 0. \quad (3.27)$$

Član  $P_{11}$  u jednadžbi (3.25) se može zapisati kao

$$P_{11} = - \left( R_{13} \frac{\partial v_1}{\partial x_3} + R_{13} \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \right) = -2R_{13} \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \quad (3.28)$$

pa je tada član  $P_{kk}$  jednak

$$P_{kk} = P_{11} + \underbrace{P_{22}}_{=0} + \underbrace{P_{33}}_{=0} = -2R_{13} \frac{\partial v_1}{\partial x_3}. \quad (3.29)$$

Uvrste li se jednadžbe (3.28) i (3.29) u jednadžbu (3.25), proizlazi

$$-2R_{13} \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{2}{3}\varepsilon - C_1 \frac{\varepsilon}{k} R_{11} + \frac{2}{3}C_1\varepsilon + \frac{4}{3}C_2R_{13} \frac{\partial v_1}{\partial x_3} = 0. \quad (3.30)$$

Nakon zbrajanja transportnih jednadžbi dijagonalnih komponenata Reynoldsovog tenzora naprezanja izvedenih uz pretpostavku homogenog strujanja, odnosno

$$\begin{aligned} \frac{DR_{kk}}{Dt} &= \frac{DR_{11}}{Dt} + \frac{DR_{22}}{Dt} + \frac{DR_{33}}{Dt} = -2R_{13} \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{2}{3}\varepsilon - C_1 \frac{\varepsilon}{k} R_{11} + \frac{2}{3}C_1\varepsilon + \frac{4}{3}C_2R_{13} \frac{\partial v_1}{\partial x_3} + \\ &- \frac{2}{3}\varepsilon - C_1 \frac{\varepsilon}{k} R_{22} + \frac{2}{3}C_1\varepsilon - \frac{2}{3}C_2R_{13} \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{2}{3}\varepsilon - C_1 \frac{\varepsilon}{k} R_{33} + \frac{2}{3}C_1\varepsilon - \frac{2}{3}C_2R_{13} \frac{\partial v_1}{\partial x_3} = 0 \end{aligned} \quad (3.31)$$

te sređivanja dobivenog izraza

$$-2R_{13} \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - 2\varepsilon - C_1 \frac{\varepsilon}{k} \underbrace{(R_{11} + R_{22} + R_{33} - 2k)}_{=2k} = 0 \quad (3.32)$$

slijedi

$$R_{13} \frac{\partial v_1}{\partial x_3} = -\varepsilon. \quad (3.33)$$

Uvrsti li se jednadžba (3.33) u jednadžbu (3.25)

$$2\varepsilon - \frac{2}{3}\varepsilon - C_1 \frac{\varepsilon}{k} R_{11} + \frac{2}{3}C_1\varepsilon - \frac{4}{3}C_2\varepsilon = 0, \quad (3.34)$$

nakon dijeljenja obje strane jednadžbe s disipacijom kinetičke energije turbulencije  $\varepsilon$  i sređiva-

nja, uz  $C_1 = 1,8$  te  $C_2 = 0,6$  slijedi

$$R_{11} = k \left( \frac{4 - 4C_2}{3C_1} + \frac{2}{3} \right) \approx 0,96296k. \quad (3.35)$$

Ponovi li se postupak za jednadžbe (3.26) i (3.27), slijedi

$$R_{22} \approx 0,51852k, \quad (3.36)$$

$$R_{33} \approx 0,51852k. \quad (3.37)$$

Time se određuju vrijednosti dijagonalnih komponenata Reynoldsovog tenzora naprezanja koje je potrebno definirati kao rubne uvjete kako bi se osigurala horizontalna homogenost strujanja AGS-a kada se u programskom paketu foam-extend 3.2 koristi LRR model turbulencije Reynoldsovog tenzora naprezanja.

Jedina vandijagonalna komponenta Reynoldsovog tenzora naprezanja u homogenom AGS-u različita od nule jest  $R_{13}$ , a određuje se sljedećom transportnom jednadžbom

$$\frac{DR_{13}}{Dt} = -R_{33} \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - C_1 \frac{\varepsilon}{k} R_{13} - C_2 P_{13} = 0 \quad (3.38)$$

gdje se član  $P_{13}$  može zapisati kao

$$P_{13} = -R_{33} \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \quad (3.39)$$

pa nakon uvrštavanja i jednadžbe (3.33), jednadžba (3.38) poprima oblik

$$C_2 R_{33} \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - R_{33} \frac{\partial v_2}{\partial x_3} = -C_1 \frac{1}{k} R_{13}^2 \frac{\partial v_1}{\partial x_3}. \quad (3.40)$$

Nakon pojednostavljenja jednadžbe, slijedi

$$k = \frac{C_1 R_{13}^2}{R_{33} - C_2 R_{33}} \quad (3.41)$$

odakle slijedi

$$k \approx 2,9459R_{13} = 2,9459u_{\tau}^2. \quad (3.42)$$

Odgovarajuću vrijednost konstante  $C_{\mu}$  se postiže pomoću izraza

$$C_{\mu} = \left(\frac{\tau_{13}}{k}\right)^2 = \left(\frac{1}{2,946}\right)^2 \approx 0,1152. \quad (3.43)$$

Uz vrijednost Schmidtovog broja brzine disipacije  $\sigma_{\varepsilon} = 1,1$  [10] i  $C_{2\varepsilon} = 1,90$ ,  $C_{1\varepsilon} = 1,45$ , odgovarajuća vrijednost von Kármánove konstante je jednaka

$$\kappa = \sqrt{\sigma_{\varepsilon}(C_{2\varepsilon} - C_{1\varepsilon})\sqrt{C_{\mu}}} \approx 0,404. \quad (3.44)$$

### 3.3.2. Modeliranje turbulencije u neposrednoj blizini nepropusne stijenke

U općem slučaju turbulentno strujanje u neposrednoj blizini nepropusne stijenke dijelimo na tri podsloja:

- linearni (viskozni) podsloj za  $y^+ < 5$

Zbog blizine zida dominira utjecaj molekularne viskoznosti, a utjecaj turbulentne viskoznosti se može zanemariti.

- prijelazni podsloj  $5 < y^+ < 30$

Red veličine turbulentne i molekularne viskoznosti je približno jednak.

- inercijski podsloj  $y^+ > 30$

Turbulentno strujanje postaje razvijeno, pa dominira utjecaj turbulentne viskoznosti, dok se molekularnu viskoznost može zanemariti.

Ova se podjela odnosi na unutarnji dio graničnog sloja, odnosno na 10 – 15% ukupne debljine graničnog sloja  $\delta$ , a shematski je prikazana na slici 10.

U blizini nepropusne stijenke dolazi do velikih gradijenata fizikalnih veličina. Kako bi se obuhvatili veliki gradijenti potrebna je fina diskretizacija što zahtijeva velike računalne resurse. U inženjerskom pristupu je naglasak na utjecaju zida na strujanje što nam to omogućava modeliranje strujanja u blizini zida kako bi se izbjegla vrlo fina diskretizacija i skratilo potrebno računalno vrijeme. Ovo se postiže upotrebom zidnih funkcija čija je svrha empirijskim izrazima dovoljno dobro opisati utjecaj stijenke na strujanje u neposrednoj blizini. Postoje i tzv. *Low-Re* modeli kojima se može u potpunosti riješiti strujanje u neposrednoj blizini stijenke, ali se u praksi rijetko koriste.

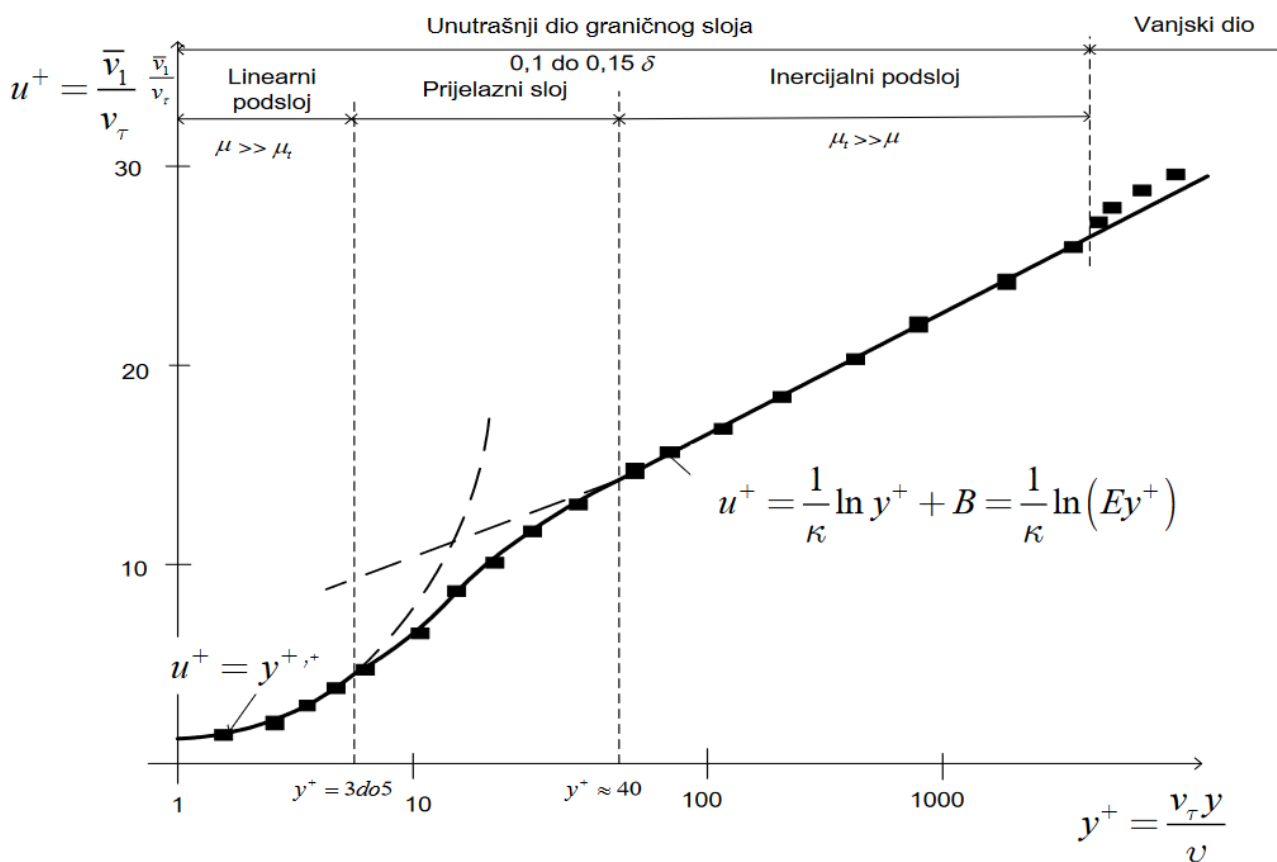
Postoji više tipova zidnih funkcija. Primjerice, standardne zidne funkcije primjenjuju se za modeliranje linearnog podsloja u slučajevima gdje je stijenka glatka, no za računalno modeliranje inženjerskog atmosferskog graničnog sloja je potrebno osigurati korištenje zidnih funkcija koje



u obzir uzimaju hrapavost površine. Za potrebe ovog rada koristit ćemo zidne funkcije koje se temelje na aerodinamičkoj duljini hrapavosti površine  $z_0$ .

### 3.3.2.1. Standardna zidna funkcija

Zidne funkcije predstavljaju alternativu rješavanju strujanja u neposrednoj blizini zida jer omogućuju korištenje modela turbulencije koji inače nisu prilagođeni za opisivanje utjecaja molekularne viskoznosti i utjecaja zida na pulsacije tlaka.



**Slika 10:** Prikaz promjene bezdimenzijske brzine paralelne sa stijenkom s bezdimenzijskom udaljenosti od stijenke [17]

Zidne funkcije temelje se na činjenici da su relevantne veličine ovisne uglavnom o normalnoj udaljenosti od čvrste stijenke pa predstavljaju svojevrsan "most" između stijenke i inercijskog podsloja čime se izbjegava rješavanje jednadžbe količine gibanja i modela turbulencije u viskoznom podsloju. Kako bi upotreba zidnih funkcija bila valjana potrebno je zadovoljiti uvjet da središte prvog volumena do stijenke bude u inercijskom podsloju. Osnovni oblik standardne

zidne funkcije glasi

$$u^+ = \frac{\bar{v}_t}{u_\tau} = \frac{1}{\kappa} \ln E y^+. \quad (3.45)$$

gdje je  $v_t$  osrednjena tangencijalna komponenta brzine,  $\kappa$  von Kármánova konstanta,  $E$  parametar koji opisuje hrapavost stijenke (za glatku stijenkku iznosi  $E \approx 9$ ), a  $u_\tau$  je brzina trenja

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \quad (3.46)$$

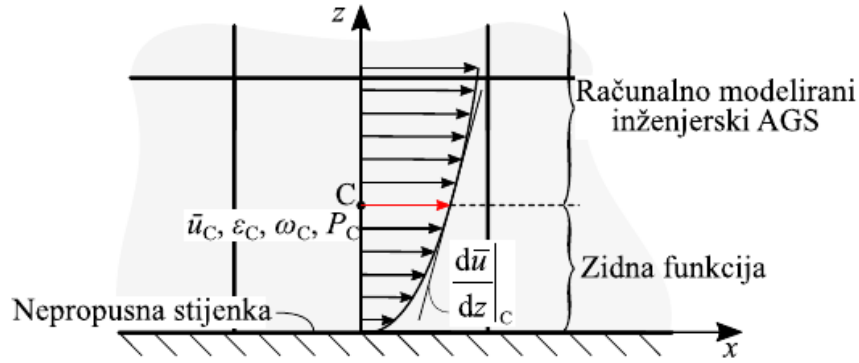
dok je  $y^+$  bezdimenzijska udaljenost od stijenke

$$y^+ = \frac{\rho y u_\tau}{\mu}, \quad (3.47)$$

gdje  $y$  predstavlja normalnu udaljenost od stijenke. Vrijednost veličine  $y^+$  vrlo je bitna jer se pomoću nje određuje primjenjivost zidnih funkcija, tj. nalazi li se središte prvog konačnog volumena unutar inercijskog podsloja. Granična vrijednost  $y^+$  nije univerzalna. Tako se u programskom paketu foam-extend-3.2 zidne funkcije upotrebljavaju za slučaj  $y^+ > 11,6$ , a linearni zakon  $u^+ = y^+$  u slučaju da je  $y^+ < 11,6$ . Primjena standardne zidne funkcije uz vrijednosti  $y^+ < 11,6$  ostavlja mogućnost ozbiljne greške u rješenju i dovodi u pitanje točnost rješenja.

### 3.3.2.2. Zidna funkcija temeljena na aerodinamičkoj duljini hrapavosti površine

Richards i Hoxey [9] opisuju primjenu zidnih funkcija koje se temelje na aerodinamičkoj duljini hrapavosti površine  $z_0$ . Cilj takvih zidnih funkcija je održavanje homogenosti atmosferskog graničnog sloja u proizvoljnoj praznoj računalnoj domeni na način da se stvori ravnotežna veza između modela turbulencije i površinskog naprezanja na nepropusnoj stijenci.



**Slika 11:** Prikaz konačnog volumena uz nepropusnu stijenku s težištem u točki C [21]

Za konačni volumen na nepropusnoj stijenci s težištem u točki C (prikazano na slici 11), disipacija kinetičke energije turbulencije  $\varepsilon$  je definirana kao

$$\varepsilon_C = \frac{u_\tau^3}{\kappa(z_C + z_0)} \quad (3.48)$$

gdje je  $z_C$  udaljenost težišta od nepropusne stijenske. Brzina trenja  $u_\tau$  određuje se pomoću vrijednosti kinetičke energije turbulencije u točki C

$$u_\tau = \sqrt[4]{C_\mu} \sqrt{k_C}. \quad (3.49)$$

Generacija kinetičke energije turbulencije u težištu C se računa prema

$$P_C = \tau_w \left. \frac{d\bar{v}}{dz} \right|_C \quad (3.50)$$

dok se naprezanje na stijenci određuje iz izraza

$$\frac{\tau_w}{\rho} = \frac{\bar{v}_C u_\tau \kappa}{\ln \left( \frac{z_C + z_0}{z_0} \right)} \quad (3.51)$$

gdje je  $\bar{v}_C$  osrednjena brzina u težištu C konačnog volumena.

## 4. Računalni model

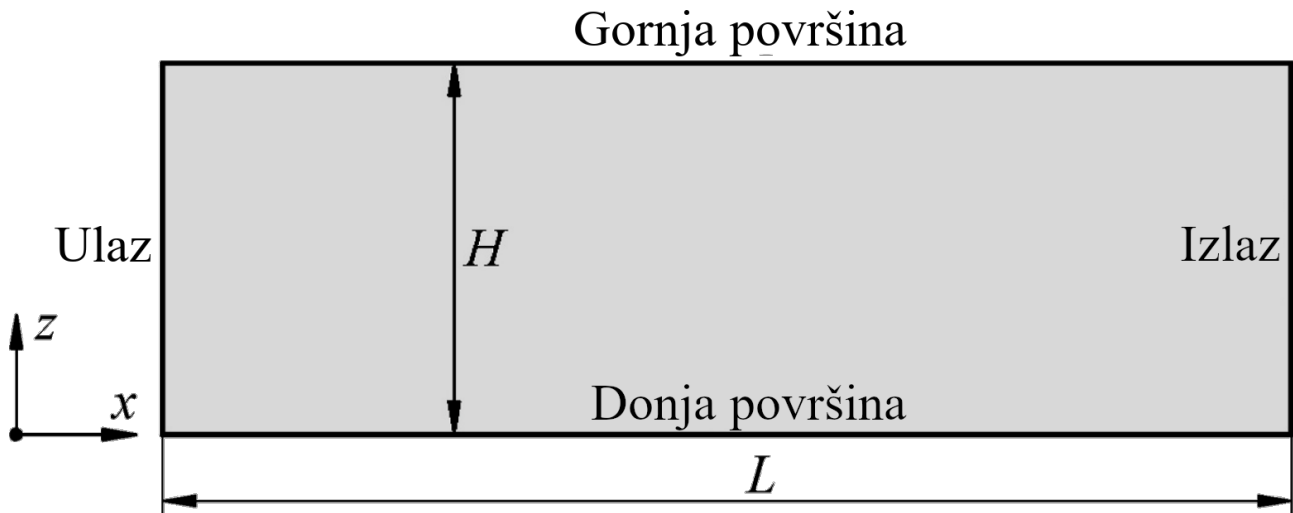
U ovom poglavlju je opisano postavljanje računalnog modela atmosferskog graničnog sloja. Najprije je dan opis postavljanja modela atmosferskog graničnog sloja u praznoj dvodimenzijskoj računalnoj domeni s ciljem dobivanja homogenog AGS-a čiji će se rezultati koristiti kao rubni uvjeti na ulazu u trodimenzijsku domenu s modelom zgrade oblika kocke. Zatim je opisano modeliranje atmosferskog graničnog sloja u trodimenzijskoj domeni s modelom zgrade oblika kocke, te su definirani korišteni rubni uvjeti i mreža konačnih volumena.

### 4.1. Homogenost modela atmosferskog graničnog sloja

Računalno modeliranje atmosferskog graničnog sloja u praznoj računalnoj domeni je važno kako bi se osiguralo da su strujanje i karakteristike turbulencije u skladu s provedenim eksperimentima te kako bi se uklonile eventualne horizontalne nehomogenosti [22]. Horizontalna homogenost AGS-a postignuta je ukoliko se profili fizikalnih veličina ne mijenjaju duž smjera strujanja. Takav atmosferski granični sloj se koristi kao ulazni rubni uvjet pri modeliranju trodimenzijskog strujanja oko modela zgrade oblika kocke.

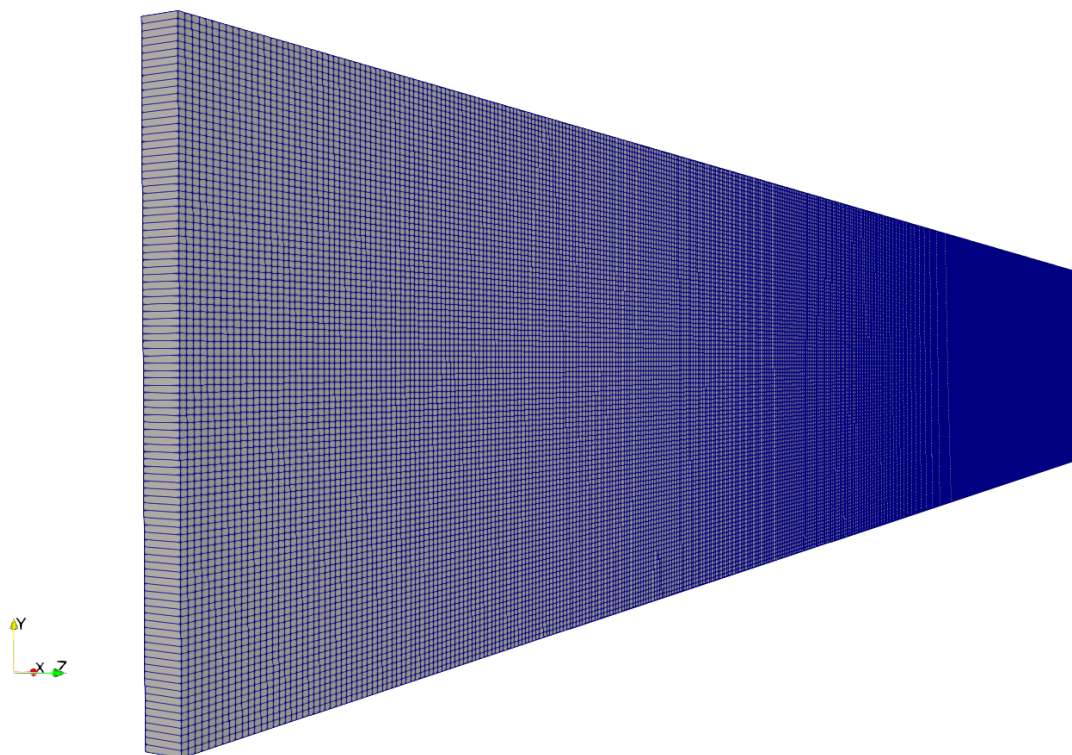
#### 4.1.1. Prazna dvodimenzijaska računalna domena

Homogenost modeliranog atmosferskog graničnog sloja je ispitana u dvodimenzijskoj domeni duljine  $L = 10$  m i visine  $H = 1,5$  m prikazanoj na slici 12. Mreža konačnih volumena je generirana koristeći alat *blockMesh* u programskom paketu foam-extend 3.2.



Slika 12: Prikaz prazne dvodimenzijske računalne domene [22]

Zbog provedbe proračuna u programskom paketu foam-extend 3.2, računalna domena izvedena je u tri dimenzije debljine  $B = 0,1$  m, a bočne stranice stvorene trodimenzijske računalne domene postavljene su kao *empty*. Stvorena mreža sastoji se od 100 volumena u vertikalnom smjeru, 500 volumena u horizontalnom smjeru te 1 volumen po debljini, a prikazana je na slici 13.



Slika 13: Mreža konačnih volumena korištena pri provjeri homogenosti modela AGS-a

### 4.1.2. Rubni uvjeti

Za ostvarenje homogenosti atmosferskog graničnog sloja uzrokovanog smičnom silom u praznoj dvodimenzijskoj računalnoj domeni potrebno je uspostaviti odgovarajuće rubne uvjete. U računalnom modeliranju AGS-a se koriste dvije tehnike: tehnika domene sljednika (TDS) i tehnika domene preteče (TDP).

U ovom radu je korištena tehnika domene preteče pa su odgovarajući rubni uvjeti prikazani u tablici 4. Tom tehnikom se postiže horizontalna homogenost strujanja, ali je na gornjoj granici računalne domene potrebno definirati odgovarajuće pravilne rubne uvjete kako bi računalno dobiveni profili osrednjene brzine, kinetičke energije turbulencije, disipacije kinetičke energije turbulencije i komponenti Reynoldsovog tenzora naprezanja odgovarali ciljanim vrijednostima.

**Tablica 4.** Rubni uvjeti korišteni pri računalnom modeliranju AGS-s u praznoj dvodimenzijskoj domeni

Veličina	Površina			
	Ulaz	Izlaz	Gornja površina	Donja površina
$\bar{v}$	$\frac{d\bar{v}}{dx} = 0$	$\frac{d\bar{v}}{dx} = 0$	$\bar{v} = \text{konst.}$	$\bar{v} = 0, \bar{w} = 0$
$k$	$\frac{dk}{dx} = 0$	$\frac{dk}{dx} = 0$	$k = \text{konst.}$	$\frac{dk}{dz} = 0$
$\varepsilon$	$\frac{d\varepsilon}{dx} = 0$	$\frac{d\varepsilon}{dx} = 0$	$\varepsilon = \text{konst.}$	$\varepsilon_C = \frac{u_\tau^3}{\kappa(z_C + z_0)}$
$\bar{p}$	$\frac{d\bar{p}}{dx} = 0$	$\bar{p} = 0$	$\frac{d\bar{p}}{dz} = 0$	$\frac{d\bar{p}}{dz} = 0$
$R_{ij}$	$\frac{\partial R_{ij}}{\partial x} = 0$	$\frac{\partial R_{ij}}{\partial x} = 0$	$R_{ij} = \text{konst.}$	$\frac{\partial R_{ij}}{\partial z} = 0$

Strujanje u neposrednoj blizini donje površine, tj. hrapave nepropusne stijenke se opisuju pomoću zidne funkcije temeljene na aerodinamičkoj duljini hrapavosti površine.

Osrednjena brzina i disipacija kinetičke energije turbulencije na gornjoj površini se postižu

pomoću profila prema Richards i Hoxey (1993) [9]

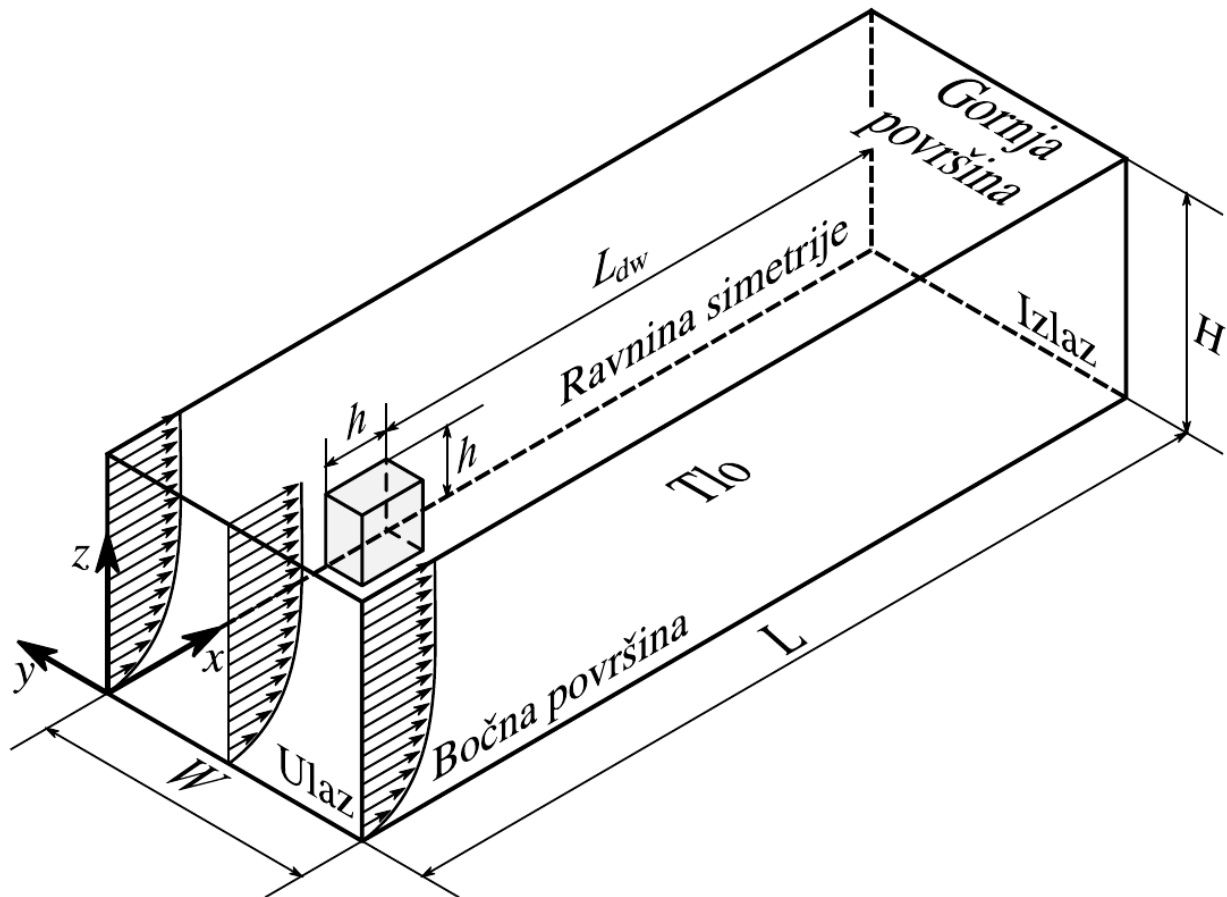
$$v(z) = \frac{u_\tau}{\kappa} \ln \left( \frac{z + z_0}{z_0} \right), \quad (4.1)$$

$$\varepsilon(z) = \frac{u_\tau^3}{\kappa(z + z_0)}, \quad (4.2)$$

dok se vrijednosti kinetičke energije turbulencije i dijagonalnih komponentata Reynoldsovog tenzora naprezanja postižu pomoću profila izvedenih u jednadžbama (3.42), (3.35), (3.36), (3.37).

## 4.2. Računalna domena s modelom zgrade oblika kocke

Trodimenzijska računalna domena s modelom zgrade oblika kocke je simetrična pa se modelira samo polovica kako bi se skratilo potrebno računalno vrijeme. Shematski prikaz trodimenzijske računalne domene s modelom zgrade oblika kocke je prikazan na slici 14.

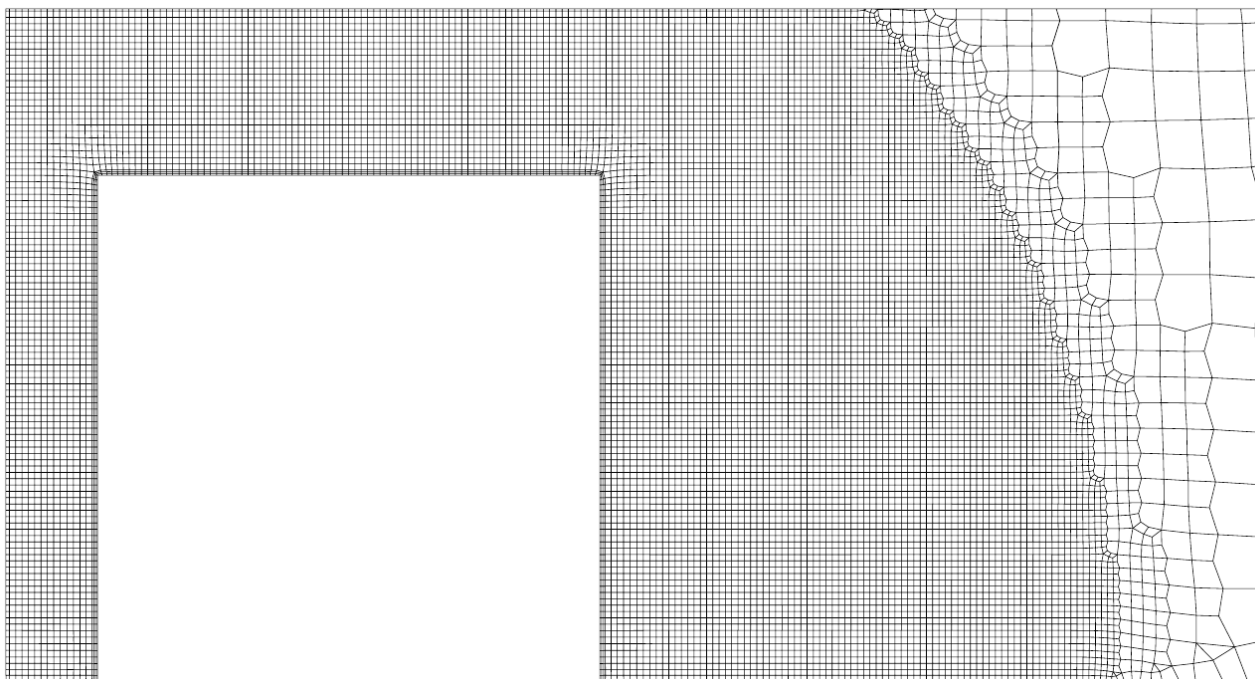


**Slika 14:** Prikaz trodimenzijske domene s modelom zgrade oblika kocke [21]

Širina prikazane trodimenzijske domene je  $W = 1$  m, visina je  $H = 1,5$  m dok je duljina  $L = 4,15$  m. Prednja stranica modela zgrade udaljena je od ulazne plohe 1 m. Duljina stranice modela zgrade oblika kocke je  $h = 0,15$  m. Bočna stranica modela zgrade od bočne plohe trodimenzijske domene udaljena je 0,85 m dok je gornja stranica modela zgrade od gornje plohe trodimenzijske domene udaljena 1,35 m. Udaljenost stražnje stranice modela zgrade od izlazne površine trodimenzijske računalne domene je  $L_{dw} = 3$  m.



Mreža konačnih volumena korištena u trodimenzijskoj analizi opstrujavanja modela zgrade oblika kocke unutar AGS-a se sastoji od približno 3 200 000 volumena te je generirana koristeći alat cfMesh<sup>®</sup>. Detalj mreže konačnih volumena u presjeku s modelom zgrade oblika kocke je prikazan na slici 15.



**Slika 15:** Prikaz detalja mreže konačnih volumena razvijene pomoću alata cfMesh<sup>®</sup> korištene za analizu opstrujavanja modela zgrade oblika kocke unutar AGS-a [21]

#### 4.2.1. Rubni uvjeti

Trodimenzijska računalna domena s modelom zgrade oblika kocke je simetrična pa generiramo polovicu cjelokupne domene zbog uštede računalnog vremena. Shodno tome bočne plohe se definiraju kao *symmetry*. Stranice modela zgrade oblika kocke definiraju se kao *wall* te se na njima površinsko strujanje definira standardnim zidnim funkcijama. Gornja i donja površina trodimenzijske računalne domene s modelom zgrade oblika kocke definirane su na isti način kao i gornja i donja površina u prethodno opisanoj dvodimenzijskoj praznoj računalnoj domeni.

Profili osrednjene brzine strujanja  $\bar{v}(z)$ , kinetičke energije turbulencije  $k(z)$  i disipacije kinetičke

**Tablica 5.** Rubni uvjeti korišteni pri modeliranju AGS-a u trodimenzijskoj računalnoj domeni s modelom zgrade oblika kocke

Veličina	Ulaz	Izlaz	Gornja površina	Donja površina	Bočna stranica	Ploha simetrije	Stranice modela zgrade
$\bar{v}$	$\bar{v}(z)$	$\frac{d\bar{u}}{dx} = 0$ $\frac{d\bar{v}}{dx} = 0$ $\frac{d\bar{w}}{dx} = 0$	$\bar{v} = \text{konst.}$	$\bar{u} = 0$ $\bar{v} = 0$ $\bar{w} = 0$	Simetrija	Simetrija	$\bar{u} = 0$ $\bar{v} = 0$ $\bar{w} = 0$
$k$	$k(z)$	$\frac{dk}{dx} = 0$	$k = \text{konst.}$	$\frac{dk}{dz} = 0$	Simetrija	Simetrija	$\frac{\partial k}{\partial n} = 0$
$\varepsilon$	$\varepsilon(z)$	$\frac{d\varepsilon}{dx} = 0$	$\varepsilon = \text{konst.}$	$\varepsilon_C = \frac{u_\tau^3}{\kappa(z_C + z_0)}$	Simetrija	Simetrija	Standardna zidna funkcija
$\bar{p}$	$\frac{d\bar{p}}{dx} = 0$	$\bar{p} = 0$	$\frac{d\bar{p}}{dz} = 0$	$\frac{d\bar{p}}{dz} = 0$	Simetrija	Simetrija	$\frac{\partial \bar{p}}{\partial n} = 0$
$R_{ij}$	$R_{ij}(z)$	$\frac{\partial R_{ij}}{\partial x} = 0$	$R_{ij} = \text{konst.}$	$\frac{\partial R_{ij}}{\partial z} = 0$	Simetrija	Simetrija	$\frac{\partial R_{ij}}{\partial n} = 0$

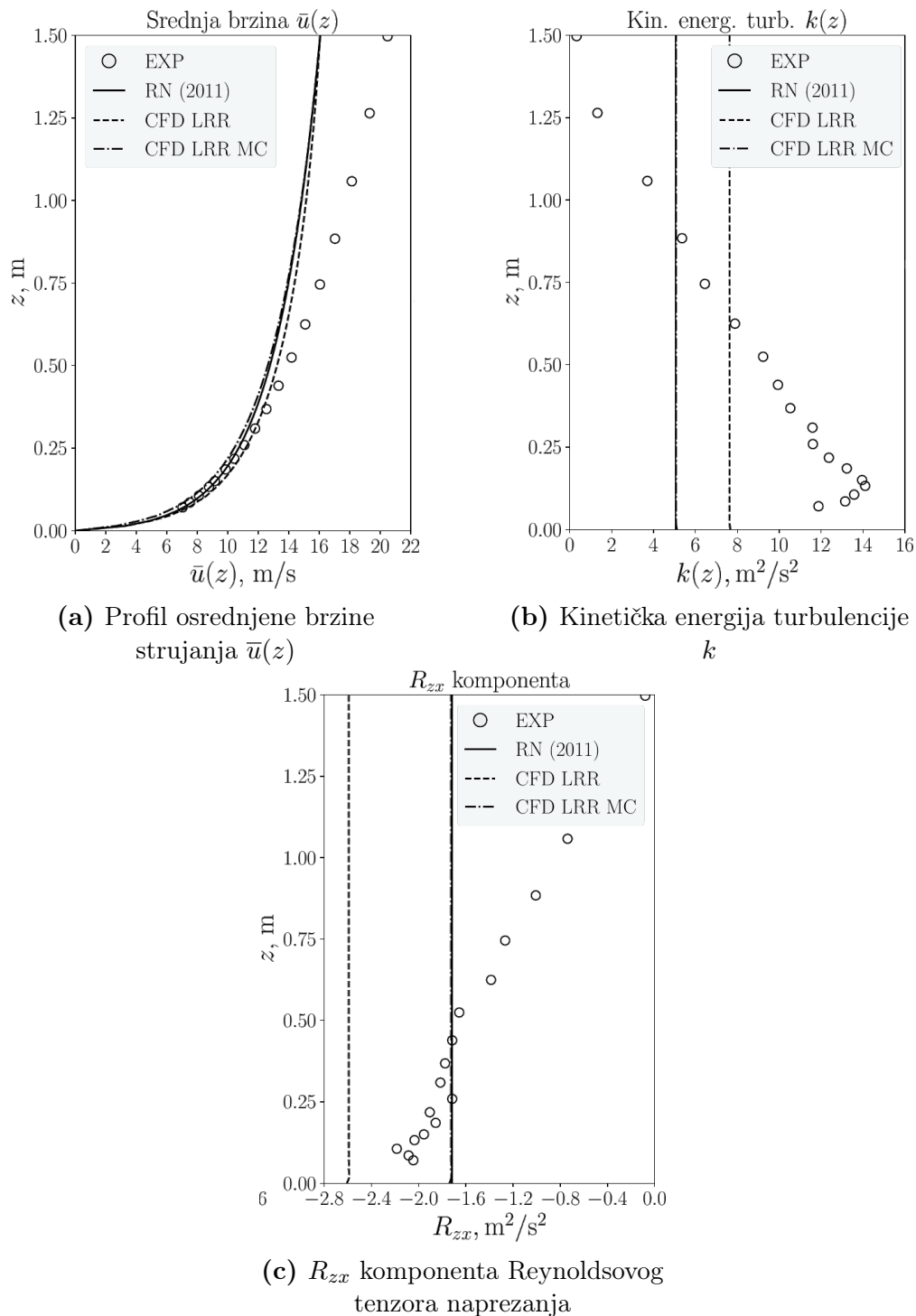
energije turbulencije  $\varepsilon(z)$  kao i profili komponenti Reynoldsovog tenzora naprezanja dobiveni su u prethodnoj dvodimenzijskoj analizi metodom domene preteče te primijenjeni na ulaznu plohu trodimenzijske računalne domene. Na izlaznoj plohi vrijednost tlaka  $\bar{p}$  se izjednačava s nulom dok je za ostale veličine primijenjen Neumannov rubni uvjet.

## 5. Rezultati

Ovo poglavlje sadrži analizu rezultata i usporedbu računalnog modela AGS-a u dvodimenzij-skoj praznoj domeni te u trodimenzijskoj računalnoj domeni s modelom zgrade oblika kocke postignutog koristeći LRR model sa standardnim koeficijentima i LRR model turbulencije s prilagođenim koeficijentima modela s eksperimentalnim [23] i numeričkim rezultatima [21].

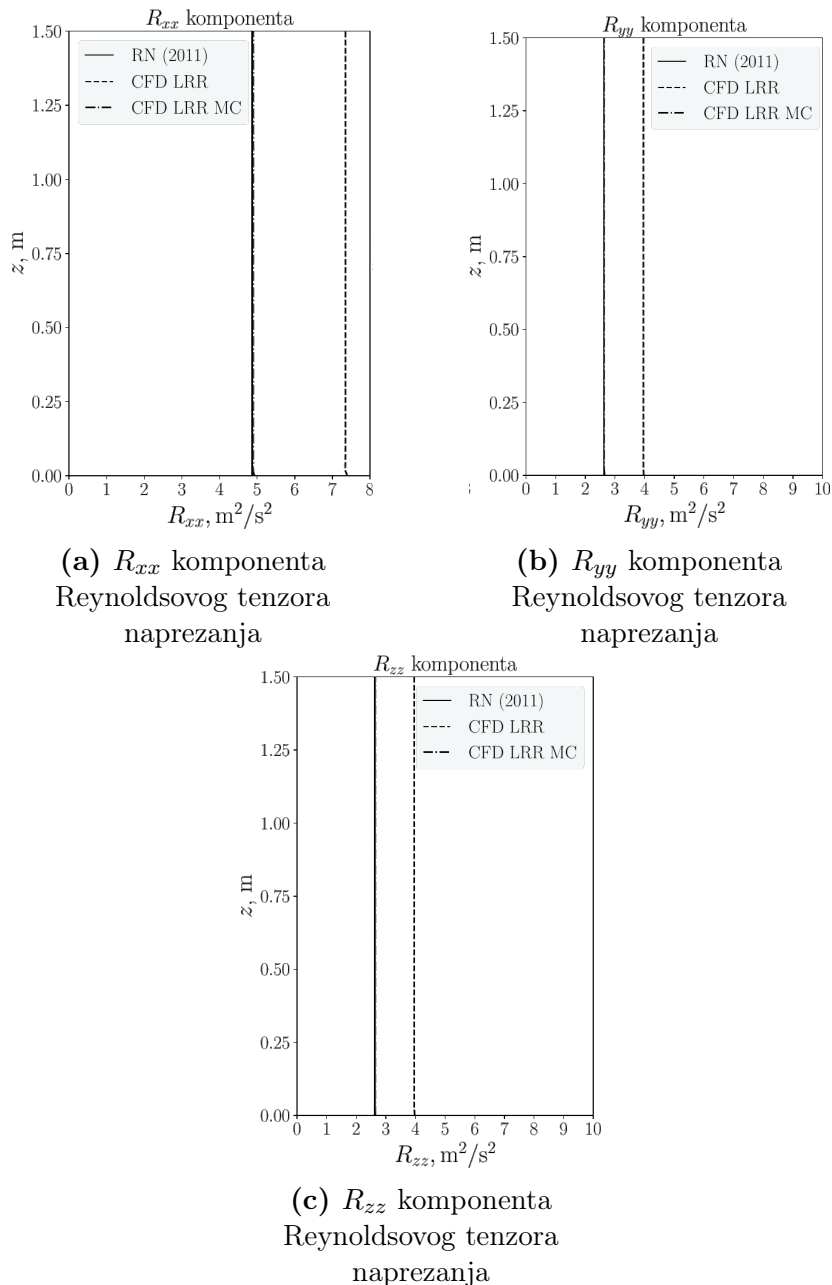
### 5.1. Homogenost modela atmosferskog graničnog sloja

Homogenost modeliranog atmosferskog graničnog sloja u praznoj dvodimenzij-skoj računalnoj domeni je osigurana korištenjem tehnike domene preteče. AGS je modeliran sukladno rezultatima mjerenja eksperimentalno modeliranog urbanog atmosferskog graničnog sloja opisanog prema Kozmar i Laschka (2019) [23]. Mjerenje eksperimentalnog modeliranog urbanog atmosferskog graničnog sloja duljinske mjere 1 : 240 provedeno je u zračnom tunelu duljine 21 m, visine 1,80 m te širine 2,70 m. Izmjerena je brzina strujanja  $\bar{v}_\delta = 20,49 \text{ m s}^{-1}$  na visini koja odgovara debljini eksperimentalnog atmosferskog graničnog sloja ( $z = \delta = 1,5 \text{ m}$ ) također je eksperimentalno dobivena brzina trenja  $u_\tau = 1,31 \text{ m s}^{-1}$ , a pri računalnom modeliranju strujanja korištena je modelska aerodinamička duljina hrapavosti površine  $z_{0m} = 7,49 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ . Profil osrednjene brzine dobiven LRR modelom sa standardnim konstantama i LRR modelom s prilagođenim konstantama turbulencije poklapa se s rezultatima iz literature [10] te dobro aproksimira eksperimentalne rezultate [23] do visine  $z = 0,5 \text{ m}$ , kako je i prikazano na slici 16. Moguće je primjetiti da se računalnim simulacijama dobiva niže vrijednosti osrednjene brzine na visini koja odgovara debljini atmosferskog graničnog sloja od izmjerenih u eksperimentalnom modeliranom AGS-u.



**Slika 16:** Usporedba profila osrednjene brzine strujanja, kinetičke energije turbulencije i komponente  $R_{zx}$  Reynoldsovog tenzora naprežanja u praznoj dvodimenzijskoj (2D) računalnoj domeni uz primjenu LRR modela sa standardnim koeficijentima i LRR modela prilagođenim koeficijentima. Rezultati uspoređeni s eksperimentalnim rezultatima prema Kozmar i Laschka (2019) [23] i računalnim rezultatima prema Richards i Norris (2011) [10]

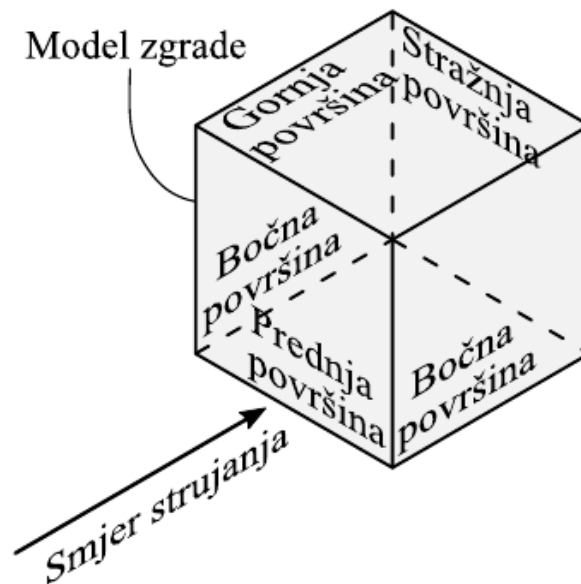
Usporedbom dobivenih rezultata profila dijagonalnih komponenti Reynoldsovog tenzora naprezanja prikazanih na slici 17 može se primijetiti kako se LRR model turbulencije s prilagođenim koeficijentima dobro podudara s vrijednostima danim u Richards i Norris (2011) [10]. Upotrebom LRR modela turbulencije sa standardnim koeficijentima očekivano se mogu primijetiti znatnija odstupanja.



**Slika 17:** Usporedba komponenti Reynoldsovog tenzora naprezanja dobivenih metodom domene preteče u praznoj dvodimenzijskoj (2D) domeni uz korištenje LRR modela turbulencije sa standardnim koeficijentima i LRR modela turbulencije s prilagođenim koeficijentima. Rezultati uspoređeni s računalnim rezultatima prema Richards i Norris (2011) [10]

## 5.2. Aerodinamičko opterećenje zgrade oblika kocke

Kako bi se ocijenila opravdanost izbora modela turbulencije temeljenog na modeliranju transportne jednadžbe pojedinih komponenti Reynoldsovog tenzora naprežanja, provedena je simulacija opstrujavanja modela zgrade oblika kocke unutar suburbanog AGS-a. U ovom je poglavlju prikazana usporedba rezultata u vidu linijske raspodjele koeficijenta tlaka na prednjoj, stražnjoj, bočnoj i gornjoj stranici modela zgrade oblika kocke s rezultatima dobivenim koristeći  $k - \omega$  SST model turbulencije [21], te eksperimentalnim rezultatima [23]. Prikaz modela zgrade oblika kocke s nazivljem pripadajućih stranica dan je na slici 18.



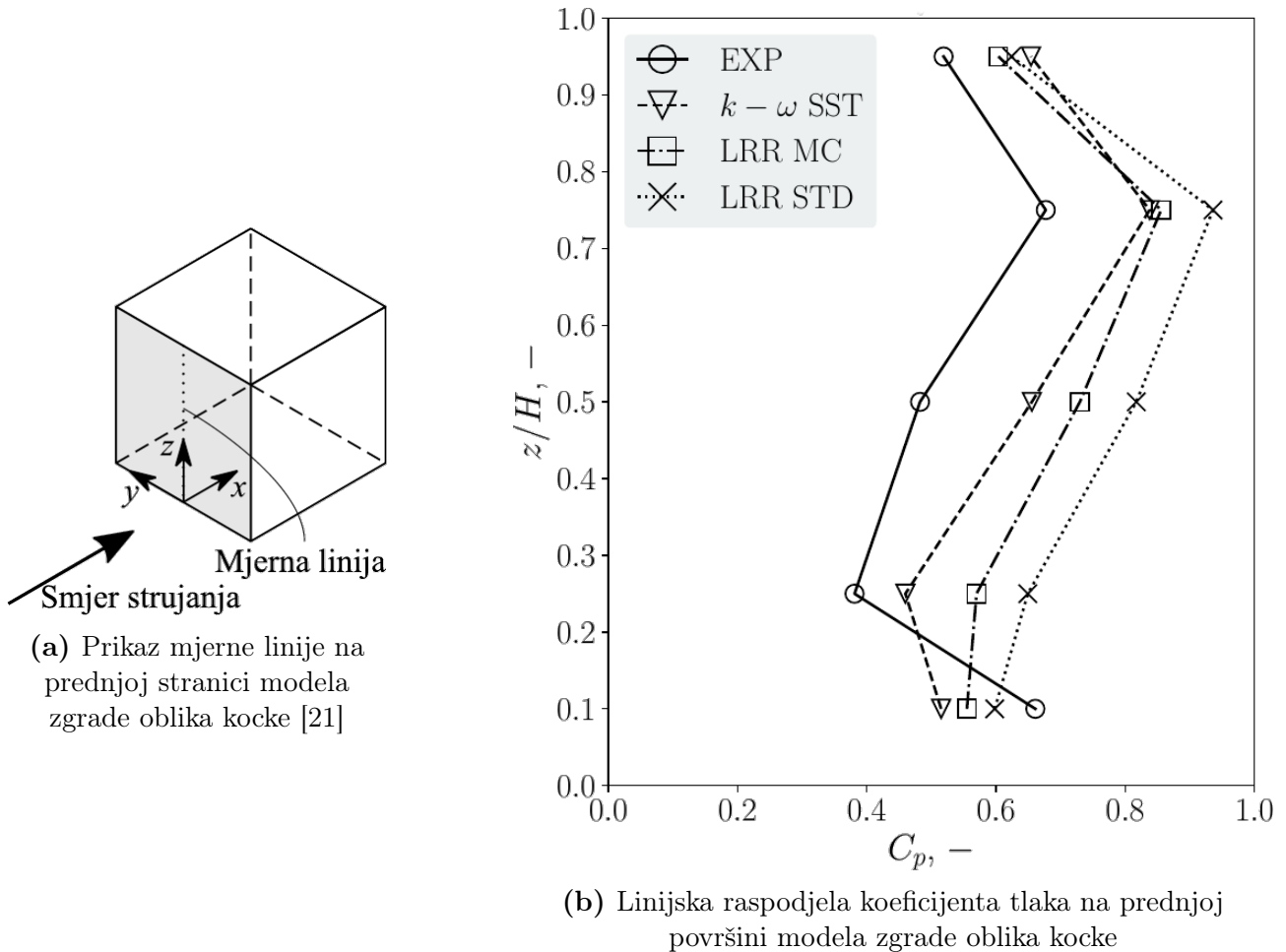
**Slika 18:** Prikaz modela zgrade oblika kocke s pripadajućim stranicama [21]

Koeficijent tlaka računa se prema izrazu

$$C_p = \frac{\bar{p} - \bar{p}_{\text{ref}}}{\frac{1}{2}\rho\bar{v}_{\text{ref}}^2} \quad (5.1)$$

gdje su referentne vrijednosti osrednjene brzine  $\bar{v}_{\text{ref}}$  i tlaka  $\bar{p}_{\text{ref}}$  određene na visini zgrade i poziciji prednje stranice zgrade, simulacijom strujanja homogenog atmosferskog graničnog sloja u praznoj trodimenzijskoj računalnoj domeni.

Rezultati numeričke analize dobiveni primjenom LRR modela turbulencije sa standardnim koeficijentima i LRR modela turbulencije s prilagođenim koeficijentima uspoređeni su s eksperimentalnim rezultatima prema Kozmar i Laschka (2019) [23] te numeričkim rezultatima dobivenim primjenom RANS  $k - \omega$  SST modela turbulencije [21]. Na slici 19 je prikazana usporedba linijske raspodjele koeficijenta tlaka  $C_p$  uzorkovane po vertikalnoj mjernoj liniji koja se nalazi na poziciji  $y/h = 0$ .



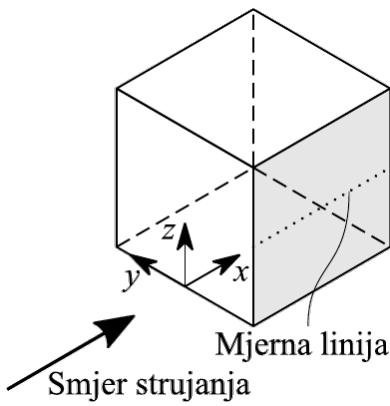
**Slika 19:** Usporedba linijske raspodjele koeficijenta tlaka po prednjoj stranici modela zgrade oblika kocke pri opstrujavanju u suburbanom AGS-u. Rezultati dobiveni računalnom simulacijom uspoređeni su s eksperimentalnim rezultatima prema Kozmar i Laschka (2019) [23] i računalnim rezultatima postignutim  $k - \omega$  SST modelom turbulencije [21].

Možemo primijetiti kako na području  $0,25 \leq z/H \leq 0,75$  vrijednost koeficijenta tlaka raste s porastom  $z/H$  te poprima najveće vrijednosti na  $z/H = 0,75$  odakle se zaključuje da se na toj visini nalazi zaustavna točka. Greška dobivena uporabom LRR modela turbulencije sa standardnim koeficijentima i LRR modela turbulencije s prilagođenim koeficijentima najmanja

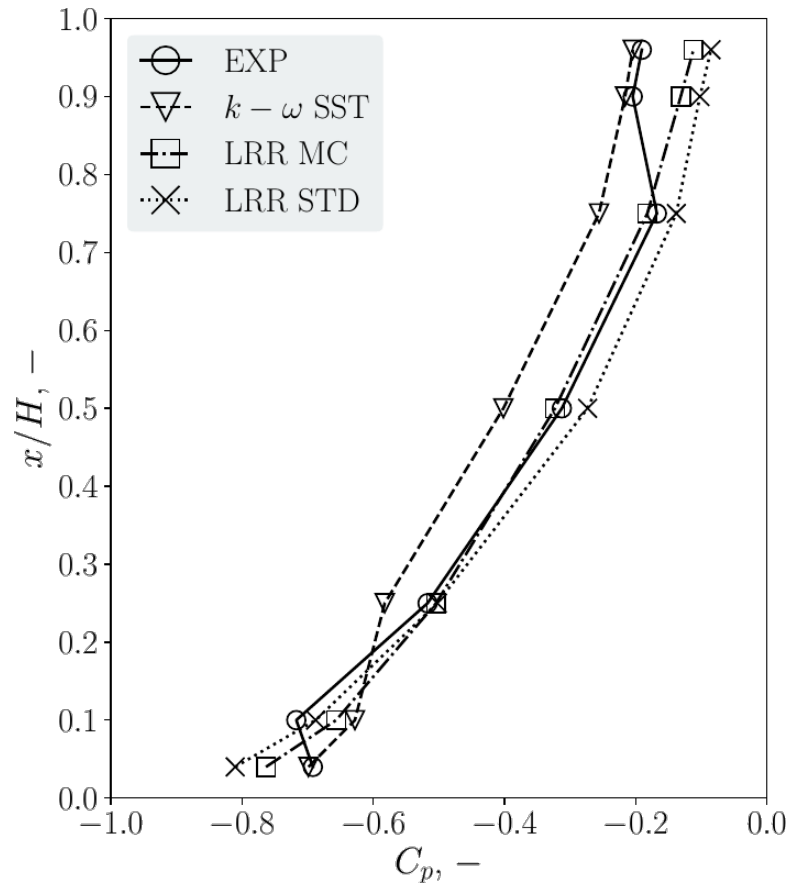
je pri visini  $z/H = 0,1$ , no niti jedan od ta dva modela ne uspijeva modelirati zamijećeni pad koeficijenta tlaka na području  $0,1 \leq z/H \leq 0,25$ . Na području  $0,25 \leq z/H \leq 0,75$  vrijednosti koeficijenta tlaka dobivenih LRR modelom turbulencije sa standardnim koeficijentima i LRR modelom turbulencije sa prilagođenim koeficijentima znatno su veće nego je to dobiveno eksperimentalnim putem te se najveće greške primjećuju na visini  $z/H = 0,5$ . Na području  $0,75 \leq z/H \leq 0,95$  oba primijenjena modela turbulencije uspješno modeliraju pad tlaka te na visini  $z/H = 0,95$  primjećujemo da upravo LRR model turbulencije s prilagođenim koeficijentima daje najmanju grešku. Uporabom LRR modela turbulencije s prilagođenim koeficijentima se postižu točniji rezultati nego LRR modelom sa standardnim koeficijentima, no ipak je greška relativno najmanja pri uporabi  $k - \omega$  SST modela turbulencije.

Na slici 20 je prikazana linijska raspodjela koeficijenta tlaka uzorkovana na horizontalnoj mjernoj liniji na bočnoj stranici modela zgrade oblika kocke na visini  $z/H = 0,5$ .





(a) Prikaz mjerne linije na bočnoj stranici modela zgrade oblika kocke [21]

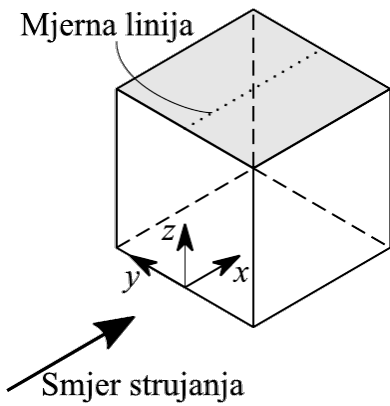


(b) Linijska raspodjela koeficijenta tlaka na bočnoj stranici modela zgrade oblika kocke

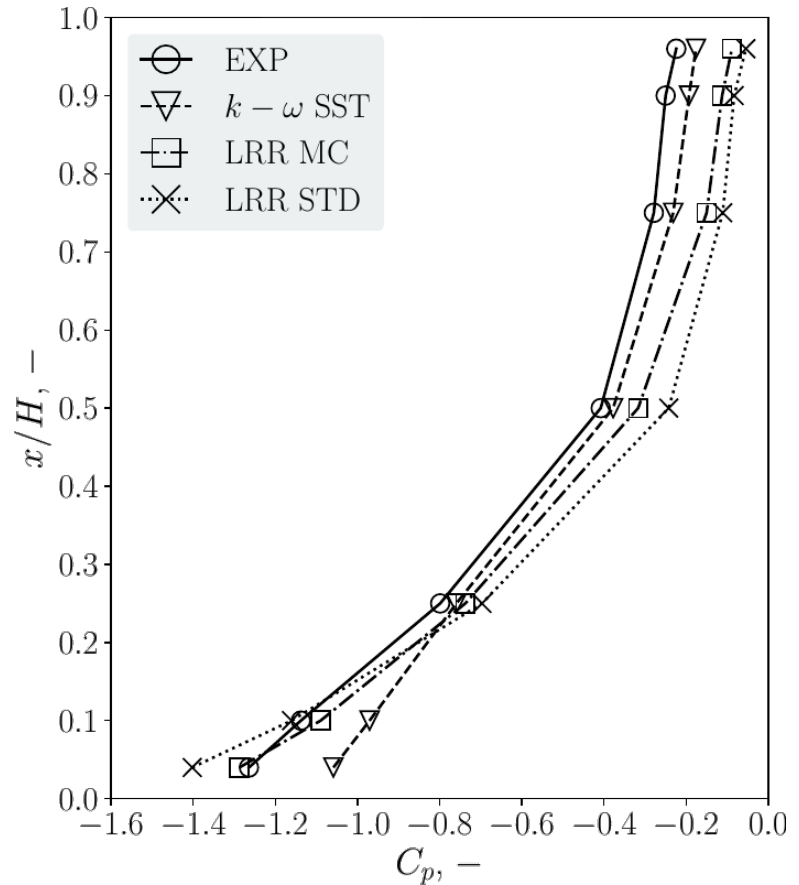
**Slika 20:** Usporedba rezultata linijske raspodjele koeficijenta tlaka po bočnoj stranici modela zgrade oblika kocke pri opstrujavanju u suburbanom AGS-u. Rezultati dobiveni računalnom simulacijom uspoređeni su s eksperimentalnim rezultatima prema Kozmar i Laschka (2019) [23] i računalnim rezultatima postignutim  $k-\omega$  SST modelom turbulencije [21].

Dok za  $x/H = 0,04$  postoji određena greška, primjećuje se dobro podudaranje numeričkih i eksperimentalnih rezultata na području  $0,1 \leq x/H \leq 0,75$  gdje je greška pri uporabi LRR modela turbulencije s prilagođenim koeficijentima mala. Niti LRR model turbulencije s prilagođenim koeficijentima niti LRR model turbulencije sa standardnim koeficijentima ne uspijevaju modelirati pad tlaka zamijećen na područjima  $0,04 \leq x/H \leq 0,1$  i  $0,75 \leq x/H \leq 0,90$  te posljedično tome je najveća greška zamijećena na području  $0,75 \leq x/H \leq 0,90$  gdje se eksperimentalni podaci dobro podudaraju s numeričkim rezultatima dobivenim  $k-\omega$  SST modelom turbulencije.

Na slici 21 je prikazana linijska raspodjela koeficijenta tlaka uzorkovana na horizontalnoj mjerne liniji na gornjoj stranici modela zgrade oblika kocke na mjestu  $y/H = 0$ .



(a) Prikaz mjerne linije na gornjoj stranici modela zgrade oblika kocke [21]

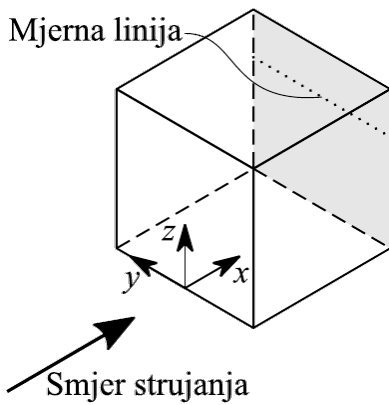


(b) Linijska raspodjela koeficijenta tlaka na gornjoj stranici modela zgrade oblika kocke

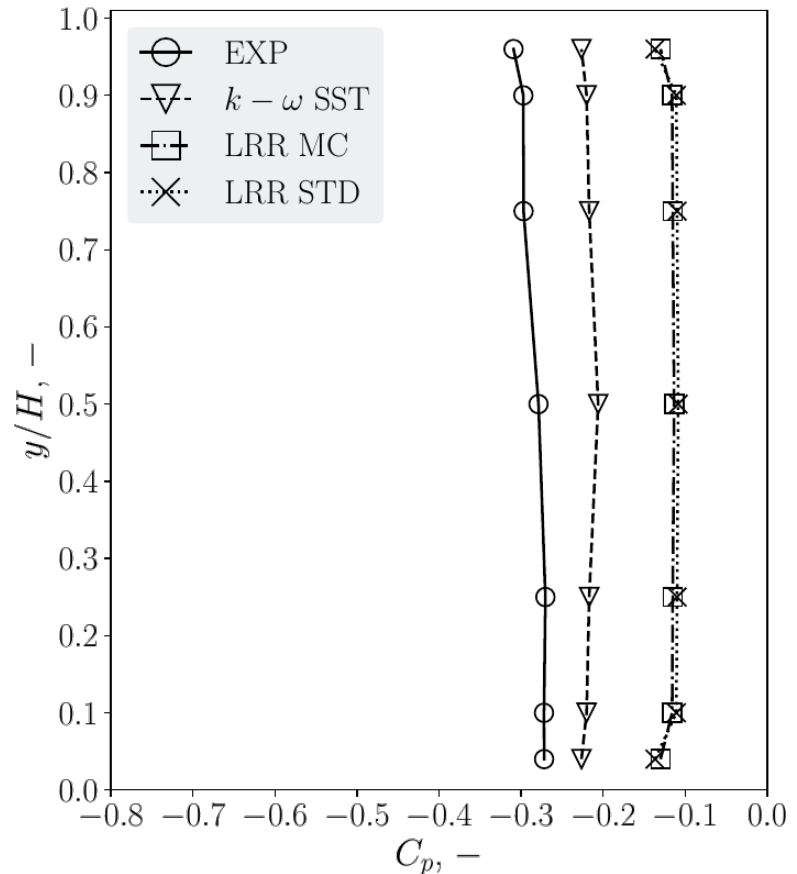
**Slika 21:** Usporedba rezultata linijske raspodjele koeficijenta tlaka po gornjoj stranici modela zgrade oblika kocke pri opstrujavanju u suburbanom AGS-u. Rezultati dobiveni računalom simulacijom uspoređeni su sa eksperimentalnim rezultatima prema Kozmar i Laschka (2019) [23] i računalnim rezultatima postignutim  $k - \omega$  SST modelom turbulencije [21].

Numeričke vrijednosti koeficijenta tlaka dobivene uporabom LRR modela turbulencije sa standardnim koeficijentima i LRR modela turbulencije s prilagođenim koeficijentima na području  $0,04 \leq x/H \leq 0,25$  se dobro podudaraju s eksperimentalnim podacima, no na području  $0,25 \leq x/H \leq 0,95$  daju zamjetno veće vrijednosti koeficijenta tlaka od iznosa dobivenih eksperimentalnim putem. Najveća se greška javlja na  $x/H = 0,95$ , a duž cijele linije LRR model turbulencije s prilagođenim koeficijentima daje bolje rezultate nego LRR model turbulencije sa standardnim koeficijentima.

Na slici 22 je prikazana linijska raspodjela koeficijenta tlaka duž horizontalne mjerne linije smještene na stražnjoj stranici modela zgrade oblika kocke na visini  $z/H = 0,75$ .



(a) Prikaz mjerne linije na stražnjoj stranici modela zgrade oblika kocke [21]



(b) Linijska raspodjela koeficijenta tlaka na stražnjoj stranici modela zgrade oblika kocke

**Slika 22:** Usporedba rezultata linijske raspodjele koeficijenta tlaka po stražnjoj stranici modela zgrade oblika kocke pri opstrujavanju u suburbanom AGS-u. Rezultati dobiveni računalnom simulacijom uspoređeni su s eksperimentalnim rezultatima prema Kozmar i Laschka (2019) [23] i računalnim rezultatima postignutim  $k - \omega$  SST modelom turbulencije [21].

Primjećuje se da je linijska raspodjela koeficijenta tlaka dobivena LRR modelom turbulencije s prilagođenim koeficijentima i LRR modelom turbulencije sa standardnim koeficijentima približno jednaka. Numerički rezultati duž cijele mjerne linije precjenjuju iznos koeficijenta tlaka, a rezultati dobiveni uporabom LRR modela turbulencije s prilagođenim konstantama i LRR modela turbulencije sa standardnim konstantama znatno odstupaju od eksperimentalnih podataka. Uporaba RANS  $k - \omega$  SST modela turbulencije rezultira manjom greškom, te takav model točnije opisuje linijsku raspodjelu tlaka. Međutim i  $k - \omega$  SST modelom turbulencije se dobivaju vrijednosti tlaka veće od onih predviđenih eksperimentom.

## 6. Zaključak

U sklopu rada je analizirana mogućnost primjene modela turbulencije temeljenih na rješavanju transportnih jednadžbi komponenti Reynoldsovog tenzora naprežanja u računalnoj aerodinamici konstrukcija.

U radu su iz LRR modela turbulencije Reynoldsovih naprežanja izvedeni rubni uvjeti za komponente naprežanja koje je potrebno koristiti kako bi se u programskom paketu foam-extend 3.2 pravilno računalno modeliralo strujanje homogenog atmosferskog graničnog sloja. Strujanje je potom računalno modelirano u praznoj dvodimenzijskoj računalnoj domeni korištenjem tehnike domene preteče. Time je osigurana homogenost strujanja, a dobiveni profili osrednjene brzine, kinetičke energije turbulencije, disipacije kinetičke energije turbulencije i komponenti Reynoldsovog tenzora naprežanja korišteni su kao ulazni profili za računalno modeliranje opterećenja modela zgrade oblika kocke u trodimenzijskoj računalnoj domeni. Rezultati strujanja u praznoj dvodimenzijskoj računalnoj domeni u skladu su s rezultatima dostupnim u literaturi, a koji su dobiveni korištenjem komercijalnog računalnog paketa Ansys Fluent.

Potom je računalno modelirano strujanje prigradskog atmosferskog graničnog sloja oko modela zgrade oblika kocke u trodimenzijskoj računalnoj domeni. Raspodjela koeficijentata tlaka duž mjernih linija smještenih na stranicama modela zgrade dobivenih računalnim modeliranjem uspoređeni su s eksperimentalnim rezultatima, te numeričkim rezultatima dobivenim  $k - \omega$  SST modelom. Dobiveni rezultati ukazuju da je  $k - \omega$  SST modelom turbulencije moguće dobiti rezultate koji se bolje podudaraju s eksperimentalnim mjerenjima. Pritom je važno napomenuti i kako je taj model turbulencije računalno manje zahtjevan, s obzirom da se temelji na Boussinesqovoj hipotezi kojom se turbulentna naprežanja modeliraju, što znači da nema potrebe za rješavanjem dodatne transportne jednadžbe (kao što je to slučaj kod modela turbulencije Reynoldsovih turbulentnih naprežanja). Stoga se predlaže da se za računalno modeliranje opterećenja zgrada u aerodinamici konstrukcija koristi  $k - \omega$  SST model turbulencije.

## Bibliografija

- [1] C. Dyrbye i S. O. Hansen, *Wind Loads on Structures*. John Wiley & Sons, 1997.
- [2] J. Garratt, *The Atmospheric Boundary Layer*. Cambridge University Press, 1994.
- [3] J. C. Wyngaard, *Turbulence in the Atmosphere*. Cambridge University Press, 2010.
- [4] R. B. Stull, *An Introduction to Boundary Layer Meteorology*. Springer Dordrecht, 1988.
- [5] S. Emeis, *Wind Energy Meteorology - Second Edition*. Springer Berlin, Heidelberg, 2018.
- [6] P. Moonen, T. Defraeye, V. Dorer, B. Blocken i J. Carmeliet, „Urban physics: Effect of the micro-climate on comfort, health and energy demand,” *Frontiers of Architectural Research*, 2012.
- [7] J. Cermak, A. Davenport, E. Plate i D. Viegas, *Wind Climate in Cities*. Springer Netherlands, 1994.
- [8] B. Blocken, „50 years of computational wind engineering: Past, present and future,” *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 2014.
- [9] P. Richards i R. Hoxey, „Appropriate boundary conditions for computational wind engineering models using the k-e turbulence model,” *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 1993.
- [10] P. Richards i S. Norris, „Appropriate boundary conditions for computational wind engineering models revisited,” *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 2011.
- [11] D. Yeo i E. Simiu, *Wind Effects on Structures: Modern Structural Design for Wind*. John Wiley & Sons, 2019.
- [12] Kozmar, H., „Utjecaj mjerila na strukturu modeliranog atmosferskog graničnog sloja,” disertacija, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Sveučilište u Zagrebu, 2005.

- [13] J. Counihan, „Simulation of an adiabatic urban boundary layer in a wind tunnel,” *Atmospheric Environment (1967)*, 1973.
- [14] Europska Unija, „Eurocode 1: Actions on structures - part 1-4: General actions - wind actions,” *EN 1991-1-4*, 1991.
- [15] J. Counihan, „Adiabatic atmospheric boundary layers: A review and analysis of data from the period 1880–1972,” *Atmospheric Environment (1967)*, 1975.
- [16] C. G. ( G. Justus, „Winds and wind system performance,” 1978.
- [17] Z. Virag, M. Šavar i I. Džijan, *Mehanika Fluida II - Predavanja*. Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb, 2018.
- [18] B. E. Launder, G. J. Reece i W. Rodi, „Progress in the development of a reynolds-stress turbulence closure,” *Journal of Fluid Mechanics*, 1975.
- [19] B. J. Daly i F. H. Harlow, „Transport equations in turbulence,” *Physics of Fluids*, 1970.
- [20] S. Al-Sharif, „Reynolds stress transport modelling,” 2011.
- [21] Cindori, M., „Računalno modeliranje homogenoga atmosferskog graničnog sloja uz primjenu dodatne masene sile,” disertacija, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Sveučilište u Zagrebu, 2021.
- [22] M. Cindori, P. Čajić, I. Džijan, F. Juretić i H. Kozmar, „A comparison of major steady rans approaches to engineering abl simulations,” *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 2022.
- [23] H. Kozmar i B. Laschka, „Wind-tunnel modeling of wind loads on structures using truncated vortex generators,” *Journal of Fluids and Structures*, 2019.