

# Efekt rastezanja kod ugađanja klavira

---

**Radoš, Ružica**

**Undergraduate thesis / Završni rad**

**2023**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:235:103050>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-10-21**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# ZAVRŠNI RAD

**Ružica Radoš**

Zagreb, 2023.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# ZAVRŠNI RAD

Mentor:

prof. dr. sc. Neven Alujević, dipl. ing.

Student:

Ružica Radoš

Zagreb, 2023.

Izjavljujem da sam ovaj rad izradila samostalno koristeći znanja stečena tijekom studija i navedenu literaturu.

Ovaj rad potpomogla je Hrvatska zaklada za znanost projektom HRZZ-IP-2019-04-5402 (DARS).

Zahvaljujem se na početku svojim roditeljima, bratu, sestri i tetki na neizmjerne podršci tijekom studiranja.

Zahvaljujem se mentoru dr. sc. Nevenu Alujeviću na stručnim savjetima i velikoj pomoći kod izrade ovog rada. Također, zahvaljujem se asistentu mag. ing. Srećku Arandia-Krešiću na izrazitoj pristupačnosti i pomoći.

Ružica Radoš



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE



Središnje povjerenstvo za završne i diplomske ispite  
Povjerenstvo za završne i diplomske ispite studija strojarstva za smjerove:  
Procesno-energetski, konstrukcijski, inženjersko modeliranje i računalne simulacije i brodstrojarski

Sveučilište u Zagrebu	
Fakultet strojarstva i brodogradnje	
Datum	Prilog
Klasa: 602 – 04 / 23 – 6 / 1	
Ur.broj: 15 - 1703 - 23 -	

## ZAVRŠNI ZADATAK

Student: **Ružica Radoš** JMBAG: **0035219696**

Naslov rada na hrvatskom jeziku: **Efekt rastezanja kod ugadanja klavira**

Naslov rada na engleskom jeziku: **The stretching effect in piano tuning**

Opis zadatka:

Kod žičanih muzičkih instrumenata primarni zvuk nastaje zbog vibracija napetih žica. Te vibracije mogu biti prisilne kao kod, primjerice, gudačkih instrumenata, odnosno slobodne kao kod trzalačkih instrumenata i klavira. Duljina žica i njihova natezna sila osnovni su parametri pomoću kojih se ugađa osnovna prirodna frekvencija slobodnih vibracija pojedine žice tako da odgovara frekvenciji željenog muzičkog tona. Primjerice, žica ugođena tako da ima osnovnu prirodnu frekvenciju 440 Hz stvara ton a1, a žica s osnovnom prirodnom frekvencijom 880 Hz stvara oktavu viši ton a2. Međutim, napete žice imaju i svoje više prirodne oblike. Najjednostavniji matematički model napete žice (bez savojne krutosti) predviđa drugu prirodnu frekvenciju dvostruko višu od prve, treću trostruko višu od prve i tako dalje. Međutim, praksa pokazuje da klavirske žice imaju drugu vlastitu frekvenciju nešto višu od dvostruke prve. Zbog ovog efekta kod ugadanja klavira nastaje tzv. efekt rastezanja (*engl. stretching*) tonske ljestvice. Naime, kod ugadanja oktavnih raspona tehničar podešava napetost žice tako da se podudara druga prirodna frekvencija osnovnog tona s prvom prirodnom frekvencijom oktavu višeg tona nastojeći eliminirati interferencijske udare. U ovom završnom radu potrebno je objasniti uzroke efekta rastezanja koristeći matematički model za proračun prirodnih frekvencija grede opterećene konstantnom aksijalnom silom. Potrebno je usporediti rezultate dobivene modelom grede opterećene konstantnom aksijalnom silom s modelom napete žice bez savojne krutosti i te rezultate usporediti s mjerenim fundamentalnim prirodnim frekvencijama tonova stvarnog klavira. Potrebno je pokazati na primjeru grede uklještene na oba kraja da u takvom slučaju druga prirodna frekvencija nije dvostruka vrijednost prve, nego nešto viša. Potrebno je pokazati da s porastom natezne sile više prirodne frekvencije zaista teže prema vlastitim frekvencijama nategnute žice, međutim kod konačne natezne sile prisutna je i konačna razlika između druge prirodne frekvencije i dvostruke vrijednosti prve pa zbog toga nije moguće jednostavno izbjeći efekt rastezanja. U radu navesti korištenu literaturu i eventualno dobivenu pomoć.

Zadatak zadan: Datum predaje rada: Predvideni datumi obrane:  
30. 11. 2022. 1. rok: 20. 2. 2023. 1. rok: 27. 2. – 3. 3. 2023.  
2. rok (izvanredni): 10. 7. 2023. 2. rok (izvanredni): 14. 7. 2023.  
3. rok: 18. 9. 2023. 3. rok: 25. 9. – 29. 9. 2023.

Zadatak zadao: Predsjednik Povjerenstva:

Izv. prof. dr. sc. Neven Alujević

Prof. dr. sc. Vladimir Soldo

*Neven Alujević*

*V Soldo*

## SADRŽAJ

SADRŽAJ .....	I
POPIS SLIKA .....	III
POPIS TABLICA.....	V
POPIS OZNAKA .....	VI
SAŽETAK.....	VII
SUMMARY .....	VIII
1. UVOD.....	1
1.1. Podjela muzičkih instrumenata i mehaznizmi nastajanja zvuka .....	1
1.2. Građa suvremenog klavira .....	2
1.3. Muzički izrazi - objašnjenja .....	6
1.4. Ugađanje klavira .....	8
1.5. Temperamenti .....	10
1.5.1. Definicija temperamenta .....	10
1.5.2. Equal temperament .....	12
1.5.3. Just temperament .....	13
1.5.4. Pythagorean temperament.....	16
1.5.5. Meantone temperament.....	19
1.5.6. Dobro ugođeni temperamenti .....	20
2. VIBRACIJA ŽICE.....	23
2.1. Povijest istraživanja vibracija žice .....	23
2.2. Podjela vibracija prema načinu pobude .....	23
2.3. Osnovne karakteristike vibracija.....	24
3. AKUSTIČKI UDARI .....	27
3.1. Računanje frekvencije akustičkih udara .....	27
3.2. Ugađanje instrumenta pomoću akustičkih udara .....	29
4. EFEKT RASTEZANJA .....	32
4.1. Objašnjenje efekta rastezanja i inharmoničnosti.....	32
4.2. Vibracije grede i žice opterećenih aksijalnom silom .....	33
4.3. Diferencijalni elementi grede i idealne žice opterećeni aksijalnom silom.....	33
4.3.1. Diferencijalni element grede .....	33
4.3.2. Diferencijalni element idealne žice .....	35
4.4. Rješavanje jednadžbe elementa grede.....	37
4.5. Grafički prikazi ovisnosti vlastitih frekvencija o nateznoj sili .....	40
4.5.1. Opće zadani parametri .....	40
4.5.2. Parametri stvarne klavirske žice .....	42
4.6. Efekt rastezanja kod ugađanja klavira .....	43
4.7. Disperzija frekvencijskog spektra .....	45
5. ZAKLJUČAK.....	48
LITERATURA.....	49

---

DODATAK ..... 53

## POPIS SLIKA

Slika 1.	Podjela muzičkih instrumenata prema načinu nastajanja zvuka: a) truba – aerofonski instrument, b) bas-bubanj – membranofonski instrument, c) gong – idiofonski instrument, d) električna gitara – elektrofonski instrument, e) violina – kordofonski instrument.....	2
Slika 2.	Dimenzije i masa klavira [3] .....	3
Slika 3.	Eksplozirani prikaz građe suvremenog klavira [3] .....	4
Slika 4.	Prikaz građe engleske (repeticione) mehanike [3] .....	5
Slika 5.	Prikaz prednjeg kraja omotane klavirske žice [3] .....	6
Slika 6.	Razmještaj tonova na klavijaturi .....	7
Slika 7.	Ugađanje pianina [11] .....	8
Slika 8.	Prikaz nekoliko viših harmonika kod fundamentalnog tona c .....	14
Slika 9.	Usporedba <i>Just</i> i <i>Equal</i> temperameta u centima .....	15
Slika 10.	Prikaz jednog od načina izgradnje <i>Pythagorean</i> temperameta počevši od referentnog tona c [17] .....	16
Slika 11.	Kvintni krug .....	17
Slika 12.	Instrument s 18 tipki unutar oktave [21] .....	18
Slika 13.	Usporedba <i>Pythagorean</i> i <i>Equal</i> temperameta u centima .....	19
Slika 14.	Usporedba <i>Meantone</i> i <i>Equal</i> temperameta u centima .....	20
Slika 15.	Usporedba <i>Werckmeister</i> i <i>Equal</i> temperameta u centima.....	21
Slika 16.	Usporedba <i>Kirnberger</i> i <i>Equal</i> temperameta u centima.....	22
Slika 17.	Različite forme vibriranja žice [30].....	25
Slika 18.	a) udjel harmonika kod tona s fundamentalnom frekvencijom 440 Hz, b) usporedba čistog sinusa (crtkana linija) i tona koji ima više harmonike (puna linija) [31].....	26
Slika 19.	Akustički udari frekvencije <b>fak. udara = 4 Hz</b> dobiveni superponiranjem dvaju zvučnih signala s frekvencijama <b>f1 = 114 Hz, f2 = 110 Hz</b> i amplitudama <b>A1 = A2 = 0.5 mm</b> .....	29
Slika 20.	Akustički udari dobiveni superponiranjem zvučnog signala frekvencije <b>f1 = 882 Hz</b> i zvučnog signala frekvencije: a) <b>f2 = 874 Hz</b> , b) <b>f2 = 878 Hz</b> , c) <b>f2 = 880 Hz</b> , d) <b>f2 = 881 Hz</b> . e) uvećani prikaz akustičkog udara od 0.49 sekunde do 0.51 sekunde.....	30
Slika 21.	Diferencijalni element grede oslobođen veza i opterećen aksijalnom silom .....	34
Slika 22.	Diferencijalni element idealne žice opterećene aksijalnom silom .....	36
Slika 23.	Prikaz ovisnosti vlastite frekvencije na prvoj, drugoj i trećoj formi vibriranja grede o nateznoj sili u vrijednosti od 0 do 1000 N za opće zadane podatke:.....	40
Slika 24.	Ovisnost omjera vlastitih frekvencija elementa grede o nateznoj sili <b>T</b> za opće zadane parametre: a) omjer druge i prve vlastite frekvencije, b) omjer treće i prve vlastite frekvencije .....	41
Slika 25.	Prikaz ovisnosti vlastite frekvencije na prvoj, drugoj i trećoj formi vibriranja grede o nateznoj sili u vrijednosti od 0 do 1000 N na primjeru stvarne klavirske žice: .....	42
Slika 26.	Ovisnost omjera vlastitih frekvencija elementa grede o nateznoj sili <b>T</b> na primjeru stvarne klavirske žice: a) omjer druge i prve vlastite frekvencije, b) omjer treće i prve vlastite frekvencije .....	43
Slika 27.	Izmjerene vrijednosti odstupanja fundamentalnih frekvencija svih 88 tonova na klaviru od neutralne linije (bez efekta rastezanja) izražene u centima te njihova polinomna aproksimativna krivulja.....	44



---

Slika 28.	Prikaz mjerenja fundamentalnih frekvencija tonova na klaviru modela <i>Steinway &amp; Sons</i> pomoću analizatora spektra .....	44
Slika 29.	Disperzija frekvencijskog spektra slobodno oslonjene grede opterećene aksijalnom silom.....	47

---

**POPIS TABLICA**

Tablica 1. Omjeri frekvencija u intervalima prema <i>Just</i> temperamentu .....	15
Tablica 2. Parametri različitih tipova žice koje realiziraju ton H na klaviru <i>Steinway &amp; Sons</i> modela O [44].....	53

**POPIS OZNAKA**

Oznaka	Jedinica	Opis
$\rho$	kg/m <sup>3</sup>	Masena gustoća materijala
$\sigma$	kg/m	Linearna gustoća materijala
$\varphi$	°, rad	Kut između aksijalne sile i horizontalne linije
$\omega$	rad/s	Kružna frekvencija
$A$	m <sup>2</sup>	Površina poprečnog presjeka
$\hat{A}$	m	Amplituda vala
$A_1$	m	Amplituda prvog zvučnog signala
$A_2$	m	Amplituda drugog zvučnog signala
$B$	-	Koeficijent inharmoničnosti
$c$	cent	Razmak između dvije frekvencije
$c_1, c_2, c_3, c_4$	-	Konstante
$d$	m	Promjer poprečnog presjeka
$E$	N/m <sup>2</sup>	Youngov modul elastičnosti
$f_0$	Hz	Fundamentalna frekvencija idealne žice
$f_1$	Hz	Frekvencija prvog zvučnog signala
$f_2$	Hz	Frekvencija drugog zvučnog signala
$f_{ak.udara}$	Hz	Frekvencija akustičkih udara
$f_i$	Hz	Frekvencija na $i$ -toj formi vibriranja
$f_v$	Hz	Frekvencija višeg tona u intervalu
$f_n$	Hz	Frekvencija nižeg tona u intervalu
$I$	m <sup>4</sup>	Moment inercije poprečnog presjeka
$i$	-	Broj forme vibriranja
$k_1, k_2$	1/m	Konstante
$l$	m	Duljina grede
$M$	Nm	Moment koji preostaje oslobađanjem elementa veza
$n$	-	Prirodni broj koji predstavlja veličinu intervala
$Q$	N	Vertikalna sila koja preostaje oslobađanjem elementa veza
$R$	-	Omjer frekvencija polustepena u <i>Equal</i> temperamentu
$R^n$	-	Omjer frekvencija intervala veličine $n$ u <i>Equal</i> temperamentu
$T$	N	Vlačna aksijalna sila, Natezna sila
$T_{ak.udara}$	s	Period akustičkih udara
$t$	s	Vrijeme
$w$	m	Transverzalni pomak čestice elementa
$x$	m	Aksijalna udaljenost od lijevoga kraja elementa
$y_1$	m	Transverzalni pomak čestica kod prvog zvučnog signala
$y_2$	m	Transverzalni pomak čestica kod drugog zvučnog signala

---

**SAŽETAK**

U ovom radu objašnjeni su problemi pri ugađanju klavira koji nastaju zbog nezanemarive savojne krutosti klavirskih žica. Klavirski tehničar kontrolira tenziju žica tako da omjeri među frekvencijama budu zadovoljavajući. Kod konsonantnih intervala težit će se izostanku akustičkih udara, percipiranih kao periodičke promjene u glasnoći koje nastaju interferencijom dvaju tonova s malom razlikom u frekvencijama. Matematički model napete idealne žice (bez savojne krutosti) predviđa drugu prirodnu frekvenciju dvostruko višu od prve, treću trostruko višu od prve i tako dalje. Međutim, praksa pokazuje da klavirske žice imaju drugu vlastitu frekvenciju nešto višu od dvostruke prve. Zbog ovoga kod ugađanja klavira nastaje tzv. efekt rastezanja muzičke skale. Klavirski tehničar podešava napetost žice tako da se druga prirodna frekvencija osnovnog tona podudara s prvom prirodnom frekvencijom oktavu višeg tona nastojeći eliminirati akustičke udare. U ovom radu objašnjeni su uzroci efekta rastezanja koristeći matematički model za proračun prirodnih frekvencija grede opterećene konstantnom aksijalnom silom. Uspoređeni su rezultati dobiveni modelom grede opterećene konstantnom aksijalnom silom s modelom nategnute žice bez savojne krutosti, i ti rezultati uspoređeni s mjerenim fundamentalnim prirodnim frekvencijama tonova stvarnog klavira. Na primjeru slobodno oslonjene grede pokazano je da u takvom slučaju druga prirodna frekvencija nije dvostruka vrijednost prve, nego nešto viša. Pokazano je da s porastom natezne sile više prirodne frekvencije zaista teže prema vlastitim frekvencijama nategnute žice, međutim kod konačne natezne sile to nije slučaj te zbog toga nije moguće jednostavno izbjeći efekt rastezanja.

Ključne riječi: Vibroakustika muzičkih instrumenata, Ugađanje klavira, Efekt rastezanja tonske ljestvice, Vibracije nategnute žice, Vibracije Euler-Bernoullijeve grede, Vibracije nategnute Euler-Bernoullijeve grede.

**SUMMARY**

This thesis explains problems that occur in piano tuning process due to the non-negligible bending stiffness of piano strings. Normally, a piano technician adjusts tensions of the strings such that the ratios between their fundamental frequencies follow a certain harmonic pattern. In consonant intervals it is aspired towards the absence of acoustic beats, which are perceived as slow periodic variations in volume that occur due to the interference of two tones with slightly different frequencies. Typical mathematical models of an ideal string (without bending stiffness) under axial tension predict the second natural frequency to be twice the first, the third three times the first, and so on. However, piano wires under realistic conditions have the second natural frequency slightly higher than twice the first natural frequency. As a result, the musical scale during the piano tuning process becomes stretched. This is because a piano technician adjusts the tension of the string so that the second natural frequency of its octave lower counterpart matches the first natural frequency of the string currently tuned, trying to eliminate acoustic beats. In this thesis the causes of the stretching effect are explained using a mathematical model to calculate natural frequencies of a beam under constant axial tension. The results obtained using the model of a tensioned beam are compared to the results obtained using the model of an ideal string without bending stiffness, and those results are compared to measured fundamental natural frequencies of tones on a real piano. In the example of a pinned-pinned beam it is shown that the second natural frequency is not equal to twice the fundamental natural frequency, but slightly higher. It is shown that with the increase of the tensile force, the higher natural frequencies of a tensioned beam tend to the natural frequencies of a tensioned string. However, with a finite axial load that is not the case so that the stretching effect cannot be easily avoided.

**Keywords:** Vibroacoustics of musical instruments, Piano tuning, Stretching effect, Vibrations of tensioned strings, Vibrations of Euler-Bernoulli beams, Vibrations of tensioned Euler-Bernoulli beams.

## 1. UVOD

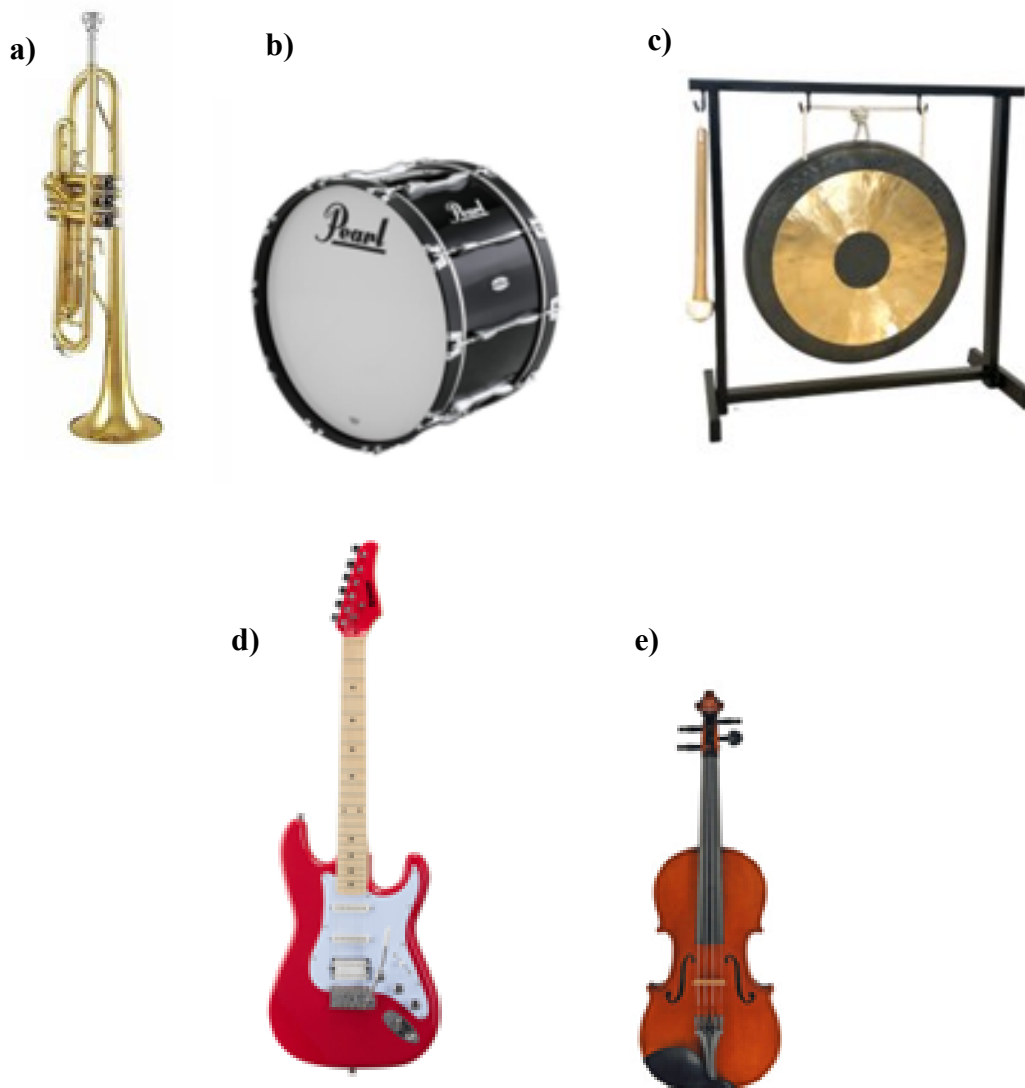
### 1.1. Podjela muzičkih instrumenata i mehanizmi nastajanja zvuka

Glazbeni ili muzički instrumenti su predmeti koji se koriste za proizvodnju zvuka u umjetničke svrhe [1]. Najstariji paleolitički slikovni prikaz glazbala otprije četrdesetak tisuća godina, pronađen u Francuskoj, potvrđuje da glazbala pripadaju među najstarija oruđa. Kroz povijest proizveden je velik niz muzičkih instrumenata vrlo različitih oblika i veličine, opsega i boje zvuka.

Prema načinu nastajanja zvuka glazbala dijelimo na aerofonske, membranofonske, idiofonske, elektrofonske i kordofonske instrumente [1]. Aerofonska glazbala su predmeti koji vibriranjem zračnoga stupca proizvode zvuk. Prema materijalu od kojega su sagrađeni i načinu na koji se izazivaju vibracije zračne mase ta se skupina dijeli na limena i drvena puhačka glazbala. U aerofonske instrumente su ubrajaju flauta, truba, klarinet, orgulje i mnogi drugi. Membranofonska glazbala su predmeti kod kojih se zvuk proizvodi vibriranjem napete membrane. Membrana je najčešće načinjena od kože, životinjskog mjehura ili papira. Zvuk na membranofonskim glazbalima se može proizvesti udaranjem (npr. bas-bubanj i timpani), trljanjem štapa o membranu (zambomba) ili sutitranjem membrane (lončani bas). Idiofonski instrumenti su glazbala koji zvuk proizvode vibracijom samog instrumenta. Dijele se na glazbala na kojima se zvuk proizvodi udaranjem (npr. činele, gong, marimba, zvono), treskanjem (čegrtaljka, zvečka), trzanjem (drombulja) te struganjem ili trljanjem (glasharmonika) cijelog korpusa instrumenta. Elektrofonska glazbala su elektroakustički uređaji u kojima se električni titraji stvaraju elektronskim oscilatorima ili se gibanje mehaničkih elemenata (žica, jezičaca, pločica i dr.) pretvara u električne titraje na elektromagnetskom, elektrooptičkom i elektrostatičkom načelu, koji se zatim obrađuju u različitim filtrima, izobličivačima, modulatorima i pojačalima zvuka te vode u zvučnik [1]. Najčešći predstavnici elektrofonskih glazbala su električna gitara i sintisajzer.

Kordofonska glazbala su predmeti koji zvuk proizvode vibriranjem napete žice. Prema obliku glazbala i položaju napetih žica kordofonska glazbala se grupiraju u tip citre, lutnje, lire i harfe [1]. Tip citre označava grupu glazbala sa žicama napetima preko ravne drvene površine. Zvuk se na takvim glazbalima može proizvesti trzanjem žice (čembalo, spinet), udarcem batića po žici (klavir, dulcimer) ili struganjem tangente po žici (klavikord). Tip lutnje obuhvaća skupinu glazbala ovalnog korpusa i izduženog vrata. Kod glazbala tipa lutnje zvuk se može dobiti trzanjem žice (gitara, mandolina, bisernica) ili povlačenjem gudala preko žica (violina,

violončelo, kontrabas). Tip lire označava skupinu glazbala u obliku potkove, a tip harfe glazbala trokutastog oblika. Kod oba tipa zvuk se dobije trzanjem žice [1].



**Slika 1. Podjela muzičkih instrumenata prema načinu nastajanja zvuka: a) truba – aerofonski instrument, b) bas-bubanj – membranofonski instrument, c) gong – idiofonski instrument, d) električna gitara – elektrofonski instrument, e) violina – kordofonski instrument**

## 1.2. Građa suvremenog klavira

Klavir ili glasovir je kordofonski (žičani) instrument s tipkama kod kojeg zvuk nastaje udarom batića od žicu [2]. Danas se smatra glavnim instrumentom koncertnog solističkog i komornoga muziciranja. Koristi se u gotovo svim glazbenim žanrovima, od klasične do pop-glazbe.

Dužina klavira seže od metra i pol kod malih polukoncertnih klavira, a masa im je oko 300 kg. Polukoncertni klavir može biti dugačak i do 2 m, dok mu je masa približno 400 kg. Dimenzije koncertnog klavira premašuju 274 cm, a mase sežu od 500 kg do 1100 kg [3]. Širina klavira

najviše ovisi o klavijaturi pa razlike među pojedinim modelima nisu toliko značajne. Širina je najčešće dimenzionirana od 150 cm do 165 cm.

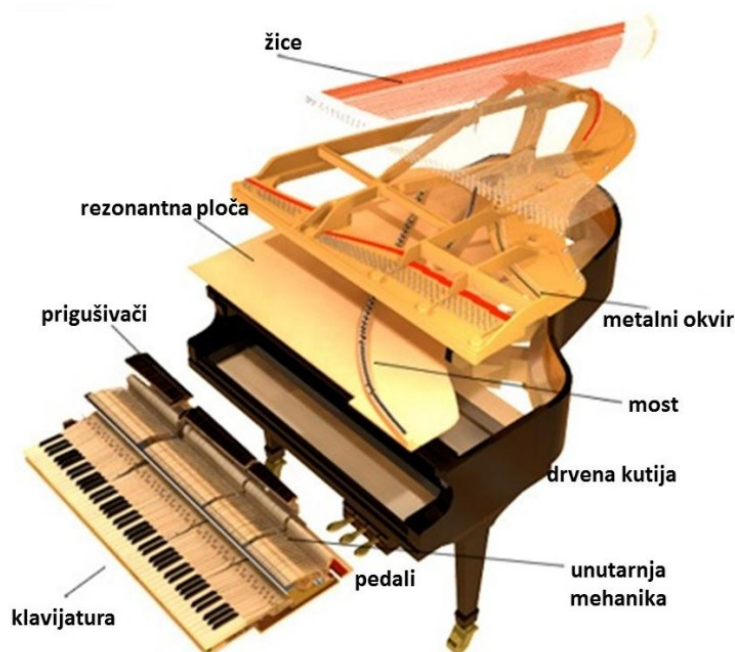


Slika 2. Dimenzije i masa klavira [3]

Prema [3] klavir je građen od oko 12 000 dijelova koji se mogu grupirati u pet glavnih mehanizama:

- klavijatura s unutarnjom mehanikom,
- okvir s razapetim žicama,
- rezonantna ploča,
- pedali,
- drvena kutija postavljena na tri noge.



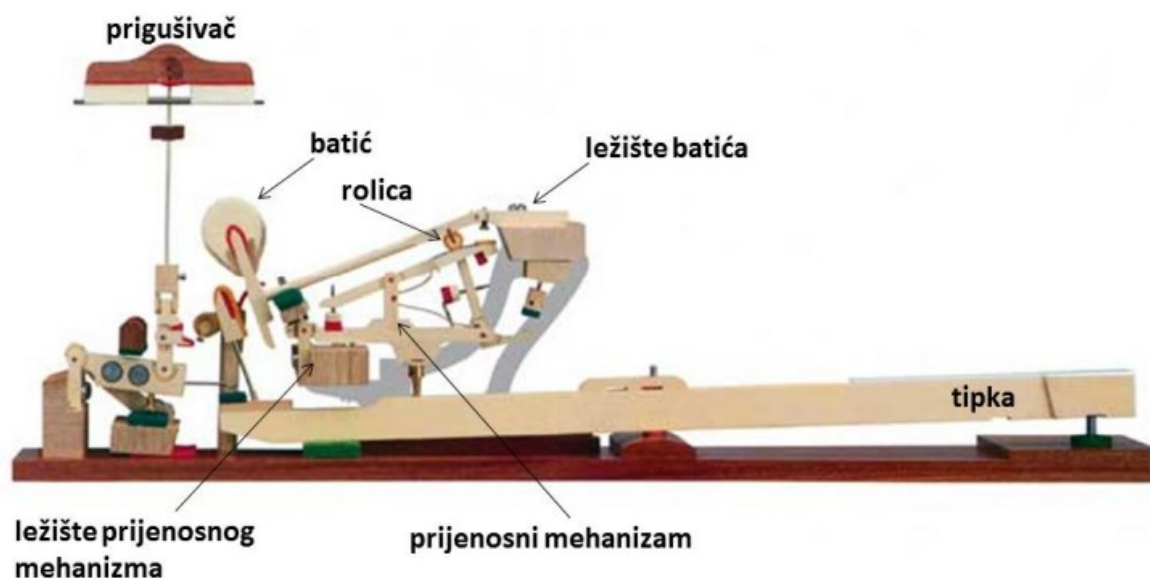


Slika 3. Eksplozirani prikaz građe suvremenog klavira [3]

Najprepoznatljiviji dio klavira je klavijatura, niz od 88 drvenih tipki, 36 crnih i 52 bijelih. Suvremeni klavir obuhvaća raspon od  $7\frac{1}{4}$  oktava, odnosno od note  $A_2$  do  $c_5$ . Tipke su danas najčešće obložene plastikom.

Unutarnja mehanika s kojom su tipke u vezi, predstavlja niz poluga kojima je cilj prenijeti snagu s tipke na niz batića koji odozdo udaraju po žicama. U drugoj polovici 18. stoljeća u upotrebi su bile dvije različite klavirske mehanike: bečka i engleska. Kod bečke mehanike vrlo lagan i mali batić je u izravnoj vezi s tipkom. Nakon što batić udari o žicu, dolazi u položaj iz kojeg je ponovni udar nemoguć, sve dok se tipka sasvim ne otpusti. Bečka mehanika je ograničena u mogućnostima brzog repetiranja tonova te je postepeno izašla iz upotrebe [3]. Nasuprot tome, engleska mehanika omogućava ponovni udar bez potpunog otpuštanja tipke što olakšava brzu repeticiju pojedinog tona. Kada se udarom prsta pritisne prednji kraj tipke, ona podigne prijenosni mehanizam koja je osovinom vezana na svoje kućište. Za vrijeme podizanja prijenosnog mehanizma, vrh udarne poluge udara rolicu koja je fiksirana na dršci batića te na taj način baca batić prema gore koji zatim udara od žicu proizvodeći zvuk. Istodobno, zub udarne poluge zakači zapinjač radi čega vrh poluge sklizne s rolice te odvaja glavu batića od žice neposredno nakon udara [3]. Zasebno, pritiskom na tipku, podiže se i poluga na kojoj leži prigušivač. Kada se tipka pritisne, prigušivač se digne te oslobodi žicu, a puštanjem tipke

prigušivač legne na žicu i priguši njezino vibriranje. Prigušivači sprječavaju miješanje i slijevanje zvukova koje bi nastalo uslijed produženog vibriranja žica [3].

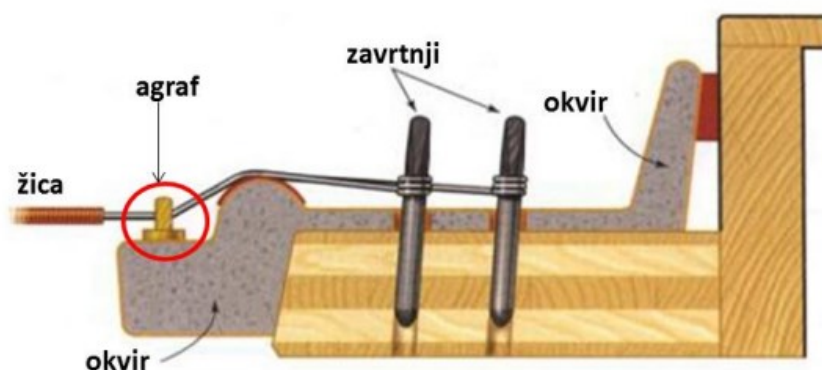


Slika 4. Prikaz građe engleske (repeticione) mehanike [3]

Na suvremenom klaviru postoje tri pedala koji se pritišću nogama. Desni pedal oslobađa prigušivače svih žica tako da svaka udarena žica nastavlja zvučati i po otpuštanju tipke, sve dok se ton prirodno ne ugasi. Srednji pedal drži podignutima prigušivače samo onih tipaka koje su u tom trenutku već oslobođeni. Lijevi pedal pomiče cijelu klavijaturu i njenu unutarnju mehaniku ulijevo tako da batić udara od manje žica čime se stvara tiši zvuk [3].

Unutar drvene kutije, u obliku krila postavljenog na tri noge, nalazi se okvir s razapetim žicama. Okvir se danas izrađuje od lijevanog željeza. Prema [3] okvir preuzima sile koja premašuju 200 kN (oko 20 tona), a kod velikih koncertnih klavira i po 300 kN (oko 30 tona), nastala zbog velikog broja napetih žica različitih duljina. Kao pojačanje, na okvir su dodana i rebra na pravcima najvećih napetosti. Klavir u prosjeku ima 230 žica, u srednjem i višem registru upotrebljavaju se i po dvije ili tri žice za jedan ton, radi ravnomjernije raspodjele glasnoće različitih registara. Žice su postavljeno dijagonalno i unakrsno što ravnomjernije raspoređuje naprezanja, ali i omogućava ravnomjernije glasnoće tonova jer je većina žica tada smještena iznad sredine rezonantne ploče. Žice su izrađene od čelika, a u donjem registru se još omotavaju i bakrenom niti [3]. Za dobivanje viših frekvencija potrebne su tanje i kraće žice. Zadnji kraj žice zakačen je za metalni klin koji je kroz filc zaboden direktno u okvir. Prednji kraj žice omotan je oko zavrtnja čijim se okretanjem, odnosno otpuštanjem i zatezanjem, mijenja

napetost žice pomoću specijalnog ključa. Zavrtnji su zabijeni u podlogu koja se naziva štimštok izrađenu od višeslojnog punog i tvrdog drveta [Slika 5]. Zvučna duljina žice, koja je kraća od stvarne duljine, polazi od okvira agrafa (u basovskom i srednjem registru) ili kapodastra (u diskantu) te završava na mostu. Most je izvijena i dugačka drvena letva koja vibriranje žica prenosi na rezonantnu ploču. Zadaća rezonantne ploče je pojačavanje glasnoće zvuka, a najčešće se izrađuje od smreke ili jelovine [3].



Slika 5. Prikaz prednjeg kraja omotane klavirske žice [3]

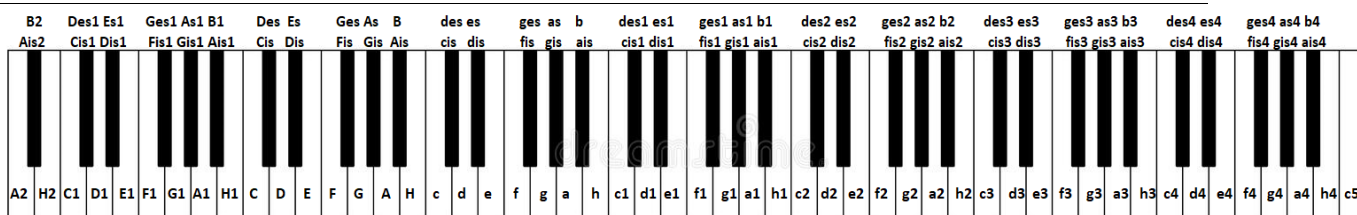
Ton klavira nakon udarca batića od žicu se vremenom stišava. Za razliku od gudačkih instrumenata gdje glazbenik pritiskom gudala može kontrolirati glasnoću zvuka, kod klavira navedeno nije moguće nakon početne uzbude žice.

### 1.3. Muzički izrazi - objašnjenja

Glazba je umjetnost zvuka te je kao takva usko povezana s akustikom, znanosti o zvuku. Dva različita polja stvorila su drugačije izraze za približno slične pojave, a objašnjenja izraza će se prikazati u ovom poglavlju.

Intonacija je psihoakustička karakteristika zvuka, tj. način na koje ljudsko uho percipira visinu zvuka. Intonacija je usko vezana s pojmom frekvencije, ali navedeni pojmovi nisu ekvivalentni. Frekvencija je fizikalna veličina koja iskazuje broj ponavljanja neke periodične pojave. Frekvencija se mjeri u hercima [Hz] što je ekvivalent recipročnoj sekundi [5].

U zapadnoj klasičnoj glazbi postoji 12 tonova unutar oktave. Označavaju se nazivima: c, cis ili des, d, dis ili es, e, f, fis ili ges, g, gis ili as, a, ais ili b, h. Svaka crna tipka ima dva naziva, a koji naziv će se upotrebljavati najčešće ovisi o tonalitetu u kojem je skladba napisana. Tonovi na klavijaturi su smješteni kao na Slika 6.



Slika 6. Razmještaj tonova na klavijaturi

Slika 6 prikazuje da se niz od 12 tonova nastavlja jednakim uzorkom kroz cijelu klavijaturu. Kako bi razlikovali u kojem registru se ton nalazi, razlikuje se veliko i malo slovo te se dodaje broj pored slova. Važno je napomenuti da se isto slovo koristi kroz više registara jer takve note ljudsko uho percipira kao isti ton u muzičkoj skali. Isto slovo u nazivu tona označava i činjenicu da se navedeni tonovi dobiju vibriranjem žica kod kojih je omjer frekvencija 2 (ili nešto veći kao što će se pokazati naknadno u radu), a omjer duljina vibrirajućih žica također 2, ukoliko su žice jednakog poprečnog profila i napravljene od istog materijala. Primjerice, nota  $a_1$  i nota  $a$  zvuče kao (oktavni) ekvivalenti. Frekvencija note  $a_1$  iznosi 440 Hz, dok je frekvencija note  $a$  približno 220 Hz što daje međusobni omjer 2.

Prema [6] interval u glazbi označava razmak između dvaju tonova. Interval se mjeri u polustepenicima. Polustepen je razmak između dva susjedna tona, npr.  $c$  i  $cis$  ili  $e$  i  $f$ . Intervali se s obzirom na razmak između tonova prema rastućem redosljedu dijele na primu, sekundu, tercu, kvartu, kvintu, sekstu, septimu i oktavu. Prima, kvarta, kvinta i oktava se nazivaju i čistim intervalima. Kvarta još može biti povećana, a kvinta snižena. Ta dva intervala su ekvivalenti, razlika je samo u teoretskom zapisu, a takav interval naziva se još i tritonusom. Sekunda, terca, seksta i septima su intervali koji mogu biti veliki ili mali, ovisno o tome koliko polustepena sadrže.

Čista prima je interval između dva identična tona, tj. takav interval u sebi ne sadrži nijedan polustepen. Čista oktava je interval koji u sebi sadrži dvanaest polustepena, što znači da je oktava zapravo razmak između dva muzički ekvivalentna tona, primjerice  $c_1$  i  $c_2$  [7].

Muzička skala ili ljestvica je naziv za graduirani slijed nota, tonova, intervala [8]. Ljestvica je najčešće ograničena intervalom oktave, a svi tonovi koji su smješteni unutar neke druge oktave onda imaju svoje ekvivalentne tonove unutar prve. Dakako, muzička skala može biti ograničena i drugačijim intervalom u području kompleksnije glazbene teorije, ali to nije tema ovog rada.

Tonalitet u glazbi predstavlja sustav harmonijske i melodijske organizacije tonova oko središnjega tona, tj. tonike. Tonika je prvi stupanj ljestvice i predstavlja ishodišnu i završnu

točku glazbenog protoka te osigurava jedinstvo skladbe ili glazbene misli. Tonalitet može biti durski ili molski, a ishodišna točka bilo koji ton [9]. Tako npr. postoje tonaliteti G-dur, cis-mol, E-dur itd.

U ovom radu će se spominjati još i pojmovi *konsonantno* i *disonantno*. Prema [10] kombinacija dva ili više istodobno odsviranih tonova koji rezultiraju skladom i stabilnošću zvuka predstavlja konsonantnost. Suzvučje koje daje osjećaj „sudaranja“, nesklada i nestabilnosti predstavlja disonancu.

#### 1.4. Ugadanje klavira

U prošlosti su glazbenici imali dosta širok spektar znanja. Trebali su znati muzicirati na više instrumenata, transponirati, improvizirati, skladati, održavati svoje instrumente te ih ugađati („štirati“). Dok gotovo svi glazbenici u današnje vrijeme i dalje sami ugađaju instrumente (npr. gitaristi, violinisti), pijanistima je to postalo gotovo pa nemoguće. Vremenom se klavijatura instrumenata s tipkama sve više povećala, tako da se od monokorda (instrumenta koji se smatra prvom pretečom klavira) sa samo jednom žicom stiglo do relativno velikog broja od 230 žica (na nekim modelima klavira i više) [3]. Upravo zbog velike kompleksnosti u građi klavira gdje je za jedno ugađanje potrebno podesiti 230 žica, tj. 88 tonova, te ih dovesti u skladnu međusobnu korelaciju, nastalo je posebno akademsko zanimanje pod nazivom klavirski tehničar („klavir-štiter“) [11].



Slika 7. Ugadanje pianina [11]

Klavirske žice su razapete između dva kraja, metalnog klina i zavrtnja, a preko prednjeg kraja (zavrtnja) postoji mogućnost kontroliranja napetosti žice [3]. Klavirski tehničar podešavanjem napetosti žica izravno utječe na frekvenciju svakog tona. U ugađanje klavira potrebno je uračunati i mala odstupanja od teoretskog standarda [11]. Klaviri se još uvijek ugađaju u velikoj zavisnosti o znanju, sluhu i iskustvu tehničara, dok različiti akustički uređaji služe kao pomagala. Zbog današnjih velikih zahtjeva za što boljom kvalitetom zvuka važno je kontinuirano nastojati poboljšavati objektivne, znanstvene i točne teoretske pristupe pri ugađanju klavira [12].

Klaviri su danas većinom ugođeni prema referentnom tonu  $a_1$  koji se još naziva i komornim ili koncertnim tonom  $a_1$ . Kroz povijest se frekvencija referentnog tona  $a_1$  podizala sve dok se nije ustalila na dogovorom postignutu frekvenciju od 440 Hz. Iako, i na današnjim klavirima, čembalima, komornim sastavima ili orkestrima se može pronaći niži ili viši ton  $a_1$  od uobičajenih 440 Hz zbog povijesnih ili estetskih razloga. Primjerice, neki od orkestara koji se posvećeni izvođenju barokne glazbe za referentni ton  $a_1$  koriste frekvenciju od 415 Hz [13].

Vibriranjem žice ili stupca zraka ljudsko uho primarno percipira fundamentalnu prirodnu frekvenciju tona. Toj prirodnoj frekvenciji odgovara fundamentalni prirodni oblik vibriranja žice. Međutim, nakon impulsne uzbude koju energija unosi u sustav jednako na svim frekvencijama, slobodne vibracije žice karakterizirane su s beskonačno mnogo drugih viših prirodnih frekvencija i pripadnih prirodnih oblika koji se nazivaju višim formama vibriranja [14].

Model slobodnog vibriranja idealne žice (bez savojne krutosti) pretpostavlja vibriranje isključivo na vlastitim frekvencijama koje su umnošci fundamentalne frekvencije i prirodnog broja. To bi značilo da takav model napete žice predviđa drugu prirodnu frekvenciju dvostruko višu od prve, treću trostruko višu od prve i tako dalje. Međutim, u praksi, klavirske žice pokazuju da omjer između druge vlastite i prve frekvencije nije jednak 2 već nešto veći.

Klavirski tehničar intonaciju nastoji uskladiti eliminiranjem ili kontroliranjem akustičkih udara koji nastaju interfiranjem dvaju tonova, engl. *acoustic beats*. Navedeno će dovesti do pojave nužnog rastezanja intervala oktave, a time i muzičke skale radi konsonantnosti [15]. Više riječi o pojavi efekta rastezanja oktave, tj. inharmoničnosti, nalazi se u poglavlju 4.

Pošto je oktava raspodijeljena na 12 polustepena, tj. 12 tonova, ugađanje instrumenta zahtijeva i kontroliranje svakog pojedinog intervala među njima. Ukoliko se klavir ugodu prema glazbeno najispravnijim omjerima u ovisnosti na jedan referentni ton (primjerice prema tonu  $a$ ), isto će dovesti do nesklada među intervalima u odnosu na neki drugi referentni ton. Kroz povijest su

se istraživale mnoge takve kombinacije intervala unutar oktave koje bi različitim aproksimacijama dopuštale muziciranje iz svih tonaliteta [16]. Više riječi o glazbenim temperamentima nalazi se u sljedećem potpoglavlju.

Zbog varijacija u tehničko – akustičkim specifikacijama svakog modela klavira i različitih pristupa kod ugađanja klavira nemoguće je postaviti jedan specifičan set frekvencija koji bi savršeno odgovarao svim modelima [15].

## 1.5. Temperamenti

### 1.5.1. Definicija temperamenta

Temperament je sistem koji određuje frekvencijsku relaciju između tonova unutar oktave, odnosno definira točan razmak u frekvencijama svih intervala [17]. Kroz povijest su se mijenjali temperamenti kako bi se muziciranje što bolje prilagodilo tadašnjim zahtjevima. Tako postoji *Just*, *Pythagorean*, *Meantone*, *Kirnberger*, *Equal* temperament i mnogi drugi.

Samo nekolicina ljudi može percipirati apsolutnu vrijednost frekvencije (intonacije), a za takve ljude kaže se da posjeduju „apsolutni sluh“. No, u pravilu, ljudi su puno više osjetljiviji na omjer među pojedinim frekvencijama, tj. na relaciju među tonovima [17]. Tako da intervali, tj. razmaci među tonovima, imaju značajnu ulogu u glazbi.

Pjevači i velika većina ostalih instrumentalista ima mogućnost mijenjanja intonacije za vrijeme izvedbe. Klavirist nema mogućnost prilagodbe intonacija tonova tijekom izvedbe zbog čega je i prijeko potreban unaprijed dobro promišljeni sistem organizacije tonova.

Prema [17] idealni temperament bi bio onaj koji ispunjava sljedeće uvjete:

- intervali uključuju one omjere koje se nalaze i u prirodnim harmonicima jednog tona,
- ekvivalentni intervali imaju jednake omjere u svim tonalitetima.

Međutim, nemoguće je istovremeno ispuniti oba uvjeta. *Just* temperament ispunjava samo prvi uvjet, *Equal* temperament ispunjava samo drugi uvjet, a svi ostali temperamenti su kompromis između navedena dva uvjeta.

Temperamenti se mogu podijeliti na otvorene temperamente, zatvorene nejednake temperamente te *Equal* temperament koji je i najzastupljeniji u današnjoj praksi muziciranja [17]. Povijesno najstariji su otvoreni temperamenti. To su oni koji sadrže čiste intervale *Just* temperamenta u jednoj ili više muzičkih ljestvica, ali su posljedično neupotrebljivi u drugima. Potreba za modulacijom u udaljenije tonalitete rezultirala je koncipiranjem zatvorenih nejednakih temperamenata i *Equal* temperamenta. Kod takvih sustava postoje devijacije od

čistih intervala *Just* temperamenta u svim tonalitetima tako da nijedan tonalitet nije posve točan, ali su svi upotrebljivi [17].

Za ugađanje klavira najvažniji intervali su konsonance. Konsonancama se u glazbi smatraju intervali prime, terce, kvinte, sekste i oktave. Konsonantnost se postiže minimiziranjem ili potpunom odsutnošću akustičkih udara [18]. Interval prime predstavlja odnos između frekvencija identičnih tonova, a omjer njihovih frekvencija je 1:1. Interval prime se smatra i apsolutnom konsonancom zbog potpunog odsustva akustičkih udara. Oktava je u različitim temperamentima uvijek jednaka i ima omjer frekvencija 2:1. Interval kvinte je promjenjiv kroz temperament, a čista kvinta prema *Just* temperamentu ima omjer 3:2. Intervali velike terce (5:4) i velike sekste (5:3) su također izuzetno bitne pri ugađanju [17]. Ostale konsonance, tj. kvarta, mala terca i mala seksta, mogu biti izvedene iz prethodno navedenih intervala inverzijom, odnosno transponiranjem nižeg tona za oktavu gore. Primjerice, interval kvinte C-G rezultirat će kvartom G-C u inverziji. Svaka konsonanca kako bi zvučala čisto i skladno treba biti izražena preko jednostavnijih omjera kao ranije navedenih, a svako malo odstupanje od navedenog omjera rezultira akustičkim udarima i disonantnošću što ljudsko uho percipira kao neusklađenost ili „neštimanje“. Zbog toga je bitno da intervali kvinte, terce i sekste zvuče što pravilnije moguće, a ukoliko imaju devijaciju od čistih omjera *Just* intonacije (objašnjena u potpoglavlju 1.5.3) najbolje je da takvo odstupanje bude što manje ili čak neprimjetno ljudskom uhu.

Nasuprot tome, disonantnost je karakterizirana izrazitim akustičkim udarima. U intervale disonanci spadaju sekunda, septima te povećana kvarta (tritonus). Takvi intervali će uvijek zvučati disonantno, tj. malim odstupanjima u omjeru frekvencija ne može se postići konsonantnost bez obzira na odabir temperamenta tako da oni nemaju veliku ulogu u ugađanju instrumenta [18].

Jedinica kojom se može opisati razmak između dvije intonacije je cent. To je logaritamska jedinica za mjerenje omjera između dviju frekvencija. Najčešće se koristi za izražavanje malih intervala ili za usporedbu veličina intervala u različitim temperamentima [19]. Jedna oktava sadrži 1200 centa, a takva podjela ima smisla jer se oktava sastoji od 12 tonova.

U ovom poglavlju zanemarit će se efekt rastezanja oktave pri ugađanju klavira te će se pretpostaviti da oktavu određuju dva tona kojima je omjer frekvencija jednak 2. Omjer frekvencija koje su udaljene za jedan cent iznosi  $^{1200}\sqrt{2}$ . Ukoliko su poznate frekvencije dvaju tonova, onda se može odrediti koliko njihov interval sadrži centa pomoću sljedećeg izraza:



$$c = 1200 \cdot \log_2 \frac{f_v}{f_n}, \quad (1)$$

gdje  $f_v$  predstavlja frekvenciju višeg tona te  $f_n$  frekvenciju nižeg tona. Dosta često se temperamenti ne definiraju apsolutno zadanim frekvencijama pojedinih tonova već omjerima među frekvencijama [19].

Sljedeće potpoglavlje prikazuje odrednice *Equal* temperamenta, jedinog temperamenta koji je u današnjoj primjeni.

### 1.5.2. *Equal temperament*

Najbitnija značajka *Equal* temperamenta je u tome što predviđa sve polustepene jednakog razmaka. Pošto oktava sadrži 12 polustepena, a oktava je u omjeru 2:1, to znači da će omjer svakog od polustepena biti  $R = \sqrt[12]{2} = 1.05946$ . Omjer frekvencija intervala unutar oktave može se dobiti potenciranjem navedenog omjera jednog polustepena:

$$R^n = (\sqrt[12]{2})^n, \quad (2)$$

gdje je  $n$  cijeli broj koji predstavlja veličinu intervala. Ekvivalentni brojevi  $n$  za svaki pojedini interval može se pronaći u Tablica 1.

Svaki polustepen sadrži točno 100 centa. [17]

Frekvencija višeg tona u intervalu može se odrediti pomoću sljedeće jednadžbe:

$$f_v = f_n \cdot R^n, \quad (3)$$

*Equal* temperament ispunjava samo jedan od dva uvjeta koje bi idealni temperament trebao imati. Ekvivalentni intervali imaju jednake omjere u svim tonalitetima, ali intervali odstupaju od omjera koji se nalaze u prirodnim harmonicima jednog tona. U slučaju *Equal* temperamenta svaka kvinta je snižena za 1/12 sintoničkog zarez (više u potpoglavlju 1.5.4), ali je ta razlika neistreniranom uhu gotovo pa neprepoznatljiva, tj. svaka kvinta zvuči poprilično konsonantno [20]. Po nekim istraživanjima kvinta prema *Equal* temperamentu mnogima zvuči prirodnije nego savršena kvinta omjera 1.5 koja se nalazi u prirodnim harmonicima tona. To je najvjerojatnije zbog toga što je *Equal* temperament jedini temperament u upotrebi već generacijama te su se glazbenici priviknuli na takav neznatno promijenjeni omjer. Radi usporedbe kvinta je u *Equal* temperamentu omjera 1.49831 što ne odstupa mnogo od savršeno čiste kvinte omjera 1.5.

Štoviše, odstupaju i ostali intervali. Primjerice, velika terca prema *Equal* temperamentu je omjera 1.25992 što je poprilično veći iznos od velike terce prema *Just* temperamentu koja ima omjer 1.25 [17].

U razdoblju baroka uz dobro ugođene temperamente poneki glazbenici su odlučivali ugađati instrumente po *Equal* temperamentu. Prema [20] u 17. stoljeću *Equal* temperament nije bio toliko zastupljen zbog favorizacije dobro ugođenih temperamenata (potpoglavlje 1.5.6). Na početku se *Equal* temperament većinom koristio na gudačkim instrumentima, a svoju primjenu je tijekom druge polovice stoljeća našao i na instrumentima s tipkama. Postojanjem raznih aktivno korištenih temperamenata skladatelj nije mogao osigurati autentičnu izvedbu djela. Pod tim argumentom (ali i mnogim drugim) tijekom 18. stoljeća sve više glazbenika počelo je zastupati *Equal* temperament kao jedinog ispravnog. U 19. stoljeću manifestirala se jasna preferencija za *Equal* temperamentom [20]. No, nepostojanje akustičkih uređaja u 19. stoljeću koji bi pripomogli pri ugodbi instrumenta je znatno otežavalo ispravno ugađanje kvinti po *Equal* temperamentu. Tek u 20. stoljeću može se tvrditi da je ugodba prema navedenom temperamentu postala zaista „jednolika“.

U sljedećim potpoglavljima prikazat će se karakteristike i povijesni razvoj temperamenata koji su rezultirali današnjim *Equal* temperamentom.

### 1.5.3. *Just temperament*

Kao što je ranije spomenuto, zvuk nastao slobodnim vibriranjem žice uz svoju fundamentalnu frekvenciju na prvoj formi vibriranja sadrži i brojne druge harmonike na višim frekvencijama. Frekvencije harmonika (u slučaju napete idealne žice bez savojne krutosti) mogu se dobiti jednadžbom:

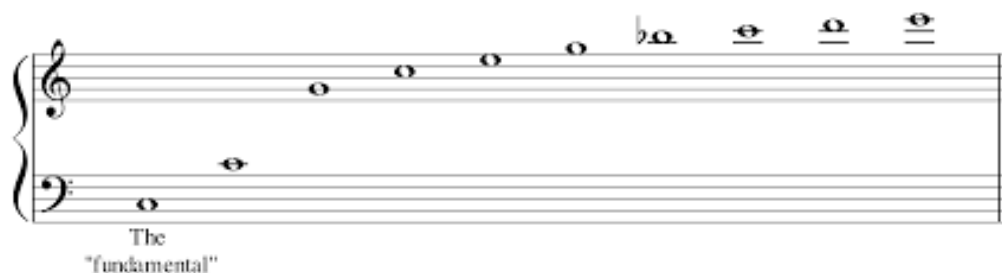
$$f_i = i \cdot f_1, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (4)$$

gdje je  $f_i$  frekvencija na  $i$ -toj formi vibriranja, a  $f_1$  označava fundamentalnu frekvenciju.

Viši harmonici se odlično slažu jedni s drugima i s fundamentalnim tonom, a zvuče prirodno i neusiljeno. Zbog toga bi bilo odlično organizirati intervale upravo prema takvim omjerima koje imaju i viši harmonici međusobno [17].

Prema [17] promatranjem odnosa prvog višeg harmonika i fundamentalnog tona može se uočiti da im je omjer frekvencija 2:1 što predstavlja čistu oktavu. Omjer između frekvencija drugog harmonika i prvog iznosi 3:2 što predstavlja čistu kvintu. Frekvencija trećeg harmonika i drugog dat će odnos 4:3 što predstavlja čistu kvartu. Frekvencije zvukova koje tvore veliku tercu imaju

odnos 5:4. Takav odnos se postiže između četvrtog i trećeg harmonika. Relacija između petog i četvrtog harmonika predstavljat će malu tercu u *Just* temperamentu. Nadalje, promatranjem idućih harmonika može se izvesti i velika sekunda koja je omjera 9:8.



Slika 8. Prikaz nekoliko viših harmonika kod fundamentalnog tona c

Takve je skladne odnose među tonovima istraživao i Pitagora još u antičkoj Grčkoj. Eksperimentom na monokordu istraživao je pri kojim se omjerima dobiju skladni tonovi te tako otkrio oktavu i kvintu. Monokord je instrument s jednom žicom napetom između dva kraja kod kojeg se pomoću pomičnog mostića može varirati zvučna duljina žice. Pitagora je ne poznavajući pojavu harmonika u fundamentalnom tonu do takvih otkrića došao vjerujući da u pozadini svih svjetovnih pojava stoji matematika i geometrija. Time je zauvijek promijenio povijesni tijek razvitka glazbe i glazbene misli te postavio temelje koji vrijede i danas [21].

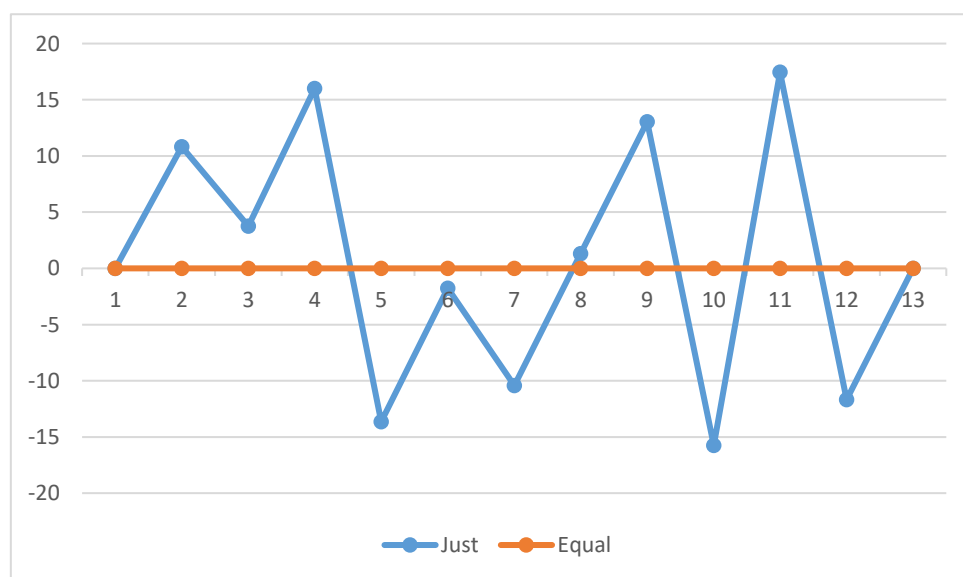
Najveći problem kod ovakvog temperamenta je što ukoliko se postave čisti intervali prema nekom referentnom tonu, primjerice tonu c, on je „naštiman“ samo prema tome referentnom tonu dok ostali odnosi s drugim referentnim tonovima će biti distorzirani i neće zvučati skladno. Odnosno moguće je svirati u limitiranom broja tonaliteta što značajno ograničava skladanje i muziciranje. *Just* intonacija je bitna samo iz teoretskog aspekta dok u praksi nikada nije poslužila kao osnova za ugađanje instrumenta.

*Just* temperament ne daje omjere svih 12 intervala unutar oktave, ali dijeljenjem ili inverzijom prethodno navedenih intervala mogu se izvesti i preostali intervali. Tablica 1 prikazuje omjer frekvencija u intervalima *Just* temperamenta [22].

Tablica 1. Omjeri frekvencija u intervalima prema *Just* temperamentu

1	Čista prima	1/1
2	Mala sekunda	16/15
3	Velika sekunda	9/8
4	Mala terca	6/5
5	Velika terca	5/4
6	Čista kvarta	4/3
7	Tritonus	45/32
8	Čista kvinta	3/2
9	Mala seksta	8/5
10.	Velika seksta	5/3
11	Mala septima	9/5
12	Velika septima	15/8
13	Čista oktava	2/1

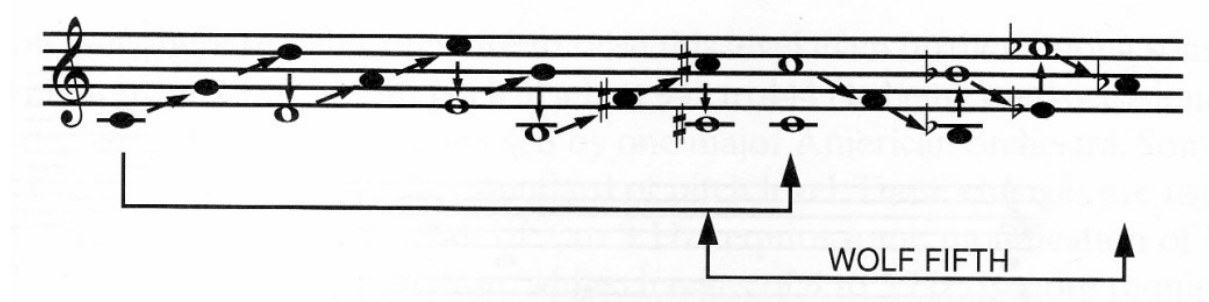
Usporedba *Just* i *Equal* temperameta prikazana je na sljedećem grafu. Korišteni su centi kao mjerna jedinica za prikaz razlike u veličinama ekvivalentnih intervala iz navedena dva temperameta. Vodoravna os je označena numerirano gdje pojedini broj na vodoravnoj osi označava onaj interval koji je pod istim brojem naveden u Tablica 1.

Slika 9. Usporedba *Just* i *Equal* temperameta u centima

### 1.5.4. *Pythagorean temperament*

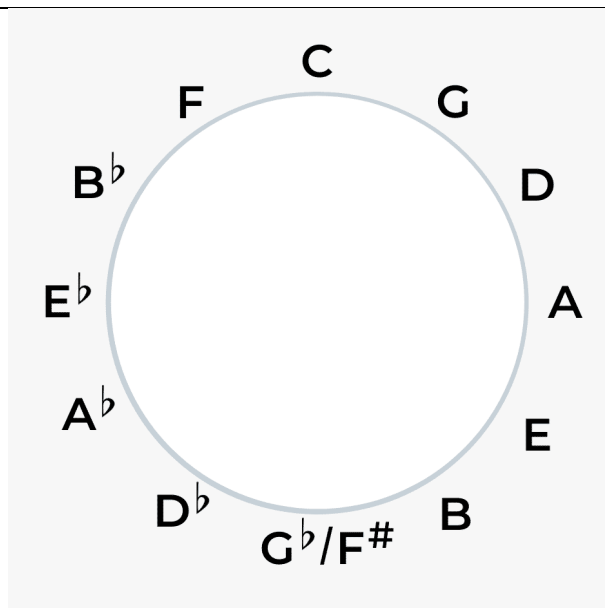
Pitagorini učenici nastavili su njegova istraživanja te su osmislili sustav organizacije tonova danas zvan *Pythagorean* temperamentom. Takav temperament je prvi u praksi korišteni temperament koji se bazira na 12 polustepena unutar oktave [17]. *Pythagorean* temperament se bazira na gradnji pomoću čistih kvinti omjera 3:2 iz *Just* intonacije. Omjer 3:2 je dosta jednostavan što olakšava ugađanje pa se čista kvinta, najkonsonantniji interval poslije prime i oktave, relativno lako može točno ugoditi i bez posebnih uređaja.

Na početku je potrebno odabrati referentni ton od kojeg će se početi graditi intonacija. Zatim, od tog tona gradi se kvinta prema gore i kvinta prema dolje te se pazi da omjer između frekvencija bude 1.5, a to se bez specijalnih uređaja može postići eliminiranjem akustičkih udara. Svakom tonu se vrlo jednostavno može odrediti i njegov oktavni ekvivalent. Tako da kada neka od izgrađenih kvinti prijeđe oktavni rang u kojem temperiramo instrument lako je „spustiti“ ili „podignuti“ ton u onu oktavu koja je nama potrebna. Slika 10 prikazuje jedan od mogućih načina kako ugoditi instrument u *Pythagorean* temperamentu. U ovom slučaju referentni, odnosno početni ton je ton c.



**Slika 10.** Prikaz jednog od načina izgradnje *Pythagorean* temperamenta počevši od referentnog tona c [17]

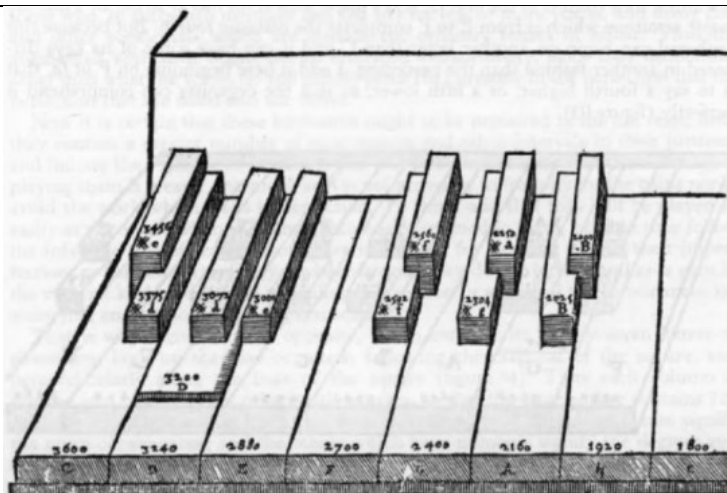
Temperament se zapravo onda gradi prema tzv. kvintnom krugu. Kvintni krug je grafički prikaz svih 12 kromatskih tonova koji se dobije tako da se od početnog tona konstantno gradi čista kvinta prema gore ili čista kvarta prema dolje.



Slika 11. Kvintni krug

Problem kod *Pythagorean* temperamenta je što se gradnjom čistih kvinti s omjerom 1.5 kvintni krug ne može zatvoriti. Početni i završni ton se neće poklopiti u frekvenciji, a trebali bi. Time je kvintni krug narušen. Frekvencija završnog tona u ovom temperamentu će biti veća od početnog za iznos koji se naziva sintonički (pitagorejski) zarez [17].

To znači da će u teoriji postojati više od dogovorenih 12 tonova. Instrumentima i ljudskom glasu kojem je omogućeno lako mijenjanje frekvencija tijekom izvedbe ovakva pojava neće predstavljati preveliki problem. No, instrumentima s tipkama kod kojih postoji fiksni raspored frekvencija svakog tona, nije lako pronaći rješenje. Neki graditelji instrumenata su se kasnije dosjetili da za jedan ton mogu postaviti i dvije frekvencije, a mjestom udara na tipku kontrolira se koja će frekvencija zazvučati kako bi se osigurali pravilniji odnosi među tonovima. Ali, važno je napomenuti da su takve konstrukcije dosta kompleksne i nepraktične što utječe na povećanu cijenu, a izvođačima dodatno kompliciraju izvedbu [21].



Slika 12. Instrument s 18 tipki unutar oktave [21]

Takav sintonički (pitagorejski) zarez može se uočiti i ako se prouči odnos između omjera koji se dobije slaganjem oktava i slaganjem kvinti jedne na drugu [17]. Slaganjem 12 kvinti omjera frekvencija 1.5 omjer između završnog i početnog tona iznositi će  $\left(\frac{3}{2}\right)^{12} = 129.75$  dok će slaganjem 7 oktavi omjera frekvencija 2, omjer između završnog i početnog tona iznositi  $2^7 = 128$ .

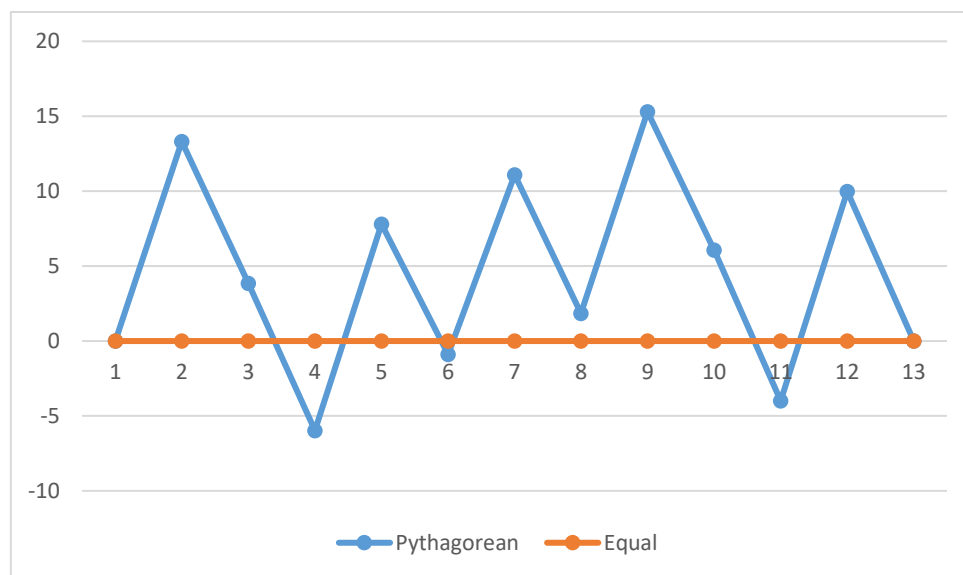
Kao što se prethodno spomenulo oktava je bazični interval te je stoga nepromjenjiva u svim temperamentima, a između svih ekvivalentnih tonova treba biti omjera 2:1. Pošto interval oktave ima prioritet u glazbi, jedino što preostaje u ovom slučaju je sniziti interval posljednje ugođene kvinte. Zbog toga se sva distorzija ili pogreška u ugađanju nakuplja na jedno mjesto. Odnosno, kod *Pythagorean* temperamenta posljednja kvinta preuzima cijelu „pogrešku“ sintoničkog zarez, a ne kao kod *Equal* temperamenta gdje se pogreška rasporedila na svih 12 kvinti u kvintnom krugu [17].

Sniženi interval kvinte se u *Pythagorean* temperamentu naziva *wolf fifth*. Omjer frekvencija *wolf* kvinte je 1.47981 što je poprilično daleko od savršenog omjera kvinte iznosa 1.5 te stoga zvuči vrlo neusklađeno, gotovo pa neiskoristivo. Glazbenici toga razdoblja su stoga izbjegavali one tonove koji su dio *wolf* intervala te su koristili limitirani izbor muzičkih ljestvica [17].

Također, dodatan problem stvara što dok se pazi na savršene omjere među kvintama pate omjeri drugih konsonantnih intervala. Primjerice frekvencijski omjer velikih terci prema *Pythagorean* temperamentu iznosi 1.26563, a kod fundamentalnog tona *wolf* intervala velika terca je omjera 1.2485. Obje veličine su značajno udaljene od savršenog omjera velike terce od 1.25 iz *Just* temperamenta i zvuče neprirodno [17]. Većina skladbi iz toga perioda je počinjala i završavala

s kvintom kao jedinim čistim intervalom uz oktavu, a terce su se često koristile kao sredstvo napetosti koje traži svoje rješenje, upravo zbog navedene distorzije [20].

Usporedba *Pythagorean* i *Equal* temperamenta prikazana je na sljedećoj slici. Korišteni su centi kao mjerna jedinica za prikaz razlike u veličinama ekvivalentnih intervala iz navedena dva temperamenta, a brojevi na vodoravnoj osi označavaju interval koji je pod ekvivalentnim brojem označen u Tablica 1.



Slika 13. Usporedba *Pythagorean* i *Equal* temperamenta u centima

Usporedba *Pythagorean* i *Equal* temperamenta i sve naknadne usporedbe temperamenata dobivene su eksperimentalnom metodom mjerenjem frekvencija sinusnih valova pojedinih tonova na električnom klaviru pomoću analizatora spektra.

### 1.5.5. *Meantone temperament*

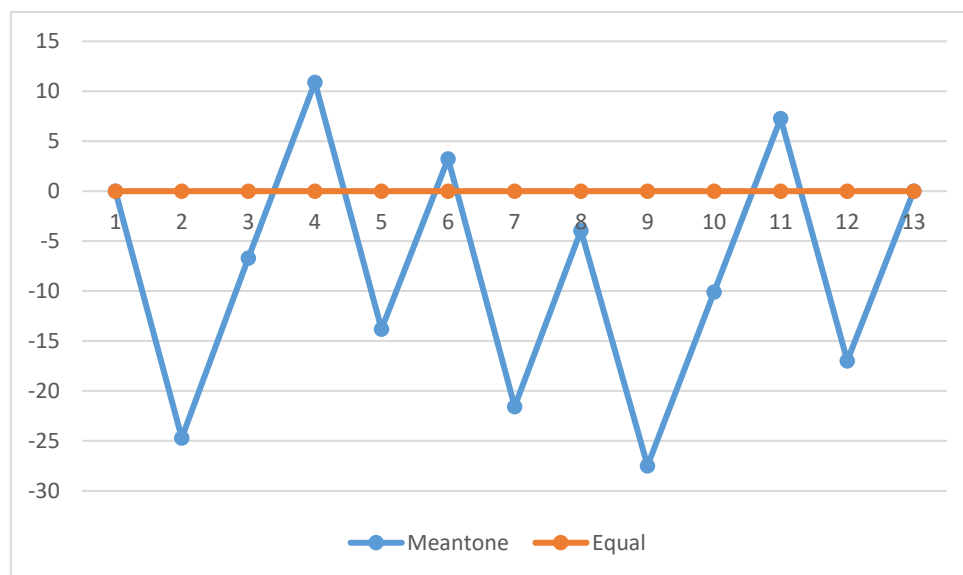
Dolaskom razdoblja renesanse počeo se upotrebljavati sistem organizacije tonova pod nazivom *Meantone* temperament. Takav temperament omogućio je veću čistoću konsonantnih intervala u polifoniji. Polifonija, tj. glazbeni slog koji se sastoji od dviju ili više samostalnih melodijskih dionica, je jedna od najvažnijih odrednica renesansne glazbe. U ponekim skladbama doseglo se čak i do osmeroglasja tako da je razvitak novog čišćeg temperamenta bio nužan. Do takvog razvitka nije se došlo preko noći, već je to rezultat truda mnogih glazbenika koji su eksperimentirali s intonacijom tijekom 15. stoljeća [20].

Za razliku od *Pythagorean* temperamenta, *Meantone* favorizira čistoću intervala terce, a ne kvinte. Postojalo je više različitih *Meantone* temperamenta ovisno o tome kolika je devijacija



od čiste kvinte omjera 1.5. Ekstreman slučaj je  $1/4$  *Meantone* temperament koji koristi savršeno čisti omjer terci, što znači da je devijacija od prave kvinte u tom slučaju najveća. Terce su u renesansi zbog toga smatrane „dražesnim“ intervalom koji nije stvarao tenziju te ne traži svoje rješenje. Terca je često bila smještena na početku i završetku djela [20].

No, kao i u *Pythagorean* temperamentu *wolf* interval i dalje postoji, a zbog toga je muziciranje ograničeno te se takvi intervali izbjegavaju u skladbi [20].



Slika 14. Usporedba *Meantone* i *Equal* temperamenta u centima

### 1.5.6. *Dobro ugođeni temperamenti*

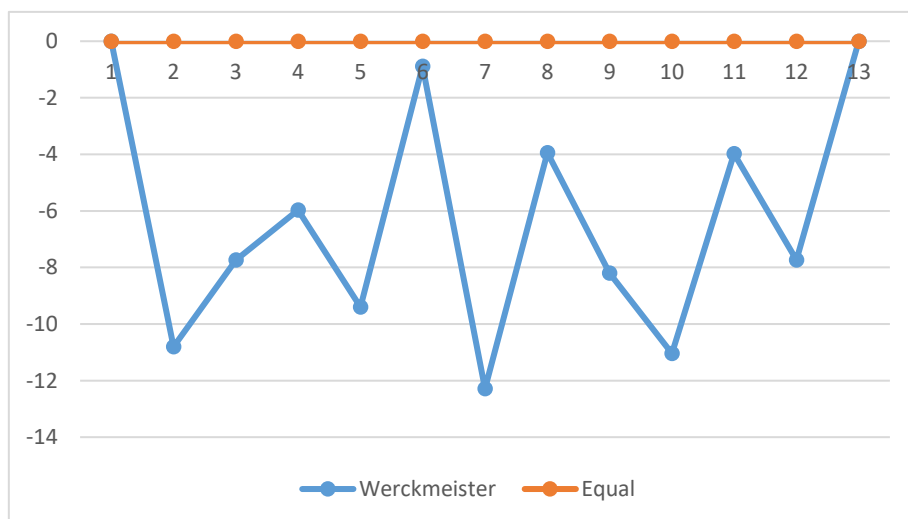
Tijekom 17. stoljeća novi suvremeniji zahtjevi u glazbenom izražaju u razdoblju baroka doveli su do pojave dobro ugođenih temperamenata. U ovakvim temperamentima moguće je u većoj ili manjoj mjeri muzicirati iz svih tonaliteta, ali svaki tonalitet ima svoju posebnu „boju“. To se postizalo različitim aproksimacijama u čistoći konsonantnih intervala. Ekvivalentni intervali imaju različite odnose ovisno o tonalitetu, te stoga zvuče različito [23].

Zbirka *Das Wohltemperierte Klavier I* (Dobro ugođeni klavir I) Johanna Sebastiana Bacha ima vrlo veliku povijesnu važnost jer je to zbirka od 24 preludija i fuga skladanih u svim tonalitetima. To je jedan od dokaza da su glazbenici toga razdoblja iz jedne ugodbe instrumenta mogli muzicirati u svim tonalitetima. Naravno, neki tonaliteti su bili prikladniji od drugih, ovisno o tonu od kojeg se ugađao instrument. Najprikladnije je bilo temperirati instrument prema tonalitetu u kojem je izvođena skladba napisana tako da su moguće što udaljenije modulacije u različite druge tonalitete koje će i dalje zvučati poprilično „lijepo“ [20].

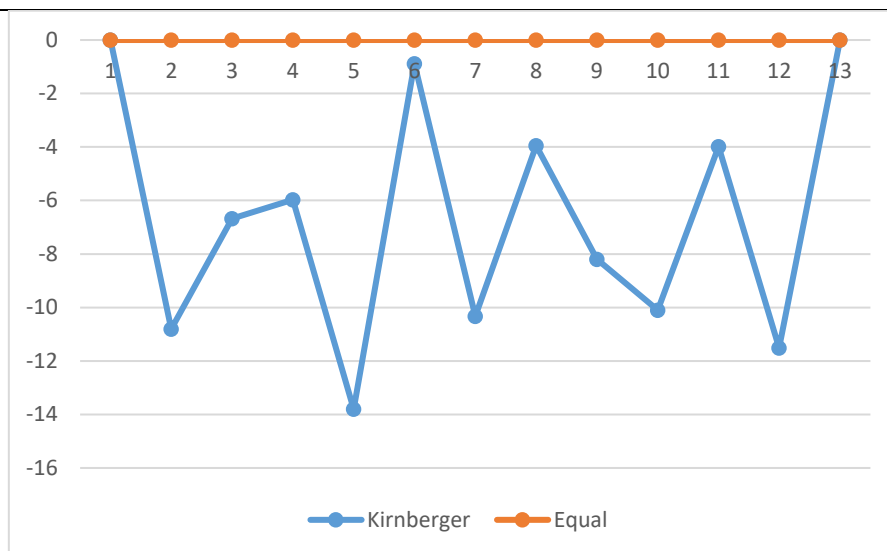
Sintonički zarez u ovakvim temperamentima više ne postoji jer je različitim aproksimacijama (ovisno o temperamentu) intervala kvinte nestala. Nijedna ili većina kvinti neće zvučati savršeno, ali su sve upotrebljive [23].

Neki od najpoznatijih dobro ugođenih temperamenata su:

- Werckmeister
- Kirnberger
- Kellner
- Vallotti
- Young
- Neidhardt



Slika 15. Usporedba *Werckmeister* i *Equal* temperamenta u centima



Slika 16. Usporedba *Kirnberger* i *Equal* temperamenta u centima

## 2. VIBRACIJA ŽICE

### 2.1. Povijest istraživanja vibracija žice

Za proizvodnju zvuka u kordofonskim instrumentima posebno je važno razumjeti fizikalne zakonitosti pri vibriranju žice. Kroz povijest su mnogi matematičari i fizičari proučavali te fizikalne zakonitosti [24].

U 6. st. pr. Kr. grčki filozof i matematičar Pitagora, sukladno njegovim stajalištem da se sva zapažanja mogu svesti na matematičke relacije, ispitivanjima vibriranja napete žice spoznao je ovisnost visine tona o duljini žice. Konstante u njegovim istraživanjima vibriranja su bile debljina i materijal žice te sila kojom je ona napeta. Ustanovio je da dvostruko dulja žica pri istoj napetosti ima za jednu oktavu niži ton [25].

Na prijelazu 16. i 17. st. Galileo Galilei utvrdio je da frekvencija karakterizira visinu tona, te da interval između dva tona ovisi o omjeru frekvencija. Omjer frekvencija kod oktave iznosi 2, a kod kvinte 1.5.

Prema [24] 1713. god. B. Taylor je uspio proračunati frekvenciju napete žice. J. Wallis i J. Sauver su utvrdili da napeta žica vibrira na raznim formama vibriranja. Oko 1750. god. J. R. D'Alambert je izveo diferencijalnu jednadžbu vibriranja žice. Osobite doprinose razumijevanju vibriranja napete žice dala su i istraživanja matematičara Josepha Fouriera.

Matematičari Leonhard Euler i Daniel Bernoulli izveli su diferencijalnu jednadžbu poprečnog vibriranja greda gdje su razmtrali rješenja jednadžbe za male pomake. S. P. Timošenko i R. D. Mindlin usavršili su analizu vibriranja greda, ploča i ljuski [24].

### 2.2. Podjela vibracija prema načinu pobude

Vibracije se prema načinu pobude, tj. načinu dovođenja enerije u sustav, dijele na slobodne i prisilne.

Slobodne vibracije su vibracije kod kojih se sustav izbaci iz ravnotežnoga stanja i prepusti sam sebi. Kod takvih vibracija postoji samo inicijalna uzbuda odnosno na početku je unesen poremećaj u sustav te nema daljnjeg utjecanja vanjskih sila na sustav. Prisilne vibracije su vibracije nastale utjecajem trajne uzbudne ili poremećajne sile koja dovodi energiju u sustav. Takva uzbudna ili poremećajna sila je vremenski promjenjiva, odnosno funkcija je vremena [24].

Kod slobodnih vibracija sustavi će vibrirati na prirodnim (vlastitim) frekvencijama jer nikakva vanjska sila ne djeluje kontinuirano na njih [24]. Takva se pojava može uočiti kod kordofonskih (žičanih) glazbala kod kojih zvuk nastaje trzanjem žice (gitara, harfa, čembalo, mandolina) ili udarcem batića od žicu (klavir, dulcimer), kod membrafonskih glazbala na kojima se zvuk proizvodi udaranjem (bas-bubanj, doboš, timpani) te kod idiofonskih glazbala na kojima se zvuk proizvodi udaranjem (zvono, gong, marimba) ili trzanjem (drombulja).

Kod prisilnih vibracija frekvencija sustava ovisi o frekvenciji vanjske kontinuirane sile uzbude. Ukoliko je frekvencija vanjske sile jednaka vlastitoj frekvenciji sustava nastaje rezonancija, tj. amplificiranje zvuka [24]. Prisilne vibracije se koriste kod svih aerofonskih glazbala, kordofonskih glazbala kod kojih se zvuk proizvodi povlačenjem gudala preko žica (violina, violončelo, kontrabas), membranofonskih glazbala kod kojih se zvuk proizvodi trljanjem štapa o membranu (zambomba, Reibtrommel), idiofonskih glazbala kod kojih se zvuk proizvodi treskanjem (čegrtaljka, klepetaljka) i struganjem ili trljanjem (tzv. glasharmonika).

### 2.3. Osnovne karakteristike vibracija

Vibracija je periodično gibanje čestica elastičnog tijela ili medija oko ravnotežnoga položaja, prouzrokovano poremećajem u obliku vanjske sile ili otklona iz ravnotežnog položaja. [26]

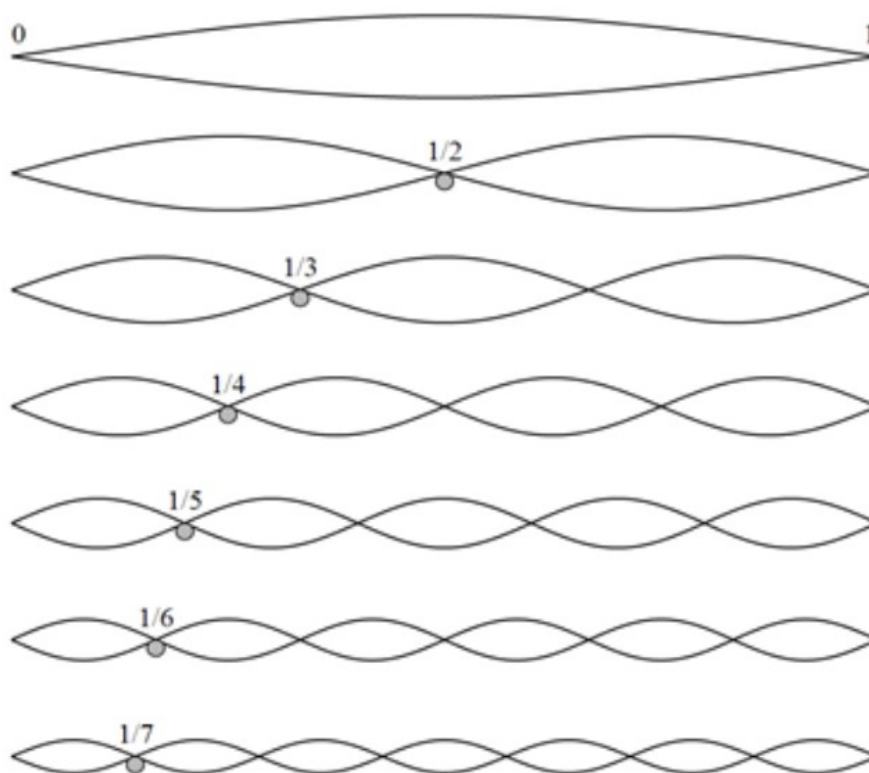
Pojam oscilacije sustava označava periodično gibanje sustava na bilo kojoj amplitudi dok su vibracije mehaničke oscilacije sustava s malim amplitudama. Za vibracije napete žice, štapa i membrane koristi se i pojam titranje [24]. Kod muzičkih instrumenata vibracije su nužna pojava za stvaranje zvuka.

Kao što je već napomenuto frekvencija je fizikalna veličina koja iskazuje broj ponavljanja neke periodične pojave. Jednaka je recipročnoj vrijednosti trajanja jednog perioda  $T$ . Frekvencija se mjeri u hertzima [Hz] što je također ekvivalent recipročnoj sekundi. Kružna frekvencija je veličina kojom se kod periodičkih pojava izražava brzina promjene faznog kuta. Jednaka je umnošku frekvencije i konstante  $2\pi$ . Kružna frekvencija izražava se u rad/s [5]. Amplituda je maksimalni pomak iz ravnotežnog položaja čestice ili tijela. Mjeri se u metrima [27].

Mjesta na kojima je amplituda jednaka nuli nazivaju se čvorovima, a tamo gdje je maksimalna trbusima. Pošto je žica na krajevima učvršćena na njenim krajevima se stvaraju čvorovi [28].

Na krajevima učvršćena, napeta žica može izvoditi transverzalne mehaničke titraje, okomito na smjer žice [28]. Kada žica zavibrira, ona vibrira na fundamentalnoj frekvenciji, ali i na višim frekvencijama. Ukoliko je žica puštena da slobodno vibrira, ona će vibrirati na vlastitim

frekvencijama. Prirodna, tj. vlastita frekvencija je frekvencija pri kojoj sustav nastoji oscilirati u odsutnosti pogonske ili prigušujuće sile. Kod modela napete idealne žice (bez savojne krutosti) više forme vibriranja će biti na frekvencijama koje su umnožak fundamentalne frekvencije i prirodnog broja. Odnosno, druga prirodna frekvencija dvostruko je viša od prve, treća je trostruko viša od prve i tako dalje. Takvih frekvencija ima beskonačno mnogo, a nazivaju se još i harmonicima [29].

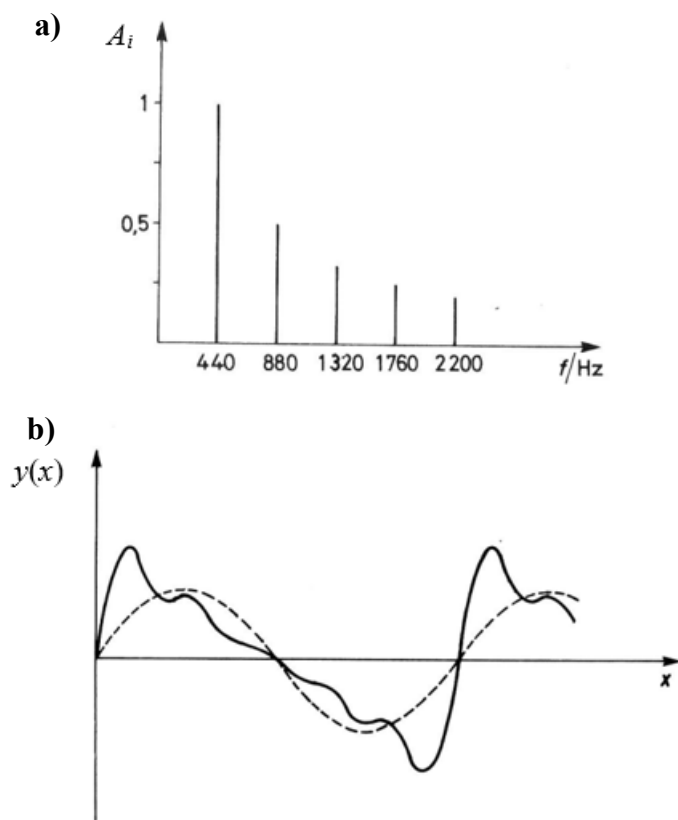


Slika 17. Različite forme vibriranja žice [30]

Pošto napeta žica titra s više vlastitih frekvencija, funkcija koja opisuje pomak čestica žice je superpozicija svih vlastitih titraja i opisuje se idućom jednačinom:

$$w(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} (A_i \cos(\omega_i t) + B_i \sin(\omega_i t)) \sin(k_i x) \quad (5)$$

Boja tona koja se dobiva vibriranjem žice ovisi o primjesama viših harmonika, tj. o relativnoj veličini pojedinih  $A_i$  i  $B_i$  [31].



Slika 18. a) udjel harmonika kod tona s fundamentalnom frekvencijom 440 Hz, b) usporedba čistog sinusa (crtkana linija) i tona koji ima više harmonike (puna linija) [31]

### 3. AKUSTIČKI UDARI

#### 3.1. Računanje frekvencije akustičkih udara

Ukoliko u jednom mediju djeluju dva signala različitih frekvencija dogodit će se mnoge zanimljive pojave. Interferencija dvaju zvučnih signala proučava se njihovim superponiranjem (superpozicijom), tj. zbrajanjem. Princip superpozicije predstavlja načelo prema kojemu je ukupni odziv nekog sustava uzrokovan s dvije ili više različite uzbude jednak sumi odziva uzrokovanih svim pojedinačnim uzbudama individualno [32]. Kod valnih pojava princip superpozicije glasi: pomak čestice uzrokovan interferencijom dvaju zvučnih signala na nekom mjestu je jednak sumi pomaka te čestice ako bi ta dva signala djelovala neovisno jedno o drugom. Pomak čestice iz ravnotežnog položaja može biti negativan i pozitivan pa se suma računa vektorskim zbrajanjem. Princip superpozicije može se primijeniti ukoliko interferiraju signali jednakih tipova (npr. elektromagnetski signali, zvučni signali) i ukoliko se signali šire u mediju koji se ponaša linearno i koji je vremenski nepromjenjiv [33].

U sljedećem primjeru prikazat će se interferencija dvaju zvučnih signala koji su približno slične frekvencije, tj. razlika u njihovim frekvencijama je mala. Promatra se interferencija dvaju signala čije jednadžbe izgledaju ovako:

$$y_1 = A_1 \cos(2\pi f_1 t), \quad y_2 = A_2 \cos(2\pi f_2 t), \quad (6)$$

gdje su  $y_1$  [m] i  $y_2$  [m] transverzalni pomaci čestica u ovisnosti u vremenu  $t$  [s]. Amplitude  $A_1$  i  $A_2$  pojedinih signala izražene su u metrima, a frekvencije  $f_1$  i  $f_2$  u hertzima (Hz). Uvest će se pojednostavljenje da su amplitude od dva signala jednake, tj.  $A_1 = A_2 = A$ . Također, kao što je ranije navedeno, pretpostavit će se da je  $f_1 > f_2$  te da razlika  $f_1 - f_2$  nije velika.

Zbrajanjem jednadžbi dvaju zvučnih signala dobije se:

$$y = y_1 + y_2 = A[\cos(2\pi f_1 t) + \cos(2\pi f_2 t)]. \quad (7)$$

Za rješavanje prethodne jednadžbe potrebni su sljedeći trigonometrijski identiteti:

$$\cos(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b, \quad (8)$$

$$\cos(a - b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b. \quad (9)$$

Zbrajanjem jednadžbi (8) i (9) dobije se:

$$\cos(a + b) + \cos(a - b) = 2 \cos a \cdot \cos b. \quad (10)$$



Nakon toga uvest će se supstitucije:

$$a + b = 2\pi f_1 t, \quad a - b = 2\pi f_2 t. \quad (11)$$

Rješavanjem prethodnog sustava jednažbi dobiju se rješenja:

$$a = 2\pi \frac{f_1 + f_2}{2} t, \quad b = 2\pi \frac{f_1 - f_2}{2} t. \quad (12)$$

Ako uvrstimo supstitucije (11) i (12) u jednažbu (10) dobiva se:

$$\cos(2\pi f_1 t) + \cos(2\pi f_2 t) = 2 \cos\left(2\pi \frac{f_1 + f_2}{2} t\right) \cdot \cos\left(2\pi \frac{f_1 - f_2}{2} t\right). \quad (13)$$

Naposljetku, uvrštavanjem prethodne jednažbe u jednažbu (7) dobiva se:

$$y = y_1 + y_2 = 2A \cos\left(2\pi \frac{f_1 + f_2}{2} t\right) \cdot \cos\left(2\pi \frac{f_1 - f_2}{2} t\right). \quad (14)$$

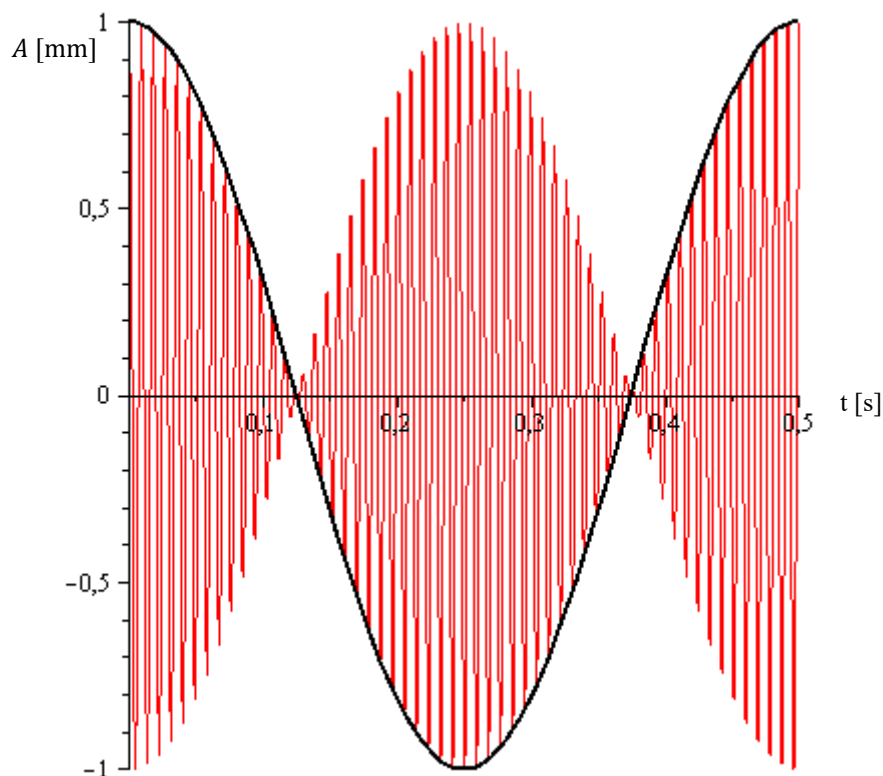
Ljudsko uho percipira frekvencije od otprilike 20 do 20 000 Hz [34]. Pošto je pretpostavljeno da je razlika  $f_1 - f_2$  mala, frekvencija  $\frac{f_1 - f_2}{2}$  je preniska da bi bila percipirana kao zasebna intonacija, tj. čujni ton. Frekvencija  $\frac{f_1 - f_2}{2}$  će biti percipirana samo kao periodička varijacija amplitude vala s frekvencijom  $\frac{f_1 + f_2}{2}$ . Envelopa vala predstavlja varijaciju maksimuma ili minimuma amplituda u vremenu. Zvučni signal s frekvencijom  $\frac{f_1 - f_2}{2}$  će predstavljati ovojnica (envelopu) signala s frekvencijom  $\frac{f_1 + f_2}{2}$ .

Dakle, interferencijom dvaju zvučnih signala, čujni ton ima frekvenciju koja je prosjek frekvencija tih dvaju signala, tj.  $\frac{f_1 + f_2}{2}$ . Amplituda čujnog tona će varirati između granica  $A_1 + A_2$  i  $A_1 - A_2$ . Pošto se ranije pretpostavilo da je  $A_1 = A_2 = A$ , onda amplituda varira između 0 i  $2A$  [35].

Takva percipirana periodička promjena u glasnoći koja nastaje interferencijom dva zvuka s malom razlikom u frekvencijama naziva se akustičkim udarima, engl. *acoustic beats* [35].

Ovojnica, tj. envelopa, predstavlja duplo manju percipiranu frekvencija akustičkih udara. To znači da frekvencija akustičkih udara iznosi:

$$f_{ak.udara} = f_1 - f_2. \quad (15)$$

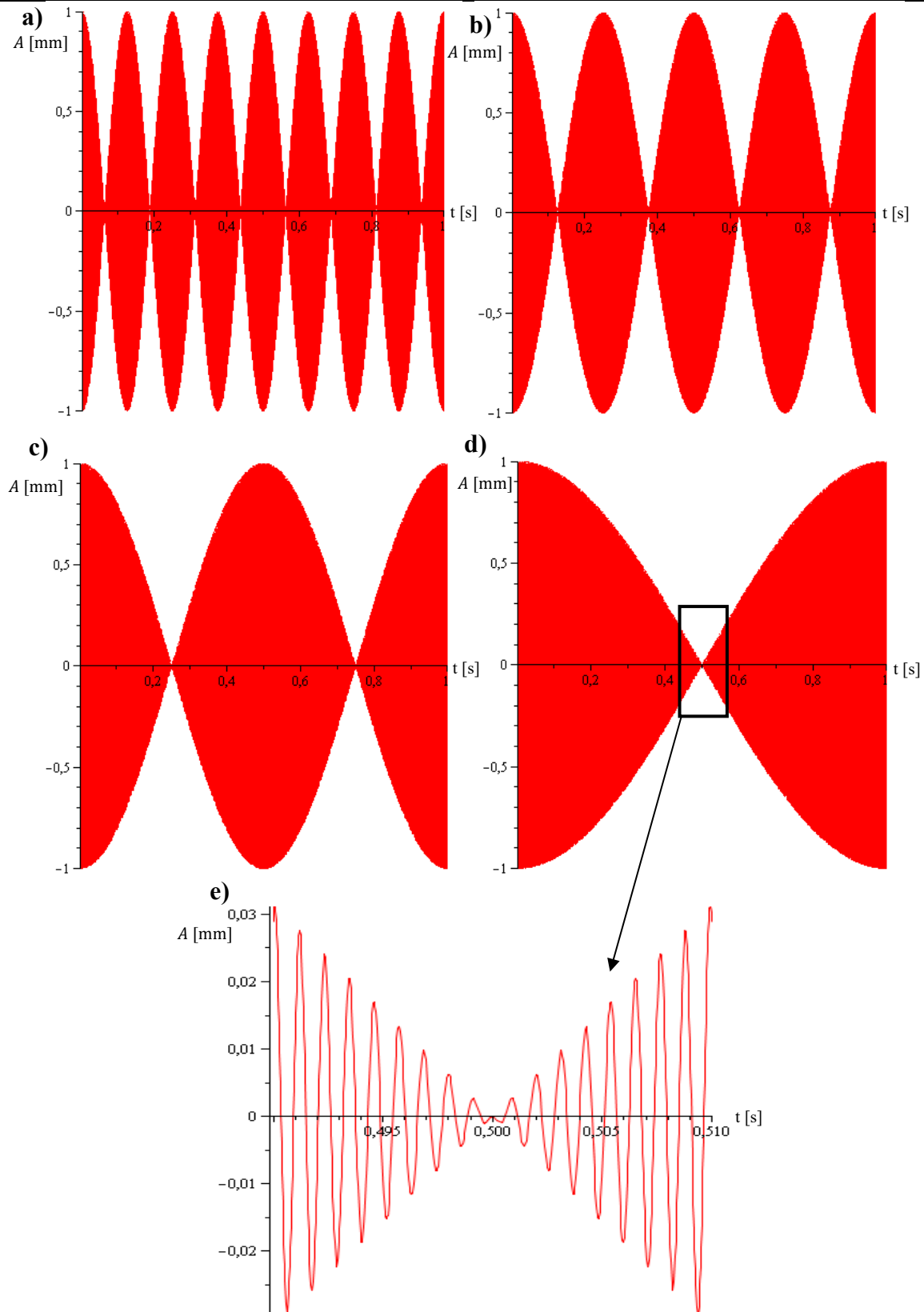


**Slika 19.** Akustički udari frekvencije  $f_{ak.udara} = 4$  Hz dobiveni superponiranjem dvaju zvučnih signala s frekvencijama  $f_1 = 114$  Hz,  $f_2 = 110$  Hz i amplitudama  $A_1 = A_2 = 0.5$  mm

### 3.2. Ugađanje instrumenta pomoću akustičkih udara

Kao što će se eksperimentalno i teoretski pokazati u sljedećem poglavlju, omjer između druge vlastite frekvencije i fundamentalnog tona jedne vibrirajuće klavirske žice je nešto veći od 2. Recimo, pokazano na referentnom tonu  $a_1$  od kojeg se klavir počinje ugađati, to bi značilo da fundamentalna frekvencija tona  $a_1$  iznosi 440 Hz, druga vlastita frekvencija iznosi oko 882 Hz. Najpraktičnije je zatim ugoditi oktavu prema gore ili dolje od referentnog tona. Kako bi postigli čistu konsonancu moraju se izbjeći akustički udari, što znači da se vlastite frekvencije od dva tona ne smiju „sudarati“. Oktava prema gore ugađa se tako da se druga vlastita frekvencija referentnog tona  $a_1$  poklapa s fundamentalnom frekvencijom tona  $a_2$ .

Klavirski tehničari često koriste pojavu akustičkih udara kako bi što uspješnije ugodili instrument. Naime, smanjivanje razlike među frekvencijama dvaju tonova rezultira prorjeđivanjem akustičkih udara u vremenu. Matematički zapisano: ako frekvencija  $f_1$  teži prema frekvenciji  $f_2$ , tj.  $f_1 \rightarrow f_2$ , onda period akustičkih udara teži prema beskonačnosti, tj.  $T_{ak.udara} \rightarrow \infty$ .



**Slika 20.** Akustički udari dobiveni superponiranjem zvučnog signala frekvencije  $f_1 = 882$  Hz i zvučnog signala frekvencije: a)  $f_2 = 874$  Hz, b)  $f_2 = 878$  Hz, c)  $f_2 = 880$  Hz, d)  $f_2 = 881$  Hz. e) uvećani prikaz akustičkog udara od 0.49 sekunde do 0.51 sekunde

Iz prethodnih grafova može se uočiti da akustički udari postaju sve rjeđi u vremenu približavanjem frekvencije  $f_2$  iznosu frekvencije  $f_1$ .

Pomoću istreniranog sluha klavirski tehničar će zatezati ili otpuštati žicu tona  $a_2$  sve dok njezina fundamentalna vlastita frekvencija ne bude jednaka drugoj vlastitoj frekvenciji tona  $a_1$ . To će proučavati upravo preko njihovih akustičkih udara. Težit će da frekvencije dvaju zvučnih signala budu jednake tako da nema akustičkih udara, ili barem da budu slične, tako da se akustički udari ne primijete.

Zanimljivo je, također, da ukoliko je omjer između frekvencija dvaju tonova veći od  $\frac{7}{6}$  čovjek ih počinje percipirati kao dva različita tona [35].

## 4. EFEKT RASTEZANJA

### 4.1. Objašnjenje efekta rastezanja i inharmoničnosti

Efekt rastezanja je pojava pri ugodbi žičanih (kordofonskih) instrumenata gdje se zbog inharmoničnosti vibrirajućih žica prilagođavaju fundamentalne frekvencije tonova [36]. Inharmoničnost je devijacija vlastitih frekvencija pri višim formama vibriranja od frekvencija harmonika [37]. Harmonici predstavljaju frekvencije pri višim formama vibriranja koje se mogu izraziti kao umnožak prirodnog broja i fundamentalne frekvencije [38].

Model slobodnog vibriranja napete idealne žice (bez savojne krutosti) pretpostavlja vibriranje na harmonicima [39]. To bi značilo da takav model napete žice predviđa drugu prirodnu frekvenciju dvostruko višu od prve, treću trostruko višu od prve i tako dalje.

No, realne klavirske žice imaju malu, ali ne zanemarivu, savojnu krutost koja je glavni uzrok pojavi inharmoničnosti. Kod modela žice sa savojnom krutošću frekvencije svih viših formi vibriranja su više nego što to predviđaju harmonici kod žice bez savojne krutosti. Povrh toga, što je forma vibriranja viša to je veća i devijacija te frekvencije od ekvivalentnog harmonika [39]. To bi značilo da realne klavirske žice pokazuju da je omjer između druge i prve vlastite frekvencije nešto veći od 2, omjer treće i prve vlastite frekvencije znatnije veći od 3 i tako dalje.

Prethodne pojave su se odnosile na vibriranje samo jedne žice. No, zbog pojave inharmoničnosti mijenja se i odnos frekvencija između dvije ili više pojedinih žica pri ugađanju. Naime, oktava ugođena tako da omjer fundamentalnih frekvencija kod dvaju tonova bude jednak 2 zvučat će disonantno (neskladno). Ta disonantnost je rezultat akustičkih udara nastalih superponiranjem zvučnih signala s malom razlikom u frekvenciji. Razlika između fundamentalne frekvencije višeg tona oktave i druge vlastite frekvencije nižeg tona je mala, a takav je odnos problematičan zbog spomenute disonantnosti.

Primjerice, ukoliko klavirski tehničar ugodi referentni ton  $a_1$  na frekvenciju od 440 Hz (današnji standard), a ton koji je njegov gornji oktavni ekvivalent, tj. ton  $a_2$ , na frekvenciju od 880 Hz, interval oktave će zvučati disonantno. Pretpostavit će se da pri realnoj klavirskoj žici vibriranjem žice fundamentalne frekvencije 440 Hz njena pripadajuća druga vlastita frekvencija iznosi npr. 882 Hz. Zvuk nastao vibriranjem žice na drugoj vlastitoj frekvenciji 882 Hz od tona  $a_1$  i zvuk fundamentalne frekvencije 880 Hz od tona  $a_2$  rezultirat će akustičkim udarima. Frekvencija akustičkih udara, koja je ranije definirana kao razlika između dviju frekvencija, u ovom slučaju bi iznosila 2 Hz. Slika 20 c) prikazuje akustičke udare koji nastaju spomenutim primjerom. Da bi izbjegao akustičke udare klavirski tehničar težit će izjednačavanju druge

vlastite frekvencije nižeg tona oktave i fundamentalne frekvencije višeg tona. Tako se ton  $a_2$  ugađa na frekvenciju 882 Hz umjesto 880 Hz i nastaje efekt rastezanja.

Ovakav efekt rastezanja nije određen samo za interval oktave. Svi intervali unutar oktave pokazuju devijacije od omjera koji su teoretski zadani *Equal* temperamentom (temperament prema kojem se ugađaju današnji instrumenti) [40]. Omjer između frekvencija svakog polustepena u realnim uvjetima nije  $\sqrt[12]{2}$  već nešto veći.

## 4.2. Vibracije grede i žice opterećenih aksijalnom silom

Za ovaj rad važna su istraživanja koja se bave vibriranjima grede i realne žice napete aksijalnom silom. Dolje su navedena najvažnija istraživanja na kojima je baziran ovaj rad.

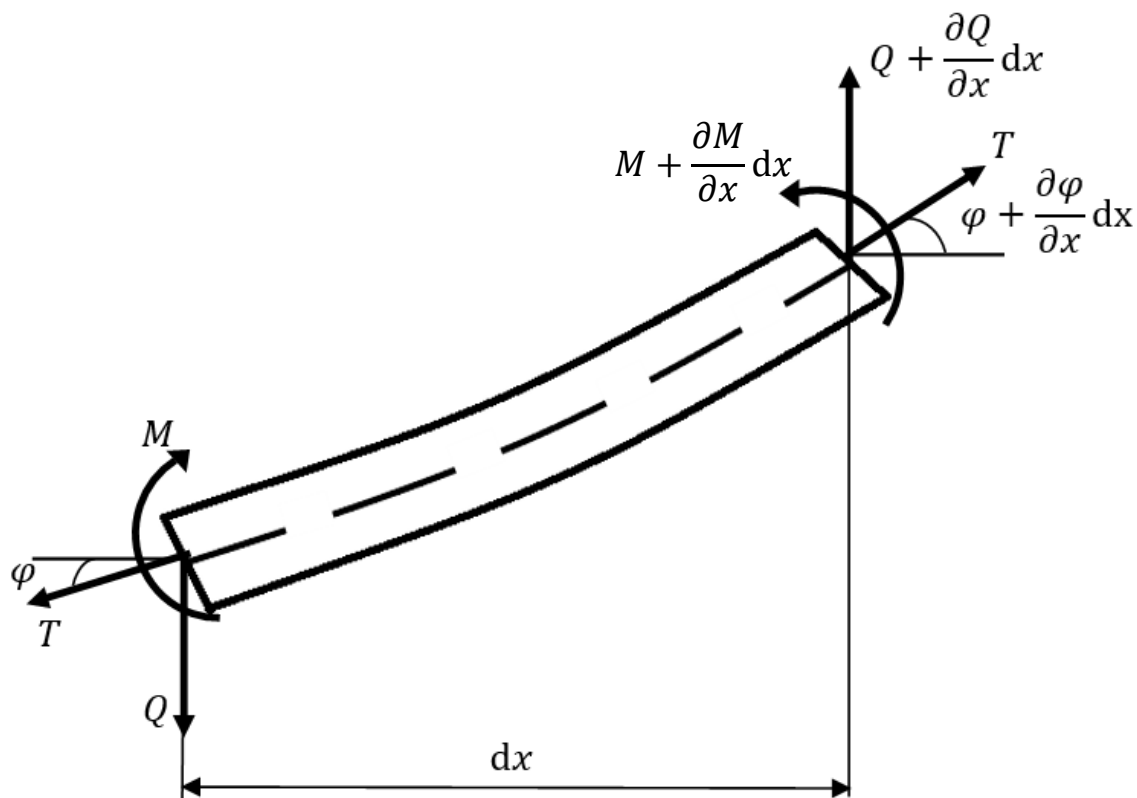
A. Bokaian je u radu *Natural frequencies of beams under tensile axial loads* prikazao kako vibrira greda s raznim rubnim uvjetima opterećena aksijalnom silom [41].

Kasnih 1870-ih Lord Rayleigh je u svojoj knjizi *The theory of sound* pokazao da su vlastite frekvencije kod vibriranja klavirskih žica više od očekivanih upravo zbog savojne krutosti. Harvey Fletcher je gotovo godinu dana kasnije objavio rad pod nazivom *Normal vibrations of a stiff piano string* gdje je izveo matematičku jednadžbu inharmoničnosti napete žice, koja je u prvom slučaju uklještena na oba kraja, a u drugom slučaju ograničena nepomičnim zglobovima [42]. Gracia i Sanz-Perela u radu *The wave equation for stiff strings and piano tuning* su promatrali jednadžbu spektra frekvencija pri vibraciji žica sa savojnom krutošću koja na krajevima ima nepomične zglobove [43].

## 4.3. Diferencijalni elementi grede i idealne žice opterećeni aksijalnom silom

### 4.3.1. Diferencijalni element grede

Kako bi dobili valnu jednadžbu vibriranja grede opterećene aksijalnom silom počeo će se od infinitezimalnog elementa grede. Slika 21 prikazuje oslobođeni element grede sa svim postojećim opterećenjima. Veličina  $T$  predstavlja konstantnu vlačnu aksijalnu silu kojom je element opterećen,  $\varphi$  je kut između aksijalne sile  $T$  i horizontalne linije,  $Q$  je vertikalna sila koja preostaje oslobađanjem veza elementa grede, a  $M$  moment koji preostaje oslobađanjem elementa veza.



Slika 21. Diferencijalni element grede oslobođen veza i opterećen aksijalnom silom

Može se uočiti da se na desnom kraju iznos vertikalne sile  $Q$  povećao za iznos  $\frac{\partial Q}{\partial x} dx$ , moment  $M$  se povećao za iznos  $\frac{\partial M}{\partial x} dx$ , a kut  $\varphi$  za iznos  $\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx$ . Pretpostavit će se da je gređa konstantnog poprečnog presjeka, a stoga ima i konstantan moment inercije poprečnog presjeka te da je kut  $\varphi$  mali.

Diferencijalna jednačina elementa gređe će onda izgledati ovako:

$$Q + \frac{\partial Q}{\partial x} dx - Q + T \sin \left( \varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx \right) - T \sin \varphi = \sigma dx \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad (16)$$

gdje  $w$  predstavlja vertikalni pomak čestice elementa gređe koji se nalazi na udaljenosti  $x$  od lijevoga kraja, a  $\sigma$  predstavlja linearnu gustoću materijala elementa izraženu u kg/m. Izraz s desne strane jednačine predstavlja infinitezimalnu inercijsku silu koja se dobije umnoškom diferencijalne mase  $\sigma dx$  s transverzalnim ubrzanjem čestice  $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$ .

Pošto je pretpostavljeno da je nagib elementa, tj. kut  $\varphi$  mali, onda je izraz  $T \sin \varphi \approx T \varphi$ , a  $T \sin \left( \varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx \right) \approx T \left( \varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx \right)$ . Uvrštavanjem ovih relacija u jednačinu (16) dobije se:

$$Q + \frac{\partial Q}{\partial x} dx - Q + T \left( \varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx \right) - T\varphi = \sigma dx \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \quad (17)$$

Sređivanjem jednadžbe dobit će se izraz:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} dx + T \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx = \sigma dx \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \quad (18)$$

Iz mehanike deformabilnih tijela su poznate sljedeće relacije:

$$\varphi(x, t) = \frac{\partial w(x, t)}{\partial x}, \quad (19)$$

$$M(x, t) = -EI \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial x}, \quad (20)$$

$$Q(x, t) = \frac{\partial M(x, t)}{\partial x}, \quad (21)$$

gdje  $E$  predstavlja Youngov modul elastičnosti izražen u  $\frac{N}{m^2}$ , a  $I$  moment inercije poprečnog presjeka elementa izražen u  $m^4$ .

Ukoliko prethodne relacije uvrstimo u jednadžbu (18) dobit će se:

$$-EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} dx + T \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx = \sigma dx \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \quad (22)$$

Dijeljenjem prethodne jednadžbe s  $(-dx)$  i prebacivanjem u implicitni oblik dobit će se izraz:

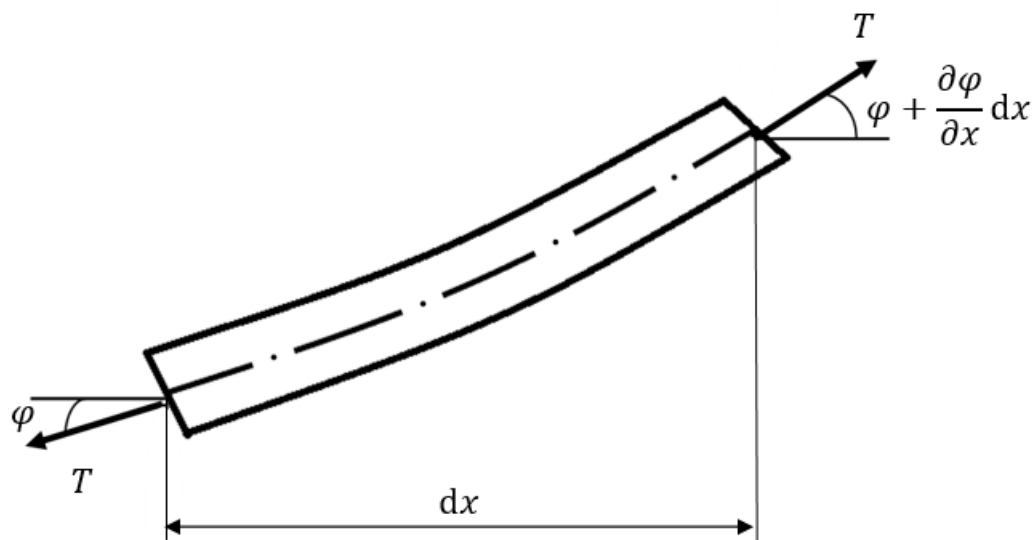
$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - T \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sigma \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad (23)$$

koji predstavlja homogenu valnu jednadžbu pri vibraciji elementa grede opterećene konstantnom aksijalnom silom. Ovakvu jednadžbu prvotno je postavio Lord Rayleigh u radu *The theory of sound*.

#### 4.3.2. Diferencijalni element idealne žice

Slika 22 prikazuje infinitezimalni element idealne žice bez savojne krutosti opterećene konstantnom aksijalnom silom. Kao i u prethodnom modelu grede veličina  $T$  predstavlja konstantnu vlačnu aksijalnu silu kojom je element opterećen, a  $\varphi$  je kut između aksijalne sile  $T$  i horizontalne linije.





Slika 22. Diferencijalni element idealne žice opterećene aksijalnom silom

Može se uočiti da se na desnom kraju kut  $\varphi$  povećao za iznos  $\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx$ . Pretpostavit će se da je poprečni presjek konstantan i kut  $\varphi$  mali.

Diferencijalna jednadžba elementa idealne žice će onda izgledati ovako:

$$T \sin \left( \varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx \right) - T \sin \varphi = \sigma dx \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \quad (24)$$

Pošto je pretpostavljeno da je nagib elementa, tj. kut  $\varphi$  mali, onda je izraz  $T \sin \varphi \approx T\varphi$ , a  $T \sin \left( \varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx \right) \approx T \left( \varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx \right)$ . Uvrštavanjem ovih relacija u jednadžbu (24) dobije se:

$$T \left( \varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx \right) - T\varphi = \sigma dx \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \quad (25)$$

Sređivanjem jednadžbe dobit će se izraz:

$$T \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \sigma \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad (26)$$

koji predstavlja klasičnu valnu jednadžbu vibriranja napete idealne žice.

Može se uočiti da je vrlo jednostavno dobiti valnu jednadžbu vibriranja idealne žice iz jednadžbe vibriranja grede uklanjanjem člana  $EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}$  koji nastaje zbog savojne krutosti elementa.

Model idealne žice daje valnu jednadžbu koja je dovoljno dobra aproksimacija za žice koje su jako fleksibilne, npr. žice na gitari. No, za klavirske žice, zbog veće savojne krutosti, model idealne žice nije dovoljno dobar [43].

#### 4.4. Rješavanje jednačbe elementa grede

Krenut će se od valne jednačbe koja opisuje vibraciju elementa grede opterećene konstantnom aksijalnom silom:

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - T \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sigma \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. \quad (27)$$

U ovoj jednačbi transverzalni pomak  $w$  ovisi o položaju  $x$  te o vremenu  $t$ , odnosno  $w = w(x, t)$ . Traži se rješenje jednačbe koje će biti oblika  $w(x, t) = w(x) \cdot w(t)$  [43].

Ukoliko pomak  $w$  u jednačbi (27) zamijenimo s oblikom rješenja kakvog tražimo, jednačba će glasiti:

$$EI \frac{\partial^4 (w(x) \cdot w(t))}{\partial x^4} - T \frac{\partial^2 (w(x) \cdot w(t))}{\partial x^2} + \sigma \frac{\partial^2 (w(x) \cdot w(t))}{\partial t^2} = 0. \quad (28)$$

Sređivanjem jednačbe dobije se:

$$EI \cdot w(t) \frac{\partial^4 w(x)}{\partial x^4} - T \cdot w(t) \frac{\partial^2 w(x)}{\partial x^2} + \sigma \cdot w(x) \frac{\partial^2 w(t)}{\partial t^2} = 0. \quad (29)$$

Sve varijable koje ovise o vremenu  $t$  prebacit će se na desnu stranu:

$$-\frac{EI}{\sigma} \cdot \frac{1}{w(x)} \frac{\partial^4 w(x)}{\partial x^4} + \frac{T}{\sigma} \cdot \frac{1}{w(x)} \frac{\partial^2 w(x)}{\partial x^2} = \frac{1}{w(t)} \frac{\partial^2 w(t)}{\partial t^2}. \quad (30)$$

Jednačba koja opisuje transverzalni pomak u ovisnosti o vremenu  $t$  glasi:

$$w(t) = \hat{A} \cdot e^{i\omega t}, \quad (31)$$

gdje  $\hat{A}$  predstavlja amplitudu vala, a  $\omega$  kružnu frekvenciju grede izraženu u rad/s.

Ukoliko se jednačba (31) ubaci u jednačbu (30) dobije se:

$$-\frac{EI}{\sigma} \cdot \frac{1}{w(x)} \frac{\partial^4 w(x)}{\partial x^4} + \frac{T}{\sigma} \cdot \frac{1}{w(x)} \frac{\partial^2 w(x)}{\partial x^2} = \frac{1}{\hat{A} \cdot e^{i\omega t}} \cdot \hat{A} \cdot e^{i\omega t} \cdot (-\omega^2), \quad (32)$$

te sređivanjem desne strane jednačbe:

$$-\frac{EI}{\sigma} \cdot \frac{1}{w(x)} \frac{\partial^4 w(x)}{\partial x^4} + \frac{T}{\sigma} \cdot \frac{1}{w(x)} \frac{\partial^2 w(x)}{\partial x^2} = -\omega^2. \quad (33)$$

Implicitni oblik prethodne jednačbe glasi:

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - T \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \sigma \omega^2 \cdot w = 0. \quad (34)$$

Rješenje ove jednačbe može se zapisati u obliku:

$$c_1 \sinh k_1 x + c_2 \cosh k_1 x + c_3 \sin k_2 x + c_4 \cos k_2 x = 0, \quad (35)$$

gdje su  $c_1, c_2, c_3$  i  $c_4$  konstante, a  $k_1$  i  $k_2$  glase:

$$k_1 = \sqrt{\frac{T}{2EI} + \sqrt{\left(\frac{T}{2EI}\right)^2 + \frac{\sigma\omega^2}{EI}}}, \quad k_2 = \sqrt{-\frac{T}{2EI} + \sqrt{\left(\frac{T}{2EI}\right)^2 + \frac{\sigma\omega^2}{EI}}}. \quad (36)$$

Konstante  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$  i  $c_4$  pronalaze se uvrštavanjem rubnih uvjeta na kraju grede. Prema [43] klavirske žice najbolje opisuje model grede koji je na rubovima ograničen nepomičnim zglobovima. Ako je  $l$  duljina grede, rubni uvjeti za takvu gredu glase:

$$w(x = 0) = w(x = l) = 0, \quad (37)$$

$$\frac{d^2w}{dx^2}(x = 0) = \frac{d^2w}{dx^2}(x = l) = 0, \quad (38)$$

Za rubni uvjet  $w(x = 0) = 0$  jednačba (35) se svodi na:

$$c_2 + c_4 = 0. \quad (39)$$

Za rubni uvjet  $\frac{d^2w}{dx^2}(x = 0) = 0$  jednačba (35) se svodi na:

$$c_2k_1^2 + c_4k_2^2 = 0. \quad (40)$$

Iz jednačbe (39) dobije se  $c_2 = -c_4$ , te uvrštavanjem u jednačbu (40) ona glasi  $c_2(k_1^2 + k_2^2) = 0$  iz čega se može zaključiti da je  $c_2 = 0$ , a zatim i  $c_4 = 0$ . Navedene vrijednosti će se uvrstiti u daljnjem proračunu za rubne uvjete na drugom kraju grede.

Za rubni uvjet  $w(x = l) = 0$  jednačba (35) se svodi na:

$$c_1 \sinh k_1 l + c_3 \sin k_2 l = 0. \quad (41)$$

Za rubni uvjet  $\frac{d^2w}{dx^2}(x = l) = 0$  jednačba (35) se svodi na:

$$c_1 k_1^2 \sinh k_1 l + c_3 k_2^2 \sin k_2 l = 0. \quad (42)$$

Ukoliko se jednačba (41) pomnoži s  $k_2^2$  i zbroji s jednačbom (42) dobije se izraz:

$$c_1(k_1^2 + k_2^2) \sinh k_1 l = 0. \quad (43)$$

Pošto su zadnja dva faktora u jednačbi različita od 0, može se zaključiti da mora biti  $c_1 = 0$ . Ukoliko se navedena vrijednost uvrsti u jednačbu (41) preostaje izraz:

$$c_3 \sin k_2 l = 0. \quad (44)$$

Naposljetku, pošto se traži netrivialno rješenje jednadžbe (35),  $c_3 \neq 0$ , rješenje jednadžbe (44) je oblika:

$$k_2 l = i\pi, \quad (45)$$

gdje je  $i$  cijeli broj. Ukoliko se u prethodnu jednadžbu uvrsti izraz za  $k_2$  iz jednadžbe (36) dobit će se:

$$\sqrt{-\frac{T}{2EI} + \sqrt{\left(\frac{T}{2EI}\right)^2 + \frac{\sigma\omega^2}{EI}}} \cdot l = i\pi. \quad (46)$$

Sređivanjem prethodne jednadžbe te uvrštavanjem izraza  $\omega = 2\pi f_i$  gdje  $f_i$  predstavlja frekvenciju na  $i$ -toj formi vibriranja grede, te izraza  $\sigma = \rho A$  gdje  $\rho$  predstavlja masenu gustoću materijala grede izraženu u  $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ , a  $A$  površinu poprečnog presjeka u  $\text{m}^2$ , dobije se:

$$\sqrt{-\frac{T}{2EI} + \sqrt{\left(\frac{T}{2EI}\right)^2 + \frac{4\pi^2 \rho A f_i^2}{EI}}} = \frac{i\pi}{l}. \quad (47)$$

Da bi se našao spektar frekvencija na kojoj vibrira greda tražit će se izraz za  $f_i$  iz prethodne jednadžbe. Dobiju se dva rješenja:

$$f_i = \pm \frac{\sqrt{Tl^2 + i^2 \pi^2 EI} \cdot i}{2l^2 \sqrt{\rho A}}, \quad (48)$$

od kojih uzimamo samo pozitivno rješenje.

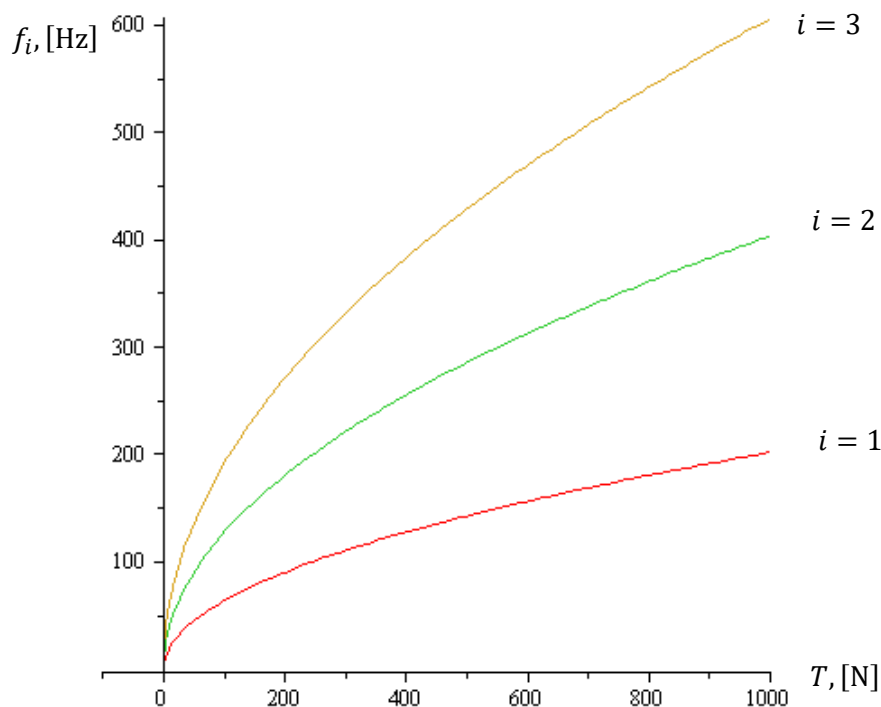
Pošto je cilj rada prikazati da s porastom natezne sile više vlastite frekvencije elementa grede teže prema frekvencijama harmonika u slučaju idealne žice (bez savojne krutosti) u jednadžbu (48) će se uvrstiti geometrijske značajke žice, tj. uzet će se da je poprečni presjek kružnog oblika. U jednadžbu će se uvrstiti izraz  $A = \frac{d^2 \pi}{4}$  te izraz  $I = \frac{d^4 \pi}{64}$  gdje  $d$  predstavlja promjer grede u metrima:

$$f_i = \frac{\sqrt{Tl^2 + \frac{1}{64} i^2 \pi^3 E d^4} \cdot i}{dl^2 \sqrt{\rho \pi}}. \quad (49)$$

#### 4.5. Grafički prikazi ovisnosti vlastitih frekvencija o nateznoj sili

##### 4.5.1. Opće zadani parametri

Slika 23 prikazuje ovisnost frekvencija na prvoj, drugoj i trećoj formi vibriranja grede o nateznoj sili  $T$  prema opće pretpostavljenim parametrima. Kao materijal će se pretpostaviti čelik, stoga je  $\rho = 7800 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$  i  $E = 210 \text{ GPa}$ . Promjer poprečnog presjeka iznosi  $d = 1 \text{ mm}$ , a duljina  $l = 1 \text{ m}$ .



Slika 23. Prikaz ovisnosti vlastite frekvencije na prvoj, drugoj i trećoj formi vibriranja grede o nateznoj sili u vrijednosti od 0 do 1000 N za opće zadane podatke:

$$\rho = 7800 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}, E = 210 \cdot 10^9 \text{ GPa}, d = 1 \text{ mm}, l = 1 \text{ m}.$$

Slika 23 pokazuje da ukoliko je natezna sila  $T = 50 \text{ N}$ :

- frekvencija na prvoj formi vibriranja iznosi  $f_1 = 45.2173 \text{ Hz}$ ,
- frekvencija na drugoj formi vibriranja iznosi  $f_2 = 90.7096 \text{ Hz}$ ,
- frekvencija na trećoj formi vibriranja iznosi  $f_3 = 136.7492 \text{ Hz}$ .

Omjer između frekvencije na drugoj i prvoj formi vibriranja za nateznu silu  $T = 50 \text{ N}$  je  $\frac{f_2}{f_1} = 2.0061$ , a omjer između frekvencije na trećoj i prvoj formi vibriranja je  $\frac{f_3}{f_1} = 3.0243$ .

Ukoliko je natezna sila  $T = 200$  N:

- frekvencija na prvoj formi vibriranja iznosi  $f_1 = 90.3656$  Hz,
- frekvencija na drugoj formi vibriranja iznosi  $f_2 = 180.8690$  Hz,
- frekvencija na trećoj formi vibriranja iznosi  $f_3 = 271.6476$  Hz.

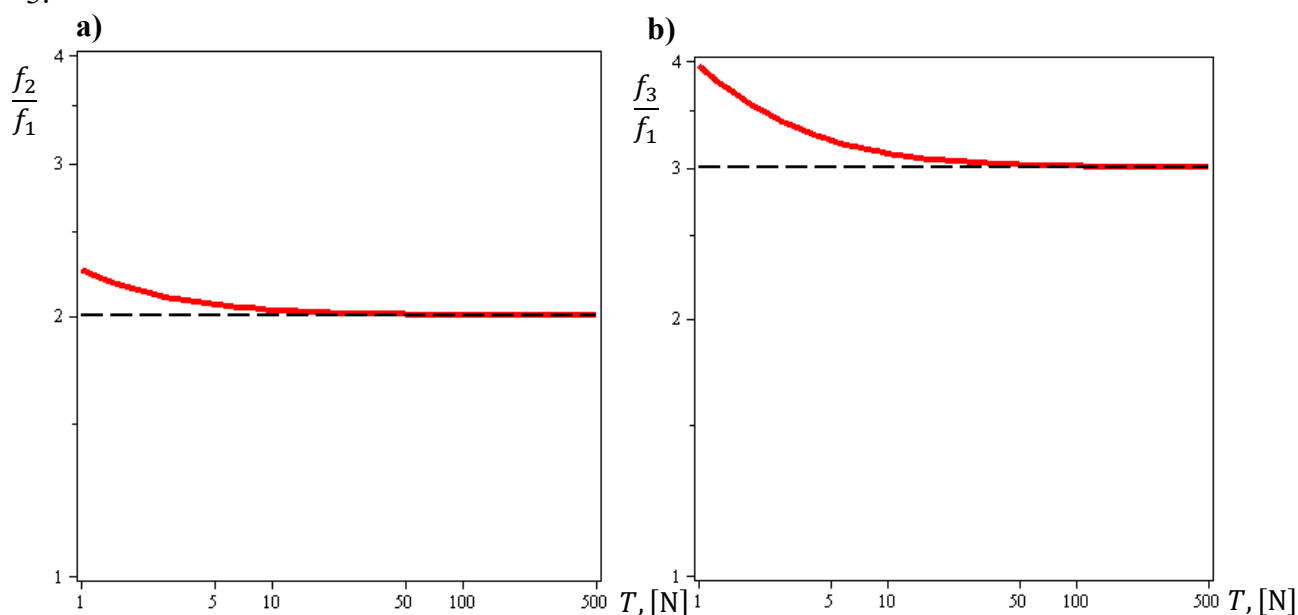
Omjer između frekvencije na drugoj i prvoj formi vibriranja za nateznu silu  $T = 200$  N je  $\frac{f_2}{f_1} = 2.0015$ , a omjer između frekvencije na trećoj i prvoj formi vibriranja je  $\frac{f_3}{f_1} = 3.0061$ .

Ukoliko je natezna sila  $T = 500$  N:

- frekvencija na prvoj formi vibriranja iznosi  $f_1 = 142.8588$  Hz,
- frekvencija na drugoj formi vibriranja iznosi  $f_2 = 285.8047$  Hz,
- frekvencija na trećoj formi vibriranja iznosi  $f_3 = 428.9250$  Hz.

Omjer između frekvencije na drugoj i prvoj formi vibriranja za nateznu silu  $T = 500$  N je  $\frac{f_2}{f_1} = 2.0006$ , a omjer između frekvencije na trećoj i prvoj formi vibriranja je  $\frac{f_3}{f_1} = 3.0024$ .

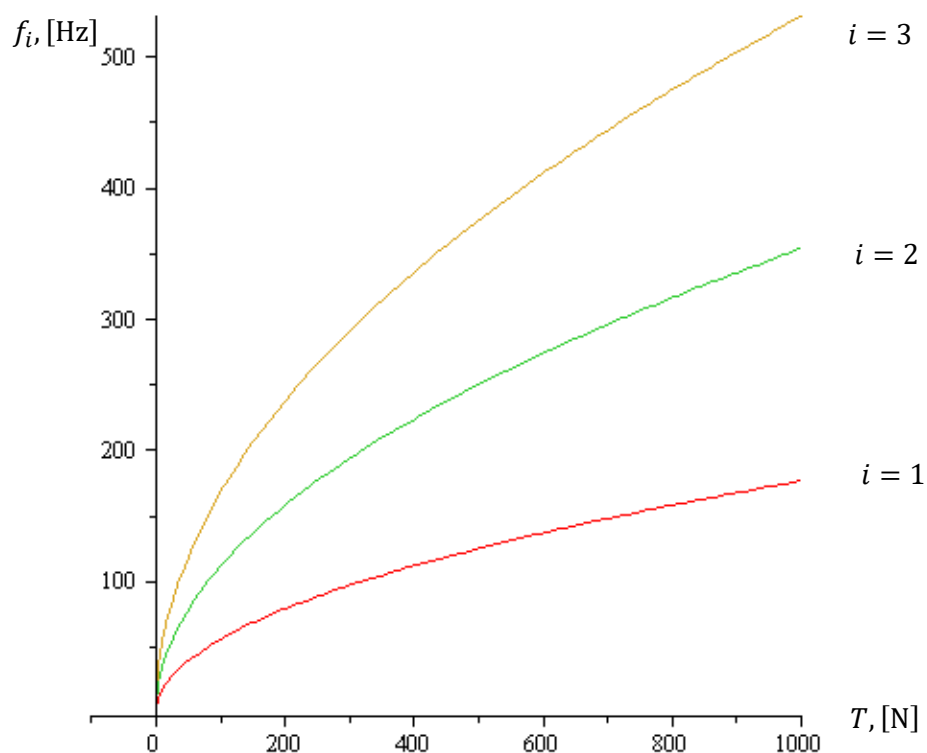
Može se uočiti da omjer između druge i prve vlastite frekvencije elementa grede povećanjem natezne sile sve više teži omjeru 2, a omjer između treće i prve vlastite frekvencije teži omjeru 3.



**Slika 24. Ovisnost omjera vlastitih frekvencija elementa grede o nateznoj sili  $T$  za opće zadane parametre: a) omjer druge i prve vlastite frekvencije, b) omjer treće i prve vlastite frekvencije**

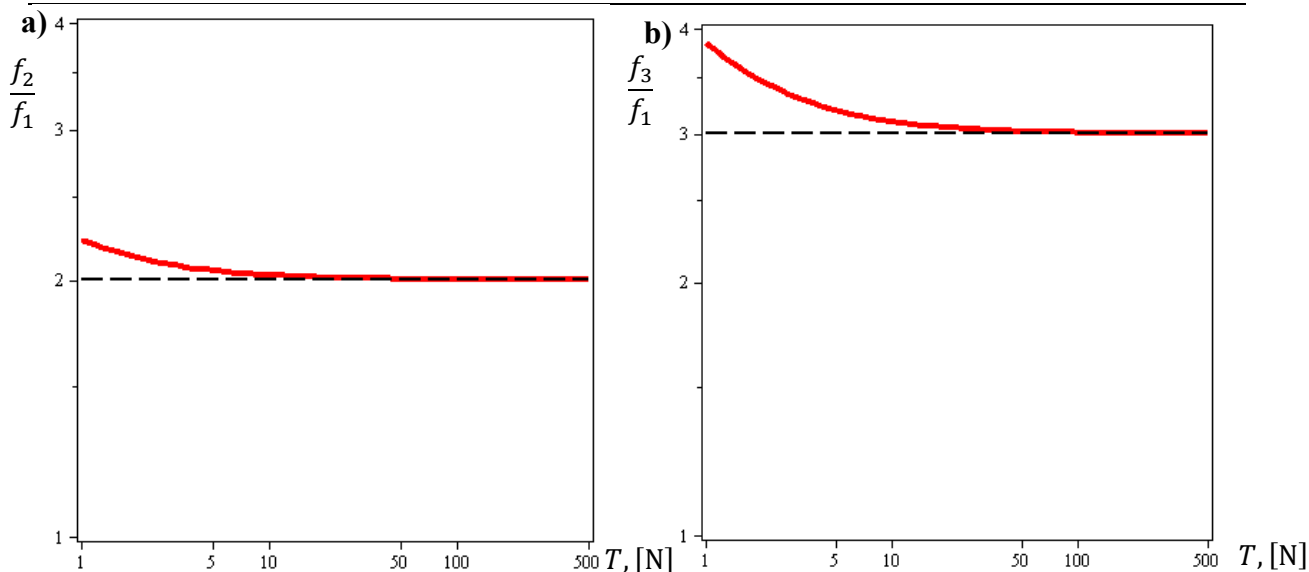
#### 4.5.2. Parametri stvarne klavirske žice

Slika 25 prikazuje ovisnost frekvencija na prvoj, drugoj i trećoj formi vibriranja o nateznoj sili  $T$  prema podacima o stvarnoj klavirskoj žici tipa M, za notu H na klaviru *Steinway & Sons* modela O, duljine 1.8 m (Dodatak, Tablica 2). Žica je izrađena od čelika i ima gustoću  $\rho = 7850 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$  i Youngov modul elastičnosti  $E = 202 \text{ GPa}$ . Promjer poprečnog presjeka žice iznosi  $d = 1.025 \text{ mm}$ , a duljina  $l = 1.11 \text{ m}$  [44].



Slika 25. Prikaz ovisnosti vlastite frekvencije na prvoj, drugoj i trećoj formi vibriranja grede o nateznoj sili u vrijednosti od 0 do 1000 N na primjeru stvarne klavirske žice:

$$\rho = 7850 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}, E = 202 \text{ GPa}, d = 1.025 \text{ mm}, l = 1.11 \text{ m}.$$



**Slika 26. Ovisnost omjera vlastitih frekvencija elementa grede o nateznoj sili  $T$  na primjeru stvarne klavirske žice: a) omjer druge i prve vlastite frekvencije, b) omjer treće i prve vlastite frekvencije**

Može se uočiti da omjer između druge i prve vlastite frekvencije grede povećanjem natezne sile sve više teži omjeru 2, a omjer između treće i prve vlastite frekvencije teži omjeru 3.

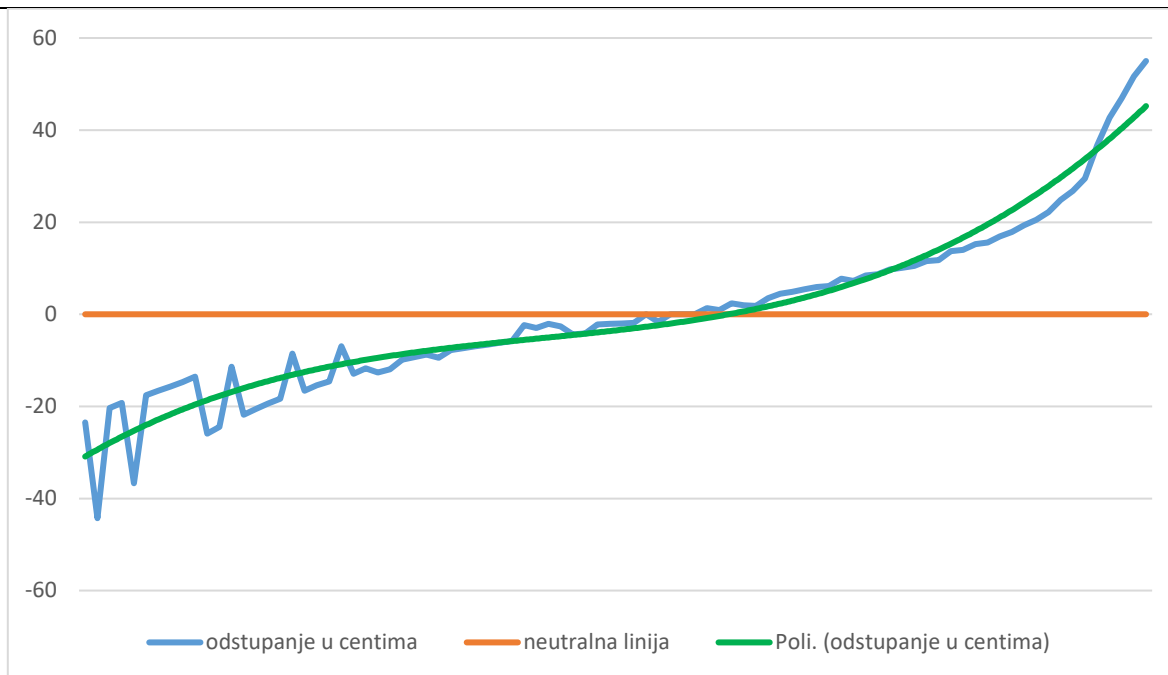
#### 4.6. Efekt rastezanja kod ugađanja klavira

U prijašnjem poglavlju pokazalo se na više primjera kako više vlastite frekvencije modela grede opterećene konstantnom aksijalnom silom s porastom natezne sile zaista teže prema vlastitim frekvencijama nategnute idealne žice. Međutim, kod konačne natezne sile nije moguće izbjeći efekt rastezanja.

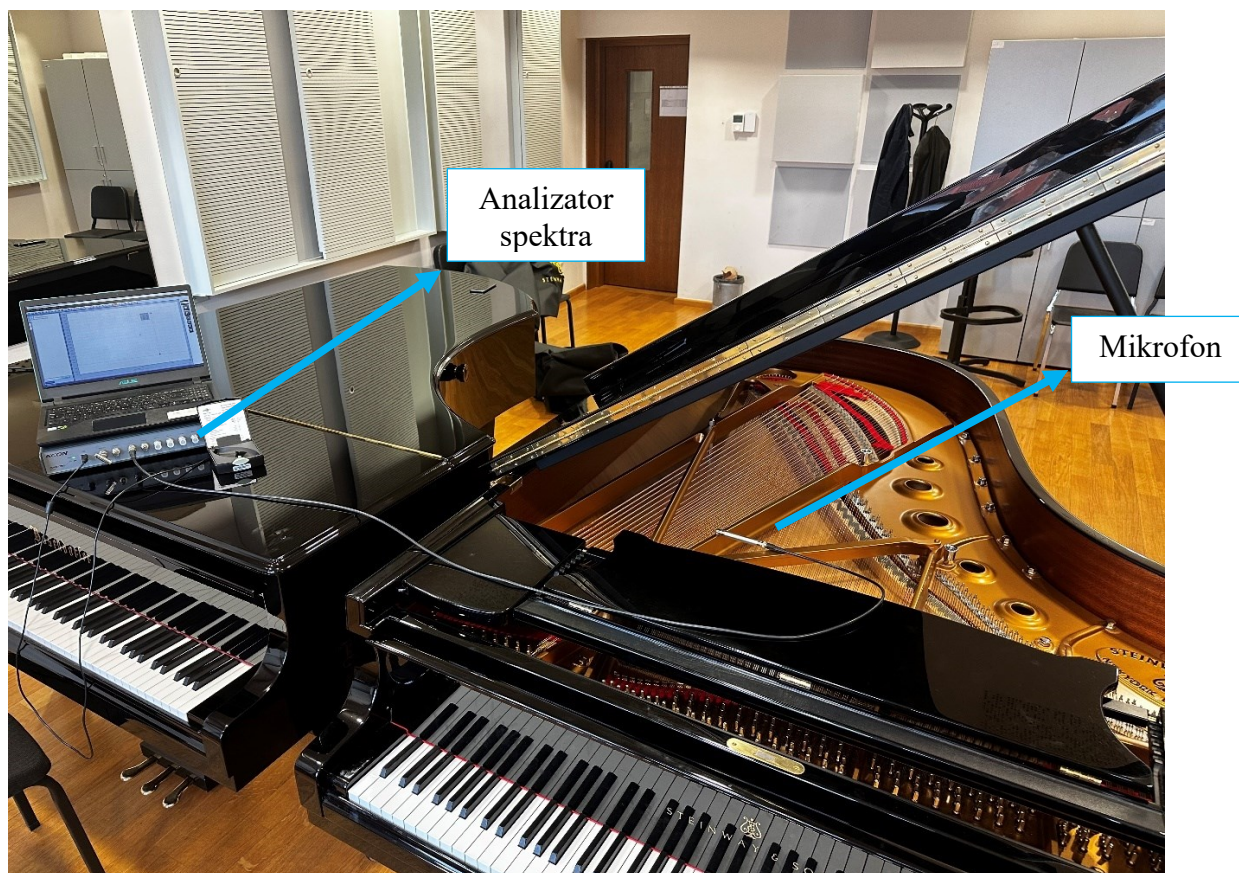
Slika 27 prikazuje vrijednosti odstupanja fundamentalnih frekvencija svakog tona klavira u realnim uvjetima od teoretskog *Equal* temperamenta gdje je oktava u omjeru 2:1 (tj. nema efekta rastezanja). Može se primijetiti da su svi tonovi iznad referentnog (početnog) tona  $a_1$  ugođeni na nešto višu frekvenciju, a svi tonovi niži od tona  $a_1$  na nešto nižu frekvenciju od neutralne linije. Također, što je veći intervalski razmak između tona  $a_1$  i promatranog tona, to je veća i vrijednost odstupanja omjera njihovih frekvencija od teoretskog omjera koji ne uzima u obzir efekt rastezanja.

Slika 28 prikazuje proces mjerenja fundamentalnih frekvencija tonova na klaviru modela *Steinway & Sons* pomoću analizatora spektra.





**Slika 27.** Izmjerene vrijednosti odstupanja fundamentalnih frekvencija svih 88 tonova na klaviru od neutralne linije (bez efekta rastezanja) izražene u centima te njihova polinomna aproksimativna krivulja



**Slika 28.** Prikaz mjerenja fundamentalnih frekvencija tonova na klaviru modela *Steinway & Sons* pomoću analizatora spektra

#### 4.7. Disperzija frekvencijskog spektra

Uvest će se dvije nove konstante  $B$  i  $f_0$ :

$$B = \frac{\pi^2 EI}{Tl^2}, \quad f_0 = \frac{1}{2l} \cdot \sqrt{\frac{T}{\sigma}}, \quad (50)$$

gdje je  $B$  bezdimenzijski koeficijent inharmoničnosti, a  $f_0$  fundamentalna frekvencija koju bi imala idealna žica bez savojne krutosti ( $B = 0$ ).

Kvadriranjem koeficijenta  $k_2$  iz jednadžbe (36) dobit će se:

$$k_2^2 = -\frac{T}{2EI} + \sqrt{\left(\frac{T}{2EI}\right)^2 + \frac{\sigma\omega^2}{EI}}. \quad (51)$$

Ukoliko se sada uvrste koeficijenti iz jednadžbe (50), prethodni izraz se može zapisati kao:

$$k_2^2 = \frac{\pi^2}{2Bl^2} \cdot \left( \sqrt{1 + \frac{\omega^2 B}{f_0^2 \pi^2}} - 1 \right). \quad (52)$$

Uvrštavanjem izraza za  $k_2^2$  u kvadriranu jednadžbu (45) dobije se:

$$\left(\frac{i\pi}{l}\right)^2 = \frac{\pi^2}{2Bl^2} \cdot \left( \sqrt{1 + \frac{\omega^2 B}{f_0^2 \pi^2}} - 1 \right). \quad (53)$$

Uvrštavanjem izraza  $\omega = 2\pi f_i$  gdje  $f_i$  predstavlja frekvenciju na  $i$ -toj formi vibriranja grede te sređivanjem jednadžbe dobije se:

$$i^2 = \frac{1}{2B} \cdot \left( \sqrt{1 + \frac{4f_i^2 B}{f_0^2}} - 1 \right). \quad (54)$$

Da bi se našao spektar frekvencija na kojoj vibrira greda tražit će se izraz za  $f_i$  iz prethodne jednadžbe. Rješenja glase:

$$f_i = \pm i f_0 \sqrt{1 + Bi^2}, \quad (55)$$

od kojih uzimamo samo pozitivno rješenje.

Pošto je u modelu grede, odnosno realne klavirske žice sa savojnom krutošću, koeficijent inharmoničnosti  $B > 0$  onda fundamentalna frekvencija iznosi  $f_1 = f_0 \sqrt{1 + B}$ , što je neznatno više od koeficijenta  $f_0$  [43].

Iz prethodne jednadžbe može se primijetiti da frekvencija na  $i$ -toj formi vibriranja grede odstupa od linearne ovisnosti o broju forme vibriranja  $i$ , te raste strmije od linearne zakonitosti zbog postojanja faktora  $\sqrt{1 + Bi^2}$ . Ukoliko ne bi postojao taj faktor, spektar frekvencija bi imao vrijednosti harmonika [43].

Vrijednost koeficijenta inharmoničnosti  $B$  za realne klavirske žice je mala te najčešće iznosi oko  $10^{-3}$  [43].

Ukoliko se u izraz za koeficijent inharmoničnosti iz jednadžbe (50) uvrste geometrijske značajke klavirske žice, tj. izrazi za poprečni presjek kružnog oblika, dobije se:

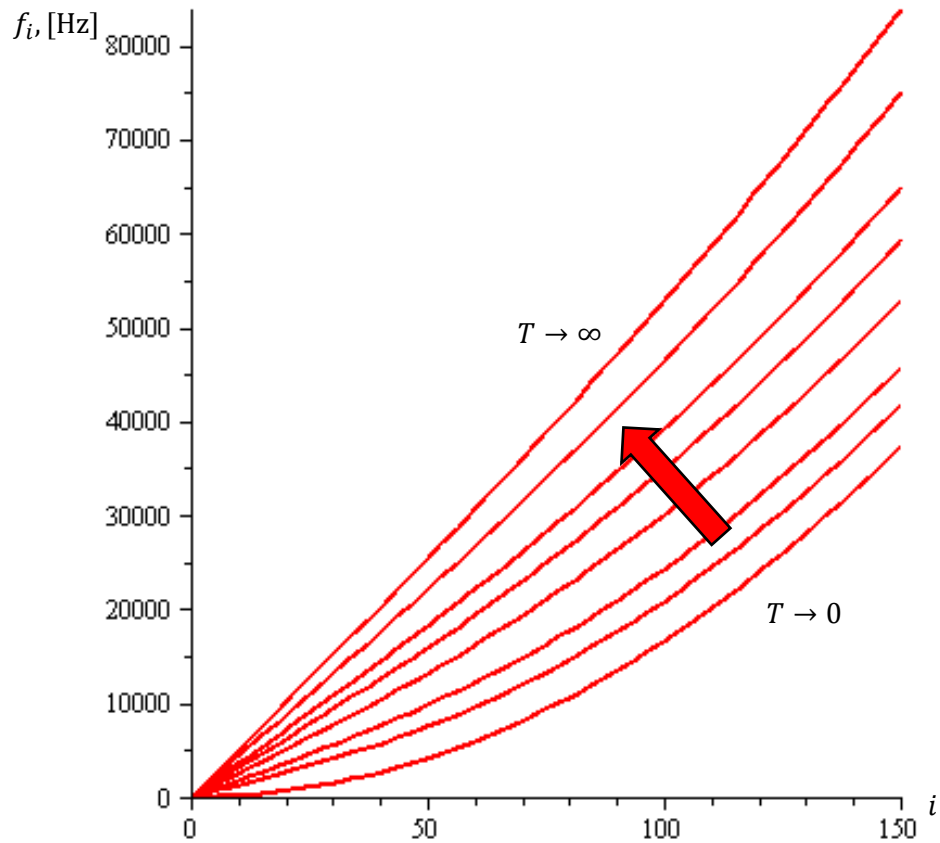
$$B = \frac{\pi^3 E d^4}{64 \cdot T l^2}, \quad (56)$$

Izračun koeficijenta inharmoničnosti provest će se na primjeru stvarne klavirske žice tipa M koja ostvaruje ton H na klaviru *Steinway & Sons* modela O, duljine 1.8 m (Dodatak, Tablica 2). Žica je od materijala gustoće  $\rho = 7850 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$  i Youngovog modula elastičnosti  $E = 202 \text{ GPa}$ . Promjer poprečnog presjeka žice iznosi  $d = 1.025 \text{ mm}$ , a duljina žice je  $l = 1.11 \text{ m}$  [44]. Natezna sila kojom moramo opteretiti žicu kako bi ostvarili ton H iznosi 491.1 N. Koeficijent inharmoničnosti prema jednadžbi (56) u ovom slučaju iznosi  $B = 1.79 \cdot 10^{-4}$ .

Ukoliko u jednadžbu (55) uvrstimo izraze za  $f_0$  i  $B$  dobit ćemo izraz za spektar frekvencija koji glasi:

$$f_i = \frac{i\sqrt{i^2\pi^3 E d^4 + 64 T l^2}}{8 d l^2 \sqrt{\rho \pi}}. \quad (57)$$

Ponovno ćemo promatrati primjer stvarne klavirske žice tipa M (Dodatak, Tablica 2) [44]. Ukoliko uvrstimo ranije navedene parametre te žice, može se prikazati disperzija spektra frekvencija u ovisnosti o parametru  $i$  za različite natezne sile  $T$ .



**Slika 29. Disperzija frekvencijskog spektra slobodno oslonjene grede opterećene aksijalnom silom**

Slika 29 prikazuje da težnjom natezne sile  $T$  prema beskonačnosti, ovisnost frekvencija  $f_i$  o broju forme vibriranja  $i$  sve više teži linearnom odnosu, odnosno dvostruko viši broj forme vibriranja rezultira dvostruko višom prirodnom frekvencijom.

## 5. ZAKLJUČAK

U ovom radu pokazale su se odrednice svih povijesno važnih temperamenata i današnjeg *Equal* temperamenta. Prikazan je proračun frekvencije akustičkih udara koji nastaju interferencijom dvaju zvučnih signala. Na primjeru je prikazan postupak ugađanja instrumenta pomoću akustičkih udara. Zaključeno je da smanjivanje razlike među vlastitim frekvencijama dvaju tonova rezultira prorjeđivanjem akustičkih udara u vremenu te sprječava pojavu disonantnosti, tj. neskladnosti među tonovima.

Iz diferencijalnih elemenata grede i idealne žice (bez savojne krutosti) opterećenih aksijalnom silom dobivene su valne jednačbe vibracija elemenata. Zaključeno je da se valna jednačba vibriranja idealne žice može izvesti iz jednačbe vibriranja grede uklanjanjem člana  $EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}$  koji nastaje zbog savojne krutosti elementa. Model idealne žice daje valnu jednačbu koja je dovoljno dobra aproksimacija za žice koje su jako fleksibilne, npr. žice na gitari. No, za klavirske žice, zbog veće savojne krutosti, model idealne žice nije dovoljno dobar.

Matematički model napete idealne žice (bez savojne krutosti) predviđa drugu prirodnu frekvenciju dvostruko višu od prve, treću trostruko višu od prve i tako dalje. Međutim, klavirske žice zbog postojanja savojne krutosti imaju drugu vlastitu frekvenciju nešto višu od dvostruke prve, treću nešto višu od trostruke prve i tako dalje. U ovom radu objašnjeni su uzroci efekta rastezanja muzičke skale koristeći matematički model za proračun prirodnih frekvencija grede opterećene konstantnom aksijalnom silom. Rezultati dobiveni modelom grede opterećene konstantnom aksijalnom silom su uspoređeni s modelom nategnute žice bez savojne krutosti, i ti rezultati uspoređeni s mjerenim fundamentalnim prirodnim frekvencijama tonova na stvarnom klaviru. Na primjeru slobodno oslonjene grede opterećene konačnom nateznom silom  $T$  pokazano je da druga prirodna frekvencija nije dvostruka vrijednost prve, nego nešto viša. Prikazom disperzije frekvencijskog spektra slobodno oslonjene grede opterećene aksijalnom silom pokazano je da težnjom natezne sile  $T$  prema beskonačnosti, ovisnost frekvencija  $f_i$  o broju forme vibriranja  $i$  sve više teži linearnom odnosu, odnosno dvostruko viši broj forme vibriranja rezultira dvostruko višom prirodnom frekvencijom.

---

**LITERATURA**

- [1] glazbala. *Hrvatska enciklopedija, mrežno izdanje*. Leksikografski zavod Miroslav Krleža, 2021., <<http://www.enciklopedija.hr/Natuknica.aspx?ID=22247>>, Pristupljeno 9. 1. 2023.,
- [2] klavir. *Hrvatska enciklopedija, mrežno izdanje*. Leksikografski zavod Miroslav Krleža, 2021., <<http://www.enciklopedija.hr/Natuknica.aspx?ID=31786>>, Pristupljeno 19. 1. 2023.,
- [3] Stanković, B.: Projekt Klavir – kroz povijest i građu, Muzička akademija, Sveučilište u Zagrebu, 2011.,
- [4] Pitch (music), Wikipedia, *mrežno*, <[https://en.wikipedia.org/wiki/Pitch\\_\(music\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Pitch_(music))>, Pristupljeno 20. 1. 2023.,
- [5] frekvencija. *Hrvatska enciklopedija, mrežno izdanje*. Leksikografski zavod Miroslav Krleža, 2021., <<http://www.enciklopedija.hr/Natuknica.aspx?ID=20569>>, Pristupljeno 26. 1. 2023.,
- [6] interval. *Hrvatska enciklopedija, mrežno izdanje*. Leksikografski zavod Miroslav Krleža, 2021., <<http://www.enciklopedija.hr/Natuknica.aspx?ID=27673>>, Pristupljeno 8. 2. 2023.,
- [7] Blatter, A.: Revisiting Music Theory, Basic Principles (2nd ed.), Routledge, 2016. <<https://doi.org/10.4324/9781315689975>>,
- [8] Graue, J. C.: scale, Encyclopedia Britannica. <<https://www.britannica.com/art/scale-music>>, Pristupljeno 2. 12. 2022.,
- [9] tonalitet. *Hrvatska enciklopedija, mrežno izdanje*. Leksikografski zavod Miroslav Krleža, 2021. <<http://www.enciklopedija.hr/Natuknica.aspx?ID=61737>>, Pristupljeno 4. 2. 2023.,
- [10] Sutcliffe, T.: Summary – Syntactic Structures in Music, Appendix A, Voice Leading Overview, Consonance and Dissonance, London, *mrežno*, <[https://www.harmony.org.uk/book/voice\\_leading/consonance\\_and\\_dissonance.htm](https://www.harmony.org.uk/book/voice_leading/consonance_and_dissonance.htm)>,
- [11] Piano Tuning, Wikipedia, *mrežno*, <[https://en.wikipedia.org/wiki/Piano\\_tuning](https://en.wikipedia.org/wiki/Piano_tuning)>, Pristupljeno 20. 12. 2022.,
- [12] Zhang, D.: Application of audio visual tuning detection software in piano tuning teaching. *Int J Speech Technol* 22, 251–257, 2019., <<https://doi.org/10.1007/s10772-019-09599-5>>,

- [13] Concert pitch, Wikipedia, *mrežno*, <[https://en.wikipedia.org/wiki/Pitch\\_\(music\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Pitch_(music))>, Pristupljeno 20. 1. 2023.,
- [14] Stationary Waves, Vibration of string, *mrežno*, <[https://thefactfactor.com/facts/pure\\_science/physics/vibrations-of-string-harmonics-overtones/8410/](https://thefactfactor.com/facts/pure_science/physics/vibrations-of-string-harmonics-overtones/8410/)>, Pristupljeno 10. 1. 2023.,
- [15] Rigaud, F., Bertrand D. and Laurent D.: A parametric model of piano tuning. *Proc. of the 14th Int. Conf. on Digital Audio Effects (DAFx-11)*., Paris, 2011.,
- [16] Madarasz, R.: Matematika i muzika. *Festival nauke 2009.*, PMF Novi Sad, 2009.,
- [17] Physics of Sound – Music temperament, Lehman College, *mrežno*, <[https://www.lehman.edu/faculty/dgaranin/Physics\\_of\\_Sound/PHY140-Spring-2007-11-Music\\_temperament.pdf](https://www.lehman.edu/faculty/dgaranin/Physics_of_Sound/PHY140-Spring-2007-11-Music_temperament.pdf)> Pristupljeno 2. 12. 2022.,
- [18] Temperley, N.: tuning and temperament, Encyclopedia Britannica, <<https://www.britannica.com/art/tuning-and-temperament>>, Pristupljeno 2. 12. 2022.,
- [19] Cent (music), Wikipedia, *mrežno*, <[https://en.wikipedia.org/wiki/Cent\\_\(music\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Cent_(music))>, Pristupljeno 2. 12. 2022.,
- [20] Early Music Sources, Temperaments - Historical and Technical Overview, *mrežno*, <<https://www.earlymusicsources.com/youtube/temperaments>>, Pristupljeno 6. 12. 2022.,
- [21] Isacoff, S.: Temperament: how music became a battleground for the great minds of Western civilization, Vintage., 2009.,
- [22] Fonville, J.: Ben Johnston's Extended Just Intonation - A Guide for Interpreters. *Perspectives of New Music*, 29(2), 106–137., 1991., <<https://doi.org/10.2307/833435>>
- [23] Musical temperament, *New World Encyclopedia*, 2008., <[https://www.newworldencyclopedia.org/entry/Musical\\_temperament](https://www.newworldencyclopedia.org/entry/Musical_temperament)>, Pristupljeno 6. 12. 2022.,
- [24] Alfirević, I. et al.: Tehnička enciklopedija, 13. svezak – Vibracije, Leksikografski zavod Miroslav Krleža, 1997.,
- [25] Pythagoras and his Vibrating Strings: The relationship between music and mathematics, *mrežno*, <<https://www.yumpu.com/en/document/read/6221850/pythagoras-and-his-vibrating-strings>>, Pristupljeno 7. 1. 2023.,
- [26] vibracije. *Hrvatska enciklopedija, mrežno izdanje*. Leksikografski zavod Miroslav Krleža, 2021., <<http://www.enciklopedija.hr/Natuknica.aspx?ID=64462>>, Pristupljeno 10. 1. 2023.,

- [27] amplituda. *Hrvatska enciklopedija, mrežno izdanje*. Leksikografski zavod Miroslav Krleža, 2021., <<http://www.enciklopedija.hr/Natuknica.aspx?ID=2363>>, Pristupljeno 27. 1. 2023.,
- [28] Stojni val, Wikipedia, *mrežno*, <[https://hr.wikipedia.org/wiki/Stojni\\_val](https://hr.wikipedia.org/wiki/Stojni_val)>, Pristupljeno 20. 12. 2022.,
- [29] More, H.: Vibration of String, *mrežno*, 2020., <[https://thefactfactor.com/facts/pure\\_science/physics/vibrations-of-string-harmonics-overtones/8410/](https://thefactfactor.com/facts/pure_science/physics/vibrations-of-string-harmonics-overtones/8410/)>, Pristupljeno 2. 1. 2023.,
- [30] Superpozicija titranja, Wikipedia, *mrežno*, <[https://hr.wikipedia.org/wiki/Superpozicija\\_titranja](https://hr.wikipedia.org/wiki/Superpozicija_titranja)>, Pristupljeno 20. 12. 2022.,
- [31] Tonejc, A.: Valovi, materijali s predavanja, *mrežno*, Prirodoslovno - matematički fakultet, <[http://www.phy.pmf.unizg.hr/~andelka/Fizika%20za%20geologe/valovi\\_tekst1.pdf](http://www.phy.pmf.unizg.hr/~andelka/Fizika%20za%20geologe/valovi_tekst1.pdf)>,
- [32] načelo superpozicije, Struna – Hrvatsko strukovno nazivlje, *mrežno*, Institut za hrvatski jezik i jezikoslovlje, <<http://struna.ihj.hr/naziv/nacelo-superpozicije/7943/>>, Pristupljeno 27. 1. 2023.,
- [33] Superposition, isaac, *mrežno*, University of Cambridge, <[https://isaacphysics.org/concepts/cp\\_superposition?stage=all](https://isaacphysics.org/concepts/cp_superposition?stage=all)>, Pristupljeno 10. 1. 2023.,
- [34] Hearing range, Wikipedia, *mrežno*, <[https://en.wikipedia.org/wiki/Hearing\\_range](https://en.wikipedia.org/wiki/Hearing_range)>, Pristupljeno 20. 1. 2023.,
- [35] Beat (acoustics), Wikipedia, *mrežno*, <[https://en.wikipedia.org/wiki/Beat\\_\(acoustics\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Beat_(acoustics))>, Pristupljeno 2. 12. 2022.,
- [36] Stretched tunning, Wikipedia, *mrežno*, <[https://en.wikipedia.org/wiki/Stretched\\_tuning](https://en.wikipedia.org/wiki/Stretched_tuning)>, Pristupljeno 20. 12. 2022.,
- [37] Inharmonicity, Wikipedia, *mrežno*, <<https://en.wikipedia.org/wiki/Inharmonicity>>, Pristupljeno 20. 12. 2022.,
- [38] Harmonic series (music), Wikipedia, *mrežno*, <[https://en.wikipedia.org/wiki/Harmonic\\_series\\_\(music\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Harmonic_series_(music))>, Pristupljeno 20. 12. 2022.,
- [39] Horavth, P., Szalai, P.: Bending stiffness measurement of wounded piano strings,
- [40] Hinrichsen, H: Entropy-based tuning of musical instruments, *Revista brasileira de Ensino de Física*, 2012, 34: 1-8.,
- [41] Bokaian, A: Natural frequencies of beams under tensile axial loads, *Journal of Sound and Vibration*, Volume 142, Issue 3, 1990,



- [42] Fletcher, H.: Normal vibration frequencies of a stiff piano string, *The Journal of the Acoustical Society of America*, 1964, 36.1: 203-209.,
- [43] Gracia, X, Sanz-Perela, T.: The wave equation for stiff strings and piano tuning, *arXiv preprint arXiv:1603.05516*, 2016.,
- [44] Paulelo, S: Music wire, mrežno, 2012.,  
<<https://www.stephenpaulello.com/sites/default/files/paulello/intros-de-pages/stephenpaulellomusicwire.pdf>>, Pristupljeno: 2. 1. 2023.,

**DODATAK****Tablica 2. Parametri različitih tipova žice koje realiziraju ton H na klaviru *Steinway & Sons* modela O [44]**

Tip žice	Zvučna duljina [m]	Promjer [mm]	Natezna sila [N]	Naprezanje [%]	Masena gustoća [kg/m <sup>3</sup> ]	Youngov modul elastičnosti [GPa]
M	1.11	1.025	491.1	34.07	7850	202
0	1.11	1.025	491.1	39.94	7810	202
1	1.11	1.025	491.1	50.87	7850	202
2	1.11	1.025	491.1	60.56	7820	202