

# Optimizacija oblika jednostavnog letećeg krila

---

**Mostarčić, Branimir**

**Undergraduate thesis / Završni rad**

**2023**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:235:676657>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-10-13**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb](#)



FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE  
SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

# ZAVRŠNI RAD

Mentor:

Izv. Prof. dr. sc. Pero Prebeg

Student: Branimir Mostarčić

Matični broj: 0035226325

Zagreb, 2023

FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE  
SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

# ZAVRŠNI RAD

Student: Branimir Mostarčić

Matični broj: 0035226325

Zagreb, 2023

Izjavljujem da sam ovaj rad izradio samostalno koristeći: stečena znanja tijekom studija i navedenu literaturu.

Zahvaljujem se: mentoru izv. Prof. dr. sc. Peri Prebegu, Prof. dr. sc. Milanu Vrdoljaku i dr. sc. Marijanu Andriću, mag. ing. aeroing. na stručnoj pomoći i savjetima koji su bili neophodni za uspješan završetak ovog rada.

Branimir Mostarčić



Sveučilište u Zagrebu Fakultet strojarstva i brodogradnje	
Datum	Prilog
Klasa: 602 - 04 / 23 - 6 / 1	
Ur.broj: 15 - 1703 - 23 -	

## ZAVRŠNI ZADATAK

Student: **Branimir Mostarčić**

JMBAG: **0035226325**

Naslov rada na hrvatskom jeziku: **Optimizacija oblika jednostavnog letećeg krila**

Naslov rada na engleskom jeziku: **Simple flying wing shape optimization**

Opis zadatka:

Konfiguracija leteće krilo eliminira rep konvencionalnog zrakoplova i stapa trup s krilom. Primjena ove konfiguracije omogućuje smanjenje parazitnog otpora što povećava energetska efikasnost zrakoplova. Zbog nepostojanja konvencionalnih horizontalnih stabilizacijskih površina, uzdužnu stabilnost zrakoplova neophodno je kontrolirati geometrijom krila. U radu je potrebno u programskom jeziku Python izraditi matematički model za optimizaciju geometrije jednostavnog letećeg krila primjenom nekog od gradijentnih optimizacijskih algoritama te implementacije metode za određivanje aerodinamičkih koeficijenata sila uzgona i otpora te momenta propinjanja u ovisnosti o geometriji krila.

Zadatak obuhvaća sljedeće:

- formulaciju optimizacijskog problema projektiranja oblika letećeg krila
- izradu Python modula za opis geometrije krila koji omogućuje promjenu strijele, promjenu postavnog kuta te promjenu duljine tetive aeroprofila duž krila
- izradu Python modula za određivanje aerodinamičkih koeficijenata sila uzgona i otpora te momenta propinjanja, u ovisnosti o geometriji krila, implementacijom metode koja je prikladna za konceptualno projektiranje zrakoplova
- izradu Python modula za optimizaciju geometrije krila koji integrira prethodna dva modula s postojećom implementacijom nekog od gradijentnih optimizacijskih algoritama
- provedbu optimizacije primjenom implementiranih Python modula, na primjeru jednostavnog letećeg krila.

U radu je potrebno navesti korištenu literaturu i eventualno dobivenu pomoć.

Zadatak zadan:

30. 11. 2022.

Datum predaje rada:

1. rok: 20. 2. 2023.  
2. rok (izvanredni): 10. 7. 2023.  
3. rok: 18. 9. 2023.

Predviđeni datumi obrane:

1. rok: 27. 2. – 3. 3. 2023.  
2. rok (izvanredni): 14. 7. 2023.  
3. rok: 25. 9. – 29. 9. 2023.

Zadatak zadao:

Izv. prof. dr. sc. Pero Prebeg

Predsjednik Povjerenstva:

Prof. dr. sc. Milan Vrdoljak

**SADRŽAJ**

SADRŽAJ .....	I
POPIS SLIKA .....	III
POPIS TABLICA .....	V
POPIS OZNAKA .....	VI
SAŽETAK.....	XIV
SUMMARY .....	XV
1. UVOD .....	1
2. UKRATKO O OPTIMIZACIJI .....	2
2.1. Optimizacija oblika.....	2
2.2. Optimizacija skalara .....	3
2.3. Svođenje optimizacije oblika na problem optimizacije skalara .....	4
3. GEOMETRIJA KRILA.....	6
3.1. Opis geometrije.....	6
3.2. Krivulja vodilja.....	8
3.3. Aeroprofil .....	14
3.4. Transformacija aeroprofila .....	17
3.5. Duljina krivulje vodilje.....	19
3.6. Distribucija duljine tetive duž raspona .....	20
3.7. Distribucija uvijanja duž raspona .....	25
3.8. Distribucija dihedrala.....	28
3.9. Konačna geometrija .....	29
4. AERODINAMIČKI MODEL .....	31
4.1. Kratak teorijski opis aerodinamičkog modela .....	31
4.2. Proračunska mreža.....	32
4.3. Formuliranje metode vrtložne rešetke .....	35
4.3.1. Konačna vrtložna nit.....	36
4.3.2. Beskonačna vrtložna nit.....	37
4.3.3. Prstenasta vrtložna nit.....	39
4.3.4. Potkovičasta vrtložna nit.....	39
4.3.5. Formiranje i rješavanje sustava jednadžbi strujanja .....	40
4.4. Aerodinamičke sile i momenti.....	48
4.4.1. Uzgon.....	48
4.4.2. Otpor .....	50

4.4.3. Moment propinjanja.....	60
4.5. Aerodinamički koeficijenti .....	65
4.6. Validacija aerodinamičkog modela .....	68
5. FORMULACIJA OPTIMIZACIJSKOG PROBLEMA.....	72
5.1. Projektne varijable .....	72
5.2. Funkcija cilja .....	73
5.3. Ograničenja jednakosti .....	73
5.4. Ograničenja nejednakosti.....	74
5.5. Intervali projektnih varijabli .....	79
6. KRATAK OPIS Python PROGRAMA.....	81
7. REZULTATI OPTIMIZACIJE .....	83
8. ZAKLJUČAK .....	94
LITERATURA .....	95

## POPIS SLIKA

Slika 3.1 Shematski prikaz geometrije letećeg krila ( $x$ ,  $y$  i  $y$ ,  $z$  ravnina)

Slika 3.2 Shematski prikaz geometrije letećeg krila (winglet)

Slika 3.3 Bézierova krivulja drugog reda sa pripadajućim kontrolnim tačkama

Slika 3.4 Kvalitativni prikaz aeroprofila sa tetivom jedinične duljine

Slika 3.5 Kvantitativni prikaz aeroprofil sa tetivom jedinične duljine

Slika 3.6 Prikaz transformacije aeroprofila

Slika 3.7 Distribucija duljine tetive duž raspona

Slika 3.8 Uz određivanje nagiba  $k_{11}^c$

Slika 3.9 Distribucija uvijanja duž raspona

Slika 3.10 Prikaz parametarski zadanih krivulja aeroprofila

Slika 4.1 2D shematski prikaz: srednje površine, proračunske mreže i vrtložnih prstena

Slika 4.2 3D shematski prikaz: srednje površine, proračunske mreže i vrtložnih prstena

Slika 4.3 Prikaz konačne vrtložne niti

Slika 4.4 Prikaz beskonačne vrtložne niti

Slika 4.5 Prikaz prstenaste vrtložne niti

Slika 4.6 Prikaz potkovičaste vrtložne niti

Slika 4.7 Uz pronalazak vektora normale

Slika 4.8 Uz postavljanje uvjeta nepromočivosti

Slika 4.9 Uz izračun uzgona

Slika 4.10 Prikaz kontrolnog volumena i Trefftzove ravnine

Slika 4.11 Prikaz diskretizirane vrtložne plahte u Trefftzovoj ravnini

Slika 4.12 Uz pronalaženje  $\cos(\Lambda_{Mik})$

Slika 4.13 Prikaz ekstrudirane plohe u izometriji

Slika 4.14 Projekcija ravnine na  $y$ ,  $z$  ravninu

Slika 4.15 Uz izvod momenta propinjanja



Slika 4.16 Težište površine poprečnog presjeka aeroprofila sa jediničnom tetivom

Slika 4.17 Prikaz testne letjelice

Slika 4.18 Ovisnost koeficijenta uzgona o napadnom kutu za testnu letjelicu

Slika 4.19 Ovisnost koeficijenta otpora o napadnom kutu za testnu letjelicu

Slika 4.20 Ovisnost koeficijenta ukupnog momenta o napadnom kutu za testnu letjelicu

Slika 4.21 Distribucija koeficijenta lokalnog uzgona za testnu letjelicu

Slika 5.1 Prva konfiguracija kvadratne funkcije

Slika 5.2 Druga konfiguracija kvadratne funkcije

Slika 5.3 Treća konfiguracija kvadratne funkcije

Slika 5.4 Četvrta konfiguracija kvadratne funkcije

Slika 7.1 Ovisnost koeficijenta uzgona o napadnom kutu za inicijalne projektne varijable

Slika 7.2 Ovisnost koeficijenta uzgona o napadnom kutu za optimizirane projektne varijable

Slika 7.3 Ovisnost koeficijenta otpora o napadnom kutu za inicijalne projektne varijable

Slika 7.4 Ovisnost koeficijenta otpora o napadnom kutu za optimizirane projektne varijable

Slika 7.5 Ovisnost koeficijenta momenta o napadnom kutu za inicijalne projektne varijable

Slika 7.6 Ovisnost koeficijenta momenta o napadnom kutu za optimizirane projektne varijable

Slika 7.7 Distribucija lokalnog koeficijenta uzgona za inicijalne projektne varijable

Slika 7.8 Distribucija lokalnog koeficijenta uzgona za optimizirane projektne varijable

Slika 7.9 Prikaz inicijalne geometrije u izometriji

Slika 7.10 Prikaz optimizirane geometrije u izometriji

Slika 7.11 Prikaz inicijalne geometrije promatrane sa x osi

Slika 7.12 Prikaz optimizirane geometrije promatrane sa x osi

Slika 7.13 Prikaz inicijalne geometrije promatrane sa y osi

Slika 7.14 Prikaz optimizirane geometrije promatrane sa y osi

Slika 7.15 Prikaz inicijalne geometrije promatrane sa z osi

Slika 7.16 Prikaz optimizirane geometrije promatrane sa z osi

## **POPIS TABLICA**

Tablica 5.1 Geometrijski parametri letjelice

Tablica 5.2 Funkcije ograničenja jednakosti

Tablica 5.3 Funkcije ograničenja nejednakosti

Tablica 5.4 Intervali projektnih varijabli

Tablica 7.1 Ulazni parametri

Tablica 7.2 Vrijednosti funkcija cilja za inicijalne i optimizirane projektne varijable

Tablica 7.3 Vrijednosti funkcija jednakosti za inicijalne i optimizirane projektne varijable

Tablica 7.4 Predznaci funkcija nejednakosti za inicijalne i optimizirane projektne varijable

Tablica 7.5 Vrijednosti inicijalnih i optimiziranih projektnih varijabli

## POPIS OZNAKA

- A** Matrica sustava jednadžbi
- $\vec{A}_{Knm}$  Vektor dijagonale panela
- $\bar{A}_A$  Površina aeroprofila se jediničnom duljinom tetive
- b** Vektor sustava jednadžbi
- $\vec{B}_i(t_i)$   $i$ -ta Bézierova krivulja (krivulja vodilja  $i$ -tog segmenta)
- $\vec{B}_{Knm}$  Vektor dijagonale panela
- $b_M$  Maksimalni dopušteni raspon krila
- $c_R$  Duljina tetive u korijenu krila
- $c_{22}$  Duljina tetive na kraju drugog segmenta
- $c_{32}$  Duljina tetive na kraju trećeg segmenta
- $c_{42}$  Duljina tetive na kraju četvrtog segmenta
- $c_T$  Duljina tetive na vrhu krila
- $c_i(t_i)$  Distribucija duljine tetive na  $i$ -tom segmentu
- $c_{fi}$  Koeficijent otpora trenja  $k$ -te ploče na  $i$ -tom segmentu
- $c_{lik}$  Koeficijent lokalnog uzgona na mjestu  $k$ -te ploče na  $i$ -tom segmentu
- $c_A$  Duljina srednje aerodinamičke tetive
- $c_L$  Koeficijent uzgona letjelice
- $c_D$  Koeficijent otpora letjelice
- $c_M$  Koeficijent momenta propinjanja oko centra mase letjelice
- $(c_1^+)_{\text{stall}}$  Maksimalni koeficijent uzgona aeroprofila
- $(c_1^-)_{\text{stall}}$  Minimalni koeficijent uzgona aeroprofila
- $D$  Otpor letjelice
- $D_I$  Inducirani otpor letjelice
- $D_F$  Parazitni otpor letjelice
- $D_{Ik}$  Inducirani otpor kojeg stvara  $k$ -ta potkova
- $D_{Fik}$  Parazitni otpor kojeg stvara  $k$ -ta ploče na  $i$ -tom segmentu

- $\vec{F}_{Rjk}$  Sila koju stvara jedna noseća nit
- $F(x_i)$  Funkcija cilja
- $\bar{f}$  Maksimalna udaljenost srednje linije od tetive aeroprofila sa jediničnom duljinom tetive
- $g_k$   $k$ -ta funkcija ograničenja nejednakosti
- $H_{jk}$  Hesseova matrica
- $h_j$   $j$ -ta funkcija ograničenja jednakosti
- $H_T$  Duljina produžetka trupa, predviđenog za montažu motora
- $H_F$  Duljina trupa
- $H_W$  Visina vertikalnog djela wingleta (vertikalnog stabilizatora)
- $\bar{h}_c(\bar{x})$  Funkcija srednje linije aeroprofila sa tetivom jedinične duljine
- $\bar{h}_g(\bar{x})$  Funkcija gornjake aeroprofila sa tetivom jedinične duljine
- $\bar{h}_d(\bar{x})$  Funkcija donjake aeroprofila sa tetivom jedinične duljine
- $k_{11}^c$  Nagib distribucije duljine tetive na početku prvog segmenta
- $k_{12}^c$  Nagib distribucije duljine tetive na kraju prvog segmenta
- $k_{22}^c$  Nagib distribucije duljine tetive na kraju drugog segmenta
- $k_{32}^c$  Nagib distribucije duljine tetive na kraju trećeg segmenta
- $k_{42}^c$  Nagib distribucije duljine tetive na kraju četvrtog segmenta
- $k_{52}^c$  Nagib distribucije duljine tetive na kraju petog segmenta
- $k_{22}^\alpha$  Nagib distribucije uvijanja na kraju drugog segmenta
- $k_{32}^\alpha$  Nagib distribucije uvijanja na kraju trećeg segmenta
- $k_{42}^\alpha$  Nagib distribucije uvijanja na kraju četvrtog segmenta
- $k_{52}^\alpha$  Nagib distribucije uvijanja na kraju petog segmenta
- $K_{i3}^c, \dots, K_{i0}^c$  Koeficijenti distribucije duljine tetive na  $i$ -tom segmentu
- $K_{i3}^\alpha, \dots, K_{i0}^\alpha$  Koeficijenti distribucije uvijanja na  $i$ -tom segmentu
- $\vec{L}_{Ai}''$  Parametarski zapis jedne od tri ne transformirane krivulje aeroprofila ( $\vec{L}_{ci}'', \vec{L}_{gi}'', \vec{L}_{di}''$ )

- $\vec{L}'_{Ai}$  Parametarski zapis jedne od tri djelomično transformirane krivulje aeroprofila ( $\vec{L}'_{ci}, \vec{L}'_{gi}, \vec{L}'_{di}$ )
- $\vec{L}_{Ai}$  Parametarski zapis jedne od tri potpuno transformirane krivulje aeroprofila ( $\vec{L}_{ci}, \vec{L}_{gi}, \vec{L}_{di}$ )
- $\vec{l}_{pjk}$  Vektor koji leži na nosećoj vrtložnoj niti
- $\vec{l}$  Parametarski zadana krivulja vrtložne niti
- $L$  Uzgon letjelice
- $L_{jk}$  Uzgon kojeg stvara jedna noseća nit
- $L'$  Veličina koja uzima u obzir debljinu aeroprofila pri proračunu parazitnog otpora
- $\bar{l}_A$  Duljina jedne od krivulje aeroprofila sa jediničnom duljinom tetive ( $\bar{l}_c, \bar{l}_g, \bar{l}_d$ )
- $l$  Duljina ravnog djela krivulje vodilje (krivulje vodilje trećeg segmenta)
- $lb_i$  Donja granica  $i$ -te projektne varijable
- $M$  Moment propinjanja oko centra mase letjelice
- $M_L$  Moment propinjanja oko centra mase letjelice, uzrokovan uzgonom
- $M_{DI}$  Moment propinjanja oko centra mase letjelice, uzrokovan induciranim otporom
- $M_{DF}$  Moment propinjanja oko centra mase letjelice, uzrokovan parazitnim otporom
- $M_{Lj}$  Moment propinjanja oko centra mase letjelice, uzrokovan uzgonom jedne noseće niti
- $M_{DIk}$  Moment propinjanja oko centra mase letjelice, uzrokovan induciranim otporom  $k$ -te potkove
- $M_{DFk}$  Moment propinjanja oko centra mase letjelice, uzrokovan parazitnim otporom  $k$ -te ploče
- $Ma_\infty$  Machov broj
- $m$  Masa letjelice itereta
- $m_K$  Masa prazne letjelice
- $m_T$  Masa tereta
- $\vec{n}_{Knm}$  Vektor normale u kontrolnoj točki
- $\vec{n}_{Mk}$  Vektor normale u sredini spojnice koja povezuje dvije beskonačne vrtložne niti u Trefftzovoj ravnini

- $N$  Minimalni broj panela duž raspona
- $N_i$  Broj panela na  $i$ -tom segmentu
- $P_i(t_i)$   $x$ ,  $y$  ili  $z$  komponenta Bézierove krivulje (krivulje vodilje)  $i$ -tog segmenta
- $P_{ik}$   $x$ ,  $y$  ili  $z$  komponenta  $k$ -te kontrolne točke Bézierove krivulje (krivulje vodilje)  $i$ -tog segmenta
- $P''_{Ai}$   $x$ ,  $y$  ili  $z$  komponenta parametarski zadane jedne od tri ne transformirane krivulje aeroprofila ( $P''_{ci}$ ,  $P''_{gi}$ ,  $P''_{di}$ )
- $P'_{Ai}$   $x$ ,  $y$  ili  $z$  komponenta parametarski zadane jedne od tri djelomično transformirane krivulje aeroprofila ( $P'_{ci}$ ,  $P'_{gi}$ ,  $P'_{di}$ )
- $P_{Ai}$   $x$ ,  $y$  ili  $z$  komponenta parametarski zadane jedne od tri potpuno transformirane krivulje aeroprofila ( $P_{ci}$ ,  $P_{gi}$ ,  $P_{di}$ )
- $P_{ci}$   $x$ ,  $y$  ili  $z$  komponenta parametarski zadane plohe  $i$ -tog segmenta
- $P_{Mi}^A$   $x$ ,  $y$  ili  $z$  komponenta krivulje maksimalne debljine aeroprofila
- $\bar{P}_{CM}^A$   $x$ ,  $y$  ili  $z$  koordinata težišta površina aeroprofila sa jediničnom duljinom tetive
- $P_{CM}^A$   $x$ ,  $y$  ili  $z$  komponenta krivulje koja spaja težišta površina aeroprofila
- $P_T$   $x$ ,  $y$  ili  $z$  koordinata centra mase tereta
- $P_{CM}$   $x$ ,  $y$  ili  $z$  koordinata centra mase letjelice
- $P_{Ai}$   $x$ ,  $y$  ili  $z$  komponenta jedne od tri plohe dobivene ekstrudiranjem jedne od tri krivulje aeroprofila ( $P_{ci}$ ,  $P_{gi}$ ,  $P_{di}$ )
- $P_{Nxy}^{LL}$  Komponenta matrice sa koordinatama svih prednjih lijevih vrhova panela
- $P_{Nxy}^{LR}$  Komponenta matrice sa koordinatama svih prednjih desnih vrhova panela
- $P_{Nxy}^{TR}$  Komponenta matrice sa koordinatama svih stražnjih desnih vrhova panela
- $P_{Nxy}^{TL}$  Komponenta matrice sa koordinatama svih stražnjih lijevih vrhova panela
- $P_{N\mu}$  Komponenta matrice mreže
- $P_{Fjk}^L$  Komponenta matrice sa koordinatama svih lijevih točaka noseće linije
- $P_{Fjk}^R$  Komponenta matrice sa koordinatama svih desnih točaka noseće linije
- $P_{Knm}$  Komponenta matrice sa koordinatama svih kontrolnih točaka

$P_{Fnm}$	Komponenta matrice sa koordinatama svih točaka na sredini nosećih niti
$P_{Mk}^{yz}$	Komponenta matrice sa koordinatama sredine spojnice koje spajaju slobodne vrtložne niti u Trefftzovoj ravnini
$P_{REQ}$	Snaga potrebna za let
$P$	Broj panela duž tetive
$Q$	Broj panela duž raspona
$\mathbf{R}_x$	Matrica transformacije aeroprofila oko $x$ -osi
$\mathbf{R}_y$	Matrica transformacije aeroprofila oko $y$ -osi
$\vec{r}$	Vektor koji spaja diferencijal krivulje vrtložne niti sa točkom u kojoj se računa inducirana brzina
$r_1$	Parametar za namještanje zakrivljenosti izlaznog brida prvog i drugog segmenta
$r_3$	Parametar za namještanje zakrivljenosti četvrtog segmenta
$R_T$	Veličina koja uzima u obzir debljinu aeroprofila pri proračunu parazitnog otpora
$R_{\Lambda ik}$	Veličina koja uzima u obzir strijelu krila pri proračunu parazitnog otpora
$Re_{ik}$	Reynoldsov broj $k$ -te ploče na $i$ -tom segmentu
$\vec{S}_{ci}$	Parametarski zadana srednja ploha krila
$S_{REF}$	Referentna površina
$S_{wik}$	Oplakivana površina $k$ -te ploče na $i$ -tom segmentu
$s$	Parametar jedne od tri krivulje aeroprofila
$t_i$	Parametar krivulje vodilje $i$ -tog segmenta
$t_{vi}$	Vrijednost parametra krivulje vodilje kojim se definira diskretizacija duž raspona
$\bar{t}$	Maksimalna debljina aeroprofila sa jediničnom duljinom tetive
$ub_i$	Gornja granica $i$ te projektne varijable
$\vec{v}_T^{KVN}$	Brzina koju inducira ravna konačna vrtložna nit u točki $P_T$
$\vec{v}_T^{BVN}$	Brzina koju inducira ravna beskonačna vrtložna nit u točki $P_T$
$\vec{v}_T^V$	Brzina koju inducira točkasti vrtlog u točki $P_T$ u Trefftzovoj ravnini
$\vec{v}_T^R$	Brzina koju inducira prstenasti vrtlog u točki $P_T$

- $\vec{v}_T^H$  Brzina koju inducira potkovičasti vrtlog u točki  $P_T$
- $(\vec{v}_{Knmjk}^R)_R$  Brzina koju inducira jedan vrtložni prsten na desnom krilu, u kontrolnoj točki
- $(\vec{v}_{Knmjk}^R)_L$  Brzina koju inducira jedan vrtložni prsten na lijevom krilu, u kontrolnoj točki
- $(\vec{v}_{Knmk}^H)_R$  Brzina koju inducira jedan potkovičasta nit na desnom krilu, u kontrolnoj točki
- $(\vec{v}_{Knm}^H)_L$  Brzina koju inducira jedan potkovičasta nit na lijevom krilu, u kontrolnoj točki
- $(\vec{v}_{Kkv}^V)_R$  Brzina koju inducira jedan točkasti vrtlog u na strani desnog krila, u sredini spojnice
- $(\vec{v}_{Kkv}^V)_L$  Brzina koju inducira jedan točkasti vrtlog u na strani lijevog krila, u sredini spojnice
- $\vec{v}_{Knm}$  Ukupna inducirana brzina u kontrolnoj točki
- $\vec{v}_{Fjk}$  Ukupna inducirana brzina u sredini noseće niti
- $\vec{v}_{Mk}$  Ukupna inducirana brzina u sredini spojnice koja spaja beskonačne vrtložne niti u Trefftzovoj ravnini
- $\vec{v}_\infty$  Brzina leta
- $v_\infty$  Magnituda brzine leta
- $\vec{w}_{Knm}$  Ukupna inducirana brzina u kontrolnoj točki, projicirana na pravac normale u kontrolnoj točki
- $\vec{w}_{Mk}$  Ukupna inducirana brzina u sredini spojnice koja spaja beskonačne vrtložne niti u Trefftzovoj ravnini, projicirana na pravac normale na spojnici
- $\vec{w}_\infty$  Brzina leta projicirana na pravac normale u kontrolnoj točki
- $W$  Pola širine trupa
- $(\tilde{x}_{opt})_i$  Optimalna vrijednost bezdimenzijske projektne varijable
- $(x_{opt})_i$  Optimalna vrijednost projektne varijable
- $(x_{stac})_i$  Stacionarna vrijednost projektne varijable
- $x_i$  Projektna varijabla
- $\tilde{x}_i$  Bezdimenzijska projektna varijabla
- $x_{0i}$  Apsolutna vrijednost početne projektne varijable



$\bar{x}_t$	Mjesto najveće debljine aeroprofila sa jediničnom tetivom
$\bar{x}_f$	Mjesto najveće udaljenosti srednje linije aeroprofila od tetive sa jediničnom tetivom
$\alpha_i(t_i)$	Distribucija uvijanja na $i$ -tom segmentu
$\alpha_{22}$	Kut uvijanja na kraju drugog segmenta
$\alpha_{32}$	Kut uvijanja na kraju trećeg segmenta
$\alpha_{42}$	Kut uvijanja na kraju četvrtog segmenta
$\alpha_{52}$	Kut uvijanja na kraju petog segmenta
$\alpha_\infty$	Napadni kut letjelice
$\alpha_{L0}$	Napadni kut nultog uzgona letjelice
$\alpha_{M0}$	Napadni kut nultog momenta letjelice
$\boldsymbol{\gamma}$	Vektor nepoznanica sustava jednadžbi (vektor cirkulacija)
$\Gamma_{jk}$	Cirkulacija vrtložne niti
$\gamma_{jk}$	Cirkulacija vrtložne niti, svedena na brzinu leta
$\Delta s$	Prirast parametra $s$
$\Delta \zeta_i$	Duljina krivulje vodilje projicirane na $y, z$ ravninu, između dvije točke proračunske mreže
$\zeta_i(t_i)$	Duljina krivulje vodilje $i$ -tog segmenta, projicirane na $y, z$ ravninu, u ovisnosti o parametru krivulje vodilje
$\zeta_i$	Duljina krivulje vodilje $i$ -tog segmenta, projicirane na $y, z$ ravninu
$\zeta_{Li}$	Duljina krivulje vodilje, projicirane na $y, z$ ravninu, mjereno do početka $i$ -tog segmenta
$\zeta_{Ri}$	Duljina krivulje vodilje, projicirane na $y, z$ ravninu, mjereno do kraja $i$ -tog segmenta
$\theta_i(t_i)$	Distribucija dihedrala na $i$ -tom segmentu
$\Lambda_{Mik}$	Kut između krivulje najveće debljine aeroprofila i $y, z$ ravnine na mjestu $k$ -te ploče $i$ -tog segmenta
$\lambda$	Parametar stabilnosti/upravljivosti
$\nu_z$	Kinematička viskoznost zraka na visini leta
$\rho_z$	Gustoća zraka na visini leta
$\rho_K$	Gustoća letjelice/konstrukcije

- $\chi_{x22}$  Parametar za namještanje širine drugog segmenta
- $\chi_{y22}$  Parametar za namještanje strijele
- $\chi_{z22}$  Parametar za namještanje dihedrala
- $\chi_{x51}$  Parametar za namještanje oblika donjeg djela wingleta
- $\chi_{z5}$  Parametar za namještanje oblika donjeg djela wingleta
- $\chi_{x5}$  Parametar za namještanje oblika gornjeg djela wingleta
- $\vec{\Omega}^{KVN}$  Funkcija utjecaja ravne konačne vrtložne niti
- $\vec{\Omega}^{BVN}$  Funkcija utjecaja ravne beskonačne vrtložne niti
- $\vec{\Omega}^V$  Funkcija utjecaja točkaste vrtložne niti
- $\vec{\Omega}^R$  Funkcija utjecaja prstenaste vrtložne niti
- $\vec{\Omega}^H$  Funkcija utjecaja potkovičaste vrtložne niti
- $(\vec{\Omega}_{Mkv}^V)_{RL}$  Funkcija utjecaja točkastih vrtloga na strani lijevog i desnog krila, u točki  $P_{Mk}^{yz}$
- $(\vec{\Omega}_{Knmjk}^R)_{RL}$  Funkcija utjecaja prstenastih vrtložnih niti na lijevom i desnom krilu, u točki  $P_{Knm}$
- $(\vec{\Omega}_{Knm}^H)_{RL}$  Funkcija utjecaja potkovičastih vrtložnih niti na lijevom i desnom krilu, u točki  $P_{Kn}$

## SAŽETAK

U ovom projektu, cilj je optimizirati geometriju te parametre leta letećeg krila u režimu krstarenja, pomoću već postojećih algoritama za pronalaženje minimuma multi varijabilne funkcije, koji su dostupni unutar programskog jezika Python. U proces optimizacije spada: matematičko modeliranje geometrije koja će se optimizirati, postavljanje i validacija aerodinamičkog modela pomoću kojeg se računaju aerodinamička svojstva geometrije letećeg krila te postavljanje funkcije cilja koju je potrebno minimizirati, skupa sa pripadajućim ograničenjima. Ukratko će biti objašnjen Python kôd pomoću kojeg se obavlja optimizacija te će biti prikazani rezultati optimizacije na konkretnom primjeru ulaznih varijabli.

Ključne riječi: optimizacija, leteće krilo, geometrija, aerodinamički model.

## **SUMMARY**

The objective of this project is to optimize the geometry as well as flight parameters of a flying wing in cruising regime, by means of already existing algorithms for finding the minima of multivariable functions, that are available in the programming language Python. The optimization process includes: mathematical modeling of the geometry that will be subject to optimization, setup and validation of the aerodynamic model that will be used to calculate aerodynamic properties of the flying wing geometry and setup of the objective function that is required to be minimized, together with corresponding constraints. A brief explanation of the Python code used for optimization will be given and results of the optimization for particular entry parameters will be shown.

Key words: optimization, flying wing, geometry, aerodynamic model.

# 1. UVOD

Cilj ovog projekta je prikazati proces optimizacije oblika, na primjeru letećeg krila. Potrebno je oblik letećeg krila oblikovati na način da snaga potrebna za let bude što niža u režimu krstarenja a da isti ima određena svojstva koja su vezana za: ostvarivost leta, stabilnost letjelice te ostale zahtjeve kao što su npr.: mogućnost smještaja motora, upravljačkih površina itd.. Općenito, optimizacija letećeg krila obuhvaća simultanu optimizaciju aerodinamike (tu osim samog oblika krila spada i oblik upravljačkih površina) te konstrukcije letjelice. Uz to je bitno kontrolirati dinamiku te stabilnost letjelice. Ovdje će se uzeti u obzir samo aerodinamika (ne uzimaju se u obzir upravljačke površine pošto se razmatra isključivo režim krstarenja) te uzdužna stabilnost letjelice koja je ujedno i nužna kako bi let uopće bio ostvariv. Konstrukcija i dinamika letjelice će se indirektno uzeti u obzir na način da se uvedu određene restrikcije na geometriju krila.

Kako bi se taj zadatak uspješno proveo, potrebno je poznavati ključne elemente optimizacije.

## 2. UKRATKO O OPTIMIZACIJI

Optimizacija je proces variranja varijabli s ciljem svođenja neke veličine na minimum ili maksimum. Varijable mogu biti: skalari, oblici i topologije pa se s obzirom na varijable optimizacije dijele na tri glavne kategorije:

- optimizacija skalara (dimenzijska optimizacija)
- optimizacija oblika i
- topološka optimizacija.

Svaka od tih kategorija dijeli se na:

- optimizaciju bez ograničenja
- optimizaciju sa ograničenjima.

Pošto je cilj ovog rada optimizacija oblika letećeg krila, detaljnije će se objasniti optimizacija oblika.

### 2.1. Optimizacija oblika

Ukoliko imamo optimizaciju oblika bez ograničenja, onda se taj problem svodi na pronalazak stacionarnog oblika nekog objekta tj. oblika čija varijacija ne rezultira promjenom iznosa nekog funkcionala koji predstavlja neku veličinu koju želimo minimizirati/maksimizirati a koja je pak ovisna o obliku objekta u vidu. Ukoliko se vrijednost funkcionala poveća bilo kakvim *malim* konačnim odstupanjem od stacionarnog oblika, onda se u općenitom slučaju govori o lokalnom minimumu funkcionala tj. o obliku za koji funkcional poprima minimalnu lokalnu vrijednost. U suprotnom, govori se o lokalnom maksimumu funkcionala tj. o obliku za koji funkcional poprima maksimalnu lokalnu vrijednost. Moguća je treća situacija gdje za neka odstupanja, vrijednost funkcionala poraste a za neka padne te se takav slučaj ne smatra optimumom.

Ako je u pitanju optimizacija oblika sa ograničenjima, onda se traži oblik koji minimizira/maksimizira funkcional a da pri tome zadovoljava određene jednadžbe koje predstavljaju ograničenja. Oblik koji to zadovoljava ne mora nužno biti stacionarni oblik što je ključna razlika u odnosu na optimizaciju bez ograničenja.

Egzaktna optimizacija oblika je matematički vrlo zahtjevna te se svodi u općem slučaju na rješavanje sustava nelinearnih parcijalnih diferencijalnih jednadžbi. Osim egzaktnog rješavanja problema optimizacije oblika, moguće je isti problem aproksimativno svesti na problem optimizacije skalara. Problem optimizacije skalara je jednostavniji te se u općem slučaju svodi na rješavanje sustava nelinearnih algebarskih jednadžbi.

## 2.2. Optimizacija skalara

Problem optimizacije skalara ili dimenzijske optimizacije, može se definirati identično kao i optimizacija oblika s tom razlikom da se umjesto riječi funkcional, koristi riječ funkcija (skalarna funkcija) a umjesto riječi oblik, riječ točka (u domeni skalarne funkcije).

Ako razmatramo slučaj optimizacije bez ograničenja onda se problem svodi na traženje stacionarne točke. Ukoliko označimo skalarnu funkciju koju želimo minimizirati/maksimizirati sa  $F$  a nezavisne varijable funkcije sa  $x_i$  (indeks  $i$  se kreće od 1 do  $n$ , pri čemu  $n$  predstavlja broj nezavisnih varijabli funkcije  $F$ ), onda će uvjet za pronalaženje stacionarne točke  $((x_{stac})_i)$  u indeksnoj notaciji glasiti:

$$\frac{\partial F((x_{stac})_i)}{\partial x_i} = 0 \quad (2.1)$$

Jednadžba 2.1 predstavlja sustav od  $n$  nelinearnih algebarskih jednadžbi te pronalaskom rješenja tih jednadžbi, dobivamo stacionarne točke. Ukoliko je cilj funkciju  $F$  minimizirati, potrebno je od dobivenih stacionarnih točaka, pronaći one koje tu funkciju minimiziraju. Uvjet koji te točke moraju zadovoljavati glasi:

$$s_i \frac{\partial F((x_{stac})_i)}{\partial x_i \partial x_j} s_j = s_i H_{ij} s_j > 0 \quad (2.2)$$

pri čemu  $s_i$  odnosno  $s_j$ , predstavljaju vektor *malih* pomaka u bilo kojem smjeru u domeni funkcije  $F$  dok je  $H_{ij}$  tzv. Hesseova matrica. Uvjet 2.2 nalaže da matrica  $H_{ij}$  mora biti pozitivno definitna tj. sve svojstvene vrijednosti iste matrice moraju biti nenegativne. Ukoliko su neke svojstvene vrijednosti jednake nuli, potrebno je provesti dodatne testove [1.]. Ako je cilj pronaći maksimum, onda vrijedi suprotno tj. matrica  $H_{ij}$  mora biti negativno definitna.

U slučaju optimizacije sa ograničenjima, problem pronalaženja minimuma/maksimuma, svodi se na četiri uvjeta:

$$F((x_{opt})_i) = \min(F(x_i)) \quad (2.3)$$

$$h_j((x_{opt})_i) = 0 \quad (2.4)$$

$$g_k((x_{opt})_i) \geq 0 \quad (2.5)$$

$$lb_i \leq (x_{opt})_i \leq ub_i \quad (2.6)$$

gdje je:

$F$  – funkcija koju želimo minimizirati/maksimizirati,

$x_i$  – nezavisne varijable funkcije,

$(x_{\text{opt}})_i$  – optimalna točka,

$h_j$  – funkcije koje predstavljaju uvijete jednakosti ( $j = 1, \dots, m$ , gdje je  $m$  broj uvjeta jednakosti),

$g_k$  – funkcije koje predstavljaju uvijete nejednakosti ( $k = 1, \dots, l$ , gdje je  $l$  broj uvjeta nejednakosti),

$lb_i$  – donja granica intervala u kojem se  $i$ -ta koordinata može kretati i

$ub_i$  – gornja granica intervala u kojem se  $i$ -ta koordinata može kretati.

Iako se uvjet (2.3) odnosi na minimizaciju funkcije, moguće je maksimizaciju funkcije svesti na problem minimizacije na način da se jednostavno funkcija koja se želi maksimizirati, pomnoži sa -1 tj.:

$$\max(F) = \min(-F) \quad (2.7)$$

Od sada pa nadalje, funkcija  $F$ , nazivat će se funkcija cilja a varijable  $x_i$ , projektne varijable.

### 2.3. Svođenje optimizacije oblika na problem optimizacije skalara

Svaka optimizacija oblika, svedena na optimizaciju skalara, u općem se slučaju sastoji od četiri glavna djela:

- priprema geometrije
- dovođenje veličine koja se želi optimizirati, u vezu sa geometrijom
- postavljanje i rješavanje sustava od (2.3) do (2.6)
- eventualna korekcija ograničenja ili geometrije te ponovno rješavanje sustava od (2.3) do (2.6) sa novim ograničenjima i novom geometrijom

Priprema geometrije se sastoji od modeliranja geometrije objekta koji se želi optimizirati, pomoću krivulja ili ploha koje mijenjaju svoj oblik promjenom određenih parametara (skalara) koji se optimiziraju. Tako se mogu za krivulje koristiti npr. Bézierove krivulje dok za plohe, Bézierove plohe. Ovdje je bitno da dobivena geometrija ima dovoljnu fleksibilnost (broj stupnjeva slobode) kako bi se moglo čim bliže približiti onom pravom obliku koji minimizira funkcional.



Dovođenje veličine koja se želi optimizirati, u vezu sa geometrijom, se obično sastoji od formuliranja nekog modela koji može opisivati fizikalne ili neke druge procese.

Postavljanje i rješavanje sustava od (2.3) do (2.6) sastoji se od definiranja funkcije cilja (veličine koju želimo optimizirati) te ograničenja (postavljanje funkcija  $h_j$  i  $g_k$  te intervala dopustivih vrijednosti projektnih varijabli) koja opisuju dodatne zahtjeve koje konačan objekt mora zadovoljavati.

Ukoliko nismo iz nekog razloga zadovoljni rješenjem sustava od (2.3) do (2.6), potrebno je promijeniti ograničenja koja su postavljena te ponovno riješiti sustav od (2.3) do (2.6). Moguće je i da geometriju treba promijeniti ukoliko fleksibilnost geometrije nije zadovoljavajuća.

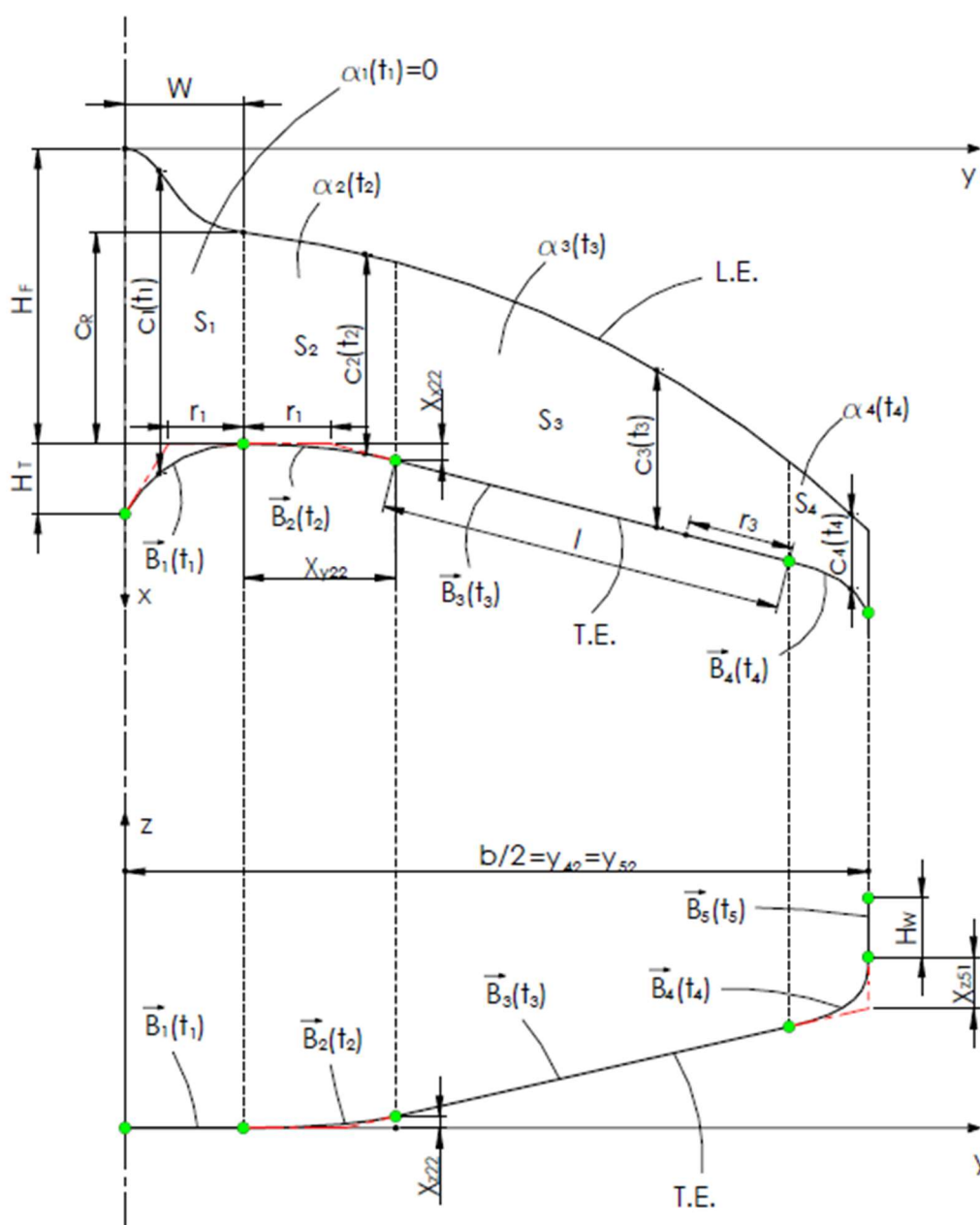
Upravo taj proces, biti će prikazan u nastavku na primjeru optimizacije letećeg krila.

### 3. GEOMETRIJA

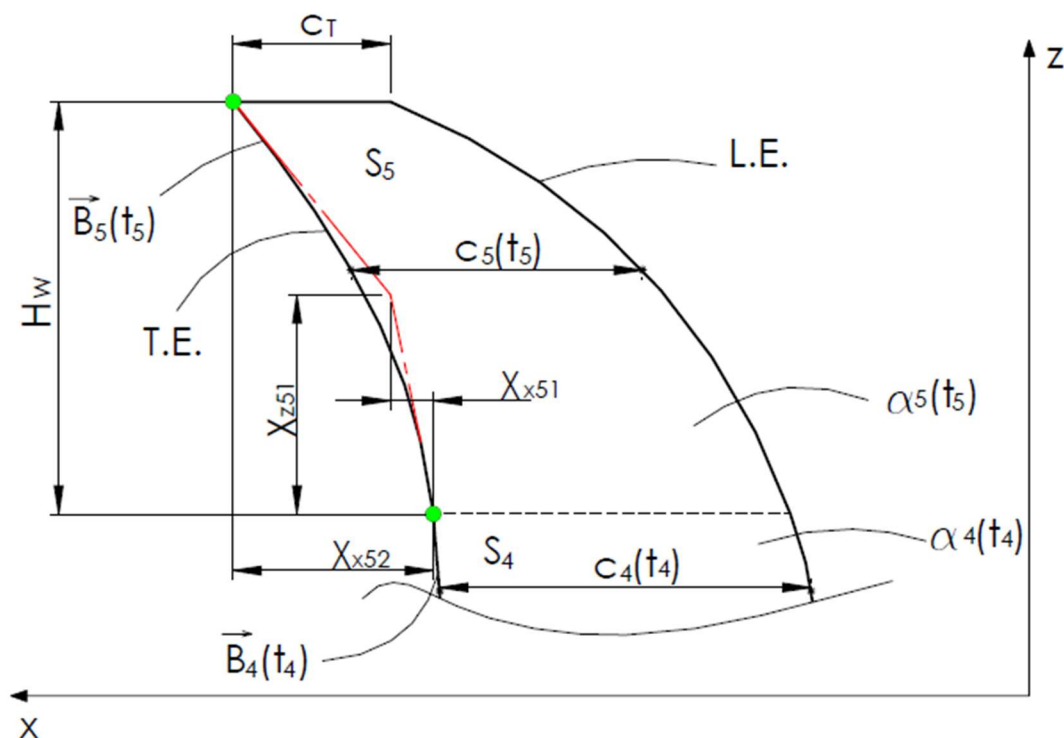
#### 3.1. Opis geometrije

Kao što je već navedeno u prijašnjem poglavlju, potrebno je preddefinirati geometriju koja će biti podvrgnuta optimizaciji.

Ideja je iskoristiti relativno jednostavnu geometriju letećeg krila. Naime, geometrija letećeg krila, može se u potpunosti definirati pomoću krivulje vodilje te neke konture koja se „kreće“ po krivulji vodilji, pri tome mijenjajući: svoju veličinu, oblik te položaj u odnosu na krivulju vodilju. Takva se geometrija dobiva jednostavno vektorskim zbrajanjem krivulje vodilje i konture (krivulja vodilja te kontura su zadane kao parametarske krivulje).



Slika 3.1 Shematski prikaz geometrije letećeg krila ( $x, y$  i  $y, z$  ravnina)



Slika 3.2 Shematski prikaz geometrije letječeg krila (winglet)

Na slikama 3.1 i 3.2, prikazan je shematski prikaz geometrije (kao i parametri koji je definiraju) koja će se koristiti. Geometrija se sastoji od 5 segmenata (sekcija) koje se nakraju spajaju na način da se na mjestu spajanja segmenata zadovolji C1 kontinuitet. Svaki segment se sastoji se od jedne Bézierove krivulje drugog reda (krivulja vodilja) postavljene na izlazni brid (T.E.) pomoću koje se kontrolira: strijela, dihedral i wingleti. Bilo je moguće odabrati Bézierovu krivulju višeg reda za segment (ili jednu za cijelo krilo) no radi: jednostavnosti krivulja drugog reda, dovoljne fleksibilnosti te kontrolabilnosti tako definirane krivulje vodilje, odabrane su krivulje drugog reda. Nedostatak takvog odabira jest da je potrebno svaki segment posebno analizirati te je potrebno osigurati da je C1 kontinuitet za svaki segment zadovoljen. Duž krivulje vodilje, postavljaju (ekstrudiraju) se konture aeroprofila te se pri tome mijenja duljina tetive i uvijanje. U općenitom slučaju, moguće je postaviti da se sam aeroprofil mijenja duž krivulje no ovdje će biti postavljen samo jedan aeroprofil i to MH 60 koji je predviđen za primjenu kod letjelica bez repa [2.]. Naravno, moguće je simultano optimizirati i oblik konture koja se navodi duž krivulje vodilje no za takvu optimizaciju, potrebni su puno složeniji aerodinamički modeli. Važno je još uvesti distinkciju između parametara koji se uzimaju kao projektne varijable i parametara koji se namještaju prije optimizacije po potrebi tj. parametri koji se ne mijenjaju tokom optimizacije. Tako su za slučaj letječeg krila u ovom radu, parametri:  $H_F$ ,  $H_T$ ,  $W$  i  $c_R$  nepromjenljivi jer definiraju „trup“ tj. dio krila unutar kojeg je smještena oprema i koristan teret. Osim navedenih parametara, postoji još jedan parametar koji se ne vidi na slici 3.1 a koji također definira oblik trupa te će se spomenuti u nastavku.

### 3.2. Krivulja vodilja

$i$ -ta Bézierova krivulja  $n$ -tog reda u nekom spline-u, može se zapisati kao:

$$P_i(t_i) = \sum_{k=0}^n P_{ik} \binom{n}{k} t_i^k (1-t_i)^{n-k}, \quad 0 \leq t_i \leq 1 \quad (3.1)$$

gdje je:

$P_i$  –  $x, y$  ili  $z$  koordinata krivulje ( $x_i, y_i$  ili  $z_i$ ),

$P_{ik}$  –  $x, y$  ili  $z$  koordinata  $k$ -te kontrolne točke krivulje,

$t_i$  – parametar krivulje  $i$

$n$  – red krivulje.

Za slučaj letećeg krila koje se ovdje razrađuje, vrijedi:  $i = 1, \dots, 5$ .

Za  $n = 2$ , izraz (3.1) prelazi u:

$$P_i(t_i) = P_{i0}(1-t_i)^2 + 2P_{i1}t_i(1-t_i) + P_{i2}t_i^2, \quad 0 \leq t_i \leq 1 \quad (3.2)$$

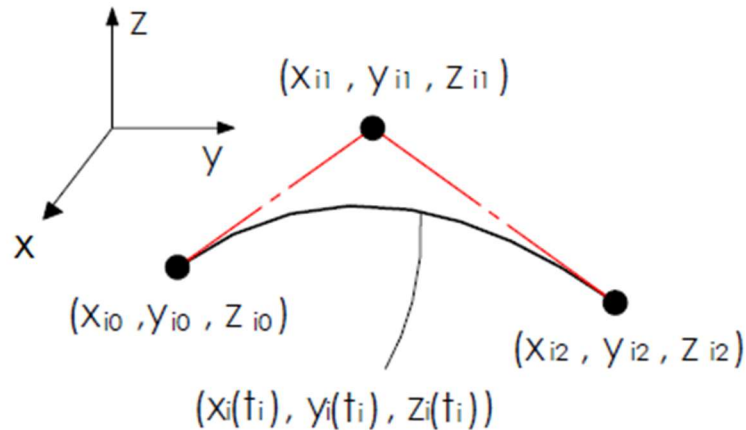
Korisno je odrediti izraze za koordinate kada je  $t_i$  jednak nuli ili jedinici. Za  $t_i = 0$  odnosno  $t_i = 1$ , izraz (3.2) glasi:

$$P_i(0) = P_{i0}, \quad P_i(1) = P_{i2} \quad (3.3)$$

Također će biti korisno poznavati izraze za derivacije krivulje za  $t_i = 0$  i  $t_i = 1$ , pa se tako deriviranjem jednadžbe (3.2) po  $t_i$  te naknadnim uvrštavanjem  $t_i = 0$  odnosno  $t_i = 1$ , dobivaju traženi izrazi koji glase:

$$\left. \frac{dP_i}{dt_i} \right|_{t_i=0} = -2P_{i0} + 2P_{i1}, \quad \left. \frac{dP_i}{dt_i} \right|_{t_i=1} = -2P_{i1} + 2P_{i2} \quad (3.4)$$

Iz slike 3.3, vidi se da je derivacija Bézierove krivulje drugog reda za  $t_i = 0$  jednaka dvostrukoj razlici koordinate druge i prve kontrolne točke dok je za  $t_i = 1$ , derivacija iste krivulje jednaka dvostrukoj razlici koordinate treće i druge kontrolne točke. Ta činjenica je korisna pri definiranju projektnih varijabli.



Slika 3.3 Bézierova krivulja drugog reda sa pripadajućim kontrolnim točkama

Sljedeći je korak postaviti Bézierove krivulje na način da zadovoljavaju rubne uvjete segmenata.

Za prvi segment, iz slike 3.1, vidi se da prva Bézierova krivulja ( $\vec{B}_1(t_1)$ ) mora zadovoljavati sljedeće uvjete:

$$\vec{B}_1(0) = (H_F + H_T, 0, 0) \quad (3.5)$$

$$\vec{B}_1(1) = (H_F, W, 0) \quad (3.6)$$

Osim navedenih uvjeta, potrebno je definirati još jedan uvjet. Radi sprječavanja deformacije trupa prilikom optimizacije, vektor tangente krivulje  $\vec{B}_1(t_1)$  za  $t_1 = 1$ , mora biti paralelan sa y-osi pa će treći uvjet glasiti:

$$\left. \frac{d\vec{B}_1}{dt_1} \right|_{t_1 = 1} = (0, 2r_1, 0) \quad (3.7)$$

pri čemu je  $r_1$  razlika y koordinata treće i druge kontrolne točke (vidi sliku 3.1).

Ta tri uvjeta rezultiraju pojavom sustava od tri linearne jednačbe sa tri nepoznanice (za svaku koordinatu) čijim se rješavanjem dobivaju veze između koordinata kontrolnih točaka i navedenih parametrima. Ti sustavi glase:

za x koordinate kontrolnih točaka:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{11} \\ x_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_F + H_T \\ H_F \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

za y koordinate kontrolnih točaka:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{10} \\ y_{11} \\ y_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ W \\ r_1 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

za z koordinate kontrolnih točaka:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{10} \\ z_{11} \\ z_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

Za krivulju drugog segmenta, potrebno je zadovoljiti C1 kontinuitet sa krivuljom prvog te je potrebno treću kontrolnu točku postaviti na odgovarajuće mjesto (vidi sliku 3.1). Ti uvjeti u matematičkom obliku glase:

$$\vec{B}_2(0) = \vec{B}_1(1) \quad (3.11)$$

$$\left. \frac{d\vec{B}_2}{dt_2} \right|_{t_2=0} = \left. \frac{d\vec{B}_1}{dt_1} \right|_{t_1=1} \quad (3.12)$$

$$\vec{B}_2(1) = (H_F + \chi_{x22}, W + \chi_{y22}, \chi_{z22}) \quad (3.13)$$

dok korespondentni sustav jednažbi glasi:

za x koordinate kontrolnih točaka:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{20} \\ x_{21} \\ x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{12} \\ -x_{11} + x_{12} \\ H_F + \chi_{x22} \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

za y koordinate kontrolnih točaka:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{20} \\ y_{21} \\ y_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{12} \\ -y_{11} + y_{12} \\ W + \chi_{y22} \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

za z koordinate kontrolnih točaka:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{20} \\ Z_{21} \\ Z_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{12} \\ -Z_{11} + Z_{12} \\ \chi_{z22} \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

Kako bi se osigurao smještaj upravljačkih površina, krivulja vodilja trećeg segmenta će biti Bézierova krivulja čije kontrolne točke leže na jednom pravcu. Razlog zašto se bira Bézierova krivulja umjesto pravca jest radi poopcjenja te činjenice da Bézierova krivulja prirodno daje jedan dodatni stupanj slobode geometriji.

Najprije je potrebno zadovoljiti C0 kontinuitet između krivulje trećeg i drugog segmenta pa će taj uvjet glasiti:

$$\vec{B}_3(0) = \vec{B}_2(1) \quad (3.17)$$

Kako bi se iskoristio taj dodatni stupanj slobode, umjesto C1 kontinuiteta između krivulje drugog i trećeg segmenta, zadovoljit će se G1 kontinuitet tj. tangencijalni vektori odnosnih krivulja u istoj točki, moraju biti kolinearni pa će u tom slučaju drugi rubni uvjet za krivulju  $\vec{B}_3(t_3)$  glasiti:

$$\left. \frac{d\vec{B}_3}{dt_3} \right|_{t_3=0} = 2(l - r_3) \left( \left. \frac{d\vec{B}_2}{dt_2} \right|_{t_2=1} \right)^{-1} \left. \frac{d\vec{B}_2}{dt_2} \right|_{t_2=1} \quad (3.18)$$

gdje je  $l$  duljina krivulje trećeg segmenta a  $r_3$  udaljenost između treće i druge točke krivulje (vidi sliku 3.1). Time se može druga kontrolna točka micati po krivulji. Taj dodatni stupanj postaje tek koristan kada se na krivulju trećeg segmenta poveže krivulja četvrtog segmenta C1 kontinuitetom.

Posljednji uvjet kaže da treća kontrolna točka mora ležati na pravcu definiranim vektorom  $\left( \left. \frac{d\vec{B}_2}{dt_2} \right|_{t_2=1} \right)^{-1} \left. \frac{d\vec{B}_2}{dt_2} \right|_{t_2=1}$  na udaljenosti  $l$  od spoja između krivulje drugog i trećeg segmenta:

$$\vec{B}_3(1) = \vec{B}_2(1) + l \left( \left. \frac{d\vec{B}_2}{dt_2} \right|_{t_2=1} \right)^{-1} \left. \frac{d\vec{B}_2}{dt_2} \right|_{t_2=1} \quad (3.19)$$

Radi kraćeg zapisa, uvodi se supstitucija:

$$\left( \left. \frac{d\vec{B}_2}{dt_2} \right|_{t_2=1} \right)^{-1} \left. \frac{d\vec{B}_2}{dt_2} \right|_{t_2=1} = (x_t, y_t, z_t) \quad (3.20)$$

Sustavi kojim se dobivaju kontrolne točke krivulje trećeg segmenta glase:

za  $x$  koordinate kontrolnih točaka:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{30} \\ x_{31} \\ x_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{22} \\ x_t(l - r_3) \\ x_{22} + lx_t \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

za  $y$  koordinate kontrolnih točaka:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{30} \\ y_{31} \\ y_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{22} \\ y_t(l - r_3) \\ y_{22} + ly_t \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

za  $z$  koordinate kontrolnih točaka:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{30} \\ z_{31} \\ z_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{22} \\ z_t(l - r_3) \\ z_{22} + lz_t \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

Krivulja vodilja četvrtog segmenta mora zadovoljiti C1 kontinuitet sa krivuljom trećeg segmenta:

$$\vec{B}_4(0) = \vec{B}_3(1) \quad (3.24)$$

$$\left. \frac{d\vec{B}_4}{dt_4} \right|_{t_4=0} = \left. \frac{d\vec{B}_3}{dt_3} \right|_{t_3=1} \quad (3.25)$$

Pošto se stabilnost letjelice oko  $z$  osi ne kontrolira direktno, potrebno je imati geometriju koja će to osigurati. Konkretno, potrebno je imati neku vrstu vertikalnog stabilizatora a to će se postići uvođenjem wingleta. Kako bi se osiguralo postojanje wingleta, potrebno je osigurati da krivulja vodilja wingleta leži u ravnini paralelnoj sa  $x$ ,  $z$  ravninom. To se neće moći postići sa krivuljom četvrtog segmenta (radi zadovoljenja C1 kontinuiteta sa krivuljom trećeg segmenta) no potrebno je pripremiti potrebne uvjete kako bi se navedeni uvjet mogao postići sa sljedećom krivuljom (krivuljom petog segmenta). Potreban uvjet je da tangencijalni vektor na kraju krivulje četvrtog segmenta, leži u ravnini koja je paralelna sa  $x$ ,  $z$  ravninom. Taj uvjet u matematičkom obliku glasi:

$$\left. \frac{d\vec{B}_4}{dt_4} \right|_{t_4=1} = (2\chi_{x51}, 0, 2\chi_{z51}) \quad (3.26)$$

pri čemu je interpretacija parametara  $\chi_{x51}$  i  $\chi_{z51}$  analogna parametru  $r_1$  te se mogu vidjeti na slikama 3.1 i 3.2.



Postavljanjem zadnjeg uvjeta, dobivaju se sustavi jednažbi za definiranje krivulje četvrtog segmenta:

za  $x$  koordinate kontrolnih točaka:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{40} \\ x_{41} \\ x_{42} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{32} \\ -x_{31} + x_{32} \\ \chi_{x51} \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

za  $y$  koordinate kontrolnih točaka:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{40} \\ y_{41} \\ y_{42} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{32} \\ -y_{31} + y_{32} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

za  $z$  koordinate kontrolnih točaka:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{40} \\ z_{41} \\ z_{42} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{32} \\ -z_{31} + z_{32} \\ \chi_{z51} \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

Peti segment predstavlja krivulju vodilju wingleta. Najprije je potrebno osigurati C1 kontinuitet sa krivuljom četvrtog segmenta:

$$\vec{B}_5(0) = \vec{B}_4(1) \quad (3.30)$$

$$\left. \frac{d\vec{B}_5}{dt_5} \right|_{t_5=0} = \left. \frac{d\vec{B}_4}{dt_4} \right|_{t_4=1} \quad (3.31)$$

Trećim uvjetom se osigurava da se treća kontrolna točka krivulje nalazi na predviđenom mjestu (vidi sliku 3.2):

$$\vec{B}_5(1) = (x_{42} + \chi_{x52}, y_{42}, z_{42} + H_W) \quad (3.32)$$

gdje  $\chi_{x52}$  predstavlja pomak gornjeg djela wingleta u smjeru osi  $x$  a  $H_W$  predstavlja duljinu (u smjeru osi  $z$ ) vertikalnog djela wingleta.

Konačno, sustav za dobivanje kontrolnih točaka krivulje trećeg segmenta glasi:

za  $x$  koordinate kontrolnih točaka:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{50} \\ x_{51} \\ x_{52} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{42} \\ -x_{41} + x_{42} \\ x_{42} + \chi_{x52} \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

za y koordinate kontrolnih točaka:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{50} \\ y_{51} \\ y_{52} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{42} \\ -y_{41} + y_{42} \\ y_{42} \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

za z koordinate kontrolnih točaka:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{50} \\ z_{51} \\ z_{52} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{42} \\ -z_{41} + z_{42} \\ z_{42} + H_W \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

Time je u potpunosti definirana krivulja vodilja jednog polovice krila. Kako bi se dobilo cijelo krilo, potrebno je jednostavno sve y koordinate pomnožiti sa -1.

### 3.3. Aeroprofil

Kao što je već spomenuto, koristit će se aeroprofil MH 60 koji je prilagođen letjelicama bez repnih površina [2.]. Za potrebe analize (a time i optimizacije), potrebno je poznavati krivulju srednje linije aeroprofila kao i krivulje gornjake i donjake. Ti podaci nisu direktno dostupni u katalogima aeroprofila već se aeroprofili zadaju na način da se ispiše nekoliko koordinata gornjake i donjake za aeroprofil čija je tetiva jedinične duljine. Drugi problem jest činjenica da te koordinate nisu posložene na način da za zadanu x koordinatu, postoje korespondentne z koordinate gornjake odnosno donjake (vidi sliku 3.4) što stvara problem pri pronalaženju srednje linije. Kako bi se riješio problem pronalaska srednje linije, nameće se ideja da se pokušaju koordinate gornjake i donjake istovremeno aproksimirati nekom aproksimacijskom funkcijom (npr. polinom) čiji se parametri dobivaju metodom najmanjih kvadrata. Lako se može pokazati da, ukoliko bi imali dostupne funkcije: gornjake, donjake i srednje linije, istovremena aproksimacija funkcija gornjake i donjake je ekvivalentna aproksimaciji funkcije srednje linije tj. dobili bi se isti koeficijenti aproksimacijske funkcije.

Za aproksimacijsku funkciju, uzet će se polinom petog stupnja (uspostavljeno je metodom pokušaja pogreške da je polinom petog stupnja dovoljno dobro aproksimira srednju liniju aeroprofila MH 60):

$$\bar{h}_c(\bar{x}) = K_5 \bar{x}^5 + K_4 \bar{x}^4 + K_3 \bar{x}^3 + K_2 \bar{x}^2 + K_1 \bar{x} + K_0 \quad (3.36)$$

pri čemu povlake označuju da se radi o aeroprofilu sa tetivom jedinične (bezdimenzijske) duljine.

Jednadžba kvadrata u slučaju istovremene aproksimacije donjake i gornjake glasi:

$$q_c = \sum_{k=0}^M (\bar{y}_k - \bar{h}_c(\bar{x}_k))^2 + \sum_{k=M+1}^N (\bar{y}_k - \bar{h}_c(\bar{x}_k))^2 \quad (3.37)$$

Deriviranjem jednadžbe kvadrata po svim koeficijentima, izjednačavanjem svake derivacije sa nulom te rješavanjem nastalog sustava jednadžbi, dobivaju se koeficijenti aproksimacijske funkcije (3.36) a time onda i konačan oblik srednje linije za MH 60:

$$\bar{h}_c(\bar{x}) = 0.515\bar{x}^5 - 1.238\bar{x}^4 + 1.154\bar{x}^3 - 0.585\bar{x}^2 + 0.152\bar{x} + 0.002 \quad (3.36)$$

Što se tiče funkcija gornjake odnosno donjake, moguće je dobivene koordinate interpolirati no zgodnije je aproksimirati posebno donjaku i posebno gornjaku te time dobiti relativno kratke izraze koji dobro opisuju tražene krivulje. Za aproksimaciju gornjake i donjake, koristit će se racionalne funkcije gdje su u brojniku i nazivniku polinomi četvrtog stupnja (uspostavljeno je metodom pokušaja pogreške da je polinom petog stupnja dovoljno dobro aproksimira srednju liniju aeroprofila MH 60):

$$\bar{h}_{d/g}(\bar{x}) = \frac{a_4\bar{x}^4 + a_3\bar{x}^3 + a_2\bar{x}^2 + a_1\bar{x} + a_0}{b_4\bar{x}^4 + b_3\bar{x}^3 + b_2\bar{x}^2 + b_1\bar{x} + b_0} \quad (3.37)$$

Jednadžbe kvadrata za gornjaku odnosno donjaku glase:

$$q_g = \sum_{k=0}^M (\bar{y}_k - \bar{h}_g(\bar{x}_k))^2 \quad (3.38)$$

$$q_d = \sum_{k=M+1}^N (\bar{y}_k - \bar{h}_d(\bar{x}_k))^2 \quad (3.39)$$

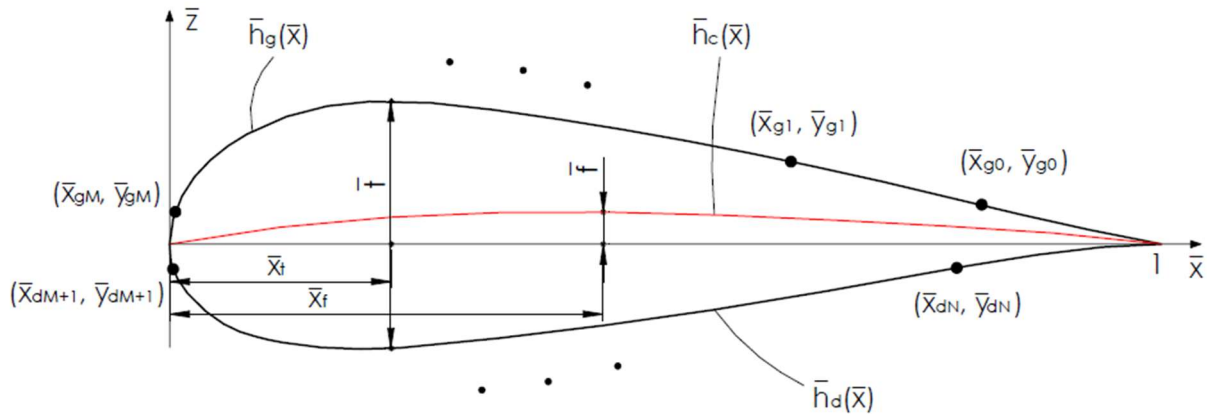
Provođenjem istih koraka kao i za srednju liniju, dobivaju se funkcije koje opisuju gornjaku odnosno donjaku:

$$\bar{h}_g(\bar{x}) = \frac{1.228\bar{x}^4 - 2.395\bar{x}^3 + 1.139\bar{x}^2 + 0.028\bar{x}}{6.865\bar{x}^4 - 13.803\bar{x}^3 + 7.312\bar{x}^2 + 1.659\bar{x} + 0.008} \quad (3.40)$$

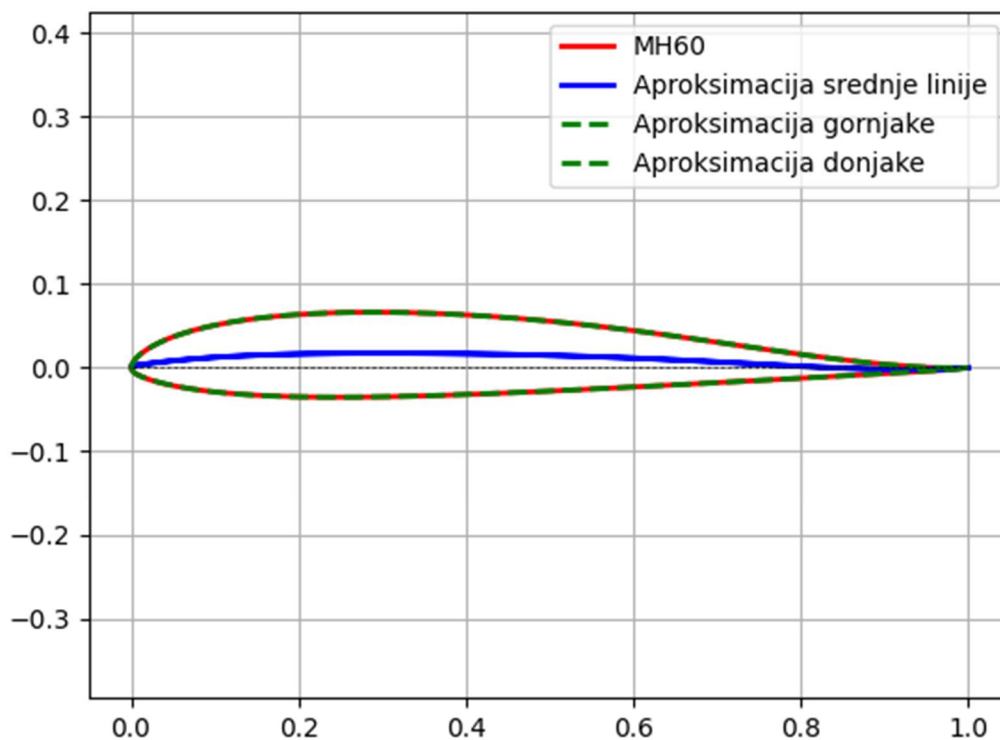
$$\bar{h}_d(\bar{x}) = \frac{-14.637\bar{x}^4 + 29.848\bar{x}^3 - 14.916\bar{x}^2 - 0.295\bar{x}}{-47.7\bar{x}^4 - 148.7\bar{x}^3 + 166.4\bar{x}^2 + 35.951\bar{x} + 0.083} \quad (3.41)$$

Na slici 3.4, vidi se kvalitativan prikaz aeroprofila sa tetivom jedinične duljine, skupa sa: diskretnim brojem koordinata donjake odnosno gornjake, aproksimacijske funkcije,

maksimalna debljina, maksimalna udaljenost srednje od tetive te položaji odnosnih ekstrema dok se na slici 3.5 vidi kvantitativni rezultat aproksimacije točaka.



Slika 3.4 Kvalitativni prikaz aeroprofila sa tetivom jedinične duljine



Slika 3.5 Kvantitativni prikaz aeroprofila sa tetivom jedinične duljine

Na slici je osim aproksimacijskih funkcija, ucrtana i krivulja koja interpolira zadane koordinate aeroprofila (crvena krivulja).

Sada kada su funkcije traženih dijelova aeroprofila poznate, može se izračunati maksimalna debljina aeroprofila kao i položaj iste:

$$\bar{t} = \max(\bar{h}_g(\bar{x}) - \bar{h}_g(\bar{x})) = \bar{h}_g(\bar{x}_t) - \bar{h}_g(\bar{x}_t) = 0.101, \quad \bar{x}_t = 0.273 \quad (3.42)$$

Na sličan način se dolazi do maksimalne udaljenosti srednje linije od krivulje te njenog položaja:

$$\bar{f} = \max(\bar{h}_c(\bar{x})) = \bar{h}_c(\bar{x}_f) = 0.017, \quad \bar{x}_f = 0.299 \quad (3.43)$$

Na posljetku je za potrebe aerodinamičkog modela, bitno poznavati funkciju srednje linije u slučaju da se radi o aeroprofilu sa tetivom duljine  $c$ . Kako bi se došlo do te funkcije, potrebno je jednadžbu (3.36) raspisati, uzimajući u obzir da vrijedi:

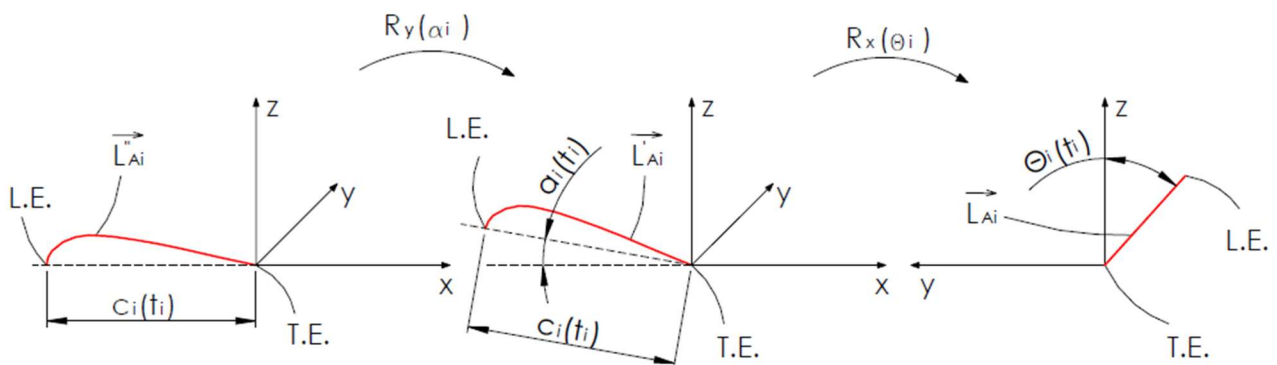
$$\bar{h}_c = \frac{h_c}{c}, \quad \bar{x} = \frac{x}{c} \quad (3.44)$$

pa slijedi:

$$h_c(x) = c \left( 0.515 \left( \frac{x}{c} \right)^5 - 1.238 \left( \frac{x}{c} \right)^4 + 1.154 \left( \frac{x}{c} \right)^3 - 0.585 \left( \frac{x}{c} \right)^2 + 0.152 \frac{x}{c} + 0.002 \right) \quad (3.45)$$

### 3.4. Transformacija aeroprofila

Sada kada je definiran aeroprofil, potrebno ga je navesti na krivulju vodilju kako bi se dobila ploha krila i srednja ploha koja će biti bitna za proračun. Prije samog postavljanja aeroprofila na krivulju vodilju, potrebno je konturu aeroprofila (koja se zadaje kao parametarska krivulja) transformirati. Slika 3.6 prikazuje transformaciju jedne od tri moguće krivulje aeroprofila:



Slika 3.6 Prikaz transformacije aeroprofila

Transformacija se vrši na način da se jedna od krivulja aeroprofila duljine  $c_i(t_i)$  prvo zarotira oko  $y$ -osi za kut  $\alpha_i(t_i)$  a potom se nova (zarotirana) krivulja još jednom zarotira oko  $x$ -osi za kut  $\theta_i(t_i)$  pri čemu su:

$c_i(t_i)$  – duljina tetive na  $i$ -tom segmentu,

$\alpha_i(t_i)$  – kut uvijanja na  $i$ -tom segmentu i

$\theta_i(t_i)$  – kut dihedrala na  $i$ -tom segmentu.

Ta transformacija se postiže množenjem parametarske krivulje prvo sa matricom rotacije oko  $y$ -osi ( $\mathbf{R}_y$ ) a zatim matricom rotacije oko  $x$ -osi ( $\mathbf{R}_x$ ).

Parametarska krivulja koja se transformira ima oblik:

$$\vec{L}_{Ai}'' = \vec{L}_{Ai}''(s; t_i) = (x_{Ai}''(s; t_i), 0, z_{Ai}''(s; t_i)) \quad , \quad 0 \leq s \leq 1 \quad (3.46)$$

gdje točka zarez označuje da je u ovom slučaju parametar krivulje vodilje  $i$ -tog segmenta predstavlja konstantu.

Nakon transformacije oko  $y$ -osi, poprima oblik:

$$\vec{L}_{Ai}' = \mathbf{R}_y \vec{L}_{Ai}'' \quad (3.47)$$

a nakon transformacije oko  $x$ -osi, dobiva se krivulja koja se zbraja sa krivuljom vodiljom kako bi se dobila ploha krila:

$$\vec{L}_{Ai} = \mathbf{R}_x \vec{L}_{Ai}' = \mathbf{R}_x \mathbf{R}_y \vec{L}_{Ai}'' \quad (3.47)$$

Matrice  $\mathbf{R}_y$  odnosno  $\mathbf{R}_x$  glase:

$$\mathbf{R}_y = \begin{bmatrix} \cos(\alpha_i(t_i)) & 0 & \sin(\alpha_i(t_i)) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\alpha_i(t_i)) & 0 & \cos(\alpha_i(t_i)) \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

$$\mathbf{R}_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta_i(t_i)) & -\sin(\theta_i(t_i)) \\ 0 & \sin(\theta_i(t_i)) & \cos(\theta_i(t_i)) \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

dok je njihov umnožak jednak:

$$\mathbf{R}_x \mathbf{R}_y = \begin{bmatrix} \cos(\alpha_i(t_i)) & 0 & \sin(\alpha_i(t_i)) \\ \sin(\alpha_i(t_i)) \sin(\theta_i(t_i)) & \cos(\theta_i(t_i)) & -\cos(\alpha_i(t_i)) \sin(\theta_i(t_i)) \\ -\sin(\alpha_i(t_i)) \cos(\theta_i(t_i)) & \sin(\theta_i(t_i)) & \cos(\alpha_i(t_i)) \cos(\theta_i(t_i)) \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

pa se može doći do eksplicitnog zapisa transformacije:

$$\vec{L}_{Ai} = \begin{bmatrix} x_{Ai} \\ y_{Ai} \\ z_{Ai} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha_i) & 0 & \sin(\alpha_i) \\ \sin(\alpha_i) \sin(\theta_i) & \cos(\theta_i) & -\cos(\alpha_i) \sin(\theta_i) \\ -\sin(\alpha_i) \cos(\theta_i) & \sin(\theta_i) & \cos(\alpha_i) \cos(\theta_i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x''_{Ai} \\ 0 \\ z''_{Ai} \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

Za potpuno definiranje geometrije krila, potrebno je: duljinu tetive, uvijanje i dihedral dovesti u vezu sa parametrom krivulje vodilje. Duljina tetive i uvijanje će trebati posebno promotriti dok je dihedral veličina koja jed definirana direktno krivuljom vodiljom.

### 3.5. Duljina krivulje vodilje

Na prvi pogled, čini se da je dovoljno kao nezavisnu varijablu distribucije duljine tetive i uvijanja dovoljno uzeti parametar lokalne krivulje vodilje ( $t_i$ ). To je naravno moguće no problem sa tim odabirom jest da se taj parametar kreće po segmentu od nula do jedan te onda na sljedećem segmentu iznova od nula do jedan što znači da će biti potrebno za svaki takav prijelaz varijable sa jedan na nula, osigurati C1 kontinuitet prednjeg brida a to nije jednostavno jer krivulja prednjeg brida ovisi o distribuciji duljine tetive i uvijanja koje još nemamo definirane. Stoga se kao varijabla nameće duljina krivulje vodilje pošto je to strogo rastuća veličina bez ikakvih diskontinuiteta što znači da će C1 kontinuitet prednjeg brida biti automatski zadovoljen ukoliko distribucija (duljine tetive i uvijanja) zadovoljava C1 kontinuitet. Umjesto duljine same krivulje, uzet će se duljina krivulje koja je projicirana na  $y, z$  ravninu zato što je takav odabir pogodniji pri stvaranju proračunske mreže.

Duljina krivulje vodilje  $i$ -tog segmenta je dana relacijom:

$$\zeta_i(t_i) = \int_0^{t_i} \sqrt{\left(\frac{dx_i}{d\bar{t}_i}\right)^2 + \left(\frac{dy_i}{d\bar{t}_i}\right)^2 + \left(\frac{dz_i}{d\bar{t}_i}\right)^2} d\bar{t}_i \quad (3.51)$$

Ukoliko se jednačba (3.2) derivira po parametru  $t_i$ , dobit će opći izraz za derivaciju Bézierove krivulje drugog reda:

$$\frac{dP_i}{dt_i} = 2(P_{i0} - 2P_{i1} + P_{i2})t_i + 2(-P_{i0} + P_{i1}) = a_{Pi}t_i + b_{Pi} \quad (3.52)$$

pa se mogu dalje dobiti izrazi za kvadrate komponenata derivacije krivulje vodilje:

$$\left(\frac{dx_i}{d\bar{t}_i}\right)^2 = (a_{xi}\bar{t}_i + b_{xi})^2 = a_{xi}^2\bar{t}_i^2 + 2a_{xi}b_{xi}\bar{t}_i + b_{xi}^2 \quad (3.53)$$

$$\left(\frac{dy_i}{d\bar{t}_i}\right)^2 = (a_{yi}\bar{t}_i + b_{yi})^2 = a_{yi}^2\bar{t}_i^2 + 2a_{yi}b_{yi}\bar{t}_i + b_{yi}^2 \quad (3.54)$$

$$\left(\frac{dz_i}{d\bar{t}_i}\right)^2 = (a_{zi}\bar{t}_i + b_{zi})^2 = a_{zi}^2\bar{t}_i^2 + 2a_{zi}b_{zi}\bar{t}_i + b_{zi}^2 \quad (3.55)$$

te se nakon njihovog zbrajanja dobiva:

$$\left(\frac{dx_i}{d\bar{t}_i}\right)^2 + \left(\frac{dy_i}{d\bar{t}_i}\right)^2 + \left(\frac{dz_i}{d\bar{t}_i}\right)^2 = a_i\bar{t}_i^2 + b_i\bar{t}_i + c_i \quad (3.56)$$

gdje su:  $a_i$ ,  $b_i$  i  $c_i$ :

$$a_i = a_{xi}^2 + a_{yi}^2 + a_{zi}^2 \quad (3.57)$$

$$b_i = 2(a_{xi}b_{xi} + a_{yi}b_{yi} + a_{zi}b_{zi}) \quad (3.58)$$

$$c_i = b_{xi}^2 + b_{yi}^2 + b_{zi}^2 \quad (3.59)$$

čime izraz (3.51) prelazi u:

$$\zeta_i(t_i) = \int_0^{t_i} \sqrt{a_i\bar{t}_i^2 + b_i\bar{t}_i + c_i} d\bar{t}_i \quad (3.60)$$

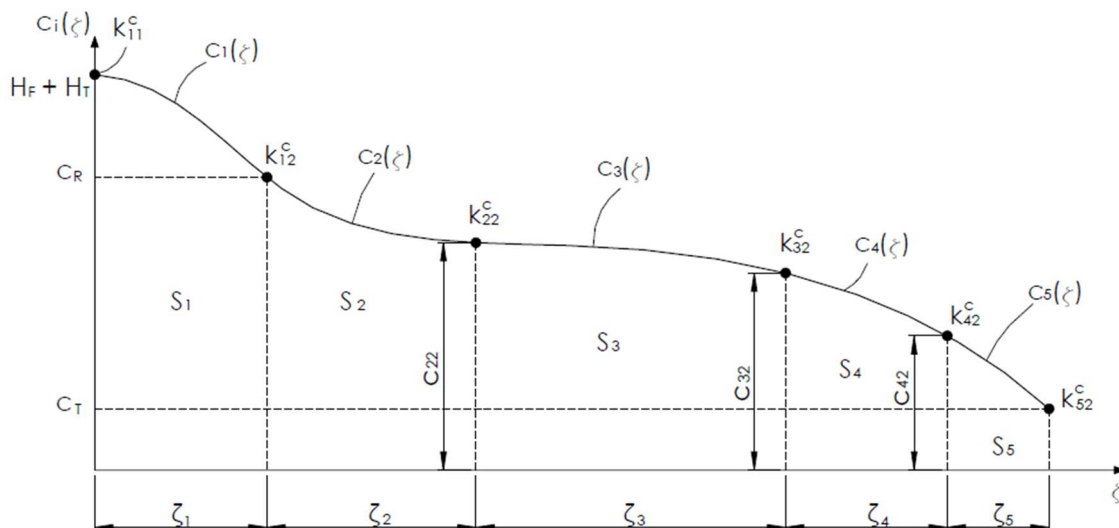
Rješavanjem integrala u (3.60), dobiva se veza između duljine lokalne Bézierove krivulje drugog reda i njenog parametra  $t_i$ . Taj se integral može riješiti analitički no samo rješenje je vrlo nezgodno za koristiti (postoji više inačica rješenja ovisno o iznosima supstitucijskih varijabli:  $a_i$ ,  $b_i$  i  $c_i$ ) te je ga je bolje riješiti numerički.

Sada se distribucija duljine tetive i uvijanja može pisati kao:  $c_i(\zeta(t_i))$ ,  $\alpha_i(\zeta(t_i))$  tj.  $c_i(\zeta)$ ,  $\alpha_i(\zeta)$  pri čemu je  $\zeta$  duljina krivulje vodilje koja se mjeri od križanja krila (bez obzira na kojoj se sekciji nalazili) te je zato ispušten indeks  $i$ . Pronalazak distribucija  $c_i(\zeta)$ ,  $\alpha_i(\zeta)$ , sljedeći je korak.

### 3.6. Distribucija duljine tetive duž raspona

Kako bi se definirala distribucija duljine tetive duž raspona, potrebno je prijeći u  $\zeta$ ,  $c_i(\zeta)$  prostor kao što je prikazano na slici 3.7.





Slika 3.7 Distribucija duljine tetive duž raspona

Za ovaj projekt, uzet će se da se duljina tetive mijenja kubično po svakoj sekciji tj. distribucija će biti kubični spline koji zadovoljava C1 kontinuitet na spojevima. Svaka kubična krivulja prolazi kroz naznačene točke na slici 3.7 te ima neki nagib u interpolacijskoj točki. Interpolacijske točke se postavljaju na krajeve segmenata te širina intervala unutar kojeg vrijedi jedna kubična distribucija, odgovara duljini projicirane krivulje vodilje segmenta na  $y, z$  ravninu ( $\zeta_1, \dots, \zeta_5$ ). Distribucija na  $i$ -tom segmentu glasi:

$$c_i(\zeta(t_i)) = K_{i3}^c \zeta^3 + K_{i2}^c \zeta^2 + K_{i1}^c \zeta + K_{i0}^c \quad (3.61)$$

Prva krivulja sa svojim neodređenim koeficijentima:  $K_{13}^c, K_{12}^c, K_{11}^c$  i  $K_{10}^c$ , ima oblik:

$$c_1(\zeta(t_1)) = K_{13}^c \zeta^3 + K_{12}^c \zeta^2 + K_{11}^c \zeta + K_{10}^c \quad (3.62)$$

te vrijedi za interval:

$$\zeta_{L1} \leq \zeta \leq \zeta_{R1} \quad (3.63)$$

$$\zeta_{L1} = 0 \quad (3.64)$$

$$\zeta_{R1} = \zeta_1 \quad (3.65)$$

Rubni uvjeti za prvu krivulju glase:

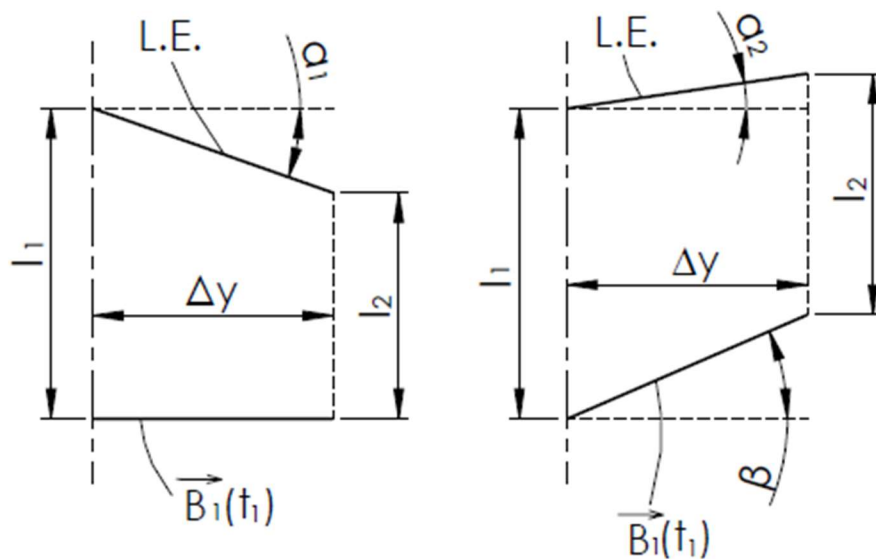
$$c_1(\zeta_{L1}) = H_F + H_T \quad (3.66)$$

$$c_1(\zeta_{R1}) = c_R \quad (3.67)$$

$$\left. \frac{dc_1}{d\zeta} \right|_{\zeta = \zeta_{L1}} = k_{11}^c \quad (3.68)$$

$$\left. \frac{dc_1}{d\zeta} \right|_{\zeta = \zeta_{R1}} = k_{12}^c \quad (3.69)$$

Nagib prve krivulje u korijenu krila mora biti takav da se ostvaruje bar G1 kontinuitet sa drugom polovicom krila tj. vektor tangente prednjeg brida mora biti paralelan sa  $y$ -osi. Čini se da je dovoljno reći da je  $k_{11}^c = 0$  no nije. Razlog tome jest činjenica da se krivulja  $c_1(\zeta)$  nalazi u jednom a letjelica u drugom prostoru. Radi ilustracije problema, dana je slika 3.8 na kojoj se vidi krivulja vodilja te prednji brid dobiven navođenjem aeroprofila odgovarajuće duljine.



Slika 3.8 Uz određivanje nagiba  $k_{11}^c$

Na lijevoj slici je prikazan slučaj kada je krivulja vodilja okomita na ravninu simetrije ( $\beta = 0$ ) a na drugoj slučaju kada stoji pod nekim kutom  $\beta$ . Treba primijetiti da je distribucija duljine tetive identična u oba slučaja no kut pod kojim stoji prednji brid u odnosu na ravninu simetrije, nije što ukazuje na činjenicu da nije dovoljno reći da je  $k_{11}^c = 0$ . Stoga je potrebno pronaći  $k_{11}^c$  koji se mijenja na način da za bilo koji kut  $\beta$ , vrh letjelice bude uvijek okomit na ravninu simetrije.

Tangens kuta  $\alpha_1$  je jednak (vidi sliku 3.8):

$$\tan(\alpha_1) = \frac{l_2 - l_1}{\Delta y} \quad (3.70)$$

Tangens kuta  $\beta$  je jednak:

$$\tan(\beta) = \left| \frac{\frac{dx_1}{dt_1} \Big|_{t_1=0}}{\frac{dy_1}{dt_1} \Big|_{t_1=0}} \right| \quad (3.71)$$

Sada se još na posljatku mora izračunati tangens kuta  $\alpha_1$ :

$$\tan(\alpha_2) = \frac{l_2 + \tan(\beta)\Delta y - l_1}{\Delta y} = \frac{l_2 - l_1}{\Delta y} + \tan(\beta) = \tan(\alpha_1) + \tan(\beta) \quad (3.72)$$

$\tan(\alpha_1)$  se je jednak  $k_{11}^c$  dok  $\tan(\alpha_2)$  mora biti jednak nuli iz čega se dobiva  $k_{11}^c$  kojim će biti zadovoljen bar G1 kontinuitet krivulje prednjeg brida na vrhu krila:

$$k_{11}^c = - \left| \frac{\frac{dx_1}{dt_1} \Big|_{t_1=0}}{\frac{dy_1}{dt_1} \Big|_{t_1=0}} \right| \quad (3.73)$$

Korištenjem jednadžbe (3.52), izraz (3.73) se može zapisati kako slijedi:

$$k_{11}^c = - \left| \frac{x_{11} + x_{10}}{y_{11} + y_{10}} \right| = \frac{x_{10} + x_{11}}{y_{11} + y_{10}} \quad (3.74)$$

Za ostale spojeve, takva analiza nije potrebna pošto na ostalim spojevima krivulje vodilje ostvaruju C1 kontinuitet.

Sada se može napisati sustav linearnih jednadžbi čijim se rješavanjem dobivaju neodređeni koeficijenti distribucije:

$$\begin{bmatrix} \zeta_{L1}^3 & \zeta_{L1}^2 & \zeta_{L1} & 1 \\ \zeta_{R1}^3 & \zeta_{R1}^2 & \zeta_{R1} & 1 \\ 3\zeta_{L1}^2 & 2\zeta_{L1} & 1 & 0 \\ 3\zeta_{R1}^2 & 2\zeta_{R1} & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{13}^c \\ K_{12}^c \\ K_{11}^c \\ K_{10}^c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_F + H_T \\ c_R \\ k_{11}^c \\ k_{12}^c \end{bmatrix} \quad (3.75)$$

Za distribuciju po drugom segmentu, vrijedi:

$$c_2(\zeta(t_2)) = K_{23}^c \zeta^3 + K_{22}^c \zeta^2 + K_{21}^c \zeta + K_{20}^c \quad (3.76)$$

te vrijedi za interval:

$$\zeta_{L2} \leq \zeta \leq \zeta_{R2} \quad (3.77)$$

$$\zeta_{L2} = \zeta_1 \quad (3.78)$$

$$\zeta_{R2} = \zeta_1 + \zeta_2 \quad (3.79)$$

Rubni uvjeti za drugu krivulju glase:

$$c_2(\zeta_{L2}) = c_R \quad (3.80)$$

$$c_2(\zeta_{R2}) = c_{22} \quad (3.81)$$

$$\left. \frac{dc_2}{d\zeta} \right|_{\zeta = \zeta_{L2}} = k_{12}^c \quad (3.82)$$

$$\left. \frac{dc_2}{d\zeta} \right|_{\zeta = \zeta_{R2}} = k_{22}^c \quad (3.83)$$

te će onda korespondentni sustav za pronalaženje neodređenih koeficijenata glasiti:

$$\begin{bmatrix} \zeta_{L2}^3 & \zeta_{L2}^2 & \zeta_{L2} & 1 \\ \zeta_{R2}^3 & \zeta_{R2}^2 & \zeta_{R2} & 1 \\ 3\zeta_{L2}^2 & 2\zeta_{L2} & 1 & 0 \\ 3\zeta_{R2}^2 & 2\zeta_{R2} & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{23}^c \\ K_{22}^c \\ K_{21}^c \\ K_{20}^c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_R \\ c_{22} \\ k_{12}^c \\ k_{22}^c \end{bmatrix} \quad (3.84)$$

Analogno vrijedi za preostale sekcije te će se samo navesti gotovi sustavi kojima se dobivaju koeficijenti distribucije.

Za treći segment:

$$\begin{bmatrix} \zeta_{L3}^3 & \zeta_{L3}^2 & \zeta_{L3} & 1 \\ \zeta_{R3}^3 & \zeta_{R3}^2 & \zeta_{R3} & 1 \\ 3\zeta_{L3}^2 & 2\zeta_{L3} & 1 & 0 \\ 3\zeta_{R3}^2 & 2\zeta_{R3} & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{33}^c \\ K_{32}^c \\ K_{31}^c \\ K_{30}^c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{22} \\ c_{32} \\ k_{22}^c \\ k_{32}^c \end{bmatrix} \quad (3.85)$$

$$\zeta_{L3} = \zeta_1 + \zeta_2 \quad (3.86)$$

$$\zeta_{R3} = \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 \quad (3.87)$$

Za četvrti segment:

$$\begin{bmatrix} \zeta_{L4}^3 & \zeta_{L4}^2 & \zeta_{L4} & 1 \\ \zeta_{R4}^3 & \zeta_{R4}^2 & \zeta_{R4} & 1 \\ 3\zeta_{L4}^2 & 2\zeta_{L4} & 1 & 0 \\ 3\zeta_{R4}^2 & 2\zeta_{R4} & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{43}^c \\ K_{42}^c \\ K_{41}^c \\ K_{40}^c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{32} \\ c_{42} \\ k_{32}^c \\ k_{42}^c \end{bmatrix} \quad (3.88)$$

$$\zeta_{L4} = \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 \quad (3.89)$$

$$\zeta_{R4} = \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 + \zeta_4 \quad (3.90)$$

Za peti segment:

$$\begin{bmatrix} \zeta_{L5}^3 & \zeta_{L5}^2 & \zeta_{L5} & 1 \\ \zeta_{R5}^3 & \zeta_{R5}^2 & \zeta_{R5} & 1 \\ 3\zeta_{L5}^2 & 2\zeta_{L5} & 1 & 0 \\ 3\zeta_{R5}^2 & 2\zeta_{R5} & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{53}^c \\ K_{52}^c \\ K_{51}^c \\ K_{50}^c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{42} \\ c_T \\ k_{42}^c \\ k_{52}^c \end{bmatrix} \quad (3.91)$$

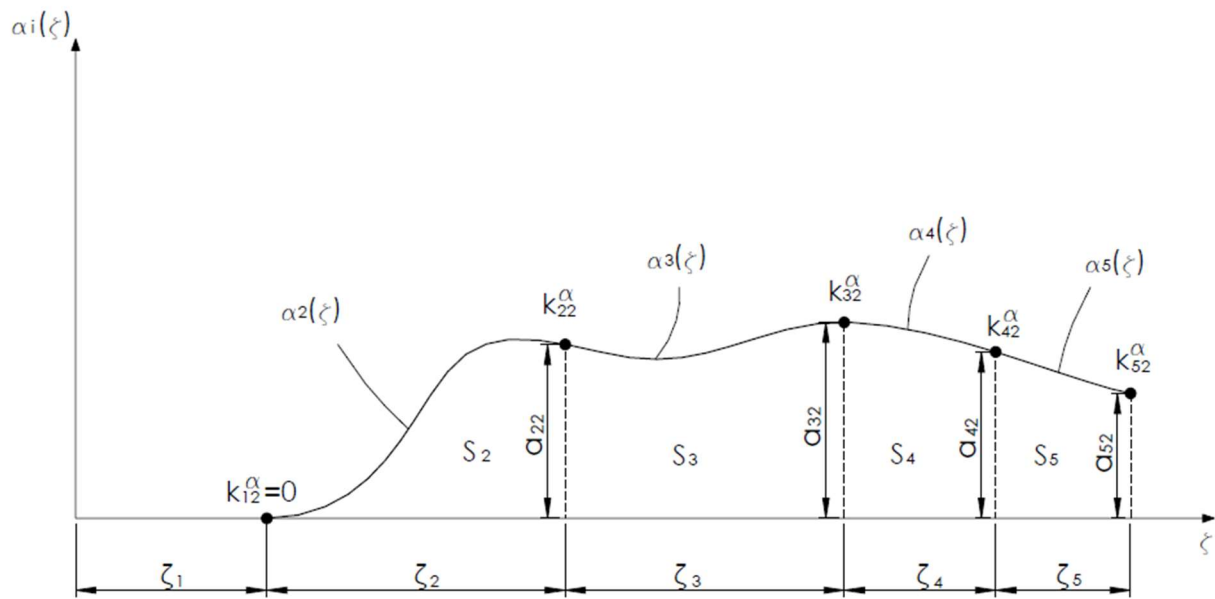
$$\zeta_{L5} = \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 + \zeta_4 \quad (3.92)$$

$$\zeta_{R5} = \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 + \zeta_4 + \zeta_5 \quad (3.93)$$

Time je u potpunosti definirana distribucija duljine tetive duž raspona. Bitno je napomenuti da se su :  $c_{22}, \dots, c_T$  i  $k_{22}^c, \dots, k_{52}^c$  dok  $k_{11}^c$  i  $k_{12}^c$  nisu jer su to veličine koje definiraju oblik trupa koji se ne mijenja.  $k_{11}^c$  je funkcija varijabli trupa spomenutih na samom početku ovog poglavlja ( $H_F, H_T, W$  i  $c_R$ ) dok je  $k_{12}^c$  peta varijabla trupa kojom se namješta oblik trupa prije optimizacije.

### 3.7. Distribucija uvijanja duž raspona

Distribucija uvijanja će biti analogna distribuciji duljine tetive uz tu razliku da na prvom segmentu neće biti uvijanja zato što prvi segment predstavlja trup. Distribucija uvijanja skupa sa veličinama koje definiraju distribuciju, vidi se na slici 3.9.



Slika 3.9 Distribucija uvijanja duž raspona

Nagib  $k_{12}^{\alpha}$  je jednak nuli kako bi se osigurao glatki prijelaz sa trupa na ostatak krila koji se može uvijati. Distribucija na  $i$ -tom segmentu glasi:

$$\alpha_i(\zeta(t_i)) = K_{i3}^{\alpha}\zeta^3 + K_{i2}^{\alpha}\zeta^2 + K_{i1}^{\alpha}\zeta + K_{i0}^{\alpha} \quad (3.94)$$

Za drugi segment, uvijanje ima oblik:

$$\alpha_2(\zeta(t_2)) = K_{23}^{\alpha}\zeta^3 + K_{22}^{\alpha}\zeta^2 + K_{21}^{\alpha}\zeta + K_{20}^{\alpha} \quad (3.95)$$

gdje su veličine:  $K_{23}^{\alpha}$ ,  $K_{22}^{\alpha}$ ,  $K_{21}^{\alpha}$  i  $K_{20}^{\alpha}$  neodređeni koeficijenti distribucije uvijanja. Navedena distribucija vrijedi u intervalu:

$$\zeta_{L2} \leq \zeta \leq \zeta_{R2} \quad (3.96)$$

$$\zeta_{L2} = \zeta_1 \quad (3.97)$$

$$\zeta_{R2} = \zeta_1 + \zeta_2 \quad (3.98)$$

dok rubni uvjeti glase:

$$\alpha_2(\zeta_{L2}) = 0 \quad (3.99)$$

$$\alpha_2(\zeta_{R2}) = \alpha_{22} \quad (3.100)$$

$$\left. \frac{d\alpha_2}{d\zeta} \right|_{\zeta = \zeta_{L2}} = 0 \quad (3.101)$$

$$\left. \frac{d\alpha_2}{d\zeta} \right|_{\zeta = \zeta_{R2}} = k_{22}^\alpha \quad (3.102)$$

Na kraju je još potrebno postaviti sustav jednažbi za neodređene koeficijente:

$$\begin{bmatrix} \zeta_{L2}^3 & \zeta_{L2}^2 & \zeta_{L2} & 1 \\ \zeta_{R2}^3 & \zeta_{R2}^2 & \zeta_{R2} & 1 \\ 3\zeta_{L2}^2 & 2\zeta_{L2} & 1 & 0 \\ 3\zeta_{R2}^2 & 2\zeta_{R2} & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{23}^\alpha \\ K_{22}^\alpha \\ K_{21}^\alpha \\ K_{20}^\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha_{22} \\ 0 \\ k_{22}^c \end{bmatrix} \quad (3.103)$$

Pronalaženje koeficijenata za distribucije uvijanja uz ostale segmente se dobiva na analogan način.

Za treći segment:

$$\begin{bmatrix} \zeta_{L3}^3 & \zeta_{L3}^2 & \zeta_{L3} & 1 \\ \zeta_{R3}^3 & \zeta_{R3}^2 & \zeta_{R3} & 1 \\ 3\zeta_{L3}^2 & 2\zeta_{L3} & 1 & 0 \\ 3\zeta_{R3}^2 & 2\zeta_{R3} & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{33}^\alpha \\ K_{32}^\alpha \\ K_{31}^\alpha \\ K_{30}^\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{22} \\ \alpha_{32} \\ k_{22}^\alpha \\ k_{32}^\alpha \end{bmatrix} \quad (3.104)$$

$$\zeta_{L3} = \zeta_1 + \zeta_2 \quad (3.105)$$

$$\zeta_{R3} = \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 \quad (3.106)$$

Za četvrti segment:

$$\begin{bmatrix} \zeta_{L4}^3 & \zeta_{L4}^2 & \zeta_{L4} & 1 \\ \zeta_{R4}^3 & \zeta_{R4}^2 & \zeta_{R4} & 1 \\ 3\zeta_{L4}^2 & 2\zeta_{L4} & 1 & 0 \\ 3\zeta_{R4}^2 & 2\zeta_{R4} & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{43}^\alpha \\ K_{42}^\alpha \\ K_{41}^\alpha \\ K_{40}^\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{32} \\ \alpha_{42} \\ k_{32}^\alpha \\ k_{42}^\alpha \end{bmatrix} \quad (3.107)$$

$$\zeta_{L4} = \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 \quad (3.108)$$

$$\zeta_{R4} = \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 + \zeta_4 \quad (3.109)$$

Za peti segment:

$$\begin{bmatrix} \zeta_{L5}^3 & \zeta_{L5}^2 & \zeta_{L5} & 1 \\ \zeta_{R5}^3 & \zeta_{R5}^2 & \zeta_{R5} & 1 \\ 3\zeta_{L5}^2 & 2\zeta_{L5} & 1 & 0 \\ 3\zeta_{R5}^2 & 2\zeta_{R5} & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{53}^\alpha \\ K_{52}^\alpha \\ K_{51}^\alpha \\ K_{50}^\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{42} \\ \alpha_{52} \\ k_{42}^\alpha \\ k_{52}^\alpha \end{bmatrix} \quad (3.110)$$

$$\zeta_{L5} = \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 + \zeta_4 \quad (3.111)$$

$$\zeta_{R5} = \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 + \zeta_4 + \zeta_5 \quad (3.112)$$

Analogno distribuciji uvijanja, veličine:  $\alpha_{22}, \dots, \alpha_{52}$  i  $k_{22}^\alpha, \dots, k_{52}^\alpha$  također predstavljaju projektne varijable tj. varijable koje će biti podvrgnute optimizaciji.

### 3.8. Distribucija dihedrala

Preostalo je još definirati  $\theta_i(t_i)$  kako bi se mogla formirati konačna geometrija. Da bi se to odredilo, potrebno je definirati kako će se aeroprofil navoditi na krivulju vodilju. Aeroprofil će biti postavljen tako da kontura aeroprofila leži u ravnini čija je normala okomita na  $x$ -os te kolinearna sa vektorom tangente krivulje vodilje u točki spajanja krivulje vodilje i aeroprofila. Stoga proizlazi da je lokalni iznos dihedrala jednak kutu između  $y$ -osi i vektora tangente projicirane krivulje vodilje na  $y, z$  ravninu stoga se može pisati:

$$\theta_i(t_i) = \arctan\left(\frac{dz_i}{dy_i}\right) = \arctan\left(\frac{\frac{dz_i}{dt_i}}{\frac{dy_i}{dt_i}}\right) \quad (3.113)$$

Korištenjem jednadžbe (3.52), izraz (3.113) prelazi u:

$$\theta_i(t_i) = \arctan\left(\frac{a_{zi}t_i + b_{zi}}{a_{yi}t_i + b_{yi}}\right) \quad (3.114)$$

te za pojedine segmente iznosi:

$$\theta_1(t_1) = \arctan\left(\frac{a_{z1}t_1 + b_{z1}}{a_{y1}t_1 + b_{y1}}\right) = 0 \quad (3.115)$$

$$\theta_2(t_2) = \arctan\left(\frac{a_{z2}t_2 + b_{z2}}{a_{y2}t_2 + b_{y2}}\right) \quad (3.116)$$



$$\theta_3(t_3) = \arctan\left(\frac{a_{z3}t_3 + b_{z3}}{a_{y3}t_3 + b_{y3}}\right) \quad (3.117)$$

$$\theta_4(t_4) = \arctan\left(\frac{a_{z4}t_4 + b_{z4}}{a_{y4}t_4 + b_{y4}}\right) \quad (3.118)$$

$$\theta_5(t_5) = \arctan\left(\frac{a_{z5}t_5 + b_{z5}}{a_{y5}t_5 + b_{y5}}\right) = \frac{\pi}{2} \quad (3.119)$$

$\theta_1(t_1)$  je jednak nuli pošto je taj segment predstavlja trup dok je  $\theta_5(t_5)$  jednak  $\frac{\pi}{2}$  zato što peti segment predstavlja winglet (vertikalni stabilizator) koji je postavljen okomito.

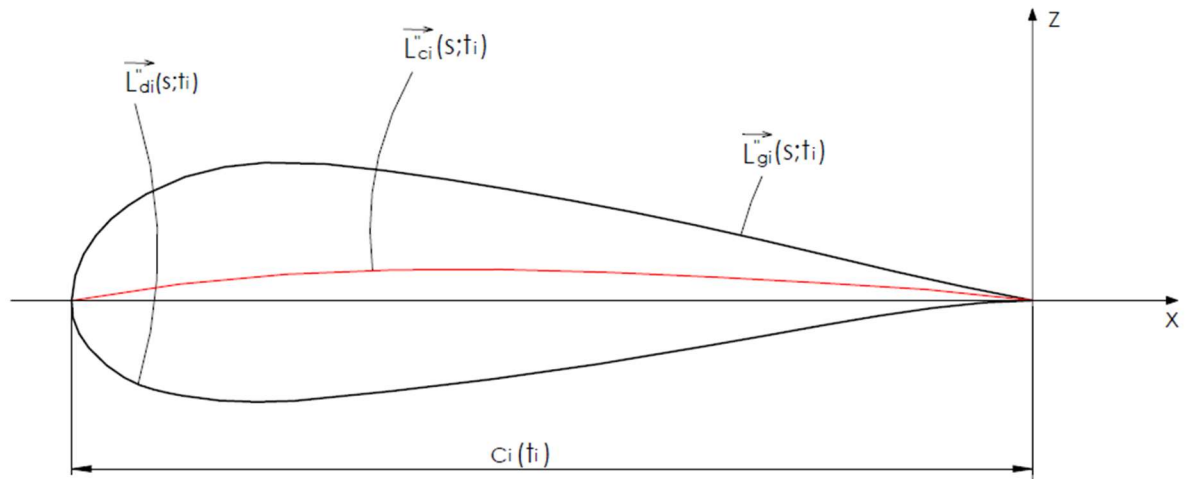
Sada je još potrebno povezati aeroprofil sa krivuljom vodiljom kao bi se konačno dobila geometrija letećeg krila.

### 3.9. Konačna geometrija

Kao što je već navedeno na početku ovog poglavlja, geometrija letećeg krila se može dobiti vektorskim zbrajanjem parametarski zadane krivulje vodilje i parametarski zadane konture koja se ekstrudira duž krivulje vodilje. Za potrebe proračuna, bitna je srednja ploha tj. ploha koja se dobiva ekstruzijom srednje linije aeroprofila duž krivulje vodilje. Dobivanje prave geometrije navođenjem gornjake i donjake je analogno slučaju sa srednjom linijom te u ovom slučaju može poslužiti samo kao vizualizacija.

Krivulje vodilje su već parametarski zadane (Bézierove krivulje) no srednja linija aeroprofila nije (jednadžba (3.45)). Taj se problem rješava jednostavno zamjenom koordinate  $x$  sa nekim parametrom te postavljanjem istog parametra na mjestu gdje je bio  $x$  u izrazu za  $z$  ( $h_c(x)$ ) koordinatu srednje linije.

Na slici 3.10, vide se parametarski zadane krivulje: gornjake, donjake i srednje linije aeroprofila duljine  $c_i(t_i)$ . Cijeli aeroprofil je pomaknut na način da se izlazni brid aeroprofila podudara sa ishodištem koordinatnog sustava da bi se aeroprofil mogao spajati sa izlaznim bridom na krivulju vodilju.



Slika 3.10 Prikaz parametarski zadanih krivulja aeroprofila

Tako zadana krivulja srednje linije glasi:

$$\vec{L}_{ci}''(s; t_i) = \begin{bmatrix} x_{ci}'' \\ 0 \\ z_{ci}'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_i(t_i)(s-1) \\ 0 \\ c_i(t_i)(K_5s^5 + K_4s^4 + K_3s^3 + K_2s^2 + K_1s + K_0) \end{bmatrix} \quad (3.120)$$

gdje su:  $K_5, K_4, K_3, K_2, K_1$  i  $K_0$  izračunati koeficijenti koji definiraju krivulju srednje linije a  $s$ , parametar krivulje. Tu krivulju je potrebno transformirati na način na koji je to prikazano relacijom (3.47):

$$\vec{L}_{ci} = \begin{bmatrix} x_{ci} \\ y_{ci} \\ z_{ci} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha_i) & 0 & \sin(\alpha_i) \\ \sin(\alpha_i) \sin(\theta_i) & \cos(\theta_i) & -\cos(\alpha_i) \sin(\theta_i) \\ -\sin(\alpha_i) \cos(\theta_i) & \sin(\theta_i) & \cos(\alpha_i) \cos(\theta_i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{ci}'' \\ 0 \\ z_{ci}'' \end{bmatrix} \quad (3.121)$$

Sad još preostaje zbrojiti krivulje vodilje sa transformiranim krivuljama srednje linije čime se dobiva srednja ploha  $\vec{S}_{ci}(s, t_i)$ :

$$\vec{S}_{ci}(s, t_i) = \vec{B}_i(t_i) + \vec{L}_{ci}(s; t_i) \quad (3.122)$$

koja zapisana pomoću komponenata glasi:

$$\begin{bmatrix} x_{ci}(s, t_i) \\ y_{ci}(s, t_i) \\ z_{ci}(s, t_i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_i(t_i) + x_{ci}(s; t_i) \\ y_i(t_i) + y_{ci}(s; t_i) \\ z_i(t_i) + z_{ci}(s; t_i) \end{bmatrix} \quad (3.123)$$

Time je u potpunosti definirana geometrija krila (bar onaj dio koji je bitan za proračun).

## 4. AERODINAMIČKI MODEL

### 4.1. Kratak teorijski opis aerodinamičkog modela

U općem slučaju, bilo bi potrebno koristiti model kompresibilnog fluida za aerodinamičku analizu no pošto se ovdje analizira letjelica koja se kreće brzinama manjim od  $M_a=0.3$ , dovoljno je koristiti model nekompresibilnog fluida, konkretno, Navier-Stokes-ove jednačbe. Međutim numeričko rješavanje Navier-Stokes-ovih jednačbi je vremenski vrlo zahtjevno te će se zato koristiti teorija potencijalnog strujanja. Teorija potencijalnog strujanja je samo specijalni slučaj Navier-Stokes-ovih jednačbi u kojima je zanemarena viskoznost te uvedena pretpostavka o potencijalnom polju brzina tj. vektorskom polju brzina koje se može zapisati kao gradijent neke skalarne funkcije (potencijalna funkcija) [3.]. Za ovaj model, pretpostavit će se da se radi o stacionarnom strujanju te će se zanemariti masene sile čime se konačno dobivaju jednačbe potencijalnog stacionarnog strujanja:

$$\nabla^2 \varphi = 0 \quad (4.1)$$

$$p + \frac{\rho v^2}{2} = c \quad (4.2)$$

gdje je:

$\varphi$  – potencijalna funkcija čiji gradijent predstavlja polje brzina,

$p$  – tlak u nekoj točki prostora,

$\rho$  – gustoća fluida,

$v = |\nabla \varphi|$  – brzina fluida u nekoj točki prostora i

$c$  – konstanta koja se određuje na temelju rubnih uvjeta.

Jednačba (4.1) je linearna parcijalna diferencijalna jednačba što je vrlo bitna činjenica jer će se stalno koristiti svojstvo superpozicije. Time je moguće dobiti različita složena strujanja koristeći kombinaciju jednostavnih rješenja jednačbe (4.1) ([3.], [4.], [5.] ili [6.]

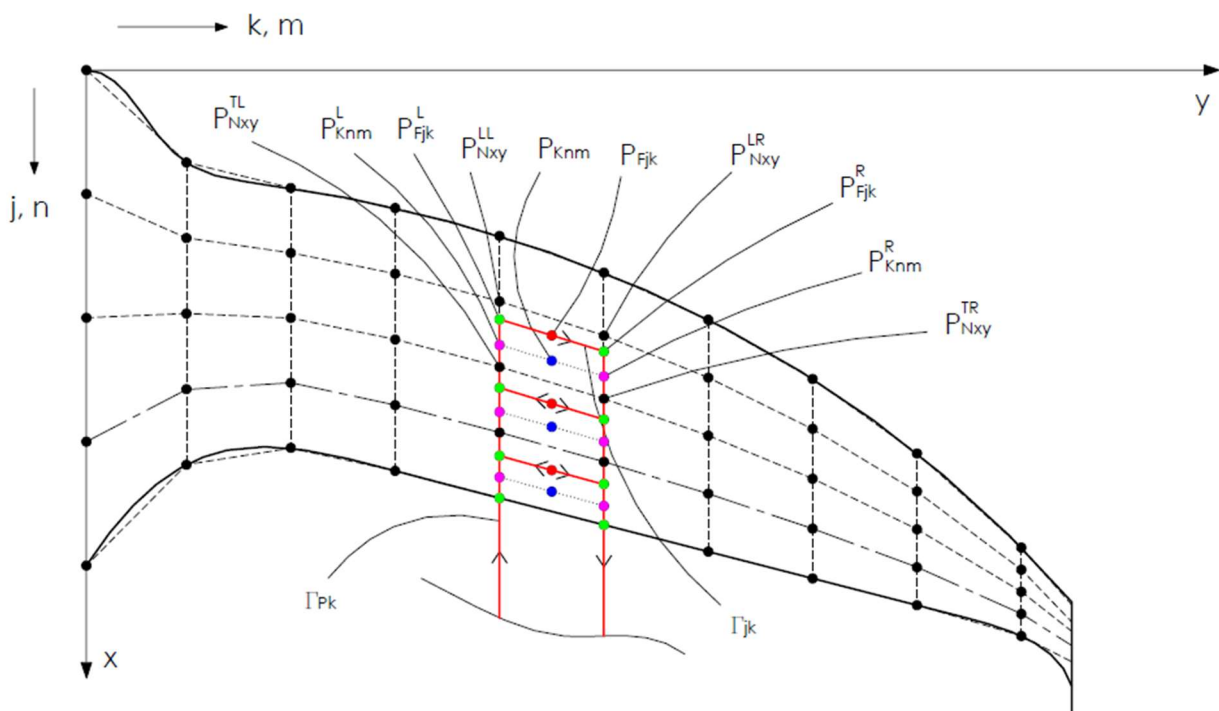
Prema [4.], moguće je opisati potencijalno strujanje oko tijela proizvoljnog oblika opisati koristeći dva elementarna rješenja jednačbe (4.1) (tzv. izvore i dipole). Također u [4.], navodi se da se modeliranje strujanja oko nekog tijela proizvoljnog oblika može provesti na numerički način i to korištenjem tzv. panela unutar kojih se nalazi poznata distribucija izvora i/ili dipola (slično kao interpolacijske funkcije kod metode konačnih elemenata). Dalje se pokazuje da se panela sa konstantnom distribucijom jačine dipola, može zamijeniti vrtložnim prstenom odgovarajuće cirkulacije, koji se postavlja na rub panele. Pošto se iz aerodinamičke analize letjelice želi primarno saznati uzgon, onda je dovoljno razmatrati samo dipole tj. vrtložne prstene jer prema teoremu Kutta-Joukowskog, uzgon je primarno proporcionalan cirkulaciji. Za

aerodinamičku analizu letjelice, ovdje će se koristiti tzv. metoda vrtložne rešetke koja zanemaruje debljinu aeroprofila te razmatra samo srednju plohu na koju se postavlja konačan broj vrtložnih prstena odgovarajućih jačina kako bi se postiglo strujanje kod kojeg je brzina tangencijalna na površinu u tzv. kontrolnim točkama (detaljnije u nastavku) čime se aproksimira rješenje kod kojeg je brzina u svakoj točki plohe tijela, tangencijalna na plohu.

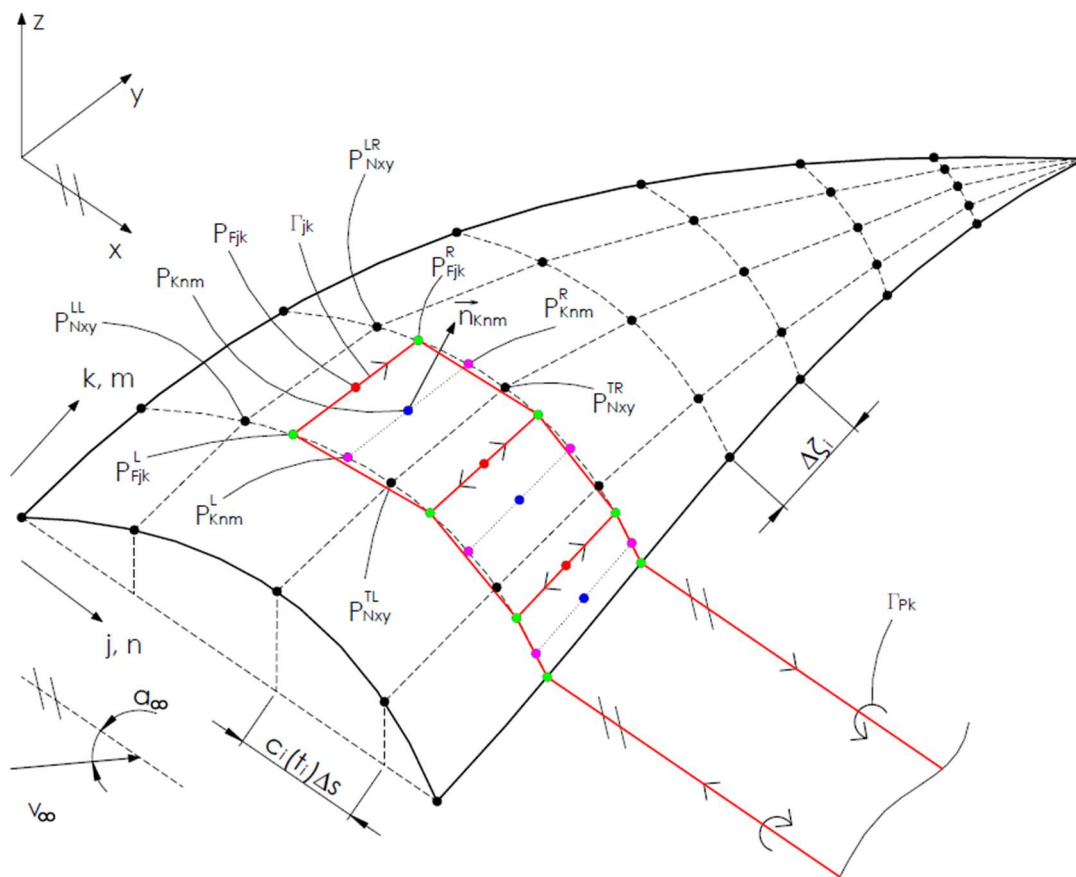
Veliki nedostatak teorije potencijalnog strujanja jest nemogućnost određivanja parazitnog otpora (d'Alembertov paradoks) stoga se mora koristiti neki drugi način za određivanje tog djela otpora. Odrediti te dijelove otpora je vrlo zahtjevno te se zato koristi procjena parazitnog otpora prikazana u [7.] i [8.] koja je dobivena teorijsko-eksperimentalnim razmatranjima te će se detaljnije objasniti pri izračunu aerodinamičkih koeficijenata.

## 4.2. Proračunska mreža

Prije same formulacije aerodinamičkog modela, potrebno je definirati proračunsku mrežu tj. točke gdje će biti postavljeni vrhovi vrtložnih prstena. Slike 4.1 i 4.2 prikazuju proračunsku mrežu skupa sa tri vrtložna prstena postavljena na odgovarajuća mjesta. Na slici su još prikazane sve relevantne točke i oznake koje će biti važne pri formulaciji modela.



Slika 4.1 2D shematski prikaz: srednje površine, proračunske mreže i vrtložnih prstena



Slika 4.2 3D shematski prikaz: srednje površine, proračunske mreže i vrtložnih prstena

Svaka panela, definirana je sa četiri točke (svaka sa tri komponente) koje su smještene u matrice a komponente tih matrica su (vidi slike 4.1 i 4.2):  $P_{Nxy}^{LL}$  (komponenta matrice prednjih lijevih točaka panele),  $P_{Nxy}^{LR}$  (komponenta matrice prednjih desnih točaka panele),  $P_{Nxy}^{TR}$  (komponenta matrice stražnjih desnih točaka panele) i  $P_{Nxy}^{TL}$  (komponenta matrice stražnjih lijevih točaka panele) pri čemu vrijedi:  $x = j = n = 1, \dots, P$  i  $y = k = m = 1, \dots, Q$ , gdje je:  $P$  predstavlja broj panela duž tetive a  $Q$  broj panela duž raspona. Pomoću točaka koje definiraju vrhove panela, mogu se izračunati sve ostale relevantne točke stoga je dovoljno definirati samo vrhove panela. Ideja je da se sve četiri matrice vršnih točaka stave u jednu matricu mreže čije će se komponente označiti sa  $P_{N\mu\nu}$  ( $\mu = 1, \dots, P + 1$  i  $\nu = 1, \dots, Q + 1$ ). Kako bi se dobile te komponente, potrebno je srednju plohu podijeliti duž tetive i raspona tj. treba pronaći parove parametara  $s$  i  $t_i$  koji definiraju plohu.

Duž tetive, može se za fiksni parametar  $t_i$ , podijeliti parametar  $s$  na jednake dijelove pa će inkrement parametra  $s$  iznositi:

$$\Delta s = \frac{1}{P} \quad (4.3)$$

pa će se parametar  $s$  unutar matrice mreže mijenjati u ovisnosti o indeksu na sljedeći način:

$$s_\mu = (\mu - 1)\Delta s = \frac{\mu - 1}{P} \quad (4.4)$$

Podjela parametra  $t_i$  je nešto teže. Naime, parametar  $s$  ima svojstvo da jednaka podjela parametra  $s$ , odgovara jednakoj podjeli duljine tetive dok jednako podijeljeni parametar Bézierove krivulje  $t_i$ , nema to svojstvo tj. jednako podijeljeni parametar  $t_i$  ne odgovara jednako podijeljenoj duljini Bézierove krivulje pa se mora duljina krivulje podijeliti na jednake dijelove nakon čega se traže parametri  $t_i$  koji kada se u vrste u (3.60), daju odgovarajuću duljinu. Ukoliko se uzme ukupna duljina krivulje vodilje projicirane na  $y, z$  ravninu i podijeli sa željenim brojem panela duž raspona, dobit će se inkrement dužine projicirane krivulje vodilje:

$$\Delta\zeta = \frac{\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 + \zeta_4 + \zeta_5}{N} \quad (4.5)$$

gdje su:  $\zeta_1, \dots, \zeta_5$  duljine projiciranih krivulja vodilja segmenata a  $N$  predstavlja minimalan broj panela duž raspona. Naime, dijeljenjem ukupne duljine krivulje vodilje na jednake segmente dovelo bi do toga da bi neke panele bile smještene jednim djelom na jednom a drugim na drugom segmentu. Kako bi se izbjegavalo provjeravanje da li je došlo do toga ili ne, projicirana duljina svakog segmenta se dijeli sa inkrementom  $\Delta\zeta$  te se kao broj panela tog segmenta uzima sljedeći cijeli broj a inkrement duljine istog segmenta se onda dobiva dijeljenjem projicirane duljine tog segmenta sa brojem panela duž raspona na tom segmentu pa će tako za  $i$ -ti segment broj panela i inkrement duljine se računati kako slijedi:

$$N_i = \left\lceil \frac{\zeta_i}{\Delta\zeta} \right\rceil \quad (4.6)$$

$$\Delta\zeta_i = \frac{\zeta_i}{N_i} \quad (4.7)$$

pa će na kraju ukupan broj panela duž raspona biti:

$$Q = N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + N_5 \quad (4.8)$$

Izračun vrijednosti parametara  $t_i$  za koje se dobiva jednaki razmak se provodi rješavanjem jednadžbe:

$$\zeta_i(t_{iv_i}) = (v_i - 1)\Delta\zeta_i \quad (4.9)$$

gdje je:

$v_i$  – lokalni indeks segmenta koji se kreće od 1 do  $N_i$  (osim za peti segment kod kojeg se indeks kreće od 1 do  $N_5 + 1$  jer je to segment na kojem se dolazi do kraja krivulje vodilje pa treba uzeti u obzir rubnu točku) i

$t_{iv_i}$  – vrijednost parametra  $t_i$  za indeks  $v_i$ .

Jednadžba (4.9), može se riješiti ili traženjem nul-točaka funkcije koja se dobiva rješavanjem integrala iz (3.60) ili nekim drugim numeričkim putem. Dobivanjem parametara  $t_i$ , mogu se izračunati točke koje predstavljaju vrhove panela te se te točke mogu konačno postaviti u matricu  $P_{N\mu\nu}$ . Točke su unutar matrice raspoređene kako slijedi:

$$P_{N\mu\nu} = \begin{bmatrix} P_{c1}(s_1, t_{11}) & \cdots & P_{c1}(s_1, t_{1N_1}) & \cdots & P_{c5}(s_1, t_{51}) & \cdots & P_{c5}(s_1, t_{5(N_5+1)}) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ P_{c1}(s_{p+1}, t_{11}) & \cdots & P_{c1}(s_{p+1}, t_{1N_1}) & \cdots & P_{c5}(s_{p+1}, t_{51}) & \cdots & P_{c5}(s_{p+1}, t_{5(N_5+1)}) \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

gdje  $P_{ci}$  predstavlja komponente srednje plohe.

### 4.3. Formuliranje metode vrtložne rešetke

Cilj metode vrtložne rešetke je postaviti vrtložne prstene koji se sastoje od četiri ravne konačne vrtložne niti, po srednjoj plohi na način da se prednji vrhovi prstena postave na  $\frac{1}{3}$  duljine stranica panela u smjeru tetive a stražnji vrhovi se postavljaju na  $\frac{1}{3}$  duljine stranica panela, koji stoji iza trenutnog (vidi slike 4.1 i 4.2) Kako bi se zadovoljio Kuttun uvjet ([5.], [6.] i [7.]), na krajeve se stavljaju potkovičaste niti koji se sastoje od tri konačne i dvije slobodne ravne vrtložne niti, koje se protežu u beskonačnost kako bi bio zadovoljen drugi Helmholtzov teorem ([5.] i [7.]). Te beskonačne vrtložne niti čine vrtložnu plahu koja se deformira no ovdje će se zanemariti promjena oblika vrtložne plahete te će se pretpostaviti da su sve vrtložne niti koje sačinjavaju vrtložnu plahu, paralelne sa  $x$ -osi čime se pojednostavljuje proračun a bez da se značajno narušava konačni rezultat. Nakon toga, zbraja se brzina leta sa brzinama koje induciraju svi prsteni u kontrolnim točkama te se postavlja tzv. uvjet nepromočivosti koji nalaže da ukupna brzina u kontrolnoj točki (brzina leta i ukupna inducirana brzina), mora biti tangencijalna na plohu. Kontrolne točke su postavljene na način da se nađe točka na sredini spojnice koja spaja mjesta  $\frac{3}{4}$  duljine stranica panela (vidi slike 4.1 i 4.2). Takvih kontrolnih točaka ima onoliko koliko ima i prstena i potkova te se postavljanjem uvjeta nepromočivosti za svaku točku, dobiva sustav linearnih jednadžbi u kojem su nepoznanice jačine vrtloga tj. cirkulacije. Poznavanjem cirkulacija, mogu se pronaći relevantni koeficijenti letjelice.

Kako bi se mogle dobiti brzine koje induciraju prestenasti i potkovičasti vrtlozi, potrebno je odrediti relacije za inducirane brzine koje induciraju njihovi sastavni dijelovi – konačne i beskonačne vrtložne niti.

### 4.3.1. Konačna vrtložna nit

Kako bi se izračunala brzina koju inducira konačna vrtložna nit, potrebno je koristiti Biot-Savartov zakon [5.], kojim se računa brzina koju inducira krivulja  $c$  u nekoj točki. Biot-Savartov zakon u matematičkom obliku glasi:

$$\vec{v} = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_c \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{|\vec{r}|^3} \quad (4.11)$$

gdje je:

$\vec{v}$  – inducirana brzina,

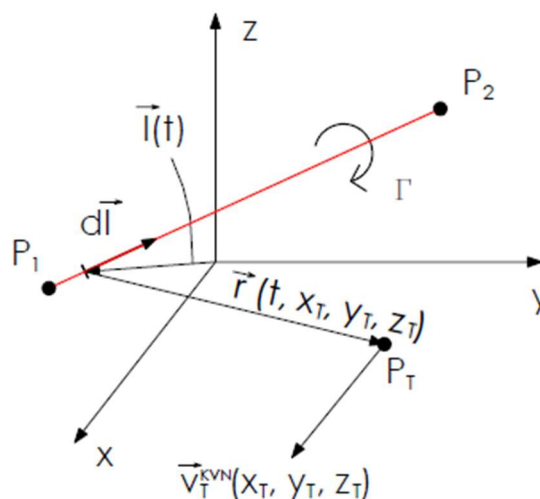
$\Gamma$  – jačina vrtložne niti (cirkulacija),

$d\vec{l}$  – diferencijal krivulje vrtložne niti i

$\vec{r}$  – vektor položaja koji spaja diferencijal krivulje sa točkom u kojoj se računa inducirana brzina

Pošto se vrtložni prsteni sastoje četiri ravne vrtložne niti, potrebno je izračunati koliku brzinu inducira jedan takav segment. Slika 4.3 prikazuje ravnu konačnu vrtložnu nit skupa sa: točkama koje je razapinju ( $P_1$  i  $P_2$ ), točkom u kojoj se računa inducirana brzina ( $P_T$ ), diferencijalom krivulje ( $d\vec{l}$ ) i vektorom koji spaja diferencijal krivulje sa točkom  $P_T$  te induciranu brzinu. Pravac koji prolazi kroz točke  $P_1$  i  $P_2$  glasi:

$$\vec{l}(t) = \begin{bmatrix} x_1 + t(x_2 - x_1) \\ y_1 + t(y_2 - y_1) \\ z_1 + t(z_2 - z_1) \end{bmatrix} \quad (4.12)$$



Slika 4.3 Prikaz konačne vrtložne niti

pa je diferencijal tog pravca jednak:

$$d\vec{l}(t) = \begin{bmatrix} (x_2 - x_1) \\ (y_2 - y_1) \\ (z_2 - z_1) \end{bmatrix} dt \quad (4.13)$$

Vektor koji spaja diferencijal (koji leži u proizvoljnoj točki krivulje) sa točkom  $P_T$  jednak je:

$$\vec{r}(t) = \begin{bmatrix} x_T - x_1 - t(x_2 - x_1) \\ y_T - y_1 - t(y_2 - y_1) \\ z_T - z_1 - t(z_2 - z_1) \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

Uvrštavanjem dobivenih izraza u (4.11), dobiva se integral:



$$\vec{v}_T^{\text{KVN}} = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_{P_1}^{P_2} \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{|\vec{r}|^3} \quad (4.15)$$

Rješavanjem integrala (4.15), dobiva se izraz za brzinu koju inducira konačna vrtložna ( $\vec{v}^{\text{KVN}}$ ) nit definirana točkama  $P_1$  i  $P_2$ , u točki  $P_T$ :

$$\vec{v}_T^{\text{KVN}} = \frac{\vec{\omega}_T^{\text{KVN}}}{4\pi\sqrt{a}\left(c - \frac{b^2}{4a}\right)} \left( \frac{1 + \frac{b}{2a}}{\sqrt{\left(1 + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{1}{a}\left(c - \frac{b^2}{4a}\right)}} - \frac{b}{2\sqrt{ac}} \right) \quad (4.16)$$

$$a = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 \quad (4.17)$$

$$b = (x_2 - x_1)(x_T - x_1) + (y_2 - y_1)(y_T - y_1) + (z_2 - z_1)(z_T - z_1) \quad (4.18)$$

$$c = (x_T - x_1)^2 + (y_T - y_1)^2 + (z_T - z_1)^2 \quad (4.19)$$

$$\vec{\omega}_T^{\text{KVN}} = \begin{bmatrix} (y_2 - y_1)(z_T - z_1) - (z_2 - z_1)(y_T - y_1) \\ -(x_2 - x_1)(z_T - z_1) + (z_2 - z_1)(x_T - x_1) \\ (x_2 - x_1)(y_T - y_1) - (y_2 - y_1)(x_T - x_1) \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

Jednadžba (4.16) se može zapisati u kraćem obliku kao:

$$\vec{v}_T^{\text{KVN}} = \vec{\Omega}^{\text{KVN}}(P_1, P_2, P_T)\Gamma \quad (4.21)$$

### 4.3.2. Beskonačna vrtložna nit

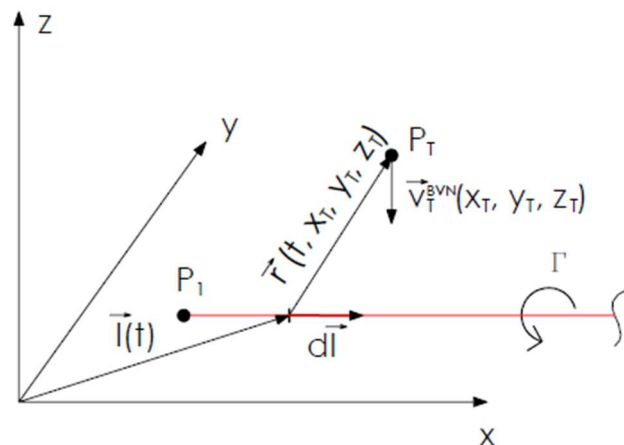
Procedura za izračun brzine koju inducira beskonačna vrtložna nit je identična prethodnoj uz razliku da gornja granica teži u beskonačnost. Radi pretpostavke da su sve beskonačne vrtložne niti paralelne sa  $x$ -osi, potrebno je parametarski definirati pravac koji je paralelan sa  $x$ -osi, prolazeći pritom kroz željenu točku  $P_1$ . Takav pravac (vrtložna nit) i ostale relevantne veličine potrebne za proračun, prikazane su na slici 4.4

Pravac koji definira beskonačnu vrtložnu nit, glasi:

$$\vec{l}(t) = \begin{bmatrix} x_1 + t \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

a diferencijal tog pravca je:

$$d\vec{l}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} dt \quad (4.23)$$



Slika 4.4 Prikaz beskonačne vrtložne niti

Vektor koji spaja diferencijal sa točkom  $P_T$  jednak je:

$$\vec{r}(t) = \begin{bmatrix} x_T - x_1 - t \\ y_T - y_1 \\ z_T - z_1 \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

Pa će brzina koju inducira beskonačna vrtložna nit biti dana relacijom:

$$\vec{v}_T^{BVN} = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_{P_1}^{\infty} \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{|\vec{r}|^3} \quad (4.25)$$

Rješavanjem integrala, dobiva se konačan izraz za brzinu koju inducira beskonačna vrtložna nit ( $\vec{v}^{BVN}$ ) u nekoj točki  $P_T$ :

$$\vec{v}_T^{BVN} = \frac{\Gamma \vec{\omega}_T^{BVN}}{4\pi((y_T - y_1)^2 + (z_T - z_1)^2)} \left( \frac{x_T - x_1}{\sqrt{(x_T - x_1)^2 + (y_T - y_1)^2 + (z_T - z_1)^2}} + 1 \right) \quad (4.26)$$

$$\vec{\omega}_T^{BVN} = \begin{bmatrix} 0 \\ -(z_T - z_1) \\ y_T - y_1 \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

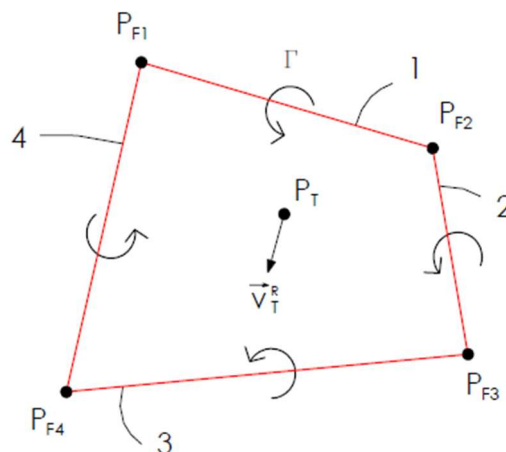
ili zapisano u kraćem obliku:

$$\vec{v}_T^{BVN} = \vec{\Omega}^{BVN}(P_1, P_T)\Gamma \quad (4.28)$$

### 4.3.3. Prstenasta vrtložna nit

Sada kada je poznata relacija za brzinu koju inducira konačna vrtložna nit, može se primijeniti metoda superpozicije kako bi se dobila relacija za relacija za brzinu koju inducira prstenasti vrtlog. Jedan takav vrtlog, prikazan je na slici 4.5, skupa sa točkama u kojima se spajaju konačne vrtložne niti.

Radi drugog Helmholtzovog teorema, jačine konačnih vrtložnih niti koje sačinjavaju prstenasti vrtlog, moraju biti iste, pa se korištenjem jednadžbe (4.21) i svojstvo superpozicije dobiva izraz za brzinu koju inducira prstenasti vrtlog u točki  $P_T$  ( $\vec{v}_T^R$ ):



Slika 4.5 Prikaz prstenaste vrtložne niti

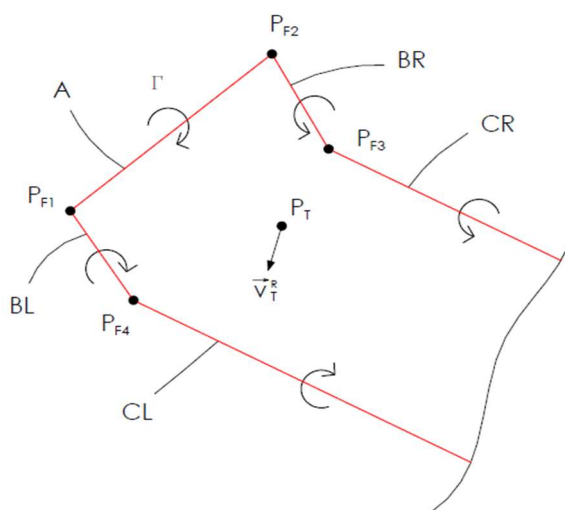
$$\vec{v}_T^R = [\vec{\Omega}^{KVN}(P_{F1}, P_{F2}, P_T) + \vec{\Omega}^{KVN}(P_{F2}, P_{F3}, P_T) + \vec{\Omega}^{KVN}(P_{F3}, P_{F4}, P_T) + \vec{\Omega}^{KVN}(P_{F4}, P_{F1}, P_T)]\Gamma \quad (4.29)$$

Jednadžba (2.29), može se napisati u skraćenom obliku koji glasi:

$$\vec{v}_T^R = \vec{\Omega}^R(P_{F1}, P_{F2}, P_{F3}, P_{F4}, P_T)\Gamma \quad (4.30)$$

### 4.3.4. Potkovičasta vrtložna nit

Postupak dobivanja izraza za izračun brzine koju inducira potkovičasta vrtložna nit, analogan je postupku prikazanome za prstenastu nit uz razliku da se umjesto četiri konačne vrtložne niti, ova nit sastoji od tri konačne i dvije beskonačne vrtložne niti. Primjenom jednadžbi (4.21) i (4.28) te svojstva superpozicije, dobiva izraz za brzinu koju inducira potkovičasti vrtlog u točki  $P_T$  ( $\vec{v}_T^H$ ):



Slika 4.6 Prikaz potkovičaste vrtložne niti

$$\vec{v}_T^H = [\vec{\Omega}^{KVN}(P_{F1}, P_{F2}, P_T) + \vec{\Omega}^{KVN}(P_{F2}, P_{F3}, P_T) + \vec{\Omega}^{KVN}(P_{F4}, P_{F1}, P_T) + \vec{\Omega}^{BVN}(P_{F3}, P_T) - \vec{\Omega}^{BVN}(P_{F4}, P_T)]\Gamma \quad (4.31)$$

Treba primijetiti da je stavljen negativan predznak ispred vrtložne niti CL, zato što mora smjer cirkulacije biti isti na cijeloj niti (drugi Helmholtzov teorem).

Relacija (4.31) se može kraće zapisati kako slijedi:

$$\vec{v}_T^H = \vec{\Omega}^H(P_{F1}, P_{F2}, P_{F3}, P_{F4}, P_T)\Gamma \quad (4.32)$$

#### 4.3.5. Formiranje i rješavanje sustava jednadžbi strujanja

Kao što je već spomenuto, potrebno je saznati brzinu koju induciraju svi prstenasti i potkovičasti vrtlozi u kontrolnim točkama kako bi se mogao formirati sustav jednadžbi. Kako bi se to saznalo, potrebno je prvo izračunati brzinu koju inducira jedna prstenasta i jedna potkovičasta nit u nekoj kontrolnoj točki te nakon toga, zbrojiti inducirane brzine svih prstenastih i potkovičastih niti. Također, iskoristit će se simetrija strujanja (posljedica takovog odabira je smanjenje sustava jednadžbi) pa će se napraviti distinkcija između vrtložnih niti na desnom i lijevom krilu (detaljnije u nastavku).

Prije je potrebno definirati relacije kojima se dobivaju koordinate vrhova vrtložnih niti i kontrolnih točaka.

Koordinate prednjih vrhova niti (prstenastih i potkovičastih) glase (vidi slike 4.1 i 4.2):

$$P_{Fjk}^L = \frac{3P_{Njk} + P_{N(j+1)k}}{4} \quad (4.33)$$

$$P_{Fjk}^R = \frac{3P_{Nj(k+1)} + P_{N(j+1)(k+1)}}{4} \quad (4.34)$$

gdje je:

$P_{Fjk}^L$  – točka lijevog gornjeg vrha prstenaste niti,

$P_{Fjk}^R$  – točka desnog gornjeg vrha prstenaste niti i

$P_{Njk}$  – točka iz matrice mreže (4.10).

Točke  $P_{Fjk}^L$  i  $P_{Fjk}^R$  su značajne po tome da razapinju tzv. noseće niti no o tome kasnije.

Koordinate kontrolnih točaka, dane su relacijom:

$$P_{Knm} = \frac{3(P_{N(n+1)(m+1)} + P_{N(n+1)m}) + P_{Nn(m+1)} + P_{Nnm}}{8} \quad (4.35)$$

gdje je  $P_{Knm}$  kontrolna točka a  $P_{Nnm}$ , ponovno točka iz matrice mreže.

Sada kada su definirane sve relevantne točke, mogu se računati utjecaji pojedinačnih vrtložnih niti.

Koristeći jednadžbu (4.30), brzina koju inducira jedan vrtložni prsten na desnom krilu u kontrolnoj točki  $P_{Kn}$  iznosi:

$$(\vec{v}_{Knmjk}^R)_R = \vec{\Omega}^R \left( (P_{Fjk}^L)_R, (P_{Fjk}^R)_R, (P_{F(j+1)k}^R)_R, (P_{F(j+1)k}^L)_R, P_{Knm} \right) \Gamma_{jk} \quad (4.36)$$

gdje je:

$(\vec{v}_{Knmj}^R)_R$  – brzina koju inducira jedan vrtložni prsten na desnom krilu, u kontrolnoj točki,

$(P_{Fjk}^L)_R$  – točka prednjeg lijevog vrha prstenaste niti na desnom krilu,

$(P_{Fj}^R)_R$  – točka prednjeg desnog vrha prstenaste niti na desnom krilu,

$(P_{F(j+1)k}^R)_R$  – točka stražnjeg desnog vrha prstenaste niti na desnom krilu,

$(P_{F(j+1)k}^L)_R$  – točka stražnjeg lijevog vrha prstenaste niti na desnom krilu i

$\Gamma_{jk}$  – cirkulacija prstenaste niti.

Jednadžba (4.36), može se radi jasnoće sadržaja raspisati kako slijedi:

$$\vec{\Omega}^R (x_{Fjk}^L, y_{Fjk}^L, z_{Fjk}^L, x_{Fjk}^R, y_{Fjk}^R, z_{Fjk}^R, x_{F(j+1)k}^R, y_{F(j+1)k}^R, z_{F(j+1)k}^R, x_{F(j+1)k}^L, y_{F(j+1)k}^L, z_{F(j+1)k}^L, x_{Nnm}, y_{Nnm}, z_{Nnm}) \Gamma_{jk} = (\vec{v}_{Knmjk}^R)_R \quad (4.37)$$

Radi jednostavnosti zapisa, jednadžbe (4.36) i (4.37), mogu se napisati skraćeno u obliku:

$$(\vec{v}_{Knmjk}^R)_R = (\vec{\Omega}_{Knmjk}^R)_R \Gamma_{jk} \quad (4.38)$$

Kako bi se iskoristila simetrija strujanja te time smanjio sustav jednadžbi, potrebno je u jednadžbi (4.37), svaku y koordinatu pomnožiti sa -1. Učinak toga jest zrcaljenje prstena oko ravnine simetrije letjelice. To nije poželjno jer se time mijenja smjer cirkulacije niti koja se postavlja na lijevo krilo. Taj problem se rješava jednostavno množenjem funkcije  $\vec{\Omega}^R$  sa -1. Također radi simetrije, jačina vrtložne niti je ista. Uzimajući u obzir navedeno, brzina koju inducira jedan vrtložni prsten na lijevom krilu u kontrolnoj točki  $P_{Knm}$  koja se nalazi na desnom krilu, iznosi:

$$(\vec{v}_{Knmjk}^R)_L = -\vec{\Omega}^R \left( (P_{Fjk}^L)_L, (P_{Fjk}^R)_L, (P_{F(j+1)k}^R)_L, (P_{F(j+1)k}^L)_L, P_{Knm} \right) \Gamma_{jk} \quad (4.39)$$

gdje je:

$(\vec{v}_{Knm}^R)_L$  – brzina koju inducira jedan vrtložni prsten na lijevom krilu, u kontrolnoj točki,

$(P_{Fj}^L)_L$  – točka prednjeg lijevog vrha prstenaste niti na lijevom krilu,

$(P_{Fjk}^R)_L$  – točka prednjeg desnog vrha prstenaste niti na lijevom krilu,

$(P_{F(j+1)k}^R)_L$  – točka stražnjeg desnog vrha prstenaste niti na lijevom krilu,

$(P_{F(j+1)k}^L)_L$  – točka stražnjeg lijevog vrha prstenaste niti na lijevom krilu i

$\Gamma_{jk}$  – cirkulacija prstenaste niti.

Jednadžba (4.39), može se radi jasnoće sadržaja raspisati kako slijedi:

$$\begin{aligned} (\vec{v}_{Knmjk}^R)_L = \\ -\vec{\Omega}^R (x_{Fjk}^L, -y_{Fjk}^L, z_{Fjk}^L, x_{Fjk}^R, -y_{Fjk}^R, z_{Fjk}^R, x_{F(j+1)k}^R, -y_{F(j+1)k}^R, z_{F(j+1)k}^R, x_{F(j+1)k}^L, \\ -y_{F(j+1)k}^L, z_{F(j+1)k}^L, x_{Nnm}, y_{Nnm}, z_{Nnm}) \Gamma_{jk} \end{aligned} \quad (4.40)$$

Radi jednostavnosti zapisa, jednadžbe (4.39) i (4.40), mogu se napisati skraćeno u obliku:

$$(\vec{v}_{Knmjk}^R)_L = -(\vec{\Omega}_{Knmjk}^R)_L \Gamma_{jk} \quad (4.41)$$

Koristeći jednadžbu (4.32), brzina koju inducira jedna vrtložna potkova na desnom krilu u kontrolnoj točki  $P_{Knm}$ , iznosi:

$$(\vec{v}_{Knmk}^H)_R = \vec{\Omega}^H \left( (P_{FPk}^L)_R, (P_{FPk}^R)_R, (P_{N(P+1)(k+1)})_R, (P_{N(P+1)k})_R, P_{Knm} \right) \Gamma_{Pk} \quad (4.42)$$

gdje je:

$(\vec{v}_{Knmk}^H)_R$  – brzina koju inducira jedna vrtložna potkova na desnom krilu, u kontrolnoj točki,

$(P_{FPk}^L)_R$  – točka prednjeg lijevog vrha potkovičaste niti na desnom krilu,

$(P_{FPk}^R)_R$  – točka prednjeg desnog vrha potkovičaste niti na desnom krilu,

$(P_{N(P+1)(k+1)})_R$  – točka stražnjeg desnog vrha potkovičaste niti na desnom krilu,

$(P_{N(P+1)k})_R$  – točka stražnjeg lijevog vrha potkovičaste niti na desnom krilu i

$\Gamma_{Pk}$  – cirkulacija potkovičaste niti.

Ovdje je bitno primijetiti da je za sve potkovičaste vrtloge indeks  $j=P$  (broj panela duž tetive). Druga specifičnost potkovičastih niti je da stražnje dvije točke nisu spojene nosećom niti pa je potrebno te dvije stražnje točke zapisati drugačije (onako kako je prikazano u jednadžbi (4.42)).

Jednadžba (4.42), može se radi jasnoće sadržaja raspisati kako slijedi:

$$\begin{aligned} (\vec{v}_{Knmk}^H)_R = \vec{\Omega}^H(x_{FPk}^L, y_{FPk}^L, z_{FPk}^L, x_{FPk}^R, y_{FPk}^R, z_{FPk}^R, \\ x_{N(P+1)(k+1)}, y_{N(P+1)(k+1)}, z_{N(P+1)(k+1)}, x_{N(P+1)k}, y_{N(P+1)k}, z_{N(P+1)k}, \\ x_{Nnm}, y_{Nnm}, z_{Nnm})\Gamma_{Pk} \end{aligned} \quad (4.43)$$

Radi jednostavnosti zapisa, jednadžbe (4.42) i (4.43), mogu se napisati skraćeno u obliku:

$$(\vec{v}_{Knmk}^H)_R = (\vec{\Omega}_{Knmk}^H)_R \Gamma_{Pk} \quad (4.44)$$

Konačno, koristeći jednadžbu (4.32), brzina koju inducira jedna vrtložna potkova na lijevom krilu u kontrolnoj točki  $P_{Knm}$ , iznosi:

$$(\vec{v}_{Knmk}^H)_L = -\vec{\Omega}^H((P_{FPk}^L)_L, (P_{FPk}^R)_L, (P_{N(P+1)(k+1)})_L, (P_{N(P+1)k})_L, P_{Knm})\Gamma_{Pk} \quad (4.45)$$

gdje je:

$(\vec{v}_{Knmk}^H)_L$  – brzina koju inducira jedna vrtložna potkova na lijevom krilu, u kontrolnoj točki,

$(P_{FPk}^L)_L$  – točka prednjeg lijevog vrha potkovičaste niti na lijevom krilu,

$(P_{FPk}^R)_L$  – točka prednjeg desnog vrha potkovičaste niti na lijevom krilu,

$(P_{N(P+1)(k+1)})_L$  – točka stražnjeg desnog vrha potkovičaste niti na lijevom krilu,

$(P_{N(P+1)k})_L$  – točka stražnjeg lijevog vrha potkovičaste niti na lijevom krilu i

$\Gamma_{Pk}$  – cirkulacija potkovičaste niti.

Jednadžba (4.42), može se radi jasnoće sadržaja raspisati kako slijedi:

$$\begin{aligned} (\vec{v}_{Knmk}^H)_L = -\vec{\Omega}^H(x_{FPk}^L, -y_{FPk}^L, z_{FPk}^L, x_{FPk}^R, -y_{FPk}^R, z_{FPk}^R, \\ x_{N(P+1)(k+1)}, -y_{N(P+1)(k+1)}, z_{N(P+1)(k+1)}, x_{N(P+1)k}, -y_{N(P+1)k}, z_{N(P+1)k}, \\ x_{Nnm}, y_{Nnm}, z_{Nnm})\Gamma_{Pk} \end{aligned} \quad (4.46)$$

Radi jednostavnosti zapisa, jednadžbe (4.42) i (4.43), mogu se napisati skraćeno u obliku:

$$(\vec{v}_{Knmk}^H)_L = -(\vec{\Omega}_{Knmk}^H)_L \Gamma_{Pk} \quad (4.47)$$

Valja napomenuti da je i ovdje iskorištena simetrija te sve napomene vezane za iskorištavanje simetrije vrijede i ovdje.

Ukupna brzina koju induciraju svi prstenasti i potkovičasti vrtlozi, dobiva se zbrajanjem svih pojedinačnih vrtložnih niti (svojstvo superpozicije):

$$\vec{v}_{Knm} = \sum_{j=1}^{P-1} \sum_{k=1}^Q [(\vec{v}_{Knmjk}^R)_R + (\vec{v}_{Knmjk}^R)_L] + \sum_{k=1}^Q [(\vec{v}_{Knmk}^H)_R + (\vec{v}_{Knmk}^H)_L] \quad (4.48)$$

gdje je  $\vec{v}_{Knm}$  ukupna inducirana brzina u kontrolnoj točki  $P_{Knm}$  a  $P$  i  $Q$  broj panela duž tetive odnosno raspona. Korištenjem jednadžbi: (4.38), (4.41), (4.44) i (4.47), izraz (4.48) prelazi u:

$$\vec{v}_{Knm} = \sum_{j=1}^{P-1} \sum_{k=1}^Q [(\vec{\Omega}_{Knmjk}^R)_R - (\vec{\Omega}_{Knmjk}^R)_L] \Gamma_{jk} + \sum_{k=1}^Q [(\vec{\Omega}_{Knmk}^H)_R - (\vec{\Omega}_{Knmk}^H)_L] \Gamma_{Pk} \quad (4.49)$$

ili zapisano u skraćenom obliku:

$$\vec{v}_{Knm} = \sum_{j=1}^{P-1} \sum_{k=1}^Q (\vec{\Omega}_{Knmjk}^R)_{RL} \Gamma_{jk} + \sum_{k=1}^Q (\vec{\Omega}_{Knmk}^H)_{RL} \Gamma_{Pk} \quad (4.50)$$

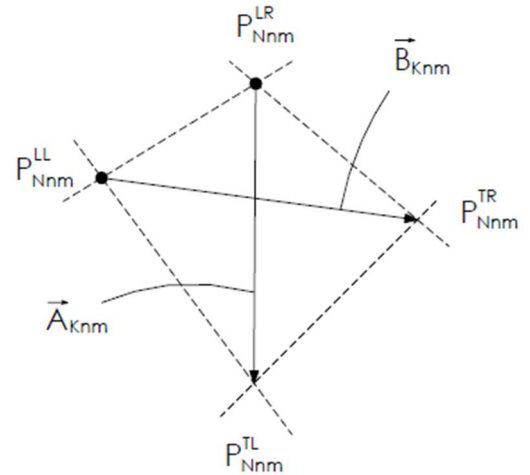
Sljedeći je korak postaviti uvjet nepromočivosti u kontrolnim točkama. Kako bi se to moglo, potrebno je prvo pronaći vektor normale plohe u kontrolnoj točki. To se može učiniti analitički (što je zahtjevnija varijanta) ili se mogu pronaći vektori koji stoje na dijagonalama panela kao što se to iznosi u [4.]. Prikaz tih vektora skupa sa panelom se vidi na slici 4.7.

Prvi vektor dijagonale glasi:

$$\vec{A}_{Knm} = \begin{bmatrix} x_{Nnm}^{TL} - x_{Nnm}^{LR} \\ y_{Nnm}^{TL} - y_{Nnm}^{LR} \\ z_{Nnm}^{TL} - z_{Nnm}^{LR} \end{bmatrix} \quad (4.51)$$

a drugi:

$$\vec{B}_{Knm} = \begin{bmatrix} x_{Nnm}^{TR} - x_{Nnm}^{LL} \\ y_{Nnm}^{TR} - y_{Nnm}^{LL} \\ z_{Nnm}^{TR} - z_{Nnm}^{LL} \end{bmatrix} \quad (4.52)$$



Slika 4.7 Uz pronalazak vektora normale

ili zapisano pomoću komponenta matrice mreže:

$$\vec{A}_{Knm} = \begin{bmatrix} x_{N(n+1)m} - x_{Nn(m+1)} \\ y_{N(n+1)m} - y_{Nn(m+1)} \\ z_{N(n+1)m} - z_{Nn(m+1)} \end{bmatrix} \quad (4.53)$$



$$\vec{B}_{Knm} = \begin{bmatrix} x_{N(n+1)(m+1)} - x_{Nnm} \\ y_{N(n+1)(m+1)} - y_{Nnm} \\ z_{N(n+1)(m+1)} - z_{Nnm} \end{bmatrix} \quad (4.54)$$

Konačno, vektor normale  $\vec{n}_{Knm}$  u kontrolnoj točki  $P_{Knm}$  će biti:

$$\vec{n}_{Knm} = \begin{bmatrix} n_{Knm}^x \\ n_{Knm}^y \\ n_{Knm}^z \end{bmatrix} = \frac{\vec{A}_{Knm} \times \vec{B}_{Knm}}{|\vec{A}_{Knm} \times \vec{B}_{Knm}|} \quad (4.55)$$

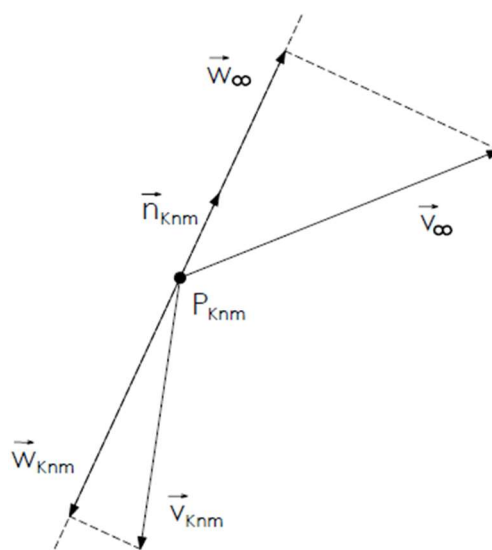
Sada se može napisati uvjet nepromočivosti koji nalaže da zbroj brzine leta  $\vec{v}_\infty$  i ukupne inducirane brzine  $\vec{v}_{Knm}$  koje su projicirane na pravac normale, moraju biti jednake nuli tj.:

$$\vec{w}_{Knm} + \vec{w}_\infty = 0 \quad (4.56)$$

gdje je:

$\vec{w}_{Kn}$  – ukupna inducirana brzina  $\vec{v}_{Knm}$ , projicirana na pravac normale

$\vec{w}_\infty$  – brzina leta  $\vec{v}_\infty$ , projicirana na pravac normale



Slika 4.8 Uz postavljanje uvjeta nepromočivosti

Projicirane brzine se računaju prema izrazima:

$$\vec{w}_{Knm} = (\vec{v}_{Knm} \cdot \vec{n}_{Knm}) \vec{n}_{Knm} \quad (4.57)$$

odnosno:

$$\vec{w}_\infty = (\vec{v}_\infty \cdot \vec{n}_{Knm}) \vec{n}_{Knm} \quad (4.58)$$

Brzina  $\vec{v}_\infty$ , može se zapisati kao (vidi sliku 4.2):

$$\vec{v}_\infty = v_\infty \begin{bmatrix} \cos(\alpha_\infty) \\ 0 \\ \sin(\alpha_\infty) \end{bmatrix} \quad (4.59)$$

gdje je  $v_\infty$  magnituda brzine leta a  $\alpha_\infty$ , napadni kut krila tj. kut između tetive korijena krila i nadolazeće struje fluida. Ukoliko se pretpostavi da je  $\alpha_\infty$  mali, brzina leta se može napisati kao:

$$\vec{v}_\infty = v_\infty \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \alpha_\infty \end{bmatrix} \quad (4.60)$$

Sada se može jednažba (4.56) raspisati na sljedeći način:

$$(\vec{v}_{Knm} \cdot \vec{n}_{Knm} + \vec{v}_\infty \cdot \vec{n}_{Knm}) \vec{n}_{Knm} = 0 \quad (4.61)$$

Jednažba (4.61) će biti zadovoljena ili ako su oba dva člana pod zagradom jednaka nuli ili ako je ukupan zbroj pod zagradom jednak nuli. Prvi slučaj nije općenit pa proizlazi da konačan uvjet nepromočivosti glasi:

$$\vec{v}_{Knm} \cdot \vec{n}_{Knm} = -\vec{v}_\infty \cdot \vec{n}_{Knm} \quad (4.62)$$

Korištenjem izraza: (4.50), (4.55) i (4.60), dobiva se konačno sustav jednažbi strujanja:

$$\sum_{j=1}^{P-1} \sum_{k=1}^Q (\vec{\Omega}_{Knmjk}^R)_{RL} \cdot \vec{n}_{Knm} \Gamma_{jk} + \sum_{k=1}^Q (\vec{\Omega}_{Knmk}^H)_{RL} \cdot \vec{n}_{Knm} \Gamma_{Pk} = -v_\infty (n_{Knm}^x + \alpha_\infty n_{Knm}^z) \quad (4.63)$$

Jednažba (4.63) se može podijeliti sa  $v_\infty$  kao bi rješavanje sustava bilo neovisno u brzini leta pa kada se to učini, dobiva se :

$$\sum_{j=1}^{P-1} \sum_{k=1}^Q (\vec{\Omega}_{Knmjk}^R)_{RL} \cdot \vec{n}_{Knm} \gamma_{jk} + \sum_{k=1}^Q (\vec{\Omega}_{Knmk}^H)_{RL} \cdot \vec{n}_{Knm} \gamma_{Pk} = -(n_{Knm}^x + \alpha_\infty n_{Knm}^z) \quad (4.64)$$

gdje je  $\gamma_{jk}$  cirkulacija svedena na brzinu leta ( $\gamma_{jk} = \frac{\Gamma_{jk}}{v_\infty}$ ).

Sustav (4.64), može se zapisati u matričnom obliku:

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{b} \quad (4.65)$$

Komponente vektora  $\boldsymbol{\gamma}$  i  $\mathbf{b}$  te matrice  $\mathbf{A}$ , raspoređene su na sljedeći način:

$$\boldsymbol{\gamma} = \begin{bmatrix} \gamma_{11} \\ \vdots \\ \gamma_{1Q} \\ \vdots \\ \gamma_{P1} \\ \vdots \\ \gamma_{PQ} \end{bmatrix} \quad (4.66)$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -n_{K11}^x - \alpha_\infty n_{K11}^z \\ \vdots \\ -n_{K1Q}^x - \alpha_\infty n_{K1Q}^z \\ \vdots \\ -n_{KP1}^x - \alpha_\infty n_{KP1}^z \\ \vdots \\ -n_{KPQ}^x - \alpha_\infty n_{KPQ}^z \end{bmatrix} \quad (4.67)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} (\vec{\Omega}_{K1111}^R)_{RL} \cdot \vec{n}_{K11} & \cdots & (\vec{\Omega}_{K111Q}^R)_{RL} \cdot \vec{n}_{K11} & \cdots & (\vec{\Omega}_{K11(P-1)1}^R)_{RL} \cdot \vec{n}_{K11} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ (\vec{\Omega}_{K1Q1}^R)_{RL} \cdot \vec{n}_{K1Q} & \cdots & (\vec{\Omega}_{K1Q1Q}^R)_{RL} \cdot \vec{n}_{K1Q} & \cdots & (\vec{\Omega}_{K1Q(P-1)1}^R)_{RL} \cdot \vec{n}_{K1Q} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ (\vec{\Omega}_{KP111}^R)_{RL} \cdot \vec{n}_{KP1} & \cdots & (\vec{\Omega}_{KP11Q}^R)_{RL} \cdot \vec{n}_{KP1} & \cdots & (\vec{\Omega}_{KP1(P-1)1}^R)_{RL} \cdot \vec{n}_{KP1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ (\vec{\Omega}_{KPQ11}^R)_{RL} \cdot \vec{n}_{KPQ} & \cdots & (\vec{\Omega}_{KPQ1Q}^R)_{RL} \cdot \vec{n}_{KPQ} & \cdots & (\vec{\Omega}_{KPQ(P-1)1}^R)_{RL} \cdot \vec{n}_{KPQ} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \cdots & (\vec{\Omega}_{K11(P-1)Q}^R)_{RL} \cdot \vec{n}_{K11} & (\vec{\Omega}_{K111}^H)_{RL} \cdot \vec{n}_{K1} & \cdots & (\vec{\Omega}_{K11Q}^H)_{RL} \cdot \vec{n}_{K11} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \cdots & (\vec{\Omega}_{K1Q(P-1)Q}^R)_{RL} \cdot \vec{n}_{K1Q} & (\vec{\Omega}_{K1Q1}^H)_{RL} \cdot \vec{n}_{K1Q} & \cdots & (\vec{\Omega}_{K1QQ}^H)_{RL} \cdot \vec{n}_{K1Q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \cdots & (\vec{\Omega}_{KP1(P-1)Q}^R)_{RL} \cdot \vec{n}_{KP1} & (\vec{\Omega}_{KP11}^H)_{RL} \cdot \vec{n}_{KP1} & \cdots & (\vec{\Omega}_{KP1Q}^H)_{RL} \cdot \vec{n}_{KP1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \cdots & (\vec{\Omega}_{KPQ(P-1)Q}^R)_{RL} \cdot \vec{n}_{KPQ} & (\vec{\Omega}_{KPQ1}^H)_{RL} \cdot \vec{n}_{KPQ} & \cdots & (\vec{\Omega}_{KPQQ}^H)_{RL} \cdot \vec{n}_{KPQ} \end{bmatrix} \quad (4.68)$$

Rješenje tog sustava glasi:

$$\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b} \quad (4.69)$$

Korisno je primijetiti da će komponente vektora  $\boldsymbol{\gamma}$ , linearno ovisiti o napadnom kutu jer komponente vektora  $\mathbf{b}$  ovise linearno o napadnom kutu a matrica  $\mathbf{A}$  (a time i njen inverz) ne sadržava nigdje napadni kut u komponentama (matrica  $\mathbf{A}$  je isključivo funkcija geometrije). Ta će činjenica biti korisna kasnije pri računanju aerodinamičkih koeficijenata.

## 4.4. Aerodinamičke sile i momenti

### 4.4.1. Uzgon

Kako bi se dobio uzgon kojeg stvara letjelica, potrebno je zbrojiti uzgone svih nosećih niti koje su razapete točkama  $P_{Fjk}^L$  i  $P_{Fjk}^R$ . Jedna takva noseća nit, prikazana je na slici 4.9.

Prema teoremu Kutta-Joukowskog, rezultatna sila  $\vec{F}_{Rjk}$ , koju takva nit stvara iznositi će:

$$\vec{F}_{Rjk} = \rho_z (\vec{v}_\infty + \vec{v}_{Fjk}) \times (\Gamma_{jk} - \Gamma_{(j-1)k}) \vec{l}_{pjk} \quad (4.70)$$

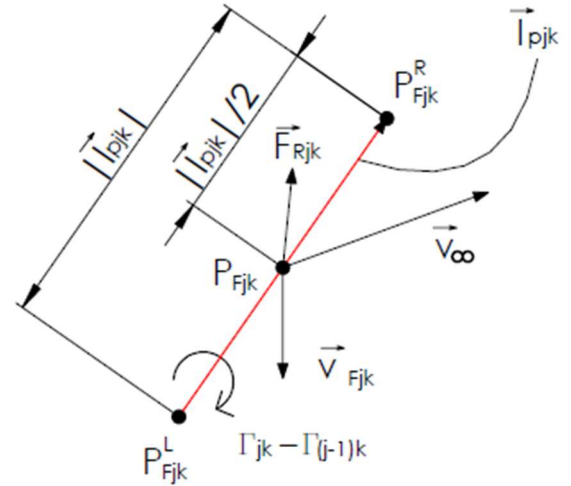
gdje je:

$\vec{F}_{Rjk}$  – rezultatna sila koju stvara nit,

$\rho_z$  – gustoća zraka,

$\vec{v}_{Fjk}$  – ukupna inducirana brzina na sredini noseće niti i

$\vec{l}_{pj}$  – vektor definiran točkama  $P_{Fj}^L$  i  $P_{Fj}^R$ .



Slika 4.9 Uz izračun uzgona

Jednadžba (4.70), može se raspisati na sljedeći način:

$$\vec{F}_{Rjk} = \rho_z (\Gamma_{jk} - \Gamma_{(j-1)k}) \vec{v}_\infty \times \vec{l}_{pjk} + \rho_z (\Gamma_{jk} - \Gamma_{(j-1)k}) \vec{v}_{Fjk} \times \vec{l}_{pjk} \quad (4.71)$$

Za  $j=1$ , jednadžba (4.71) prelazi u poseban oblik:

$$\vec{F}_{R1k} = \rho_z \Gamma_{1k} \vec{v}_\infty \times \vec{l}_{p1k} + \rho_z \Gamma_{1k} \vec{v}_{F1k} \times \vec{l}_{p1k} \quad (4.72)$$

Prvi član u (4.71) i (4.72), predstavlja komponentu sile koja je okomita na  $\vec{v}_\infty$  tj. uz pretpostavku da je  $\alpha_\infty \approx 0$ , to je komponenta u smjeru osi  $z$  (vidi sliku 4.2). Za drugi član se pretpostavlja da je  $\vec{v}_{Fjk}$  pretežito okomit na  $\vec{v}_\infty$  što znači da će drugi član predstavljati silu u smjeru  $\vec{v}_\infty$  tj. uz pretpostavku da je  $\alpha_\infty \approx 0$ , to je komponenta u smjeru osi  $x$ . Iz iznesenog, može se zaključiti da prvi član predstavlja uzgon dok drugi predstavlja otpor, konkretno, inducirani otpor pa se jednadžbe (4.71) i (4.72) mogu zapisati kao:

$$\vec{F}_{R1k} = \vec{L}_{jk} + D_{Ijk} \quad (4.73)$$

gdje je:

$\vec{L}_{jk}$  – uzgon kojeg stvara noseća nit i

$D_{Ijk}$  – inducirani otpor kojeg stvara noseća nit

Kako bi se dobio uzgon, očito se mora podrobnije promotriti prvi član. Vektor  $\vec{l}_{pjk}$  glasi:

$$\vec{l}_{pjk} = \begin{bmatrix} x_{Fjk}^R - x_{Fjk}^L \\ y_{Fjk}^R - y_{Fjk}^L \\ z_{Fjk}^R - z_{Fjk}^L \end{bmatrix} \quad (4.74)$$

pa će onda nakon vektorskog množenja  $\vec{v}_\infty$  i  $\vec{l}_{pj}$ , član  $\vec{L}_{jk}$  poprimiti oblik:

$$\vec{L}_{jk} = \rho_z v_\infty (\Gamma_{jk} - \Gamma_{(j-1)k}) \begin{bmatrix} -\alpha_\infty (y_{Fjk}^R - y_{Fjk}^L) \\ -(z_{Fjk}^R - z_{Fjk}^L) + \alpha_\infty (x_{Fjk}^R - x_{Fjk}^L) \\ y_{Fjk}^R - y_{Fjk}^L \end{bmatrix} \quad (4.75)$$

Prva komponenta se uz pretpostavku da je  $\alpha_\infty \approx 0$  može zanemariti čime se automatski zanemaruje i drugi član druge komponente pa izraz (4.75) prelazi u:

$$\vec{L}_{jk} = \rho_z v_\infty (\Gamma_{jk} - \Gamma_{(j-1)k}) \begin{bmatrix} 0 \\ -(z_{Fjk}^R - z_{Fjk}^L) \\ y_{Fjk}^R - y_{Fjk}^L \end{bmatrix} \quad (4.76)$$

Druga komponenta se može zanemariti jer će zbog simetrije strujanja ukupna sila (uzgon letjelice) imati samo komponentu u z smjeru. Time se dolazi do konačnog izraza za uzgon kojeg stvara jedna noseća nit:

$$L_{jk} = \rho_z v_\infty (\Gamma_{jk} - \Gamma_{(j-1)k}) (y_{Fjk}^R - y_{Fjk}^L) \quad (4.77)$$

Za  $j=1$ , u izrazima (4.76) i (4.77) potrebno je umjesto  $\Gamma_{jk} - \Gamma_{(j-1)k}$ , staviti  $\Gamma_{1k}$ .

Uzgon kojeg generira jedno krilo, bit će:

$$\frac{L}{2} = \rho_z v_\infty \sum_{k=1}^Q \Gamma_{1k} (y_{F1k}^R - y_{F1k}^L) + \rho_z v_\infty \sum_{j=2}^P \sum_{k=1}^Q (\Gamma_{jk} - \Gamma_{(j-1)k}) (y_{Fjk}^R - y_{Fjk}^L) \quad (4.78)$$

Radi načina na koji je definirana geometrija, može se pretpostaviti:

$$y_{F1k}^R - y_{F1k}^L \approx y_{F2k}^R - y_{F2k}^L \approx \dots \approx y_{FPk}^R - y_{FPk}^L = \Delta y_{Fk} \quad (4.79)$$

pa izraz (4.78) prelazi u:

$$\frac{L}{2} = \rho_z v_\infty \sum_{k=1}^Q \left( \Gamma_{1k} + \sum_{j=2}^P (\Gamma_{jk} - \Gamma_{(j-1)k}) \right) \Delta y_{Fk} \quad (4.80)$$

Izraz unutar vanjske sume se može pojednostaviti kako slijedi:

$$\Gamma_{1k} + \sum_{j=2}^P (\Gamma_{jk} - \Gamma_{(j-1)k}) = \Gamma_{Pk} \quad (4.81)$$

pa će konačno uzgon kojeg generira letjelica biti (uzima se da je  $\Delta y_{Fk} = y_{FP}^R - y_{FPk}^L$ ):

$$L = 2\rho_z v_\infty \sum_{k=1}^Q \Gamma_{Pk} (y_{FPk}^R - y_{FPk}^L) \quad (4.82)$$

ili zapisano pomoću cirkulacija svedenih na brzinu leta:

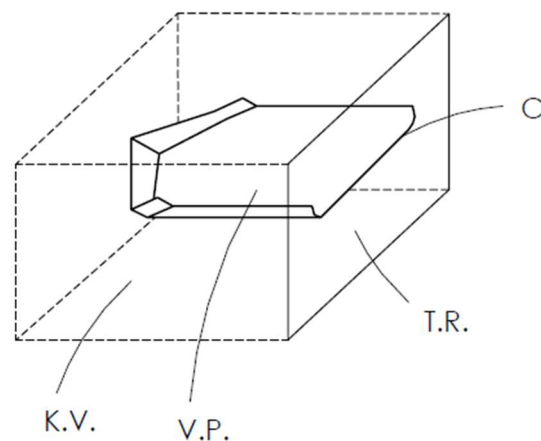
$$L = 2\rho_z v_\infty^2 \sum_{k=1}^Q \gamma_{Pk} (y_{FPk}^R - y_{FPk}^L) \quad (4.83)$$

#### 4.4.2. Otpor

Ukupan otpor zrakoplova, sastoji se od induciranog i parazitnog otpora (parazitni otpor se još dijeli na otpor trenja i oblika). Prvo će se izračunati inducirani otpor tj. drugi član izraza (4.73).

Kako bi se izračunao inducirani otpor letjelice, koristit će se koncept Trefftzove ravnine. Ideja je da se odredi inducirani otpor promatranjem strujanja daleko od letjelice pomoću kontrolnog volumena. Takav kontrolni volumen (K.V.) vidi se na slici 4.10.

Postavljanjem takvog volumena, vidi se da će se utjecaj letjelice osjetiti samo na stranici kontrolnog volumena kroz koju prolazi vrtložna plahta (V.P.). Ta stranica, zove se Trefftzova ravnina (T.R.) koja omogućuje računanje induciranog otpora na temelju iznosa cirkulacija slobodnih (beskonačnih) niti tj. potkovičastih niti. Relacija kojom se računa inducirani otpor koristeći Trefftzovu ravninu glasi [4.]:



Slika 4.10 Prikaz kontrolnog volumena i Trefftzove ravnine

$$D_I = \frac{\rho_z}{2} \int_c w_M \Gamma dl \quad (4.84)$$

gdje je:

$D_I$  – inducira otpor letjelice,

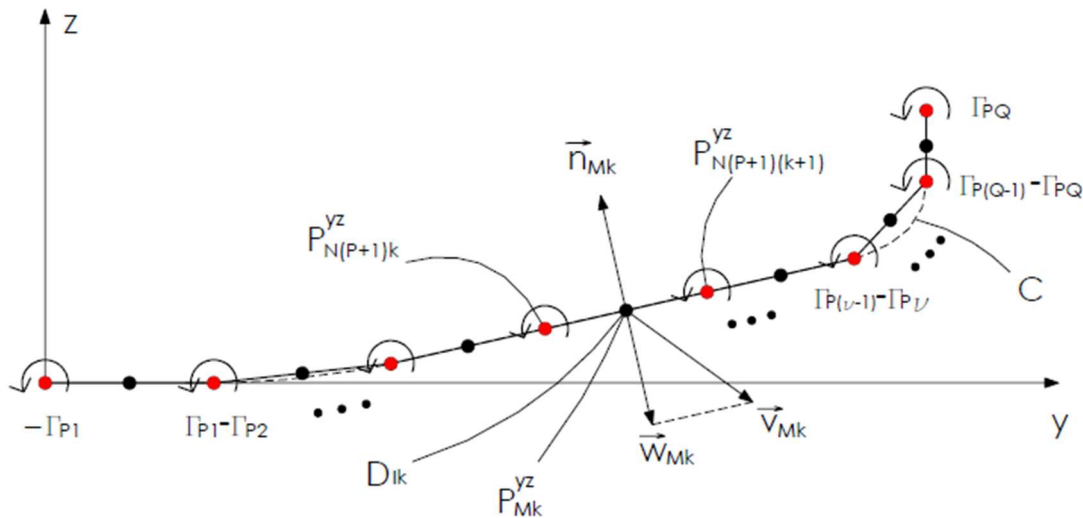
$c$  – krivulja dobivena presjecanjem Trefftzove ravnine vrtložnom plahtom,

$w_M$  – brzina, okomita na krivulju  $c$ ,

$\Gamma$  – iznos cirkulacije u nekoj točki krivulje  $c$  i

$dl$  – diferencijal krivulje  $c$ .

Pošto je metoda vrtložne rešetke numerička metoda, potrebno je izraz (4.84) diskretizirati tj. potrebno je integral pretvoriti u sumu. Kako bi se to učinilo, potrebno je pronaći ukupnu brzinu koju induciraju svi slobodni vrtlozi na sredini spojnice koja spaja dvije susjedne niti (slobodne niti) te se nakon toga traži komponenta te brzine, u smjeru koji je okomit na spojnicu. Za cirkulaciju, uzima se cirkulacija potkovičastog vrtloga čije su slobodne niti spojene spojnicom koja se promatra. Kao diferencijal, uzima se duljina spojnice. Na slici 4.11, prikazana je diskretizirana vrtložna plahta u Trefftzovoj ravnini:



Slika 4.11 Prikaz diskretizirane vrtložne plahte u Trefftzovoj ravnini

Da bi se izračunale inducirane brzine na spojnicama, treba odrediti brzinu koju inducira slobodna vrtložna niti u Trefftzovoj ravnini. Tu brzinu se može pronaći na način da se u jednadžbi (4.26), pusti da  $x_T$  teži u  $+\infty$ :

$$\vec{v}_T^V = \lim_{x_T \rightarrow \infty} \frac{\Gamma \vec{\omega}_T^{\text{BVB}}}{4\pi((y_T - y_1)^2 + (z_T - z_1)^2)} \left( \frac{x_T - x_1}{\sqrt{(x_T - x_1)^2 + (y_T - y_1)^2 + (z_T - z_1)^2}} + 1 \right) \quad (4.85)$$

$$\vec{v}_T^V = \lim_{x_T \rightarrow \infty} \frac{\Gamma \vec{\omega}_T^{\text{BVB}}}{4\pi((y_T - y_1)^2 + (z_T - z_1)^2)} \left( \frac{1 - \frac{x_1}{x_T}}{\sqrt{\left(1 - \frac{x_1}{x_T}\right)^2 + \frac{(y_T - y_1)^2}{x_T^2} + \frac{(z_T - z_1)^2}{x_T^2}}} + 1 \right) \quad (4.86)$$

$$\vec{v}_T^V = \frac{\Gamma \vec{\omega}_T^{\text{BVB}}}{2\pi((y_T - y_1)^2 + (z_T - z_1)^2)} \quad (4.87)$$

gdje je  $\vec{v}_T^V$ , brzinu koju inducira slobodna vrtložna nit u Trefftzovoj ravnini tj. jedan točkasti vrtlog čija jačina može biti superpozicija dvaju slobodnih vrtložnih niti (vidi sliku 4.11).

Jednadžba (4.87), može se zapisati u kraćem obliku:

$$\vec{v}_T^V = \vec{\Omega}^V(P_1^{zy}, P_T^{zy})\Gamma \quad (4.88)$$

$P_1^{zy}$  predstavlja  $y$  i  $z$  koordinate točke iz koje izlazi vrtložna nit a  $P_T^{zy}$  predstavlja  $y$  i  $z$  koordinate točke za koju se računa inducirana brzina

Brzina koju inducira jedan slobodni vrtlog na desnoj strani krila u sredini spojnice iznosi:

$$(\vec{v}_{Mkv}^V)_R = \begin{cases} \vec{\Omega}^V \left( (P_{N(P+1)v}^{zy})_R, P_{Mk}^{zy} \right) (-\Gamma_{Pv}) & \text{za } v = 1 \\ \vec{\Omega}^V \left( (P_{N(P+1)v}^{zy})_R, P_{Mk}^{zy} \right) (\Gamma_{P(v-1)} - \Gamma_{Pv}) & \text{za } v = 2, \dots, Q \\ \vec{\Omega}^V \left( (P_{N(P+1)v}^{zy})_R, P_{Mk}^{zy} \right) \Gamma_{P(v-1)} & \text{za } v = Q + 1 \end{cases} \quad (4.89)$$

gdje je:

$(\vec{v}_{Mkv}^V)_R$  – brzina koju inducira jedan slobodni vrtlog na desnoj strani krila u sredini spojnice,

$(P_{N(P+1)v}^{zy})_R$  – koordinata vrtloga na desnoj strani krila u  $y, z$  ravnini i

$P_{Mk}^{zy}$  – koordinata sredine spojnice.

Ponovno će se radi jasnoće sadržaja, jednadžbe (4.89) raspisati:

$$(\vec{v}_{Mkv}^V)_R = \begin{cases} \vec{\Omega}^V(y_{N(P+1)v}, z_{N(P+1)v}, y_{Mk}, z_{Mk})(-\Gamma_{Pv}) & \text{za } v = 1 \\ \vec{\Omega}^V(y_{N(P+1)v}, z_{N(P+1)v}, y_{Mk}, z_{Mk})(\Gamma_{P(v-1)} - \Gamma_{Pv}) & \text{za } v = 2, \dots, Q \\ \vec{\Omega}^V(y_{N(P+1)v}, z_{N(P+1)v}, y_{Mk}, z_{Mk})\Gamma_{P(v-1)} & \text{za } v = Q + 1 \end{cases} \quad (4.90)$$

Koristeći ponovno simetriju, može se dobiti brzina koju inducira jedan slobodni vrtlog na lijevoj strani krila u sredini spojnice kako slijedi:

$$(\vec{v}_{Mkv}^V)_L = \begin{cases} \vec{\Omega}^V \left( (P_{N(P+1)v}^{zy})_L, P_{Mk}^{zy} \right) \Gamma_{Pv} & \text{za } v = 1 \\ \vec{\Omega}^V \left( (P_{N(P+1)v}^{zy})_L, P_{Mk}^{zy} \right) (\Gamma_{Pv} - \Gamma_{P(v-1)}) & \text{za } v = 2, \dots, Q \\ \vec{\Omega}^V \left( (P_{N(P+1)v}^{zy})_L, P_{Mk}^{zy} \right) (-\Gamma_{P(v-1)}) & \text{za } v = Q + 1 \end{cases} \quad (4.91)$$



gdje je:

$(\vec{v}_{Mkv}^V)_L$  – brzina koju inducira jedan slobodni vrtlog na lijevoj strani krila u sredini spojnice,

$(P_{N(P+1)v}^{zy})_L$  – koordinata vrtloga na lijevoj strani krila u  $y, z$  ravnini i

$P_{Mk}^{zy}$  – koordinata sredine spojnice.

Jednadžba (4.91) u raspisanom obliku će glasiti:

$$(\vec{v}_{Mk}^V)_L = \begin{cases} \bar{\Omega}^V(-y_{N(P+1)v}, z_{N(P+1)v}, y_{Mk}, z_{Mk})\Gamma_{Pv} & \text{za } v = 1 \\ \bar{\Omega}^V(-y_{N(P+1)v}, z_{N(P+1)v}, y_{Mk}, z_{Mk})(\Gamma_{Pv} - \Gamma_{P(v-1)}) & \text{za } v = 2, \dots, Q \\ \bar{\Omega}^V(-y_{N(P+1)v}, z_{N(P+1)v}, y_{Mk}, z_{Mk})(-\Gamma_{P(v-1)}) & \text{za } v = Q + 1 \end{cases} \quad (4.92)$$

Brzina koju induciraju svi točkasti vrtlozi u sredini neke spojnice iznosi:

$$\begin{aligned} \vec{v}_{Mk} = & \left( \bar{\Omega}^V \left( (P_{N(P+1)1}^{zy})_L, P_{Mk}^{zy} \right) - \bar{\Omega}^V \left( (P_{N(P+1)1}^{zy})_R, P_{Mk}^{zy} \right) \right) \Gamma_{P1} \\ & + \sum_{v=2}^Q \left( \bar{\Omega}^V \left( (P_{N(P+1)v}^{zy})_R, P_{Mk}^{zy} \right) - \bar{\Omega}^V \left( (P_{N(P+1)v}^{zy})_L, P_{Mk}^{zy} \right) \right) (\Gamma_{P(v-1)} - \Gamma_{Pv}) \\ & \left( \bar{\Omega}^V \left( (P_{N(P+1)(Q+1)}^{zy})_L, P_{Mk}^{zy} \right) - \bar{\Omega}^V \left( (P_{N(P+1)(Q+1)}^{zy})_R, P_{Mk}^{zy} \right) \right) \Gamma_{PQ} \end{aligned} \quad (4.93)$$

gdje je  $\vec{v}_{Mk}$  ukupna inducirana brzina u spojnici.

Prva dva člana se skraćuju a preostala dva se mogu napisati u skraćenom obliku:

$$\vec{v}_{Mk} = \sum_{v=2}^Q (\bar{\Omega}_{Mkv}^V)_{RL} (\Gamma_{P(v-1)} - \Gamma_{Pv}) + (\bar{\Omega}_{Mk(Q+1)}^V)_{RL} \Gamma_{PQ} \quad (4.94)$$

ili zapisano pomoću cirkulacija svedenih na brzinu leta:

$$\vec{v}_{Mk} = v_\infty \left( \sum_{v=2}^Q (\bar{\Omega}_{Mkv}^V)_{RL} (\gamma_{P(v-1)} - \gamma_{Pv}) + (\bar{\Omega}_{Mk(Q+1)}^V)_{RL} \gamma_{PQ} \right) \quad (4.95)$$

Sljedeće, potrebno je pronaći normalu na spojnicu. Normala na spojnicu glasi (vidi sliku 4.11):

$$\vec{n}_{Mk} = \begin{bmatrix} -(z_{N(P+1)(k+1)} - z_{N(P+1)k}) \\ y_{N(P+1)(k+1)} - y_{N(P+1)k} \end{bmatrix} \quad (4.96)$$

Valja primijetiti da vektor  $\vec{n}_{Mk}$  nije normaliziran radi praktičnosti zapisa konačnog izraza za inducirani otpor. Dalje, brzina  $\vec{v}_{Mk}$ , projicirana na pravac normale glasi:

$$\vec{w}_{Mk} = - \left( \vec{v}_{Mk} \cdot \frac{\vec{n}_{Mk}}{|\vec{n}_{Mk}|} \right) \frac{\vec{n}_{Mk}}{|\vec{n}_{Mk}|} \quad (4.97)$$

U izrazu (4.97), stavljen je minus jer je u izrazu (4.84) brzina  $w_M$  pozitivna ako gleda u suprotnom smjeru od normale koja je prikazana na slici 4.11. Magnituda brzine  $\vec{w}_{Mk}$  će glasiti:

$$w_{Mk} = \vec{v}_{Mk} \cdot \frac{\vec{n}_{Mk}}{|\vec{n}_{Mk}|} \quad (4.98)$$

Konačno, može se zapisati diskretizirana jednadžba (4.84):

$$D_I = 2 \sum_{k=1}^Q D_{Ik} = -2 \frac{\rho_z}{2} \sum_{k=1}^Q w_{Mk} \Gamma_{Pk} |\vec{n}_{Mk}| \quad (4.99)$$

Korištenjem gore navedenih jednadžbi te sređivanjem izraza, dobiva se:

$$D_I = -2 \frac{\rho_z}{2} \sum_{k=1}^Q \vec{v}_{Mk} \cdot \frac{\vec{n}_{Mk}}{|\vec{n}_{Mk}|} \Gamma_{Pk} |\vec{n}_{Mk}| \quad (4.100)$$

$$D_I = -\rho_z v_\infty \sum_{k=1}^Q \vec{v}_{Mk} \cdot \vec{n}_{Mk} \gamma_{Pk} \quad (4.101)$$

Konačan oblik jednadžbe za inducirani otpor, dobiva se koristeći jednadžbu (4.95):

$$D_I = -\rho_z v_\infty^2 \sum_{k=1}^Q \left( \sum_{v=2}^Q (\vec{\Omega}_{Mkv}^V)_{RL} (\gamma_{P(v-1)} - \gamma_{Pv}) + (\vec{\Omega}_{Mk(Q+1)}^V)_{RL} \gamma_{PQ} \right) \cdot \vec{n}_{Mk} \gamma_{Pk} \quad (4.102)$$

Sljedeće, potrebno je odrediti parazitni otpor. Kako bi se to učinilo, koristi se model za procjenu parazitnog otpora koji je prikazan u [7.] i [8.]. U tom modelu, krilo se dijeli na manje dijelove duž raspona (ploče), koji se mogu aproksimirati ravnom pločom. Iznos za parazitni otpor jedne takve ploče glasi:

$$D_{Fik} = \frac{\rho_z v_\infty^2}{2} c_{fik} R_T R_{\Lambda ik} S_{wik} \quad (4.103)$$

gdje je  $D_{Fik}$  otpor  $k$ -te ploče na  $i$ -tom segmentu.

Veličina  $c_{fik}$  predstavlja koeficijent parazitnog otpora ravne ploče kojim se aproksimira  $k$ -ti dio na  $i$ -tom segmentu. U slučaju da se pretpostavi da je granični sloj oko letjelice svugdje turbulentan, onda će  $c_{fi}$  glasiti:

$$c_{fik} = 0.074 Re_{ik}^{-\frac{1}{5}} \quad (4.104)$$

Gdje je  $Re_{ik}$  Reynoldsov broj za  $k$ -tu ploču na  $i$ -tom segmentu te glasi:

$$Re_{ik} = \frac{v_{\infty}(c_i(t_{i(k+1)}) + c_i(t_{ik}))}{2\nu_z} \quad (4.105)$$

gdje je:

$c_i$  – distribucija duljine tetive na  $i$ -tom segmentu,

$t_{ik}$  – vrijednost parametra krivulje vodilje koji je dobiven rješavanjem jednačbe (4.9) i

$\nu_z$  – kinematička viskoznost zraka.

Parametar  $R_T$  u jednačbi (4.103) uzima u obzir utjecaj oblika aeroprofila:

$$R_T = 1 + L'\bar{t} + 100\bar{t}^4 \quad (4.106)$$

gdje je  $\bar{t}$  maksimalna debljina aeroprofila svedena na duljinu tetive koja za aerofil MH 60 iznosi 0.101 a veličina  $L'$  može poprimiti jednu od dvije vrijednosti kako slijedi:

$$L' = \begin{cases} 1.2 & \text{za } \bar{x}_t \geq 0.3 \\ 2 & \text{za } \bar{x}_t < 0.3 \end{cases} \quad (4.107)$$

gdje je  $\bar{x}_t$  položaj maksimalne debljine sveden na duljinu tetive. Za aerofil MH 60,  $\bar{x}_t$  iznosi 0.273 pa je prema (4.107)  $L' = 2$ .

Dalje,  $R_{\Lambda ik}$  je veličina koja uzim au obzir strijelu krila te je dan izrazom:

$$R_{\Lambda ik} = 1.34 M a_{\infty}^{0.18} \left( \frac{1}{2} (\cos(\Lambda_{Mi(k+1)}) + \cos(\Lambda_{Mik})) \right)^{0.28} \quad (4.108)$$

gdje je  $\Lambda_{Mik}$  kut između krivulje koja spaja točke najveće debljine aeroprofila i  $y, z$  ravnine, na mjestu  $k$ -te ploče na  $i$ -tom segmentu.

$S_{wik}$  je oplakivana površina  $k$ -te ploče na  $i$ -tom segmentu.

Ukupni parazitni otpor, dobiva se zbrajanjem svih ploča na svim segmentima na oba krila:

$$D_F = 2 \sum_{i=1}^5 \sum_{k=1}^{N_i} D_{Fik} = \rho_z v_\infty^2 R_T \sum_{i=1}^5 \sum_{k=1}^{N_i} c_{fik} R_{\Delta ik} S_{wik} \quad (4.109)$$

Kako bi se jednačba (4.109) mogla iskoristiti, potrebno je odrediti:  $\cos(\Lambda_{Mik})$  i  $S_{wik}$ .

Kako bi se dobila krivulja najveće debljine aeroprofila, potrebno je iskoristiti postupak koji je analogan dobivanju ekstrudirane površine. Jedina je razlika da se sada umjesto konture, ekstrudira točka duž krivulje vodilje, konkretno, točka najveće debljine aeroprofila. Koordinata točke najveće debljine aeroprofila sa slike 3.10 je  $((\bar{x}_t - 1)c_i(t_i), 0, 0)$ . Uz zanemarenje uvijanja, transformacija (priprema za navođenje na krivulju vodilju) te točka će glasiti:

$$\begin{bmatrix} x_{ti}^A(t_i) \\ y_{ti}^A(t_i) \\ z_{ti}^A(t_i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta_i) & -\sin(\theta_i) \\ 0 & \sin(\theta_i) & \cos(\theta_i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\bar{x}_t - 1)c_i(t_i) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\bar{x}_t - 1)c_i(t_i) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.110)$$

gdje su:  $x_{ti}^A(t_i)$ ,  $y_{ti}^A(t_i)$  i  $z_{ti}^A(t_i)$  koordinate transformirane točke najveće debljine aeroprofila.

Nakon vektorskog zbrajanja sa krivuljom vodiljom, dobiva se krivulja najveće debljine aeroprofila:

$$\vec{r}_{Mi}^A(t_i) = \begin{bmatrix} x_{Mi}^A(t_i) \\ y_{Mi}^A(t_i) \\ z_{Mi}^A(t_i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_i(t_i) + (\bar{x}_t - 1)c_i(t_i) \\ y_i(t_i) \\ z_i(t_i) \end{bmatrix} \quad (4.111)$$

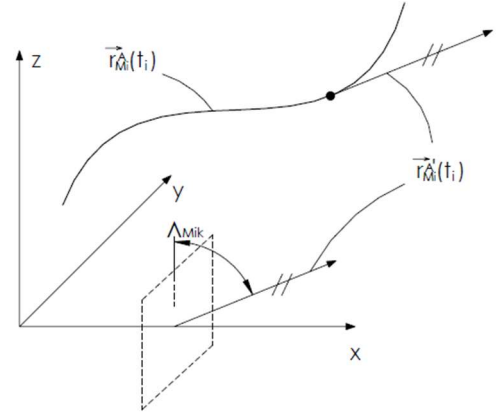
gdje su:  $x_{Mi}^A(t_i)$ ,  $y_{Mi}^A(t_i)$  i  $z_{Mi}^A(t_i)$  komponente krivulje najveće debljine aeroprofila. Kako bi se dobio kosinus kuta između krivulje najveće debljine i  $y, z$  ravnine, potrebno je pronaći vektor tangente krivulje maksimalne debljine a to se čini deriviranjem krivulje (4.111) po parametru  $t_i$ :

$$\vec{r}_{Mi}^{A'}(t_i) = \frac{dx_{Mi}^A}{dt_i} = \begin{bmatrix} \frac{dx_{Mi}^A}{dt_i} \\ \frac{dy_{Mi}^A}{dt_i} \\ \frac{dz_{Mi}^A}{dt_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{dx_i}{dt_i} + (\bar{x}_t - 1) \frac{dc_i(\zeta(t_i))}{d\zeta} \frac{d\zeta}{dt_i} \\ \frac{dy_i}{dt_i} \\ \frac{dz_i}{dt_i} \end{bmatrix} \quad (4.112)$$

$\frac{dc_i(\zeta(t_i))}{d\zeta}$  se dobiva deriviranjem distribucije (3.61) a  $\frac{d\zeta}{dt_i}$ , deriviranjem izraza (3.60) pa će krivulja maksimalne debljine aeroprofila biti:

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_{Mi}^A}{dt_i} \\ \frac{dy_{Mi}^A}{dt_i} \\ \frac{dz_{Mi}^A}{dt_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{dx_i}{dt_i} + (\bar{x}_t - 1)(3K_{i3}^c \zeta(t_i)^2 + 2K_{i2}^c \zeta(t_i) + K_{i1}^c) \sqrt{a_i \bar{t}_i^2 + b_i \bar{t}_i + c_i} \\ \frac{dy_i}{dt_i} \\ \frac{dz_i}{dt_i} \end{bmatrix} \quad (4.113)$$

Iz slike 4.12, vidi se da je moguće dobiti sinus kuta  $\frac{\pi}{2} - \Lambda_{Mik}$  pronalaženjem modula vektorskog umnoška između tangente krivulje maksimalne debljine i baznog vektora  $\vec{i}$ :



Slika 4.12 Uz pronalaženje  $\cos(\Lambda_{Mik})$

$$\left| \frac{dx_{Mi}^A}{dt_i} \right|_{t_i = t_{ik}} \times \vec{i} = \left| \frac{dx_{Mi}^A}{dt_i} \right|_{t_i = t_{ik}} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \Lambda_{Mik}\right) \quad (4.114)$$

iz čega slijedi:

$$\cos(\Lambda_{Mik}) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \Lambda_{Mik}\right) = \frac{\left| \frac{dx_{Mi}^A}{dt_i} \right|_{t_i = t_{ik}} \times \vec{i}}{\left| \frac{dx_{Mi}^A}{dt_i} \right|_{t_i = t_{ik}}} \quad (4.115)$$

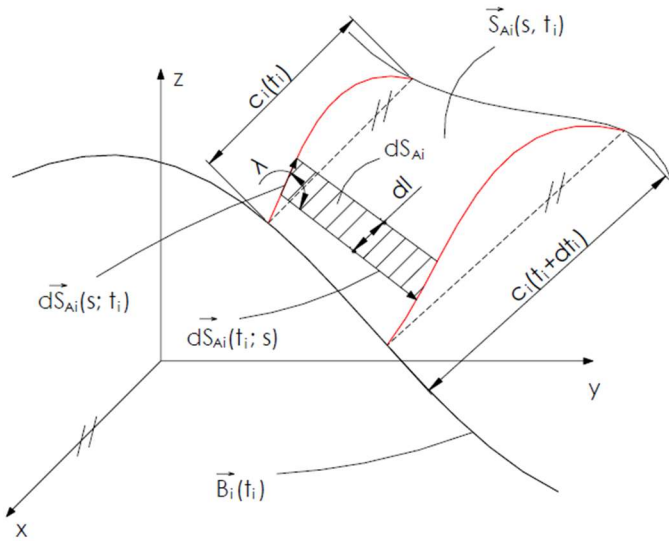
Nakon provođenja operacija u (4.115), dobiva se konačan izraz :

$$\cos(\Lambda_{Mik}) = \frac{\sqrt{\left(\frac{dy_{Mi}^A}{dt_i}\right)^2 + \left(\frac{dz_{Mi}^A}{dt_i}\right)^2}}{\sqrt{\left(\frac{dx_{Mi}^A}{dt_i}\right)^2 + \left(\frac{dy_{Mi}^A}{dt_i}\right)^2 + \left(\frac{dz_{Mi}^A}{dt_i}\right)^2}} \Big|_{t_i = t_{ik}} \quad (4.116)$$

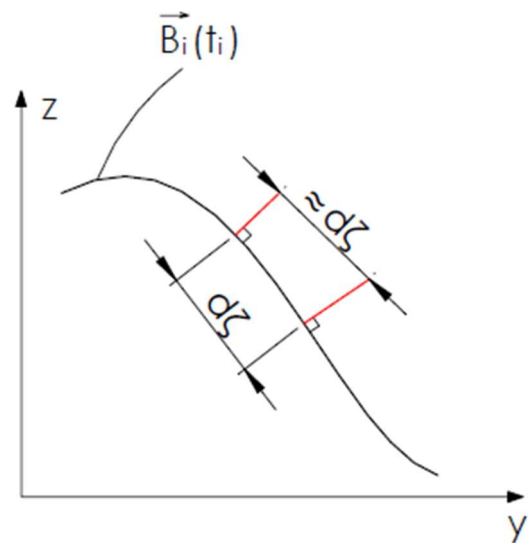
Sljedeće je potrebno pronaći površinu  $S_{wik}$ . Kako bi saznali izraz za  $S_{wik}$ , potrebno je najprije odrediti kako se može odrediti površina ekstrudirane plohe tj. plohe krila. Prije samog izvoda za površinu ekstrudirane plohe, potrebno je uvesti neke restrikcije koje će značajno pojednostaviti konačan izraz a bez da naruše značajno konačan rezultat a to su:

- 1) aeroprofil koji se navodi je takv da leži uvijek u ravnini čija je normala okomita na  $x$ -os,
- 2) uvijanje aeroprofila oko krivulje vodilje je zanemarivo,
- 3) oblik aeroprofila se ne mijenja (mijenja se samo veličina) i
- 4) aeroprofil je približno ravan.

Uz izvod, poslužit će slike 4.13 i 4.14 na kojima je prikazana takva ploha iz dva različita kuta za  $i$ -ti segment krila.



Slika 4.13 Prikaz ekstrudirane plohe u izometriji

Slika 4.14 Projekcija ravnine na  $y, z$  ravninu

Diferencijal parametarski zadane plohe glasi:

$$dS_{Ai} = |d\vec{S}_{Ai}| = |d\vec{S}_{Ai}(s; t_i) \times d\vec{S}_{Ai}(t_i; s)| = |d\vec{S}_{Ai}(s; t_i)| |d\vec{S}_{Ai}(t_i; s)| \sin(\lambda) \quad (4.117)$$

gdje su  $d\vec{S}_{Ai}(s; t_i)$  i  $d\vec{S}_{Ai}(t_i; s)$ :

$$d\vec{S}_{Ai}(s; t_i) = \frac{\partial d\vec{S}_{Ai}}{\partial s} ds, \quad d\vec{S}_{Ai}(t_i; s) = \frac{\partial d\vec{S}_{Ai}}{\partial t_i} dt_i \quad (4.118)$$

a  $\lambda$  je kut između  $d\vec{S}_{Ai}(s; t_i)$  i  $d\vec{S}_{Ai}(t_i; s)$ .

$|d\vec{S}_{Ai}(s; t_i)|$  predstavlja diferencijalnu duljinu krivulje aeroprofila a  $|d\vec{S}_{Ai}(t_i; s)| \sin(\lambda)$  predstavlja diferencijalnu duljinu krivulje vodilje, projicirane na  $y, z$  ravninu pa će izraz (4.117) poprimit oblik:

$$dS_{Ai} = dl d\zeta \quad (4.119)$$

Integriranjem jednadžbe (4.119), dobiva se izraz za površinu djela  $i$ -tog segmenta:

$$S_{Aik} = \int_{\zeta_{1k}}^{\zeta_{rk}} \int_0^{c_i(t_i)} dld\zeta = \int_{\zeta_{1k}}^{\zeta_{rk}} \int_0^{c_i(t_i)} \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} dx d\zeta \quad (4.120)$$

gdje  $z(x)$  predstavlja jednu od tri krivulje aeroprofila dok je  $\zeta_{1k}$  duljina projicirane krivulje vodilje na početku djela površine  $i$ -tog segmenta a  $\zeta_{rk}$  duljina projicirane krivulje vodilje na kraju djela površine  $i$ -tog segmenta. Korištenjem relacije:

$$z(x) = \bar{z}(x)c_i(\zeta(t_i)) \quad (4.121)$$

te supstitucije :

$$x = \bar{x}c_i(\zeta(t_i)) \quad (4.122)$$

izraz (4.120) se može zapisati kao:

$$S_{Aik} = \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{d\bar{z}}{d\bar{x}}\right)^2} d\bar{x} \int_{\zeta_{1k}}^{\zeta_{rk}} c_i(\zeta) d\zeta \quad (4.123)$$

Integrali u (4.123) su međusobno nezavisni te se mogu posebno riješiti. Tako će prvi integral predstavljati duljinu jedne od tri krivulje aeroprofila, svedenu na duljinu tetive dok drugi integral predstavlja površinu ispod distribucije  $c_i(\zeta)$  pa se rješavanjem desnog integrala u (4.123), dobiva:

$$S_{Aik} = \bar{l}_A \left( \frac{K_{i3}^c}{4} (\zeta_{rk}^4 - \zeta_{1k}^4) + \frac{K_{i2}^c}{3} (\zeta_{rk}^3 - \zeta_{1k}^3) + \frac{K_{i1}^c}{2} (\zeta_{rk}^2 - \zeta_{1k}^2) + K_{i0}^c (\zeta_{rk} - \zeta_{1k}) \right) \quad (4.124)$$

Duljina gornjake odnosno donjake, svedena na duljinu tetive za MH 60 iznosi:

$$\bar{l}_g = \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{d\bar{h}_g}{d\bar{x}}\right)^2} d\bar{x} = 1.021 \quad , \quad \bar{l}_d = \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{d\bar{h}_d}{d\bar{x}}\right)^2} d\bar{x} = 1.008 \quad (4.125)$$

Zamjenom  $\zeta_{rk}$  sa  $\zeta(t_{i(k+1)})$  i  $\zeta_{1k}$  sa  $\zeta(t_{ik})$  te postavljanjem  $\bar{l}_g + \bar{l}_d$  umjesto  $\bar{l}_A$ , dobiva se oplakivana površina  $k$ -te ploče na  $i$ -tom segmentu:

$$S_{wik} = (\bar{l}_g + \bar{l}_d) \left( \frac{K_{i3}^c}{4} (\zeta(t_{i(k+1)})^4 - \zeta(t_{ik})^4) + \frac{K_{i2}^c}{3} (\zeta(t_{i(k+1)})^3 - \zeta(t_{ik})^3) + \frac{K_{i1}^c}{2} (\zeta(t_{i(k+1)})^2 - \zeta(t_{ik})^2) + K_{i0}^c (\zeta(t_{i(k+1)}) - \zeta(t_{ik})) \right) \quad (4.126)$$

Time su u potpunosti definirane sve veličine jednačbe (4.109).

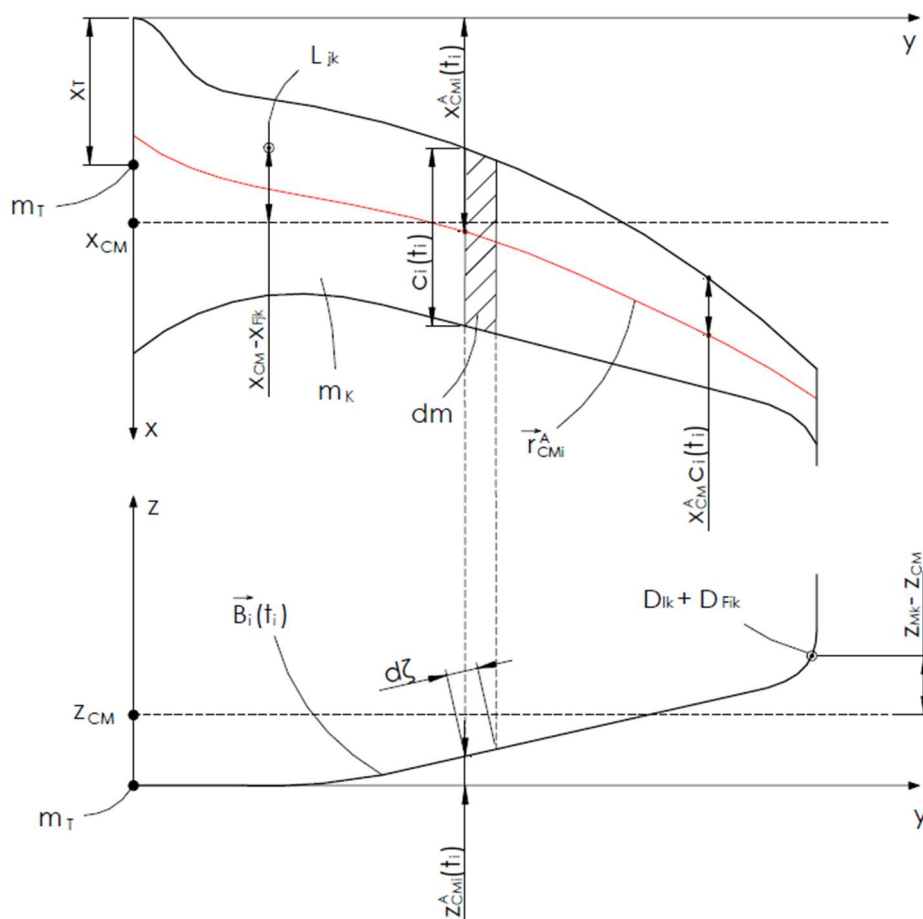
Ukupan će otpor letjelice na kraju biti zbroj induciranog i parazitnog otpora:

$$D = D_I + D_F \quad (4.127)$$

#### 4.4.3. Moment propinjanja

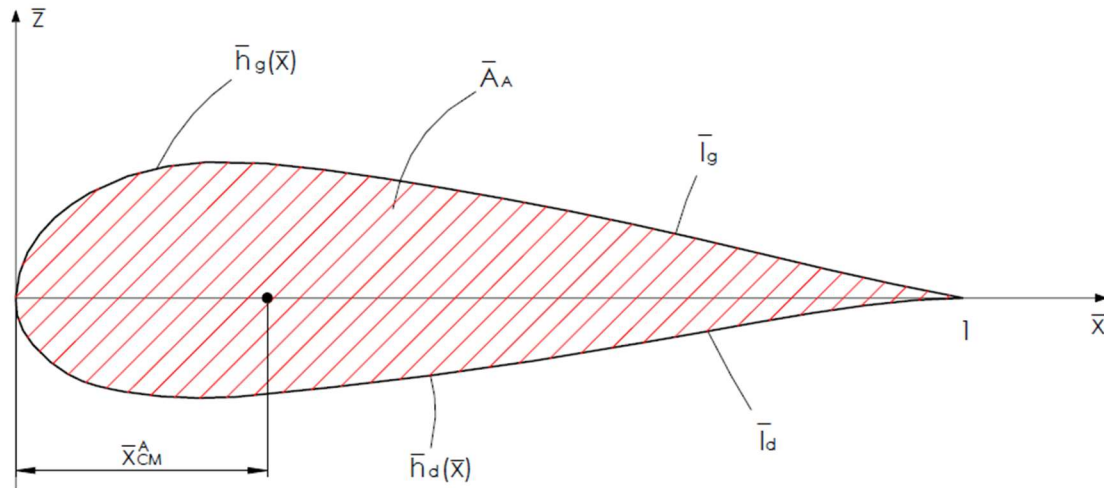
Moment propinjanja se računa oko centra mase letjelice (centar mase konstrukcije i tereta) pa je prvi korak izračunati koordinate centra mase.

Slike 4.15 i 4.16, poslužit će pri izvodu izraza za koordinate centra mase letjelice.



Slika 4.15 Uz izvod momenta propinjanja





Slika 4.16 Težište površine poprečnog presjeka aeroprofila sa jediničnom tetivom

Za pronalazak centra mase prazne letjelice (bez tereta), krilo će se podijeliti na infinitezimalne dijelove koji imaju svoj centar mase  $(x_{CMi}^A(t_i), y_{CMi}^A(t_i), z_{CMi}^A(t_i))$  kao na slici 4.15. Taj centar mase ovisi o konstrukciji letjelice no pošto se ovdje ne razmatra eksplicitno konstrukcija letjelice, pretpostavi će se da je masa uniformno raspoređena po letjelici tj. krilo je jedan kontinuum pa će centar mase takvog jedno infinitezimalnog dijela glasiti:

$$\begin{bmatrix} x_{CMi}^A(t_i) \\ y_{CMi}^A(t_i) \\ z_{CMi}^A(t_i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_i(t_i) + (\bar{x}_{CM}^A - 1)c_i(t_i) \\ y_i(t_i) + \bar{y}_{CM}^A c_i(t_i) \\ z_i(t_i) + \bar{z}_{CM}^A c_i(t_i) \end{bmatrix} \quad (4.128)$$

gdje su:  $\bar{x}_{CM}^A$ ,  $\bar{y}_{CM}^A$  i  $\bar{z}_{CM}^A$  koordinate težišta površine aeroprofila kao na slici 4.16. Jednadžba (4.128), dobivena je na analogan način kao i jednadžba (4.111) Pošto je aeroprofil prije transformacije smješten u  $\bar{x}$ ,  $\bar{z}$  ravnini, onda je  $\bar{y}_{CM}^A = 0$ . Dalje, pretpostavlja se da je  $\bar{z}_{CM}^A \approx 0$  pa jednadžba (4.128) prelazi u:

$$\begin{bmatrix} x_{CMi}^A(t_i) \\ y_{CMi}^A(t_i) \\ z_{CMi}^A(t_i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_i(t_i) + (\bar{x}_{CM}^A - 1)c_i(t_i) \\ y_i(t_i) \\ z_i(t_i) \end{bmatrix} \quad (4.128)$$

$\bar{x}$  koordinata težišta površine aeroprofila, računa se kako slijedi:

$$\bar{x}_{CM}^A = \frac{\int_0^1 \bar{x} \bar{h}_g(\bar{x}) d\bar{x} - \int_0^1 \bar{x} \bar{h}_d(\bar{x}) d\bar{x}}{\int_0^1 \bar{h}_g(\bar{x}) d\bar{x} - \int_0^1 \bar{h}_d(\bar{x}) d\bar{x}} \quad (4.129)$$

(za MH 60,  $\bar{x}_{CM}^A = 0.3895$ ).

$x$  koordinata centra mase letjelice (sa teretom), računa se kako slijedi:

$$x_{\text{CM}} = \frac{2 \sum_{i=1}^5 \int_{m_i} x_{\text{CM}i}^{\text{A}} dm_i + x_{\text{T}} m_{\text{T}}}{2 \sum_{i=1}^5 \int_{m_i} dm_i + m_{\text{T}}} \quad (4.130)$$

gdje je:

$m_i$  – masa  $i$ -tog segmenta,

$m_{\text{T}}$  – masa tereta i

$x_{\text{T}}$  –  $x$  koordinata centra mase tereta.

Masa infinitezimalnog djela krila, iznosi:

$$dm_i = \rho_{\text{K}} dV_i \quad (4.131)$$

gdje je  $\rho_{\text{K}}$  gustoća krila a  $dV_i$  volumen infinitezimalnog djela krila.  $dV_i$  se može izračunati kao volumen tijela koje se dobiva ekstrudiranjem aeroprofila za  $d\zeta$  pa će izraz (4.131) glasniti:

$$dm_i = \rho_{\text{K}} \bar{A}_{\text{A}} c_i^2(\zeta(t_i)) d\zeta \quad (4.132)$$

gdje je  $\bar{A}_{\text{A}}$  površina koju zatvara aeroprofil, svedena da kvadrat duljine tetive. Računa se prema jednadžbi:

$$\bar{A}_{\text{A}} = \int_0^1 \bar{h}_{\text{g}}(\bar{x}) d\bar{x} - \int_0^1 \bar{h}_{\text{d}}(\bar{x}) d\bar{x} \quad (4.133)$$

(za MH 60,  $\bar{A}_{\text{A}} = 0.063$ ).

Koristeći jednadžbu (3.60), diferencijal  $d\zeta$  se može dalje raspisati čime se konačno dobiva:

$$dm_i = \rho_{\text{K}} \bar{A}_{\text{A}} c_i^2(\zeta(t_i)) \sqrt{a_i t_i^2 + b_i t_i + c_i} dt_i \quad (4.134)$$

Uvrštavanjem izraza (4.134) u (4.130), te postavljanjem odgovarajućih granica integracije, dolazi se do konačnog izraza za  $x$  koordinatu centra mase krila i tereta:

$$x_{\text{CM}} = \frac{2 \rho_{\text{K}} \bar{A}_{\text{A}} \sum_{i=1}^5 \int_0^1 x_{\text{CM}i}^{\text{A}} c_i^2(\zeta(t_i)) \sqrt{a_i t_i^2 + b_i t_i + c_i} dt_i + x_{\text{T}} m_{\text{T}}}{2 \sum_{i=1}^5 \int_0^1 c_i^2(\zeta(t_i)) \sqrt{a_i t_i^2 + b_i t_i + c_i} dt_i + m_{\text{T}}} \quad (4.135)$$

$y$  koordinata centra mase letjelice je jednaka nuli radi simetrije (pretpostavlja se da je  $y$  koordinata tereta jednaka nuli).

Izraz za  $z$  koordinatu krila i tereta je analogan onome za  $x$  koordinatu uz razliku da nema drugog člana u nazivniku kao što je to slučaj kod izraza za  $x$  koordinatu. Razlog tomu jest činjenica da se pretpostavlja da je teret smješten tako da je  $z_T \approx 0$  pa slijedi:

$$z_{CM} = \frac{2\rho_K \bar{A}_A \sum_{i=1}^5 \int_0^1 z_{CMi}^A c_i^2(\zeta(t_i)) \sqrt{a_i t_i^2 + b_i t_i + c_i} dt_i}{2 \sum_{i=1}^5 \int_0^1 c_i^2(\zeta(t_i)) \sqrt{a_i t_i^2 + b_i t_i + c_i} dt_i + m_T} \quad (4.136)$$

Poznavanjem koordinata centra mase čitave letjelice, mogu se izračunati momenti koji nastaju uslijed: uzgona, induciranog i parazitnog otpora.

Moment kojeg stvara jedna noseća nit iznosi (vidi sliku 4.15):

$$M_{Ljk} = (x_{CM} - x_{Fjk})L_{jk} \quad (4.137)$$

gdje je  $x_{Fjk}$   $x$  koordinata sredine noseće niti (vidi slike: 4.1, 4.2 i 4.9). Zapisano pomoću komponenata matrice mreže,  $x_{Fjk}$  će biti:

$$x_{Fjk} = \frac{3(x_{Nj(k+1)} + x_{Njk}) + x_{N(j+1)(k+1)} + x_{N(j+1)k}}{8} \quad (4.138)$$

Moment kojeg generira pola krila uslijed uzgona glasi:

$$\frac{M_L}{2} = \sum_{j=1}^P \sum_{k=1}^Q (x_{CM} - x_{Fjk})L_{jk} \quad (4.139)$$

Koristeći jednadžbu (4.77) (i verziju te jednadžbe za  $j=1$ ), izraz (4.139) prelazi u:

$$\begin{aligned} \frac{M_L}{2} &= \rho_z v_\infty \sum_{k=1}^Q \Gamma_{1k} (y_{F1k}^R - y_{F1k}^L) (x_{CM} - x_{F1k}) \\ &+ \rho_z v_\infty \sum_{j=2}^P \sum_{k=1}^Q (\Gamma_{jk} - \Gamma_{(j-1)k}) (y_{Fjk}^R - y_{Fjk}^L) (x_{CM} - x_{Fjk}) \end{aligned} \quad (4.140)$$

Korištenjem cirkulacija svedenih na brzinu leta te (4.79), izraz za moment kojeg stvaraju oba krila uslijed uzgona glasi:

$$M_L = 2\rho_z v_\infty^2 \sum_{k=1}^Q \left[ \gamma_{1k} (x_{CM} - x_{F1k}) + \sum_{j=2}^P (\gamma_{jk} - \gamma_{(j-1)k}) (x_{CM} - x_{Fjk}) \right] (y_{Fpk}^R - y_{Fpk}^L) \quad (4.141)$$

Moment kojeg stvara jedan potkovičasti vrtlog uslijed induciranog otpora iznosi (vidi sliku 4.15):

$$M_{DIk} = (z_{Mk} - z_{CM})D_{Ik} \quad (4.142)$$

a moment kojeg generira pola krila iznosi:

$$\frac{M_{DI}}{2} = \sum_{k=1}^Q (z_{Mk} - z_{CM})D_{Ik} \quad (4.143)$$

pa koristeći jednadžbe (4.99) i (4.102) dobiva se moment kojeg generira cijelo krilo uslijed induciranog momenta:

$$M_{DI} = -\rho_z v_\infty^2 \sum_{k=1}^Q \left( \sum_{v=2}^Q (\bar{\Omega}_{Mkv}^V)_{RL} (\gamma_{P(v-1)} - \gamma_{Pv}) + (\bar{\Omega}_{Mk(Q+1)}^V)_{RL} \gamma_{PQ} \right) \cdot \vec{n}_{Mk} \gamma_{Pk} (z_{Mk} - z_{CM}) \quad (4.144)$$

Na posljertku, ostaje moment koji nastaje uslijed parazitnog otpora. Doprinos jedne ploče ukupnom momentu uslijed parazitnog otpora iznosi (vidi sliku 4.15):

$$M_{DFik} = (z_{Mik} - z_{CM})D_{Fik} \quad (4.145)$$

dok će moment kojeg generira pola krila iznositi:

$$\frac{M_{DF}}{2} = \sum_{i=1}^5 \sum_{k=1}^{N_i} (z_{Mik} - z_{CM})D_{Fik} \quad (4.146)$$

gdje su  $z_{Mik}$  i  $z_{Mk}$  isti osim što su indeksi drugačije definirani. Ukoliko se  $z_{Mk}$  označi sa  $z_{Mv}$ , tada veza između indeksa  $ik$  i  $v$  glasi:

$$v = k \quad \text{za } i = 1 \quad \text{i } k = 1, \dots, N_1$$

$$v = N_1 + k \quad \text{za } i = 2 \quad \text{i } k = 1, \dots, N_2$$

$$v = N_1 + N_2 + k \quad \text{za } i = 3 \quad \text{i } k = 1, \dots, N_3$$

$$v = N_1 + N_2 + N_3 + k \quad \text{za } i = 4 \quad \text{i } k = 1, \dots, N_4$$

$$v = N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + k \quad \text{za } i = 5 \quad \text{i } k = 1, \dots, N_5$$

Uvrštavanjem izraza (4.103) u (4.146), dobiva se ukupan moment parazitnog otpora:

$$M_{DF} = \rho_z v_\infty^2 R_T \sum_{i=1}^5 \sum_{k=1}^{N_i} c_{fik} R_{\Lambda ik} S_{wik} (z_{Mik} - z_{CM}) \quad (4.147)$$

Konačno, ukupan moment propinjanja će biti:

$$M = M_L + M_{DI} + M_{DF} \quad (4.148)$$

## 4.5. Aerodinamički koeficijenti

Korisno je umjesto aerodinamičkih sila i momenata, koristiti aerodinamičke koeficijente. Prije definiranja koeficijenata, važno je uvesti referentnu površinu i referentnu duljinu. Za referentnu površinu, uzet će se površina krila koja bi se dobila kada bi se aeroprofili od koji je krilo načinjeno, spljoštili:

$$S_{REF} = \frac{2}{\bar{l}_g + \bar{l}_d} \sum_i^5 \sum_{k=1}^{N_i} S_{wik} \quad (4.149)$$

dok će se za referentnu duljinu uzeti srednja aerodinamička tetiva koja je definirana izrazom:

$$c_A = \frac{\sum_{i=1}^5 \int_{\zeta_{Li}}^{\zeta_{Ri}} c_i^2(\zeta) d\zeta}{\sum_{i=1}^5 \int_{\zeta_{Li}}^{\zeta_{Ri}} c_i(\zeta) d\zeta} \quad (4.150)$$

Koeficijenti: uzgona, otpora i momenta propinjanja glase redom:

$$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2} \rho_z v_\infty^2 S_{REF}} \quad (4.151)$$

$$C_D = \frac{D}{\frac{1}{2} \rho_z v_\infty^2 S_{REF}} \quad (4.152)$$

$$C_M = \frac{M}{\frac{1}{2} \rho_z v_\infty^2 S_{REF} c_A} \quad (4.153)$$

Korisno je još definirati koeficijent lokalnog uzgona:

$$c_{lik} = \frac{\rho_z v_\infty^2 \gamma_{Pk}}{\frac{1}{2} \rho_z v_\infty^2 \frac{1}{2} (c_i(t_{i(k+1)}) + c_i(t_{ik}))} \quad (4.154)$$

ili nakon sređivanja:

$$c_{lik} = \frac{4\gamma_{Pk}}{c_i(t_{i(k+1)}) + c_i(t_{ik})} \quad (4.155)$$

Korištenjem prije izvedenih izraza za: uzgon, otpor i moment propinjanja, koeficijenti: (4.151), (4.152) i (4.153) se mogu napisati u konačnom obliku:

$$C_L = \frac{4}{S_{REF}} \sum_{k=1}^Q \gamma_{Pk} (y_{FPk}^R - y_{FPk}^L) \quad (4.156)$$

$$C_D = \frac{2}{S_{REF}} \left[ - \sum_{k=1}^Q \left( \sum_{v=2}^Q (\vec{\Omega}_{Mkv}^V)_{RL} (\gamma_{P(v-1)} - \gamma_{Pv}) + (\vec{\Omega}_{Mk(Q+1)}^V)_{RL} \gamma_{PQ} \right) \cdot \vec{n}_{Mk} \gamma_{Pk} \right. \\ \left. + R_T \sum_{i=1}^5 \sum_{k=1}^{N_i} c_{fik} R_{\Lambda ik} S_{wik} \right] \quad (4.157)$$

$$C_M = \frac{2}{S_{REF} c_A} \left[ 2 \sum_{k=1}^Q \left( \gamma_{1k} (x_{CM} - x_{F1k}) + \sum_{j=2}^P (\gamma_{jk} - \gamma_{(j-1)k}) (x_{CM} - x_{Fjk}) \right) (y_{FP}^R - y_{FPk}^L) \right. \\ \left. - \sum_{k=1}^Q \left( \sum_{v=2}^Q (\vec{\Omega}_{Mkv}^V)_{RL} (\gamma_{P(v-1)} - \gamma_{Pv}) + (\vec{\Omega}_{Mk(Q+1)}^V)_{RL} \gamma_{PQ} \right) \cdot \vec{n}_{Mk} \gamma_{Pk} (z_{Mk} - z_{CM}) \right. \\ \left. + R_T \sum_{i=1}^5 \sum_{k=1}^{N_i} c_{fik} R_{\Lambda ik} S_{wik} (z_{Mik} - z_{CM}) \right] \quad (4.158)$$

Radi postavljanja uvjeta stabilnosti letjelice, još će se pronaći derivacija koeficijenta uzgona i momenta propinjanja po napadnom kutu. Za koeficijent uzgona, to će biti:

$$\frac{dC_L}{d\alpha_\infty} = \frac{4}{S_{REF}} \sum_{k=1}^Q \frac{d\gamma_{Pk}}{d\alpha_\infty} (y_{FPk}^R - y_{FPk}^L) \quad (4.159)$$

a za koeficijent momenta propinjanja:

$$\frac{dC_M}{d\alpha_\infty} = \frac{dC_{ML}}{d\alpha_\infty} + \frac{dC_{MDI}}{d\alpha_\infty} + \frac{dC_{MDF}}{d\alpha_\infty} \quad (4.160)$$

gdje je:

$C_{M_L}$  – koeficijent momenta uzrokovanog uzgonom

$C_{M_{DI}}$  – koeficijent momenta uzrokovanog induciranim otporom

$C_{M_{DF}}$  – koeficijent momenta uzrokovanog parazitnim otporom

Pošto parazitni otpor nije ovisan o napadno kutu (bar ne za male napadne kutove), treći član otpada. Drugi član se može zanemariti tj. prirast momenta uzrokovanog induciranim otporom je mali u odnosu na onaj koji je uzrokovan uzgonom pa će konačno jednadžba (4.160) glasiti:

$$\frac{dC_M}{d\alpha_\infty} = \frac{4}{S_{REF}c_A} \sum_{k=1}^Q \left( \frac{d\gamma_{1k}}{d\alpha_\infty} (x_{CM} - x_{F1k}) + \sum_{j=2}^P \left( \frac{d\gamma_{jk}}{d\alpha_\infty} - \frac{d\gamma_{(j-1)k}}{d\alpha_\infty} \right) (x_{CM} - x_{Fjk}) \right) (y_{FPk}^R - y_{FPk}^L) \quad (4.161)$$

Derivacije cirkulacija po napadnom kutu se dobivaju deriviranjem sustava (4.69):

$$\frac{d\mathbf{y}}{d\alpha_\infty} = \frac{d}{d\alpha_\infty} (\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}) = \mathbf{A}^{-1} \frac{d\mathbf{b}}{d\alpha_\infty} \quad (4.162)$$

$$\frac{d\mathbf{b}}{d\alpha_\infty} = \begin{bmatrix} -n_{K11}^z \\ \vdots \\ -n_{K1Q}^z \\ \vdots \\ -n_{KP1}^z \\ \vdots \\ -n_{KPQ}^z \end{bmatrix} \quad (4.163)$$

Kao što je već napomenuto, komponente  $\mathbf{y}$  su linearno ovisne o  $\alpha_\infty$  što znači da će koeficijent uzgona linearno ovisiti o napadnom kutu kako slijedi:

$$C_L(\alpha_\infty) = \frac{dC_L}{d\alpha_\infty} (\alpha_\infty - \alpha_0) + C_L(\alpha_0) \quad (4.164)$$

gdje je  $\alpha_0$  neki referentni napadni kut. Iz jednadžbe (4.164), može se dobiti kut pri kojem letjelica ne stvara uzgon tj. kut nultog uzgona  $\alpha_{L0}$ :

$$\alpha_{L0} = \alpha_0 - \frac{C_L(\alpha_0)}{\frac{dC_L}{d\alpha_\infty}} \quad (4.165)$$

Ukoliko se zanemari koeficijent momenta koji nastaje uslijed induciranih otpora u izrazu (4.158), onda se i za koeficijent momenta propinjanja može pisati analogno kao za  $C_L(\alpha_\infty)$ :

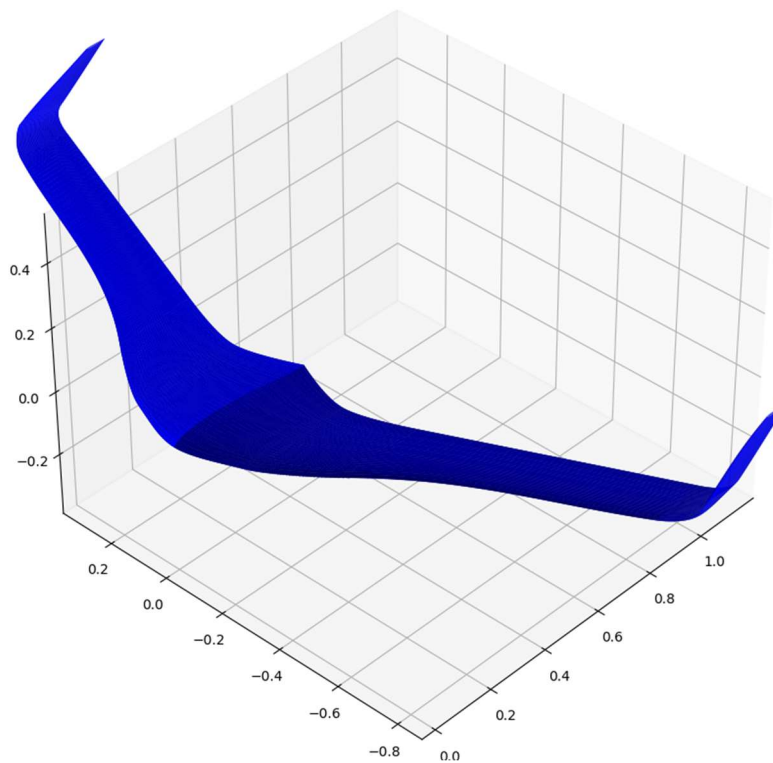
$$C_M(\alpha_\infty) = \frac{dC_M}{d\alpha_\infty} (\alpha_\infty - \alpha_0) + C_M(\alpha_0) \quad (4.166)$$

iz čega se dobiva napadni kut za koji je moment propinjanja oko centra mase jednak nuli tj. kut nultog momenta:

$$\alpha_{M0} = \alpha_0 - \frac{C_M(\alpha_0)}{\frac{dC_M}{d\alpha_\infty}} \quad (4.167)$$

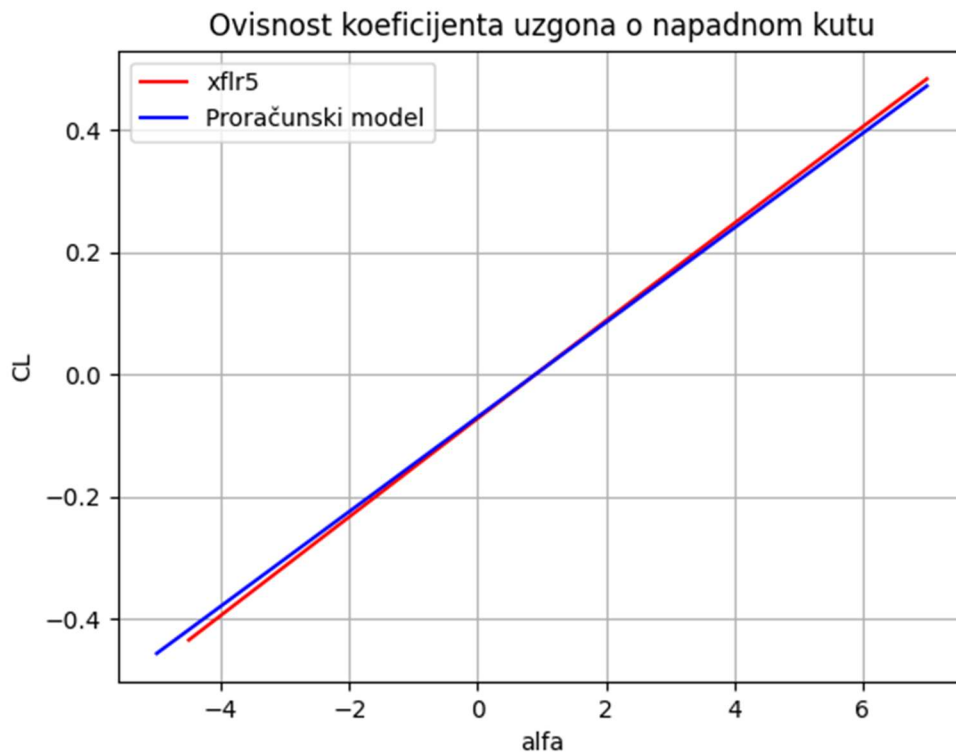
## 4.6. Validacija aerodinamičkog modela

Sada će se ukratko prikazati rezultati aerodinamičke analize koji su dobiveni gore izvedenim izrazima i programom xflr5. Za identičnu geometriju letjelice koja je prikazana na slici (4.17), izračunate su ovisnosti:  $C_L(\alpha_\infty)$ ,  $C_D(\alpha_\infty)$  i  $C_M(\alpha_\infty)$  te je izračunata distribucija koeficijenta lokalnog uzgona.

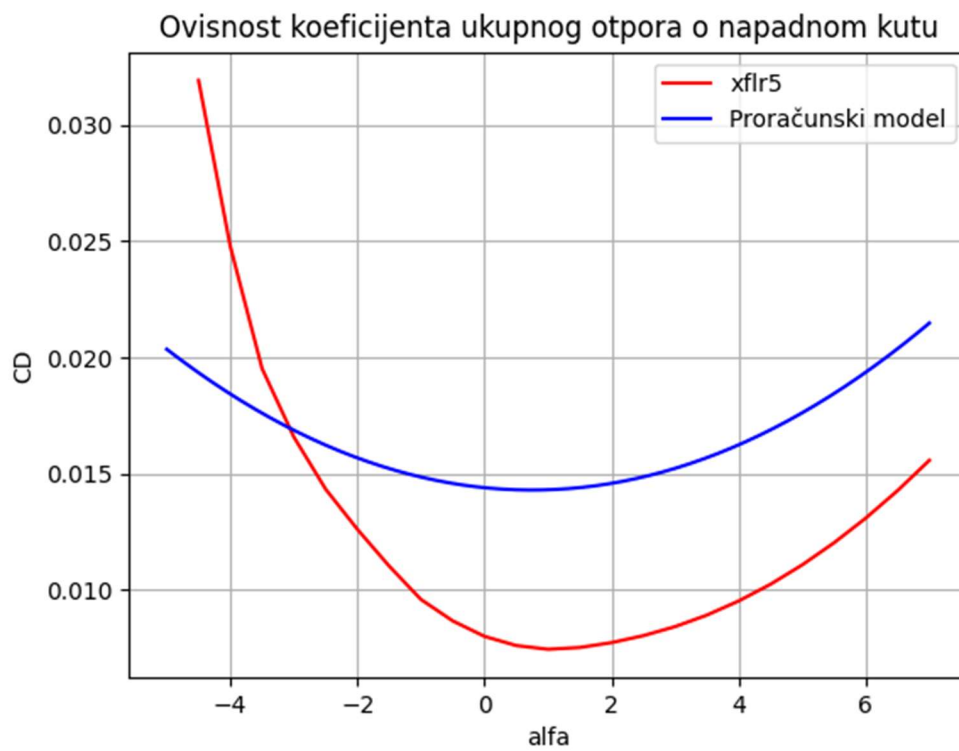


Slika 4.17 Prikaz testne letjelice



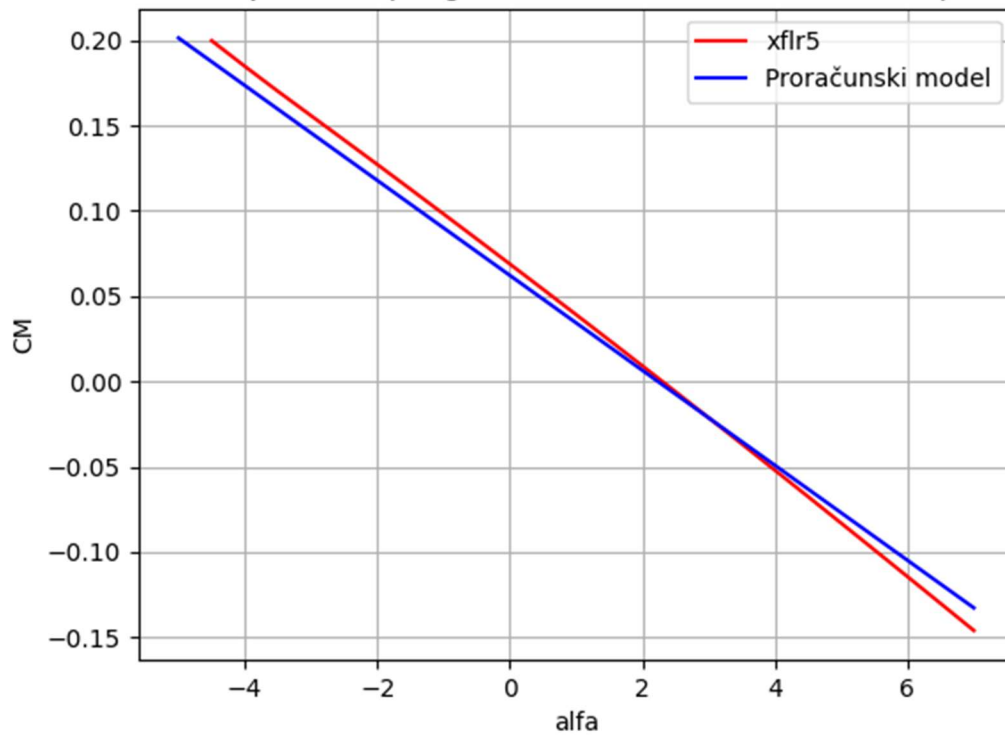


Slika 4.18 Ovisnost koeficijenta uzgona o napadnom kutu za testnu letjelicu

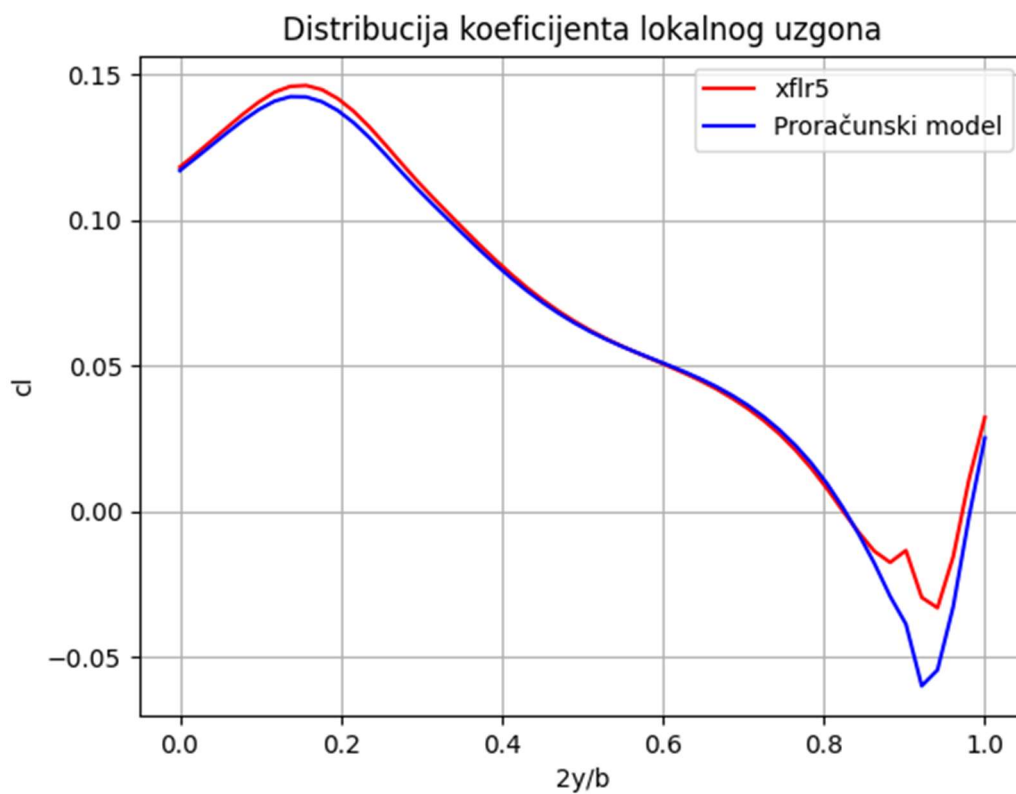


Slika 4.19 Ovisnost koeficijenta otpora o napadnom kutu za testnu letjelicu

Ovisnost koeficijenta ukupnog momenta oko centra mase o napadnom kutu



Slika 4.20 Ovisnost koeficijenta ukupnog momenta o napadnom kutu za testnu letjelicu



Slika 4.21 Distribucija koeficijenta lokalnog uzgona za testnu letjelicu

Vidi se da se svi rezultati jako dobro poklapaju osim onih za otpor. Može se zaključiti da se inducirani dio otpora proračunskog modela izvedenog ovdje dobro poklapa sa rezultatom iz xflr5 no ne i parazitni dio. To nije problem pošto je u [9.] navedeno da program xflr5 procjenjuje manje otpora nego što bi trebao. Osim toga, egzaktno određivanje parazitno otpora je vrlo teško te ovisi o puno parametara pa imati model koji predviđa nešto više otpora nije loše.

## 5. FORMULACIJA OPTIMIZACIJSKOG PROBLEMA

Nakon pripreme geometrije i definiranja modela koji povezuje projektne varijable sa veličinama u interesu, može se postaviti sustav od (2.3) do (2.6). Navedeni sustav će se modificirati na sljedeći način:

$$F\left(\left(\tilde{x}_{\text{opt}}\right)_i, x_{0i}\right) = \min(F(\tilde{x}_i, x_{0i})) \quad (5.1)$$

$$h_j\left(\left(\tilde{x}_{\text{opt}}\right)_i, x_{0i}\right) = 0 \quad (5.2)$$

$$g_k\left(\left(\tilde{x}_{\text{opt}}\right)_i, x_{0i}\right) \geq 0 \quad (5.3)$$

$$lb_i \leq \left(\tilde{x}_{\text{opt}}\right)_i, x_{0i} \leq ub_i \quad (5.4)$$

gdje je:

$\tilde{x}_i$  – bezdimenzijska projektna varijabla

$x_{0i}$  – apsolutna vrijednost inicijalne projektne varijable

$\left(\tilde{x}_{\text{opt}}\right)_i$  – bezdimenzijska projektna varijabla u optimumu (minimumu)

Razlog te modifikacije jest skaliranje prostora projektnih varijabli [1.]. Na taj način su sve projektne varijable istog reda veličine tj. prostor projektnih varijabli je ravnomjeran u svim smjerovima. To značajno može ubrzati pronalaženje optimalne točke. Moguće je i skalirati funkciju cilja no to nije ovdje toliko bitno pošto ovo nije multidisciplinarni problem.

### 5.1. Projektne varijable

Parametri koji definiraju geometriju letjelice, mogu se svrstati u četiri kategorije:

- 1.) parametri trupa
- 2.) parametri krivulje vodilje
- 3.) parametri distribucije duljine tetive
- 4.) parametri distribucije uvijanja

Svi parametri geometrije letjelice, mogu se vidjeti u tablici 5.1.

Tablica 5.1 Geometrijski parametri letjelice

Trup	Krivulja vodilja	Distribucija duljine tetive	Distribucija uvijanja
$H_F$	$r_1$	$c_{22}$	$\alpha_{22}$
$H_T$	$\chi_{x22}$	$k_{22}^c$	$k_{22}^\alpha$
$W$	$\chi_{y22}$	$c_{32}$	$\alpha_{32}$
$c_R$	$\chi_{z22}$	$k_{32}^c$	$k_{32}^\alpha$
$k_{12}^c$	$l$	$c_{42}$	$\alpha_{42}$
	$r_3$	$k_{42}^c$	$k_{42}^\alpha$
	$\chi_{x51}$	$c_T$	$\alpha_{52}$
	$\chi_{z51}$	$k_{52}^c$	$k_{52}^\alpha$
	$\chi_{x52}$		
	$H_W$		

Kao što je već spomenuto, parametri trupa se zadaju prije optimizacije te ostaju fiksni za vrijeme optimizacije. Osim navedenih geometrijskih parametara, postoje još parametri leta. U ovom slučaju, to će biti napadni kut  $\alpha_\infty$  i brzina leta  $v_\infty$  pa će sveukupno ovaj optimizacijski problem sadržati 28 projektnih varijabli.

## 5.2. Funkcija cilja

Kao što je u uvodu spomenuto, potrebno je smanjiti snagu koja je potrebna za ravnotežni let, pa će funkcija cilja biti snaga potrebna za let  $P_{REQ}$ :

$$F = P_{REQ} = \frac{1}{2} \rho_z v_\infty^3 S_{REF} C_D \quad (5.5)$$

## 5.3. Ograničenja jednakosti

Slijedeći korak je postaviti ograničenja jednakosti tj. definirati funkcije jednakosti koje su prikazane u tablici 5.2.

Tablica 5.2 Funkcije ograničenja jednakosti

$h_j$	Funkcija jednakosti
$h_1$	$\frac{1}{2} \rho_z v_\infty^2 S_{REF} C_L - mg$
$h_2$	$C_M$
$h_3$	$\frac{dC_M}{d\alpha_\infty} - \lambda$

Prva jednakost nalaže da letjelica sa optimalnim projektnim varijablama mora ostvarivati uzgon jednak težini letjelice ( $m$  je masa letjelice sa teretom a  $g$  je gravitacijsko ubrzanje na Zemlji).

Drugo ograničenje traži da za ukupan moment propinjanja letjelice bude jednak nuli za optimalno stanje.

Treće ograničenje je zahtjev na uzdužnu stabilnost letjelice. Kako bi letjelica bila stabilna u uzdužnom smjeru, potrebno je da je derivacija koeficijenta momenta propinjanja bude negativna tj. za pozitivan prirast napadnog kuta, potrebno je da se moment smanji kako bi vratio letjelicu na manji (ravnotežni) napadni kut. Obrnuto vrijedi za negativan prirast napadnog kuta. Kako iznos te derivacije također ovisi o upravljivosti letjelice, potrebno je tu vrijednost kontrolirati pa je zato uveden parametar  $\lambda$  koji se odabire prije optimizacije. Da bi letjelica bila stabilna,  $\lambda$  mora biti negativan broj. Pošto je ta veličina relativno apstraktna, potrebno je nakon optimizacije isprobati u simulaciji upravljivost letjelice, Ukoliko nismo zadovoljni sa upravljivošću, potrebno je promijeniti parametar  $\lambda$  te ponovno pokrenuti optimizaciju za novi parametar  $\lambda$ .

## 5.4. Ograničenja nejednakosti

Funkcije nejednakosti za ovaj problem, prikazane su u tablici 5.3.

Tablica 5.3 Funkcije ograničenja nejednakosti

$g_k$	Funkcija nejednakosti
$g_1$	$0.5b_M - y_{52}$
$g_2$	$0.2y_{52} - (H_W + \chi_{z51})$
$g_3$	$H_W + \chi_{z51} - 0.15y_{52}$
$g_4$	$\frac{C_L}{dC_L} - \frac{C_M}{dC_M}$ $\frac{dC_L}{d\alpha_\infty} \quad \frac{dC_M}{d\alpha_\infty}$
$g_5$	$0.9(c_1^+)_{\text{stall}} - \max(c_{lik})$
$g_6$	$\min(c_{lik}) - 0.9(c_1^-)_{\text{stall}}$

$g_7$	$c_{22} - c_{32}$
$g_8$	$c_{32} - c_{42}$
$g_9$	$c_{42} - c_T$
$g_{10}$	$3K_{13}^c K_{11}^c - (K_{12}^c)^2$
$g_{11}$	$3K_{23}^c K_{21}^c - (K_{22}^c)^2$
$g_{12}$	$3K_{33}^c K_{31}^c - (K_{32}^c)^2$
$g_{13}$	$3K_{43}^c K_{41}^c - (K_{42}^c)^2$
$g_{14}$	$3K_{53}^c K_{51}^c - (K_{52}^c)^2$
$g_{15}$	$-K_{13}^c$
$g_{16}$	$-K_{23}^c$
$g_{17}$	$-K_{33}^c$
$g_{18}$	$-K_{43}^c$
$g_{19}$	$-K_{53}^c$
$g_{20}$	$3K_{13}^\alpha K_{11}^\alpha - (K_{12}^\alpha)^2$
$g_{21}$	$3K_{23}^\alpha K_{21}^\alpha - (K_{22}^\alpha)^2$
$g_{22}$	$3K_{33}^\alpha K_{31}^\alpha - (K_{32}^\alpha)^2$

$g_{23}$	$3K_{43}^{\alpha}K_{41}^{\alpha} - (K_{42}^{\alpha})^2$
$g_{24}$	$3K_{53}^{\alpha}K_{51}^{\alpha} - (K_{52}^{\alpha})^2$
$g_{25}$	$l - r_3$
$g_{26}$	$H_W - \chi_{z51}$
$g_{27}$	$\chi_{x52} - \chi_{x51}$

Prva nejednakost osigurava da raspon krila ne prelazi maksimalni dopušteni raspon  $b_M$  gdje je  $y_{52}$  poluraspon letjelice tj.  $y$  koordinata treće kontrolne točke krivulje vodilje petog segmenta.

Druga nejednakost osigurava da ukupna visina wingleta ( $H_W + \chi_{z51}$ ) ne prelazi 20% poluraspona letjelice dok treća osigurava da ukupna visina wingleta ne prelazi ispod 15% poluraspona letjelice. Te restrikcije (konkretno, treća) su uvedene kako bi se osiguralo postojanje wingleta tj. vertikalnih stabilizatora kojima se kontrolira stabilnost oko  $z$  osi. To je indirektan način kontroliranja stabilnosti oko  $z$  osi pošto se ovdje direktno kontrolira samo uzdužna stabilnost.

Četvrta restrikcija je redundantna te kaže da napadni kut nultog momenta letjelice mora biti veći od napadnog kuta nultog uzgona tj. letjelica mora moći stvarati uzgon a da pri tome nema nikakvog momenta koji djeluje oko centra mase. Zadovoljenjem prve i druge jednakosti, to je automatski zadovoljeno no uvodi se ova restrikcija svejedno kako bi se dopustivi prostor smanjio čim više te ubrao proces pronalaženja optimuma. Ta je nejednakost dobivena korištenjem jednadžbi (4.165) i (4.167). Korisno je tu nejednakost pomnožiti sa  $\frac{dC_L}{d\alpha_{\infty}} \frac{dC_M}{d\alpha_{\infty}}$  kako bi se eliminirala mogućnost pojave nule u nazivniku. Naravno, to znači da će se trebati provjeravati predznak umnoška  $\frac{dC_L}{d\alpha_{\infty}} \frac{dC_M}{d\alpha_{\infty}}$ .

Peto ograničenje nejednakosti osigurava da ne dođe do pojave lokalnog koeficijenta uzgona većeg od 90% maksimalnog koeficijenta uzgona aeroprofila. Za MH 60 maksimalni koeficijent uzgona je 1 ( $(c_1^+)_{\text{stall}} = 1$ ). Šesto ograničenje govori isto što i peto samo se odnosi na minimalni koeficijent uzgona koji je za MH 60 -0.5 ( $(c_1^-)_{\text{stall}} = -0.5$ ). Te vrijednosti se mogu dobiti analizom u programu xflr5.

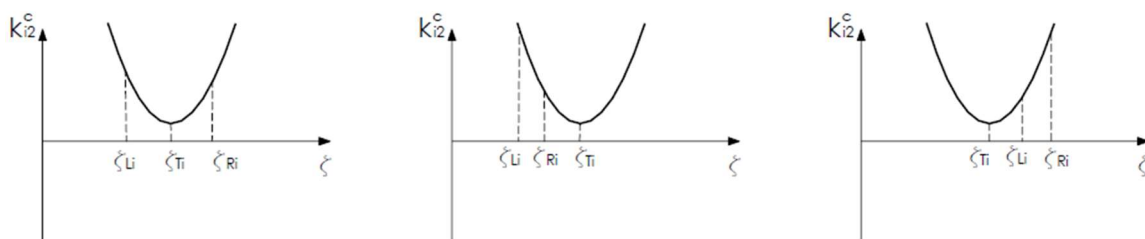


Ograničenja od 7 do 9 osiguravaju da su duljine tetiva na početku segmenata veće od onih na kraju (indirektno uzimanje konstrukcijskih zahtjeva u obzir).

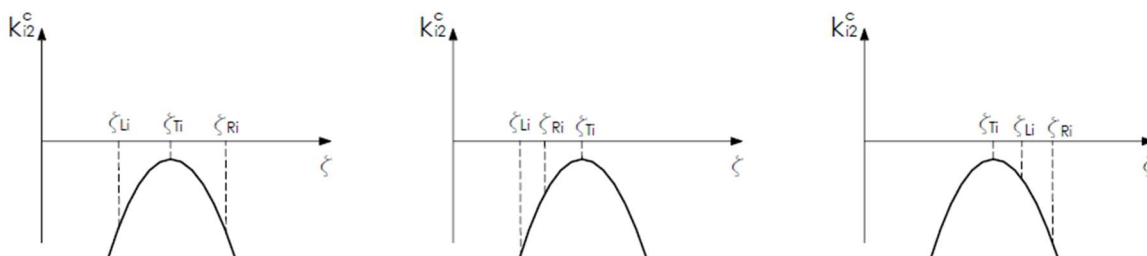
Funkcije od 10 do 19 osiguravaju da je distribucija duljine tetive isključivo padajuća funkcija na svakom segmentu krila. Na taj se način dodatno postavlja uvjet koji indirektno uzima u obzir zahtjev konstrukcije letjelice. Kako bi se prikazao način na koji su dobivena ta ograničenja, potrebno je promotriti na koji način je distribuiran nagib distribucije duljine tetive. Da bi se dobila distribucija nagiba, potrebno je jednadžbu (3.61) derivirati po  $\zeta$ :

$$k_i^c(\zeta) = 3K_{i3}^c\zeta^2 + 2K_{i2}^c\zeta + K_{i1}^c \quad (5.6)$$

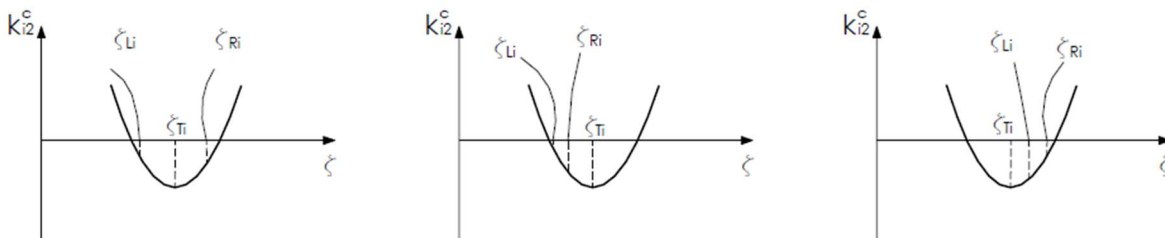
gdje je  $k_i^c(\zeta)$ , distribucija nagiba. To je kvadratna funkcija te ta funkcija može imati jednu od četiri osnovne konfiguracije koje su prikazane na slikama od 5.1 do 5.4.



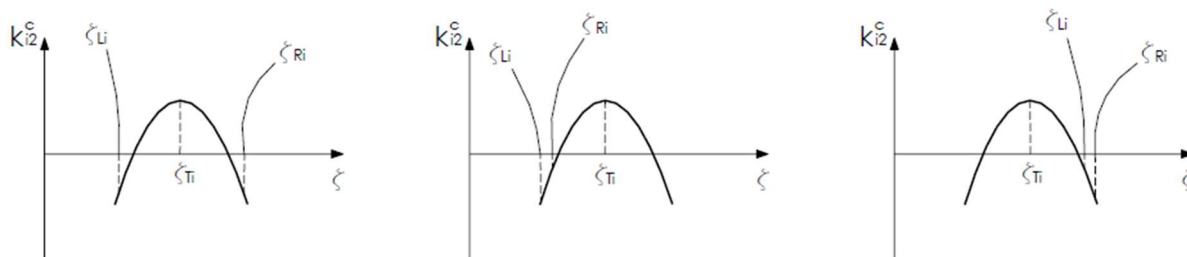
Slika 5.1 Prva konfiguracija kvadratne funkcije



Slika 5.2 Druga konfiguracija kvadratne funkcije



Slika 5.3 Treća konfiguracija kvadratne funkcije



Slika 5.4 Četvrta konfiguracija kvadratne funkcije

gdje su  $\zeta_{Li}$  i  $\zeta_{Ri}$  vrijednosti duljine krivulje vodilje na  $i$ -tom segmentu, projicirane na  $y$ ,  $z$  ravninu a  $\zeta_{Ti}$  je  $\zeta$  koordinata na kojoj se nalazi tjeme parabole. Kao što je već spomenuto, distribucija duljine tetive mora biti isključivo padajuća funkcija što znači da mora  $k_i^c(\zeta)$  biti negativan između  $\zeta_{Li}$  i  $\zeta_{Ri}$ . Prvi je korak osigurati da su nagibi za  $\zeta_{Li}$  i  $\zeta_{Ri}$  negativni što se čini postavljanjem restrikcije na vrijednost projektnih varijabli:  $k_{22}^c, \dots$  i  $k_{52}^c$ . Međutim, to nije dovoljno da bi se osigurala negativna distribucija nagiba po čitavom intervalu između  $\zeta_{Li}$  i  $\zeta_{Ri}$  što se i vidi iz navedenih slika. To znači da prva konfiguracija (slika 5.1) otpada tj. do takve distribucije nagiba ne smije doći. Za četvrtu konfiguraciju, prvi slučaj je također neprihvatljiv pošto se u intervalu između  $\zeta_{Li}$  i  $\zeta_{Ri}$ , javlja  $k_i^c(\zeta)$  koji je veći od nule. Za istu konfiguraciju, vidi se da se preostala dva slučaja mogu reproducirati (u smislu distribucije  $k_i^c(\zeta)$ ) pomoću druge konfiguracije čime odbacujemo tj. ne dopuštamo pojavu četvrte konfiguracije. Treća konfiguracija je prihvatljiva no radi načina na koji se mijenja nagib (moguće su pojave stepenaste distribucije), neće se također prihvatiti. Iz navedenog, zaključuje se da:

- 1.) tjeme parabole mora biti ispod  $\zeta$  osi i
- 2.) prvi koeficijent parabole mora biti negativan

Iznos distribucije  $k_i^c(\zeta)$  za  $\zeta = \zeta_{Ti}$  glasi (ekstrem parabole):

$$k_i^c(\zeta_{Ti}) = -\frac{(K_{i2}^c)^2}{3K_{i3}^c} + K_{i1}^c \quad (5.7)$$

pa prvi uvjet u matematičkom obliku glasi :

$$-\frac{(K_{i2}^c)^2}{3K_{i3}^c} + K_{i1}^c < 0 \quad (5.8)$$

pošto mora  $K_{i3}^c < 0$ , onda se množenjem nejednadžbe (5.8) sa  $K_{i3}^c$ , dobiva:

$$3K_{i3}^c K_{i1}^c - (K_{i2}^c)^2 > 0 \quad (5.9)$$

Do istog zaključka se moglo doći razmatranjem ekstrema u distribuciji duljine tetive.

Drugi zaključak u matematičkom obliku glasi:

$$-K_{i3}^c > 0 \quad (5.10)$$

Time se došlo do nejednadžbi od 10 do 19.

Valja naglasiti da se metodom pokušaja i pogreške, uspostavilo da se dobri rezultati dobivaju i ako se funkcije nejednadžbe od 10. do 14., proglaše funkcijama jednakosti. U rezultati prikazanim u 7. poglavlju, koristila su se upravo takva ograničenja.

Nejednakosti od 20 do 24 su postavljene kako ne bi došlo do pojave ekstrema kod distribucije uvijanja na svim segmentima. Kako bi se došlo do tih funkcija nejednakosti, potrebno je pronaći izraz za stacionarne točke distribucije (3.94). Taj izraz glasi (stacionarne točke kubične funkcije):

$$(\zeta_{\text{stac}})_i = \frac{-2K_{i2}^\alpha \pm \sqrt{4(K_{i2}^\alpha)^2 - 12K_{i3}^\alpha K_{i1}^\alpha}}{6K_{i3}^\alpha} \quad (5.11)$$

Ukoliko ne želimo da izraz (5.11) ima realna rješenja, potrebno je da diskriminanta bude manja od nule:

$$4(K_{i2}^\alpha)^2 - 12K_{i3}^\alpha K_{i1}^\alpha < 0 \quad (5.12)$$

tj.

$$3K_{i3}^\alpha K_{i1}^\alpha - (K_{i2}^\alpha)^2 > 0 \quad (5.13)$$

Preostala tri ograničenja (od 25 do 27) nisu od velikog značaja već se koriste samo kako bi se smanjio prostor projektnih varijabli bez da se narušava konačan rezultat.

## 5.5. Intervali projektnih varijabli

Kako bi se smanjio dopustivi prostor projektnih varijabli te time ubrzao pronalazak optimuma, uvodi se interval za svaku projektnu varijablu, unutar kojeg se može kretati. Tablica 5.4 prikazuje gornje ( $ub_i$ ) i donje ( $lb_i$ ) granice projektnih varijabli.

**Tablica 5.4 Intervali projektnih varijabli**

Redni br. intervala	$lb_i$	$x_i$	$ub_i$
1.	$0.05W$	$r_1$	$1.25W$
2.	$0.5H_T$	$\chi_{x22}$	$H_T$
3.	$0.5W$	$\chi_{y22}$	$1.5W$
4.	$-0.2c_R$	$\chi_{z22}$	$0.2c_R$
5.	$W$	$l$	$0.5b_M$

6.	$0.5W$	$r_3$	$0.5b_M$
7.	$0.01c_R$	$\chi_{x51}$	$0.1c_R$
8.	$0.025b_M$	$\chi_{z51}$	$0.1b_M$
9.	$0.01c_R$	$\chi_{x52}$	$0.1c_R$
10.	$0.025b_M$	$H_W$	$0.1b_M$
11.	$0.05c_R$	$c_{22}$	$c_R$
12.	-2	$k_{22}^c$	$-10^{-4}c_R$
13.	$0.05c_R$	$c_{32}$	$c_R$
14.	-2	$k_{32}^c$	$10^{-4}c_R$
15.	$0.05c_R$	$c_{42}$	$c_R$
16.	-2	$k_{42}^c$	$10^{-4}c_R$
17.	$0.05c_R$	$c_T$	$c_R$
18.	-2	$k_{52}^c$	$10^{-4}c_R$
19.	$-5\pi/180$	$\alpha_{22}$	$5\pi/180$
20.	-2	$k_{22}^\alpha$	2
21.	$-5\pi/180$	$\alpha_{32}$	$5\pi/180$
22.	-2	$k_{32}^\alpha$	2
23.	$-5\pi/180$	$\alpha_{42}$	$5\pi/180$
24.	-2	$k_{42}^\alpha$	2
25.	$-5\pi/180$	$\alpha_{52}$	$5\pi/180$
26.	-2	$k_{52}^\alpha$	2
27.	0	$\alpha_\infty$	5
28.	5	$v_\infty$	50

Najznačajniji intervali su: 12., 14., 16. i 18. jer se njima osigurava da su nagibi distribucije duljine tetive negativni na spojevima segmenata krila. To je nužno kako bi se ostvarila strogo padajuća distribucija duljine tetive.

Ostali intervali su postavljeni primarno radi smanjenja dopustivog prostora projektnih varijabli.

## 6. KARATAK OPIS Python PROGRAMA

Python program kojim se rješava problem optimizacije letećeg krila se sastoji od šest glavnih dijelova koji su zaduženi za:

- 1.) stvaranje proračunske mreže te izračun relevantnih karakteristika geometrije,
- 2.) izračun cirkulacija vrtložnih prstena i potkova,
- 3.) izračun aerodinamičkih koeficijenata,,
- 4.) izračun vrijednosti funkcije cilja,
- 5.) izračun vrijednosti funkcija ograničenja (jednakost i nejednakosti) i
- 6.) optimizaciju projektnih varijabli.

Stvaranje proračunske mreže, postiže se pomoću funkcije koja kao ulazne parametre prima: geometrijske parametre letjelice, geometrijske parametre aeroprofila te diskretizaciju geometrije tj. broj koji odgovara broju panela duž tetive i broj koji odgovara broju panela duž raspona. Kao izlazne varijable, vraća koordinate čvorova panela (matricu mreže) te sve ostale relevantne geometrijske karakteristike geometrije (centar mase prazne letjelice, referentna površina, referentna duljina itd.).

Izračun cirkulacija se vrši pomoću funkcije čiji su ulazni parametri: matrica i napadni kut letjelice dok su izlazni parametri cirkulacija i derivacija cirkulacije po napadnom kutu.

Poznavanjem cirkulacija i derivacija istih, može se primijeniti funkcija koja kao ulazne parametre ima: matricu mreže, sve relevantne geometrijske karakteristike letjelice potrebne za izračun aerodinamičkih koeficijenata, cirkulacije, derivacije cirkulacija, brzinu leta te svojstva zraka u ovisnosti o visini leta. Izlaze varijable su naravno aerodinamički koeficijenti.

Posljednja tri djela se nalaze unutar jednog modula. Izračun funkcije cilja se provodi pomoću Python funkcije unutar koje se nalaze svi prethodno navedeni dijelovi programa. Kao ulazne varijable, prima projektne varijable a izlazna varijabla je vrijednost funkcije cilja.

Slično kao i funkcija cilja, izračun svih funkcija ograničenja se provodi pomoću jedne funkcije unutar koje su smještene prva tri djela. Ulazni argumenti su projektne varijable a izlazni argumenti su vrijednosti funkcija ograničenja.

Naposlijetku, preostaje još ugrađena Python-ova optimizacijska funkcija iz Scipy biblioteke koja kao ulazne argumente prima: funkciju za izračun vrijednosti funkcije cilja, funkciju za izračun vrijednosti funkcija ograničenja i dopustive intervale projektnih varijabli. Također, potrebno je odabrati početnu točku tj. inicijalne vrijednosti projektnih varijabli koje se ubacuju u optimizacijsku funkciju u obliku vektora čije su komponente vrijednosti projektnih varijabli na početku optimizacije (inicijalne vrijednosti projektnih varijabli). Optimizacijska funkcija omogućuje još i: kontrolu nad brojem iteracija optimizatora, način računanja parcijalnih derivacija funkcije cilja i funkcija ograničenja te optimizacijsku metodu. Za ovaj optimizacijski problem, metoda regije povjerenja. To je gradijentna metoda što znači da će nam biti

zagarantiran lokalni no ne i globalni minimum te da konačno rješenje ovisi o početnoj točki ukoliko postoji više optimuma. Velika prednost gradijentnih metoda u odnosu na druge koje mogu pronaći globalne optimume, jest brzina pronalaska optimuma. Konačno, izlazni argumenti će biti optimizirane projektne varijable te informacije u zadovoljenju odnosno nezadovoljenju ograničenja. Važno je naglasiti da se kriteriji za proglašavanjem neke točke optimumom namještaju po potrebi tj. u ovisnosti o razmatranom problemu (npr. za neki problem može biti dovoljno postaviti da sve funkcije ograničenja moraju imati vrijednost ispod  $10^{-3}$  kao jedan od kriterija optimalnosti, dok za neki drugi problem, taj prag može biti na  $10^{-8}$ ).

## 7. REZULTATI OPTIMIZACIJE

Ulazni parametri kojima se definiraju uvjeti za koje se mora ostvariti optimum, dani su u tablici 7.1.

Tablica 7.1 Ulazni parametri

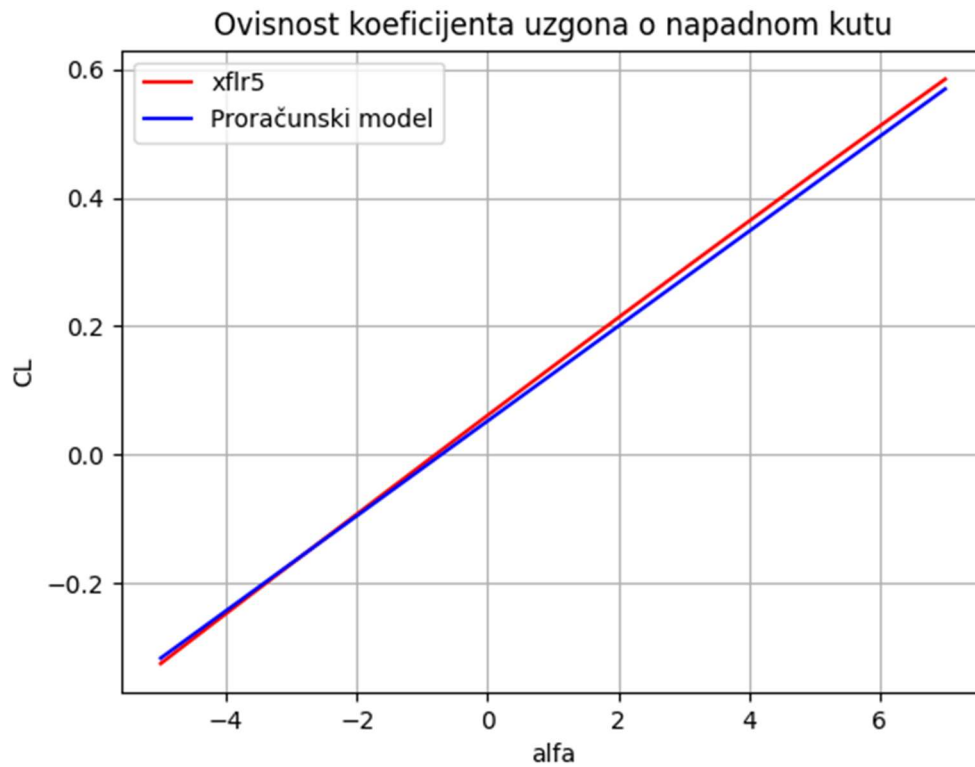
Oznaka parametra	Opis parametra	Vrijednost parametra
$H_F$	Duljina trupa	0.4 m
$H_T$	Duljina repa (nosača motora)	0.06 m
$W$	Pola širine trupa	0.193 m
$c_R$	Duljina korjene tetive	0.34 m
$k_{12}^c$	Parametar za kontrolu oblika prednjeg djela trupa	-0.43
$H$	Visina leta	3000 m
$b_M$	Maksimalni dopušteni raspon	3 m
$\rho_K$	Gustoća konstrukcije letjelice	$50 \frac{kg}{m^3}$
$m_T$	Masa tereta	2 kg
$x_T$	$x$ koordinata centra mase tereta	0.2 m
$\lambda$	Parametar upravljivosti/stabilnosti	-0.03
$(c_1^+)_{stall}$	Maksimalni koeficijent uzgona aeroprofila	1
$(c_1^-)_{stall}$	Minimalni koeficijent uzgona aeroprofila	-0.5

Polovica krila je diskretizirana sa 15 panela duž tetive i 50 panela duž raspona dakle krilo je diskretizirano na ukupno 1500 panela.

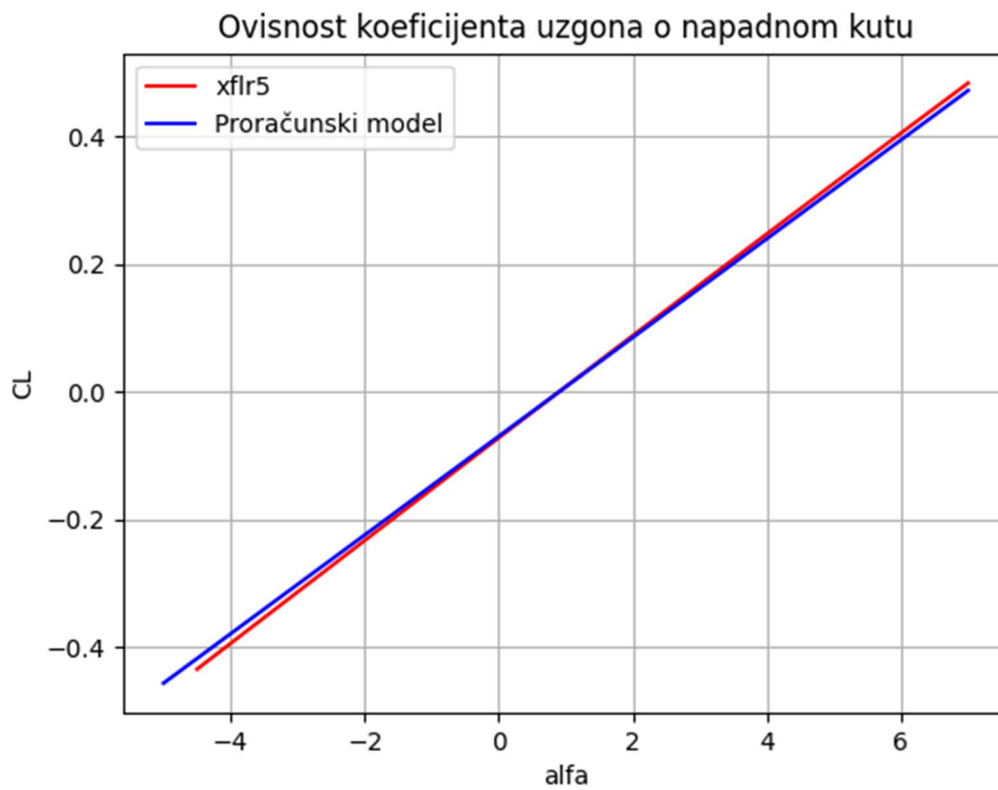
Konačno, kao inicijalna geometrija, uzeta je letjelica sa slike 4.17.

Prikaz aerodinamičkih koeficijenata te geometrije za inicijalne i optimalne varijable, vidi se na slikama koje slijede. Vrijednost funkcije cilja inicijalne i optimizirane geometrije, dani su u tablici 7.2. Dalje, vrijednosti funkcija jednakosti za obje geometrije, vide se u tablici 7.3 dok se u tablici 7.4 vide se samo predznaci vrijednosti funkcija nejednakosti za obje geometrije tj. da li je: ograničenje neaktivno tj. vrijednost funkcije ograničenja je pozitivnog predznaka (+) ili nezadovoljeno tj. vrijednost funkcije ograničenja je negativnog predznaka (-). Vrijednosti inicijalnih i optimalnih varijabli, vide se u tablici 7.5.

Broj iteracija (koraka) optimizacije je 500.

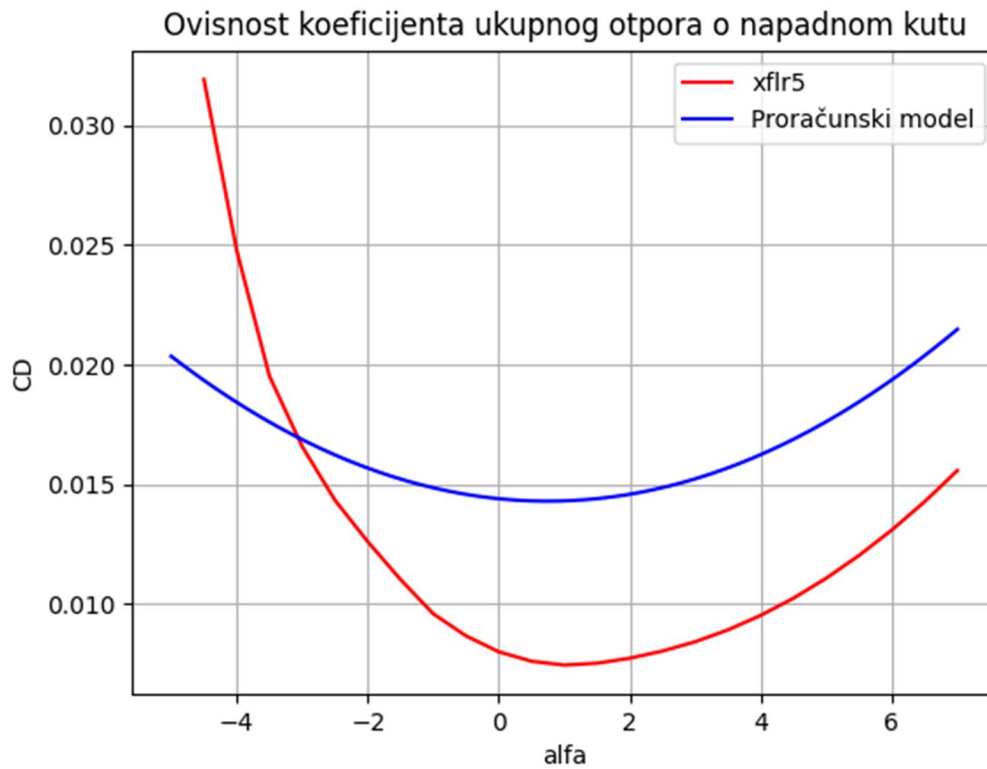


Slika 7.1 Ovisnost koeficijenta uzgona o napadnom kutu za inicijalne projektne varijable

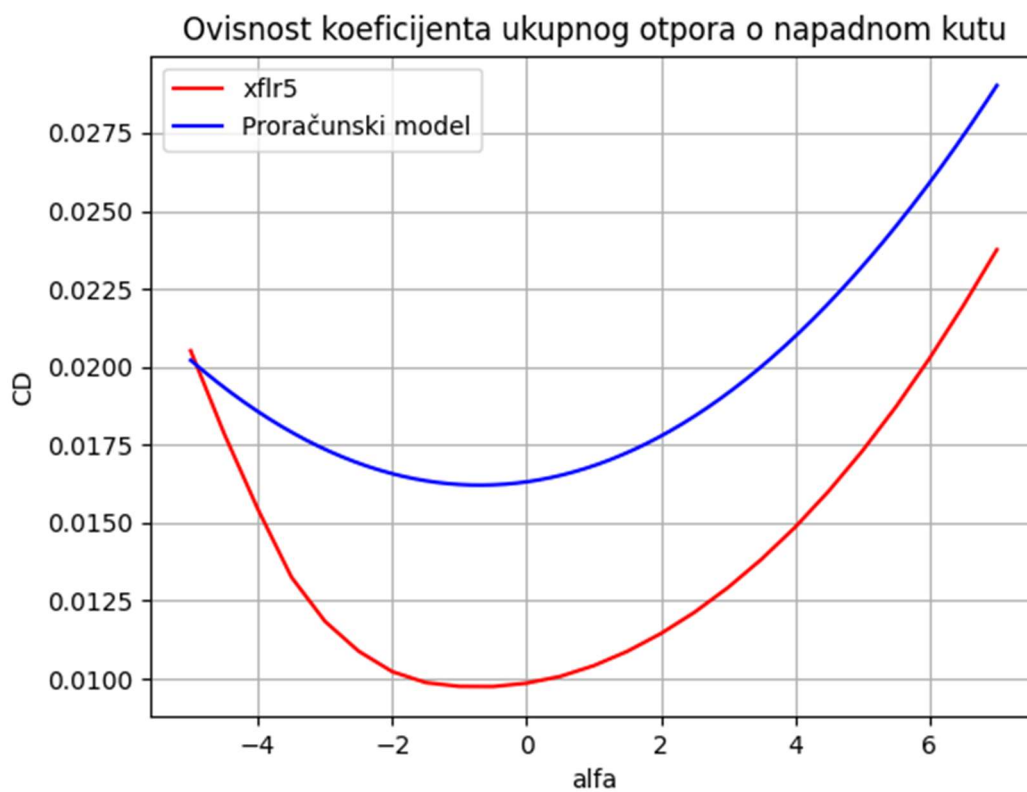


Slika 7.2 Ovisnost koeficijenta uzgona o napadnom kutu za optimizirane projektne varijable



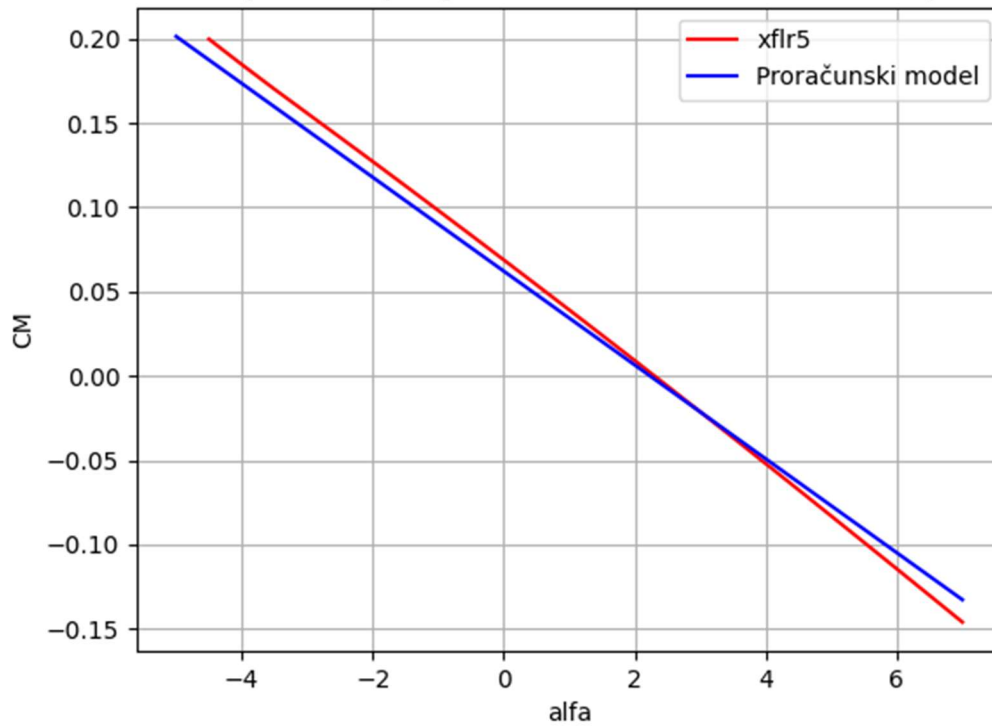


Slika 7.3 Ovisnost koeficijenta otpora o napadnom kutu za inicijalne projektne varijable



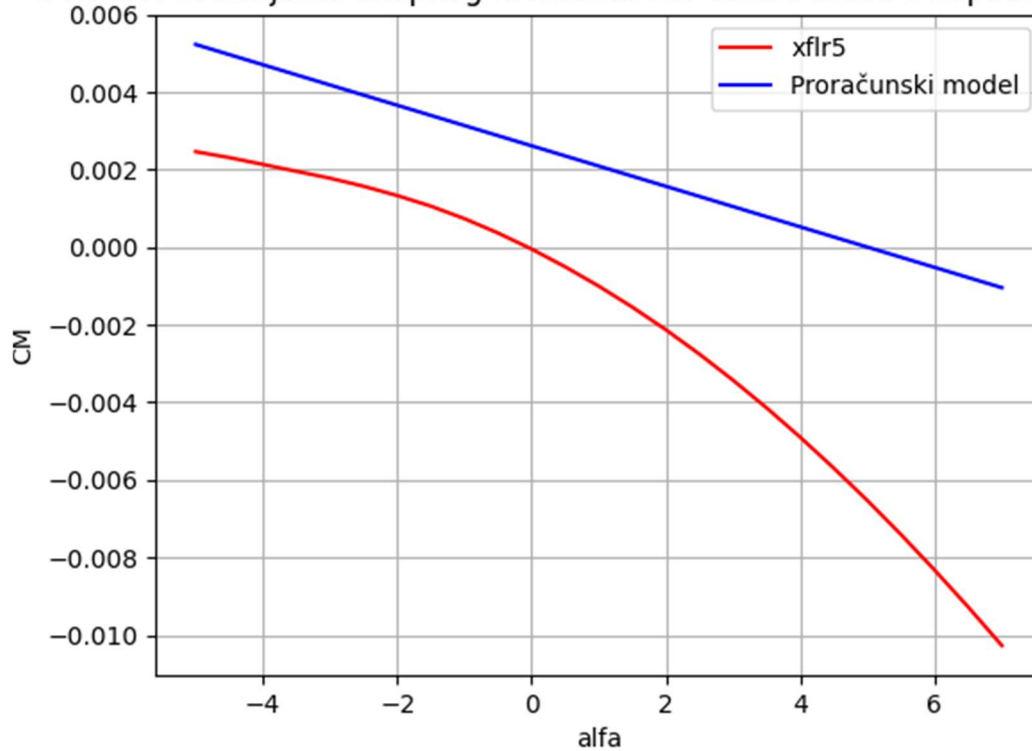
Slika 7.4 Ovisnost koeficijenta otpora o napadnom kutu za optimizirane projektne varijable

Ovisnost koeficijenta ukupnog momenta oko centra mase o napadnom kutu

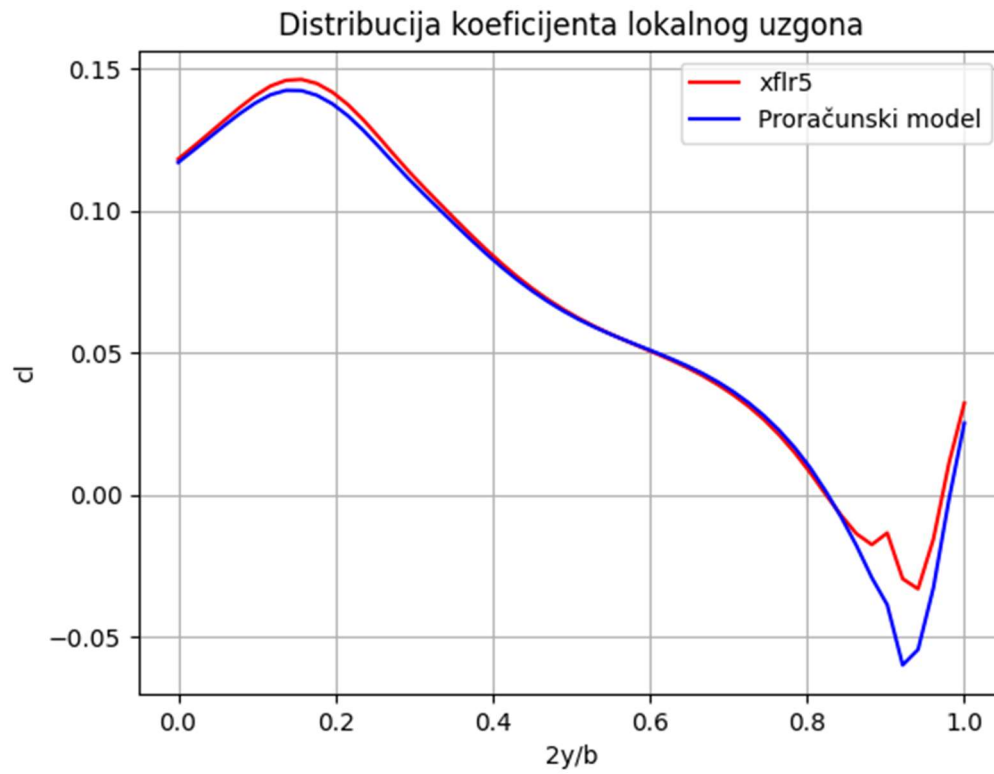


Slika 7.5 Ovisnost koeficijenta momenta o napadnom kutu za inicijalne projektne varijable

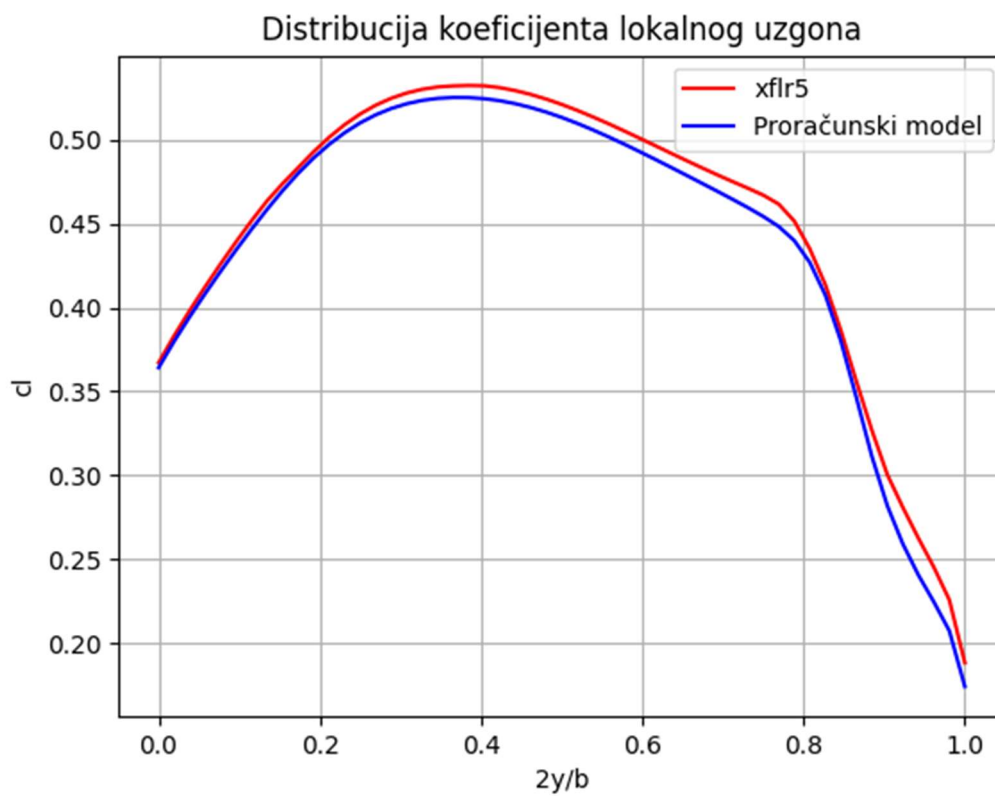
Ovisnost koeficijenta ukupnog momenta oko centra mase o napadnom kutu



Slika 7.6 Ovisnost koeficijenta momenta o napadnom kutu za optimizirane projektne varijable

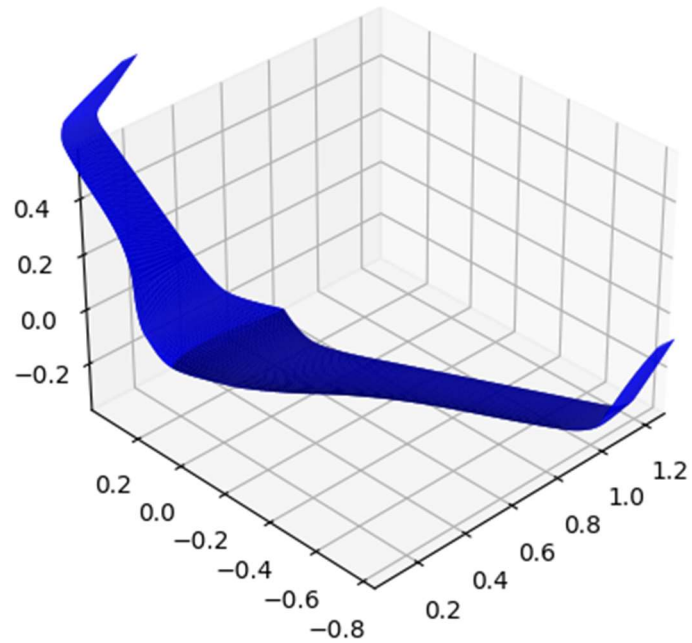


Slika 7.7 Distribucija lokalnog koeficijenta uzgona za inicijalne projektne varijable



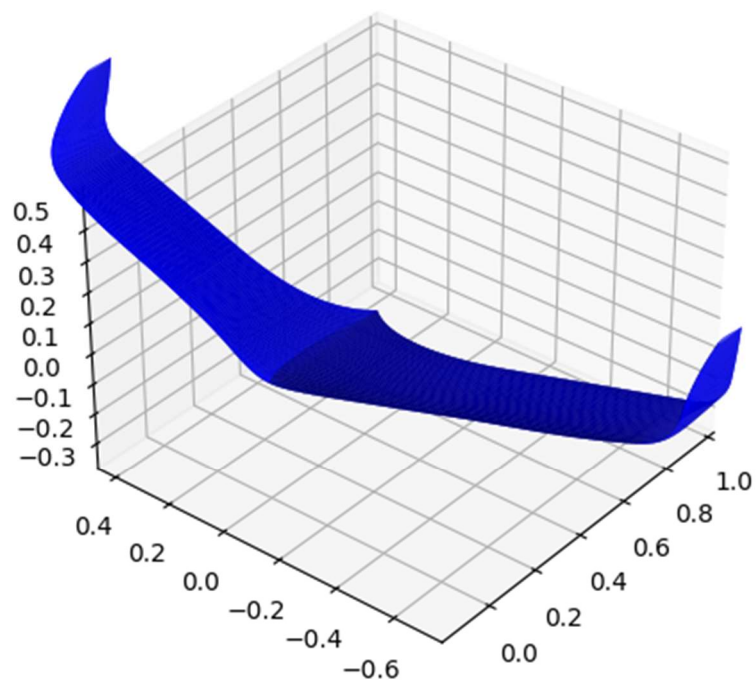
Slika 7.8 Distribucija lokalnog koeficijenta uzgona za optimizirane projektne varijable

Inicijalna geometrija



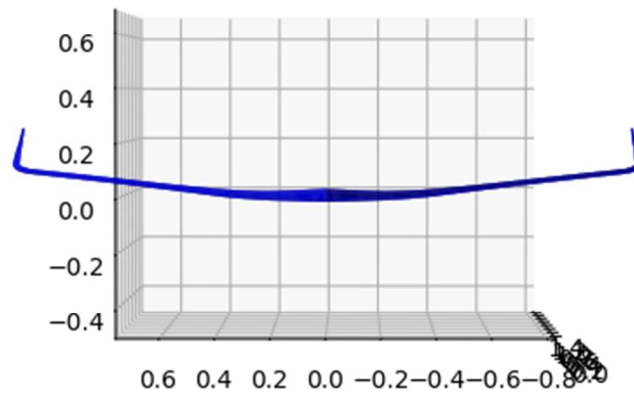
Slika 7.9 Prikaz inicijalne geometrije u izometriji

Optimizirana geometrija



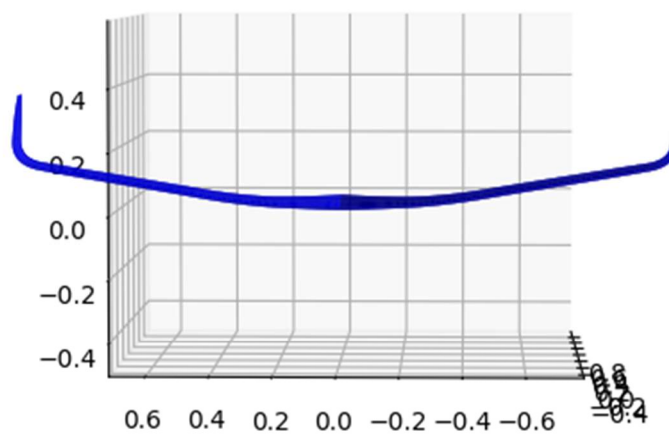
Slika 7.10 Prikaz optimizirane geometrije u izometriji

## Inicijalna geometrija



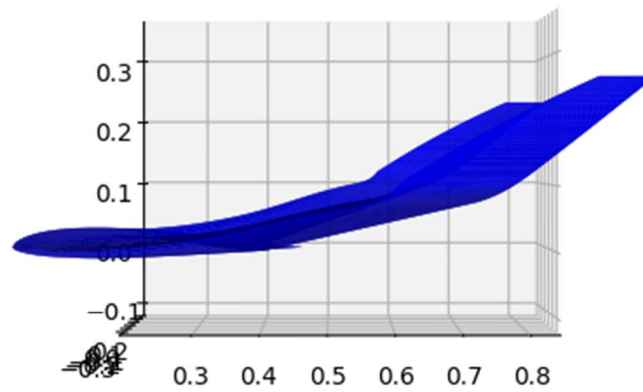
Slika 7.11 Prikaz inicijalne geometrije promatrane sa x osi

## Optimizirana geometrija



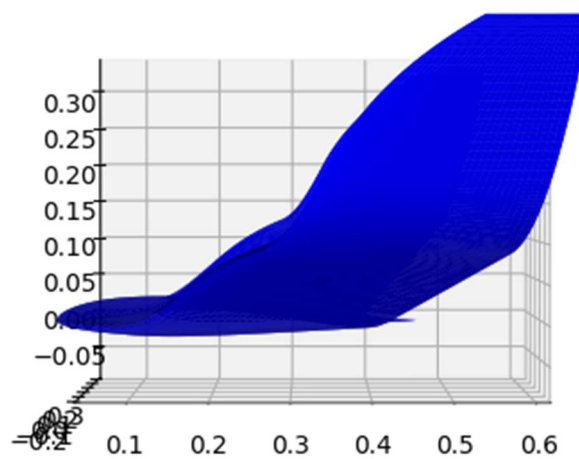
Slika 7.12 Prikaz optimizirane geometrije promatrane sa x osi

## Inicijalna geometrija



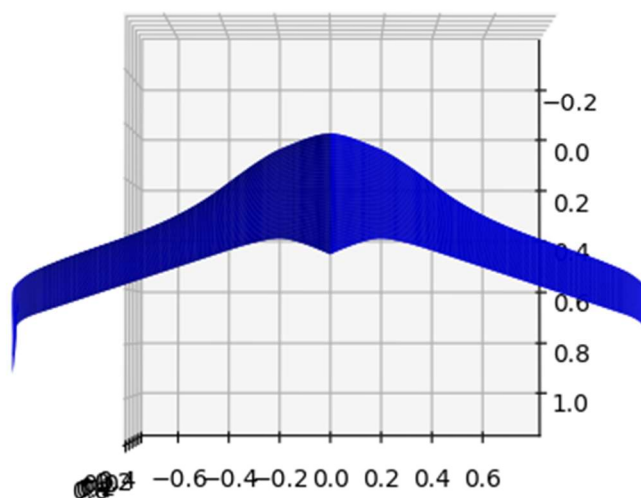
Slika 7.13 Prikaz inicijalne geometrije promatrane sa y osi

## Optimizirana geometrija



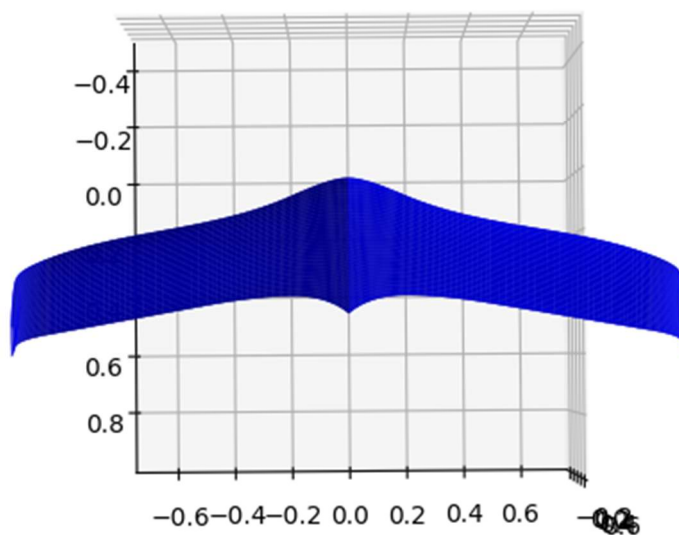
Slika 7.14 Prikaz optimizirane geometrije promatrane sa y osi

## Inicijalna geometrija



Slika 7.15 Prikaz inicijalne geometrije promatrane sa z osi

## Optimizirana geometrija



Slika 7.16 Prikaz optimizirane geometrije promatrane sa z osi

Tablica 7.2 Vrijednosti funkcija cilja za inicijalne i optimizirane projektne varijable

	Inicijalne projektne varijable	Optimizirane projektne varijable
$P_{REQ}$	119.44814247663659 W	19.74283861038242 W

Tablica 7.3 Vrijednosti funkcija jednakosti za inicijalne i optimizirane projektne varijable

	Inicijalne projektne varijable	Optimizirane projektne varijable
$h_1$	-2.07763651e+00 N	-2.40009502e-01 N
$h_2$	6.32327681e-03	1.79021102e-03
$h_3$	-1.56478092e+00 rad <sup>-1</sup>	1.04589151e-02 rad <sup>-1</sup>
$h_4$	-2.07946614e+01 m <sup>-2</sup>	-2.07161764e-07 m <sup>-2</sup>
$h_5$	1.52741044e-01 m <sup>-2</sup>	-6.57127780e-01 m <sup>-2</sup>
$h_6$	2.92414021e-02 m <sup>-2</sup>	-2.62739267e-02 m <sup>-2</sup>
$h_7$	-1.07264365e+01 m <sup>-2</sup>	6.08030688e-05 m <sup>-2</sup>
$h_8$	-5.88269054e+00 m <sup>-2</sup>	-6.39204487e-04 m <sup>-2</sup>

Funkcije od 4. do 8. su nejednakosti od  $g_{10}$  do  $g_{14}$ , pretvorene u jednakosti

Tablica 7.4 Predznaci funkcija nejednakosti za inicijalne i optimizirane projektne varijable

	Inicijalne projektne varijable	Optimizirane projektne varijable
$g_1$	+	+
$g_2$	+	+
$g_3$	-	+
$g_4$	+	+
$g_5$	+	+
$g_6$	+	+
$g_7$	+	+
$g_8$	+	+
$g_9$	+	+
$g_{10}$	+	+
$g_{11}$	+	+
$g_{12}$	+	+
$g_{13}$	-	+
$g_{14}$	+	+
$g_{15}$	+	+
$g_{16}$	-	+
$g_{17}$	+	+
$g_{18}$	+	+
$g_{19}$	-	-
$g_{20}$	-	-
$g_{21}$	-	+
$g_{22}$	-	+



Tablica 7.5 Vrijednosti inicijalnih i optimiziranih projektnih varijabli

	Inicijalne projektne varijable	Optimizirane projektne varijable
$r_1$	5.999999999999999778e-02 m	1.212118702392736419e-01 m
$\chi_{x22}$	5.0000000000000000278e-02 m	3.002540979448584807e-02 m
$\chi_{y22}$	2.1000000000000000200e-01 m	2.893903645096922994e-01 m
$\chi_{z22}$	1.499999999999999944e-02 m	2.532092817684656813e-02 m
$l$	7.500000000000000000e-01 m	5.526300451526838797e-01 m
$r_3$	8.0000000000000001554e-02 m	9.842410951626480442e-02 m
$\chi_{x51}$	2.999999999999999889e-02 m	2.220981541935917666e-02 m
$\chi_{z51}$	2.0000000000000000389e-02 m	7.505306422022105239e-02 m
$\chi_{x52}$	1.7000000000000000122e-01 m	3.175370104448318326e-02 m
$H_W$	1.3200000000000000062e-01 m	1.480942928157230887e-01 m
$c_{22}$	2.500000000000000000e-01 m	2.825696736058823655e-01 m
$k_{22}^c$	-4.29999999999999933e-01	-3.678096352608776348e-02
$c_{32}$	1.6500000000000000078e-01 m	2.542515395553975877e-01 m
$k_{32}^c$	-1.19999999999999956e-01	-2.065141616602504671e-01
$c_{42}$	1.469999999999999918e-01 m	2.229166427256461247e-01 m
$k_{42}^c$	-2.0000000000000000111e-01	-2.247235693665013412e-01
$c_T$	6.999999999999999278e-02 m	1.006699736589035110e-01 m
$k_{52}^c$	-1.000000000000000000e+00	-1.643864836049235612e+00
$\alpha_{22}$	-2.967059728390360196e-02 rad	3.307594968024293609e-03 rad
$k_{22}^\alpha$	-9.999999999999999167e-02 rad/m	3.613377455358954271e-02 rad/m
$\alpha_{32}$	-4.712388980384689396e-02 rad	8.259846514816485824e-03 rad
$k_{32}^\alpha$	-9.999999999999999167e-02 rad/m	1.098496602962950597e-02 rad/m
$\alpha_{42}$	-6.457718232379018597e-02 rad	9.286790672582725253e-03 rad
$k_{42}^\alpha$	-9.999999999999999167e-02 rad/m	1.434798076786332650e-02 rad/m
$\alpha_{52}$	3.490658503988659095e-02 rad	1.345666025076585649e-02 rad
$k_{52}^\alpha$	9.999999999999999167e-02 rad/m	1.080127753875984031e-01 rad/m
$\alpha_\infty$	2 °	4.99913 °
$v_\infty$	31 m/s	13.57175 m/s

Vidi se da inicijalna geometrija, zadovoljava u prihvatljivim granicama sve ključne zahtjeve čime je opravdano uspoređivanje inicijalne i optimizirane geometrije. Provođenjem optimizacije, dobiva se geometrija koja zadovoljava sve ljučne zahtjeve no uz to, potrebno je oko šest puta manje snage za let čime se opravdano može zaključiti da je optimizacija bila uspješna.

Na slici 7.6, vidi se da rezultati dobiveni proračunskim modelom i programom xflr5, odstupaju. Razlog tomu jest činjenica da se pretpostavilo u modelu da se moment mijenja linearno sa napadnim kutom (zanemaren je utjecaj induciranog otpora na ukupni moment). Bez obzira na to, radi se o malim odstupanja pa ne čini nikakav problem.

## 8. ZAKLJUČAK

U ovom radu je prikazan proces optimizacije na primjeru letećeg krila pri čemu su radi jednostavnosti ispušteni krucijalni dijelovi kao što je analiza konstrukcije i dinamike letjelice.

Može se zaključiti da se proces optimizacije primarno sastoji od definiranja geometrije koja će biti podvrgnuta optimizaciji te postavljanja modela koji povezuje projektne varijable sa veličinama koje se žele optimizirati tj. rezultat optimizacije će biti onoliko dobar koliko je dobra geometrija i model kojeg smo definirali.

## LITERATURA

- [1.] Joaquim R.R.A. Martins and Andrew Ning, Engineering Design optimization, Cambridge University Press, 2021.
- [2.] <http://www.mh-aerotools.de/airfoils/index.htm>
- [3.] Virag, Z., Šavar, M., Džijan, I., Mehanika fluida II, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb 2018.
- [4.] Joseph Katz and Allen Plotkin, Low-speed aerodynamics, Cambridge University Press, 2001.
- [5.] Janković, S., Virag, Z., Vrdoljak, M., Aerodinamika I, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb 2016.
- [6.] Karamcheti, K., Principles of Ideal-Fluid Aerodynamics, 1966.
- [7.] Kesić, P., Osnove aerodinamike, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb 2003.
- [8.] Williams J. E. Vukelich S. R. Air Force Flight Dynamics Laboratory (U.S.) & McDonnell Douglas Astronautics Company-St Louis. (1979). The usaf stability and control digital datcom. Air Force Flight Dynamics Laboratory Air Force Wright Aeronautical Laboratories Air Force Systems Command Wright-Patterson Air Force Base ; NTIS distributor
- [9.] <http://www.xflr5.tech/xflr5.htm>
- [10.] Janković, S., Vrdoljak, M., Performanse zrakoplova, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb 2016.
- [11.] Michael D. Greenberg, Foundations of applied mathematics, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1978.
- [12.] <https://numpy.org>
- [13.] <https://scipy.org>