

# Analiza potresne otpornosti konstrukcije vodotornja

---

Oršanić, Mislav

Master's thesis / Diplomski rad

2023

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:235:489537>

Rights / Prava: [Attribution 4.0 International](#)/[Imenovanje 4.0 međunarodna](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2024-06-29**

Repository / Repozitorij:

[Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# DIPLOMSKI RAD

**Mislav Oršanić**

Zagreb, 2023.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# DIPLOMSKI RAD

Mentori:

Izv. prof. dr. sc. Marko Jokić, dipl. ing.

Student:

Mislav Oršanić

Zagreb, 2023.

Izjavljujem da sam ovaj rad izradio samostalno koristeći znanja stečena tijekom studija i navedenu literaturu.

Zahvaljujem se mentoru izv. prof. dr. sc. Marku Jokiću na pruženoj pomoći, uloženom trudu i vremenu kao i savjetovanju tijekom pisanja diplomskog rada.

Također se zahvaljujem obitelji koja mi je pružila podršku tijekom studiranja.

Mislav Oršanić



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
**FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE**



Središnje povjerenstvo za završne i diplomske ispite  
Povjerenstvo za diplomske ispite studija strojarstva za smjerove:  
Procesno-energetski, konstrukcijski, inženjersko modeliranje i računalne simulacije i brodstrojarski

Sveučilište u Zagrebu Fakultet strojarstva i brodogradnje	
Datum	Prilog
Klasa: <b>602 - 04 / 23 - 6 / 1</b>	
Ur.broj: <b>15 - 1703 - 23 -</b>	

## DIPLOMSKI ZADATAK

Student: **Mislav Oršanić**

JMBAG: 0035195763

Naslov rada na hrvatskom jeziku: **Analiza potresne otpornosti konstrukcije vodotornja**

Naslov rada na engleskom jeziku: **Earthquake resistance analysis of water tower**

Opis zadatka:

Vodotoranj je spremnik vode smješten na povišenoj konstrukciji, najčešće izgrađen u nizinskim krajevima gdje nije moguće izgraditi ukopani spremnik vode na povišenom položaju. Služi za spremanje i pričuvu vode, izjednačavanje dnevnih oscilacija potrošnje i postizanje stabilnosti tlaka u vodovodnoj mreži, ali i za spremanje vode za industrijske ili protupožarne namjene. Kao dio ključne infrastrukture u kriznim situacijama, vodotoranj mora zadržati mehanički integritet u slučaju potresa. Iz tog razloga, proračun otpornosti i čvrstoće vodotornja za slučaj potresa sastavni je dio procesa konstruiranja vodotornja, te je regulran nizom nacionalnih i međunarodnih normi.

U ovom radu potrebno je provesti analizu potresne otpornosti konstrukcije vodotornja. Za vodotoranj čija je namjena pričuva vode u nastanjenom području, potrebno je dati pregled najčešće korištenih zavarenih nosivih konstrukcija vodotornja. Za odabranu varijantu konstrukcije, potrebno je provesti analizu naprezanja i pomaka uslijed potresnog opterećenja korištenjem metode konačnih elemenata. Analize je potrebno provesti u vremenskom i frekvencijskom području, i to za prethodno snimljena potresna opterećenja i spektre potresnih opterećenja propisane relevantnim normama.

U radu je potrebno navesti korištenu literaturu i eventualno dobivenu pomoć.

Zadatak zadan:

17. studenoga 2022.

Datum predaje rada:

19. siječnja 2023.

Predviđeni datumi obrane:

23.- 27. siječnja 2023.

Zadatak zadao:

Izv.prof.dr.sc. Marko Jokić

Predsjednik Povjerenstva:

Prof. dr. sc. Tanja Jurčević Lulić

## SADRŽAJ

SADRŽAJ .....	I
POPIS SLIKA .....	II
POPIS TABLICA .....	IV
POPIS OZNAKA .....	V
SAŽETAK .....	VI
SUMMARY .....	VII
1. UVOD .....	1
2. Pregled rješenja čeličnih vodotornjeva .....	7
2.1. Vrste spremnika .....	7
2.2. Vrste nosivih konstrukcija .....	8
2.3. Izbor vrste vodotornja .....	10
3. Numerička analiza .....	11
3.1. Konačni elementi u Abaqusu .....	11
3.1.1. 3D konačni elementi .....	12
3.1.2. Ljuskasti konačni elementi .....	12
3.2. Korišteni konačni elementi .....	13
3.2.1. Ljuskasti četverokutni element drugog reda (S8R) .....	14
3.3. Odabir dimenzija vodotornja .....	15
3.4. Konstruiranje vodotornja .....	15
3.5. Definiranje svojstava modela .....	25
3.5.1. Geometrijska i materijalna svojstva .....	25
3.5.2. Definiranje opterećenja i rubnih uvjeta .....	28
3.5.3. Definiranje module "step" .....	33
3.5.4. Definiranje konačnog elementa i generiranje mreže .....	39
3.6. Ograničenje kompleksnosti analize .....	43
4. Analiza rezultata i usporedba .....	45
4.1. Rezultati vremenske analize .....	45
4.2. Frekvencijska analiza .....	50
5. Zaključak .....	51
6. LITERATURA .....	52

**POPIS SLIKA**

Slika 1.	Vodotoranj u Louisvillu, Kentucky 1860. ....	1
Slika 2.	Spremnici na krovu zgrade, New York .....	2
Slika 3.	Drveni spremnik za vodu, Kansas, 1875. ....	3
Slika 4.	Shooter's Hill vodotoranj, London, 1910.....	3
Slika 5.	Vodotornjevi, Kuwait City .....	4
Slika 6.	Sferni vodotornjevi, Eindhoven Nizozemska .....	5
Slika 7.	Osnovni konačni elementi [2].....	6
Slika 8.	Sferni spremnik Union, SAD .....	7
Slika 9.	Cilindrični spremnik Libby's Water, SAD .....	8
Slika 10.	Hiperboloidni toranj .....	8
Slika 11.	Rešetkasti vodotoranj .....	9
Slika 12.	Ljuskasti toranj.....	10
Slika 13.	Skupine konačnih elemenata u Abaqusu .....	11
Slika 14.	Često korišten 3D elementi [3] .....	12
Slika 15.	Diferencijalni element ljuske [5].....	12
Slika 16.	Elementi za analizu ljuskastih konstrukcija [3] .....	13
Slika 17.	Diskretizacija ljuskastih konstrukcija s ravnim elementima: a) sferna ljuska opisana trokutastim elementima, b) cilindrična ploha s pravokutnim elementima [2] .....	14
Slika 18.	Konačni element S8R [3] .....	15
Slika 19.	Odabir vrste dijela .....	17
Slika 20.	Geometrijska baza za konus i cilindar .....	17
Slika 21.	Zadavanje visine cilindričnog dijela .....	18
Slika 22.	Izgled cilindričnog dijela .....	18
Slika 23.	Veličine kod konstruiranja konusa .....	19
Slika 24.	Izgled konusa i cilindra .....	19
Slika 25.	Standard za torosferične podnica .....	20
Slika 26.	Skica korištena za funkciju revolve s pripadnim kotama .....	20
Slika 27.	Izbornik i uneseni podaci za modeliranje funkcijom revolve .....	21
Slika 28.	Spremnik vodotornja .....	21
Slika 29.	Primjer samostojećeg stupa s konusnim dnom .....	22
Slika 30.	Izbornik za modeliranje ekstrudiranjem i uneseni podatci za konusni dio stupa ..	22
Slika 31.	Stup vodotornja .....	23
Slika 32.	Geometrijski oblik kružne ploče .....	23
Slika 33.	Konstrukcija vodotornja .....	24
Slika 34.	Definiranje svojstva materijala .....	25
Slika 35.	Definiranje vrste presjeka .....	26
Slika 36.	Definiranje debljine i materijala za presjek .....	26
Slika 37.	Dodavanje pomoćnih ravnina .....	27
Slika 38.	Dijeljenje sustava na particije .....	27
Slika 39.	Dodjeljivanje presjeka po dijelovima .....	28
Slika 40.	Definiranje proračunske mase.....	29
Slika 41.	Definiranje veze između spremnika i točkaste mase .....	29
Slika 42.	Veza između mase vode i spremnika .....	30
Slika 43.	Definiranje gravitacijskog opterećenja.....	30
Slika 44.	Definiranje hidrostatskog tlaka .....	31
Slika 45.	Definiranje vrste rubnog uvjeta.....	32

Slika 46.	Odabir stupnjeva slobode .....	32
Slika 47.	Definirani koraci simulacije.....	33
Slika 48.	Parametri za izračun formi vibriranja.....	34
Slika 49.	Korišteni parametri za analizu u vremenskom području .....	35
Slika 50.	Rubni uvjet ubrzanja i tablica amplituda ubrzanja.....	36
Slika 51.	Parametri za definiranje frekvencijske analize .....	37
Slika 52.	Definiranje uzbuđene kao rubnog uvjeta u obliku pomaka.....	38
Slika 53.	Tablica s pomacima za frekvencijsku analizu .....	38
Slika 54.	Definiranje veličine elementa preko udaljenosti čvorova .....	39
Slika 55.	Raspored čvorova po bridovima modela .....	40
Slika 56.	Funkcija "Assign Mesh Controls" .....	40
Slika 57.	Detalj modela s mrežom od 6261 elemenata .....	41
Slika 58.	Odabir elementa za model .....	42
Slika 59.	Provjera ispravnosti mreže .....	43
Slika 60.	Rezultati provjere mreže.....	43
Slika 61.	Spektar elastičnog odziva za 5 vrta tala pri magnitudi 5,5 prema Richteru .....	44
Slika 62.	Prikaz naprezanja po <i>von Misesu</i> .....	45
Slika 63.	Raspodjela naprezanja u kritičnom presjek prije ograničavanja gornjeg naprezanja .....	46
Slika 64.	Raspodjela naprezanja bez brida sa singularnosti.....	46
Slika 65.	Model invertnog njihala.....	47
Slika 66.	Izgled deformiranog stanja .....	47
Slika 67.	Naprezanje u vremenu za uzbuđeno ubrzanjem .....	48
Slika 68.	Zbrojena naprezanja za 2 koraka po <i>von Misesu</i> .....	49
Slika 69.	Pomaci karakterističnih točaka .....	49
Slika 70.	Naprezanja dobivena frekvencijskom analizom .....	50



---

**POPIS TABLICA**

Tablica 1. Eurokodovi.....6

**POPIS OZNAKA**

<b>Oznaka</b>	<b>Jedinica</b>	<b>Opis</b>
$A$	$\text{mm}^2$	Površina poprečnog presjeka ljuska
$h_c$	$\text{mm}$	Visina cilindra
$h_k$	$\text{mm}$	Visina konusa
$D_o$	$\text{mm}$	Vanjski promjer spremnika
$g$	$\text{mm/s}^2$	Gravitacijsko ubrzanje
$\rho$	$\text{kg/m}^3$	Gustoća
$R_{p\ 0,2}$	$\text{MPa}$	Granica tečenja
$V$	$\text{m}^3$	Volumen spremnika
$V_c$	$\text{m}^3$	Volumen cilindra
$V_k$	$\text{m}^3$	Volumen konusa

**SAŽETAK**

U radu je bio zadatak napraviti analizu potresne otpornosti konstrukcije vodotoranja. U uvodu su opisani vodotoranjevi kroz povijest, a i njihove moderne izvedbe. Također smo i naveli važeće regulacije eurokoda prema kojima se ovakve konstrukcije moraju konstruirati. Metoda konačnih elemenata je isto tako kratko opisana. Nakon uvodnog dijela napravljen je pregled zavarenih konstrukcija sa svojim prednostima i manama koje se koriste danas te je odlučeno koja izvedba će se analizirati u radu. U trećem poglavlju je napravljena analiza prvo tako da smo dali pregled mogućih elemenata koji će se koristiti te je odabran najpovoljniji za potrebnu analizu koristeći programski paket Abaqus. U ovom dijelu su odabrane dimenzije vodotoranja koje su potrebne i nakon toga se napravila konstrukcija spremnika i stupa te njihovo vezanje. Unutar analize određena su sva svojstva materijala i presjeka korištenih za konstrukciju. Također unutar analize određeni su svi rubni uvjeti i opterećenja. Zapisi o potresima korišteni u analizi dobiveni su iz baze podataka ESM (Engineering Strong-Motion Database). Nakon što su obje analize provedene napravljena je analiza rezultata gdje smo promatrali naprezanja i pomake u kritičnim presjecima te je na temelju tih rezultata izveden i zaključak.

Ključne riječi: vodotoranj, potresna otpornost, potres, numerička analiza, Abaqus, metoda konačnih elemenata,

---

**SUMMARY**

The task of this paper was to make seismic resistance analysis of water tower structure. The introduction describes water towers throughout history but also modern version of them. Also, eurocode was mentioned to which these types of structures have to be design by. Finite element method was also briefly described. After the introduction, summary of welded structures in use today was given stating pros and cons of each one and the choice which one will be used was made. Third chapter is numerical analysis which was made by choosing element which will be used after listing possible options for Abaqus software. In this part dimensions of water tower are chosen and after that the design of water tower has been made containing type of connection between tank and column. During analysis all material and section properties used for design are defined. Also, all boundary conditions and loads are defined during process of making analysis. Seismic records are provided from ESM (Engineering Strong-Motion Database). After we made both types of analysis where the focus was on stress and displacement in critical sections, the result of both analysis were made and compared. In the end conclusion was made.

Key words: water tower, seismic resistance, earthquake, numerical analysis, Abaqus, finite element method

## 1. UVOD

Vodotoranj je visinski spremnik vode izgrađen na vrhu potpornog tornja. Najčešće se spremnici izgrađuju ukopani na prirodnoj uzvisini, a gdje to nije moguće kao u nizinskim područjima kao riješene koristi se vodotoranj. Vodotoranj ima manji volumen zapremnine od klasičnih spremnika jer je izgradnja vodotornja višestruko skuplja od ukopanih spremnika po jedinici volumena. Vodotornjevi se koriste još od antičkih vremena, a u obliku kakvog poznajemo danas se pojavljuju sredinom 19. stoljeća. U početku najčešći korisnik je bila željeznica koja je postavljala spremnike uz prugu na određenim mjestima kako bi parne lokomotive mogle napuniti spremnike vode za nastavak putovanja. Kao primarna svrha vodotornjevi se grade zbog održavanja pritiska vode u vodoopskrbnom sustavu gradova. Prednost velikih spremnika je ta da se mogu puniti u satima kada je struja jeftinija odnosno preko noći pa tokom dana koristi zapreminu za regulaciju tlaka umjesto da se pumpe pale i gase svaki put kada neki korisnik troši vodu. Takvo konstantno pražnjenje i punjenje spremnika ima i funkciju sprječavanja zamrzavanja vode u spremniku.



**Slika 1. Vodotoranj u Louisvillu, Kentucky 1860.**

Funkcije vodotornjeva su razne može se koristiti za pohranu pitke vode gdje onda također ima funkciju i filtracije vode odnosno njene pripreme za konzumaciju. Također može se koristiti za pohranu vode za gašenje požara kao i za pohranu tehničke vode kao što je bio slučaj sa željeznicama ili iz drugih industrijskih razloga. Kako su se vodotornjevi počeli pojavljivati sve više u gradovima tako su i arhitekti počeli sve više davati svoj doprinos novim konstrukcijama od kojih su neki danas ostali kao kulturni spomenici i zauvijek promijenili vizure gradova kao npr. spremnici koji su izgrađeni na krovovima visokih nebodera u New Yorku gdje nema mjesta da se izgradi samostalni vodotoranj a i nema potrebe jer već imamo visoke građevine samih nebodera. Također je dugo vremena bilo obavezno na svim zgradama u New Yorku višim od 6 katova da ima svoj spremnik na krovu.



**Slika 2. Spremnici na krovu zgrade, New York**

Danas se sve rjeđe koriste iz ekonomskih razloga pa su neki od njih dobili nove funkcije kao što su restorani, tornjevi za panoramsko osmatranje ili čak u nekim slučajevima rezidencijalne zgrade.

### **1.1 Vrste konstrukcija vodotornjeva**

U počecima korištenja vodotornjeva za civilnu upotrebu najčešći proizvođač spremnika su bile tvrtke koje su izrađivale bačve tako su i prvi vodotornjevi bili izrađeni od drveta koji bi

na početku korištenja gubili vodu dok drvo ne upije vodu i nabubri i tako stvori nepropusnu membranu koja kasnije zadržava vodu u spremniku bez gubitaka.



**Slika 3. Drveni spremnik za vodu, Kansas, 1875.**

Na slici 3. vidimo primjer jednog od najstarijih vodotoranja očuvanih do danas je vodotoranj u Kansasu izgrađen davne 1875. za potrebe željeznice za punjenje parnih lokomotiva vodom. Sami spremnik je izrađen od drvenih dasaka koje su stegnute metalnim obručima znači jednako kako se izrađuju bačve za pohranu tekućina. Postolje mu je napravljeno od čeličnih profila u rešetkastoj izvedbi. Kao druga opcija u tim davnim vremenima pristupalo se zidarskim tehnikama korištenjem cigle za izradu potpornih stupova.



**Slika 4. Shooter's Hill vodotoranj, London, 1910.**

Na slici 4. vidimo vodotoranj izgrađen u neogotičkom stilu korištenjem cigle. Tu vidimo doprinos arhitekta da sama građevina bude što bolje uklopljena u izgled naselja, a ovakvi uspješni primjeri kao što je Shooter's Hill vodotoranj čak i doprinose boljoj vizuri samog naselja i dan danas su ostavljeni da služe kao spomenik kulturnoj baštini. Naravno ovakvi projekti su bili prilika arhitektima da ostave svoj potpis na izgledu grada pa su često i nepotrebno skupi bili i funkcija je stavljena u drugi plan. Također na drugoj strani spektra možemo vidjeti brutalne građevine posvećene samo funkciji ne mareći za umjetnički dojam. To su uglavnom armirano betonske građevine ogromnih volumena.



**Slika 5 . Vodotornjevi, Kuwait City**

## **1.2 Moderne čelične konstrukcije**

U ovom dijelu će biti prikazane konstrukcije tornjeva koje su najisplativije za postavljanje jer se lakše postavi veći broj, a i jeftinije su za proizvest. Postoji više vrsta samih tornjeva, a isto tako i raznih izvedbi spremnika. Zajedničko im je što su u svim tim izvedbama proračunavani i osmišljeni na principu ljuskastih konstrukcija i koristiti će se u ovom radu za provedbu analize potresne otpornosti .





**Slika 6. Sferni vodotornjevi, Eindhoven Nizozemska**

### **1.3 Eurokodovi**

Eurokodovi su skup propisa danih od strane Europske Unije koji specificiraju na koji način se mora provoditi konstruiranje građevina unutar Europske Unije. Počeo se provoditi 1975. godine kako bi se ujednačio standard i olakšao proračun samim inženjerima. Do danas je razvijeno 10 eurokodova svaki za pojedino područje graditeljstva i konstruiranja. Ovaj rad obuhvaća i za vodotoranj pri potresu su najvažniji eurokod 1, 2 i 3. U eurokodu 1 su obuhvaćeni problemi svakog oblika konstrukcija kao gravitacije odnosno težine, opterećenje uslijed vjetera i snijega kao i opterećenje tekućinom također bitno za ovu analizu. Eurokod 3 sadrži skup pravila vezanih za čelične konstrukcije gdje se spominje proračuni ljuskastih konstrukcija koje su česte kod tankova svih oblika. Također definirane su konstrukcije koje su izložene vatri odnosno visokim temperaturama. Eurokod 8 definira propise za konstruiranje i izgradnju zgrada u potresnim područjima. Njegova svrha je osigurati da u slučaju potresa:

- ljudski životi su zaštićeni;
- šteta je umanjena;
- građevine za civilnu zaštitu ostanu funkcionalne.

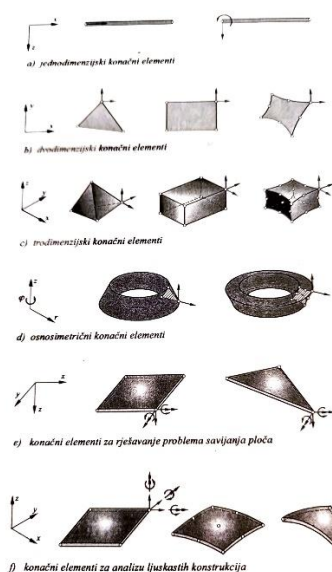
Ovaj posljednji uvjet je nama posebno važan jer u slučaju katastrofe kao što je veliki potres kakav je zadesio Hrvatsku vodoopskrba je od krucijalne važnosti za spašavanje unesrećenih i saniranje štete.

Tablica 1. Eurokodovi

Ime norme	Opis
Eurokod 0 (EN 1990)	Osnove projektiranja konstrukcija
Eurokod 1 (EN 1991)	Djelovanja na konstrukcije
Eurokod 2 (EN 1992)	Projektiranje betonskih konstrukcija
Eurokod 3 (EN 1993)	Projektiranje čeličnih konstrukcija
Eurokod 4 (EN 1994)	Projektiranje spregnutih čelično-betonskih konstrukcija
Eurokod 5 (EN 1995)	Projektiranje drvenih konstrukcija
Eurokod 6 (EN 1996)	Projektiranje zidanih konstrukcija
Eurokod 7 (EN 1997)	Geotehničko projektiranje
Eurokod 8 (EN 1998)	Projektiranje potresne otpornosti konstrukcija
Eurokod 9 (EN 1999)	Projektiranje aluminijskih konstrukcija

#### 1.4 Metoda konačnih elemenata

Metoda konačnih elemenata je numerička metoda koja se koristi za rješavanje problema kontinuiranih sustava. Metoda se temelji na fizičkoj diskretizaciji kontinuuma gdje se promatrani kontinuum s beskonačnim brojem stupnjeva slobode zamjenjuje s diskretnim modelom međusobno povezanih elemenata s ograničenim brojem stupnjeva slobode. Ti elementi su međusobno povezani u čvorove. Stanje u elementima kao pomak, naprezanje, rotacija ili deformacija se opisuje interpolacijskim formulama. Te funkcije moraju zadovoljavati određene uvijete kako bi diskretizirani model bio što sličniji kontinuiranom u svojem ponašanju. [2]



Slika 7. Osnovni konačni elementi [2]

## 2. Pregled rješenja čeličnih vodotornjeva

Iako je kroz povijest postojalo mnogo izvedbi čeličnih vodotornjeva do danas je ostalo u upotrebi njih nekoliko za koje se ispostavilo da su najbolji ili najisplativiji no i oni imaju svoje prednosti i mane koje će se opisati kroz sljedeće odlomke.

### 2.1. Vrste spremnika

Spremnici u današnje vrijeme najčešće dolaze u dva oblika, a to su sferni i cilindrični spremnici. Oba se smatraju ljuškastim konstrukcijama i definirana su u eurokodu 3. Spremnici se izrađuju u veličinama od par desetaka kubnih metara pa do par tisuća kubnih metara korisnog volumena. Spremnik sfernog oblika kojeg vidimo na slici 8. je pogodan jer koristi manje materijala za pohranu istog volumena od cilindričnog.



Slika 8. Sferni spremnik Union, SAD

Kao nedostatak sfernih spremnika je svakako kompliciranost izvedbe i velika preciznost izrade pojedinih segmenata. Također kao i cilindrični spremnik mora imati konusno dno za spoj sa postoljem u većini slučajeva sto umanjuje prednosti koje ima sferni dio. Zbog najmanje utrošenog materijala ovo je najčešći oblik uzvišenih spremnika i često se može vidjeti po Hrvatskoj jer je nekad osječki OLT radio takve. Cilindrični spremnik iako koristi više materijala

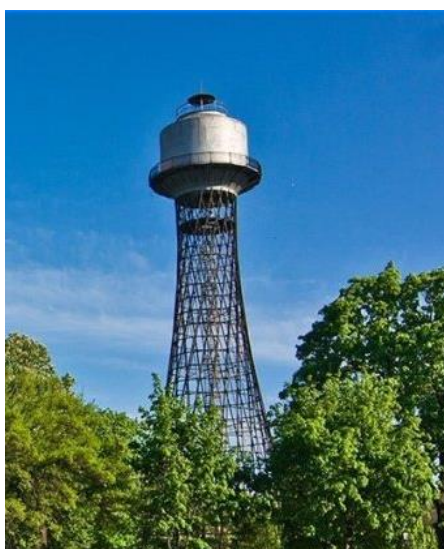
od sfernog našao je svoju upotrebu iz razloga jer je jednostavnija konstrukcija cilindričnog spremnika naspram sfernog.



**Slika 9. Cilindrični spremnik Libby's Water, SAD**

## **2.2. Vrste nosivih konstrukcija**

Nosive konstrukcije se pojavljuju također u raznim oblicima i nema najboljeg rješenja već se razmatraju razni faktori poput cijene, mase spremnika i vode, pristupačnosti mjestu postavljanja kao i mogućnosti montaže na gradilištu. Tri izvedbe konstrukcija prevladavaju po učestalosti korištenja. To su hiperboloidna, rešetkasta i ljuskasta konstrukcija. Hiperboloidna konstrukcija ima odlična mehanička svojstva.



**Slika 10. Hiperboloidni toranj**

Kao što vidimo na slici 10. hiperboloidni tornjevi imaju kompleksnu strukturu koja dobiva svoj zakrivljeni izgled iako se koriste ravni elementi za konstrukciju. Ovo konstrukcijsko rješenje osmislio je ruski inženjer Vladimir Šuhov. Ovakva konstrukcija ima i svoje ekonomske prednosti jer koristi manje materijala za postizanje potrebnih mehaničkih svojstava, a također doprinosi estetskom izgledu građevine. Mana ovakvih konstrukcija je očita jer već sami vizualni dojam govori o kompliciranosti izvedbe i iako se koriste jednostavni elementi ovo je pravi izazov za montažu i ispravno spajanje svih dijelova na samoj lokaciji. U današnje vrijeme ovakve izvedbe su vrlo pogodne za rashladne tornjeve zbog svojeg oblika pomaže strujanju zraka i poboljšavanju hlađenja. Nadalje imamo rešetkastu izvedbu koja ima neka pozitivna svojstva kao i hiperboloidna što se tiče mehaničkih svojstava i korištenja jednostavnih dijelova. Sa gledišta projekta to je najjednostavniji oblik i konstrukcija okvira može biti proizvoljna (pravokutan, trokutasti...).



**Slika 11. Rešetkasti vodotoranj**



Vjerojatno i najjednostavnija izvedba koja je ekonomski isplativa jer se vrlo lako može proizvoditi u većim serijama od prethodne dvije izvedbe je ljuskasta izvedba odnosno cilindrični stup na koji se spaja spremnik najčešće s konusno bazom preko vezne ploče kako bi se osiguralo membransko naprezanje u spremniku što je i uvjet za ljuskaste konstrukcije.



**Slika 12. Ljuskasti toranj**

Kod cilindričnih stupova postoje dvije najčešće varijante izvedbe, a to su samostojeći i vezani vodotoranj. Vezani vodotoranj ima najčešće šest spojeva čeličnih užeta koji su vezani u podnožje tornja. Prednost samostojećeg vodenog tornja je ta što ima slobodan koristan prostor oko stupa.

### **2.3. Izbor vrste vodotornja**

Uzimajući u obzir prednosti i mane raznih izvedbi kao i potrebnih kapaciteta Odlučujemo se za izvedbu cilindričnog spremnika sa samostojećim stupom. Najsličnija izvedba se može vidjeti na slici 9. Ovakva izvedba je jednostavna za proizvest s malo dodatnih radova na samom gradilištu gdje će biti postavljena. Mana je jedino transport jer se moraju prevesti već proizvedeni veliki segmenti, ali uzimajući u obzir da se uglavnom radi o nizinskim krajevima pristupačnost mjestu montaže ne predstavlja problem.

### 3. Numerička analiza

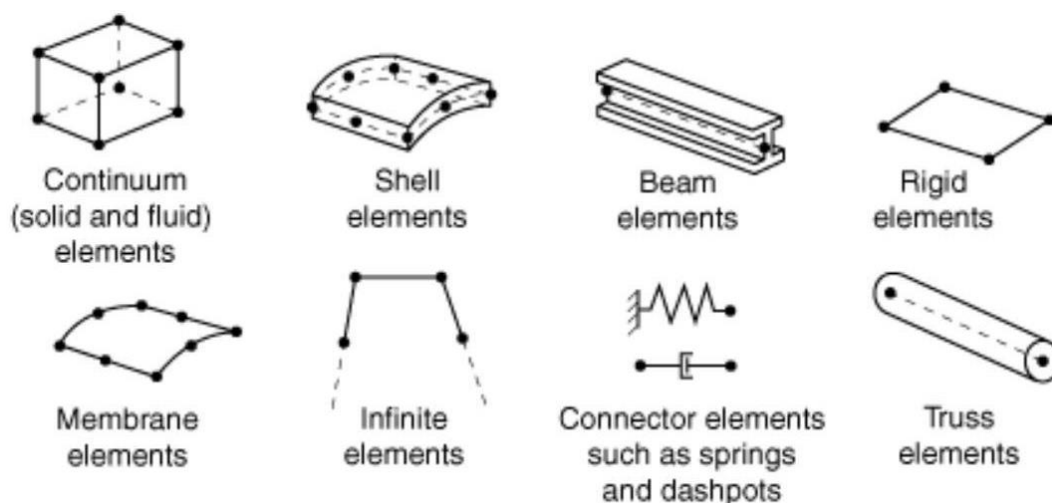
Kako je opisano već u uvodu za analizu potresne otpornosti konstrukcije koristiti će se metoda konačnih elemenata. Osnovni tipovi konačnih elemenata su:

- jedno dimenzijski konačni element
- dvodimenzijski konačni element
- trodimenzijski konačni element
- osnosimetrični konačni element
- konačni elementi za rješavanje problema savijanja ploče
- konačni element za analizu ljuskastih konstrukcija

Abaqus je računalni paket koji koristi metodu konačnih elemenata i računalom podržano inženjerstvo za rješavanje raznih inženjerskih problema. Proizvod je napravila francuska tvrtka Dassault systems. Na tržištu je od 1978. godina i s vremenom postaje jedan od najkorištenijih paketa za rješavanje problema metodom konačnih elemenata. Abaqus/CAE je sučelje unutar s programskog paketa Simulia koja omogućuje modeliranje 3D modela i sklopova

#### 3.1. Konačni elementi u Abaqusu

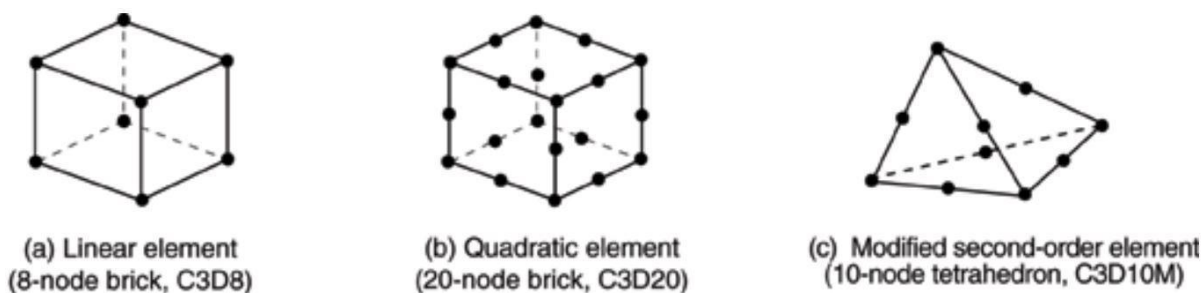
Abaqus u svojoj bazi konačnih elemenata sadrži opsežan broj različitih elemenata i tako pruža veliki broj alata kojima se inženjeri mogu poslužiti kako bi što bolje diskretizirali sami model koji analiziraju. Glavna razlika koju imaju elementi je geometrija koju moraju opisivati i na slici 13. vidimo glavne skupine konačnih elemenata koje nalazimo u programskom paketu.



Slika 13. Skupine konačnih elemenata u Abaqusu

### 3.1.1. 3D konačni elementi

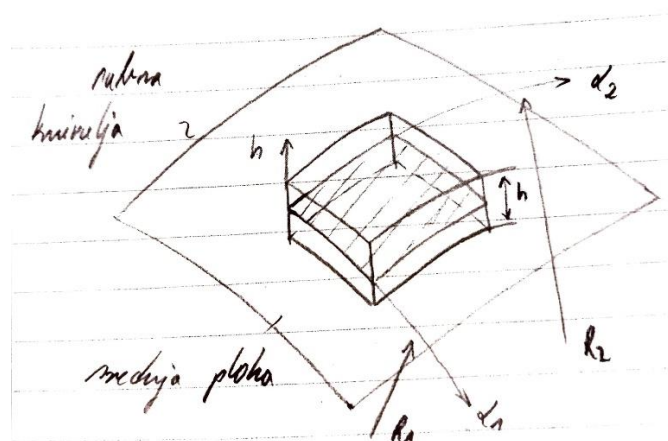
3D elementi su standardni volumni elementi u Abaqusu. Pojavljuju se u obliku prizme slika 14. a), trostrane prizme slika 14. b), i tetraedra slika 14. c). Za računanje s volumenskim elementima imamo više čvorova, a s tim i više nepoznanica koje imaju veće opterećenje za računalo.



Slika 14. Često korišten 3D elementi [3]

### 3.1.2. Ljuskasti konačni elementi

Iz teorije ljusaka znamo da je ljuska je dio kontinuuma koji je omeđen s dvije zakrivljene plohe, a razmak između ploha je mali u odnosu na ostale dimenzije. Razmak između ploha predstavlja debljinu ljuske koja može biti konstantna ili promjenjiva. Ploha koja raspolavlja debljinu naziva se srednja ploha. Svaka ljuska može biti zatvorena ili omeđena rubom. Srednja ploha, debljina i rub u potpunosti određuju geometriju ljuske.

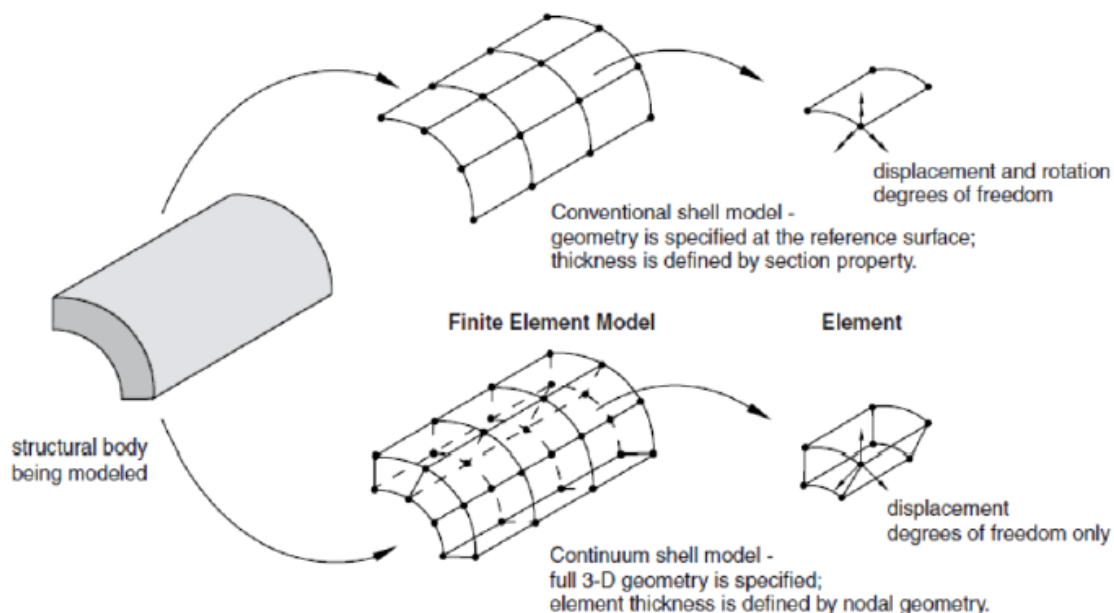


Slika 15. Diferencijalni element ljuske [5]

Konvencionalni elementi korišteni za diskretizaciju ljuskastih modela koriste uvjet da je debljina puno manja od ostalih veličina tako da geometriju definiraju na srednju plohu i



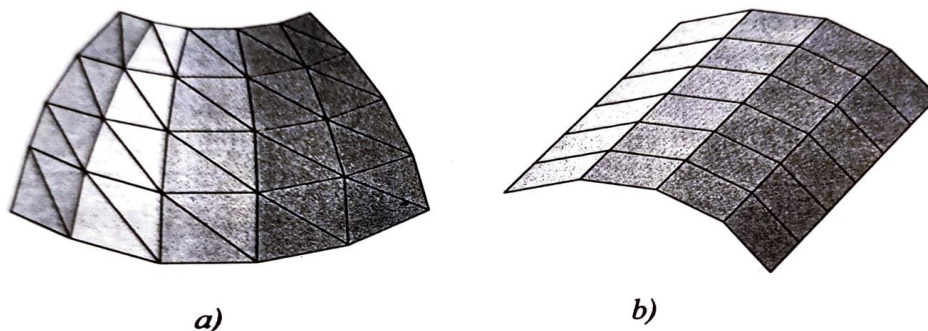
naknadno dodaju debljinu ljuske. Ovakvi elementi (Slika 16.) koji se koriste u programskim paketima imaju translacijske i rotacijske stupnjeve slobode.



Slika 16. Elementi za analizu ljuskastih konstrukcija [3]

### 3.2. Korišteni konačni elementi

Prilikom korištenja metode konačnih elemenata u programskom paketu Abaqus važno je pravilno izabrati konačne elemente koji odgovaraju modelu kojeg analiziramo jer Abaqus koliko je moćan alat toliko je i opasan ako ne znamo što radimo, jer za njega vrijedi pravilo "garbage in, garbage out". Za ovaj slučaj koristit će se isključivo ljuskaste elemente jer je konstrukcija sastavljena od ljuskastih odnosno tankostijenih elemenata poput tankih ploča.



**Slika 17. Diskretizacija ljuskastih konstrukcija s ravnim elementima: a) sferna ljuska opisana trokutastim elementima, b) cilindrična ploha s pravokutnim elementima [2]**

U analizi konstrukcije koristit će se isključivo elementi drugog reda koji unatoč većem broju čvorova za isti broj elemenata ne predstavljaju problem za moderna računala kojima za stvaranje velikih mreža koje sadrže tisuće elemenata nekada i na stotine tisuća elemenata, treba svega nekoliko sekundi. Odabran je četverokutni element SR8.

### **3.2.1. Ljuskasti četverokutni element drugog reda (S8R)**

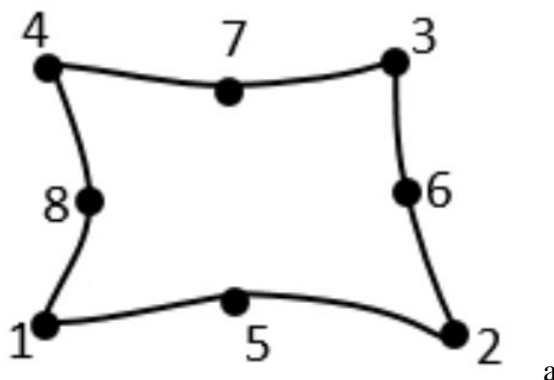
Četverostruki ljuskasti element drugog reda s reduciranom integracijom S8R je dvostruko zakrivljeni element za analizu ljuskastih konstrukcija koji sadrži osam čvorova. Između čvorova u vrhovima postoji dodatan čvor na sredini. Svaki čvor ima šest stupnjeva slobode tako da svaki element ima ukupno 48 stupnjeva slobode po elementu. Iako svojim svojstvima odgovara problemu koji se analizira, ovi elementi mogu loše konvergirati rješenju ako je mreža loše napravljena ili nije dovoljno usitnjena na mjestima singulariteta.

Značenje skraćenice S8R:

S – opterećena ljuska (eng. Shell)

8 – broj čvorova

R – reducirana integracija



Slika 18. Konačni element S8R [3]

### 3.3. Odabir dimenzija vodotornja

U dogovoru s profesorom dogovorene su vrijednosti koje mora zadovoljavati spremnik svojim volumenom i visinom zbog dovoljnog pritiska vode:

- 1) Volumen  $V = 200 \text{ m}^3$
- 2) Visina korisnog dijela spremnika  $h = 30 \text{ m}$

To su vrijednosti koje zadovoljavaju većinu današnjih potreba za vodotornjevima na području Republike Hrvatske koje gdje su primarne zadaće vezane za poljoprivrednu upotrebu i za vodoopskrbnu mrežu u manjim sredinama. Također ovakvi primjeri su se nekada izrađivali u Osječkoj ljevaonici željeza i tvornici strojeva (OTL).

### 3.4. Konstruiranje vodotornja

Kako je bilo određeno u poglavlju 2.3. radit će se vodotoranj sa samostojećim stupom i cilindričnim spremnikom. Prvo ćemo odrediti dimenzije spremniku jer nam on određuje koliki nam je stup potreban za postizanje željene visine stupca vode.

#### 3.4.1 Konstruiranje spremnika

Zadani volumen spremnika vode je  $200 \text{ m}^3$ . Spremnik će se sastojati od tri dijela:

- Cilindrični
- Konusni
- Pokrovni

Pokrovni dio neće biti ispunjen jer se kod konstruiranja tornjeva nikada ne projektira tako da voda bude do samoga vrha spremnika. Pregledom postojećih rješenja odabiremo kut konusnog dijela od  $45^\circ$ . Također konusni dio na dnu mora imati otvor promjera jedan metar zbog

priključka cijevi na vodoopskrbni sustav. Duljina promjera je određena prema postojećim rješenjima jer to znači manju ulaznu cijenu čim ne tražimo specijalne izvedbe i iznosi 8 m. S obzirom da konus ima 3 puta manji volumen po visini od cilindra za istu površinu baze tako će i biti podijeljen volumen jer će imati istu bazu a zbog stranica konusa pod  $45^\circ$  visina će također biti slična koja će ipak biti nešto veća kod konusnog dijela zbog otvora za cijevi. Visina cilindrično dijela je 3 m.

Volumen cilindričnog dijela:

$$V_c = A_c \cdot h_c = 16\pi \cdot 3 = 150,8 \text{ m}^3 \quad (3.1)$$

$$A_c = \pi r^2 = \pi \cdot 4^2 = 16\pi = 50,27 \text{ m}^2 \quad (3.2)$$

Gdje je:

$V_c$	-	volumen cilindra
$A_c$	-	površina baze cilindra
$h_c$	-	visina cilindra
$r$	-	promjer cilindra

Volumen konusnog dijela:

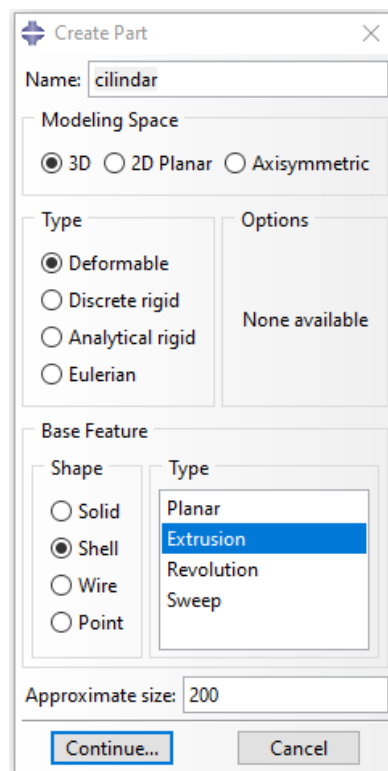
$$V_k = \frac{A_k \cdot h_k}{3} = \frac{16\pi \cdot 3,5}{3} = 58,6 \text{ m}^3 \quad (3.3)$$

$$A_k = \pi r^2 = \pi \cdot 4^2 = 16\pi = 50,27 \text{ m}^2 \quad (3.4)$$

Gdje je:

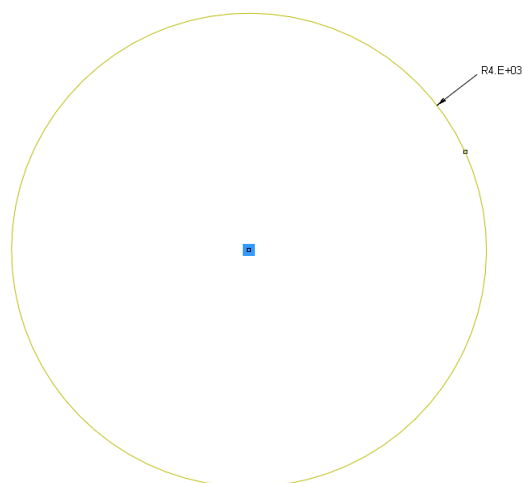
$V_k$	-	volumen konusa
$A_k$	-	površina baze konusa
$H_k$	-	visina konusa
$r$	-	promjer baze konusa

Kada zbrojimo dva dijela koja su predviđena za pohranjivanje vode dolazimo do ukupnog volumena  $V_{uk} = 201,17 \text{ m}^3$  što odgovara zadanim uvjetima. Sa odabranim i izračunatim vrijednostima se ide u izradu pojedinih segmenata u Abaqus/CAE sučelje.



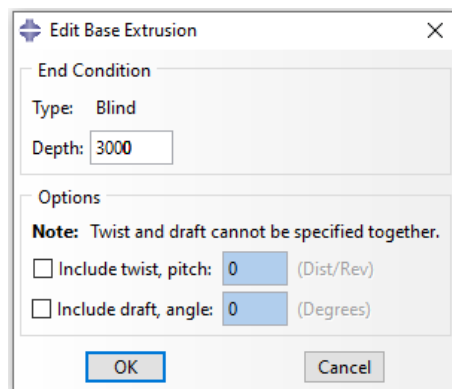
**Slika 19. Odabir vrste dijela**

Kao što vidimo na slici 19. odabran je 3D model deformabilnog tipa oblika ljuska (engl. Shell). Za dobivanje Ovakav tip ćemo i iskoristiti za konusni dio. Koristit ćemo se značajkom ekstruzije (engl. extrusion) za dobivanje oblika ljuske što predstavlja. Nakon odabira moramo nacrtati skicu koja će biti baza cilindra i konusa.

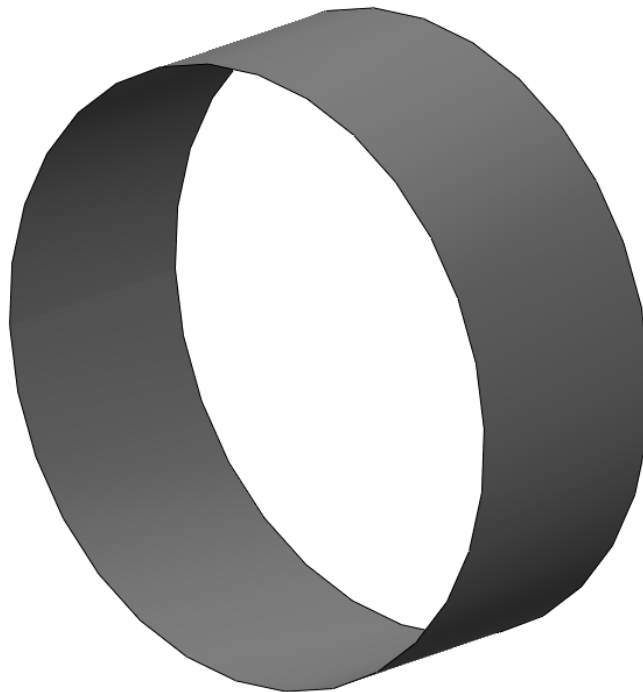


**Slika 20. Geometrijska baza za konus i cilindar**

Nakon ucrtavanja baze postavljamo visinu cilindra.

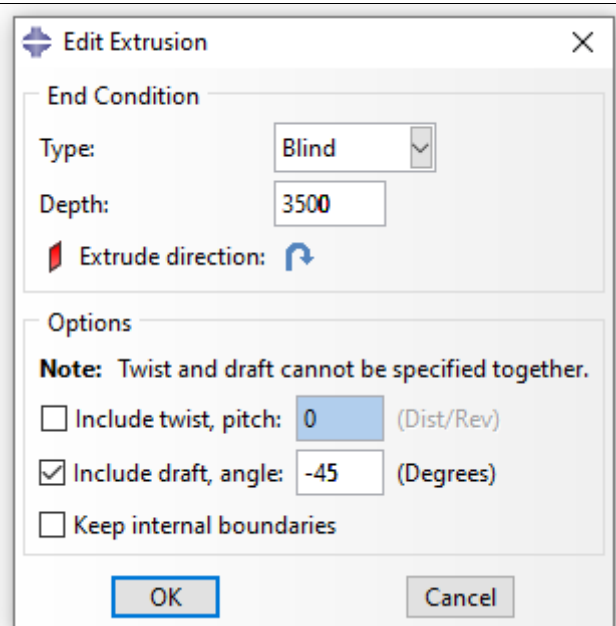


Slika 21. Zadavanje visine cilindričnog dijela

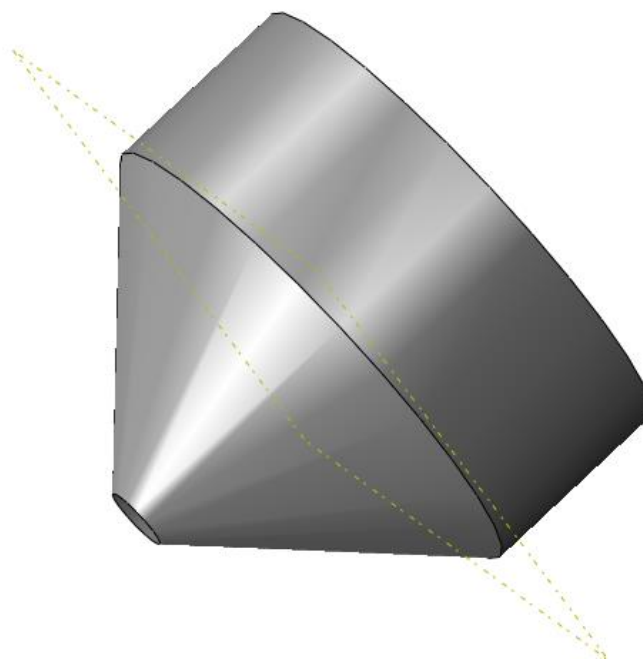


Slika 22. Izgled cilindričnog dijela

Nakon dobivanja cilindričnog dijela ponavljamo postupak za konusni dio ali moramo prije toga dodati novu ravninu na jedan kraj cilindra kako bi mogli nastaviti ekstruziju od ruba cilindra. Jedina razlika će biti ta što u koraku gdje zadajemo visinu dijela zadajemo i nagib stranica prema unutra pod kutom  $45^\circ$  (engl. draft).

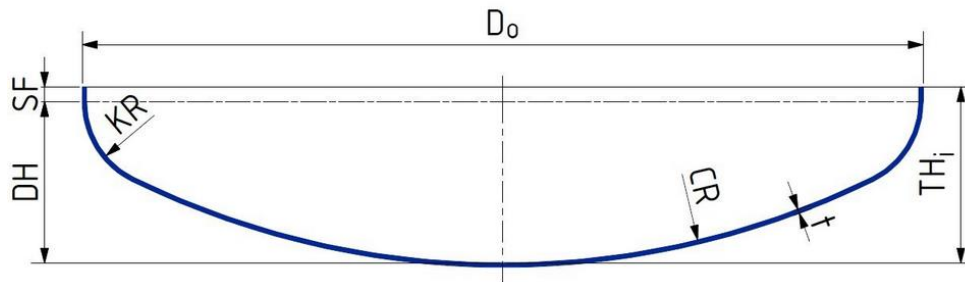


Slika 23. Veličine kod konstruiranja konusa



Slika 24. Izgled konusa i cilindra

Kod dizajniranja pokrova koristili smo se načelima konstruiranja cijevnih torosferičnih podnica prema DIN 28011. Prema standardu DIN 28011 podnica ima ravni dio i dva luka s različitim polumjerima.

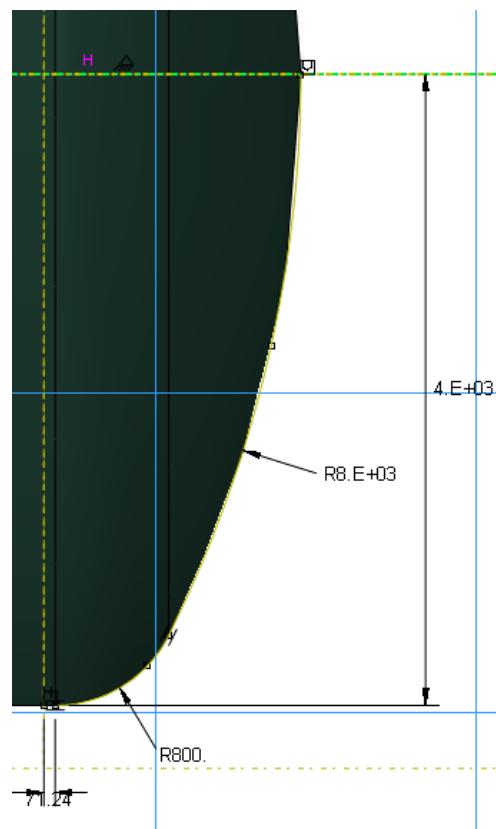


Slika 25. Standard za torosferične podnica

Gdje je:

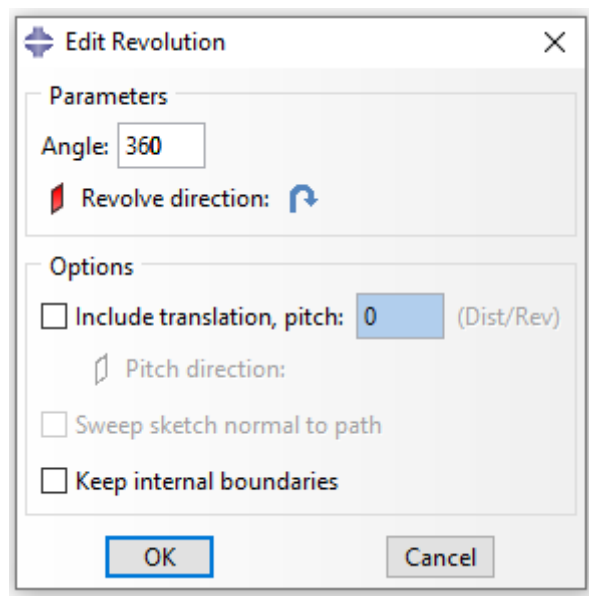
$D_o$	-	Vanjski promjer
KR	-	Manji polumjer zakrivljenosti
CR	-	Veći polumjer zakrivljenosti
SF	-	Duljina ravnog dijela
$TH_i$	-	Visina podnice
t	-	Debljina stjenke

Kod modeliranja podnice nećemo koristiti ekstruziju kao kod prethodna dva nego ćemo koristiti značajku "revolve" koja je prikladna za dijelove s promjenjivom geometrijom po visini.



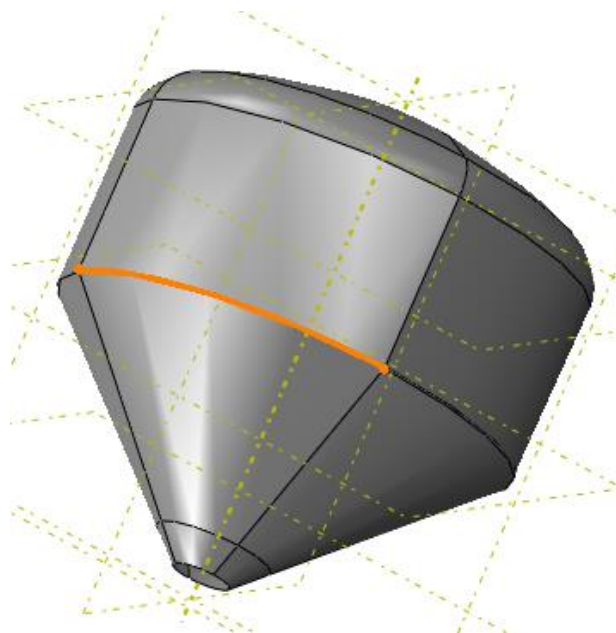
Slika 26. Skica korištena za funkciju revolve s pripadnim kotama





Slika 27. Izbornik i uneseni podaci za modeliranje funkcijom revolve

S poklopcem su izmodelirani svi dijelovi spremnika i na slici 28. možemo vidjeti izgled spremnika.



Slika 28. Spremnik vodotornja

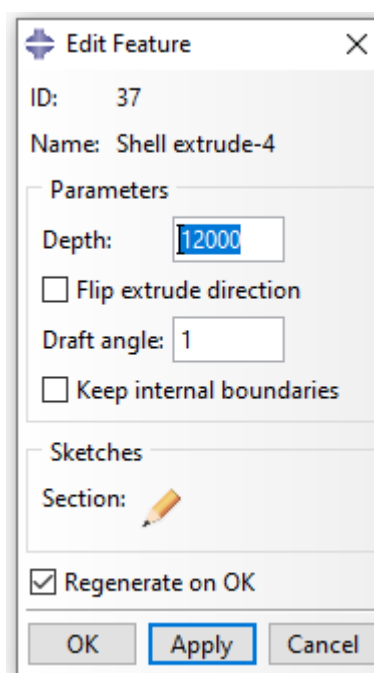
### 3.4.2. Konstruiranje stupa vodotornja

Kako je u prethodnim poglavljima odabran samostojeći stup moramo osmisli konstrukciju koja zadovoljava uvjet čvrstoće bez pomoći čelične užadi za stabilnost. Pregledom postojećih rješenja kod već realiziranih projekata odlučujemo se za izvedbu od dva dijela. Jedan će biti ravni stup okruglog presjeka, a drugi će biti stup s konusnom stranicom.

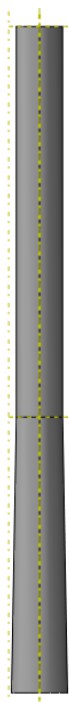


**Slika 29. Primjer samostojećeg stupa s konusnim dnom**

Prema ustaljenoj praksi konusni dio će biti kraću od ravnog dijela. Ravni dio će biti dugačak 17 m, a konusni dio će biti 12 m. Promjer stupa je 2 m što je standardna veličina za vodotornjeve ovog tipa i može se naći u više slučajeva kod stupova koje je proizvedio OTL d.d. Modeliranje u Abaqusu provodimo jednako kao i za spremnik pomoću kružnog presjeka i funkcije extrude. Jedina razlika je ta što će kod konusnog dijela biti nagib prema van u odnosu na konus na spremniku.



**Slika 30. Izbornik za modeliranje ekstrudiranjem i uneseni podatci za konusni dio stupa**

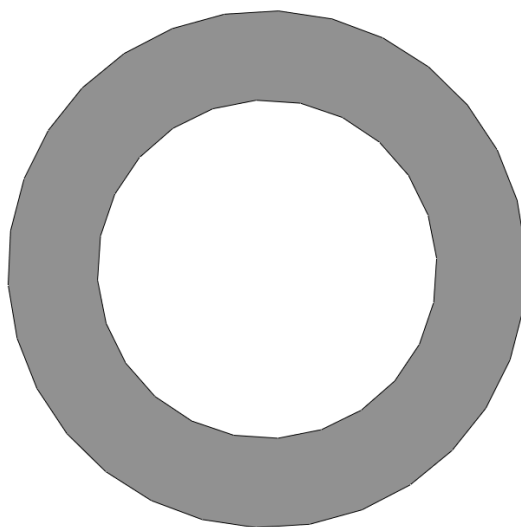


**Slika 31. Stup vodotornja**

Nakon što smo dobili i stup vodotornja moramo riješiti problem vezanja spremnika za stup kako bi se osiguralo membransko stanje naprezanja u ljusci.

### **3.4.3. Veza između spremnika i stupa**

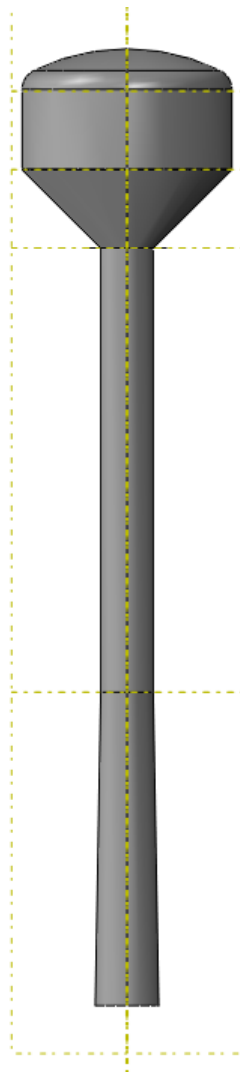
Razmatranjem opcija koje su ponuđene na tržištu i s obzirom na naš slučaj odabire se slučaj gdje se spremnik i stup povežu preko tanke okrugle ploče. To rješenje je vrlo jednostavno za izraditi, a isto tako pokazalo se kao jako učinkovito i moglo bi se dodati elegantno.



**Slika 32. Geometrijski oblik kružne ploče**

Kod ovakvog oblika tijela kod modeliranja koristimo značajku "shell planar" jer se radi o tankoj ploči sa provrtom. Unutarnji promjer je 2 m kao i kod stupa kako bi stup i ploča bili pozicionirani na istoj visini konusa. Vanjski promjer je 3 m. Konstrukcija se spaja zavarivanjem.

Od ostalih dijelova konstrukcija vodotornja mora imati dva vrlo bitna otvora. Jedan je na vrhu spremnika i služi za protok zraka kako bi se održavao atmosferski tlak u spremniku. Jer kada bi razina vode opadala, a mi nemamo ovu mogućnost izjednačavanja tlaka stvorio bi se podtlak i umanjio bi korisnost vodotornja kojeg i radimo da imamo što veći tlak u cijevima. Drugi otvor se nalazi na dnu stupa i služi nam kao otvor za održavanje i pristup cijevima unutar stupa. Dalje imamo penjalice s odmorištima, ali to nije u opsegu ovog rada pa će se preskočiti modeliranje istih.



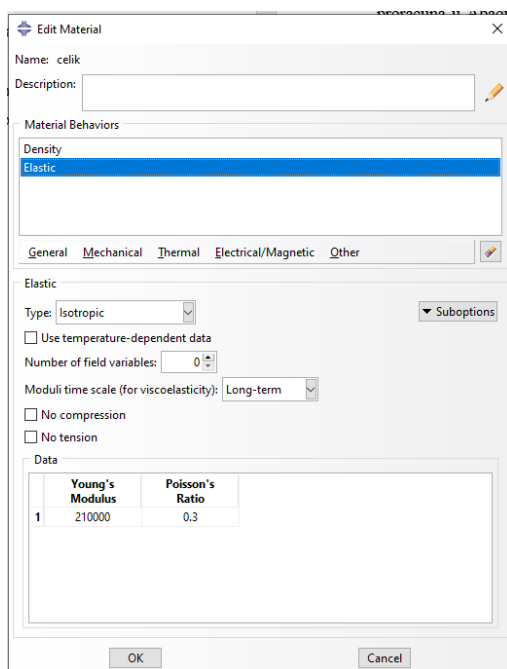
**Slika 33. Konstrukcija vodotornja**

### 3.5. Definiranje svojstava modela

Nakon što smo definirali oblik vodotornja koristeći značajku ljuska unutar paketa abaqus moramo unesti i druge bitne podatke za proračun i analizu konstrukcije. Ta svojstva se sastoje od raznih materijalnih i geometrijskih značajki vezanih za samu konstrukciju. Također u ovom dijelu definiramo opterećenja i rubne uvijete koji djeluju na konstrukciju. Također važan dio proračuna u Abaqusu je vezan za modul step u kojem će biti definirana vrsta analize kao i različita opterećenja koja se pojavljuju kao npr. gravitacija i za ovaj rad ključan dio s potresnim opterećenjima.

#### 3.5.1. Geometrijska i materijalna svojstva

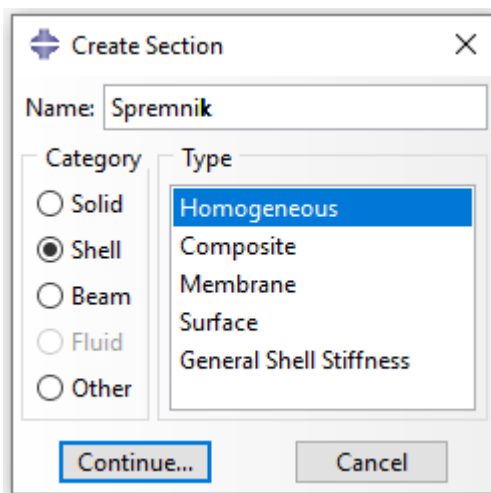
Kada imamo gotov oblik konstrukcije koju promatramo krećemo s definiranjem svojstava konstrukcije koju promatramo. Prvo svojstvo koje se definira kod svake analize su materijali korišteni u analizi. U našem modelu su svi dijelovi od čelika pa moramo definirati samo jedan materijal za cijeli sklop.



Slika 34. Definiranje svojstva materijala

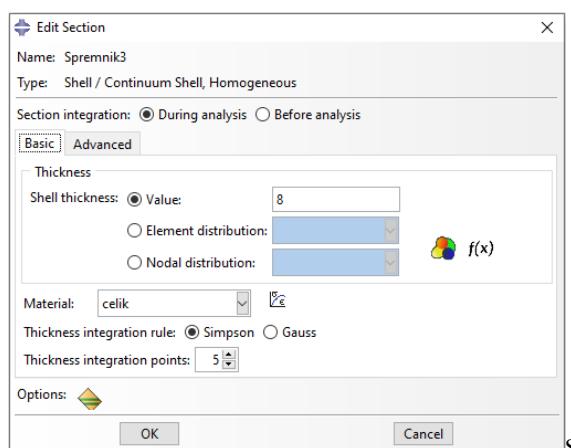
Kao što se vidi na slici 34. uneseni su podatci za čelik gdje je Youngov modul 210000 MPa (jer zbog konzistentnosti jedinica imamo  $\text{N/mm}^2$ ) i za Poissonov koeficijent je stavljeno 0,3. Gustoća čelika je također potrebna osim svojstava za elastičnost i ona iznosi  $7,85 \cdot 10^{-9} \text{ t/mm}^3$ . Nakon definiranja materijala slijedi definirati presjeke za sve tipove dijelova i svaka debljina stjenke mora imati svoj presjek definiran. U našem slučaju imat ćemo tri različita presjeka jer

nam se konstrukcija sastoji od 3 različite debljine stjenke. Prvo definiramo kakve je vrste dio za koji se definira presjek i kakvog je tipa materijal.



**Slika 35. Definiranje vrste presjeka**

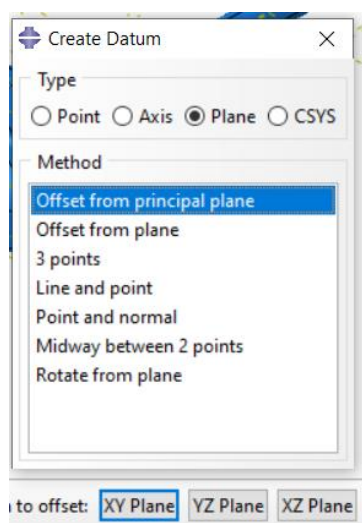
Kao što se vidi na slici 35. za spremnik je definirano da se radi o ljusci koja ima homogena svojstva. Ovaj korak će biti identičan i za preostala 2 presjeka.



**Slika 36. Definiranje debljine i materijala za presjek**

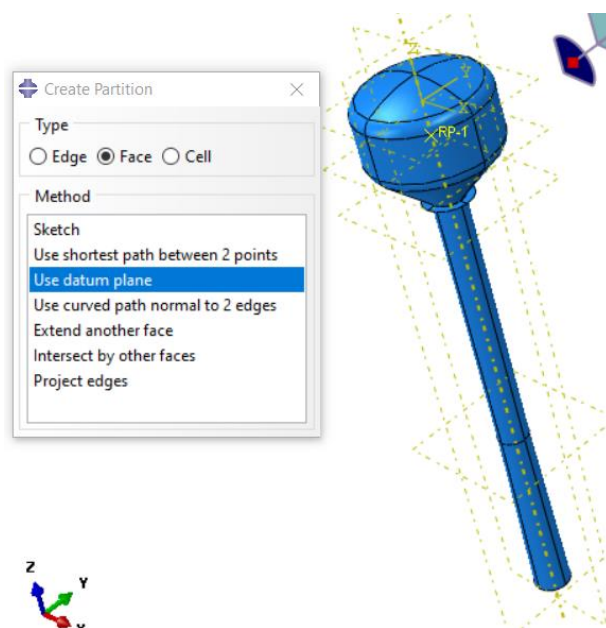
Sljedeći izbornik slika (36) je za definiranje debljine ljuske i odabir materijala za presjek. Prisjetimo se kada smo definirali izgled dijelova nismo zadavali nikakvu debljinu nego je geometrija za dijelove koji su ljuskastog oblika zadana ravninom, a sada će dobiti i treću dimenziju odnosno debljinu. Za spremnik kao što vidimo je uzeta debljina 8 mm, a materijal je ranije zadani čelik. U ovom izborniku imamo opcije definirati još i druge karakteristike poput vrste integracije, integracijskih točaka kao i drugih naprednih opcija no za ovaj slučaj ostalo ostavljamo kako je već unaprijed zadano. Sa znanjem o modelima u Abaqusu koje smo ranije radili i načinu generiranja mreža problem okruglih dijelova i četverokutnih elemenata je očit pogotovo na vrhu spremnika i kod kružne ploče. Kod ovog problema najčešće i najelegantnije

rješenje je ručno podijeliti model na četvrtine po visini. Za takvo dijeljenje koristimo alat "Datum" kako bi dodali nove pomoćne ravnine u sustav. Dodajemo ravnine koje su istovjetne ravninama XZ i YZ.



**Slika 37. Dodavanje pomoćnih ravnina**

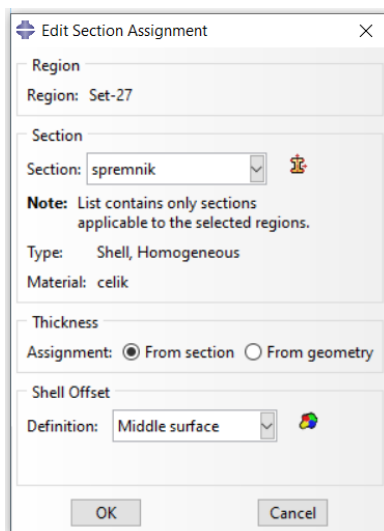
Kada su potrebne ravnine dodane našem dijelu koristimo opciju "Partition" i pomoću nje se sustav prvo dijeli na dva dijela pa zatim na četiri.



**Slika 38. Dijeljenje sustava na particije**

Kao što vidimo na slici 38. korišten je tip podjele po stranicama (engl. Face) te smo koristili prethodno postavljene pomoćne ravnine. Ovakva podjela će omogućiti lakše umrežavanje na sredini krova spremnika gdje umjesto zahtjevne geometrije koju bi morao generator mreže napraviti dobivaju se dijelovi koji imaju stranice po pravim kutom. Sada kad je podijeljen sustav

na manje segmente mogu se dodijeliti presjeci koje smo definirali u prethodnim koracima za svaki generirani segment koji je dobiven korištenjem particija pomoću ravnina.



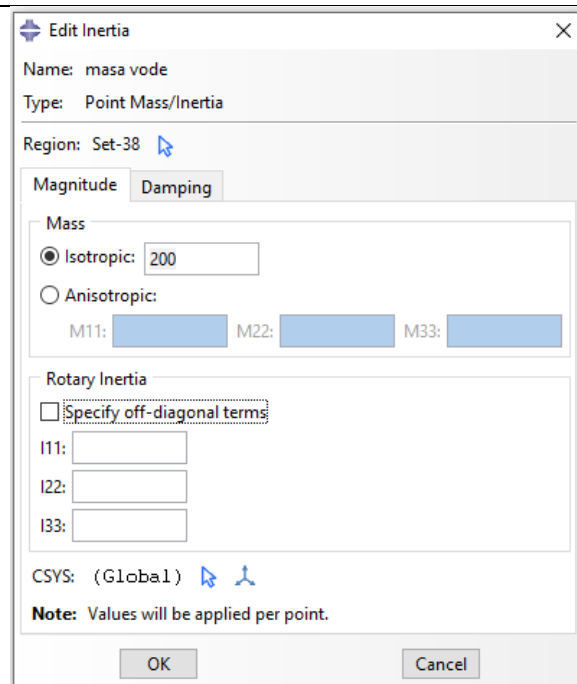
**Slika 39. Dodjeljivanje presjeka po dijelovima**

Presjeci se dodjeljuju tako da se prvo označi dio kojem želimo dodijeliti presjek i zatim nam se otvara izbornik kao na slici 39. U tom dijelu se izabire odgovarajući presjek za skup stranica koje smo označili. Za debljinu uzimamo podatak iz presjeka jer geometrijom nismo odredili, a za Shell offset stavljamo da se debljina jednako raspodijeli s obje strane jer smo definirali srednju plohu na našem dijelu.

### **3.5.2. Definiranje opterećenja i rubnih uvjeta**

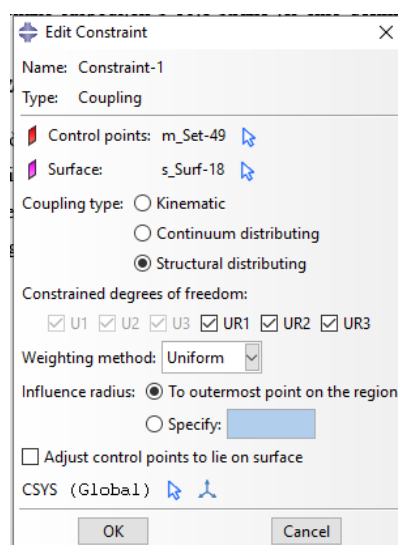
U modulu *Assembly* se definira referentna točka na mjestu gdje bi bilo težište vode kada bi spremnik bio pun. Toj točki ćemo pridružiti inženjersku značajku inercije. Inženjerske značajke su alat koji nam olakšava zadavanje nekih osnovnih pojava kako bi se lakše modeliralo dijelove i olakšao proračun samog modela.





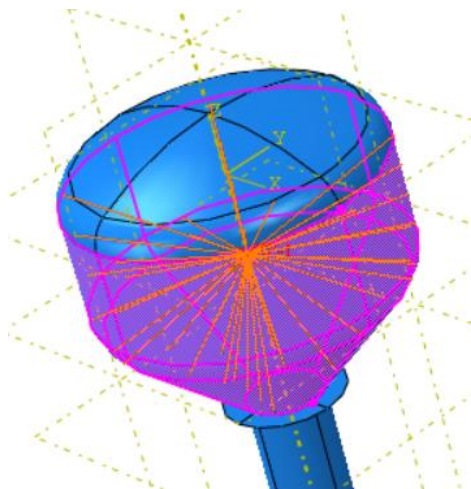
**Slika 40. Definiranje proračunske mase**

Konzistentna jedinica mase u ovom modelu je tona pa unosimo izotropsku masu od 200 tona za slučaj kada nam je spremnik ispunjen do maksimuma svog kapaciteta. Također u ovom dijelu se upisuju i momentni otpori kako bi nam ta točkasta masa ipak realnije predstavljala tijelo koje zamjenjuje. Sljedeći korak je napraviti vezu između točke koja nam predstavlja masu cijele vode u spremniku i samog spremnika jer trenutno točka lebdi u zraku i nema utjecaja na spremnik u nikakvom obliku. Tu dolazimo do korištenja veze odnosno moramo koristiti značajku *Create constraint*. Vrstu veze definiramo kao *Coupling* i odabiremo površine konusnog i cilindričnog dijela jer oni preuzimaju masu te vode.



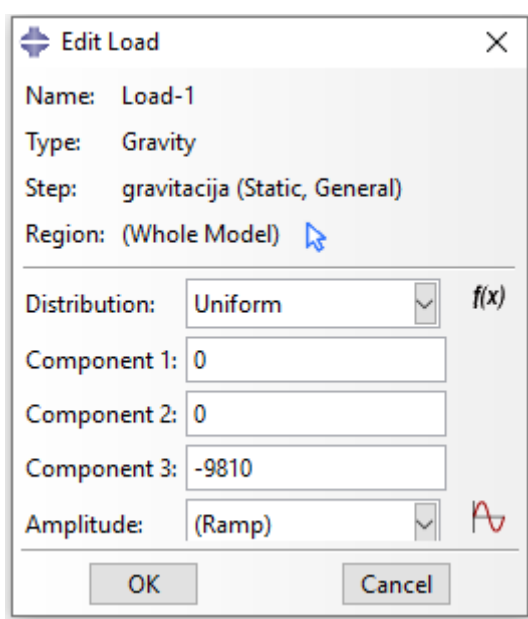
**Slika 41. Definiranje veze između spremnika i točkaste mase**

Kao što se vidi na slici 41. odabrane su i kontrolna točka odnosno u ovom slučaju točkasta masa i površine s kojima međudjeluje. Također kao tip spojke izabrali smo strukturiranu distribuciju.



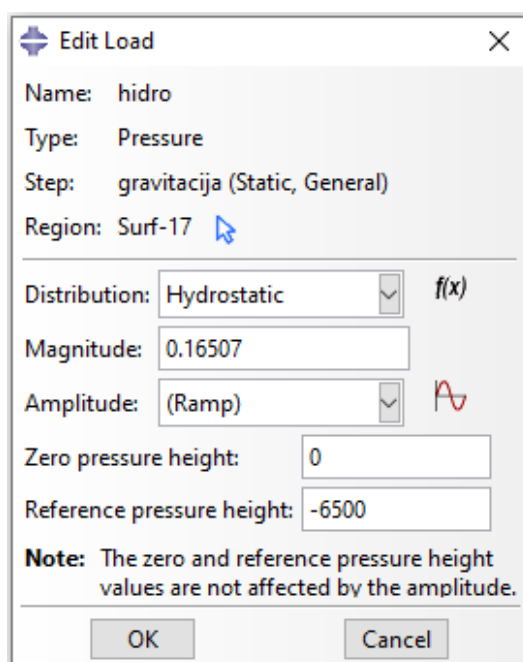
**Slika 42. Veza između mase vode i spremnika**

Vidimo na primjeru (slika 42.) kako ovakav tip veze radi veliki broj veza između točke i okolnih površina te moramo paziti kod takvog pristupa jer *Abaqus* ima ograničen broj veza koji može izgenerirati odnosno proračunati s njima. Nakon postavljene veze nastavljamo s definiranjem ostalih značajki i nastavlja se u modulu *Load* gdje će se definirati opterećenja gravitacije i hidrostatskog tlaka kao i potrebni rubni uvjeti. Prvo će se postaviti uvjet gravitacije kod kojeg moramo paziti da nam je u pravom smjeru i pravog iznosa jer mjerna jedinica nije uobičajenih  $m/s^2$  već se radi o  $mm/s^2$ . Gravitacija se nalazi pod kategorijom *Mechanical*.



**Slika 43. Definiranje gravitacijskog opterećenja**

Kako je prikazano na slici 43. za tip opterećenja smo odabrali gravitacijsko (engl. Gravity). Što nam odmah stavlja da je mjesto djelovanja cijeli model. Raspodjela je jednolika (engl. Uniform) i pošto je u modelu os Z ta koja nam predstavlja visinu za vrijednost sile upisujemo 9810 u negativnom smjeru. Ovo je zato jer ne mora uvijek biti model biti postavljen da mu je visina u Z smjeru. Drugo opterećenje koje će biti postavljeno u ovom modulu je hidrostatski tlak. I za njega imamo već pripremljen predložak s obzirom da je to česta pojava kod ovakvih konstrukcija. Isto kao i gravitacija spada u grupu mehaničkih opterećenja, za tip se odabire tlak (engl. Pressure).



Slika 44. Definiranje hidrostatskog tlaka

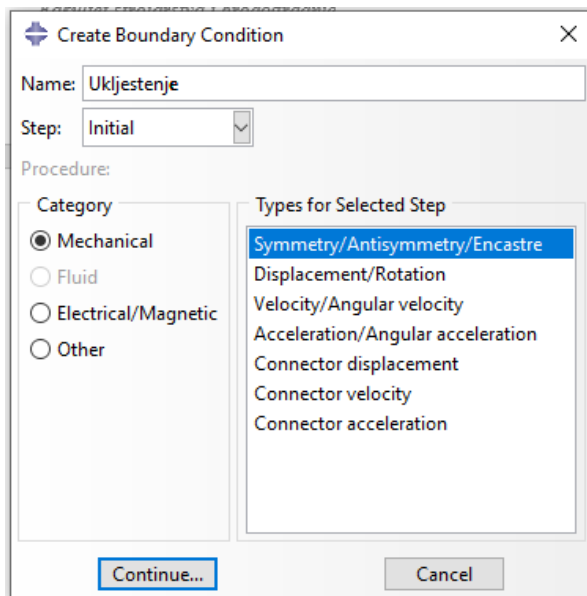
Kod definiranja hidrostatskog tlaka bitno je prije odrediti koordinate na kojima se nalaze gornja razina gdje je tlak jednak nuli i referentna točka koja nam predstavlja točku s najvećim tlakom. Tlak smo izračunali pomoću formule za hidrostatski tlak.

$$p = \rho \cdot g \cdot h = 10^{-9} \cdot 9810 \cdot 6500 = 0,16507 \text{ MPa} \quad (3.5)$$

Gdje je:

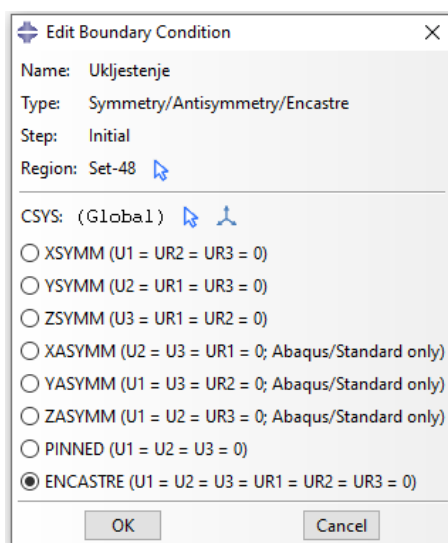
p	-	hidrostatski tlak
$\rho$	-	gustoća vode
g	-	gravitacijsko ubrzanje
h	-	visina vode

Nakon što smo definirali sva opterećenja u modulu *Load* preostaje nam jedino još definirati rubne uvijete unutar ovog modula. S obzirom da smo odabrali samostojeći vodotoranj imamo samo jednu vezu s tlom preko stupa pa će se to sada i definirati kroz rubni uvjet uklještenja.



**Slika 45. Definiranje vrste rubnog uvjeta**

Kod rubnih uvjeta nam je vrlo bitno da ispravno odredimo vrstu rubnog uvjeta jer neki imaju slična svojstva što se tiče stupnjeva slobode, ali nama u ovom slučaju treba uklještenje tako da ćemo isključivo taj uvjet postaviti. Kategorija je mehanička (engl. Mechanical), a pod tip stavljamo uvjet gdje se nalazi uklještenje (engl. Encastré). Nakon toga odabiremo područje gdje će se uklještenje primijeniti. U ovom modelu to je cijeli donji rub stupa.

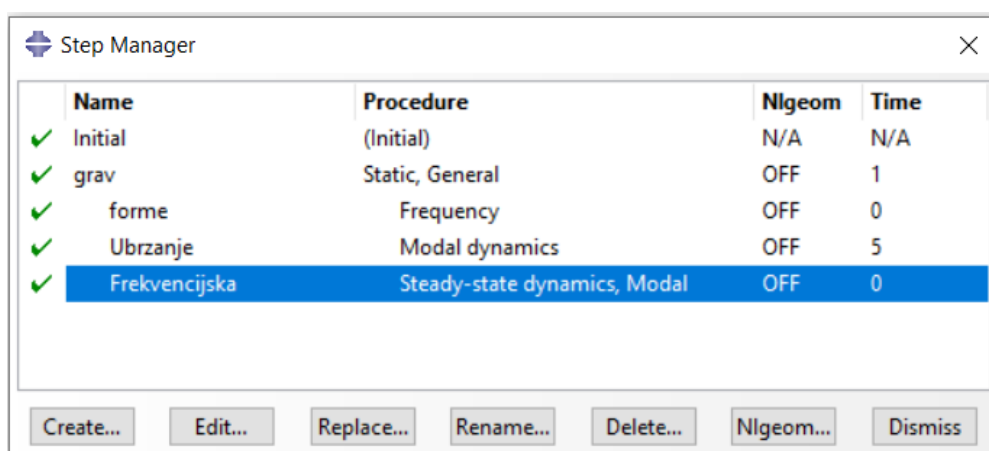


**Slika 46. Odabir stupnjeva slobode**

Kako vidimo na slici 46. nama je za potrebe uklještenja potrebno da su nam svi stupnjevi slobode jednaki nuli. Također bitna stavka je postaviti ovaj rubni uvjet u inicijalni korak kako bi se to svojstvo propagiralo na sve ostale korake koje ćemo kasnije dodavati.

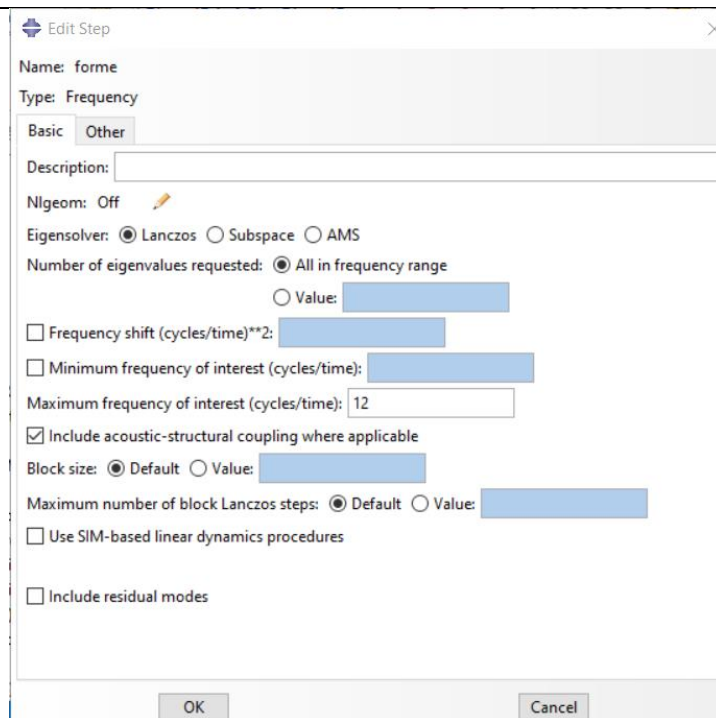
### 3.5.3. Definiranje module "step"

Cilj svakog modela je da što bolje prikaže objekte iz stvarnosti u virtualnom okruženju. Tako je i cilj svake simulacije da uz određena pojednostavljena prikaže sustav što realnije onom stvarnom. Pa nakon što je model generiran i opisan svojstvima do mjere koja je moguća sa danim programskim paketom prelazi se na definiranje vrste simulacije odnosno koraka kojim će se ta simulacija provoditi.



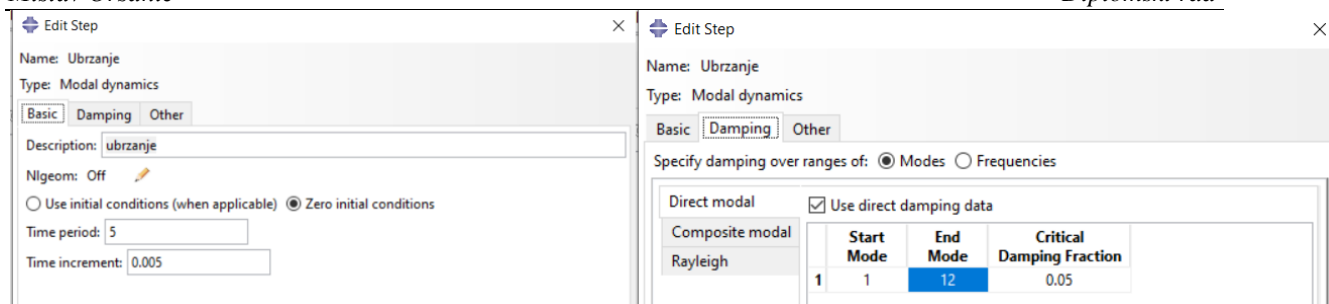
Slika 47. Definirani koraci simulacije

Kao što se vidi na slici 47. definirana su četiri koraka osim onog inicijalnog koji se nalazi u svakoj simulaciji. Inicijalni korak sadrži sve vezano za model kao npr. geometriju, svojstva materijala, presjeke i početne rubne uvijete. Prvi korak koji je zadan je opća statička analiza gdje zadajemo gravitacijsku silu i masu vode te pomoću nje radimo početnu statičku analizu kako bi se moglo uvjeriti da će konstrukcija izdržati vršno statičko opterećenje, pritom se misli na težinu same konstrukcije i vode unutar spremnika kao i hidrostatski tlak vode unutar spremnika. Opterećenja i naprezanja dobivena u ovom koraku će se propagirati kroz analizu u druge korake. Korak "forme" i procedura "Frequency" nam služe kako bi izračunali vrijednosti vlastitih frekvencija sustava i forme vibriranja sustava. Za ovaj sustav odabrano je prvih 12 formi vibriranja. Na slici 48. se vide parametri korišteni za izračun formi vibriranja.



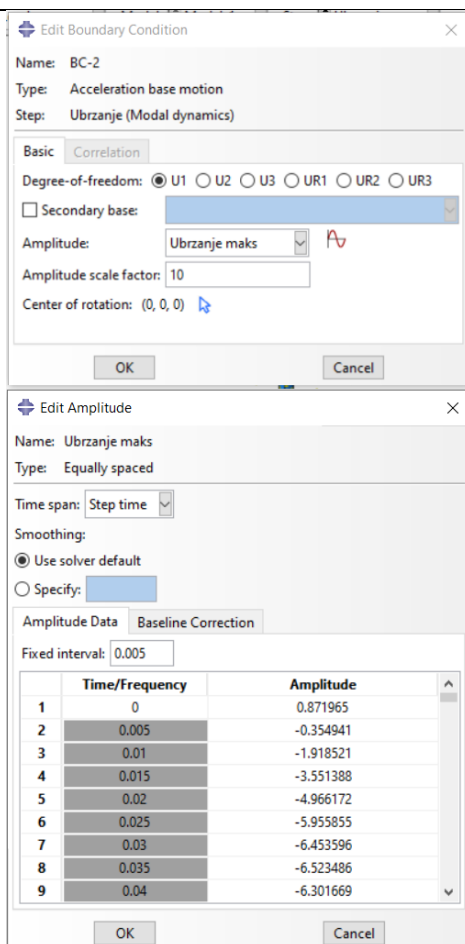
**Slika 48. Parametri za izračun formi vibriranja**

Nakon što su izračunate forme vibriranja za sustav unutar modula "step" mogu se izabrati dodatne vrste analiza koje prethodno nisu bile moguće bez izračunatih vlastitih frekvencija sustava. U ovom radu se provode dvije dinamičke analize konstrukcije vodotornja, a to su analize u vremenskom i frekvencijskom području. Za analizu u vremenskom području koristimo proceduru "modal dynamics". Ova procedura se koristi za dobivanje odziva u vremenskom području kao linearne perturbacije korištenjem modalne superpozicije. Prilikom definiranja ove procedure moramo definirati trajanje analize i vremenski prirast. Trajanje ćemo postaviti na 5 s, a prirast će biti 5 ms što nam daje ukupno 1000 vremenskih prirasta. Kasnije će biti objašnjeni razlozi i ograničenja zašto je postavljen ovako relativno kratak period s obzirom da cjelokupni zapis potresa traje i preko 100 s, a tiče se ograničenja samog računala. Također se u ovom dijelu moraju definirati koje forme vibriranja se koriste i korišten faktor prigušenja. Koristit će se 12 formi vibriranja dobivenih u koraku "forme vibriranja", a faktor prigušenja će biti 5% koliko se standardno uzima za čelične konstrukcije. Svi korišteni parametri se vide na slici 49.



**Slika 49. Korišteni parametri za analizu u vremenskom području**

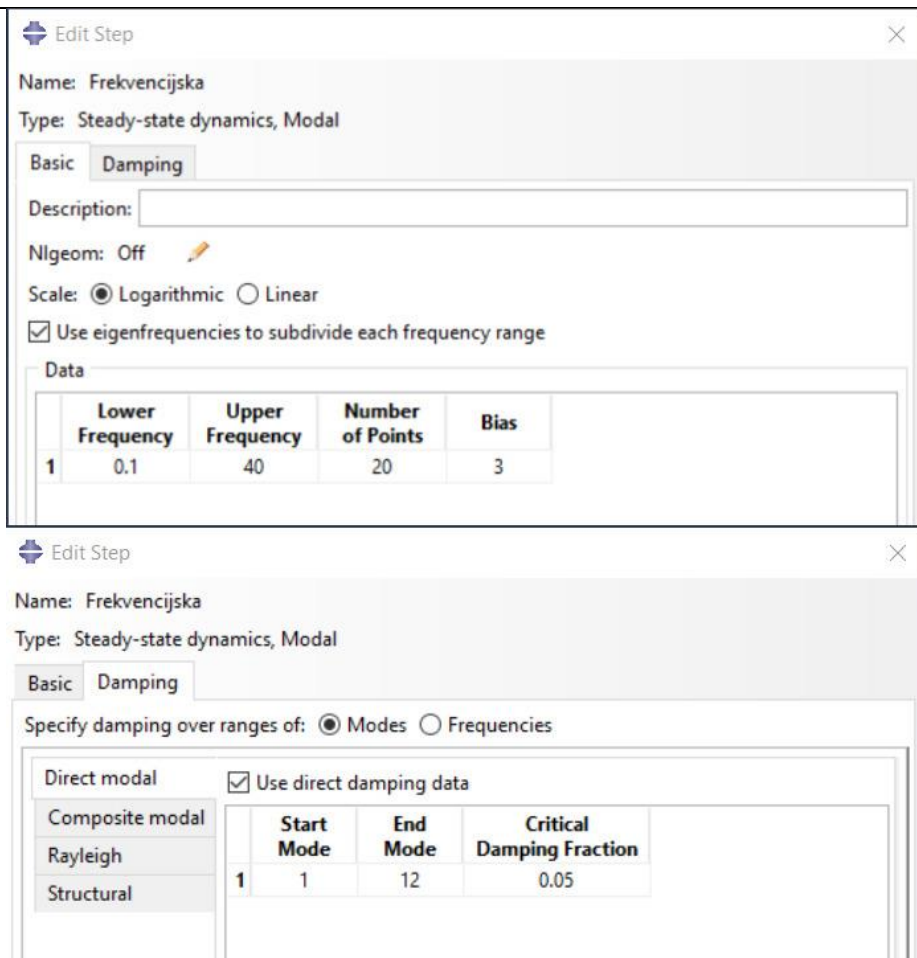
Prilikom korištenja vremenske analize uzbudu moramo definirati u vremenskom periodu. Vremenski prirasti su postavljeni na 0,005 s jer je tako definirano u zapisima akceleroograma sa postaja za praćenje seizmičkih aktivnosti. Zapis ubrzanja korišten u ovoj analizi preuzet je iz baze podataka *Engineering Strong-Motion Database*. Ova baza podataka je namijenjena kako bi omogućila seizmolozima, inženjerima i zakonodavcima kako bi na jednom mjestu imali gotovo sve zapise potresa magnitude veće od 4 stupnja po Richteru te uglavnom obuhvaća regije Europe i Mediterana te Bliskog Istoka. Također ova baza podataka osigurava kako bi zapisi bili točni te ih ručno provjerava i objavljuje da budu javno dostupni. Za provedenu analizu koristili smo zapise od potresa koji je pogodio Zagreb 2020. godine. Korišteni zapisi dobiveni su sa seizmološke postaje s oznakom "CRES" koja se nalazi u Slovenskom naselju Črešnjevce koja je najbliža postaja od epicentra u bazi podataka te je udaljenost od epicentra bila 38 km. Kako je već rečeno s obzirom na veliki broj zapisa (preko 20000) korišteni su samo zapisi koji su se dogodili u vremenu najvećih ubrzanja, jer se tada i događaju najveća naprezanja. Podatci su zadani tablično korištenjem funkcije amplitude s korakom od 0,005 s te su dodani kao rubni uvjet ubrzanja baze na dno stupa gdje se nalazi uklještenje s podlogom. Stupanj slobode odnosno smjer gibanja podloge je postavljen u smjeru X-osi. Sve podatke definirane za uzbudu kao i korištene podatke za amplitude se mogu vidjeti na slici 50.



Slika 50. Rubni uvjet ubrzanja i tablica amplituda ubrzanja

Amplitude su uvećane za faktor 10 jer se u zapisu za ubrzanje koristi mjerna jedinica  $cm/s^2$ , a u Abaqusu zbog potrebe korištenja konzistentnih mjernih jedinica potrebno nam je ubrzanje u  $mm/s^2$ . Također u ovoj analizi koristili smo i zapis koji smo uvećali za 18 puta od stvarnog zapisa kako bi imali uzbuđu koja bi odgovarala vršnim ubrzanjima koji su upisani na potresnim mapama za povratno razdoblje od 225 godina. Zadnji korak analize biti će analiza u frekvencijskom području. Za proceduru odabrana je "steady-state dynamics". Ova procedura je dinamička analiza bazirana na prirodnim formama vibriranja sustava koje se mogu koristiti za linearizirani odziv sustava na harmonijsku uzbuđu. Ova metoda bazirana na formama vibriranja je puno efikasnija i manje zahtjevna što se tiče računalnih resursa od direktnih metoda. Kada se definira ova vrsta analize specificira se raspon frekvencija koje nas zanimaju odnosno koje su dobivene iz podataka u zapisu potresa i broj frekvencija za koje je potreban rezultatu svakom od tih raspona. Najčešće se koristi logaritamska raspodjela frekvencija. Na slici 51. vidimo podatke za definiranje frekvencijske analize.

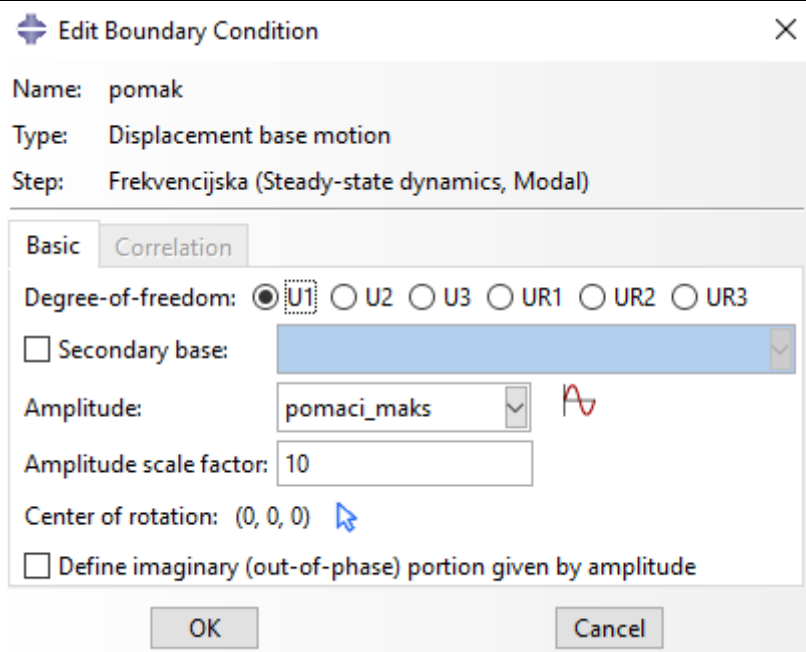




Slika 51. Parametri za definiranje frekvencijske analize

Iz zapisa spektra potresa dobiveni su podatci da je najmanja frekvencija bila 0,1 Hz, a najveća 40 Hz. Odabrano je da će se tražiti 20 točaka po rasponu frekvencije. I funkcija "Bias" nam omogućuje da se točke grupiraju kod vlastitih frekvencija sustava također uključena je opcija logaritamskog mjerila. Pod opcijama za prigušenje vidi se da je ponuđeno više opcija nego što je bilo za vremensku analizu, ali podatci koji su nam potrebni za direktno modeliranje prigušenja. Pa će biti korišteni isti parametri, a to je 12 formi vibriranja i prigušenje od 5% karakteristično za čelične konstrukcije.

Nakon toga nam dolazi definiranje same uzbude koju u ovom slučaju definiramo kao frekvenciju pomaka. Pomake ćemo definirati na donjem dijelu stupa gdje bi stup bio vezan za betonski temelj. Podaci su zadani u zapisu o potresu te su definirani svake 0,005 s. Na slici 52. vidimo parametre potrebne za definiranje uzbude. Također smjer gibanja kao i u prethodnoj analizi smo postavili u smjeru X-osi.



**Slika 52. Definiranje uzbude kao rubnog uvjeta u obliku pomaka**

Isto tako taj pomak uslijed potresa koji smo definirali će biti jedini stupanj slobode. Amplituda će biti zadana tablično iz zapisa o potresu i mora biti uvećana za faktor 10 jer se za pomake u zapisima koriste centimetri, a nama za model trebaju milimetri i na to će se dodati faktor uvećanja kako bi mogli analizirati maksimalne moguće potrese za zadano područje u skladu s potresnim mapama.

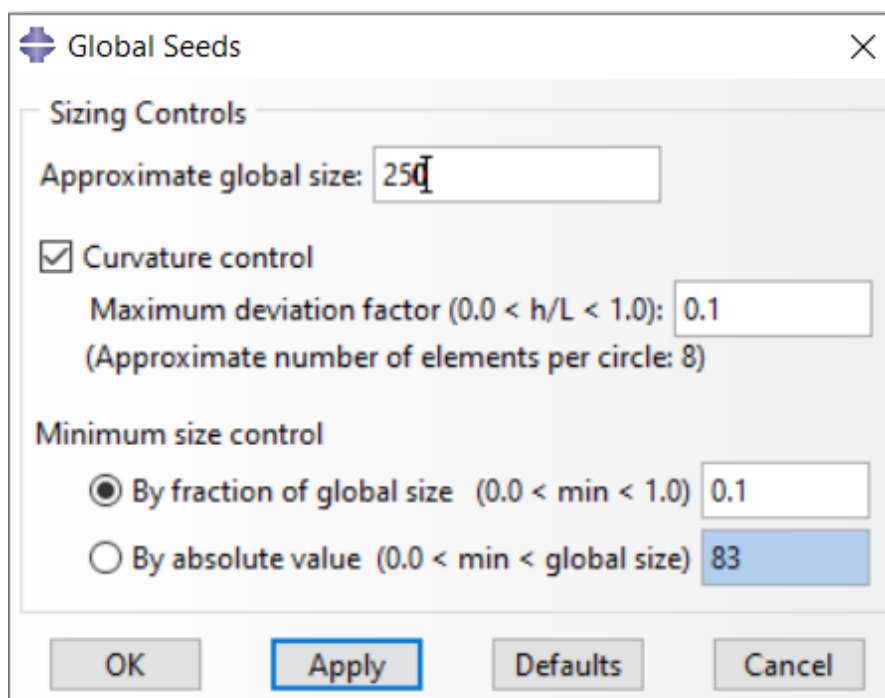
	Time/Frequency	Amplitude
19	0.065	0.3609
20	0.067	0.4149
21	0.07	0.45954
22	0.075	0.46872
23	0.08	0.52326
24	0.085	0.57888
25	0.09	0.74196
26	0.095	0.89604
27	0.1	1.14966
28	0.11	1.1574
29	0.12	1.39752
30	0.13	1.65042

**Slika 53. Tablica s pomacima za frekvencijsku analizu**

Također ovdje nismo koristili sve podatke iz zapisa jer bi nam sama analiza zahtijevala previše radne memorije pa smo u obzir uzeli 1000 koraka u području najvećih oscilacija odnosno pomaka. Vrijeme koje opisuje ovaj skup podataka je pet sekundi.

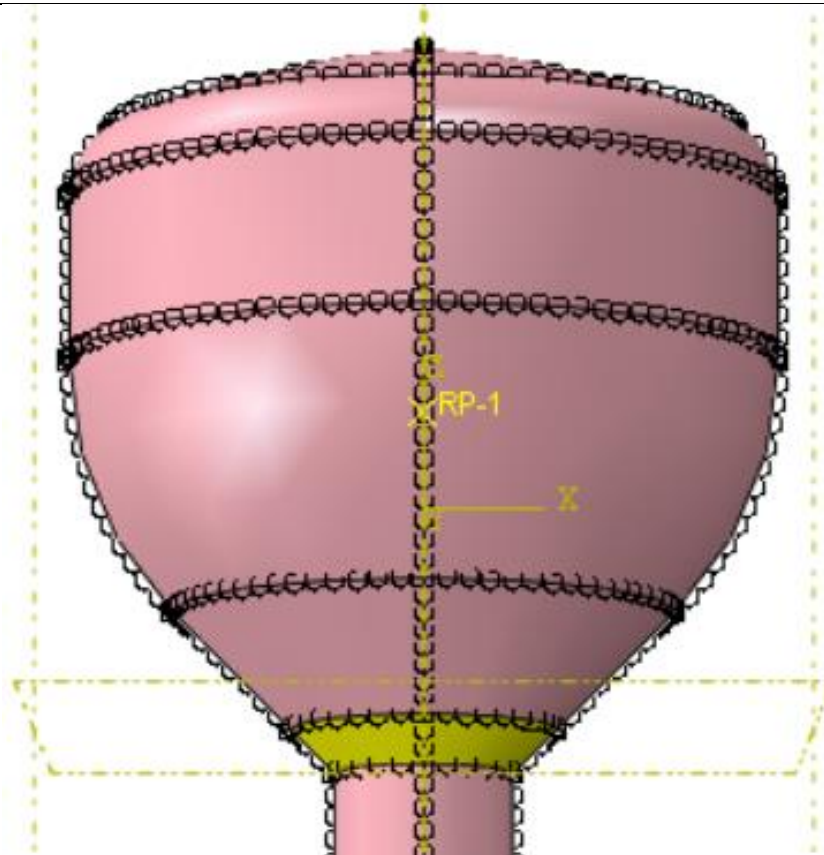
#### 3.5.4. Definiranje konačnog elementa i generiranje mreže

Nakon što su definirani svi parametri u svim modulima analize možemo pristupiti i zadnjem koraku u modeliranju našeg sustava kojim ćemo opisati ponašanje vodotornja uslijed potresa, a to je mreža konačnih elemenata. Prvi korak u ovom dijelu će biti definirati udaljenosti između čvorova. To će se definirati preko funkcije "Seed Part Instance".



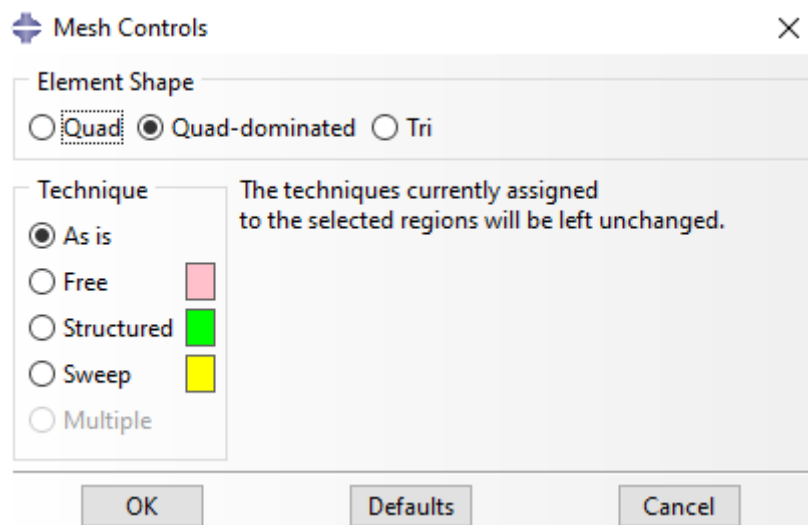
Slika 54. Definiranje veličine elementa preko udaljenosti čvorova

Unesli smo u prozor prvo prosječnu veličinu elementa koji će se koristiti. Također zadaje se omjer za maksimalnu devijaciju veličine elementa. Kako nije dobro da je element prevelik, tako za dobru analizu element ne smije biti ni premali jer to dovodi do problema singularnosti sustava. Nakon što smo odredili udaljenosti između čvorova možemo potvrditi izbor i na slici 55. vidimo kako nam izgleda raspored čvorova po modelu.



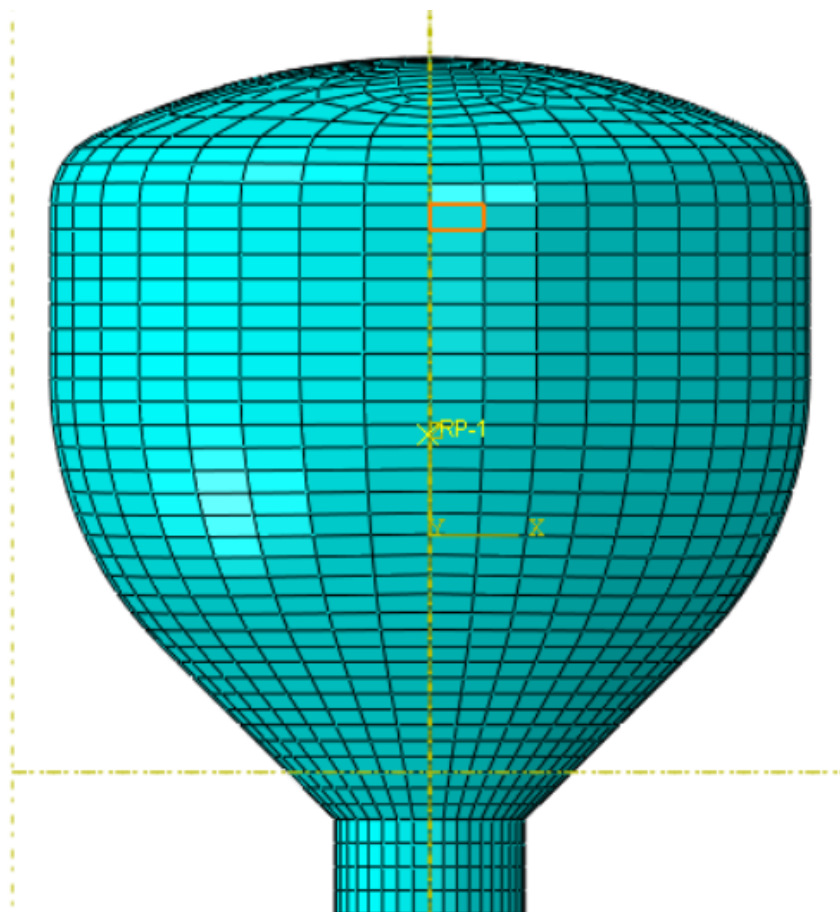
Slika 55. Raspored čvorova po bridovima modela

Kada smo dobili raspored čvorova preostaju nam još neke opcije kako bi sami ručno postavili čvorove tamo gdje su potrebni odnosno da bi dobili gušću mjestu na nekim kritičnim presjecima. Ti alati su lokalno progušćivanje po bridu (engl. Seed Edges) i kontrola mreže (engl. Assign Mesh Control). U prikazanom modelu je korištena metoda kontrolom mreže gdje je korištena opcija "Sweep" u području blizu spoja spremnika i stupa.



Slika 56. Funkcija "Assign Mesh Controls"

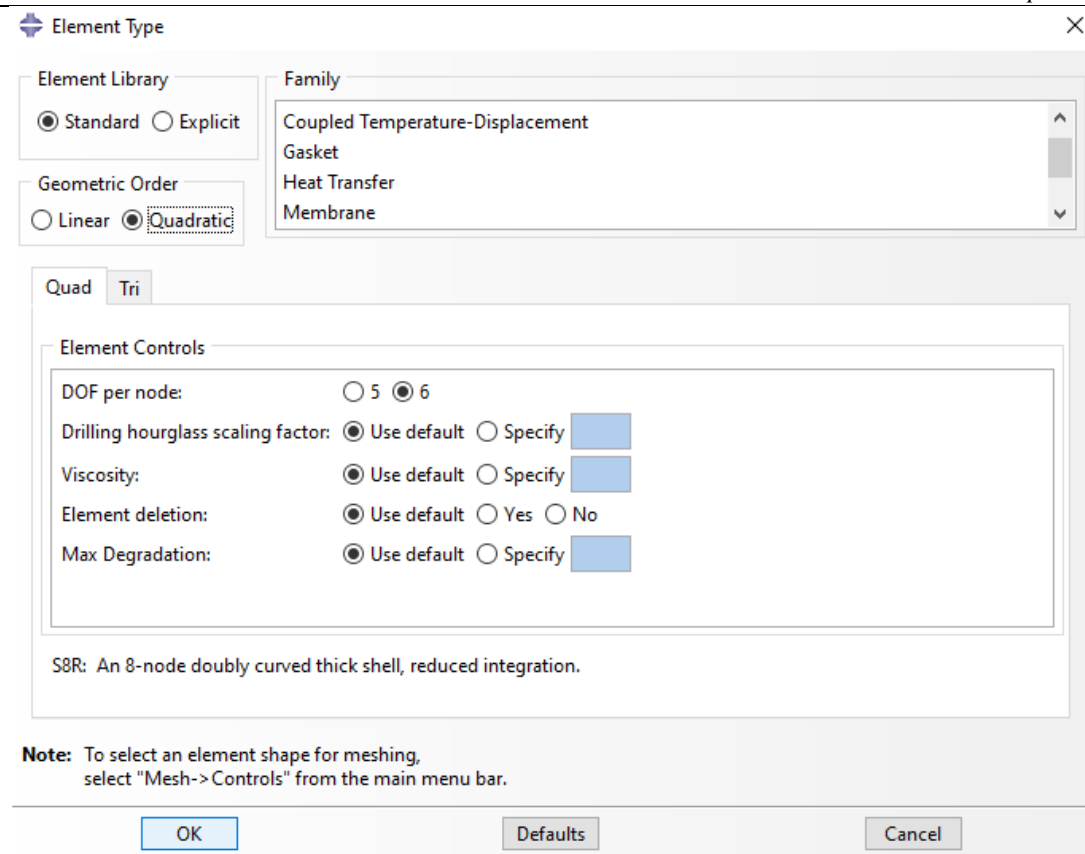
Funkcija "Sweep" nam omogućuje da odaberemo brid koji će nam biti izvorna strana i napravi 2D mrežu te nakon toga kopira položaj čvorova po dubini dok ne dođe do ciljane strane. Ova funkcija je vrlo prikladna za rubove gdje se događa prijelaz geometrije. Na slici 55. vidimo žutom bojom obojan pojas koji smo koristili za funkciju "Sweep" te je omogućena bolje promreženost tog brida gdje vrlo lako nastupa singularnost. Nakon što smo definirali neke uvjete za generiranje mreže može se napraviti samo generiranje mreže pomoću funkcije "Mesh Part Instance".



**Slika 57. Detalj modela s mrežom od 6261 elemenata**

Na slici 56. vidimo detalji kako nam je kod spoja puno gušća mreža nego kad se odmičemo prema vrhu spremnika. Takav raspored mreže je dobar jer je za očekivat da na vrhu spremnika nemamo velika opterećenja.

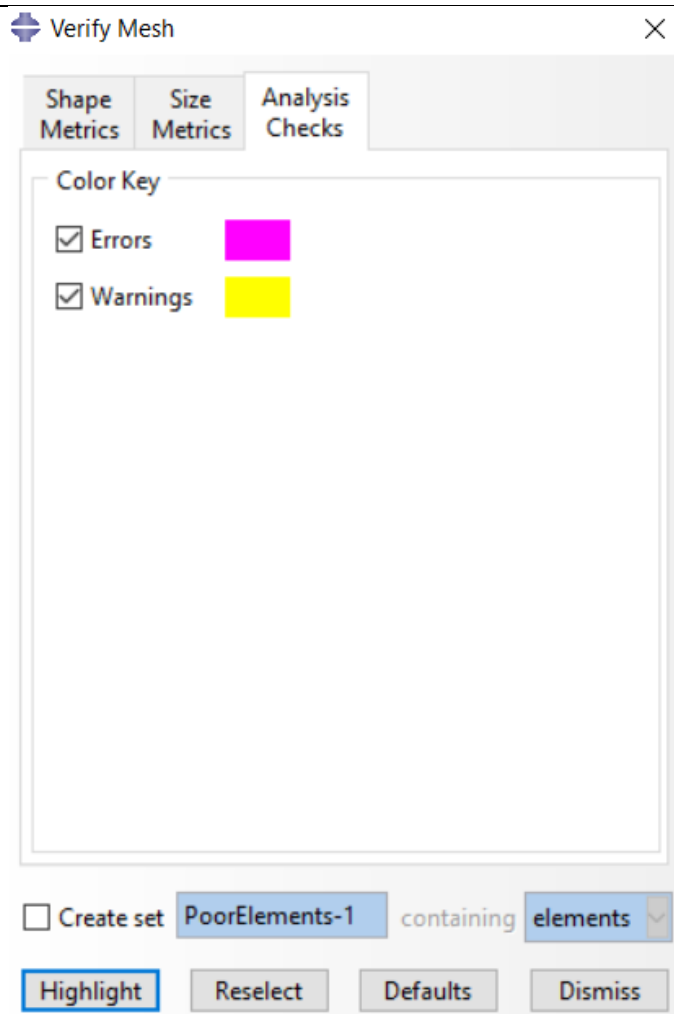
Nakon što smo dobili mrežu možemo odabrati koju vrstu elementa želimo koristiti. Za promatrani sustav koristimo S8R element koji je prikladan za ljuskaste konstrukcije te ima 8 čvorova što ga čini boljim za analize od jednostavnijeg S4R.



**Slika 58. Odabir elementa za model**

U ovom slučaju cijela konstrukcija je izrađena od ljuskastih dijelova pa možemo koristiti element prikazan na slici 58. na cijelom modelu. Također na prethodnoj slici vidimo kako je broj stupnjeva slobode odabran 6. Element je standardan drugog reda iz skupine ljuskastih elemenata.

Nakon što je definirana mreža do kraja možemo se poslužiti još jednim alatom kako ne bi trošili vrijeme na analize koje neće biti dobre jer nismo dobro definirali mrežu i elementi nam nisu kvalitetni te će doći do pojave singulariteta. Funkcija *"Verify Mesh"* nam služi kako bi nam programski paket sam vidio koji nam elementi nisu dobri. Postoje dvije ocijene kada nam nije dobar element, a to su *"Errors"* i *"Warnings"*. Greške se događaju kada je element npr. premali u odnosu na ostale ili kada mu je početno stanje jako izdeformirano i kutovi između stanica su svakakvih oblika i veličina kao npr. četverokut s jednim tupim kutom ili kutom koji je blizu 180°.



**Slika 59. Provjera ispravnosti mreže**

Nakon provjere mreže zaključujemo da je mreža dovoljno dobra za nastavak analize jer je sustav pokazao da nemamo nikakvih pogrešaka, a ni upozorenja na moguće loše elemente.

```
Part instance: V0dotoranj-1
Number of elements : 6261, Analysis errors: 0 (0%), Analysis warnings: 0 (0%)
```

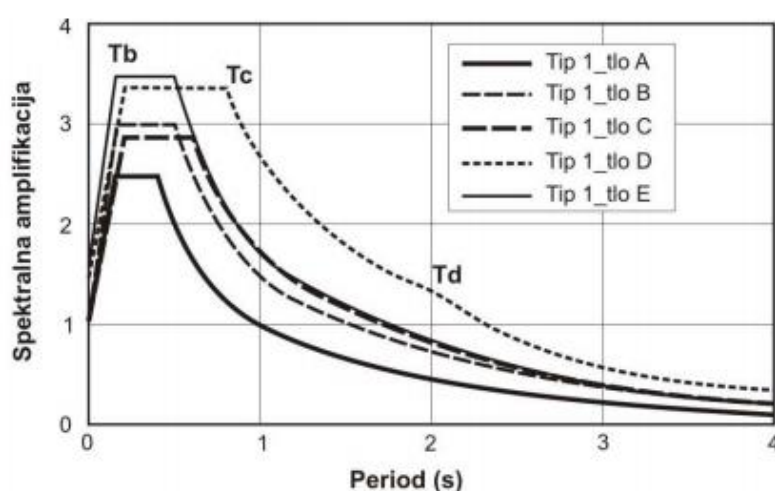
**Slika 60. Rezultati provjere mreže**

Nakon provjere mreže može se zaključiti da su svi parametri za ulazne podatke analize dobro postavljeni i da je model sustava prikladan za provođenje analize te se može krenuti s provođenjem same analize.

### 3.6. Ograničenje kompleksnosti analize

S obzirom da je promatrani sustav poprilično kompliciran sa gledišta analize jer se pokušava riješiti dinamički problem za koji imamo jako puno ulaznih podataka i stupnjeva slobode te se traži da se u rezultatima prikažu razni parametri kao što su naprezanje pomak i rotacija dolazimo

do problema gdje smo ograničeni snagom računala. To se ponajviše odnosi na podatke iz zapisa potresa u kojem imamo preko 20000 zapisa koje možemo koristiti. Kada je u analizu bilo učitani cijeli zapis i analiza se pokrenula pojavila se greška da je premalo memorije za traženu analizu. Za ovu analizu korišteno je računalo sa 16 GB radne memorije. Kako ne bi bilo potrebno previše pojednostaviti mrežu odabran je zapis u trajanju od pet sekundi što nam je dovoljno jer se prema Eurokodu potresi se definiraju kao slučajna i kratka opterećenja. Pri opisivanju jačine potresa bitne stavke su vršno ubrzanje i vršna brzina pomaka koja se prigušuje s vremenom. Također u eurokodu se definiraju spektralne amplifikacije za tlo koje nam pokazuju koliko je potrebno vremena da se tlo ustabili nakon seizmičke uzbude.



EC8-00 TIP 1	S	T <sub>b</sub>	T <sub>c</sub>	T <sub>d</sub>
tlo A $V_s > 800$ m/s	1,00	0,15	0,4	2,0
tlo B $360 < V_s < 800$ m/s	1,10	0,15	0,5	2,0
tlo C $180 < V_s < 360$ m/s	1,35	0,20	0,6	2,0
tlo D $V_s < 180$ m/s	1,35	0,20	0,8	2,0
tlo E ( $h < 20$ m)	1,40	0,15	0,4	2,0

S : spektralna vrijednost za period 0

T<sub>B</sub>, T<sub>C</sub> : granice perioda (s) za interval spektra odziva s konstantnom akceleracijom

T<sub>D</sub> : vrijednost perioda koja definira početak intervala konstantnog pomaka u spektru odziva

**Slika 61. Spektar elastičnog odziva za 5 vrsta tala pri magnitudi 5,5 prema Richteru**

Kako ovaj grafički prikaz ide samo do 4 sekunde trajanja možemo zaključiti kako nam je 5 sekundi dovoljno. Za takav oblik zapisa isprobavanjem različitih brojeva elemenata u mreži dolazimo do ograničenja od 6261 elementa.

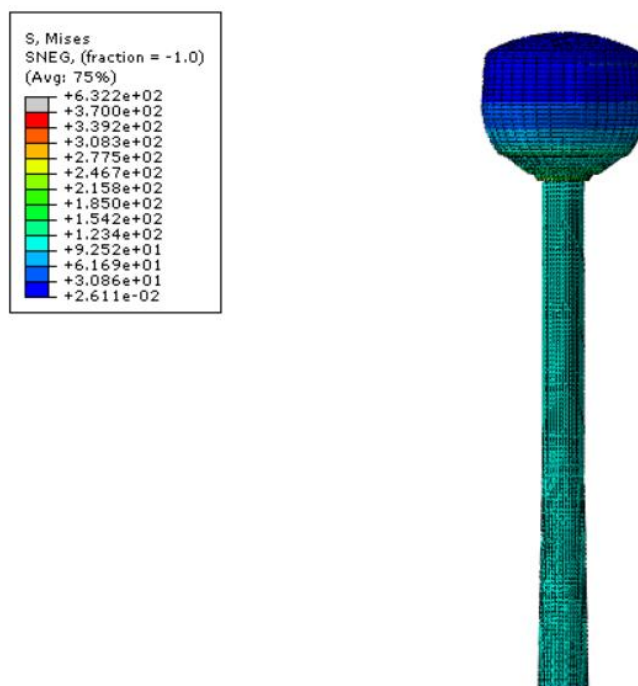


## 4. Analiza rezultata i usporedba

Analiza sustava kojeg promatra se odvija odjednom sve korake koji su bili zadani jedan nakon drugog. Ispis rezultata dobivamo kroz "*Field Output*" i "*History Output*". Prvi je zapis koji je raspoređen kroz cijeli model ili dio njega i obično prikazuje stanje nakon određenog koraka ili na kraju cijele analize jer količina podataka koju Abaqus izbacuje tokom analize je velika pa ovaj način prikaza pojednostavljuje stvari. Dok je "*History Output*" često puno složeniji jer često sadrži veći broj zapisa koji se može kontrolirati u postavkama za "*History Output*". Prikladniji je za ispis rezultata u X-Y grafu.

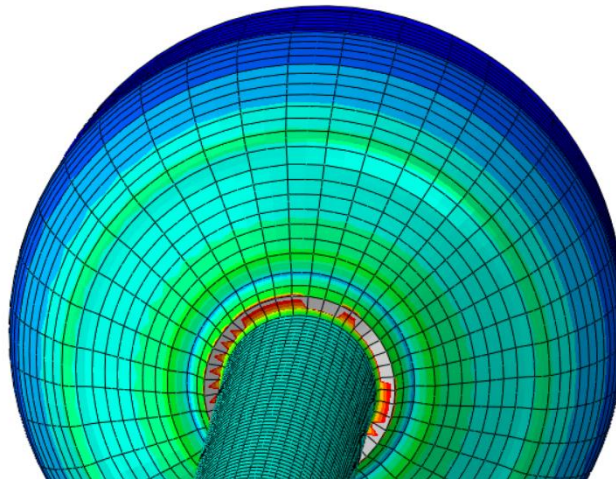
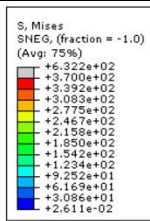
### 4.1. Rezultati vremenske analize

Slika 62. prikazuje ekvivalentna naprezanja uslijed težine vode u spremniku prema *von Misesu* u MPa. Prikaz deformacija na modelu je uvećan kako bi se naglasile promjene.

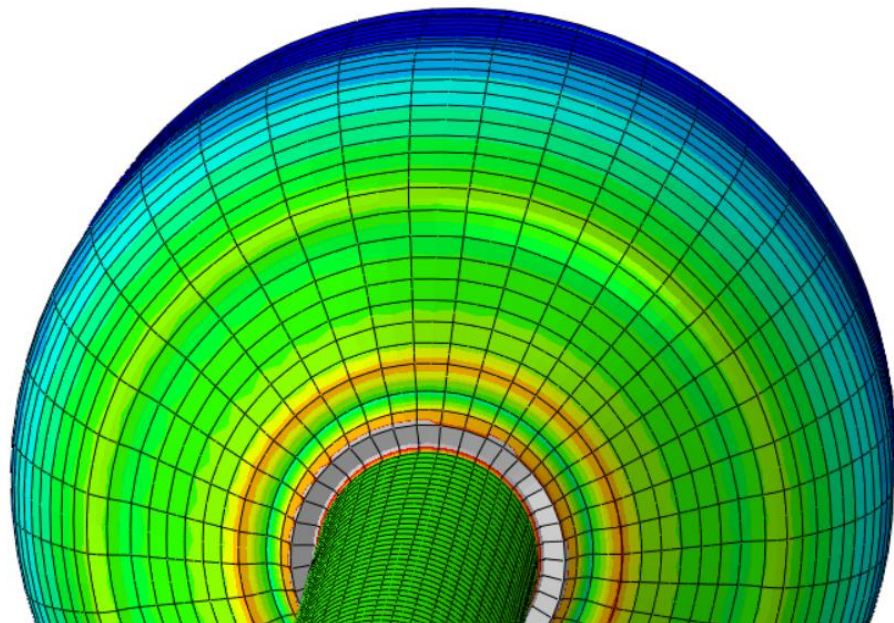
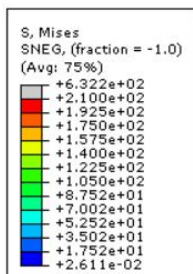


Slika 62. Prikaz naprezanja po *von Misesu*

Kao što vidimo po ovom mjerilu naprezanja većina modela je u donjem spektru osim jednog ruba kod kojeg se vjerojatno događa singularnost i čim se odmaknemo malo od tog ruba vrijednosti brzo padaju pa se može postaviti gornja granica na 210 MPa.

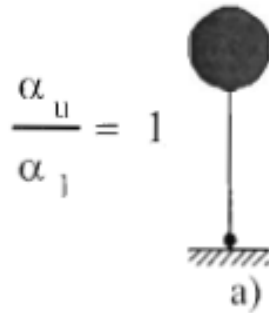


**Slika 63. Raspodjela naprezanja u kritičnom presjek prije ograničavanja gornjeg naprezanja**



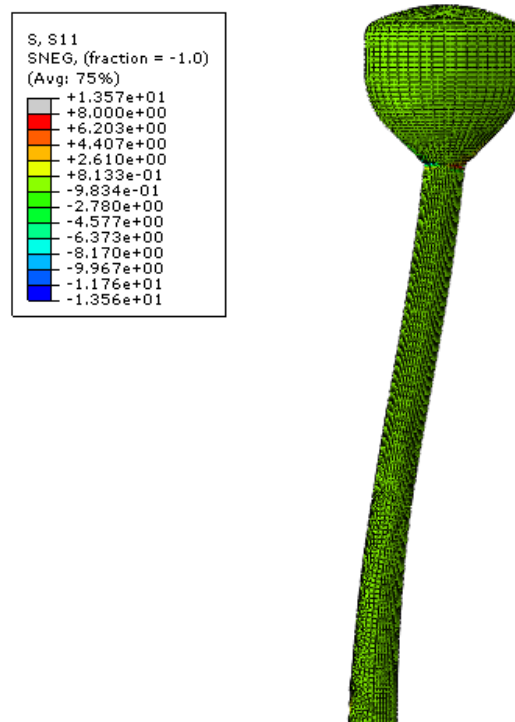
**Slika 64. Raspodjela naprezanja bez brida sa singularnosti**

Na slici 64. vidimo kako maksimalno naprezanje koje se pojavljuje kada se malo odmaknemo od ruba u kojem se dogodila singularnost pada na 157 MPa. S takvim naprežanjem se može sa sigurnošću potvrditi da konstrukcija zadovoljava uvjet čvrstoće. Za slučaj potresa prema Eurokodu 8 vodotoranj se opisuje inverznom njihovom odnosno njihovom čija je masa 50% ili više u gornjoj trećini konstrukcije iznad mjesta oko kojeg se giba.

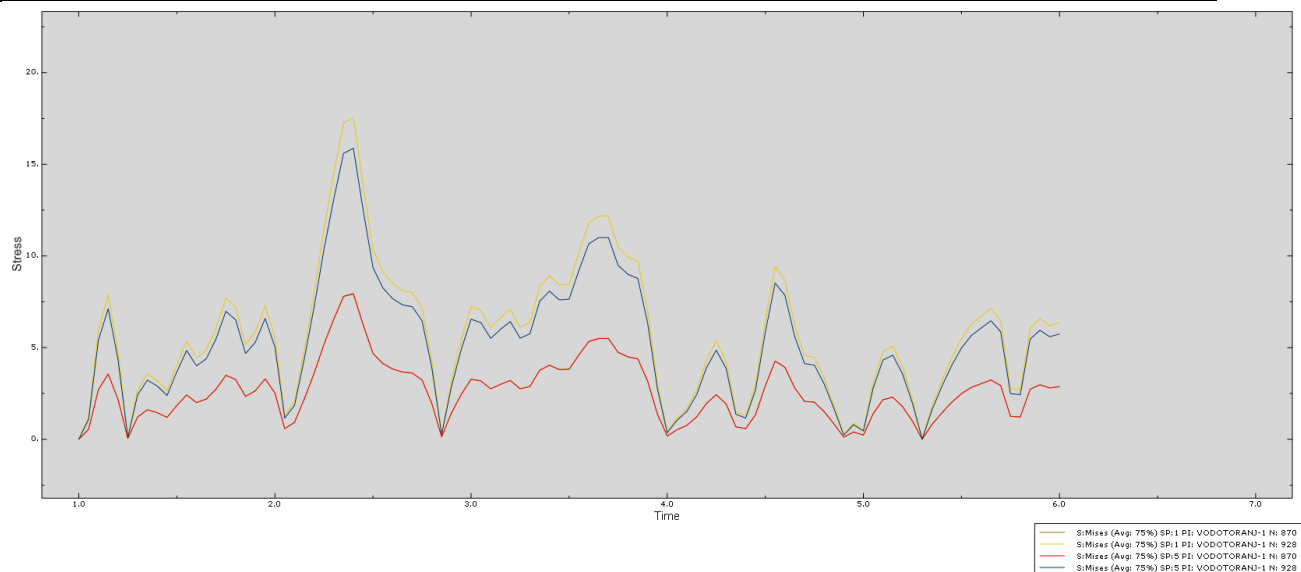


Slika 65. Model invertnog njihala

U slučaju dinamičke uzbude kod ovakvih njihala sva disipacija energije se događa u podnožju konstrukcije. Tako da će nam za dinamičku analizu kritičan presjek uz spoj spremnika i stupa biti donji dio stupa kod otvora za održavanje. Kada se u prikazu rezultata prebacimo u korak s vremenskom uzbudom dobije se izgled deformiranog tijela na kraju simulacije koji vidimo na slici 66.

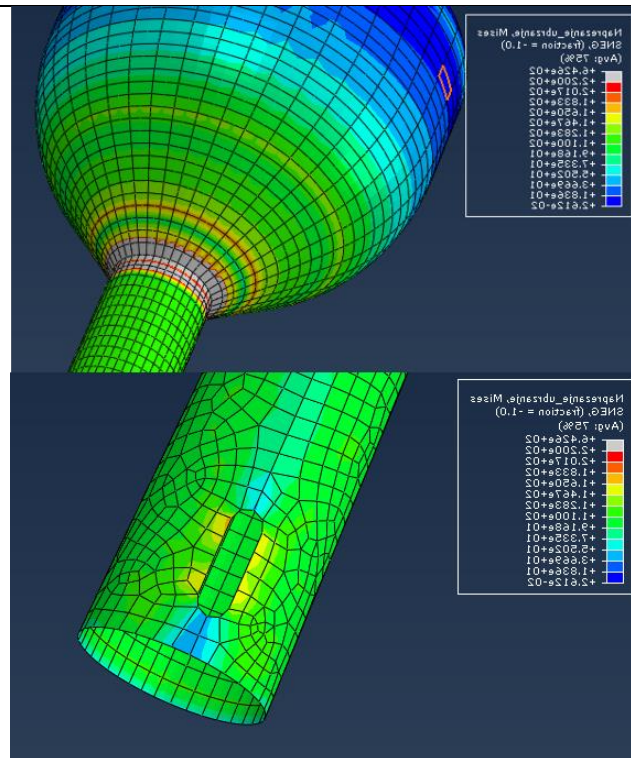


Slika 66. Izgled deformiranog stanja

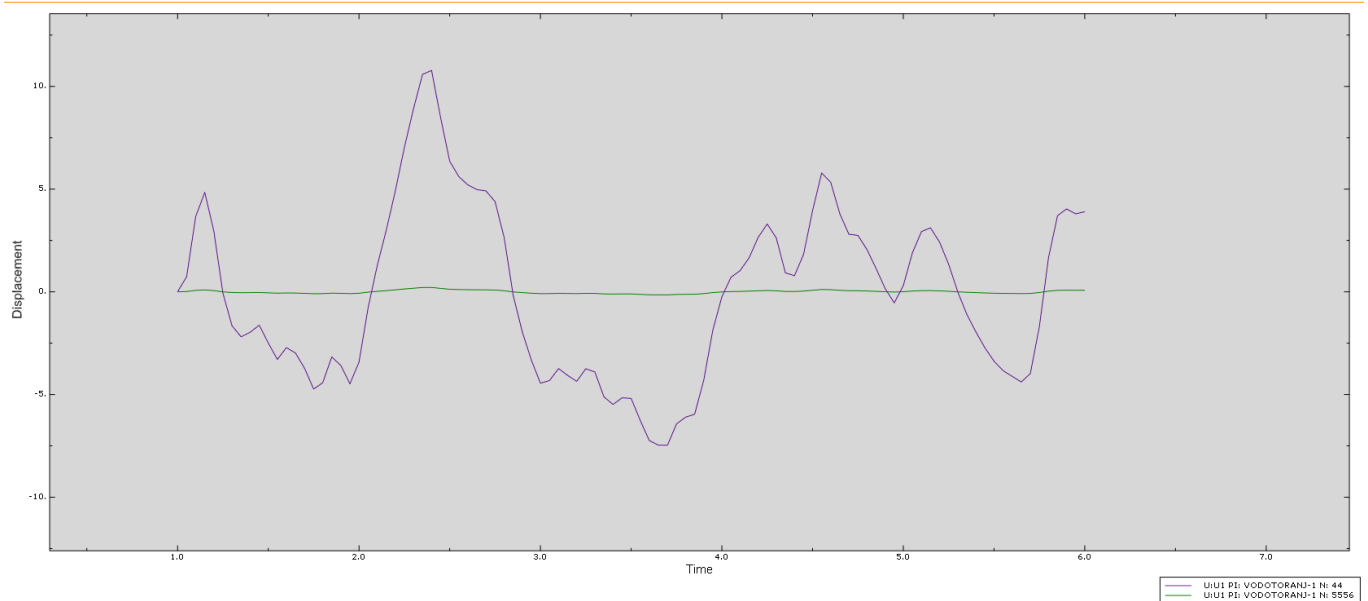


**Slika 67. Naprezanje u vremenu za uzbuđu ubrzanjem**

Na slici 67. vidimo naprezanja u dnu stupa jedna točka je izabrana na smanjenom presjeku gdje je otvor za održavanje a druga je na punom presjeku. Što se tiče samih iznosa naprezanja njih zbrajamo koristeći funkciju *Create Field Output From Fields* kako bi mogli zbrojiti dva različita koraka s različitim procedurama analiza. Naprezanja koja se javljaju u Spoju spremnika i stupa dolaze do  $185 \text{ MPa}$ , a u podnožju stupa na kritičnom presjeku kod otvora dosežu  $168 \text{ MPa}$ , što nam je za materijal koji se koristi, a to je S355, sasvim prihvatljivo jer je granica tečenja korištenog čelika  $R_{p0,2} = 355 \text{ MPa}$ . Iz dobivenih rezultata se vidi da je faktor sigurnosti i dalje dovoljno velik čak i u slučaju jakog potresa što je ključno jer je pretpostavka da ovakve građevine moraju zadržati svoju funkcionalnost bas u takvim katastrofalnim scenarijima. Na slici 68. vidimo stanje naprezanja u kritičnim presjecima za zadano opterećenje.



Slika 68. Zbrojena naprezanja za 2 koraka po *von Misesu*

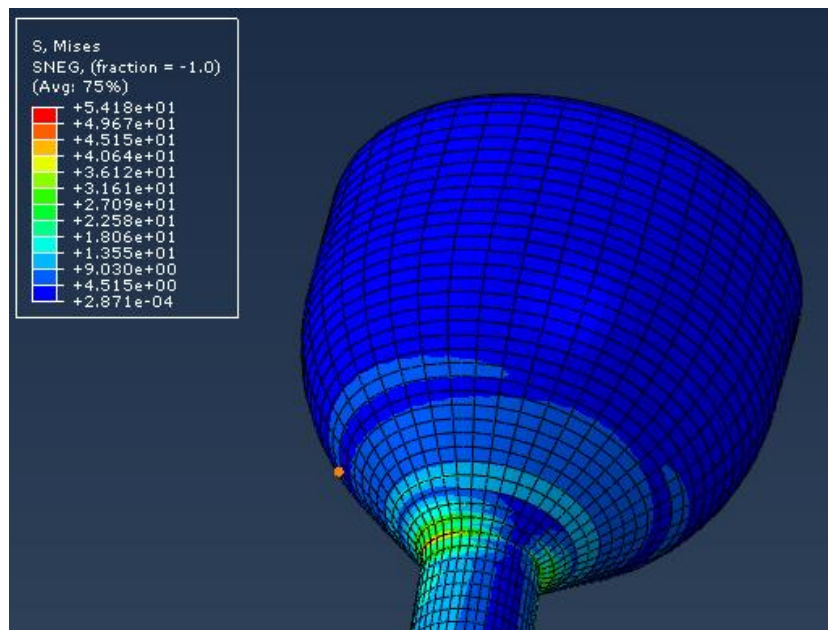


Slika 69. Pomaci karakterističnih točaka

Na slici 68. vidimo pomake za dvije točke. Jedna je na kritičnom presjeku stupa kod otvora, a druga je na vrhu spremnika. Razlika je očigledna i očekivana s obzirom da se gornji dio vodotorinja giba slobodno.

## 4.2. Frekvencijska analiza

Frekvencijska analiza se razlikuje od vremenske po tome što se za ulazne podatke ne koristi vremenski zapis uzbude nego se zadaje spektar odziva na uzbudu (engl. Shock response spectrum). Iako ima prednost nad vremenskom analizom što se tiče zahtjevnosti za obradu podataka za računalom kod dobivanja rezultata se dolazi do problema jer koristi kompleksne tenzore. Pa tako u Abaqusu nije moguće kao u vremenskoj analizi zbrojiti podatke iz koraka gdje je rađena statička analiza s podacima koji su dobiveni u frekvencijskoj već se javlja greška o nemogućnosti izračuna zbog moguće razlike u fazi između komponenti koje smo htjeli zbrojiti. Rezultati koji su dobiveni ovom analizom su relativni u odnosu na rezultate iz statičke analize i ne mogu se koristiti direktno. No svejedno nam mogu poslužiti kao primjer kako će se konstrukcija ponašati u zadanoj situaciji.



Slika 70. Naprezanja dobivena frekvencijskom analizom



## **5. Zaključak**

U radu je napravljena konstrukcija vodotoranja i provedene su vremenska i frekvencijska analiza sustava. Također je napravljena i statička analiza čiji rezultati su bili kasnije uključeni u ostale analize kao početno stanje sustava. Prednosti numeričke metode su brzina izračuna kompleksnih analiza koje, ako su dobro definirani ulazni podatci možemo dobiti kroz svega jednu minutu te nam također omogućuje da brzo mijenjamo parametre i uspoređujemo razlike u rezultatima. Problem singularnosti koji je najveća opasnost kod numeričke metode se može izbjeći primjenom radijusa na opasnom bridu te lokalnim usitnjavanjem mreže ili promatranjem rezultata uz odmak od brida gdje se pojavljuje singularnost naravno uz kritičko prosuđivanje imaju li ti rezultati smisla. Model vodotoranja koji je bio ispitan u analizi je zadovoljio sve uvijete koje je trebao. Naprezanje u ljusci spremnika se smanjivalo popriličnom brzinom prema vrhu pa možemo zaključiti kako bi se mogla koristiti tanja ljuska na gornjem dijelu spremnika. Također pokazano je kako se mogu koristiti dvije vrste analize kako bi dobili vjerodostojni rezultati i opisane su njihove mane i prednosti. Vodotoranj ima ravnomjerno raspoređeno naprezanje s relativno velikim faktorom sigurnosti, ali kako se radi o objektu koji je važan u civilnoj zaštiti ne preporuča se smanjivanje presjeka stupa. Daljnja analiza bi mogla ići u smjeru da se voda modelira kao tekućina te da se uzme u obzir bućkanje vode no to se može pokriti faktorom sigurnosti koji ima konstrukcija.

---

**6. LITERATURA**

- [1] European Committee for Standardization, 2004. EN 1998-1: Eurocode 8: Design of structures for earthquake resistance
- [2] Sorić, J.: Metoda konačnih elemenata, Golden marketing, Zagreb 2004.
- [3] ABAQUS, Abaqus Documentation: Version 6.14. 2014, Dassault Systemes: 3DS Paris Campus, 10 rue Marcel Dassault, 78140 Vélizy-Villacoublay, FRANCE
- [4] Alfirević, I.: Linearna analiza konstrukcija, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb 2011.
- [5] Sorić, J.: Predavanja iz kolegija Uvod u čvrstoću konstrukcija, 2019.
- [6] Stegić, M.: Teorija vibracijalinih diskretnih mehaničkih sustava, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb 1996