

Upravljanje pozitivnim dinamičkim sustavima s primjenom na grupe mobilnih robota

Pirović, Cvita

Master's thesis / Diplomski rad

2023

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:235:647797>

Rights / Prava: [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2025-02-23**

Repository / Repozitorij:

[Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

DIPLOMSKI RAD

Cvita Pirović

Zagreb, 2023.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

DIPLOMSKI RAD

Mentor:

Prof. dr. sc. Andrej Jokić, dipl. ing.

Studentica:

Cvita Pirović

Zagreb, 2023.

Izjavljujem da sam ovaj rad izradila samostalno koristeći znanja stečena tijekom studija i navedenu literaturu.

Zahvaljujem mentoru prof.dr.sc. Andreju Jokiću na predloženoj temi za rad i pomoći koju mi je pružio tijekom pisanja rada i na razrješenju svake moje nedoumice.

Zahvaljujem se i svim svojim prijateljicama, cimericama, kolegama koji su bili tu i uljepšali mi ovaj studentski život koji je došao kraju. Hvala za svaku riječ utjehe, za svaki put kad ste bili moje rame za plakanje u najtežim trenucima, ali i veselili se sa mnom lijepim stvarima.

I na kraju najveće hvala mojoj mami, koja je ponajviše zaslužna za sve ovo i bez koje sve ovo ne bi bilo moguće. Hvala ti što si uvijek vjerovala u mene i davala mi vjetar u leđa.

Cvita Pirović



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE



Središnje povjerenstvo za završne i diplomske ispite

Povjerenstvo za diplomske radove studija strojarstva za smjerove:
proizvodno inženjerstvo, računalno inženjerstvo, industrijsko inženjerstvo i menadžment,
inženjerstvo materijala te mehatronika i robotika

Sveučilište u Zagrebu Fakultet strojarstva i brodogradnje	
Datum:	Prilog:
Klasa:	602 – 04 / 23 – 6 / 1
Ur. broj:	15 - 1703 - 23 -

DIPLOMSKI ZADATAK

Student: **CVITA PIROVIĆ**

Mat. br.: 0035204366

Naslov rada na hrvatskom jeziku: **Upravljanje pozitivnim dinamičkim sustavima s primjenom na grupe mobilnih robota**

Naslov rada na engleskom jeziku: **Control of positive dynamical systems with applications in groups of mobile robots**

Opis zadatka:

Klasični pristupi sinteze regulatora često nisu direktno primjenjivi na vrlo velike dinamičke sustave, kao npr. električne energetske mreže, velike grupe mobilnih robota (dronova) ili prometne mreže. Međutim, u nizu takvih primjena, sustavi koje je potrebno upravljati mogu se učinkovito modelirati koristeći koncept pozitivnih dinamičkih sustava. Danas su pozitivni dinamički sustavi u fokusu mnogih istraživanja u području automatske regulacije, a već su razvijene i neke od efikasnih metoda sinteze optimalnih regulatora koje su direktno primjenjive na vrlo velike sustave.

U ovom radu potrebno je ostvariti sljedeće:


1. Dati pregled literature na temu analize i sinteze optimalnih regulatora za pozitivne dinamičke sustave.
2. Modelirati gibanje grupe mobilnih robota kao pozitivan dinamički sustav.
3. Sintetizirati distribuirane regulatore s ciljem upravljanja grupe mobilnih robota u formaciji koji optimalno otklanjaju utjecaj vanjskih poremećaja na gibanje formacije. Kao kriterij optimizacije koristiti prvu ili beskonačno normu zatvorenog sustava.
4. Na prikladno osmišljenim primjerima putem simulacija ilustrirati učinkovitost sintetiziranih regulatora.

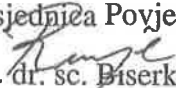
U radu je potrebno navesti korištenu literaturu i eventualno dobivenu pomoć.

Zadatak zadan:
17. studenog 2022.

Rok predaje rada:
19. siječnja 2023.

Predviđeni datum obrane:
23. siječnja do 27. siječnja 2023.

Zadatak zadao: 
prof. dr. sc. Andrej Jokić

Predsjednica Povjerenstva:

prof. dr. sc. Biserka Runje

SADRŽAJ

SADRŽAJ	I
POPIS SLIKA	II
POPIS OZNAKA	IV
SAŽETAK.....	V
SUMMARY	VI
1. UVOD.....	1
2. NOTACIJA I PRELIMINARNI REZULTATI.....	6
2.1. Norme signala i sustava	6
2.1.1. Norme signala	7
2.1.2. Norma sustava.....	7
2.2. Stabilnost sustava.....	8
2.2.1. Lyapunvljeva analiza stabilnosti.....	8
2.2.2. Lyapunovljeva analiza linearnih dinamičkih sustava	10
2.3. Metzlerova matrica	11
3. POZITIVNI SUSTAVI.....	12
3.1. Analiza pozitivnih sustava	13
3.2. Sinteza regulatora.....	14
4. UPRAVLJANJE GRUPAMA ROBOTA	17
4.1. Rješenje problema i prikaz rezultata dobivenih simulacijom	19
4.2. Prikaz dobivenih rezultata s većom grupom robota.....	34
5. ZAKLJUČAK.....	41
LITERATURA.....	42
PRILOZI.....	43
PRILOG I.....	44
PRILOG II.....	47

POPIS SLIKA

Slika 1.	Dujiangyan, sustav navodnjavanja u Kini [5]	2
Slika 2.	Prometna mreža [5]	2
Slika 3.	Perdix, roj bespilotnih letjelica [7]	3
Slika 4.	Autonomni sustav minolovaca kraljevske mornarice UK-a [8]	4
Slika 5.	RoboBee [9]	4
Slika 6.	Grupa dronova koja tvori plesni oblak svjetlosti [10]	5
Slika 7.	Slikoviti prikaz definicije stabilnosti sustava [13]	8
Slika 8.	Slikoviti prikaz definicije asimptotske stabilnosti [13]	9
Slika 9.	Fazna interpretacija stabilnosti po Lyapunovu [13]	10
Slika 10.	Nivo krivulje Lyapunovljevih funkcija iz uvjeta 1.2), 1.3) i 1.4) [4]	12
Slika 11.	Ilustracija sustava iz Teorem 3. i 4. [4]	16
Slika 12.	Komunikacijska mreža 4 robota	17
Slika 13.	Ilustracija optimalnih pojačanja za slučaj $B = \text{diag}\{1,1,1,1\}$	20
Slika 14.	Prikaz zauzimanja formacije za slučaj $B = \text{diag}\{1,1,1,1\}$	21
Slika 15.	Prikaz zauzimanja formacije po koordinatnim osima za slučaj $B = \text{diag}\{1,1,1,1\}$	21
Slika 16.	Ilustracija optimalnih pojačanja za slučaj $B = \text{diag}\{10,1,10,1\}$	22
Slika 17.	Prikaz zauzimanja formacije za slučaj $B = \text{diag}\{10,1,10,1\}$	22
Slika 18.	Prikaz zauzimanja formacije po koordinatnim osima za slučaj $B = \text{diag}\{10,1,10,1\}$	23
Slika 19.	Ilustracija optimalnih pojačanja za slučaj $B = \text{diag}\{1,10,1,10\}$	24
Slika 20.	Prikaz zauzimanja formacije za slučaj $B = \text{diag}\{1,10,1,10\}$	24
Slika 21.	Prikaz zauzimanja formacije po koordinatnim osima za slučaj $B = \text{diag}\{1,10,1,10\}$	25
Slika 22.	Ilustracija optimalnih pojačanja za slučaj $B = \text{diag}\{1,1,0,1\}$	26
Slika 23.	Prikaz zauzimanja formacije za slučaj $B = \text{diag}\{1,1,0,1\}$	26
Slika 24.	Prikaz zauzimanja formacije po koordinatnim osima za slučaj $B = \text{diag}\{1,1,0,1\}$	27
Slika 25.	Ilustracija 10x većih optimalnih pojačanja za slučaj $B = \text{diag}\{1,1,1,1\}$	28
Slika 26.	Prikaz zauzimanja formacije s 10x većim pojačanjima za slučaj $B = \text{diag}\{1,1,1,1\}$	28
Slika 27.	Prikaz zauzimanja formacije po koordinatnim osima s 10x većim pojačanjima za slučaj $B = \text{diag}\{1,1,1,1\}$	29
Slika 28.	Ilustracija 10x većih optimalnih pojačanja za slučaj $B = \text{diag}\{10,1,10,1\}$	29
Slika 29.	Prikaz zauzimanja formacije s 10x većim pojačanjima za slučaj $B =$ $\text{diag}\{10,1,10,1\}$	30
Slika 30.	Prikaz zauzimanja formacije po koordinatnim osima s 10x većim pojačanjima za slučaj $B = \text{diag}\{10,1,10,1\}$	30
Slika 31.	Ilustracija 10x većih optimalnih pojačanja za slučaj $B = \text{diag}\{1,10,1,10\}$	31
Slika 32.	Prikaz zauzimanja formacije s 10x većim pojačanjima za slučaj $B =$ $\text{diag}\{1,10,1,10\}$	31
Slika 33.	Prikaz zauzimanja formacije po koordinatnim osima s 10x većim pojačanjima za slučaj $B = \text{diag}\{1,10,1,10\}$	32
Slika 34.	Ilustracija 10x većih optimalnih pojačanja za slučaj $B = \text{diag}\{1,1,0,1\}$	32

Slika 35.	Prikaz zauzimanja formacije s 10x većim pojačanjima za slučaj $B = \text{diag}\{1,1,0,1\}$	33
Slika 36.	Prikaz zauzimanja formacije po koordinatnim osima s 10x većim pojačanjima za slučaj $B = \text{diag}\{1,1,0,1\}$	33
Slika 37.	Ilustracija optimalnih pojačanja za grupu od 6 robota	34
Slika 38.	Prikaz zauzimanja formacije za grupu od 6 robota	35
Slika 39.	Prikaz zauzimanja formacije po koordinatnim osima za grupu od 6 robota	35
Slika 40.	Ilustracija 10x većih optimalnih pojačanja za grupu od 6 robota.....	36
Slika 41.	Prikaz zauzimanja formacije s 10x većim pojačanjima za grupu od 6 robota	36
Slika 42.	Prikaz zauzimanje formacije po koordinatnim osima s 10x većim pojačanjima za grupu od 6 robota	37
Slika 43.	Ilustracija optimalnih pojačanja za grupu od 8 robota	37
Slika 44.	Prikaz zauzimanja formacije za grupu od 8 robota	38
Slika 45.	Prikaz zauzimanja formacije po koordinatnim osima za grupu od 8 robota	38
Slika 46.	Ilustracija 10x većih optimalnih pojačanja za grupu od 8 robota.....	39
Slika 47.	Prikaz zauzimanja formacije s 10x većim pojačanjima za grupu od 8 robota	39
Slika 48.	Prikaz zauzimanje formacije po koordinatnim osima s 10x većim pojačanjima za grupu od 8 robota	40

POPIS OZNAKA

Oznaka	Opis
$\ \cdot\ $	općenita norma
$\ \cdot\ _1$	p_1 ili prva norma
$\ \cdot\ _2$	p_2 ili druga norma
$\ \cdot\ _\infty$	p_∞ ili beskonačna norma
$\ \cdot\ _{1-ind}$	prva inducirana norma
$\ \cdot\ _{\infty-ind}$	beskonačna inducirana norma
x	vektor varijabli stanja
V	Lyapunovljeva funkcija
A	matrica sustava
A_{cl}	matrica zatvorenog regulacijskog kruga
\mathbb{R}_+	skup realnih nenegativnih brojeva
l_{ij}	parametri pojačanja regulatora
x^*	vektor željene formacije
v	vektor poremećaja

SAŽETAK

U ovom radu upoznat ćemo se sa pozitivnim dinamičkim sustavim čija primjena je danas vrlo česta u mnogim područjima. Metode za analizu i sintezu pozitivnih sustava su zbog svojih dobrih svojstava primjenjive na sustave vrlo velikih razmjera kao što su velike grupe mobilnih robota ili prometne mreže. Za razliku od standardnih linearnih sustava, analiza stabilnosti i sinteza optimalnih regulatora kod ovakvih sustava je mnogo jednostavnija s obzirom da njihova kompleksnost linearno raste s brojem veza između robota. Potrebno je sintetizirati distribuirane regulatore, odnosno lokalne regulatore na razini pojedinačnog robota, s ciljem da grupa robota uzimajući u obzir informacije susjednih robota zauzme zadanu formaciju. S obzirom da su u praksi uvijek prisutni neki vanjski poremećaji poput vjetra koji utječe na gibanje dronova, javlja se potreba za uklanjanjem ili smanjenjem utjecaja poremećaja. Predstavljena su dva teorema za sintezu regulatora koja kao kriterij optimizacije koriste prvu ili beskonačnu induciranu normu.

Ključne riječi: pozitivni sustavi, grupa mobilnih robota, distribuirani regulatori, inducirana norma

SUMMARY

In this paper, we present positive dynamical systems whose application is widespread today in many areas. Due to their good properties, positive systems apply to very large-scale systems such as large groups of mobile robots or traffic networks. In contrast to standard linear systems, stability analysis and synthesis of optimal controllers are greatly simplified for such systems, considering that their complexity scales linearly with the number of interconnections. It is necessary to synthesize distributed controllers, where each robot has its own controller, with the aim that a group of mobile robots achieves the desired formation using their mutual information. In practice, there are always some external disturbances, such as wind that affects the movement of drones, so it is necessary to remove or minimize the effects of the disturbance. There are presented two theorems for the synthesis of controllers that use the first or infinite induced norm as an optimization criterion.

Key words: positive systems, group of mobile robots, distributed controllers, induced norms

1. UVOD

Pozitivni sustavi su dinamički sustavi čije varijable stanja uvijek poprimaju pozitivne, odnosno nenegativne, vrijednosti. Imaju veliki značaj i široku primjenu jer velik broj fizikalnih veličina nema značenje osim ako nisu pozitivne (npr. koncentracija, razina naseljenosti, popunjenost spremnika, razina intenziteta svjetla, cijena proizvoda). Pozitivni sustavi se koriste za matematičko modeliranje problema u mnogo istraživačkih područja kao što su biologija, ekologija, farmakologija, energetski sustavi, fiziologija, epidemiologija, itd. [1]

Dinamički modeli mnogih bioloških i fizioloških procesa kao što su farmakokinetika, metabolički sustav, biokemijske reakcije, endokrini sustav izvedeni su iz razmatranja ravnoteže mase i energije koja uključuju dinamička stanja čije vrijednosti su nenegativne. Podklasa nenegativnih dinamičkih sustava su kompartmentalni sustavi koji su vođeni zakonima očuvanja mase i energije, a sastoje se od homogenih odjeljaka koji međusobno izmjenjuju nenegativne količine materijala putem zakona o strujanju između odjeljaka. [2]

Matematičko modeliranje u epidemiologiji koja proučava širenje bolesti među ljudima je jako bitno s obzirom da je eksperimentiranje u toj znanosti nepraktično i neetično. Matematički modeli dinamike prenosivih bolesti mogu imati izravan utjecaj na izbor programa imunizacije, optimalnu raspodjelu oskudnih resursa ili najbolju kombinaciju kontrolnih ili obrazovnih tehnologija. [3]

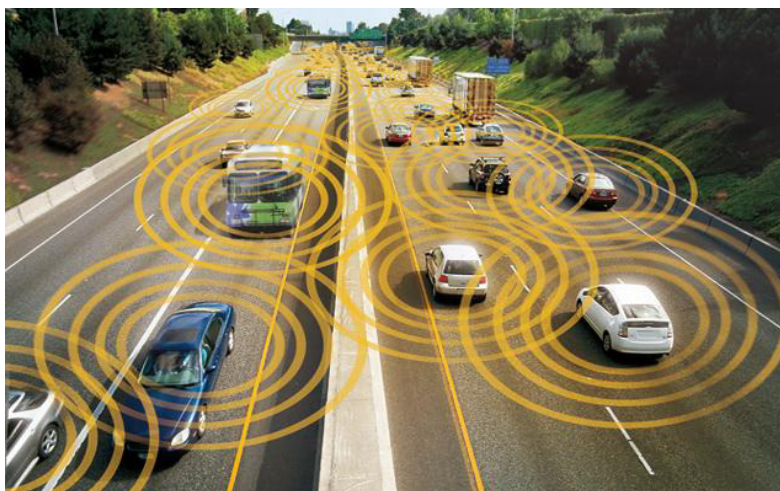
Osim brojnih primjena pozitivnih sustava njihovo možda najvažnije svojstvo je to što su algoritamske metoda za njihovu analizu, ali i za sintezu regulatora, skalabilne pa se mogu primjenjivati na vrlo velike sustave. Analiza stabilnosti za standardni linearni sustav s n varijabli stanja zahtijeva kvadratnu Lyapunovljevu funkciju s n^2 parametara, dok se kod pozitivnih sustava stabilnost može provjeriti s linearnom Lyapunovljevom funkcijom sa samo n parametara. Neki od primjera sustava velikih razmjera su prometna mreža, komunikacijska mreža, električna mreža, sustav navodnjavanja. [4]

Na Slika 1. prikazan je sustav navodnjavanja u Kini (Dujiangyan), star više od 2000 godina, gdje su napravljeni vodeni kanali duž planina koji odvrćaju vodu od odlaska u dolinu i izazivanja poplave grada Chengdua. [5]



Slika 1. Dujiangyan, sustav navodnjavanja u Kini [5]

Slika 2. prikazuje prometnu mrežu gdje je izazov upravljanja poboljšati prolaznost i sigurnost, i smanjiti ekološki otisak. [5]



Slika 2. Prometna mreža [5]

U ovom radu upravljanje pozitivnih sustava prikazat ćemo s primjenom na grupe mobilnih robota. Danas grupe mobilnih robota imaju velik broj primjena pogotovo za rješavanje zadataka u kojima je ljudski život izložen opasnosti, kao što su potraga i spašavanje, čišćenje otrovnih izljeva, razminiranje. Grupe mobilnih robota mogu biti korisne kada je potrebno izvršiti zadatak unutar vrlo velikih ili neuređenih okruženja, zbog svoje sposobnosti da roboti rade autonomno bez ikakvog centraliziranog sustava kontrole samo pomoću informacija od

svojih bliskih susjeda. U nastavku ćemo ukratko opisati neke primjene grupe mobilnih robota. [6]

Jedna od najznačajnijih primjena je vojna. Jedan od najvećih rojeva autonomnih mikro-dronova pustilo je američko ministarstvo obrane na poligonu China Lake u Kaliforniji. Na Slika 3. prikazan je roj bespilotnih letjelica nazvanih Perdix, po grčkom mitskom heroju pretvorenom u pticu. Perdix je kolektivni organizam koji dijeli jedan distribuirani mozak za donošenje odluka i prilagođavaju se jedni drugima poput rojeva u prirodi. [7]



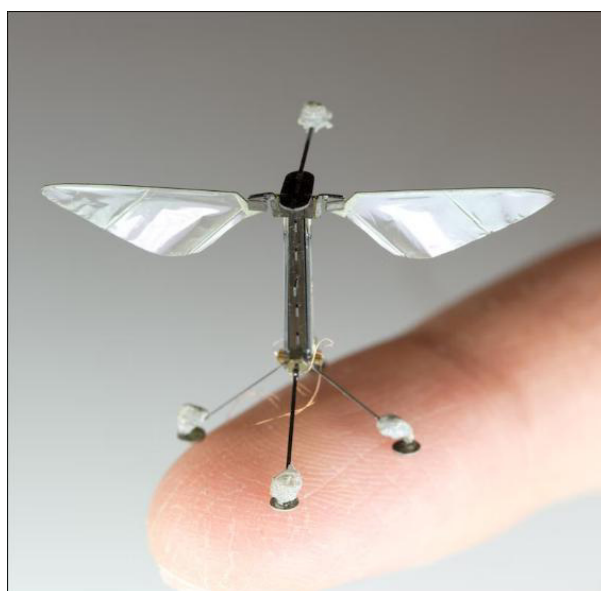
Slika 3. Perdix, roj bespilotnih letjelica [7]

Slika 4. prikazuje autonomni sustav minolovaca predstavljen od strane kraljevske mornarice Ujedinjenog Kraljevstva. Ovaj sustav dizajniran je za suzbijanje digitalnih mina, koje mogu otkriti i gađati ratne brodove koji prolaze iznad njih. Osim toga ima sposobnost osjetiti i izbjeći druga plovila i opasnosti u plovidbi te može raditi s drugim robotskim sustavima u koordiniranim vježbama. Sustav se sastoji od 11 metara dugog površinskog plovila bez posade koji vuče tri pomoćna čamca opremljena elektrodama i sensorima za otkrivanje i detoniranje mina. [8]



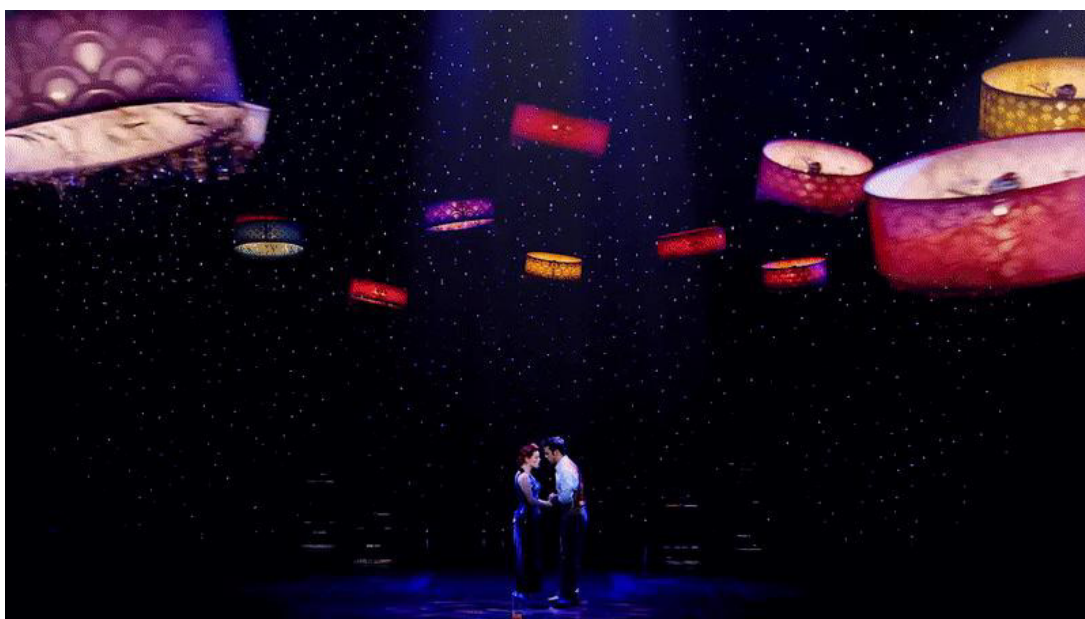
Slika 4. Autonomni sustav minolovaca kraljevske mornarice UK-a [8]

Istraživači instituta Wyss sa Harvarda razvili su RoboBees, sustave koji bi mogli obavljati oprašivanje usjeva ili pomoći u misijama traganja i spašavanja. RoboBee (Slika 5.) je otprilike upola manje od spajalice za papir, teži manje od jednog grama i leti pomoću „umjetnih mišića“ odnosno pomoću piezoelektričnih pokretača – traka od keramike koje se šire i skupljaju kada se promijeni električno polje. [9]



Slika 5. RoboBee [9]

Osim primjena u rješavanju opasnih zadataka, grupa mobilnih robota, odnosno letećih objekata (dronova) možemo pripomoći i u umjetničkom smislu kod stvaranja posebnog doživljaja. Raffaello D'Andrea, inženjer i umjetnik, sa svojim timom specijalizirao se za izradu unutarnjih rasvjetnih zaslona za događaje uživo s desecima autonomnih dronova koji lete u tandemu. Rezultati njihovog rada su čarobni. Koordinirani rojevi dronova stvaraju očaravajući plesni oblak svjetlosti koji se kreće u ritmu pjesme (Slika 6.). [10]



Slika 6. Grupa dronova koja tvori plesni oblak svjetlosti [10]

2. NOTACIJA I PRELIMINARNI REZULTATI

Na samom početku rada potrebno je upoznati se s notacijom i dati matematičke osnove na kojima se temelji rad.

2.1. Norme signala i sustava

Norma je podatak koji nam daje informaciju o veličini signala ili sustava. Postoji više različitih normi, a koja norma je prikladna ovisi o situaciji. Prije upoznavanja sa normama, u nastavku su navedena 4 uvjeta koja mora zadovoljiti svaka norma:

- i. $\|x\| \geq 0$
- ii. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
- iii. $\|a \cdot x\| = |a| \cdot \|x\|$, $\forall a \in \mathbb{R}$
- iv. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Na samom početku prikazat ćemo različite norme vektora i matrica [11] na temelju kojih se i dobiju norme signala i sustava. Općeniti izraz za izračunavanje tzv. p-norme vektora je:

$$\|\mathbf{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad p \geq 1 \quad (1)$$

Za $p = 1$ dobivamo 1-normu koja je jednaka sumi apsolutnih vrijednosti članova vektora:

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|. \quad (2)$$

Za $p = 2$ dobivamo 2-normu ili Euklidsku normu koja je jednaka korijenu sume kvadrata članova vektora:

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}. \quad (3)$$

Za $p = \infty$ dobivamo ∞ -normu koja je jednaka najvećoj apsolutnoj vrijednosti elementa vektora:

$$\|\mathbf{x}\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|. \quad (4)$$

Izraz za matričnu induciranu p -normu glasi:

$$\|\mathbf{M}\|_{p\text{-ind}} = \max_{x \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}} \frac{\|\mathbf{M}x\|_p}{\|x\|_p}. \quad (5)$$

2.1.1. Norme signala

Ako imamo signal $u(t)$ opći izraz za p -normu signala glasi:

$$\|\mathbf{u}\|_p = \left(\sum_k \int_0^{\infty} |u_k(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (6)$$

1-norma signala odgovara površini ispod apsolutne vrijednosti signala $u(t)$:

$$\|\mathbf{u}\|_1 = \sum_k \int_0^{\infty} |u_k(t)| dt. \quad (7)$$

2-norma signala odgovara energiji signala:

$$\|\mathbf{u}\|_2 = \left(\sum_k \int_0^{\infty} |u_k(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (8)$$

∞ -norma je jednaka iznosu supremuma (najmanja gornja granica) apsolutne vrijednosti signala, odnosno predstavlja vrh signala:

$$\|\mathbf{u}\|_{\infty} = \sup_t \max_k |u_k(t)|. \quad (9)$$

2.1.2. Norma sustava

Ako razmatramo linearne, vremenski nepromjenjive sustave, izlaz sustava je jednak

$\mathbf{y} = \mathbf{G}u$, gdje je u ulaz u sustav, a G prijenosna funkcija sustava.

Inducirana norma sustava glasi:

$$\|\mathbf{G}\|_{p\text{-ind}} = \sup_{u \in L_p^m [0, \infty) \setminus \{0\}} \frac{\|\mathbf{G}u\|_p}{\|u\|_p} \quad (10)$$

Signal mora imati konačnu normu, odnosno signal mora konvergirati prema nuli. [12]

2.2. Stabilnost sustava

Pojam stabilnosti je jedan od ključnih pojmova kod upravljanja dinamičkim sustavima. Kada kažemo da je nešto stabilno općenito mislimo da je to nešto što se u odsustvu poremećaja vraća u ravnotežni položaj. Sustav smatramo stabilnim ako rješenje sustava kada vrijeme teži beskonačnosti teži ravnotežnom stanju. Postoje različiti načini kojima je moguće ustanoviti stabilnost sustava, a jedan od najvažnijih je analiza stabilnosti po Lyapunovu, ruskom matematičaru čiji doprinos u teoriji stabilnosti je bio od velike važnosti.

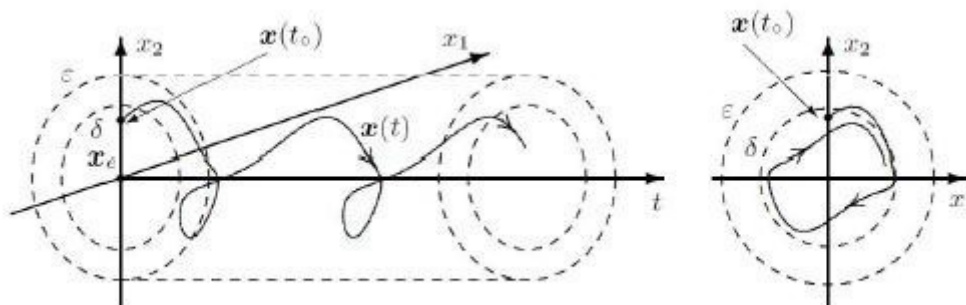
2.2.1. Lyapunvljeva analiza stabilnosti

Prema Lyapunovu imamo 3 različite definicije stabilnosti sustava ovisno o tome kako se rješenje sustava ponaša u okolini ravnotežne točke.

Definicija 1. (Stabilnost) Za ravnotežno stanje $x = 0$ kažemo da je stabilno ako za neki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ tako da iz $\|x(t_0)\| < \delta$, slijedi $\|x(t)\| < \varepsilon$ za sve $t > t_0$. Ako ovo pak ne vrijedi, kažemo da ravnotežno stanje nije stabilno. Prethodna definicija može se formalno prikazati na sljedeći način:

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \|x(t_0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon, \quad t \geq 0.$$

Ova definicija slikovito je prikazana na Slika 7. Kao što vidimo iz slike krećemo od nekog početnog uvjeta u faznoj ravnini koji se nalazi unutar radijusa δ i ako je sustav stabilan trajektorija sustava čitavo vrijeme nalazi se unutar valjka radijusa ε . Jednostavnije rečeno sustav je stabilan ukoliko je trajektorija konačna, odnosno ukoliko sustav ne konvergira u beskonačnost.



Slika 7. Slikoviti prikaz definicije stabilnosti sustava [13]

Definicija 2. (Asimptotska stabilnost) Za ravnotežno stanje kažemo da je asimptotski stabilno ako je zadovoljen dodatni uvjet da za neki $\delta > 0$ iz $\|x(t_0)\| < \delta$ slijedi da $x(t) \rightarrow 0$ kada $t \rightarrow \infty$. Formalno se ovo može zapisati na sljedeći način:

$$\forall \delta > 0, \quad \|x(t_0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty.$$

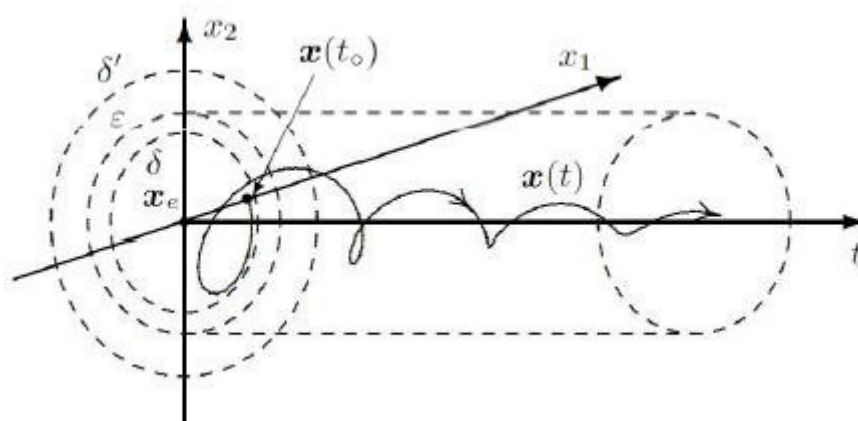
Varijanta asimptotske stabilnosti je eksponencijalna stabilnost ukoliko možemo definirati granicu konvergencije vektora stanja.

Definicija 3. (Eksponencijalna stabilnost) Za ravnotežno stanje kažemo da je eksponencijalno stabilno ako postoje $\gamma, \varepsilon > 0$ takvi da za svaki $\delta > 0$ vrijedi

$\|x(t)\| < \varepsilon \|x(t_0)\| e^{-\gamma(t-t_0)}$ za svaki $t > t_0$ kad god je $\|x(t_0)\| < \delta$. Ova definicija se može prikazati i na sljedeći način:

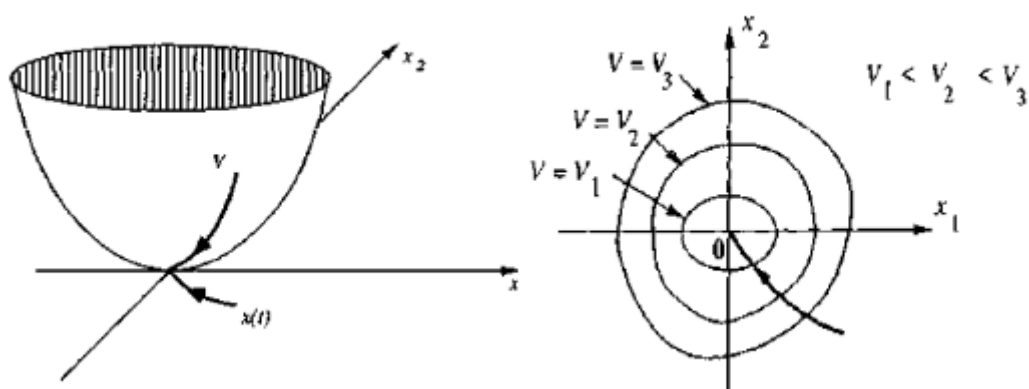
$$\forall \delta > 0, \quad \exists \gamma, \varepsilon > 0, \quad \|x(t_0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon \|x(t_0)\| e^{-\gamma(t-t_0)}, \quad t > t_0$$

Slikovito asimptotsku stabilnost možemo prikazati pomoću Slika 8., gdje vidimo da ukoliko krenemo od neke početne točke u faznoj ravnini unutar radijusa δ trajektorija s vremenom konvergira prema nuli.



Slika 8. Slikoviti prikaz definicije asimptotske stabilnosti [13]

Na temelju dosad prikazanih rezultata možemo stabilnost po Lyapunovu gledati i preko metode fazne ravnine. Ako imam Lyapunovljevu funkciju V koja je pozitivno definitna, da bi sustav bio stabilan njena derivacija po vremenu dV/dt treba biti negativno definitna. Slika 9. nam slikovito prikazuje da ako prikazanu funkciju $x(t)$, odnosno trajektoriju u faznoj ravnini projiciramo na pozitivno definitnu funkciju V na način da računamo vrijednost funkcije uzduž vremena, dobit ćemo trajektoriju koja se kreće po pozitivno definitnoj funkciji prema nuli, a to znači da tijekom vremena funkcija opada. Opadanje funkcije tijekom vremena zapravo znači da je njena derivacija u vremenu manja od nule. Ako gledamo kako ta funkcija siječe različite nivo krivulje Lyapunovljeve funkcije vidimo kako je ta vrijednost sve manja i manja. [13]



Slika 9. Fazna interpretacija stabilnosti po Lyapunovu [13]

2.2.2. Lyapunovljeva analiza linearnih dinamičkih sustava

Imamo autonomni linearni dinamički sustav koji je dan izrazom:

$$\dot{x} = Ax, \quad (11)$$

gdje je $\dot{x}, x \in \mathbb{R}^n$ i $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Lyapunovljeva funkcija za linearne sustave generalno je u kvadratnom obliku pa tako imamo:

$$V(x) = x^T P x, \quad (12)$$

gdje je P simetrična matrica dimenzija $n \times n$.

Da bi funkcija bila pozitivno definitna matrica P mora biti pozitivno definitna:

$$P = P^T > 0. \quad (13)$$

Za simetričnu pozitivno definitnu matricu vrijedi da su sve njene svojstvene vrijednosti isključivo realne i pozitivne.

Derivacija Lyapunovljeve funkcije jednaka je:

$$\frac{dV(x)}{dt} = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} = (Ax)^T P x + x^T P (Ax) = x^T (A^T P + PA)x. \quad (14)$$

Da bi sustav bio stabilan bio stabilan derivacija Lyapunovljeve funkcije mora biti negativno definitna, pa dobivamo sljedeći kriterij stabilnosti:

$$A^T P + PA < 0. \quad (15)$$

2.3. Metzlerova matrica

Metzlerova matrica je matrica čiji su nedijagonalni elementi nenegativne vrijednosti. Pojavljuje se u analizi stabilnosti pozitivnih dinamičkih sustava. Matematički gledano matrica A iz jednadžbe (11) je Metzlerova ako vrijedi:

$$A = (a_{ij}); \quad a_{ij} > 0, \quad i \neq j. \quad (16)$$

3. POZITIVNI SUSTAVI

Jednostavno rečeno pozitivni sustavi su oni sustavi čije su varijable stanja uvijek nenegativne vrijednosti, ako je početno stanje okarakterizirano nenegativnim vrijednostima. Za pozitivne sustave vrijedi sljedeća karakterizacija (asimptotske, eksponencijalne) stabilnosti:

Propozicija 1. Za danu Metzlerovu matricu $A = \mathbb{R}^{n \times n}$ ekvivalentne su sljedeće tvrdnje:

- 1.1) Matrica A je Hurwitzova, odnosno njene svojstvene vrijednosti imaju negativan realni dio.
- 1.2) Postoji vektor $\xi \in \mathbb{R}^n$, takav da je $\xi > 0$ i $A\xi < 0$.
- 1.3) Postoji vektor $z \in \mathbb{R}^n$, takav da je $z > 0$ i $z^T A < 0$.
- 1.4) Postoji dijagonalna matrica $P > 0$ takva da je $A^T P + PA < 0$
- 1.5) Postoji $-A^{-1}$ i ima nenegativne ulaze.

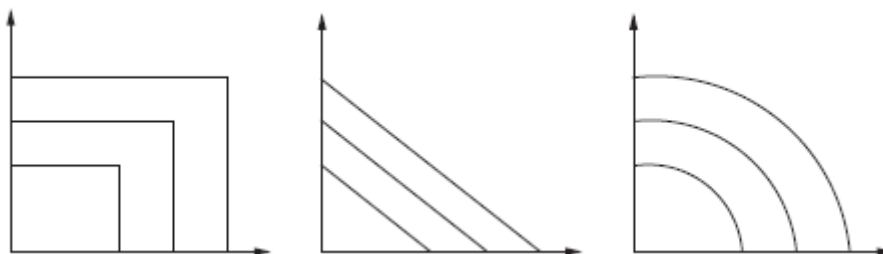
Ako $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ i $z = (z_1, \dots, z_n)$ zadovoljavaju uvjete 1.2) i 1.3), tada $P = \text{diag}(z_1/\xi_1, \dots, z_n/\xi_n)$ zadovoljava uvjet 1.4)

Uvjeti 1.2), 1.3) i 1.4) predstavljaju 3 različita oblika Lyapunovljevih funkcija na temelju čega dobijemo 3 različite nivo krivulje koje su prikazane na Slika 10.

Ako je $A\xi < 0$ onda je Lyapunovljeva funkcija jednaka $V(x) = \max_i(x_i/\xi_i)$ što odgovara pravokutnim nivo krivuljama.

Ako je $z^T A < 0$ onda je $V(x) = z^T x$ što odgovara linearnim nivo krivuljama.

Ako je $A^T P + PA < 0$ i $P > 0$ tada je $V(x) = x^T P x$, odnosno Lyapunovljeva funkcija je kvadratnog oblika pa dobivamo nivo krivulje u obliku elipse, što je karakteristično za linearne sustave. [4]



Slika 10. Nivo krivulje Lyapunovljevih funkcija iz uvjeta 1.2), 1.3) i 1.4) [4]

Jedna od glavnih prednosti pozitivnih sustava je ta da se sinteza pozitivnih sustava može provesti pomoću linearnog programiranja s obzirom da broj parametara linearno raste s brojem varijabli stanja. Kao što vidimo iz uvjeta u Propoziciji 1. dovoljno je tražiti dijagonalnu matricu P koja zadovoljava Lyapunovljevu nejednakost.

3.1. Analiza pozitivnih sustava

U ovom radu bavit ćemo se pozitivnim linearnim sustavima u kontinuiranoj domeni. Prikazan je sustav u obliku prostora stanja:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t), \quad t \in \mathbb{R}_+. \end{aligned} \quad (17)$$

U ovim jednadžbama x predstavlja n -dimenzionalnu varijablu stanja, u je m -dimenzionalna ulazna varijabla, a y je p -dimenzionalni izlaz.

Za sustav dan jednadžbama (17) razlikujemo dvije definicije stabilnosti sustava:

- **unutarnja stabilnost:** za svaki nenegativan početni uvjet $x(0)$ i svaki nenegativan ulaz $u(t)$, za $t \geq 0$, varijable stanja $x(t)$ i izlaz $y(t)$ za $t \geq 0$ ostaju nenegativne u svakom trenutku t ;
- **vanjska stabilnost:** pretpostavljajući da je početni uvjet $x(0)$ jednak 0, za svaki nenegativan ulaz $u(t)$ za $t \geq 0$, izlazna varijabla $y(t)$ za $t \geq 0$ ostaje nenegativna u svakom trenutku t .

Unutarnja stabilnost je ekvivalentna tome da je matrica A Metzlerova matrica, dok su matrice B, C i D nenegativne matrice. Vanjska stabilnost je ekvivalentna tome da je impulsni odziv sustava nenegativan. Impulsni odziv dan je izrazom:

$$g(t) = Ce^{At}B\Theta(t) + D\delta(t), \quad (18)$$

Gdje je $\delta(t)$ Diracova funkcija, a $\Theta(t)$ Heavisideova step funkcija.

Poznato je da unutarnja stabilnost osigurava vanjsku stabilnost, dok obrnuto nije slučaj.

U nastavku kada govorimo o pozitivnim sustavima uvijek mislimo na unutarnje stabilne pozitivne sustave. [1]

Osim postizanja stabilnosti koja je ključna kod upravljanja dinamičkim sustavima, u ovom radu fokusirati ćemo se na otklanjanje ili smanjenje utjecaja vanjskih poremećaja koji djeluju na sustav, s obzirom da u stvarnom svijetu gotovo uvijek imamo djelovanje nekog vanjskog poremećaja.

U nastavku ćemo prikazati dva teorema u kojima su kao kriteriji optimizacije korištene prva ili beskonačna inducirana norma zatvorenog sustava. [4]

Teorem 1. Za impulsni odziv iz (18) gdje je $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ Metzlerova matrica i $B \in \mathbb{R}_+^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}_+^{p \times n}$, $D \in \mathbb{R}_+^{r \times m}$ i za γ koja je pozitivan realni broj ekvivalentne su sljedeće tvrdnje:

- 1.1) Matrica A je Hurwitzova i $\|g\|_{\infty\text{-ind}} < \gamma$.
- 1.2) Postoji $\xi \in \mathbb{R}_+^n$ tako da je

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} 0 \\ \gamma \mathbf{1} \end{bmatrix}. \quad (19)$$

Ako ξ zadovoljava (19), onda je $|x(t)| \leq \xi$ za sva rješenja jednadžbe $\dot{x} = Ax + Bw$ s $|x(0)| \leq \xi$ i $\|w\|_{\infty} \leq 1$, gdje w predstavlja poremećaj koji djeluje na sustav.

Teorem 2. Za impulsni odziv iz (18) gdje je $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ Metzlerova matrica i $B \in \mathbb{R}_+^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}_+^{p \times n}$, $D \in \mathbb{R}_+^{r \times m}$ ekvivalentne su sljedeće tvrdnje:

- 2.1) Matrica A je Hurwitzova i $\|g\|_{1\text{-ind}} < \gamma$.
- 2.2) Postoji $p \in \mathbb{R}_+^n$ tako da je

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} p \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} 0 \\ \gamma \mathbf{1} \end{bmatrix}. \quad (20)$$

Ako p zadovoljava (20), onda sva rješenja jednadžbe $\dot{x} = Ax + Bw$ zadovoljavaju

$$p^T |x(t)| + \int_0^t |Cx + Dw|_1 d\tau \leq p^T |x(0)| + \gamma \int_0^t |w|_1 d\tau \quad (21)$$

3.2. Sinteza regulatora

Nakon analize stabilnosti možemo pristupiti sintezi distribuiranog regulatora za upravljanje grupom mobilnih robota. Cilj je pronaći parametre regulatora tako da zatvoreni krug bude stabilan, te da regulator(i) učinkovito otklanjaju utjecaj poremećaja na izlazne varijable od interesa. Kao kriteriji optimizacije opet koristimo prvu ili beskonačnu induciranu normu

sustava koja je zapravo mjera učinkovitosti sustava, odnosno daje nam informaciju o tome koliko je uspješno smanjen utjecaj poremećaja. Za sintezu regulatora postoje dva teorema, koji su prikazani u nastavku. [4]

Teorem 3. Neka je D skup od $m \times m$ dijagonalnih matrica sa ulazima u intervalu $[0,1]$. Pretpostavimo da je $A + ELF$ Metzlerova matrica i $C + GLF \geq 0$, $B + ELH \geq 0$,

$D + GLH \geq 0$ za sve $L \in D$. $g_L(t)$ je impulsni odziv prijenosne funkcije dane izrazom:

$$(C + GLF)[sI - (A + ELF)]^{-1}(B + ELH) + D + GLH$$

Ako je $F, H \geq 0$, tada vrijede sljedeći uvjeti:

3.1) Postoji $L \in D$ takav da je $A + ELF \in \mathbb{R}^{n \times n}$ Hurwitzova matrica i

$$\|g_L\|_{\infty\text{-ind}} < \gamma.$$

3.2) Postoji $\xi \in \mathbb{R}_+^n$, $\mu \in \mathbb{R}_+^m$ tako da je

$$\begin{aligned} A\xi + B\mathbf{1} + E\mu &< 0 \\ C\xi + D\mathbf{1} + G\mu &< \gamma\mathbf{1} \\ F\xi + H\mathbf{1} &\geq \mu \end{aligned} \tag{22}$$

Ako ξ, μ zadovoljavaju uvjete iz (22) onda za L vrijedi sljedeće $\mu = L(F\xi + H\mathbf{1})$.

Teorem 4. Neka je D skup od $m \times m$ dijagonalnih matrica sa ulazima u intervalu $[0,1]$. Pretpostavimo da je $A + ELF$ Metzlerova matrica i $C + GLF \geq 0$, $B + ELH \geq 0$,

$D + GLH \geq 0$ za sve $L \in D$. $g_L(t)$ je impulsni odziv prijenosne funkcije dane izrazom:

$$(C + GLF)[sI - (A + ELF)]^{-1}(B + ELH) + D + GLH$$

Ako je $E, G \geq 0$, tada vrijede sljedeći uvjeti:

4.1) Postoji $L \in D$ takav da je $A + ELF \in \mathbb{R}^{n \times n}$ Hurwitzova matrica i

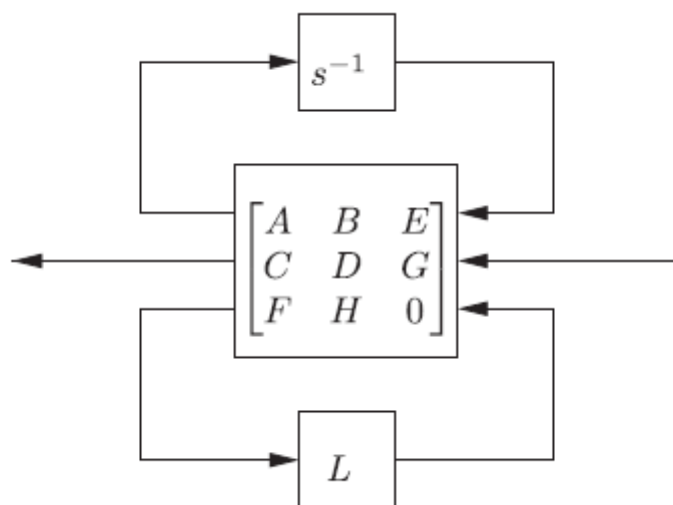
$$\|g_L\|_{1\text{-ind}} < \gamma.$$

4.2) Postoji $p \in \mathbb{R}_+^n$, $q \in \mathbb{R}_+^m$ tako da je

$$\begin{aligned} A^T p + B^T \mathbf{1} + F^T q &< 0 \\ B^T p + D^T \mathbf{1} + H^T q &< \gamma \mathbf{1} \\ E^T p + G^T \mathbf{1} &\geq q \end{aligned} \tag{23}$$

Ako p, q zadovoljavaju uvjete iz (23) onda za L vrijedi sljedeće $q = L(E^T p + G^T \mathbf{1})$.

Na Sliku 11. je ilustriran sustav čija prijenosna funkcija zatvorenog kruga odgovara onoj iz Teorema 3. i 4.

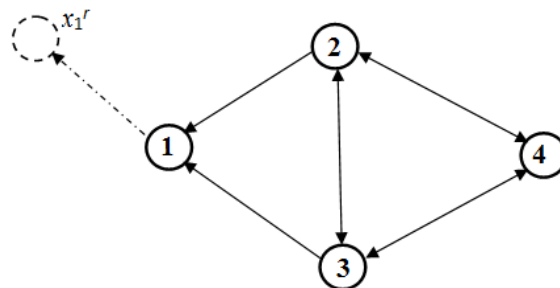


Slika 11. Ilustracija sustava iz Teorem 3. i 4. [4]

4. UPRAVLJANJE GRUPAMA ROBOTA

U ovom odjeljku bavit ćemo se upravljanjem grupama mobilnih robota, simulirat ćemo kako grupa mobilnih robota zauzima željenu formaciju i promotriti kako utjecaj raznih vanjskih poremećaja djeluje na zauzimanje formacija.

Za početak uzet ćemo grupu od 4 mobilna robota, a upravljanje između robota zasniva se na mjerenju udaljenosti između njih. Na Sliku 12. prikazana je komunikacijska mreža 4 robota, gdje se prvi robot giba prema nekoj referentnoj točki, a ostali roboti će pokušati zauzeti željenu formaciju s obzirom na referentnu točku uzimajući u obzir međusobne udaljenosti. Strelice označavaju u kojem smjeru se odvija komunikacija, odnosno koji robot uzima koju udaljenost u obzir. Prvi robot sam ide prema referentnoj točki ne uzimajući u obzir udaljenosti drugih robota, dok npr. drugi robot uzima u obzir udaljenost između 1. i između 3. i zauzima poziciju u odnosu na njih.



Slika 12. Komunikacijska mreža 4 robota

Upravljački zakon za model na slici glasi:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= k(x_1^r - x_1) \\
 \dot{x}_2 &= l_{21}(x_1 - x_2) + l_{23}(x_3 - x_2) + l_{24}(x_4 - x_2) \\
 \dot{x}_3 &= l_{31}(x_1 - x_3) + l_{32}(x_2 - x_3) + l_{34}(x_4 - x_3) \\
 \dot{x}_4 &= l_{42}(x_2 - x_4) + l_{43}(x_3 - x_4)
 \end{aligned} \tag{24}$$

Ako izraz iz (24) prikažemo u matričnom obliku imamo:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & -l_{21} - l_{23} - l_{24} & l_{23} & l_{24} \\ l_{31} & l_{32} & -l_{31} - l_{32} - l_{34} & l_{34} \\ 0 & l_{42} & l_{43} & -l_{42} - l_{43} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} kx_1^r \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (25)$$

Matrica uz varijable stanja odgovara matrici zatvorenog regulacijskog kruga $A_{cl} = A + ELF$, a parametri l_{ij} predstavljaju pojačanja regulatora. Potrebno je pronaći pojačanja regulatora koja će stabilizirati sustav, odnosno za koja će matrica $A + ELF$ biti stabilna. Za sintezu regulatora koristit ćemo se Teoremom 4., ali potrebno je prvo odrediti matrice E i F .

Ako uzmemo parametre regulatora i svaki prikažemo u svom redu na onim mjestima gdje se pojavljuju u matrici A_{cl} dobijemo sljedeću matricu:

$$M = \begin{bmatrix} l_{21} & -l_{21} & 0 & 0 \\ l_{31} & 0 & -l_{31} & 0 \\ 0 & l_{32} & -l_{32} & 0 \\ 0 & -l_{23} & l_{23} & 0 \\ 0 & l_{42} & 0 & -l_{42} \\ 0 & -l_{24} & 0 & l_{24} \\ 0 & 0 & l_{43} & -l_{43} \\ 0 & 0 & -l_{34} & l_{34} \end{bmatrix}. \quad (26)$$

Sada je potrebno utvrditi koji zbroj redaka iz matrice $M(26)$ odgovara pojedinom retku matrice A_{cl} , na temelju čega dobijemo matricu E koja je jednaka:

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (27)$$

Sada ćemo matricu M rastaviti na dvije matrice tako da je jedna dijagonalna matrica s pojačanjima regulatora na dijagonali, dok u drugu samo prepíšemo koeficijente uz pojačanja onako kako su u matrici M i dobijemo:

$$M = \begin{bmatrix} l_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & l_{31} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l_{32} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & l_{42} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & l_{24} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & l_{43} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & l_{34} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (28)$$

Prva matrica je matrica L , a druga matrica F .

S obzirom da je naš cilj grupu mobilnih robota dovesti u neku određenu formaciju uz djelovanje nekog vanjskog poremećaja, upravljački zakon iz (25) ćemo proširiti na sljedeći način:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = A_{cl} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} - A_{cl} \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \\ x_4^* \end{bmatrix} + B \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} kx_1^r \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (29)$$

gdje su x_i^* željene pozicije robota, a v_i poremećaji koji djeluju na sustav.

4.1. Rješenje problema i prikaz rezultata dobivenih simulacijom

Sada kada imamo sve potrebne matrice:

$$A = \begin{bmatrix} -k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = I, \quad D = 0,$$

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$L = \text{diag}\{l_{21}, l_{31}, l_{32}, l_{23}, l_{42}, l_{24}, l_{43}, l_{34}\}, \quad (30)$$

$$F = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad G=0, \quad H=0,$$

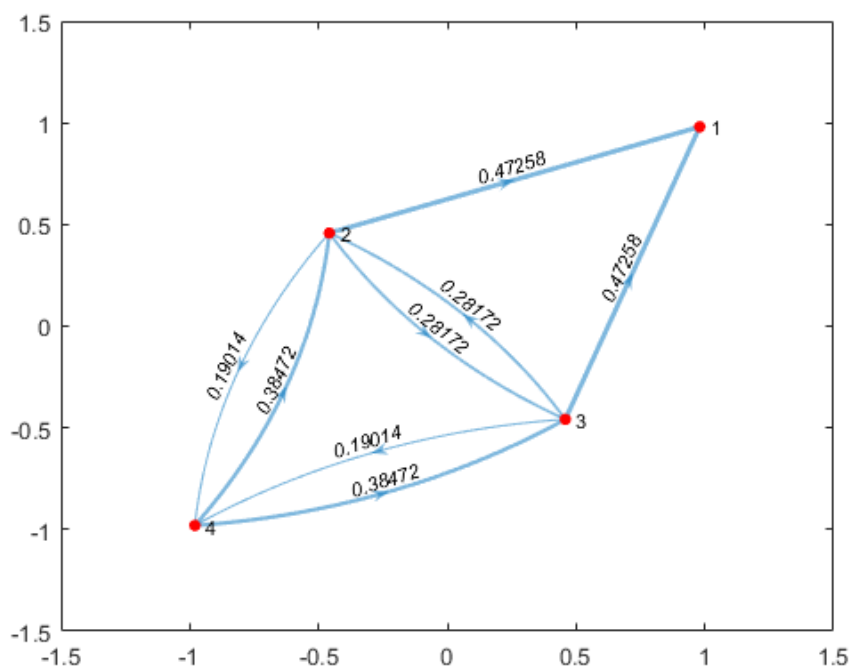
možemo pristupiti rješavanju problema pomoću Teorema 4.

Naš problem riješen je pomoću Matlabovog alata YALMIP, koji je jedan od prikladnih alata za rješavanje problema linearnog programiranja (LP) kao što je naš, ali osim toga podržava i kvadratno programiranje (QP), konusno programiranje drugog reda (SOCP), poluodređeno programiranje, maksimiziranje determinante, miješano cjelobrojno programiranje, posinorijsko programiranje, geometrijsko programiranje, poluodređene programe s bilinearnim matričnim nejednakostima, te višeparametarsko linearno i kvadratno programiranje. [14]

Poremećaj ćemo zadati kao šum i promotriti ćemo i usporediti rješenja za različito djelovanje poremećaja na pojedinog robota. Podatak o tome kojom jačinom će poremećaj djelovati na kojeg robota sadržan je u matrici B .

Za početak ćemo uzeti da je na svakog robota isti utjecaj poremećaja, odnosno

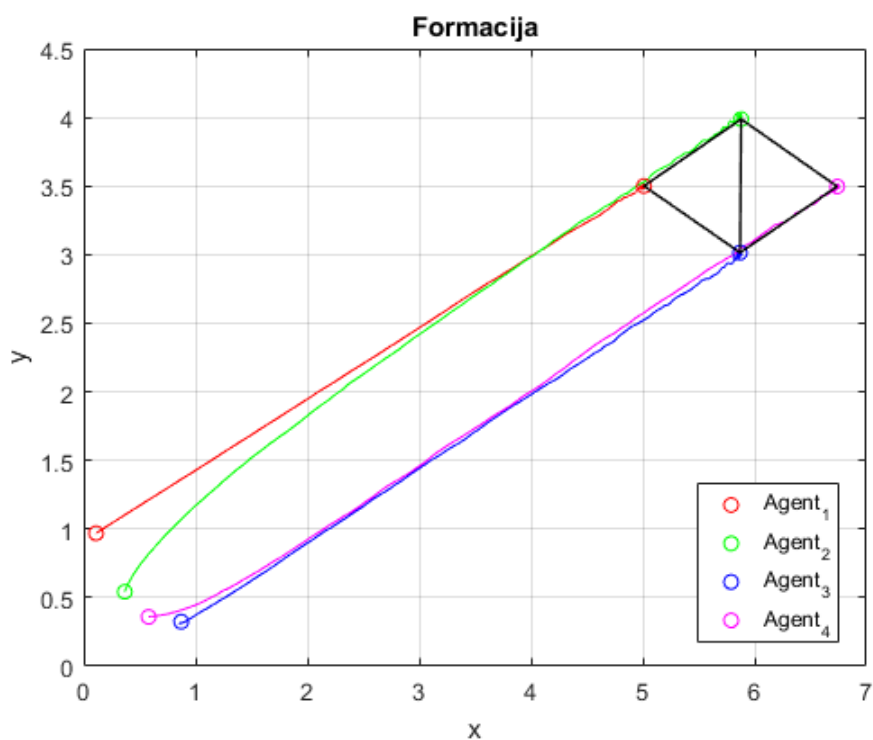
$B = \text{diag}\{1,1,1,1\}$. Na Slika 13. prikazana je ilustracija dobivenih pojačanja, a na njoj je debljina linije proporcionalna iznosu pojačanja, koje je isto tako navedeno uz svaki brid na grafu interakcija kod upravljanja.



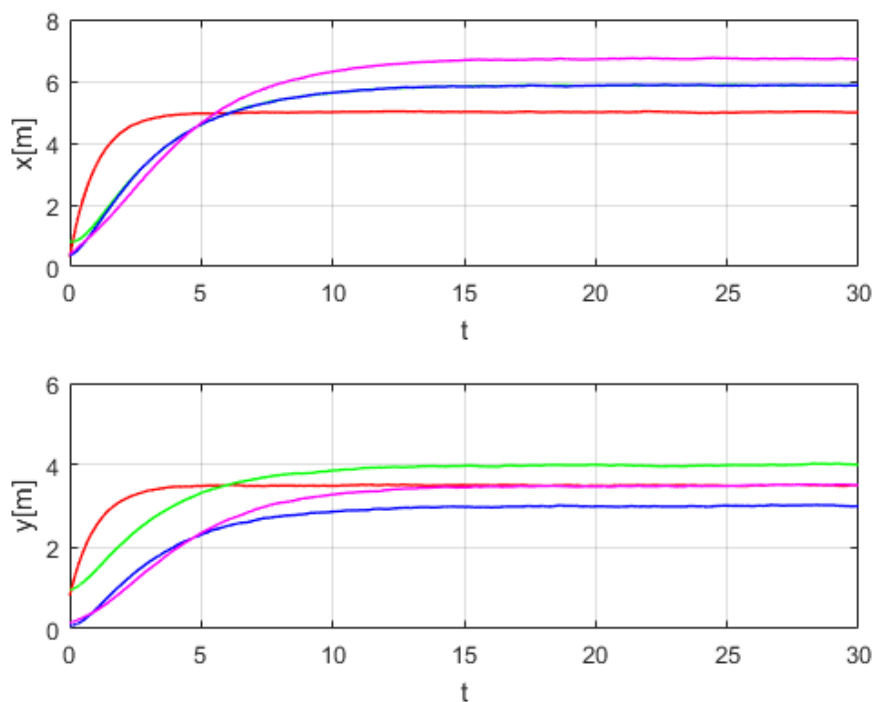
Slika 13. Ilustracija optimalnih pojačanja za slučaj $B = \text{diag}\{1, 1, 1, 1\}$

Na Slika 14. prikazan je dolazak iz nekih početnih točaka u zadanu formaciju. Kao što možemo vidjeti u odzivima imamo malo titranje odnosno oscilacije zbog djelovanja poremećaja.

Na Sliku 15. prikazano je zauzimanje formacije po koordinatnim osima i iz nje možemo vidjeti da je do zauzimanja formacije došlo relativno brzo.

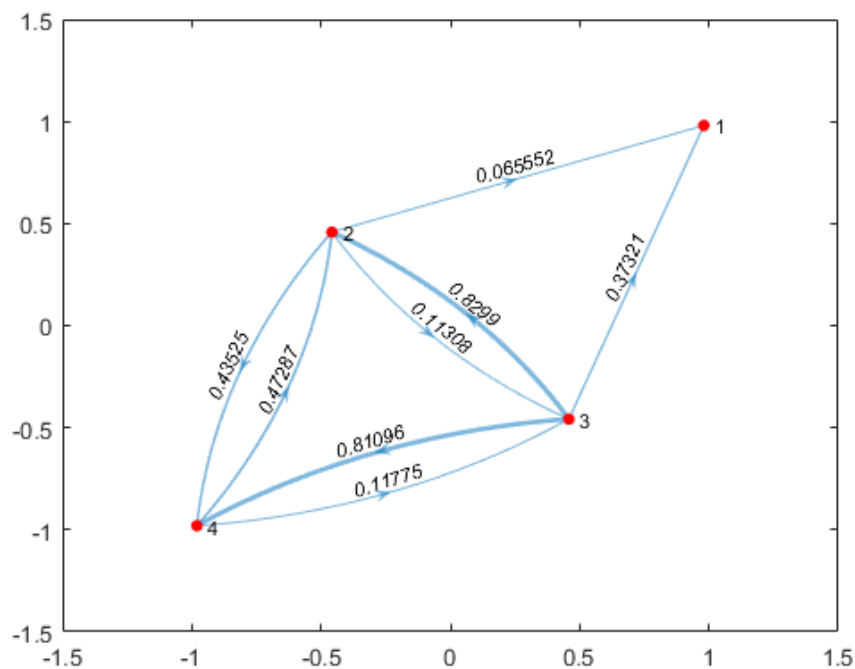


Slika 14. Prikaz zauzimanja formacije za slučaj $B = \text{diag}\{1, 1, 1, 1\}$

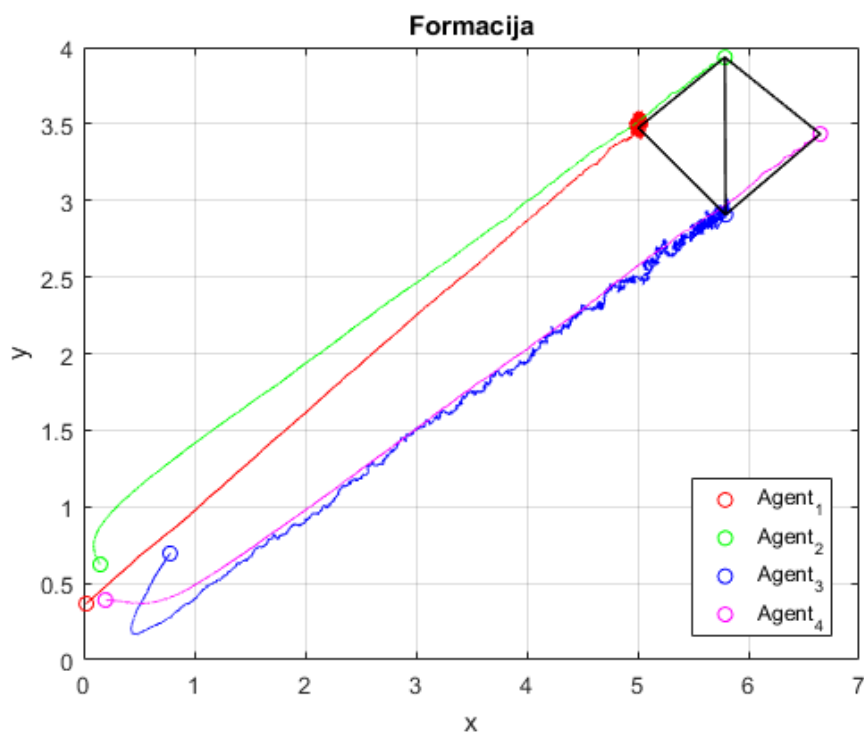


Slika 15. Prikaz zauzimanja formacije po koordinatnim osima za slučaj $B = \text{diag}\{1, 1, 1, 1\}$

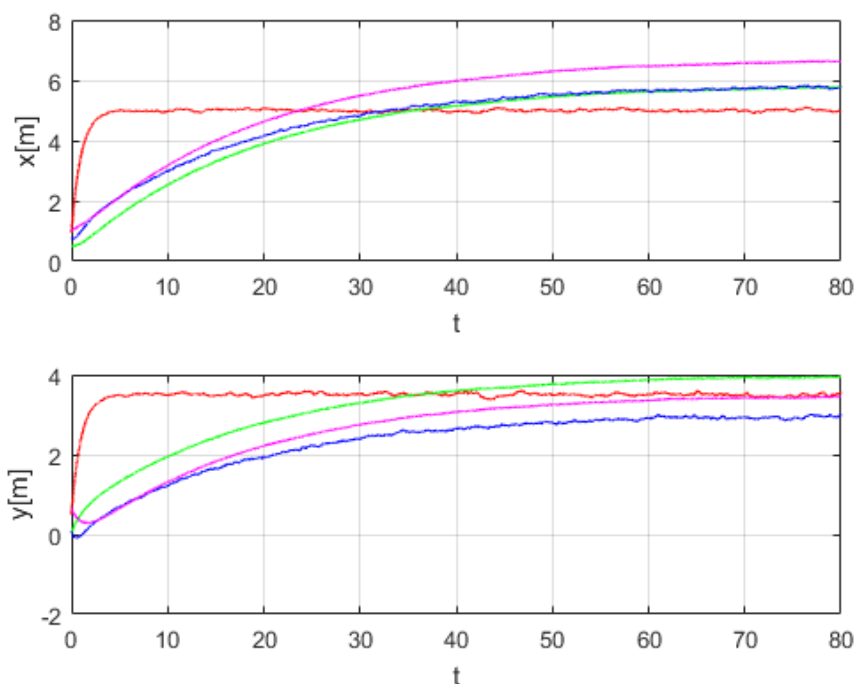
Sada ćemo razmotriti slučaj kada na 1. i 3. robota poremećaj ima 10 puta veći utjecaj nego na 2. i 4. robota, $B = \text{diag}\{10, 1, 10, 1\}$.



Slika 16. Ilustracija optimalnih pojačanja za slučaj $B = \text{diag}\{10, 1, 10, 1\}$



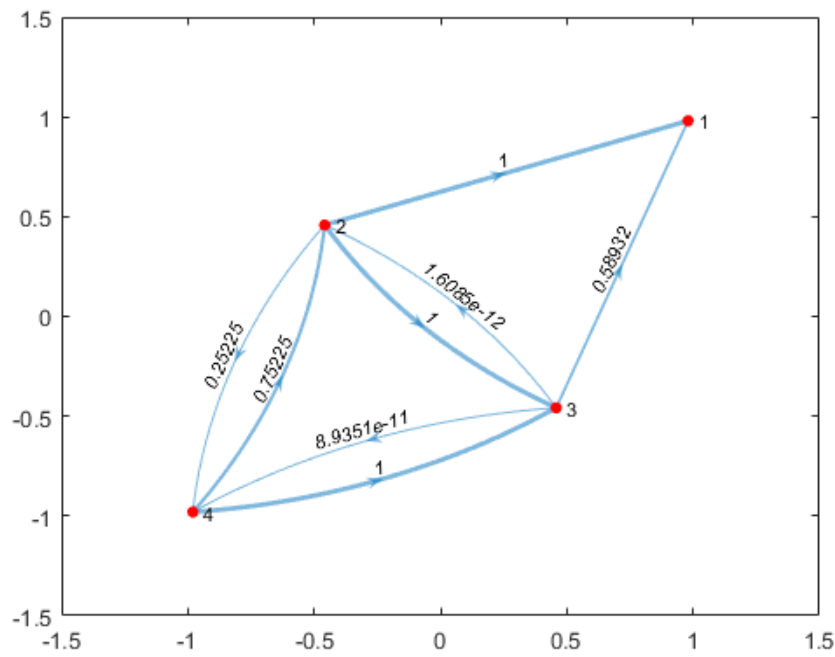
Slika 17. Prikaz zauzimanja formacije za slučaj $B = \text{diag}\{10, 1, 10, 1\}$



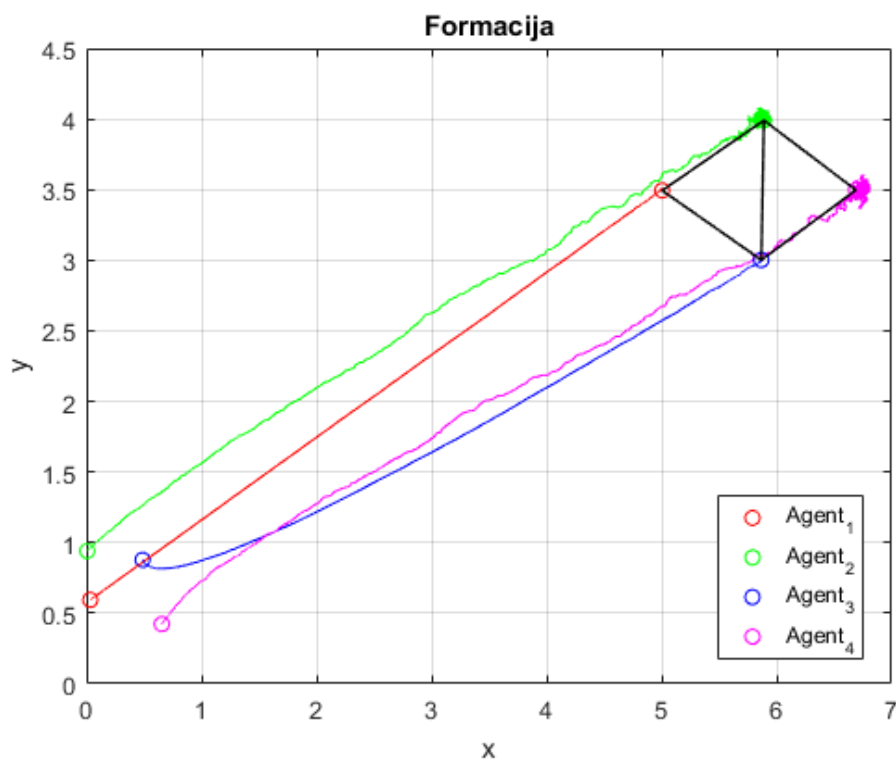
Slika 18. Prikaz zauzimanja formacije po koordinatnim osima za slučaj $B = \text{diag}\{10, 1, 10, 1\}$

Kao što možemo vidjeti iz Slika 17. i Slika 18. oscilacije u odzivima su veće kod 1. i 3. robota na koje poremećaj ima veći utjecaj i titranje se nastavlja čak i kad roboti zauzmu željenu formaciju. Ipak oscilacije su veće kod trećeg nego kod prvog robota s obzirom na činjenicu da prvi robot ne osjeća druge robote, dok drugi njega osjećaju. Osim što su veće oscilacije vidimo i da je potrebno znatno duže vremena za zauzimanje željene formacije.

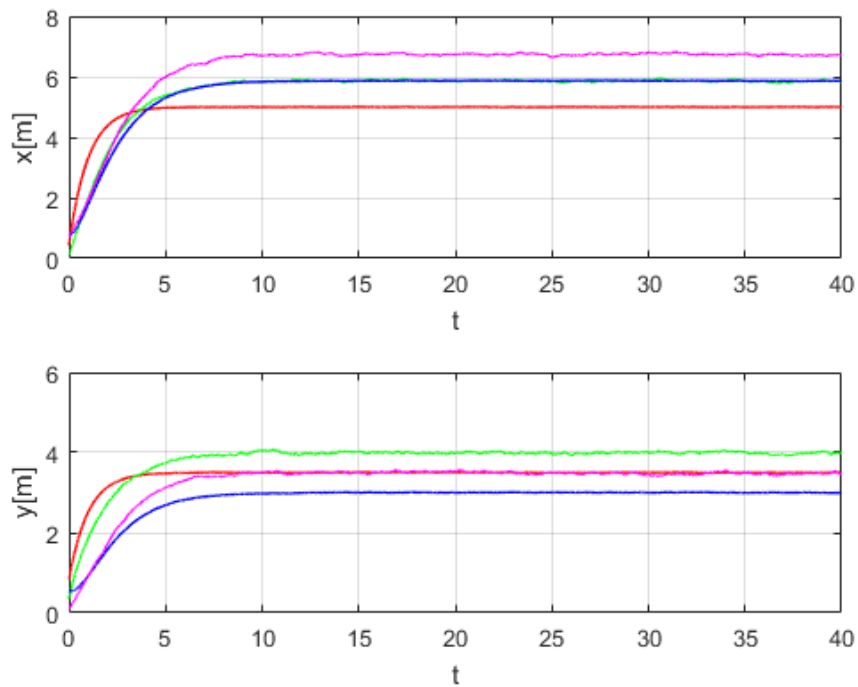
Treći slučaj koji ćemo razmotriti je kad poremećaj ima 10 puta veći utjecaj na 2. i 4. robota, $B = \text{diag}\{10, 1, 10, 1\}$.



Slika 19. Ilustracija optimalnih pojačanja za slučaj $B = \text{diag}\{1, 10, 1, 10\}$



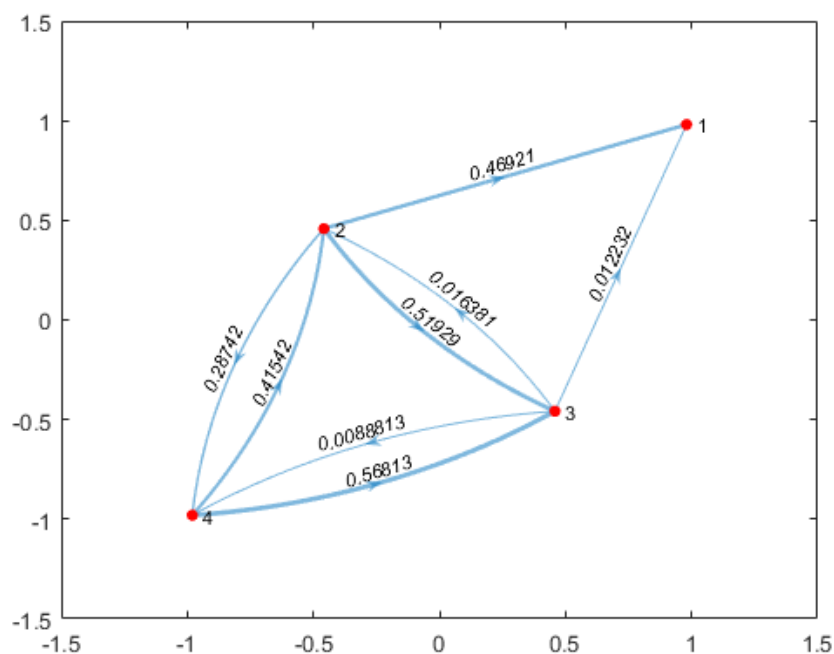
Slika 20. Prikaz zauzimanja formacije za slučaj $B = \text{diag}\{1, 10, 1, 10\}$



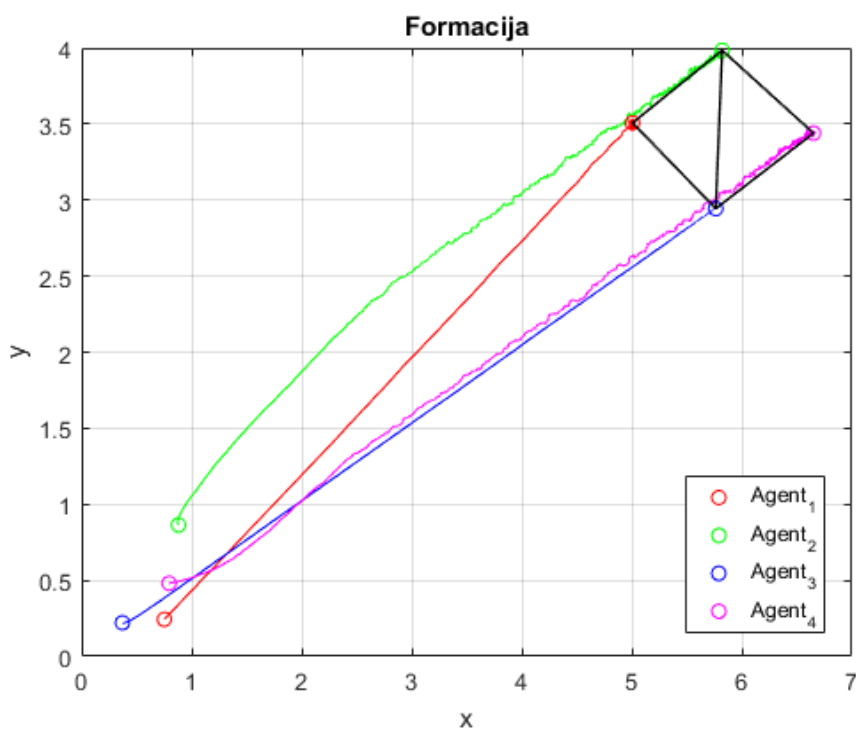
Slika 21. Prikaz zauzimanja formacije po koordinatnim osima za slučaj $B = \text{diag}\{1, 10, 1, 10\}$

Iz Slika 20. i Slika 21. je vidljivo da su oscilacije kod 2. i 4. robota veće što je bilo i očekivano s obzirom da je na njih djeluje veći poremećaj. Ipak trebalo im je nešto kraće vremena da zauzmu željenu formaciju nego u prethodnom primjeru.

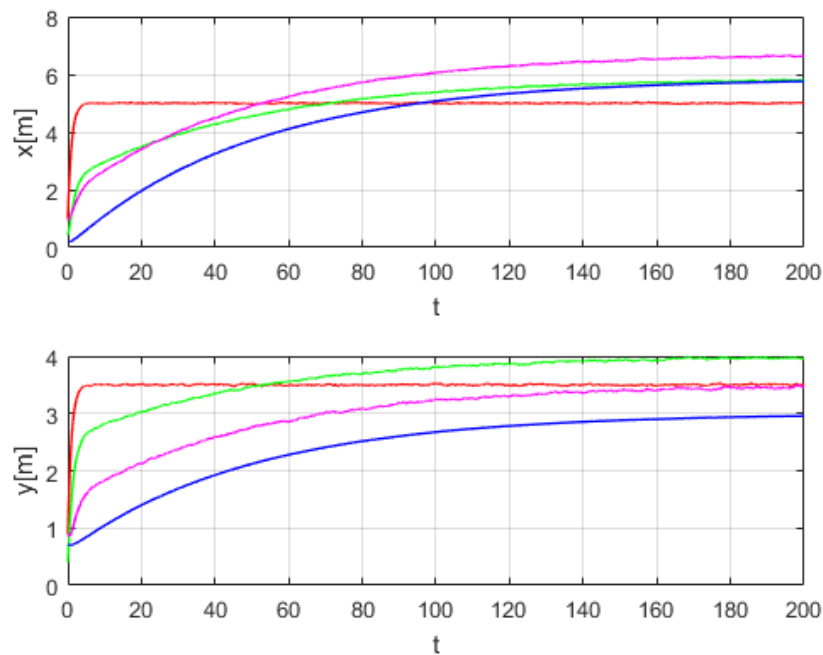
Sada ćemo razmotriti slučaj kada poremećaj ne djeluje na jednog robota (u ovom slučaju je to 3. robot), a na preostala 3 ima jednak utjecaj.



Slika 22. Ilustracija optimalnih pojačanja za slučaj $B = \text{diag}\{1, 1, 0, 1\}$



Slika 23. Prikaz zauzimanja formacije za slučaj $B = \text{diag}\{1, 1, 0, 1\}$

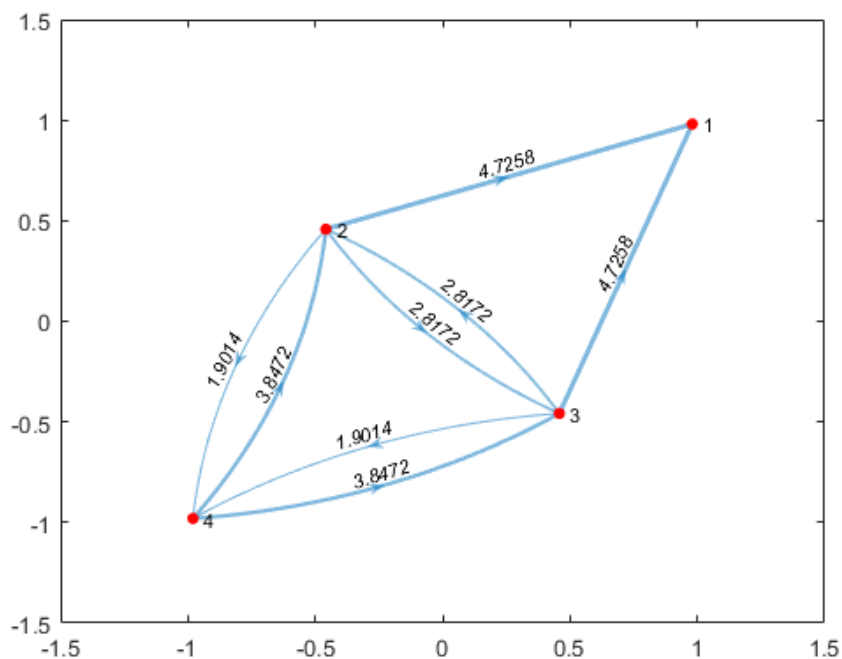


Slika 24. Prikaz zauzimanja formacije po koordinatnim osima za slučaj $B = \text{diag}\{1, 1, 0, 1\}$

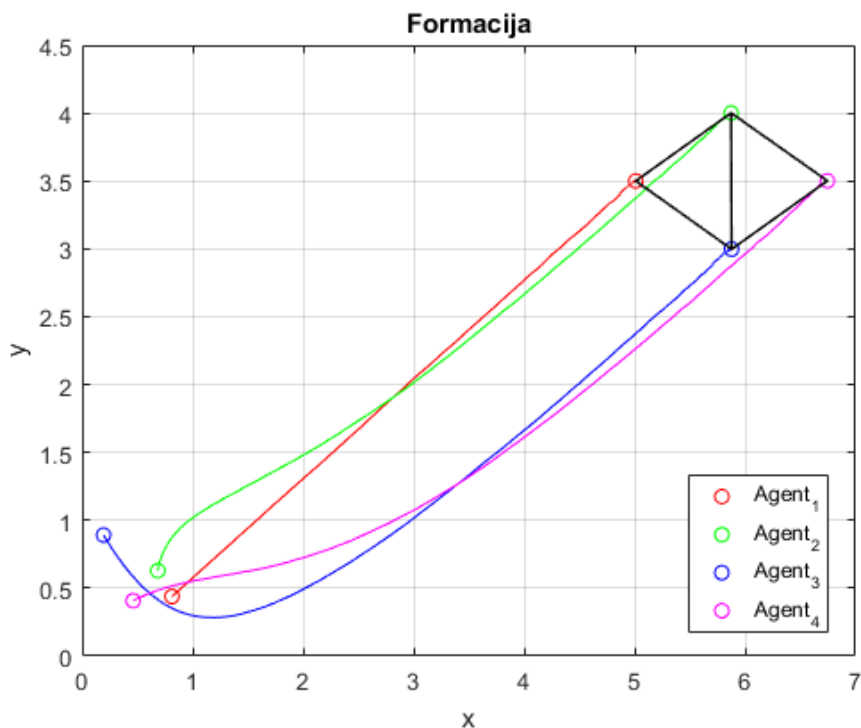
Iz Slika 24. vidljiva je jedna značajnija razlika u odnose na prethodne primjere, a to je da je potrebno izuzetno puno vremena da roboti zauzmu željenu formaciju.

Ako pogledamo vrijednosti pojačanja za sve do sad napravljene primjere (Slika 13., Slika 16., Slika 19., Slika 22.) vidimo da se ona nalaze u intervalu $[0,1]$. Ako želimo dobiti pojačanja koja su veća od 1 potrebno je pojačanja pomnožiti s nekim skalarom.

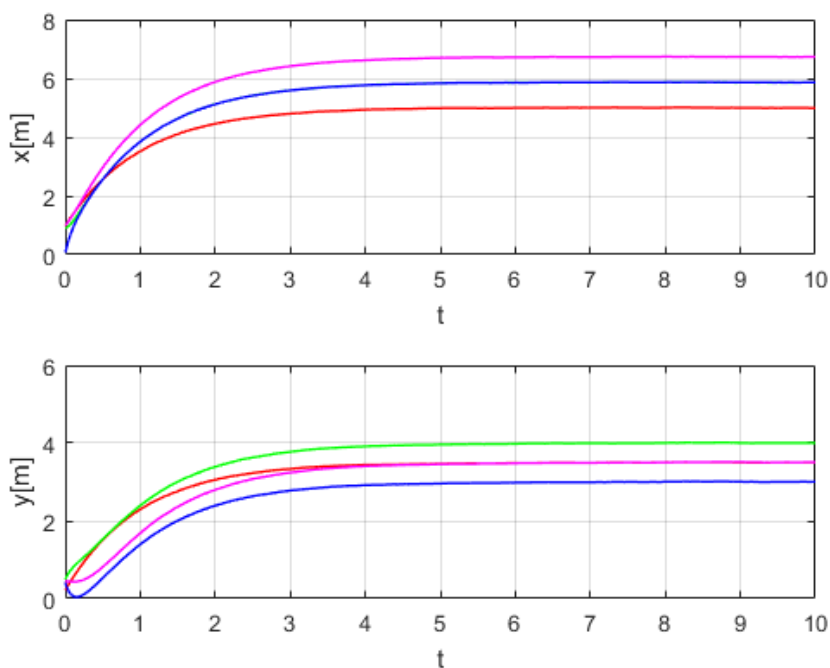
U nastavku ćemo prikazati sve iste slučajeve djelovanja poremećaja za 10 puta veća pojačanja i vidjeti koja je razlika.



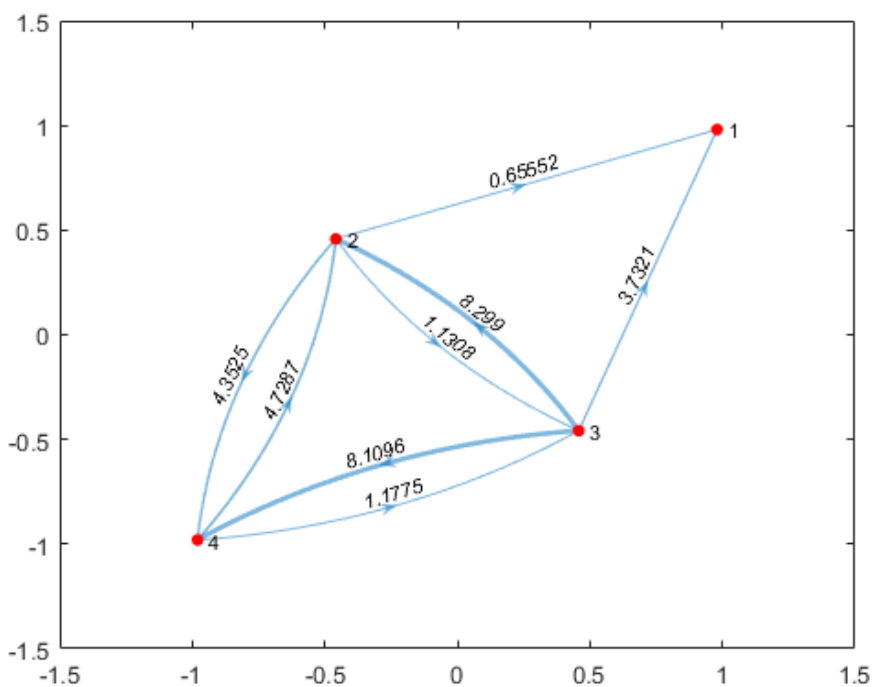
Slika 25. Ilustracija 10x većih optimalnih pojačanja za slučaj $B = \text{diag}\{1, 1, 1, 1\}$



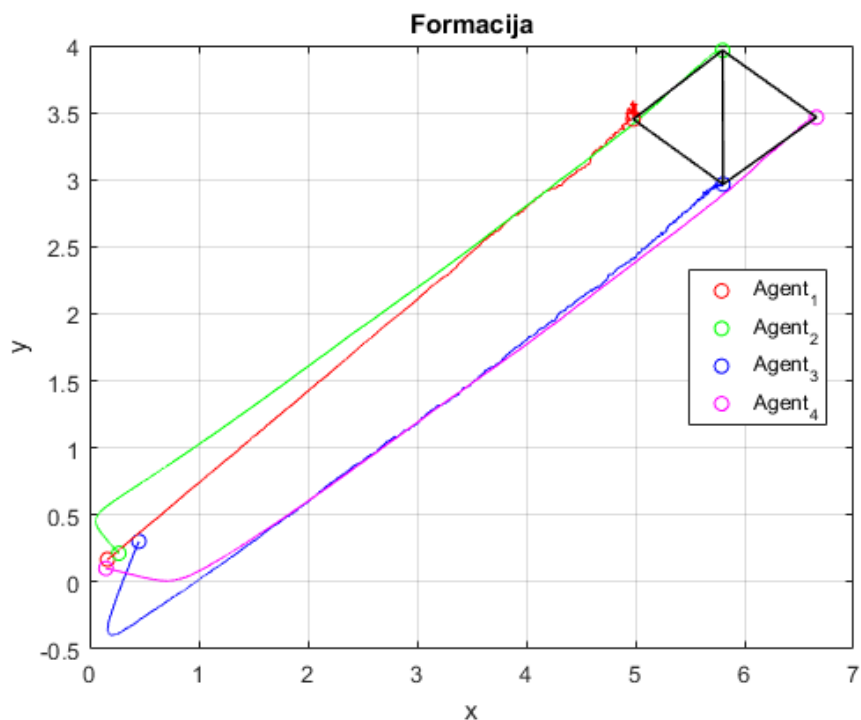
Slika 26. Prikaz zauzimanja formacije s 10x većim pojačanjima za slučaj $B = \text{diag}\{1, 1, 1, 1\}$



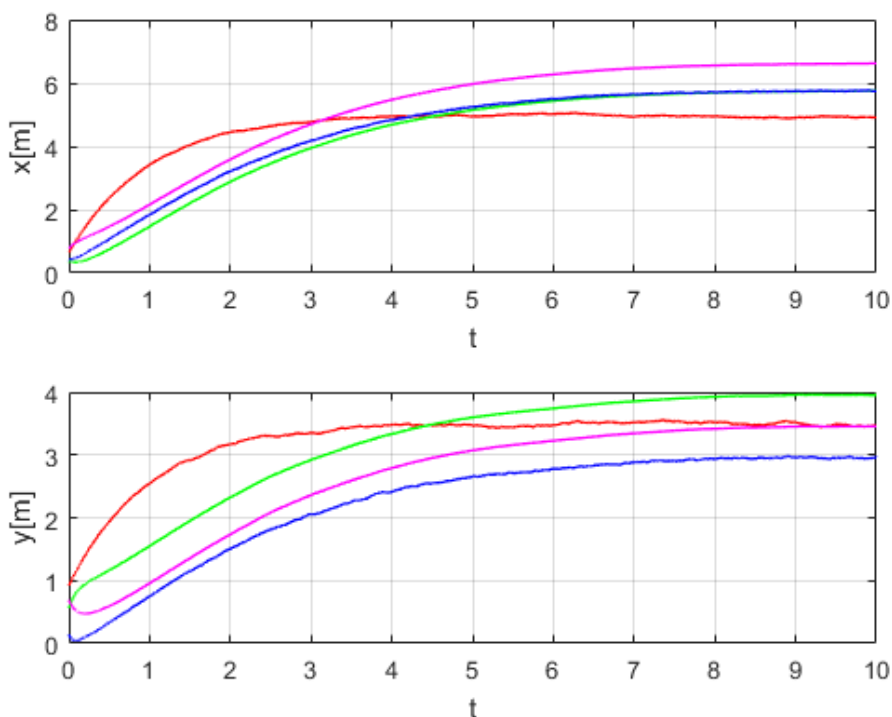
Slika 27. Prikaz zauzimanja formacije po koordinatnim osima s 10x većim pojačanjima za slučaj $B = \text{diag}\{1, 1, 1, 1\}$



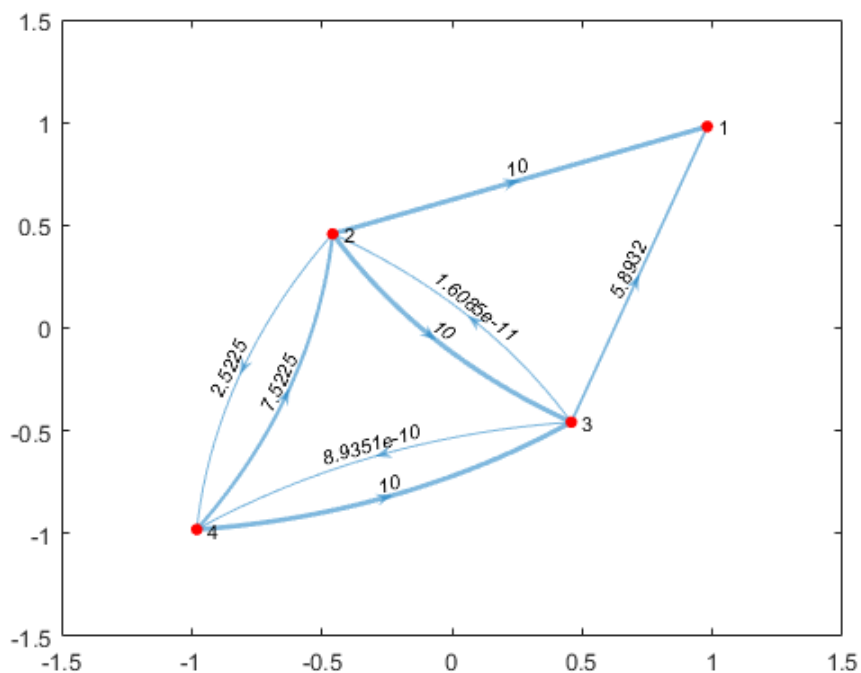
Slika 28. Ilustracija 10x većih optimalnih pojačanja za slučaj $B = \text{diag}\{10, 1, 10, 1\}$



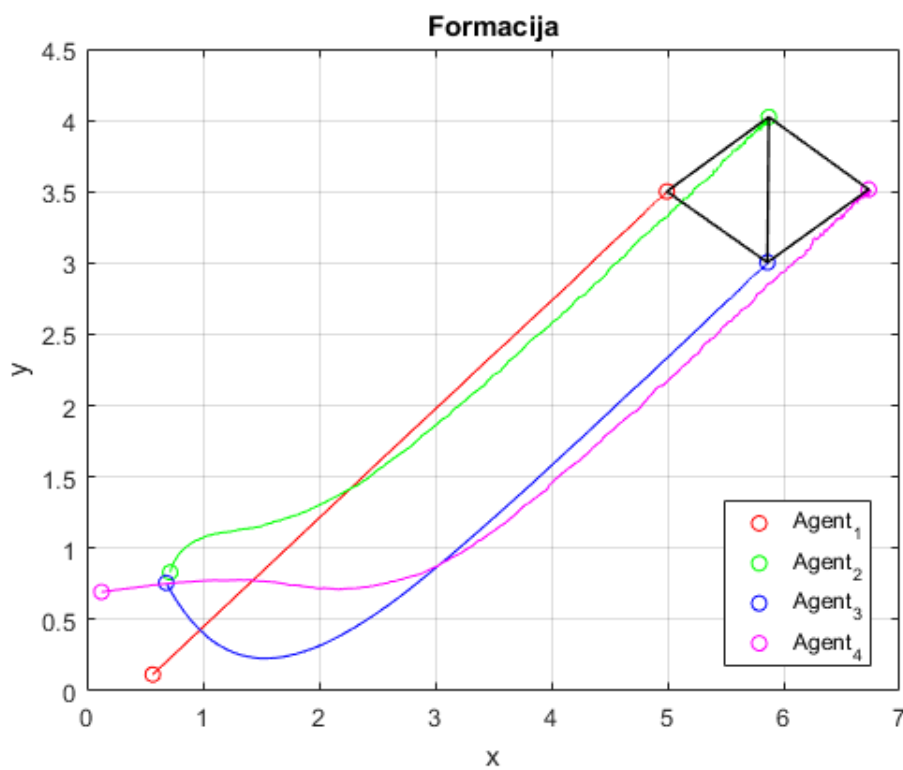
Slika 29. Prikaz zauzimanja formacije s 10x većim pojačanjima za slučaj $B = \text{diag}\{10, 1, 10, 1\}$



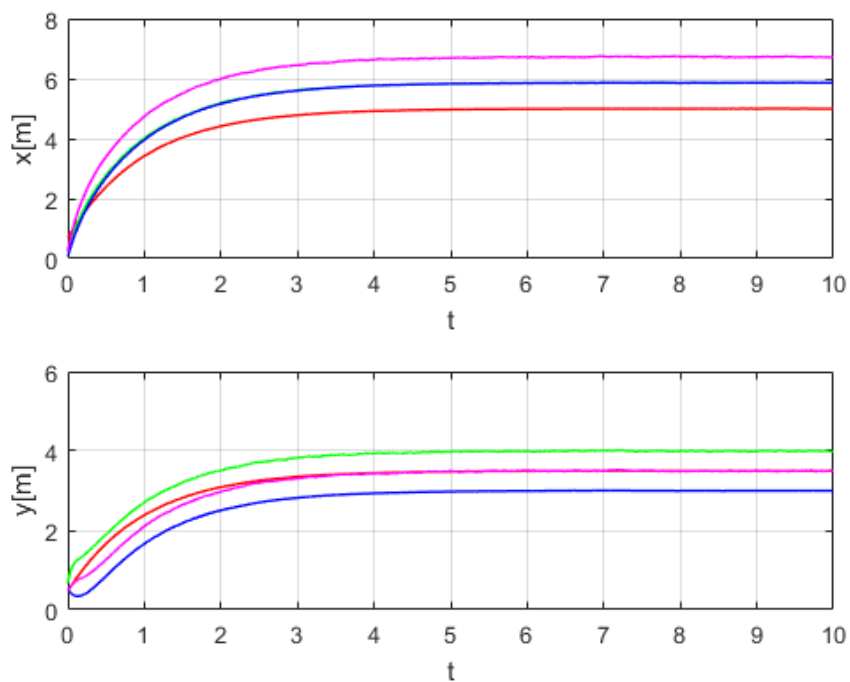
Slika 30. Prikaz zauzimanja formacije po koordinatnim osima s 10x većim pojačanjima za slučaj $B = \text{diag}\{10, 1, 10, 1\}$



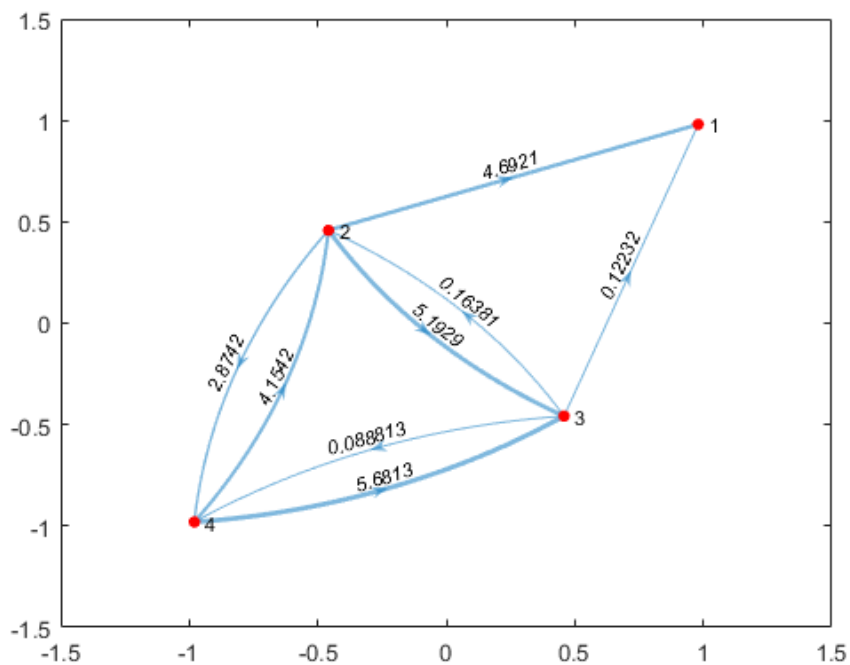
Slika 31. Ilustracija 10x većih optimalnih pojačanja za slučaj $B = \text{diag}\{1, 10, 1, 10\}$



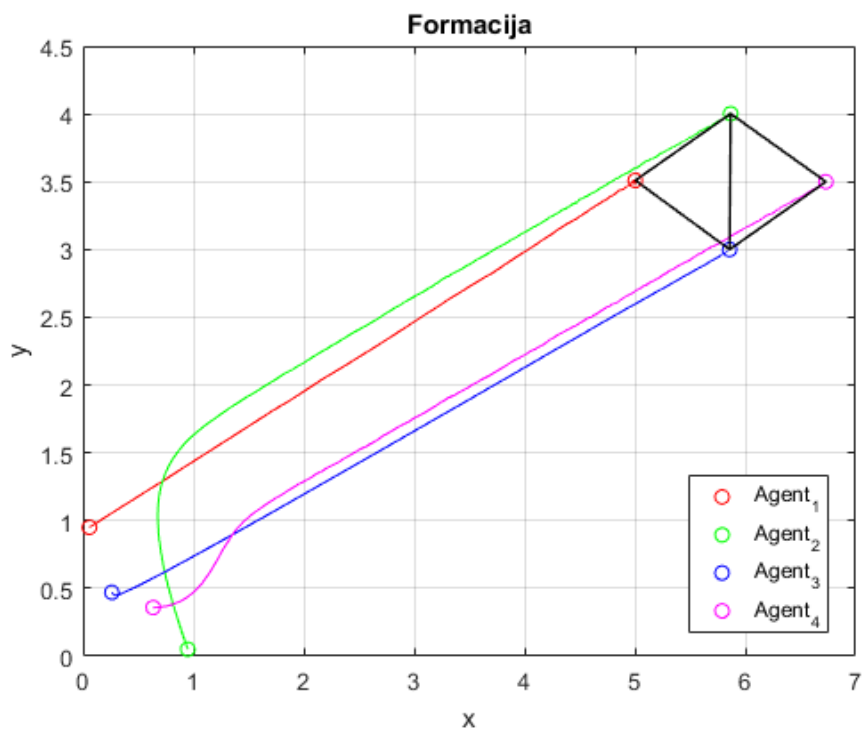
Slika 32. Prikaz zauzimanja formacije s 10x većim pojačanjima za slučaj $B = \text{diag}\{1, 10, 1, 10\}$



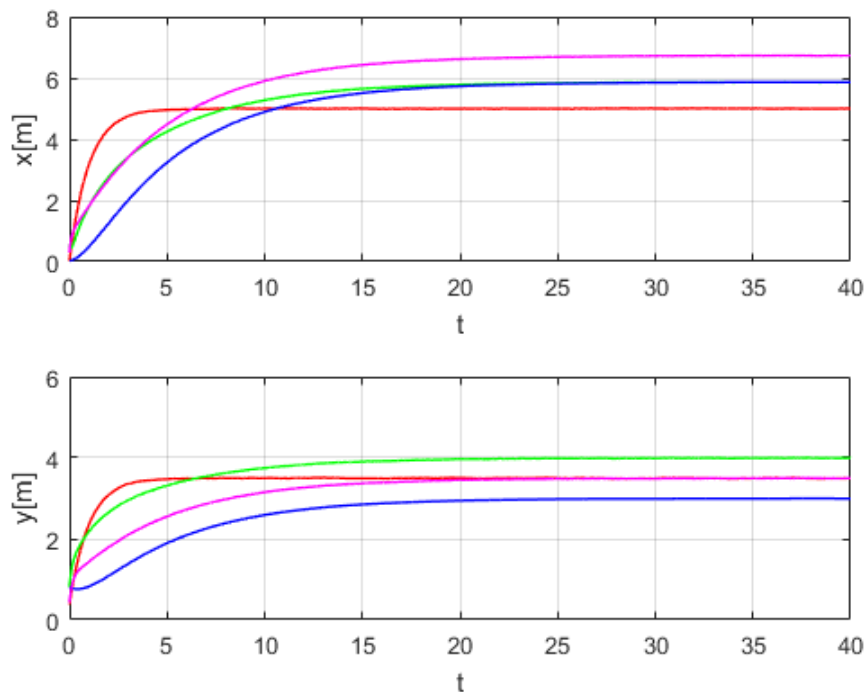
Slika 33. Prikaz zauzimanja formacije po koordinatnim osima s 10x većim pojačanjima za slučaj $B = \text{diag}\{1, 10, 1, 10\}$



Slika 34. Ilustracija 10x većih optimalnih pojačanja za slučaj $B = \text{diag}\{1, 1, 0, 1\}$



Slika 35. Prikaz zauzimanja formacije s 10x većim pojačanjima za slučaj $B = \text{diag}\{1, 1, 0, 1\}$



Slika 36. Prikaz zauzimanja formacije po koordinatnim osima s 10x većim pojačanjima za slučaj $B = \text{diag}\{1, 1, 0, 1\}$

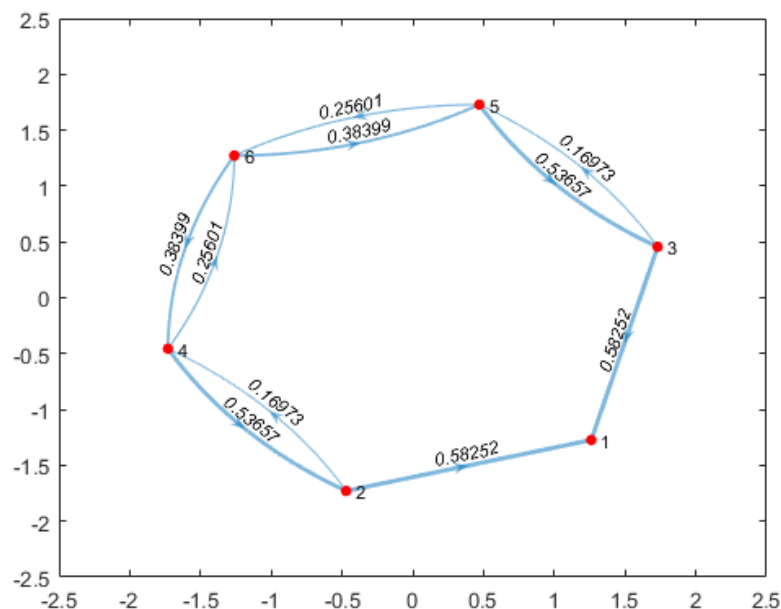
Promatrajući Slika 26., Slika 27., Slika 29., Slika 30., Slika 32. i Slika 33. vidimo da su za veći iznos pojačanja oscilacije u odzivima manje, čak i za slučaj većeg utjecaja poremećaj. Osim toga potrebno je i manje vremena da bi roboti zauzeli formaciju i vrijeme zauzimanja formacije se ne mijenja s povećanjem utjecaja poremećaja, iz čega možemo zaključiti da što veće pojačanje imamo to je poremećaj uspješnije svladan.

Iz Slika 35. i Slika 36. vidimo da kad poremećaj ne djeluje na jednog robota potrebno je nešto duže vremena za zauzimanje formacije.

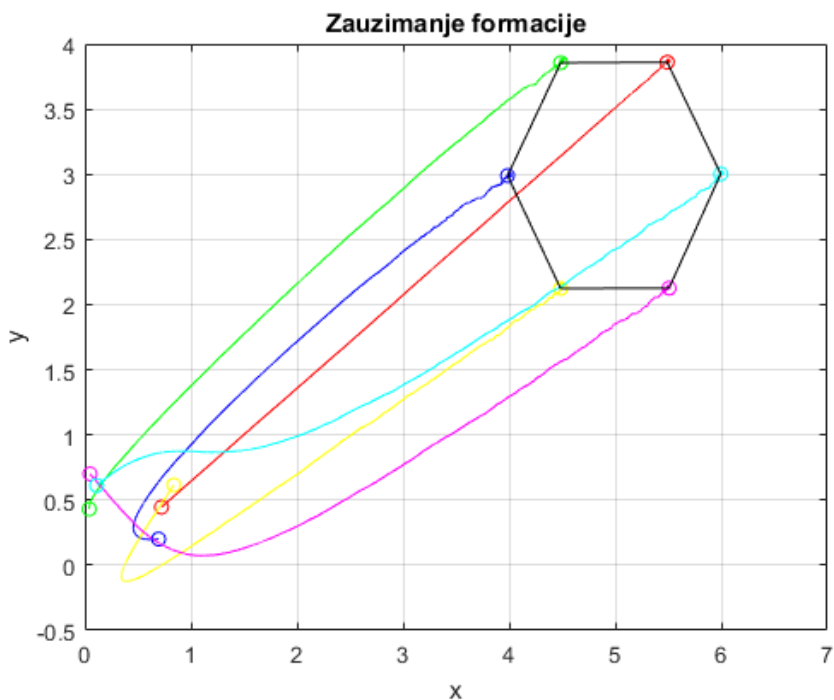
4.2. Prikaz dobivenih rezultata s većom grupom robota

U nastavku ćemo dati prikaz rezultata dobivenih simulacijom kod grupe od 6 i 8 robota koji će zauzeti formaciju u obliku pravilnog n -terokuta, odnosno šesterokuta ili osmerokuta. Zbog jednostavnosti ćemo prikazati samo slučaj gdje na sve robote djeluje poremećaj istog intenziteta, ali za dva različita intervala pojačanja, ona koja se standardno dobiju između 0 i 1 i 10 puta veća pojačanja.

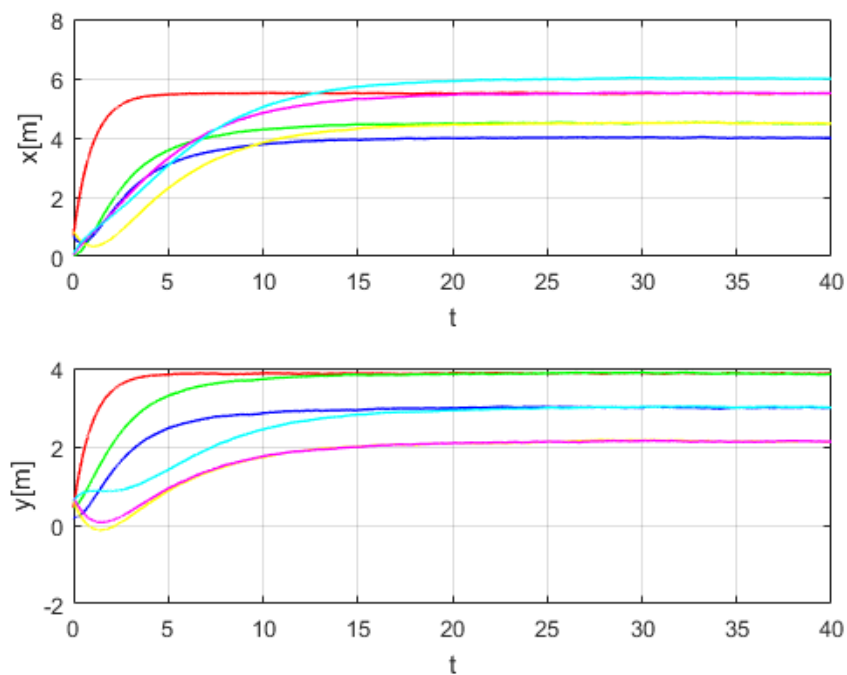
Slika 37. prikazuje komunikacijski graf s 6 robota sa iznosima pojačanja u intervalu $[0,1]$.



Slika 37. Ilustracija optimalnih pojačanja za grupu od 6 robota



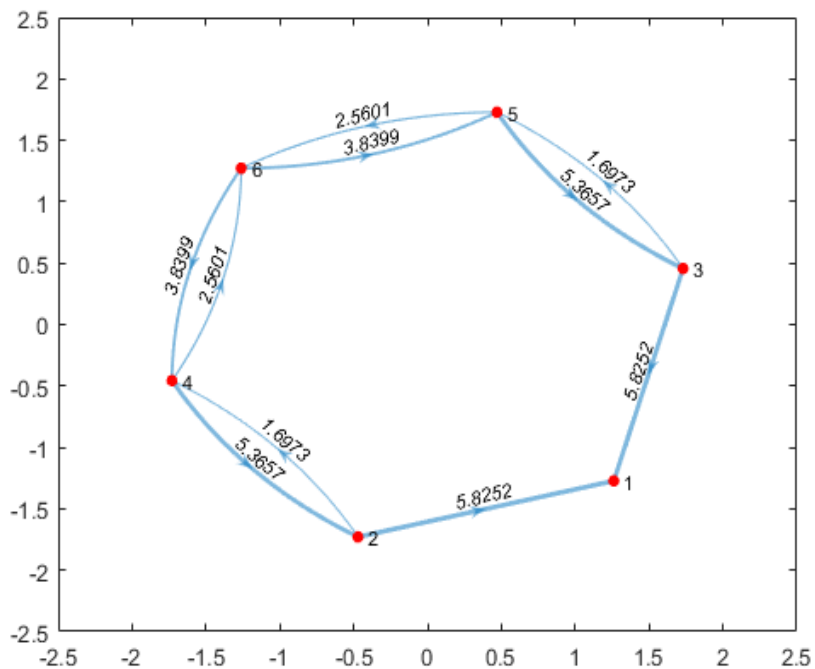
Slika 38. Prikaz zauzimanja formacije za grupu od 6 robota



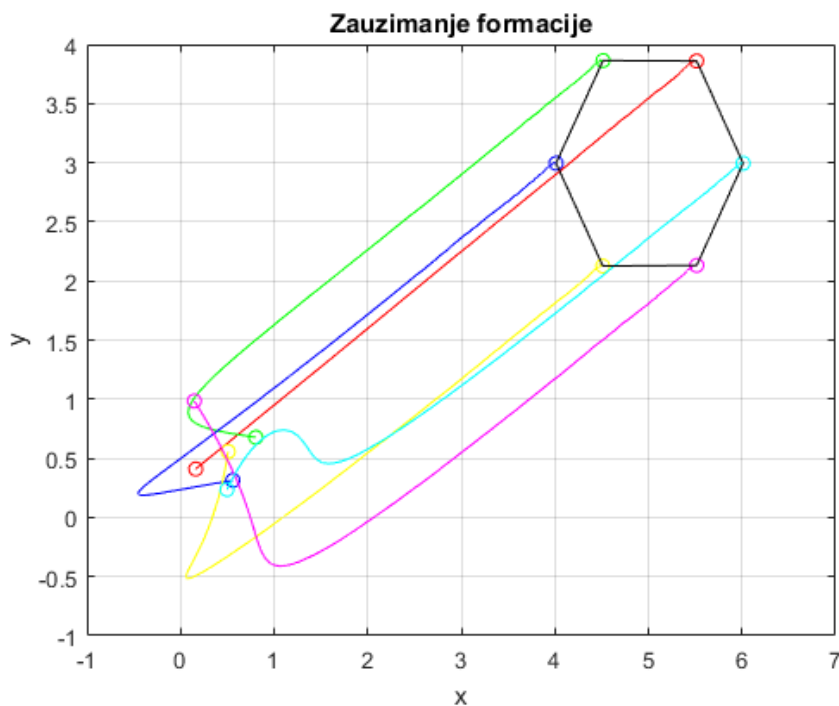
Slika 39. Prikaz zauzimanja formacije po koordinatnim osima za grupu od 6 robota

Iz Slika 38. i Slika 39. vidimo male oscilacije u odzivu koje se javljaju zbog djelovanja poremećaja, ali roboti su uspješno zauzeli željenu formaciju u relativno kratkom vremenu.

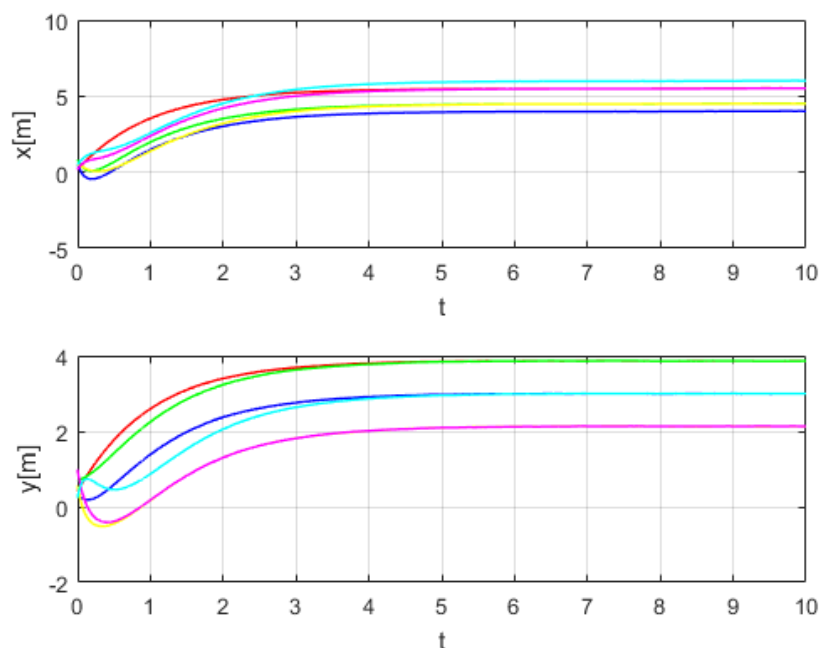
Na Sliku 40. prikazan je komunikacijski graf grupe od 6 robota s 10 puta većim iznosima pojačanjima.



Slika 40. Ilustracija 10x većih optimalnih pojačanja za grupu od 6 robota



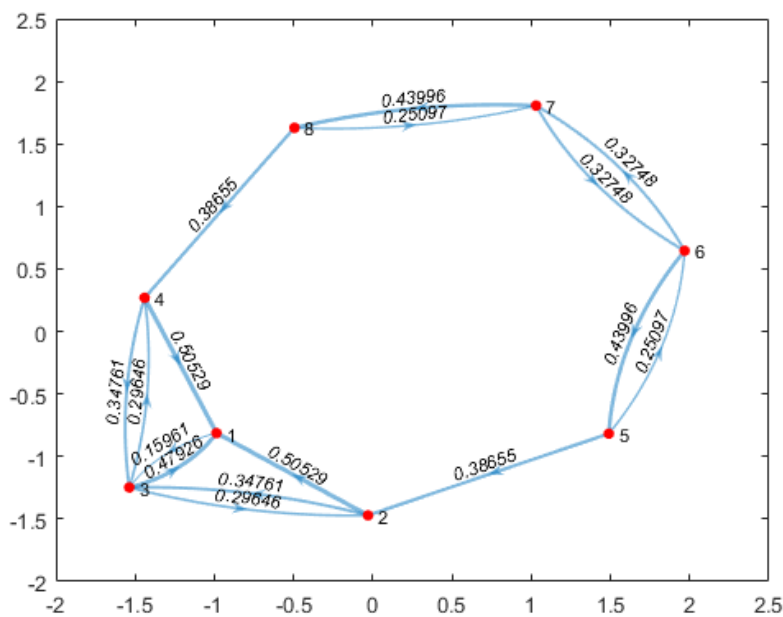
Slika 41. Prikaz zauzimanja formacije s 10x većim pojačanjima za grupu od 6 robota



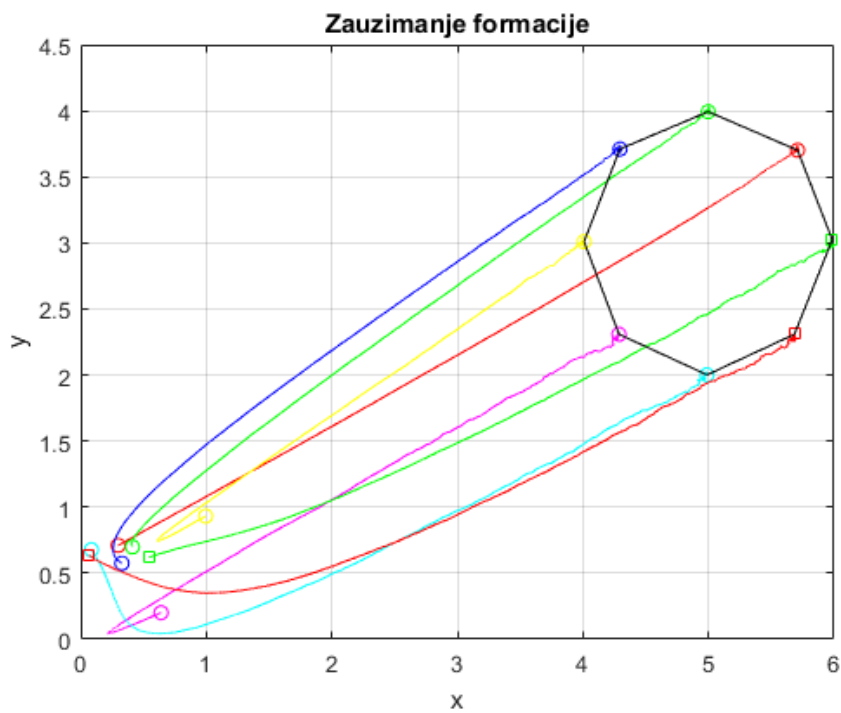
Slika 42. Prikaz zauzimanje formacije po koordinatnim osima s 10x većim pojačanjima za grupu od 6 robota

S većim iznosima pojačanja smanjuju se oscilacije u odzivima i roboti puno brže zauzmu željenu formaciju, što je vidljivo na Slika 41. i Slika 42.

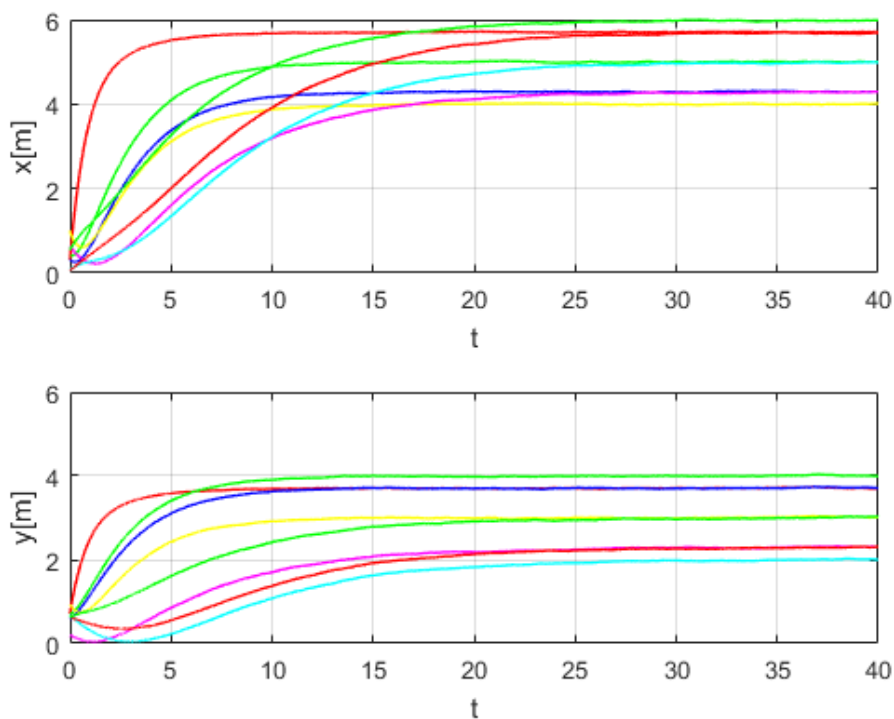
U nastavku ćemo prikazati dobivene simulacije za grupu od 8 robota.



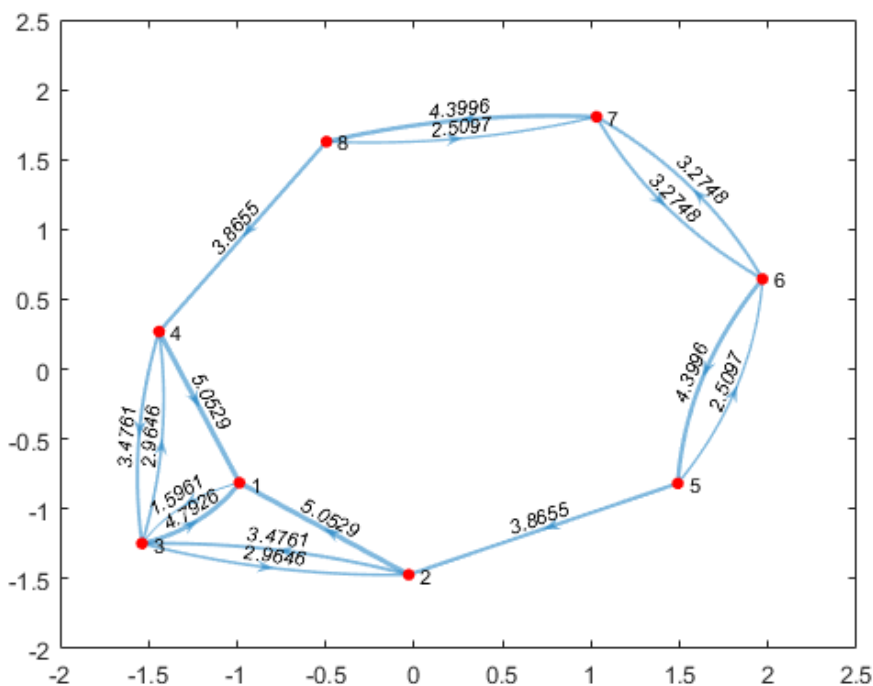
Slika 43. Ilustracija optimalnih pojačanja za grupu od 8 robota



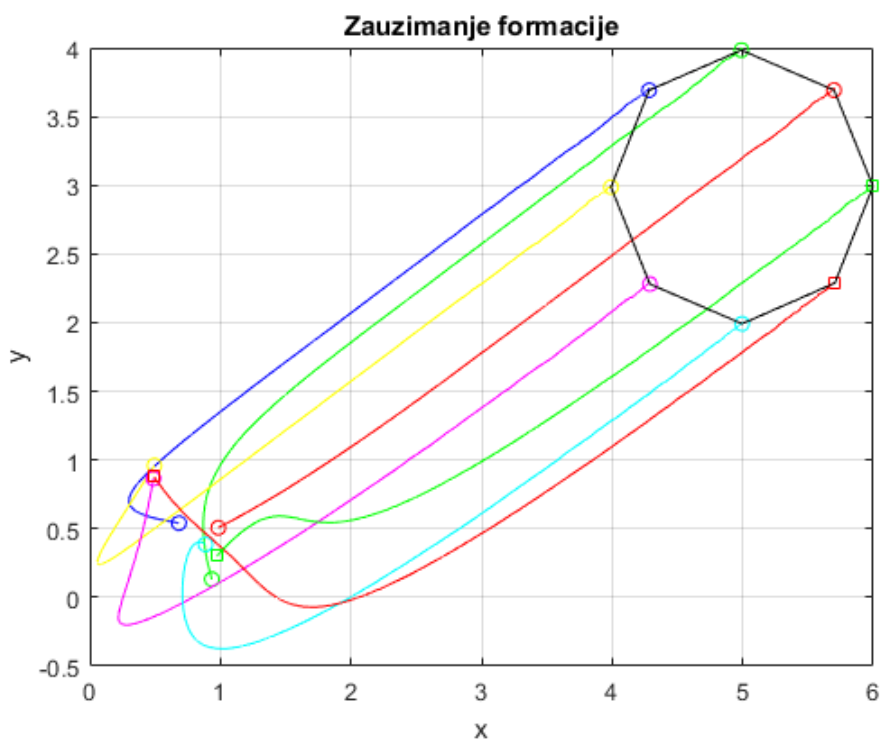
Slika 44. Prikaz zauzimanja formacije za grupu od 8 robota



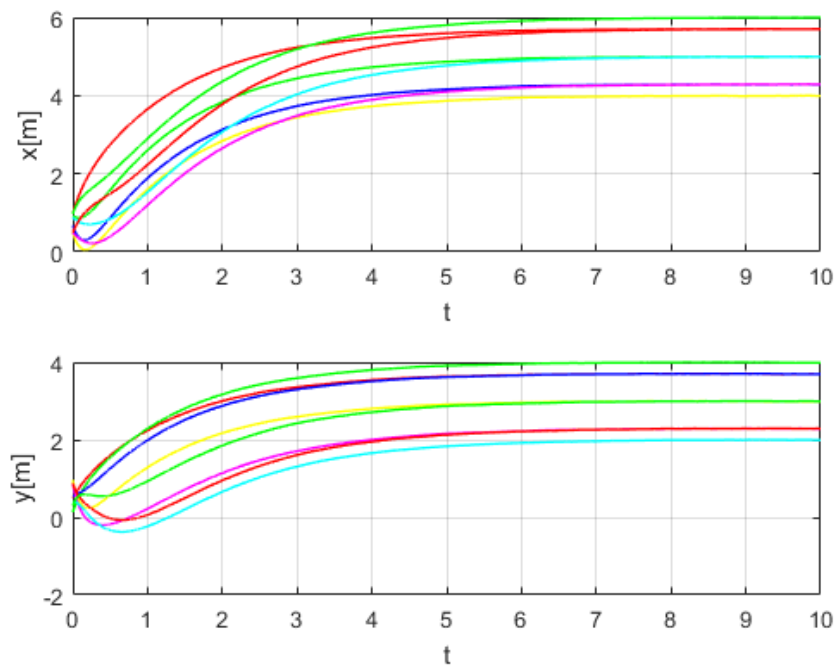
Slika 45. Prikaz zauzimanja formacije po koordinatnim osima za grupu od 8 robota



Slika 46. Ilustracija 10x većih optimalnih pojačanja za grupu od 8 robota



Slika 47. Prikaz zauzimanja formacije s 10x većim pojačanjima za grupu od 8 robota



Slika 48. Prikaz zauzimanje formacije po koordinatnim osima s 10x većim pojačanjima za grupu od 8 robota

Možemo primijetiti da se ne događa ništa drugačije u odnosu na grupu od 6 mobilnih robota, utjecaj poremećaja je uspješno minimiziran i grupa je uspješno zauzela formaciju u obliku pravilnog osmerokuta.

5. ZAKLJUČAK

Pojam pozitivnih sustava javlja se još prije nekoliko desetaka godina i otad ne prestaje njihovo istraživanje. Kao što smo vidjeli kroz rad primjena pozitivnih sustava je jako česta, a jedna od možda najvažnijih primjena je ta što su značajno olakšali upravljanje sustavima velikih razmjera poput prometnih mreža, komunikacijskih mreža ili električnih energetske mreže. U ovom radu pažnju smo posvetili grupama mobilnih robota, gdje je glavni zadatak bio sintetizirati regulator koji će optimalno otkloniti utjecaje vanjskih poremećaja na gibanje formacije. Kao kriterij optimizacije korištena je prva inducirana norma zatvorenog sustava, a problem se rješava vrlo lako pomoću linearnog programiranja. Iz rezultata dobivenih simulacijom vidjeli smo da je sintetizirani regulator u stanju uspješno otkloniti ili smanjiti svaki iznos poremećaja tako da grupa robota i dalje uspije zauzeti željenu formaciju. Ukoliko želimo još više smanjiti oscilacije uslijed djelovanja poremećaja i skratiti vrijeme potrebno za zauzimanje formacije možemo povećati pojačanje regulatora.

U daljnjem radu ovaj primjer mogao bi se automatizirati, jer s obzirom da se radi o linearnom programiranju bilo bi moguće upravljati i grupama od stotine ili tisuću mobilnih robota.

LITERATURA

- [1] Rantzer, A.; Valcher, M.E.: A Tutorial of Positive System and Large Scale Control, IEEE, 2018.
- [2] Haddad, W.M.; Chellaboina, V.: Stability and dissipativity theory for nonnegative dynamical systems: a unified analysis framework for biological and physiological systems, *Nonlinear Analysis: RealWorld Applications* 6, 2005., pp. 35 – 65
- [3] Rami, M.A.; Bokharaie, V.S.; Mason, O.; Wirth, F.R.: Stability Criteria for SIS Epidemiological Models under Switching Policies, *AIMS*, 2014, Volume 19, Issue 9., pp. 2865-2887
- [4] Rantzer, A.: Scalable Control of Positive Systems, *European Journal of Control* 24, 2015., pp. 72-80
- [5] https://control.lth.se/fileadmin/control/staff/AndersRantzer/1507_ECCplenaryeight.pdf
Pristupljeno 26.12.2022.
- [6] <https://www.iotforall.com/swarm-robotics-applications> Pristupljeno 26.12.2022.
- [7] <https://dronelife.com/2017/01/11/military-unleashes-worlds-largest-drone-swarm/>
Pristupljeno 26.12.2022.
- [8] <https://newatlas.com/royal-navy-robotic-minesweeping/54506/> Pristupljeno 26.12.2022.
- [9] <https://wyss.harvard.edu/technology/robobees-autonomous-flying-microrobots/>
Pristupljeno 26.12.2022.
- [10] <https://news.engineering.utoronto.ca/reaching-new-heights-how-raffaello-dandrea-creates-magic-with-flying-machines/> Pristupljeno 26.12.2022.
- [11] Werner, H.: Control System Theory and Design, Technische Universitat Hamburg-Harburg, 2017.
- [12] Doyle, J.; Francis, B.; Tannenbaum, A.: Feedback Control Theory, Macmillan Publishing Co., 1990.
- [13] Materijali s predavanja „Opća teorija sustava“, Lyapunovljeva analiza stabilnosti linearnih sustava
- [14] Lofberg, J.: YALMIP: a toolbox for modeling and optimization in MATLAB, IEEE, 2004.

PRILOZI

- I. Matlab kod za 4 robota
- II. Matlab kod za grupu od 6 ili 8 robota

PRILOG I

```

clear
close all
global Afull Bfull xform K1

k=1;

A = [-k 0 0 0;
      0 0 0 0;
      0 0 0 0;
      0 0 0 0];

E=zeros(4,8);
E(2,[1,4,6])=1;
E(3,[2,3,8])=1;
E(4,[5,7])=1;

F=[1 -1 0 0;
   1 0 -1 0;
   0 1 -1 0;
   0 -1 1 0;
   0 1 0 -1;
   0 -1 0 1;
   0 0 1 -1;
   0 0 -1 1];

B = diag([1 1 1 1]);
%B = diag([10 1 10 1]);
%B = diag([1 10 1 10]);
%B = diag([1 1 0 1]);
C = eye(4);

gama = sdpvar(1);
p = sdpvar(4,1);
q = sdpvar(8,1);

ogranicenja = [A'*p + C'*ones(4,1) + F'*q<=0,
               B'*p <=gama,
               E'*p >= q,
               p>=0,
               q>=0];

solve = optimize(ogranicenja,gama)
p = value(p)
q = value(q)
gama = value(gama)

Lvec=q./(E'*p)
%Lvec=10*q./(E'*p)

Acl = A+E*diag(Lvec)*F

```

```

x1ref=5;
y1ref=3;

Afull=[Acl,zeros(4,4);zeros(4,4),Acl];
Bfull=[B,zeros(4,4);zeros(4,4),B];
K1=[k*x1ref; 0; 0; 0; k*y1ref; 0; 0; 0];
xform =[0; sqrt(3)/2; sqrt(3)/2; sqrt(3); 1/2; 1; 0; 1/2];

t0 = 0;
tf = 30;

x0=rand(8,1);

[t,x] = ode45(@Primjer2diff,[t0,tf],x0,[]);

%%plotanje

figure(1)
G = digraph(Acl,'omitselfloops')
LWidths = 2*G.Edges.Weight/max(G.Edges.Weight);
plot(G,'EdgeLabel',G.Edges.Weight,'LineWidth',LWidths,'NodeColor','r')
x1 = x(:,1);
x2 = x(:,2);
x3 = x(:,3);
x4 = x(:,4);
y1 = x(:,5);
y2 = x(:,6);
y3 = x(:,7);
y4 = x(:,8);

figure(2)
h1 =
plot(x1(1),y1(1),'ro',x2(1),y2(1),'go',x3(1),y3(1),'bo',x4(1),y4(1),'mo')
;
hold on;
h2 = plot(x1,y1,'r',x2,y2,'g',x3,y3,'b',x4,y4,'m');
hold on;
h3 =
plot(x1(end),y1(end),'ro',x2(end),y2(end),'go',x3(end),y3(end),'bo',x4(en
d),y4(end),'mo');
hold on
xf1 = [x1(end) x2(end) x3(end) x1(end)];
yf1 = [y1(end) y2(end) y3(end) y1(end)];
xf2 = [x2(end) x4(end) x3(end) x2(end)];
yf2 = [y2(end) y4(end) y3(end) y2(end)];
xr = [xf1 xf2];
yr = [yf1 yf2];
plot(xr,yr,'k-', 'LineWidth',1);
xlabel('x')
ylabel('y')
title('Formacija')
legend(h3,'Agent_1','Agent_2','Agent_3','Agent_4','location','best')
hold off;
grid on;

```



```
figure(3)
subplot(2,1,1)
plot(t,x1,'r',t,x2,'g',t,x3,'b',t,x4,'m','LineWidth',1)
xlabel('t')
ylabel('x[m]')
hold on;
grid on;

subplot(2,1,2)
plot(t,y1,'r',t,y2,'g',t,y3,'b',t,y4,'m','LineWidth',1)
xlabel('t')
ylabel('y[m]')
hold on;
grid on;
```

```
%funkcija koja se poziva za rješavanje ode45

function xdot = Primjer2diff(t,x)

global Afull Bfull xform K1

v=0.1*(0.5-rand(8,1));

xdot=[];

xdot = Afull*x+Bfull*v+K1-Afull*xform;

end
```

PRILOG II

```
clear
close all
global Afull Bfull K1 xform n
%n=6;
n = 8;

k=1;
A = zeros(n,n);
A(1,1)=-k;

%%6robota
% E=zeros(6,10);
% E(2,[1,3])=1;
% E(3,[2,5])=1;
% E(4,[4,7])=1;
% E(5,[6,9])=1;
% E(6,[8,10])=1;
%
%
% F=[1 -1 0 0 0 0;
%    1 0 -1 0 0 0;
%    0 -1 0 1 0 0;
%    0 1 0 -1 0 0;
%    0 0 -1 0 1 0;
%    0 0 1 0 -1 0;
%    0 0 0 -1 0 1;
%    0 0 0 1 0 -1;
%    0 0 0 0 -1 1;
%    0 0 0 0 1 -1];
%
% B=eye(n)
% C = eye(n);
%
% gama = sdpvar(1);
% p = sdpvar(6,1);
% q = sdpvar(10,1);

%%8 robota
E=zeros(8,16);
E(1,1)=1;
E(2,[2,3])=1;
E(3,[4,5,6])=1;
E(4,[7,8])=1;
E(5,[9,10])=1;
E(6,[11,12])=1;
E(7,[13,14])=1;
E(8,[15,16])=1;

F=zeros(16,8);
F(1,1)=-1; F(1,3)=1;
F(2,1)=1; F(2,2)=-1;
F(3,2)=-1; F(3,3)=1;
F(4,1)=1; F(4,3)=-1;
F(5,2)=1; F(5,3)=-1;
```

```

F(6,3)=-1; F(6,4)=1;
F(7,1)=1; F(7,4)=-1;
F(8,3)=1; F(8,4)=-1;
F(9,2)=1; F(9,5)=-1;
F(10,5)=-1; F(10,6)=1;
F(11,5)=1; F(11,6)=-1;
F(12,6)=-1; F(12,7)=1;
F(13,6)=1; F(13,7)=-1;
F(14,7)=-1; F(14,8)=1;
F(15,4)=1; F(15,8)=-1;
F(16,7)=1; F(16,8)=-1;

B=eye(n);
C = eye(n);

gama = sdpvar(1);
p = sdpvar(n,1);
q = sdpvar(2*n,1);

ogranicenja = [A'*p + C'*ones(n,1) + F'*q<=0,
               B'*p <=gama,
               E'*p >= q,
               p>=0,
               q>=0];

sol = optimize(ogranicenja,gama)
p = value(p)
q = value(q)
gama = value(gama)

Lvec=q./(E'*p)
%Lvec=10*q./(E'*p)

Acl = A+E*diag(Lvec)*F

xlref=5;
ylref=3;

Kx = zeros(n,1);
Kx(1,1) = k*xlref;
Ky = zeros(n,1);
Ky(1,1) = k*ylref;

Afull=[Acl,zeros(n,n);zeros(n,n),Acl];
Bfull=[B,zeros(n,n);zeros(n,n),B];
K1 = [Kx;Ky];

xf = zeros(n,1);
yf = zeros(n,1);
for i= 1:n
    xf(i) = cos((2*pi*i)/n) + xf(i);
    yf(i) = sin((2*pi*i)/n) + yf(i);
end

xform = [xf;yf];

```

```

t0 = 0;
tf = 40;

x0=rand(2*n,1);

[t,x] = ode45(@Primjer5diff,[t0,tf],x0,[]);

[m_x,n_x]=size(x);

color = {'r','g','b','y','m','c','r','g'};
marker = {'o','o','o','o','o','o','s','s'};

%%plotanje

figure(1)
G = digraph(Acl,'omitselfloops')
LWidths = 2*G.Edges.Weight/max(G.Edges.Weight);
plot(G,'EdgeLabel',G.Edges.Weight,'LineWidth',LWidths,'NodeColor','r')

figure(2)
for i=1:n
    h1 = plot(x(1,i),x(1,(n+i)),'color',color{i},'marker',marker{i});
    hold on;
    h2 = plot(x(:,i),x(:,(n+i)),'color',color{i});
    hold on;
    h3 = plot(x(m_x,i),x(m_x,(n+i)),'color',color{i},'marker',marker{i});
    title('Zauzimanje formacije')
    xlabel('x')
    ylabel('y')
    hold on;
    grid on;
end

xf1 = [x(m_x,1:n),x(m_x,1)];
yf1 = [x(m_x,(n+1):2*n),x(m_x,(n+1))];
plot(xf1,yf1,'k-');

figure(3)
for i=1:n
    subplot(2,1,1)
    plot(t,x(:,i),'color',color{i},'LineWidth',1)
    xlabel('t')
    ylabel('x[m]')
    hold on;
    grid on;

    subplot(2,1,2)
    plot(t,x(:,(n+i)),'color',color{i},'LineWidth',1)
    xlabel('t')
    ylabel('y[m]')
    hold on;
    grid on;
end

```

```
%funkcija koja se poziva za rješavanje ode45  
function xdot = Primjer5diff(t,x)  
global Afull Bfull K1 xform n  
v=0.1*(0.5-rand(2*n,1));  
xdot=[];  
xdot = Afull*x+Bfull*v+K1-Afull*xform;  
end
```