

# Numerička analiza čvrstoće ojačanih panela primjenom metode za izračun ekvivalentne krutosti panela

---

Lipej, Luka

Undergraduate thesis / Završni rad

2022

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:235:526900>

Rights / Prava: [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom](#).

Download date / Datum preuzimanja: **2025-02-26**

Repository / Repozitorij:

[Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# ZAVRŠNI RAD

**Luka Lipej**

Zagreb, 2022.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# ZAVRŠNI RAD

Mentor:

Izv. prof. dr. sc. Darko Ivančević

Student:

Luka Lipej

Zagreb, 2022.

Izjavljujem da sam ovaj rad izradio samostalno koristeći znanja stečena tijekom studija i navedenu literaturu.

Zahvaljujem se cijeloj obitelji, a posebno mami ( nju će ovaj završni rad najviše razveselit), na pruženoj podršci i ogromnom strpljenju tijekom studiranja. Želio bih se zahvaliti i izv. prof. dr. sc. Darku Ivančeviću na stručnom vodstvu, svim savjetima i pomoći oko završnog rada. Nakon toga na red dolaze svi moji amigosi s vaterpola kojima je moje studiranje bilo stresnije nego meni, jer svaki ispit je značio par kavica manje i zato oprostite i hvala vam na razumijevanju. Također bih se zahvalio i prijateljima s mora, Vaterpolo klubu Tisno te svim ljudima iz Jezera i Tisnoga koji su mi omogućili da mi svako ljeto u ovih sedam godina studiranja bude baš ono pravo studentsko ljeto, te tako napunim baterije za novu akademsku godinu. Velika zahvala ide i svim prijateljima s faksa koji su mi puno pomogli i uvelike uljepšali ovo razdoblje studiranja. Hvala i cijeloj ekipi s bazena Utrina koji su mi omogućili da tijekom cijelog studiranja radim i uvijek izlazili u susret kada sam imao obaveza na fakultetu. Za kraj jedno posebno i veliko hvala SARI KRAMARIĆ, njezine skripte i materijali su me spašavali iz nemogućih situacija i vjerujem da će se prenositi još generacijama. Bez njezine pomoći vjerojatno nikad ne bih niti došao do ovog završnog rada, tako da Saki hvala ti puno.

Luka Lipej



Sveučilište u Zagrebu Fakultet strojarstva i brodogradnje	
Datum	Prilog
Klasa: 602 - 04 / 22 - 6 / 1	
Ur.broj: 15 - 1703 - 21 -	

## ZAVRŠNI ZADATAK

Student: **Luka Lipej** JMBAG: **0035207053**

Naslov rada na hrvatskom jeziku: **Numerička analiza čvrstoće ojačanih panela primjenom metode za izračun ekvivalentne krutosti panela**

Naslov rada na engleskom jeziku: **Numerical stress analysis of stiffened panels using an equivalent panel calculation method**

Opis zadatka:

Paneli ojačani uzdužnicama su tipični elementi konstrukcije trupa i krila zrakoplova. Kako bi se pojednostavili numerički modeli takvih konstrukcija, može se primijeniti npr. *Smearred Stiffener* metoda za izračun ekvivalentne krutosti ojačanih panela. Tako se izbjegava diskretizacija pojedinačnih uzdužnica u numeričkom modelu, što znatno olakšava izradu modela za analizu čvrstoće konstrukcije zrakoplova.

Kako bi se procijenio utjecaj geometrijskih parametara na točnost primjene metode ekvivalentne krutosti panela, u radu je potrebno:

- usporediti rezultate numeričkih modela kojima je krutost definirana primjenom metode ekvivalentne krutosti panela s rezultatima numeričkih modela s uzdužnicama diskretiziranim ljuskastim ili grednim konačnim elementima
- numeričke analize provesti za tri različita profila uzdužnica
- odrediti utjecaj koraka uzdužnica na podudaranje rezultata dobivenih različitim načinima modeliranja ojačanog panela
- koristiti mehanička svojstva aluminijskih legura koje se koriste u zrakoplovnim konstrukcijama
- numeričke analize provesti primjenom programa *Abaqus*<sup>®</sup>
- numerički određene kritične sile izvijanja usporediti s vrijednostima dobivenim analitičkim izrazima.

U radu je potrebno navesti korištenu literaturu i eventualno dobivenu pomoć.

Zadatak zadan:

30. 11. 2021.

Zadatak zadao:

Izv. prof. dr. sc. Darko Ivančević

Datum predaje rada:

1. rok: 24. 2. 2022.  
2. rok (izvanredni): 6. 7. 2022.  
3. rok: 22. 9. 2022.

Predviđeni datumi obrane:

1. rok: 28. 2. – 4. 3. 2022.  
2. rok (izvanredni): 8. 7. 2022.  
3. rok: 26. 9. – 30. 9. 2022.

Predsjednik Povjerenstva:

Prof. dr. sc. Mfran Vrdoljak

## SADRŽAJ

SADRŽAJ .....	I
POPIS SLIKA .....	II
POPIS TABLICA .....	III
POPIS OZNAKA .....	IV
SAŽETAK .....	V
SUMMARY .....	VI
1. UVOD .....	1
1.1. Opis zadatka .....	1
2. METODA EKVIVALENTNE KRUTOSTI PANELA .....	3
2.1. Analitički proračun .....	5
2.1.1. Određivanje matrica krutosti za slučaj I uzdužnice .....	7
2.1.2. Određivanje matrica krutosti za slučaj T uzdužnice .....	7
2.1.3. Određivanje matrica krutosti za slučaj U uzdužnice .....	8
2.2. Numerički model .....	9
2.3. Model panela s ljuskastim uzdužnicama .....	11
3. Rezultati .....	15
3.1. Rezultati izvijanja ekvivalentnog panela .....	15
3.2. Rezultati izvijanja panela s ljuskastim uzdužnicama .....	17
4. ZAKLJUČAK .....	20
LITERATURA .....	21

**POPIS SLIKA**

Slika 1.	Osnovni konstrukcijski elementi krila [1] .....	1
Slika 2.	Korišteni profili uzdužnica [3].....	2
Slika 3.	Poprečni presjek I uzdužnice s definicijom geometrijskih parametara uzdužnica ..	7
Slika 4.	Poprečni presjek T uzdužnice s definicijom geometrijskih parametara uzdužnica .	8
Slika 5.	Poprečni presjek U uzdužnice s definicijom geometrijskih parametara uzdužnica .	9
Slika 6.	Modelirana ljuskasta ploča i njene dimenzije .....	10
Slika 7.	Opterećenje izvijanjem na ekvivalentni panel i rubni uvjeti .....	10
Slika 8.	Numerički model ljuske s ekvivalentnom debljinom.....	11
Slika 9.	Model panela s ljuskastim uzdužnicama .....	11
Slika 10.	Panel s ljuskastim I uzdužnicama opterećen na izvijanje .....	12
Slika 11.	Mreža konačnih elemenata a) I profil uzdužnica b) T profil uzdužnica c) U profil uzdužnica .....	13
Slika 12.	Konvergencija vlastite vrijednosti ovisno o broju konačnih elemenata .....	14
Slika 13.	Prvi način izvijanja ekvivalentnog panela s I uzdužnicama i pripadajućim vlastitim vrijednostima .....	15
Slika 14.	Treći način izvijanja ekvivalentnog panela za s T uzdužnicama i pripadajućim vlastitim vrijednostima .....	16
Slika 15.	Peti način izvijanja ekvivalentnog panela s U uzdužnicama i pripadajućim vlastitim vrijednostima .....	16
Slika 16.	Prvi način izvijanja panela s I ljuskastim uzdužnicama i pripadajućim vlastitim vrijednostima.....	18
Slika 17.	Prvi način izvijanja panela s T ljuskastim uzdužnicama i pripadajućim vlastitim vrijednostima.....	18
Slika 18.	Drugi način izvijanja panela s U ljuskastim uzdužnicama i pripadajućim vlastitim vrijednostima.....	19

---

**POPIS TABLICA**

Tablica 1. Svojstva aluminijske legure 7072 [9].....	6
Tablica 2. Dimenzije uzdužnica .....	6
Tablica 3. Broj konačnih elemenata i čvorova .....	13
Tablica 4. Vlastite vrijednosti pri izvijanju ekvivalentnog panela .....	17
Tablica 5. Vlastite vrijednosti pri izvijanju panela s ljuskastim uzdužnicama .....	19
Tablica 6. Usporedba vlastitih vrijednosti analiziranih modela .....	20



**POPIS OZNAKA**

Oznaka	Jedinica	Opis
<b>A</b>	N/m	Matrica istežne krutosti
<b>A'</b>	N/m	Matrica istežne krutosti oplate
<b>A''</b>	N/m	Matrica istežne krutosti uzdužnica
$A_{uzd}$	m <sup>2</sup>	Površina uzdužnice
<b>B</b>	N	Matrica spregnute krutosti
<b>B'</b>	N	Matrica spregnute krutosti oplate
<b>B''</b>	N	Matrica spregnute krutosti uzdužnica
$b$	m	Razmak među uzdužnicama
<b>D</b>	Nm	Matrica savojne krutosti
<b>D'</b>	Nm	Matrica savojne krutosti oplate
<b>D''</b>	Nm	Matrica savojne krutosti uzdužnica
$D$	m	Dužina panela
$E$	N/m <sup>2</sup>	Modul elastičnosti
$G$	N/m <sup>2</sup>	Modul smičnosti
$h$	m	Debljina oplate
$L$	m	Širina panela
<b>M</b>	Nm/m	Vektor momenata u panelu
$m_{eq}$	kg	Ekvivalentna masa panela
<b>N</b>	N/m	Vektor sila u panelu
$n$	-	Broj uzdužnica
$t_{eq}$	m	Ekvivalentna debljina panela
$X, Y, Z$	-	Globalne koordinatne osi
$\epsilon^0$	m/m	Deformacije srednje površine laminata
$\kappa$	1/m	Vektor zakrivljenosti srednje površine
$\nu$	-	Poissonov koeficijent
$\rho$	kg/m <sup>3</sup>	Gustoća zraka

---

**SAŽETAK**

Zadatak ovog završnog rada je provesti numeričku analizu čvrstoće ojačanih panela primjenom metode za izračun ekvivalentne krutosti panela. U prvom djelu rada je predstavljena i opisana metoda ekvivalentne krutosti panela, te analitički proračun koji se provodi pomoću programskog paketa *Matlab*. Glavni dio rada se bavi numeričkim modelom koji je dobiven korištenjem programa *Abaqus/Standard*, a nakon gotovih modela, opterećenih na izvijanje s različitim brojem i profilom uzdužnica, u trećem poglavlju prikazani su rezultati i njihova usporedba. Posljednje poglavlje rada je zaključak u kojem se nalazi detaljna analiza rezultata.

Ključne riječi: ekvivalentni panel, uzdužnice, izvijanje, numerička analiza  
čvrstoće.

---

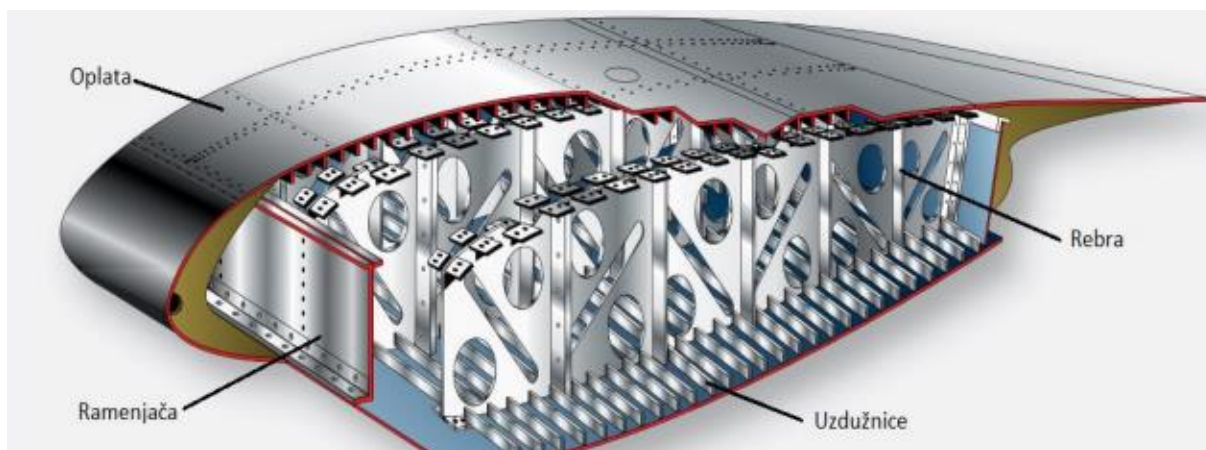
**SUMMARY**

The aim of this thesis is to perform a numerical analysis of the stiffness of stiffened panels by applying a method for equivalent stiffness calculation of the panel. In the first chapter of the thesis, the method of equivalent stiffness of the panel, as well as the analytical calculation that is conducted by using the *Matlab* software package are presented and described. The main chapter of the paper deals with a numerical model created by using the *Abaqus/Standard* program. After the models have been completed, loaded to buckling with different number and profile of stringers, the results and their comparison are presented in the third chapter of the paper. The last chapter of the paper is the conclusion, which contains a detailed analysis of the results.

Key words: equivalent panel, stringers, buckling, numerical stress analysis.

## 1. UVOD

Krilo predstavlja najvažniji dio konstrukcije zrakoplova i ono je glavna aerodinamička noseća površina na kojoj se stvara sila uzgona. Neki od osnovnih konstrukcijskih elemenata krila su ramenjače, rebra, uzdužnice i oplata [1]. U ovome radu pažnja je usmjerena k metalnim profilima koji su postavljeni uzduž krila tj. uzdužnicama (engl. *stringers*). U pravilu su to gredni nosači znatno manjeg poprečnog presjeka od ramenjača. Uzdužnice služe za ojačavanje oplata te se ukružuje konstrukcija krila, ali isto tako one na sebe mogu preuzeti i dio opterećenja. U slučaju kada uzdužnice predstavljaju nosive elemente, njihova uloga je da na sebe preuzmu aksijalne sile, sile na vlak ili tlak [2]. Pri njihovoj izradi najčešće se primjenjuje postupak oblikovanja deformiranjem ili isprešavanje, a kao materijali se koriste aluminijske legure. Osnovni konstrukcijski dijelovi krila prikazani su na *Slici 1*.



**Slika 1. Osnovni konstrukcijski elementi krila [1]**

Kako bi se poboljšala mehanička svojstva, u zrakoplovnoj industriji često se oplati dodaju ukrute (eng. *Stiffeners*) te se na taj način dobivaju nove konstrukcijske cjeline tj. paneli. Njihovim dodavanjem nastoji se potpuno zamijeniti ili smanjiti broj klasičnih konstrukcijskih elemenata krila kao što su rebra i ramenjače pošto isti imaju veću masu i poprečni presjek u odnosu na ukrute.

### 1.1. Opis zadatka

Osnovni cilj ovoga rada je provedba numeričke analize čvrstoće panela ojačanih uzdužnicama koji predstavljaju tipične konstrukcijske elemente krila. Kako bi se olakšala izrada takvog modela može se izbjeći diskretizacija pojedinačnih uzdužnica. To je i učinjeno te je u ovome radu korištena tzv. *Smearred Stiffener* metoda za izračun ekvivalentne krutosti panela.

Numeričke analize koje su predstavljene u ovome radu provedene su uz pomoć programskog paketa *Abaqus/Standard*<sup>®</sup>. Kako bi se procijenio utjecaj geometrijskih karakteristika na točnost dobivenih podataka, uspoređeni su rezultati numeričkih modela kojima je krutost definirana primjenom metode ekvivalentne krutosti panela s rezultatima numeričkih modela s uzdužnicama diskretiziranim ljuskastim konačnim elementima. Valja napomenuti i to kako su numeričke analize provedene za tri različita profila uzdužnica, a u ovome slučaju radi se o I, T i U profilima. Za njihovu vizualizaciju poslužila je literatura [3] te su iste prikazane na *Slici 2*.



**Slika 2.** Korišteni profili uzdužnica [3]

## 2. METODA EKVIVALENTNE KRUTOSTI PANELA

Kako bi preliminarni proračuni konstrukcija bili što jednostavniji koriste se metode koje ne zahtijevaju detaljno modeliranje geometrije. Teorija ekvivalentnog ojačanog panela s uzdužnicama koje su izrađene od homogenog izotropnog materijala temelji se na teoriji višeslojnih kompozitnih ortotropnih ploča. Pri tome se razmatra panel kod kojega su uzdužnice postavljene u smjeru osi  $Y$ , dok istih u smjeru osi  $X$  nema. Konstitutivna jednadžba višeslojnih kompozita definira odnos naprezanja i deformacija u bilo kojem obliku, a ista je prikazana pomoću jednadžbe (1) i prema [4] glasi:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^0 \\ \boldsymbol{\kappa} \end{bmatrix}. \quad (1)$$

U općenitom slučaju lijeva strana jednadžbe (1) predstavlja opterećenje koje je zadano kao sile i momenti, a ostali simboli i oznake imaju slijedeće značenje:

- $\mathbf{A}$  - matrica istezne krutosti [N/m],
- $\mathbf{B}$  - matrica spregnute krutosti [N],
- $\mathbf{D}$  - matrica savojne krutosti [Nm],
- $\boldsymbol{\varepsilon}^0$  - deformacije srednje površine laminata [m/m],
- $\boldsymbol{\kappa}$  - Zakrivljenost srednje površine [-].

Fizikalno značenje navedenih matrica je da one povezuju sile i momente sa zakrivljenosti i deformacijama srednje površine laminata, a iz istih se vidi ponašanje kompozitne konstrukcije u ovisnosti o rasporedu slojeva. Matrica istezne krutosti definira vezu između sila i deformacija, matrica spregnute krutosti daje poveznicu između sila i zakrivljenosti dok matrica savojne krutosti veže momente i zakrivljenost. U općenitom slučaju dimenzije jednadžbe (1) su:  $[6 \times 1] = [6 \times 6][6 \times 1]$ . Pošto su sve komponente vektora sila i momenata povezane sa svim komponentama tenzora deformacija i zakrivljenosti, za razliku od izotropnog materijala kod kojega postoji samo veza između  $\mathbf{N}$  i  $\boldsymbol{\varepsilon}^0$  te  $\mathbf{M}$  i  $\boldsymbol{\kappa}$ , javlja se spregnutost (savijanje i vitoperenje, savijanje i smicanje, savijanje i istezanje, istezanje i smicanje te istezanje i vitoperenje) [5].

Valja napomenuti i to kako se sve matrice krutosti iz jednadžbe (1) odnose se na krutost cijeloga panela pri čemu svaki se član matrice predstavlja zbroj krutosti uzdužnice i oplate. Prema [6] navedena tvrdnja se zapisuje kao:

$$\begin{aligned}
 A_{ij} &= A'_{ij} + A''_{ij}, \\
 B_{ij} &= B'_{ij} + B''_{ij}, \\
 D_{ij} &= D'_{ij} + D''_{ij}.
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

U jednadžbi (2) jedna crtica u eksponentu odnosi se na oplatu dok se dvije crtice u eksponentu odnose na uzdužnice.

Matrice krutosti za oplatu izrađenu od izotropnog materijala prema [6] imaju slijedeće izraze:

$$\begin{aligned}
 A'_{ij} &= \begin{bmatrix} A'_{11} & A'_{11} & A'_{16} \\ A'_{12} & A'_{22} & A'_{26} \\ A'_{16} & A'_{26} & A'_{66} \end{bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{\nu E}{1-\nu^2} & 0 \\ \frac{\nu E}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} dz = h \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{\nu E}{1-\nu^2} & 0 \\ \frac{\nu E}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix}, \\
 B'_{ij} &= \begin{bmatrix} B'_{11} & B'_{11} & B'_{16} \\ B'_{12} & B'_{22} & B'_{26} \\ B'_{16} & B'_{26} & B'_{66} \end{bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{\nu E}{1-\nu^2} & 0 \\ \frac{\nu E}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} z dz = \frac{h^2}{4} \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{\nu E}{1-\nu^2} & 0 \\ \frac{\nu E}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} = 0, \\
 D'_{ij} &= \begin{bmatrix} D'_{11} & D'_{11} & D'_{16} \\ D'_{12} & D'_{22} & D'_{26} \\ D'_{16} & D'_{26} & D'_{66} \end{bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{\nu E}{1-\nu^2} & 0 \\ \frac{\nu E}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} z^2 dz = \frac{h^3}{12} \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{\nu E}{1-\nu^2} & 0 \\ \frac{\nu E}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix}.
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

U prethodnom sustavu jednadžbi (3) navedene oznake i simboli imaju značenje:

- $h$  - debljina oplata [m],
- $E$  - modul elastičnosti [N/m<sup>2</sup>],
- $\nu$  - Poissonov faktor [-],
- $G$  - modul smičnosti [N/m<sup>2</sup>].

Modul smičnosti definira se pomoću jednadžbe (4) koja glasi:

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)}.
 \tag{4}$$

Oplata je simetrična oko središnje ravnine te je iz toga razloga matrica spregnute krutosti (matrica  $\mathbf{B}$ ) jednaka nuli. U obzir se uzimaju samo one unutarnje sile i moment uzdužnica koji se odnosi na os  $Y$ , a jednačbe matrica krutosti  $\mathbf{A}''$ ,  $\mathbf{B}''$  i  $\mathbf{D}''$  za uzdužnice u smjeru osi  $Y$  su prikazane pomoću jednačbi (5) i one prema [7] glase:

$$\begin{aligned} A_{22}'' &= \frac{1}{b} \sum_{i=1}^n (E \cdot d_i \cdot t_i), \\ B_{22}'' &= \frac{1}{b} \sum_{i=1}^n (E \cdot d_i \cdot t_i \cdot \Delta z_i), \\ D_{22}'' &= \frac{1}{b} \sum_{i=1}^n \left[ E \cdot d_i \cdot \left( \frac{t_i^3}{12} + t_i \cdot \Delta z_i^2 \right) \right]. \end{aligned} \quad (5)$$

U prethodnim jednačbama  $E$  je oznaka za modul elastičnosti,  $b$  je razmak među uzdužnicama, a  $d_i$ ,  $t_i$  i  $\Delta z_i$  su oznake povezane s dimenzijama uzdužnica koje će se kasnije posebno definirati. Vrijednosti svih ostalih članova matrica  $\mathbf{A}''$ ,  $\mathbf{B}''$  i  $\mathbf{D}''$  iznose nula.

Prema [8], izraz pomoću kojega se može izračunati ekvivalentna debljina panela dan je pomoću jednačbe (6), dok je izraz za računanje njegove mase prikazan jednačbom (7):

$$t_{eq} = h + n \cdot \frac{A_{uzd}}{L}, \quad (6)$$

$$m_{eq} = t_{eq} \cdot L \cdot D \cdot \rho. \quad (7)$$

Oznake i simboli iz prethodne dvije jednačbe imaju sljedeće značenje:

- $h$  - debljina oplata panela [m],
- $n$  - broj uzdužnica na panelu,
- $A_{uzd}$  - površina poprečnog presjeka uzdužnice [m<sup>2</sup>],
- $L$  - ukupna širina panela [m],
- $D$  - dužina panela [m],
- $\rho$  - gustoća materijala panela [kg/m<sup>2</sup>].

## 2.1. Analitički proračun

Kao što je već spomenuto, ova metoda omogućava pojednostavljeno modeliranje panela ojačanih uzdužnicama, a kako bi se proračuni mogli provesti potrebno je prije svega definirati svojstva materijala i dimenzije panela. Za materijal je odabrana aluminijeva legura 7072 koja



se često koristi u zrakoplovnoj industriji, a njena svojstva su preuzeta iz [9] i ista su prikazana u *Tablici 1.*

**Tablica 1. Svojstva aluminijeve legure 7072 [9]**

Aluminijeva legura 7072	
Modul elastičnosti	68 GPa
Poissonov koeficijent	0,33

Nadalje, analitički proračun koji će se provesti u ovome radu temeljit će se na dimenzijama konstruktivnih elemenata zrakoplova Airbus A319 koje su preuzete iz [10]. Prema navedenoj literaturi ukupna širina panela iznosi  $L = 0,45$  m dok je dužina panela  $D = 0,45$  m. Kako je već rečeno, analiza se provodi za tri različita tipa uzdužnica i ista će biti prikazana u sljedećim poglavljima. Prva prepreka u tome je određivanje matrica krutosti koje je potrebno definirati za svaki slučaj posebno.

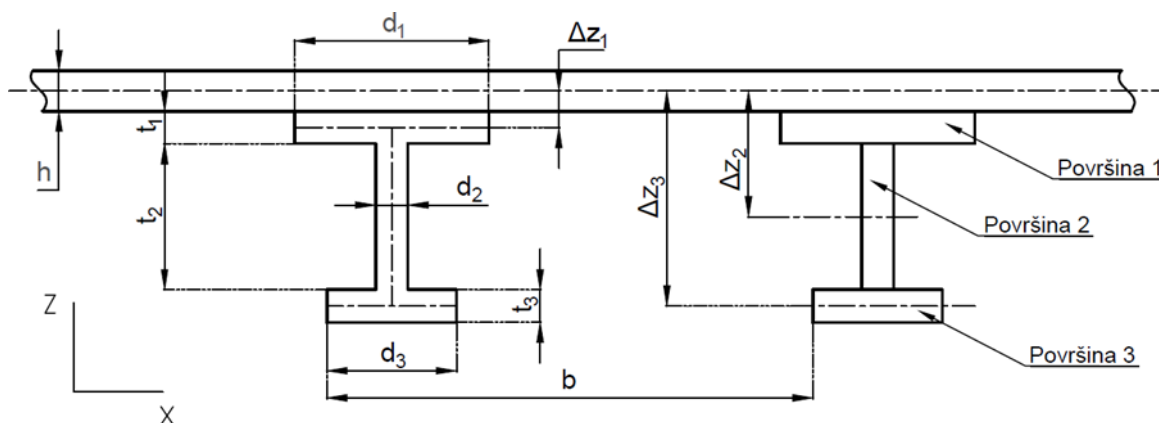
Valja napomenuti i to kako su, radi lakšeg proračuna, za primjenu ove teorije korištene uzdužnice koje imaju simetričan poprečni presjek oko osi  $Z$ , orijentacija koordinatnih osi je jasno prikazana na *Slici 3.* Odabrane su uzdužnice s I, T i U profilima, a njihove dimenzije će biti prikazane u *Tablici 2.*, te na *Slici 3.,4. i 5.*

**Tablica 2. Dimenzije uzdužnica**

	I uzdužnica	T uzdužnica	U uzdužnica
$d_1$	24 mm	24 mm	0,9 mm
$d_2$	0,9 mm	0,9 mm	24 mm
$d_3$	16 mm	0 mm	0,9 mm
$t_1$	0,9 mm	0,9 mm	18,2 mm
$t_2$	18,2 mm	18,2 mm	0,9 mm
$t_3$	0,9 mm	0 mm	18,2 mm
$\Delta z_1$	0,9 mm	0,9 mm	9,55 mm
$\Delta z_2$	10,45 mm	10,45 mm	19,1 mm
$\Delta z_3$	20 mm	0 mm	9,55 mm

### 2.1.1. Određivanje matrica krutosti za slučaj I uzdužnice

Kako bi se pojedini simboli i oznake koji su prethodno navedeni u *Tablici 2.* vizualizirali, dan je poprečni presjek I uzdužnice na *Slici 3.*



**Slika 3. Poprečni presjek I uzdužnice s definicijom geometrijskih parametara uzdužnica**

Dimenzije iz *Tablice 2.* uvrštavaju se u jednadžbe (3), (4) i (5), te je korištenjem programskog paketa *Matlab* dobivena matrica krutosti za slučaj panela s deset uzdužnica pri čemu je razmak između njih 45 mm:

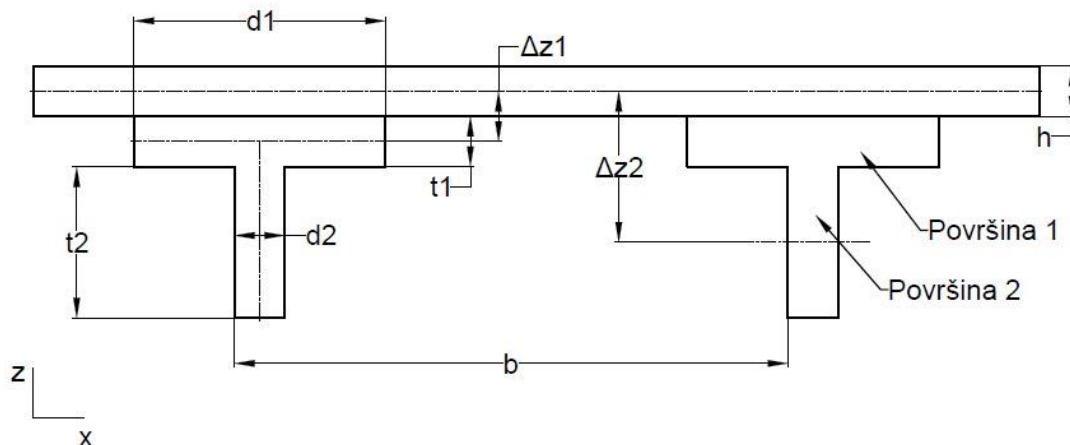
$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6,868 \cdot 10^7 & 2,266 \cdot 10^7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2,266 \cdot 10^7 & 1,478 \cdot 10^8 & 0 & 0 & 7,232 \cdot 10^5 & 0 \\ 0 & 0 & 2,301 \cdot 10^7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4,636 & 1,530 & 0 \\ 0 & 7,232 \cdot 10^5 & 0 & 1,530 & 1,223 \cdot 10^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,553 \end{bmatrix}.$$

Kako bi se utvrdio utjecaj razmaka između uzdužnica, isti je povećan te je ujedno promijenjen i broj analiziranih uzdužnica. Točnije rečeno, drugi analizirani slučaj jest panel s osam uzdužnica pri čemu je razmak između istih 56,25 mm. Prema svemu navedenom matrica krutosti glasi:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6,868 \cdot 10^7 & 2,266 \cdot 10^7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2,266 \cdot 10^7 & 1,320 \cdot 10^8 & 0 & 0 & 5,786 \cdot 10^5 & 0 \\ 0 & 0 & 2,301 \cdot 10^7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4,636 & 1,530 & 0 \\ 0 & 5,786 \cdot 10^5 & 0 & 1,530 & 9,701 \cdot 10^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,553 \end{bmatrix}.$$

### 2.1.2. Određivanje matrica krutosti za slučaj T uzdužnice

Za slučaj T uzdužnice, matrice krutosti se dobivaju korištenjem dimenzija iz *Tablice 2.*, a na *Slici 4.* je prikazan poprečni presjek T uzdužnice za vizualizaciju pojedinih simbola i oznaka.



**Slika 4. Poprečni presjek T uzdužnice s definicijom geometrijskih parametara uzdužnica**

Sami postupak dobivanja matrica krutosti je isti kao i za slučaj I uzdužnice, ali se u programski paket *Matlab* uvrštavaju dimenzije za T uzdužnicu. Za deset T uzdužnica pri čemu je razmak između istih 45 mm, matrica krutosti iznosi:

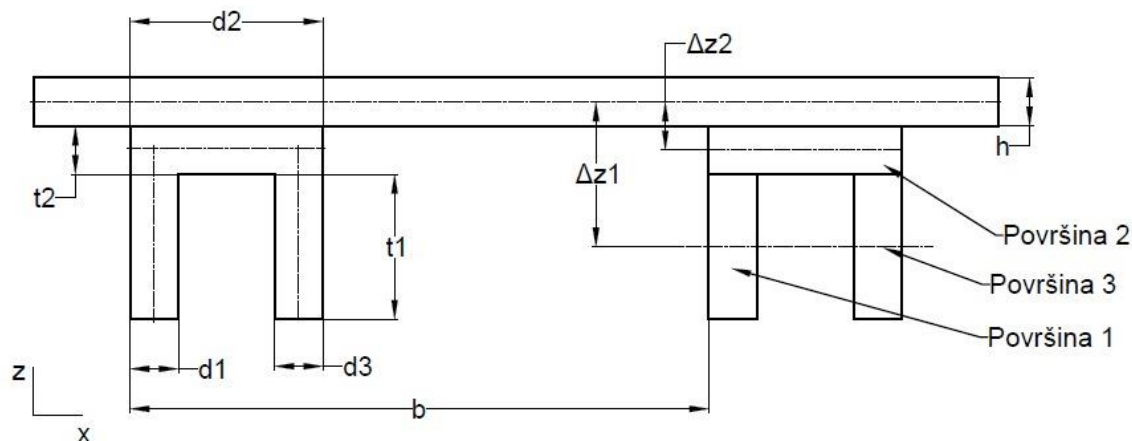
$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6,868 \cdot 10^7 & 2,266 \cdot 10^7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2,266 \cdot 10^7 & 1,261 \cdot 10^8 & 0 & 0 & 2,880 \cdot 10^5 & 0 \\ 0 & 0 & 2,301 \cdot 10^7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4,636 & 1,530 & 0 \\ 0 & 2,880 \cdot 10^5 & 0 & 1,530 & 3,420 \cdot 10^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,553 \end{bmatrix}.$$

Ako se broj uzdužnica smanji na osam, pri čemu se razmak između istih poveća na 56,25 mm, matrica krutosti iznosi:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6,868 \cdot 10^7 & 2,266 \cdot 10^7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2,266 \cdot 10^7 & 1,146 \cdot 10^8 & 0 & 0 & 2,304 \cdot 10^5 & 0 \\ 0 & 0 & 2,301 \cdot 10^7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4,636 & 1,530 & 0 \\ 0 & 2,304 \cdot 10^5 & 0 & 1,530 & 2,737 \cdot 10^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,553 \end{bmatrix}.$$

### 2.1.3. Određivanje matrica krutosti za slučaj U uzdužnice

Dimenzije koje su korištene pri određivanju matrica krutosti za slučaj U uzdužnice prikazane su u *Tablici 2.*, a poprečni presjek U uzdužnice može se vidjeti na *Slici 5.* Postupak određivanja matrica krutosti isti je kao i u prethodnim slučajevima.



**Slika 5. Poprečni presjek U uzdužnice s definicijom geometrijskih parametara uzdužnica**

Matrica krutosti za slučaj s deset uzdužnica i razmakom 45 mm između uzdužnica iznosi:

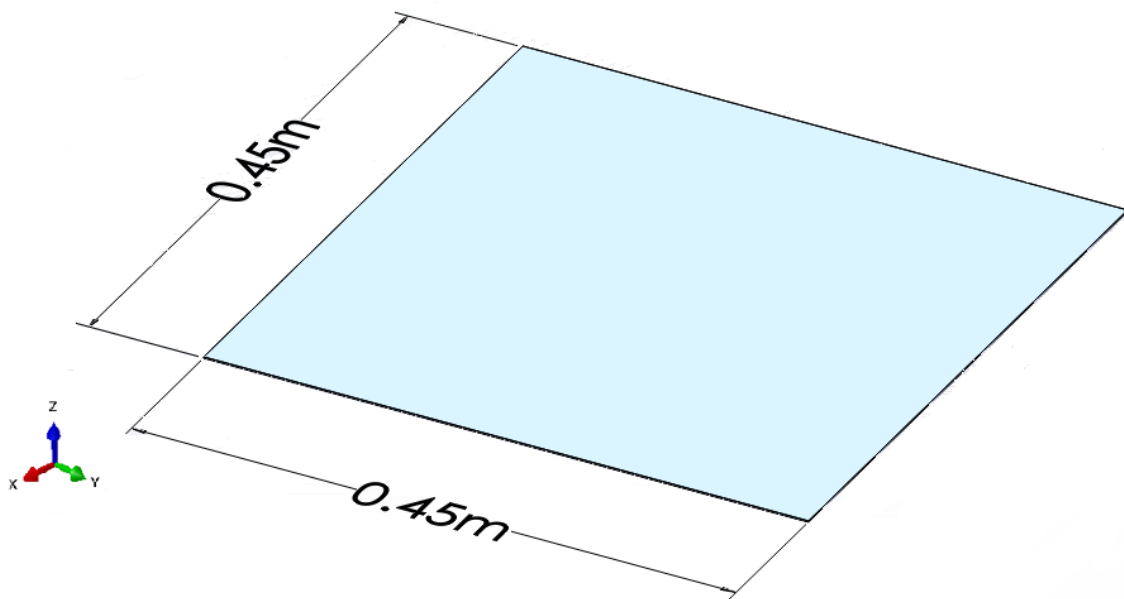
$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6,868 \cdot 10^7 & 2,266 \cdot 10^7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2,266 \cdot 10^7 & 1,508 \cdot 10^8 & 0 & 0 & 5,467 \cdot 10^5 & 0 \\ 0 & 0 & 2,301 \cdot 10^7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4,636 & 1,530 & 0 \\ 0 & 5,467 \cdot 10^5 & 0 & 1,530 & 6,806 \cdot 10^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,553 \end{bmatrix}$$

Smanjenjem broja uzdužnica na osam, te povećanjem koraka između njih na 56,25 mm, dobiva se matrica krutosti:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6,868 \cdot 10^7 & 2,266 \cdot 10^7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2,266 \cdot 10^7 & 1,344 \cdot 10^8 & 0 & 0 & 4,374 \cdot 10^5 & 0 \\ 0 & 0 & 2,301 \cdot 10^7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4,636 & 1,530 & 0 \\ 0 & 4,374 \cdot 10^5 & 0 & 1,530 & 5,446 \cdot 10^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,553 \end{bmatrix}$$

## 2.2. Numerički model

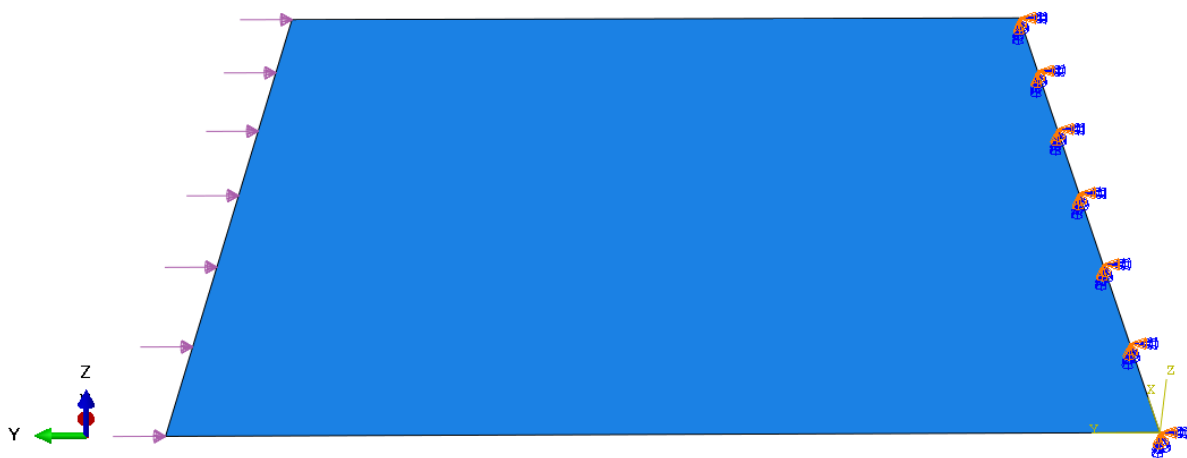
Nakon što su definirane sve matrice krutosti moguće je provesti analizu u programskom paketu *Abaqus Standard*. Pri tome je u prvom koraku analize potrebno modelirati ljuskastu ploču čije dimenzije iznose 0,45 m x 0,45 m. Navedena ploča koja je modelirana u spomenutom programskom paketu prikazana je na Slici 6. Na istoj su jasno vidljive i dimenzije ljuskaste ploče.



**Slika 6. Modelirana ljuskasta ploča i njene dimenzije**

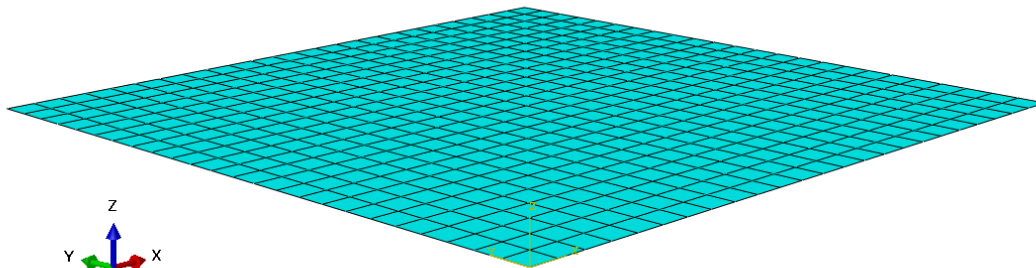
Sljedeći korak u analizi predstavlja unošenje podataka o matricama krutosti, a čije su vrijednosti dobivene u prethodnom poglavlju. U svakom posebnom slučaju dobivene vrijednosti su unešene u programski okvir pod nazivom *General Shell Stiffness*.

Isto tako, nakon unešenih podataka o matricama krutosti potrebno je definirati rubne uvjete i opterećenje prilikom izvijanja. Točnije rečeno, analizira se slučaj u kojemu je rubno opterećenje postavljeno duž samo jednog ruba u ravnini panela. Pri tome su na suprotnom rubu postavljene rubni uvjeti uklještenja. Rubno opterećenje izvijanja na ploču djeluje iznosom od 1 N/m. Prethodno opisani slučaj opterećenja i rubni uvjeti su prikazani na *Slici 7*.



**Slika 7. Opterećenje izvijanjem na ekvivalentni panel i rubni uvjeti**

Kako bi se vizualizirao promatrani panel i postavljena mreža konačnih elemenata, na *Slici 8.* prikazan je njihov raspored. Model se sastoji od 576 elemenata i 625 čvorova, a korišten je tanki ljuskasti element koji nosi naziv *S4R*.

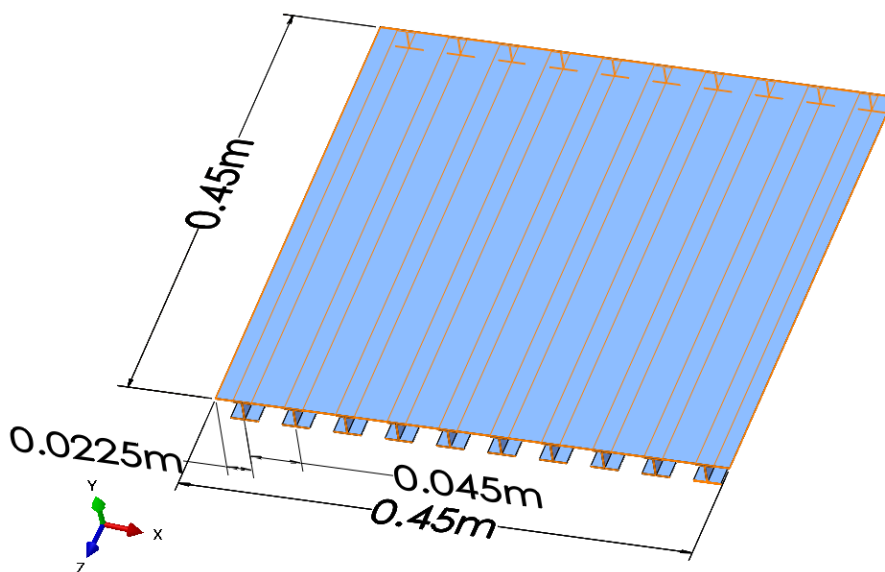


**Slika 8.** Numerički model ljuske s ekvivalentnom debljinom

Prethodne slike i cijeli postupak u programskom paketu *Abaqus/Standard* dobivene su za vrijednosti matrice krutosti koja se odnosi na deset I uzdužnica pri čemu je razmak između istih 45 mm. Ukoliko se mijenja broj uzdužnica, ili pak profil uzdužnica, dobit će se drugačije vrijednosti matrica krutosti, samim time i drugačiji rezultati, ali postupak će biti isti. Rezultati svih slučajeva biti će prikazani u *Poglavlju 3.*

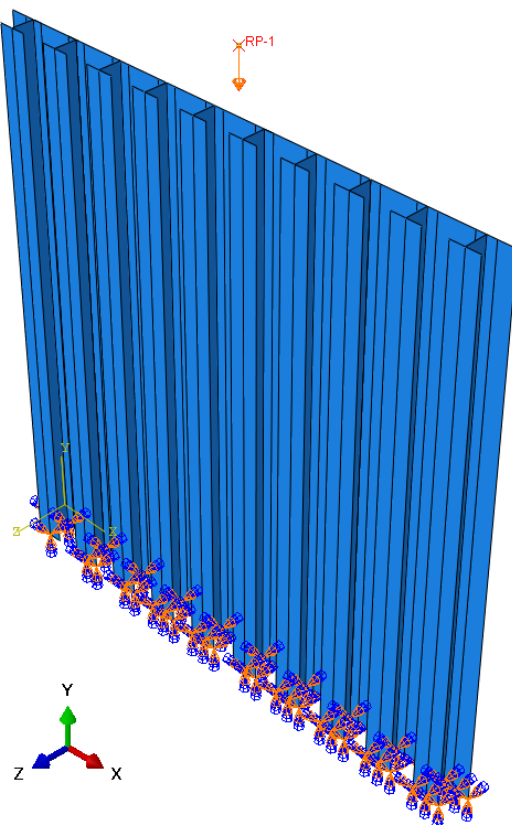
### 2.3. Model panela s ljuskastim uzdužnicama

Raspored i broj uzdužnica za sva tri profila uzdužnica isti je i za numerički model kao i za analitički proračun ekvivalentnog panela prema *Slici 3., 4. i 5.* Jedina razlika je u tome što su u ovome slučaju uzdužnice modelirane kao na *Slici 9.*



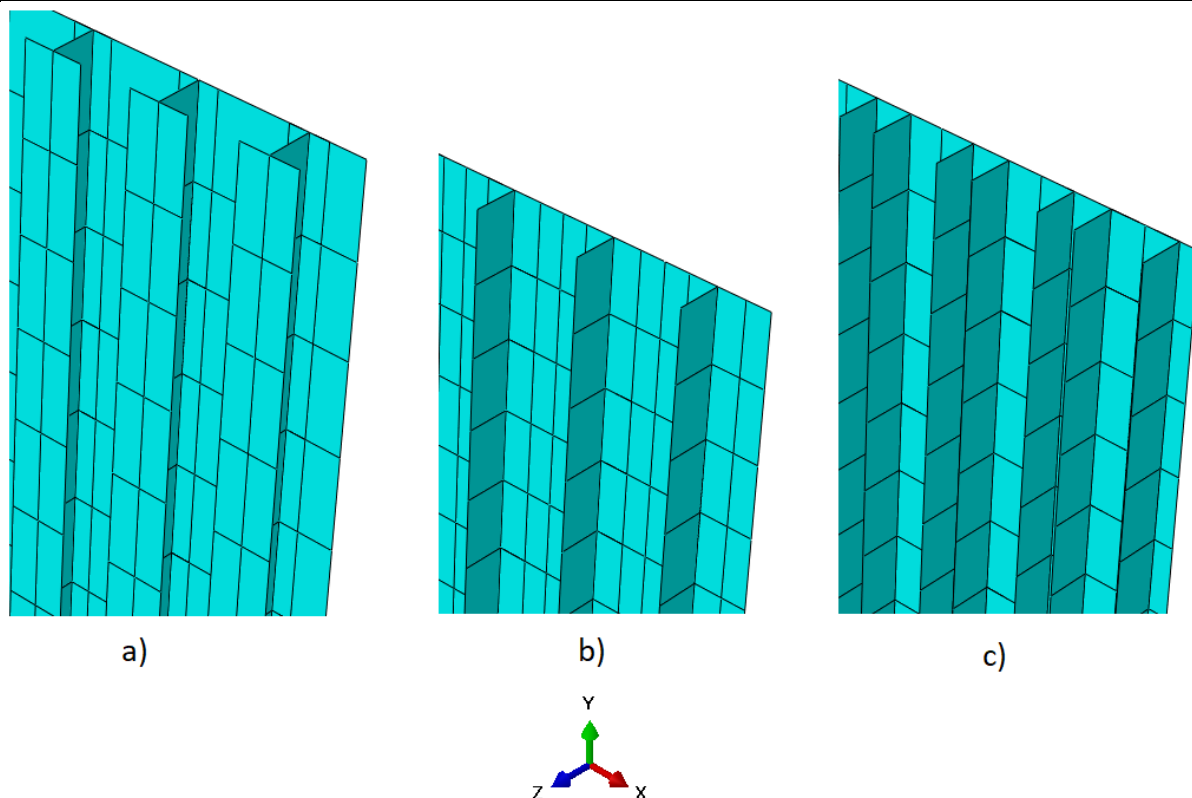
**Slika 9.** Model panela s ljuskastim uzdužnicama

Dimenzije poprečnog presjeka uzdužnica nalaze se u *Tablici 2.*, a rubni uvjeti definirani su kao i za slučaj opterećenja izvijanjem. Točnije rečeno, postoje rubni uvjeti uklještenja na jednom rubu panela gdje su uklješteni završetci uzdužnica i oplate, dok je na suprotnom rubu zadan rubni uvjet krutog tijela koje je povezano s referentnom točkom (RP-1), a opterećenje je zadano i koncentrirano na referentnu točku. Navedena referentna točka vidljiva je na *Slici 10.* Valja napomenuti i to da je opterećenje jednako za sva tri modela s ljuskastim uzdužnicama, pri čemu sila iznosi 1 N. Opterećenja i rubni uvjeti jasno su prikazani na *Slici 10.*



**Slika 10. Panel s ljuskastim I uzdužnicama opterećen na izvijanje**

Na *Slici 11.* prikazana je mreža konačnih elemenata za sva tri profila uzdužnica, a vrsta konačnog elementa ista je kao i kod ekvivalentnog panela. Jedina razlika je u broju konačnih elemenata i broju čvorova. Kako bi se sustavno prikazali brojevi konačnih elemenata i čvorova, isti će biti prikazani u *Tablici 3.* za sve promatrane slučajeve u ovom radu.



**Slika 11. Mreža konačnih elemenata a) I profil uzdužnica b) T profil uzdužnica c) U profil uzdužnica**

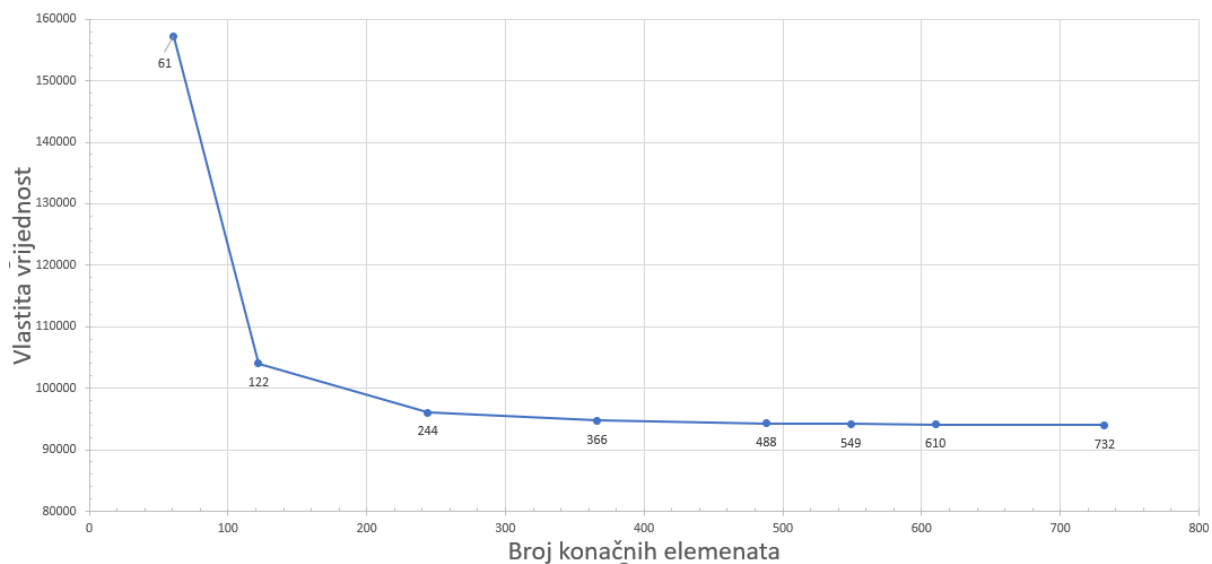
**Tablica 3. Broj konačnih elemenata i čvorova**

Profil i broj uzdužnica	I profil s 10 uzdužnica	I profil s 8 uzdužnica	T profil s 10 uzdužnica	T profil s 8 uzdužnica	U profil s 10 uzdužnica	U profil s 8 uzdužnica
Broj konačnih elemenata	732	784	750	760	765	768
Broj čvorova	936	975	976	980	992	969
Vrsta konačnog elementa	S4R					

Broj konačnih elemenata i broj čvorova su jako važni u samom proračunu, jer što ih je više, dobivaju se točniji iznosi vlastite vrijednosti. Drugim riječima, poželjno je imati što gušću mrežu konačnih elemenata, ali studentska verzija programa *Abaqus/Standard* dozvoljava maksimalno 1000 čvorova, pa su u *Tablici 3.* prikazani maksimalni brojevi za svaki slučaj.



Provedena je i analiza konvergencije rezultata za slučaj panela s deset I ljuskastih uzdužnica, koja na *Slici 12.* nudi grafički prikaz ovisnosti vlastite vrijednosti o gustoći mreže. Za maksimalni dopušteni broj čvorova 936 i maksimalan broj konačnih elemenata 732, vlastita vrijednost iznosi 94 182.



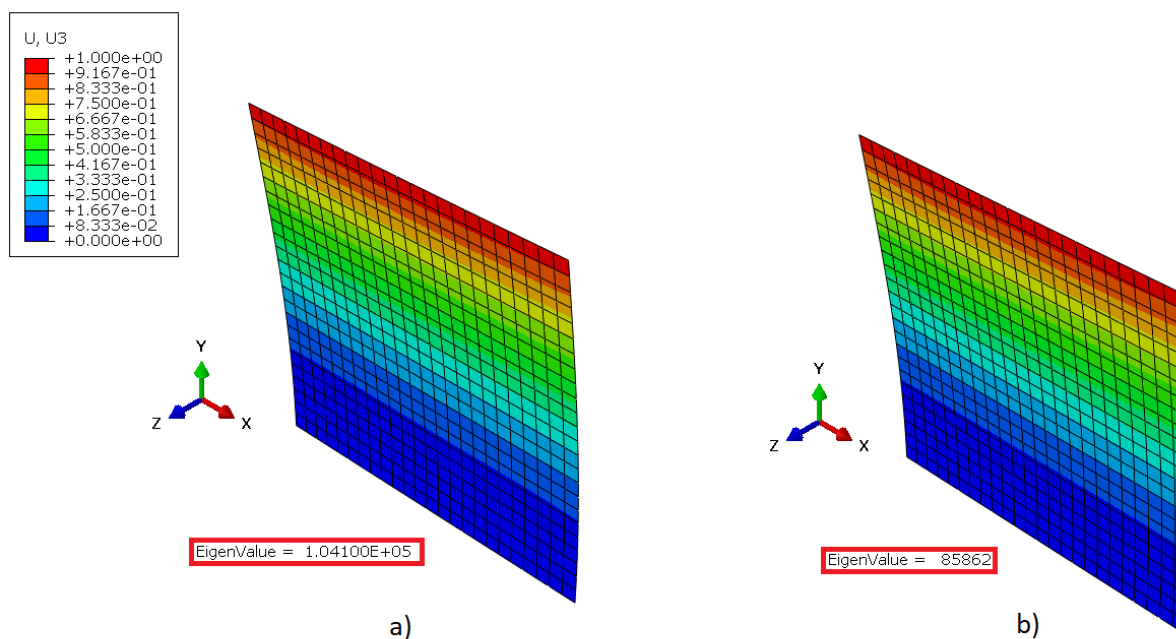
**Slika 12. Konvergencija vlastite vrijednosti ovisno o broju konačnih elemenata**

### 3. Rezultati

U prethodnim je poglavljima provedena analiza opterećenja izvijanjem na ekvivalentni panel i panel s ljuskastim uzdužnicama. U ovome poglavlju bit će prikazani rezultati te analize i to za svaki model posebno. Pri tome će se uspoređivati rezultati za različiti profil i broj uzdužnica, a nakon toga će se usporediti i rezultati dvije različite metode koje su primijenjene u ovom radu.

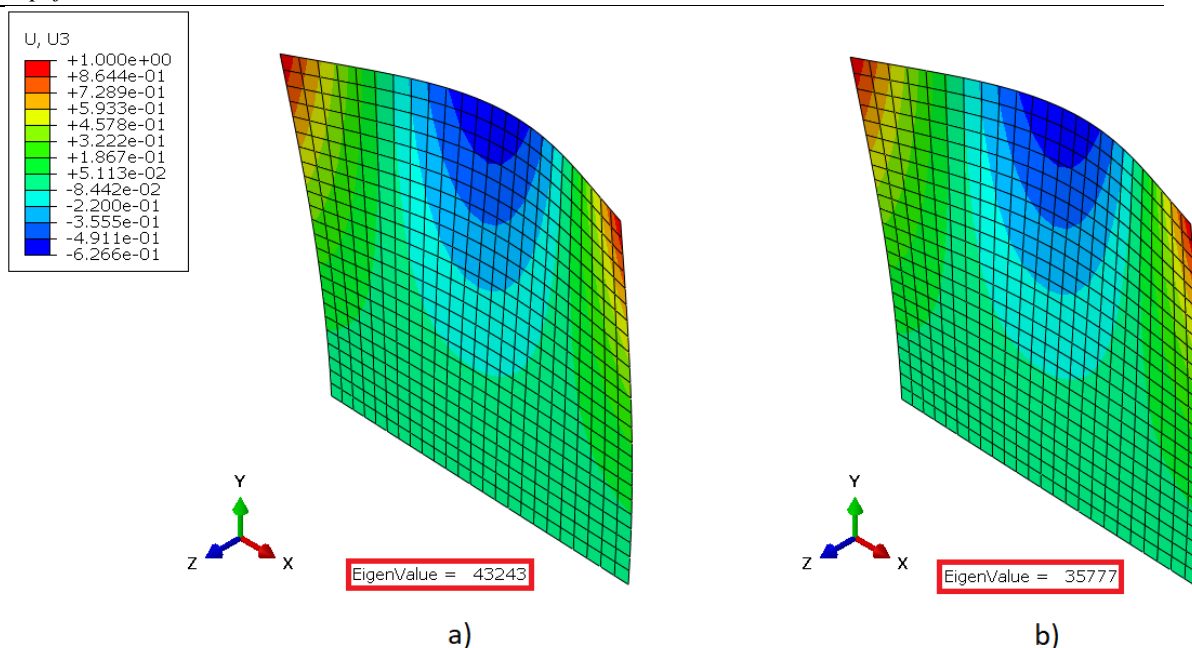
#### 3.1. Rezultati izvijanja ekvivalentnog panela

U ovome poglavlju prikazani su rezultati izvijanja ekvivalentnog panela s obzirom na profil i broj uzdužnica za izračun matrice krutosti (analitički proračun). Dobiveni rezultat izvijanja je koeficijent prema kojem se određuje koliko puta se može povećati početna sila bez da dođe do kritične sile koja bi izvila panel. Na *Slici 13.* su prikazani rezultati izvijanja dobiveni primjenom ekvivalentne krutosti panela za slučaj s I profilom uzdužnica. *Slika 13.a)* odnosi se na deset I uzdužnica, dok se *Slika 13.b)* odnosi na slučaj s osam I uzdužnica.



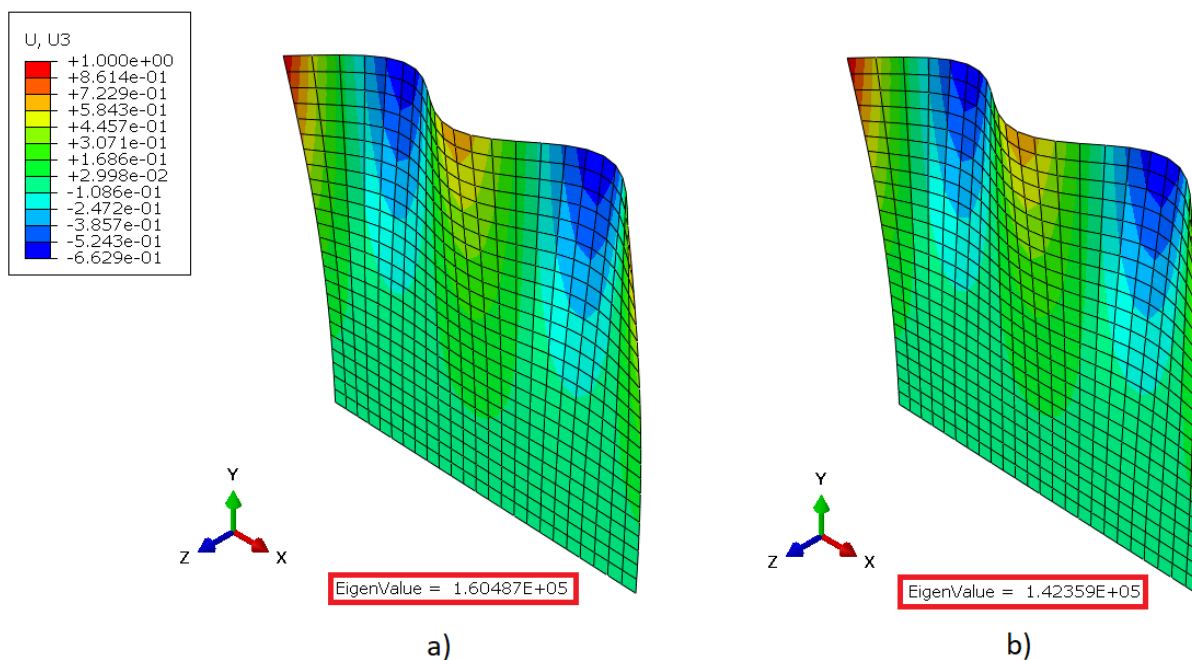
**Slika 13. Prvi način izvijanja ekvivalentnog panela s I uzdužnicama i pripadajućim vlastitim vrijednostima**

Postoji još mnogo različitih načina izvijanja, pa će na *Slici 14.* biti prikazani rezultati trećeg načina izvijanja, dobiveni primjenom ekvivalentne krutosti panela za slučaj s T profilom uzdužnica. *Slika 14.a)* odnosi se na deset T uzdužnica, dok se *Slika 14.b)* odnosi na osam T uzdužnica.



**Slika 14. Treći način izvijanja ekvivalentnog panela za s T uzdužnicama i pripadajućim vlastitim vrijednostima**

Kako bi se pokazalo što više različitih načina izvijanja na *Slici 15.* su prikazani rezultati petog načina izvijanja ekvivalentnog panela s U profilom uzdužnica. *Slika 15.a)* deset U uzdužnica, *Slika 15.b)* osam U uzdužnica.



**Slika 15. Peti način izvijanja ekvivalentnog panela s U uzdužnicama i pripadajućim vlastitim vrijednostima**

Na *Slikama 13., 14. i 15.* uspoređivani su rezultati za isti profil uzdužnica, ali s različitim brojem uzdužnica pa samim time i drugačijim razmakom između njih. Vrijednost legende je fiksirana tako da ista boja označava istu vrijednost tj. iste boje imaju isto fizikalno značenje. Kod izvijanja nisu bitni pomaci već su vlastite vrijednosti (engl. *Eigenvalue*) mjerodavne veličine pa će one biti sustavno prikazane u *Tablici 4.*

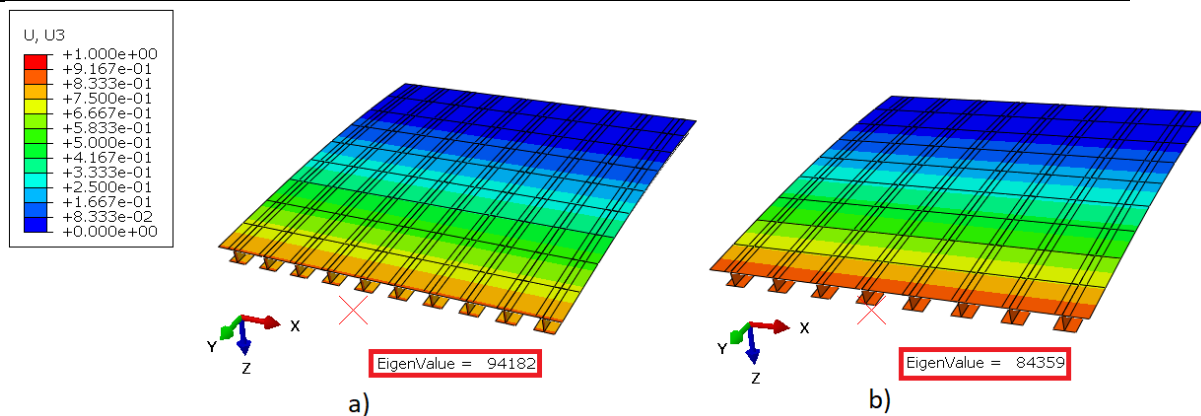
**Tablica 4.   Vlastite vrijednosti pri izvijanju ekvivalentnog panela**

Profil i broj uzdužnica za izračun matrice krutosti	Vlastita vrijednost $\lambda$
I 10	104 100
I 8	85 862
T 10	43 243
T 8	35 777
U 10	160 487
U 8	142 359

Iz tablice je jasno vidljivo da se s povećanjem broja uzdužnica, tj. smanjenjem koraka između njih, vlastita vrijednost povećava. Množenjem vlastite vrijednosti s početnim opterećenjem od 1 N/m, dobiva se kritično opterećenje panela.

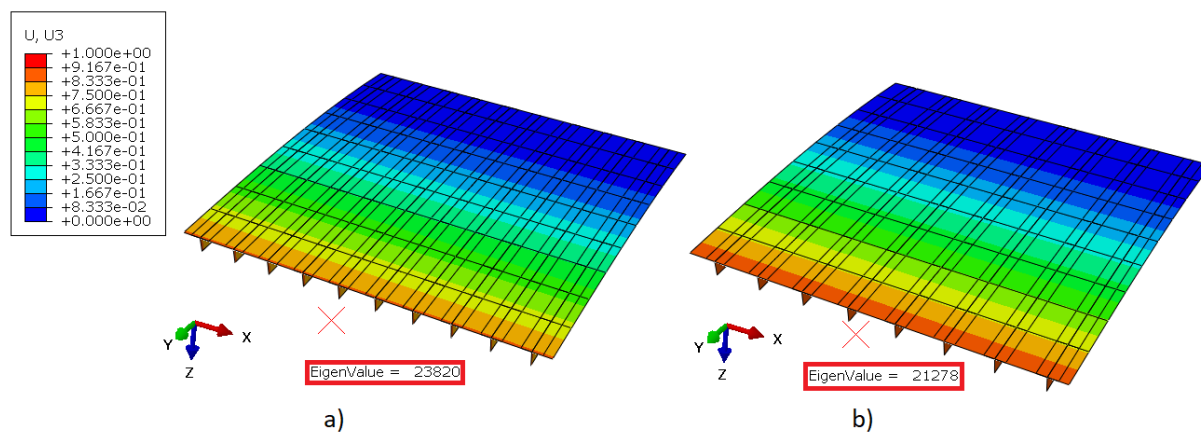
### **3.2.   Rezultati izvijanja panela s ljuskastim uzdužnicama**

U ovom poglavlju prikazani su rezultati izvijanja dobiveni numeričkom analizom. Ponovno će se uspoređivat isti profili uzdužnica, ali sa različitim brojem i korakom između njih, a izvijanje će djelovati na model panela s ljuskastim uzdužnicama. Na *Slici 16.* prikazan je prvi način izvijanja panela s ljuskastim I uzdužnicama. *Slika 16a)* prikazuje panel s deset I uzdužnica, dok *Slika 16b)* prikazuje panel s osam I uzdužnica



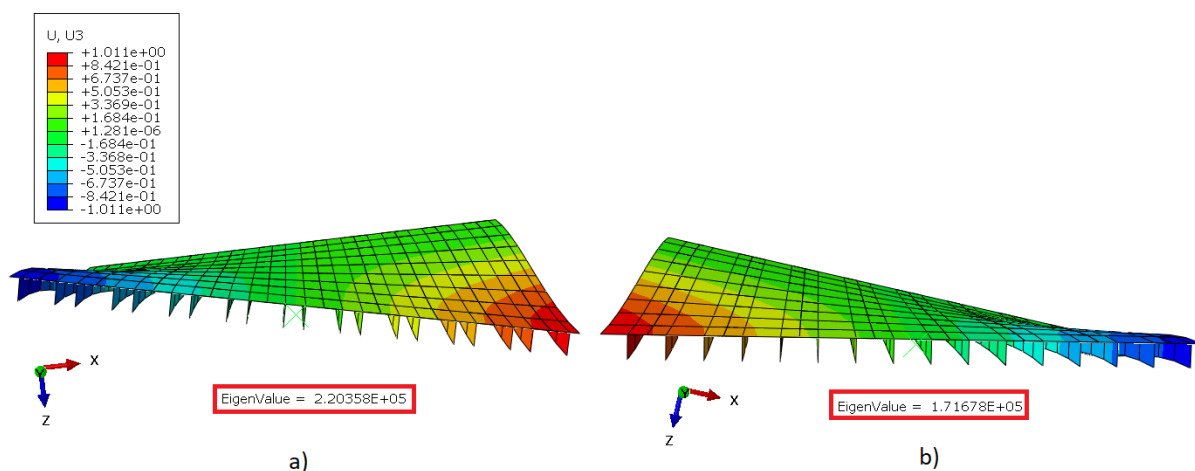
**Slika 16. Prvi način izvijanja panela s I ljskastim uzdužnicama i pripadajućim vlastitim vrijednostima**

Na *Slici 17.* može se vidjeti prvi način izvijanja panela s ljskastim T uzdužnicama. *Slika 17a)* deset T uzdužnica, *Slika 17b)* osam T uzdužnica.



**Slika 17. Prvi način izvijanja panela s T ljskastim uzdužnicama i pripadajućim vlastitim vrijednostima**

Ovdje također, kao i kod ekvivalentnog panela, postoji više načina izvijanja, pa će na *Slici 18.* biti prikazani rezultati drugog načina izvijanja panela s ljuskastim U uzdužnicama. *Slika 18a)* prikazuje panel s deset U uzdužnica, *Slika 18b)* prikazuje panel s osam U uzdužnica.



**Slika 18. Drugi način izvijanja panela s U ljuskastim uzdužnicama i pripadajućim vlastitim vrijednostima**

U *Tablici 5.* je prikazana usporedba vlastitih vrijednosti za različite profile i broj uzdužnica, pri izvijanju panela s ljuskastim uzdužnicama.

**Tablica 5. Vlastite vrijednosti pri izvijanju panela s ljuskastim uzdužnicama**

Profil i broj uzdužnica	Vlastita vrijednost $\lambda$
I 10	94 182
I 8	84 359
T 10	23 820
T 8	21 278
U 10	220 358
U 8	171 678

Iz *Tablice 5.* se jasno vidi da povećanjem broja uzdužnica, odnosno smanjenjem razmaka između njih dolazi do povećanja vlastite vrijednosti, kao što je bio slučaj i kod ekvivalentnog panela.

#### 4. ZAKLJUČAK

U ovom radu provedena je numerička analiza za dva različita modela panela. Za oba modela korištene su iste dimenzije, ista materijalna svojstva i na oba je djelovalo opterećenje izvijanjem. Kod prvog modela korištena je teorija ekvivalentne debljine panela, te je proveden analitički proračun pri čemu je matrica krutosti izračunata u programskom paketu *Matlab*. Drugi model dobiven je u programu *Abaqus/Standard* pri čemu su uzdužnice diskretizirane tankostijenim ljuskastim konačnim elementima. Rezultati su radi usporedbe prikazani za različite profile i broj uzdužnica, te je zaključeno da u obje metode s porastom broja uzdužnica raste i vlastita vrijednost, bez obzira na profil uzdužnica. Najvažnija je ipak usporedba dvaju modela, koja je prikazana u *Tablici 6.*, a svi rezultati su uvršteni za prvi način izvijanja radi lakše usporedbe.

**Tablica 6. Usporedba vlastitih vrijednosti analiziranih modela**

Profil i broj uzdužnica	Vlastita vrijednost ekvivalentnog panela	Vlastita vrijednost panela s ljuskastim uzdužnicama	Razlika u postotcima
I 10	104 100	94 182	9,53 %
I 8	85 862	84 359	1,75 %
T 10	33 291	23 820	28,45 %
T 8	27 422	21 278	22,41 %
U 10	57 845	42 843	25,93 %
U 8	48 259	36 492	24,38 %

U *Tablici 6.* je za referentni model uzet ekvivalentni panel, te je razlika modela izražena u postotcima i jasno se vidi da modeli s T i U uzdužnicama imaju jako velika odstupanja između dva modela, puno više od dopuštenih 10 %. Razlog tome može biti i ograničena verzija programa *Abaqus/Standard*, koja ne dozvoljava gušću mrežu, ali za istu gustoću mreže modeli s I profilom uzdužnica pokazuju jako dobre rezultate. Iz svega navedenog proizlazi zaključak da modeli s T i U profilom uzdužnica nisu pogodni za ovu analizu, dok je model s osam I uzdužnica i razlikom od samo 1,75 % skoro idealan.

---

**LITERATURA**

- [1] Airman Testing Standards Branch, U.S. Department of Transportation: *Aviation Maintenance Technician Handbook – Airframe*, 2012.
- [2] [Trup zrakoplova – Wikipedija \(wikipedia.org\)](https://hr.wikipedia.org/wiki/Trup_zrakoplova); datum pristupa: 10.08.2022.
- [3] Niu, M.C.Y.: *Airframe Structural Design*, Conmillit Press LTD., Hong Kong, 1995.
- [4] Smojver, I.: *Mehanika kompozitnih materijala*, ver.06/2007, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb, 2007.
- [5] Čobanov, M.: *Analiza čvrstoće kompozitne geodetske konstrukcije krila*, Diplomski rad, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb, 2012.
- [6] Birman, V.: *Plate Structures, Solid Mechanics and Its Applications*, Springer Netherlands, 2011.
- [7] Zhao, Q., Ding Y., Jin, H.: *A Layout Optimization Method of Composite Wing Structures Based on Carrying Efficiency Criterion*, Chinese Journal of Aeronautics, Elsevier, 2011.
- [8] Venter, G.: *Multidisciplinary Optimization of a Transport Aircraft Wing using Particle Swarm Optimization*, AIAA 2002-5664, 2002.
- [9] Davis, J. R.: *Aluminum and Aluminum Alloys*, ASM International, USA, 1993.
- [10] Magdić, H.: *Parametrizacija numeričkog modela za preliminarni proračun čvrstoće konstrukcije krila velikog putničkog aviona*, Diplomski rad, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb, 2019.