

# Matematičko modeliranje i analiza nelinearnih međusobno povezanih elektromehaničkih sustava primjenom dualnih brojeva

---

Jonjić, Jakov

Undergraduate thesis / Završni rad

2022

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:235:259626>

Rights / Prava: [Attribution 4.0 International](#)/[Imenovanje 4.0 međunarodna](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2024-08-08**

Repository / Repozitorij:

[Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# ZAVRŠNI RAD

Jakov Jonjić

ZAGREB, 2022.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

## ZAVRŠNI RAD

MATEMATIČKO MODELIRANJE I ANALIZA NELINEARNIH MEĐUSOBNO  
POVEZANIH ELEKTROMEHANIČKIH SUSTAVA PRIMJENOM DUALNIH  
BROJEVA

Mentor:

Doc. dr. sc. Vladimir Milić

Student:

Jakov Jonjić

ZAGREB, 2022.

*Zahvaljujem se svom mentoru doc.dr.sc. Vladimiru Miliću na savjetima, podršci i pruženoj pomoći u nabavci literature.*

*Zahvaljujem se i svojoj obitelji na podršci i strpljenju tijekom studiranja.*

## **Izjava**

Izjavljujem da sam ovaj rad radio samostalno koristeći znanja stečena tijekom studija i navedenu literaturu.

Zagreb, rujan 2022.

Jakov Jonjić



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE



Središnje povjerenstvo za završne i diplomske ispite  
Povjerenstvo za završne i diplomske ispite studija strojarstva za smjerove:  
proizvodno inženjerstvo, računalno inženjerstvo, industrijsko inženjerstvo i menadžment, inženjerstvo materijala i mehatronika i robotika

Sveučilište u Zagrebu	
Fakultet strojarstva i brodogradnje	
Datum	Prilog
Klasa: 602 – 04 / 22 – 6 / 1	
Ur.broj: 15 - 1703 - 22 -	

## ZAVRŠNI ZADATAK

Student: **Jakov Jonjić** JMBAG: **0035215218**

Naslov rada na hrvatskom jeziku: **Matematičko modeliranje i analiza nelinearnih međusobno povezanih elektromehaničkih sustava primjenom dualnih brojeva**

Naslov rada na engleskom jeziku: **Mathematical modelling and analysis of nonlinear interconnected electromechanical systems using dual numbers**

Opis zadatka:

Ovdje se pod pojmom međusobno povezanih elektromehaničkih sustava podrazumijeva klasu sustava u kojima imamo interakciju kontinuiranih mehaničkih podsustava i električnih podsustava. Svaki podsustav je fizički povezan sa susjednim tvoreći tako složeni nelinearni dinamički sustav. Matematičko modeliranje i analiza dinamičkog ponašanja nužni su u svrhu sinteze upravljačkih zakona ove klase sustava. Modeliranje dinamike ovakvih sustava vrlo je aktivno područje istraživanja, a ranije metode kontinuirano se poboljšavaju i predlažu se novi modeli. Jedan od novijih pristupa matematičkom modeliranju primjenjuje teoriju dualnih i hiper-dualnih brojeva.

U radu je potrebno:

- provesti teorijska razmatranja o dualnim i hiper-dualnim brojevima te njihovoj primjeni u matematičkom modeliranju dinamičkih sustava,
- izvesti nelinearni matematički model tri elektromehanička podsustava kolica na klackalici spregnuta elastičnom vezom primjenom metode dualnih i hiper-dualnih brojeva,
- analitički i simulacijama na računalu analizirati dinamičko ponašanje nelinearnog modela sustava kolica na klackalici,
- razmotriti mogućnosti i dati smjernice za sintezu robusnog optimalog zakona upravljanja opisanog sustava.

U radu je potrebno navesti korištenu literaturu i eventualno dobivenu pomoć.

Zadatak zadan:

30. 11. 2021.

Datum predaje rada:

1. rok: 24. 2. 2022.  
2. rok (izvanredni): 6. 7. 2022.  
3. rok: 22. 9. 2022.

Predviđeni datumi obrane:

1. rok: 28. 2. – 4. 3. 2022.  
2. rok (izvanredni): 8. 7. 2022.  
3. rok: 26. 9. – 30. 9. 2022.

Zadatak zadao:

  
Doc. dr. sc. Vladimir Milić

Predsjednik Povjerenstva:

  
Prof. dr. sc. Branko Bauer

# Sadržaj

Sadržaj	v
Popis slika	vii
Popis oznaka	viii
Sažetak	xi
Summary	xii
<b>1. Uvod</b>	<b>1</b>
<b>2. Dualni i hiper-dualni brojevi</b>	<b>3</b>
2.1. Matematički opis dualnih i hiper-dualnih brojeva . . . . .	4
2.1.1. Dualne funkcije dualnih brojeva . . . . .	4
2.1.2. Hiper-dualni brojevi . . . . .	5
2.1.3. Primjer iz kinematike . . . . .	7
2.1.4. Skalarni i vektorski produkti hiper-dualnih vektora . . . . .	7
2.2. Primjena na dinamiku krutih tijela . . . . .	10
2.2.1. Energija u dualnom zapisu . . . . .	13
2.2.2. Pravila deriviranja momentnog produkta . . . . .	14
2.2.3. Dualni zapis Lagrangeovih jednadžbi gibanja . . . . .	16
2.3. Primjer robota s 2 stupnja slobode gibanja . . . . .	16

<b>3. Elastično povezani elektromehanički sustav kolica na klackalici</b>	<b>20</b>
3.1. Matematičko modeliranje metodom dualnih brojeva . . . . .	21
3.1.1. Izračun kinetičke energije . . . . .	21
3.1.2. Izračun potencijalne energije . . . . .	24
3.1.3. Funkcija gubitaka . . . . .	26
3.1.4. Elektromotor i prijenos . . . . .	26
3.1.5. Jednadžbe dinamike . . . . .	26
3.1.6. Matrični zapis dinamike sustava . . . . .	27
3.1.7. Prostor stanja . . . . .	29
<b>4. Simulacija dinamike sustava</b>	<b>31</b>
4.1. Slučaj 1 . . . . .	31
4.2. Slučaj 2 . . . . .	33
4.3. Slučaj 3 . . . . .	35
4.4. Slučaj 4 . . . . .	38
<b>5. Primjena dualnih brojeva u optimizaciji</b>	<b>40</b>
5.1. Formulacija optimizacijskog problema . . . . .	40
5.2. Newtonova metoda . . . . .	42
5.3. Računanje matrica Jacobijan i Hessijan metodom dualnih i hiper-dualnih brojeva . . . . .	43
5.3.1. Kvaternioni i hiper-dualni brojevi u numeričkom računanju deri- vacija . . . . .	43
<b>6. Zaključak</b>	<b>48</b>
<b>A. Prvi prilog: MATLAB skripte</b>	<b>50</b>
Literatura	56



# Popis slika

2.1	Dualni vektori u 3D prostoru prema [1]	8
2.2	Dijagram Pelican robota s 2 stupnja slobode gibanja, [2].	16
3.1	Podsustav klackalice s kolicima, [3]	20
3.2	Elastične veze, desna strana sustava, [3]	21
3.3	Shema podustava prilikom zakreta, [3]	22
3.4	Vektorski prikaz elastičnih veza (desna strana sustava), [4]	25
4.1	Kutevi zakreta za slučaj 1	32
4.2	Pomaci kolica za slučaj 1	33
4.3	Pomaci kolica za slučaj 2	34
4.4	Kutevi zakreta za slučaj 2	35
4.5	Ulazni napon na motoru kolica 2	36
4.6	Kutevi zakreta za slučaj 3	36
4.7	Pomaci kolica za slučaj 3	37
4.8	Kutevi zakreta u slučaju 4	38
4.9	Pomaci kolica u slučaju 4	39

# Popis oznaka

$\hat{\mathbf{u}}$	dualni vektor brzine . . . . .	11
$\hat{\mathbf{h}}_1$	dualna linearna količina gibanja . . . . .	11
$\hat{\mathbf{X}}$	hiper-dualni vektor . . . . .	8
$\Phi_i$	matrica gubitaka viskozog trenja . . . . .	27
$\mathbf{a}$	ubrzanje krutog tijela . . . . .	11
$\mathbf{B}_1$	matrica upravljačkih ulaza globalnog sustava . . . . .	30
$\mathbf{C}_i$	matrica centrifugalnih i coriolisovih sila . . . . .	27
$\mathbf{g}_i$	vektor gravitacijskih sila i momenata . . . . .	27
$\mathbf{M}_i$	matrica inercija . . . . .	27
$\mathbf{u}$	vektor upravljačkih veličina . . . . .	30
$\mathbf{x}$	vektor varijabli stanja globalnog sustava . . . . .	30
$\mathbf{Z}_i$	matrica sprega između i-te klackalice i ostatka sustava . . . . .	27
$\cdot$	skalarni produkt . . . . .	8
$\epsilon$	dualna jedinica . . . . .	4
$\epsilon^*$	hiper-dualna jedinica . . . . .	6
$\hat{m}$	dualni operator mase . . . . .	11
$\hat{q}_i$	dualna i-ta generalizirana koordinata . . . . .	21
$\kappa_i$	koeficijent viskoznog trenja u i-tom zglobu, [Nms/rad] . . . . .	26
$\hat{\theta}$	hiper-dualni kut . . . . .	6
$\hat{m}$	hiper-dualni operator mase . . . . .	12
$\hat{x}$	hiper-dualni broj . . . . .	6
$\Phi$	funkcija gubitaka za sustav, [J] . . . . .	26

$\Phi_i$	gubitci u rotacijskim zglobovima i-te klackalice, [J] . . . . .	26
$\tau_M$	moment motora na letvu, [Nm] . . . . .	26
$\tau_{in}$	moment motora, [Nm] . . . . .	26
$\times$	vektorski produkt . . . . .	8
$\varphi_i$	kut zakreta i-te klackalice, [rad] . . . . .	21
$ $	dualni momentni produkt . . . . .	14
$a$	visina centra mase klackalice, [m] . . . . .	24
$c$	visina centra mase kolica, [m] . . . . .	24
$D^R$	horizontalna udaljenost između klackalice, [m] . . . . .	25
$E$	kinetička energija sustava, [J] . . . . .	23
$e$	elektromotorna sila u navojima armature, [V] . . . . .	26
$E^A$	kinetička energija klackalice, [J] . . . . .	22
$E^C$	kinetička energija kolica, [J] . . . . .	23
$g$	gravitacijsko ubrzanje, [ms <sup>-2</sup> ] . . . . .	24
$I$	moment inercije klackalice, [kgm <sup>2</sup> ] . . . . .	22
$I_a$	struja armature, [A] . . . . .	26
$K$	kinetička energija, [J] . . . . .	14
$k$	konstanta opruge, [N/m] . . . . .	25
$K_e$	elektromotorna konstanta, [Vs/rad] . . . . .	26
$K_t$	konstanta motora, [Nm/A] . . . . .	26
$L_a$	induktivitet armature, [H] . . . . .	26
$m^A$	masa klackalice, [kg] . . . . .	24
$m^C$	masa kolica, [kg] . . . . .	23
$P$	gravitacijska potencijalna energija, [J] . . . . .	14
$p$	prijenosni omjer reduktora . . . . .	26
$r$	efektivni radijus zupčanika, [m] . . . . .	26
$R_a$	otpor armature, [ $\Omega$ ] . . . . .	26
$s_i$	pomak i-tih kolica, [m] . . . . .	21
$u$	skalarna funkcija dualne varijable . . . . .	15
$U^A$	gravitacijska potencijalna energija klackalice, [J] . . . . .	24
$U^C$	gravitacijska potencijalna energija kolica, [J] . . . . .	24
$U^L$	elastična potencijalna energija lijeve strane, [J] . . . . .	25

$U^R$	elastična potencijalna energija desne strane , [J] . . . . .	24
$U_a$	napon armature, [V] . . . . .	26
$\hat{f}$	dualna funkcija . . . . .	5
$\hat{x}$	dualni broj . . . . .	4
$\hat{M}$	dualni operator inercije . . . . .	12
$\hat{\theta}$	hiper-dualni kut . . . . .	7

# Sažetak

U ovom radu predstavljen je matematički opis dualnih i hiper-dualnih brojeva i funkcija s dualnim argumentima. Izvod i motivacija za uvođenje dualnih operatora i dualnih varijabli u dinamici krutih tijela prikazani su na primjeru pravocrtnog gibanja čestice, a na osnovu fundamentalnog, drugog Newtonovog zakona. Izvod jednadžbi energija i formulacija dualnih Lagrangeovih jednadžbi gibanja za elastično povezani elektromehanički sustav kolica na klackalici bazirani su na metodi dualnih brojeva. Simulacije dinamike otvorenog kruga sustava provedene su u MATLAB-u, a utjecaj elastičnih međuveza i priroda nestabilnog ponašanja navedeni su u opisima grafova. Numeričko računanje derivacija funkcija metodom hiper-dualnih brojeva prikazano je na primjeru složene analitičke funkcije, a moguća primjena ove metode prikazana je u algoritmima optimalnog robusnog upravljanja.

**Ključne riječi:** dualni brojevi, dualne Lagrangeove jednadžbe, prostor stanja, nelinearni dinamički sustav, robusno optimalno upravljanje

# Summary

In this work, the mathematical description of dual and hyper-dual numbers and functions with dual arguments are presented. Derivation of, and motivation for introducing dual operators and dual variables in rigid body dynamics are presented on the example of uniform motion of a particle, based on the fundamental Newton's second law of motion. The derivation of the energy equations and the formulation of dual Lagrange equations of motion for an elastically interconnected electromechanical system of cart and seesaw is based on the dual numbers method. The simulations of the dynamics of the open-loop system are carried out in MATLAB, and the effects of elastic interconnections and the nature of the unstable behavior are discussed in the descriptions of the graphs. Numerical evaluation of derivatives of functions by the method of hyper-dual numbers is shown on a complex analytical function, and the possible application of this method is shown in algorithms of robust optimal control.

**Keywords:** dual numbers, dual Lagrange dynamic equations, state space, nonlinear dynamic system, robust optimal control

# 1 | Uvod

Matematičko modeliranje dinamike sustava u kojima postoji interakcija mehaničkih i električnih podsustava aktivno je područje istraživanja. Jedan od pristupa matematičkom modeliranju uključuje primjenu dualnih brojeva čija je formulacija nastala u 19. stoljeću. Dualni brojevi prvo su se koristili za opisivanje rotacija vektora u 3D prostoru što se pokazalo vrlo korisnim u području kinematike gdje su rotacije i translacije po pravcima u prostoru čest slučaj. Vrlo brzo se razvila matematička formulacija ovog novog seta brojeva i njihova svojstva su se detaljno istraživala. Tako se u kinematici pravilnim označavanjem kuteva zakreta i pomaka po osima metodom dualnih brojeva mogu eksplicitno iz matrice transformacija dobiti i matrice Jacobijan kao automatski produkt operacija množenja matrica. Numeričkom implementacijom ovih metoda dale su se naznake da se daljnom manipulacijom argumenata dualnih funkcija mogu dobiti i vrijednosti drugih derivacija funkcija što je korisna informacija u inženjerskim primjenama pogotovo ako se one mogu dobiti automatskim putem, tako su se formulirali i hiper-dualni brojevi te su uspješno primjenjeni na kinematiku robotskih ruku.

Primjena dualnih brojeva u dinamici krutih tijela ostala je tema istraživanja sve do danas, a bitan pomak ostvaruje se pridodavanjem dualnih svojstava elementima inercije (masa i moment inercije) čime se komponente količine gibanja daju generalizirati u dualnoj formi, a upravo takve komponente služe kao nužna veza između opisa gibanja krutih tijela u prostoru i izvođenja energijskih jednadžbi uz definiranje nove operacije dvaju dualnih vektora što je opisano i uspješno primjenjeno u radu. U izvođenju Lagrangeovih jednadžbi gibanja potrebno je derivirati izraze energija po generaliziranim koordinatama te se u literaturi [5] pravilnim deriviranjem očuvala kompaktnost zapisa

generaliziranih sila.

U drugom poglavlju ovog rada pod nazivom "Dualni i hiper-dualni brojevi" daje se matematički opis ovog seta brojeva uz dva primjera na kojima je pokazana prednost korištenja dualnih brojeva te se izvode Lagrangeove jednadžbe u kompaktnoj formi na primjeru robota s dva stupnja slobode gibanja. Energija je predstavljena kao veličina pod nazivom momentni produkt, a deriviranjem po dualnim generaliziranim koordinatama u Lagrangeovom zapisu mogu se generalizirane sile dobiti u jednoj dualnoj jednadžbi.

U trećem poglavlju rada razmatra se nelinearni sustav međusobno spregnutih klackalica s pomičnom masom. Opis gibanja tijela i izvod nelinearnih jednadžbi dinamike bazira se na metodi dualnih brojeva. Raspis jednadžbi u dualnoj formi i konačno rješenje ukazuju na indentičnost rezultata sa klasičnim pristupom. Dualne Lagrangeove jednadžbe rastavljane su kako bi se dobio opis sustava pomoću realnih brojeva radi praktičnije analize ponašanja dinamike sustava u MATLAB-u.

U četvrtom poglavlju rada prikazani su rezultati simulacija dinamike otvorenog kruga sustava na četiri različita slučaja s početnim uvjetima. Analizom odziva kuteva zakreta i pomaka kolica utvrđeni su utjecaji elastičnih veza na odzive povezanih podsustava. Preko različitih napona postavljenim na motore kolica moguće je bilo utvrditi ulogu elastične potencijalne energije preko oscilacija odziva, utjecaj inercije podustava s obzirom na kašnjenje u odzivu i pojavu statičkog trenja kod malih vrijednosti kuteva zakreta određenog podsustava u odnosu na ostale.

U zadnjem poglavlju, dane su formulacije problema robusnog optimalnog upravljanja gdje su prikazani izrazi koji se pojavljuju u algoritmima iz rada [6] gdje bi se mogla koristiti metoda hiper-dualnih brojeva u računanju matrica Jacobijan i Hessijan, što je zasigurno područje interesa za daljnje radove.



## 2 Dualni i hiper-dualni brojevi

Razvoj dualnih brojeva započeo je engleski matematičar William Kingdon Clifford (1845.-1879.) u svojem radu [7] iz 1873. s ciljem proširenja već postojećih kvaterniona koje je uveo irski matematičar William Rowan Hamilton (1805.-1865.). Osim što opisuju relativnu orijentaciju elemenata u trodimenzionalnom prostoru, Cliffordovi bikvaternioni daju i informaciju o relativnoj poziciji istih uvodeći dualne umjesto realnih brojeva.

Bitan pomak u primjeni dualnih brojeva na kinematiku krutih tijela ostvario je ruski matematičar Aleksandr Petrovich Kotelnikov u svojem radu [8] koji je dokazao da svi zakoni i formule algebre vektora realnih brojeva vrijede i kad se članovi zamijene dualnim brojevima. Ovim dokazom omogućeno je da se kinematika krutih tijela zapiše u kompaktnijem obliku koristeći 3 dualne jednačbe umjesto 6 jednačbi s realnim varijablama. Osim navedenih, primjenom dualnih brojeva u kinematici krutih tijela u dvadesetom stoljeću bavili su se značajnije Mikhail Fedorovich Dimentberg i Dominique Chevallier [9, 10].

Primjenu dualnih brojeva na dinamiku krutih tijela predstavili su u svojem radu izraelski znanstvenici Moshe Shoham i Vladimir Brodsky [11] predstavljajući inerciju tijela kao dualni operator i time očuvali kompaktnost zapisa.

## 2.1. Matematički opis dualnih i hiper-dualnih brojeva

Kako bi precizno opisali ulogu dualnih brojeva u dinamici krutih tijela koristit ćemo terminologiju koju je uveo Clifford; *vektor* jest veličina koja ima amplitudu i usmjerenje kao npr. brzina u pravocrtnom gibanju čestice; *rotor* jest veličina koja sadrži amplitudu, usmjerenje i poziciju kao npr. kutna brzina ili sila. Clifford također uvodi pojam *motor* koji je suma ranije navedenih *vektora* i *rotora*. Primjer *motora* bila bi suma sila (*rotora*) koje djeluju na kruto tijelo, što u općem slučaju nije obična sila već kombinacija rezultantne sile na tijelo i momenta (sprega) sila na tijelo.

Clifford je uveo dualnu jedinicu  $\epsilon$  sa svojstvom:

$$\epsilon^2 = 0, \epsilon \neq 0. \quad (2.1)$$

Dualni broj se može definirati kao uređeni par dva realna broja sa realnim i dualnim dijelom:

$$\hat{x} = x + \epsilon x_0, \quad (2.2)$$

gdje  $\hat{\phantom{x}}$  označava dualno svojstvo bilo koje veličine (broj, vektor, matrica) bez obzira da li je dualni dio jednak nuli, zatim  $x$  je *rotor* (realni dio) koji označava veličine poput kutne brzine ili sile, a  $x_0$  je *vektorski* dio dualnog broja poput brzine u pravocrtnom gibanju čestice ili momenta.

Zbrajanje dva dualna broja radi se po istom principu kao i kod kompleksnih brojeva:

$$(x + \epsilon x_0) + (x_1 + \epsilon x_2) = (x + x_1) + \epsilon(x_0 + x_2), \quad (2.3)$$

umnožak dva dualna broja prema (2.1) jednak je:

$$(x + \epsilon x_0)(x_1 + \epsilon x_2) = xx_1 + \epsilon(x_0x_1 + xx_2). \quad (2.4)$$

Dijeljenje dva dualna broja definirano je kao inverzna operacija umnoška, a uvijet dijeljenja prema jednadžbi (2.2) je  $x_1 \neq 0$ , pa se može zapisati kao:

$$\frac{x + \epsilon x_0}{x_1 + \epsilon x_2} = \frac{x}{x_1} + \epsilon \left( \frac{x_0}{x_1} - \frac{xx_2}{x_1^2} \right), \quad x_1 \neq 0. \quad (2.5)$$

### 2.1.1. Dualne funkcije dualnih brojeva

Dualne funkcije dualnih brojeva predstavljaju preslikavanje prostora dualnih brojeva na sebe samog. Uzmimo za primjer dualnu varijablu  $\hat{x} = x + \epsilon x_0$ , čija je dualna funkcija

definirana prema [9] kao:

$$\hat{f}(\hat{x}) = f(x, x_0) + \epsilon f^\circ(x, x_0), \quad (2.6)$$

gdje su  $f$  i  $f^\circ$  općenito različite funkcije dvije varijable. U radu [9] dan je opći izraz za dualnu analitičku (diferencijabilnu) funkciju u obliku:

$$\hat{f}(x + \epsilon x_0) = f + \epsilon f^\circ = f(x) + \epsilon(x_0 f'(x) + \tilde{f}(x)), \quad (2.7)$$

gdje je  $\tilde{f}(x)$  proizvoljna funkcija realnog dijela dualne varijable, pa se funkcija može napisati i u obliku:

$$\hat{f}(x + \epsilon x_0) = f(x) + \epsilon x_0 f'(x). \quad (2.8)$$

Uvjet analitičnosti (derivabilnosti) na dualnu funkciju je:

$$\frac{\delta f^\circ}{\delta x_0} = \frac{\delta f}{\delta x}, \quad (2.9)$$

a derivacija dualne funkcije u odnosu na dualnu varijablu jednaka je:

$$\frac{d\hat{f}(\hat{x})}{d\hat{x}} = \frac{\delta f^\circ}{\delta x_0} + \epsilon \frac{\delta f}{\delta x}, \quad (2.10)$$

ili, uzimajući u obzir jednadžbu (2.9), derivacija u odnosu na dualnu varijablu postaje:

$$\frac{d\hat{f}(\hat{x})}{d\hat{x}} = \frac{\delta f}{\delta x} + \epsilon \frac{\delta f^\circ}{\delta x} = f'(x) + \epsilon(x_0 f''(x) + \tilde{f}'(x)). \quad (2.11)$$

Jednadžba (2.7) primijenjena na neke od osnovnih trigonometrijskih funkcija sa dualnim argumentom rezultira u:

$$\begin{aligned} \sin(x + \epsilon x_0) &= \sin(x) + \epsilon x_0 \cos(x), \\ \cos(x + \epsilon x_0) &= \cos x - \epsilon x_0 \sin(x). \end{aligned}$$

### 2.1.2. Hiper-dualni brojevi

Hiper-dualni brojevi prvi puta su predstavljani u radu [12] za određivanje numeričke vrijednosti druge derivacije funkcije zbog manjih grešaka oduzimanja i greški zaokruživanja kao i manjeg ukupnog vremena računanja. Hiper-dualni kut predstavljen je u radu [13] kako bi se olakšalo izvođenje jednadžbi gibanja sustava s više članova. U kinematici se npr. matrica Jacobijan može dobiti automatskim putem, ali i njena derivacija

po vremenu koja ima ulogu u računanju iznosa reaktivnih sila i momenata u robotskim zglobovima.

Hiper-dualni brojevi u općem slučaju su kombinacija četiri realna broja i dvije dualne jedinice:

$$\widehat{x} = a_0 + \epsilon_1 a_1 + \epsilon_2 a_2 + \epsilon_1 \epsilon_2 a_3, \quad (2.12)$$

sa pravilima množenja:

$$\epsilon_1^2 = \epsilon_2^2 = (\epsilon_1 \epsilon_2)^2 = 0; \quad \epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_1 \epsilon_2 \neq 0. \quad (2.13)$$

Kako je naglasak na primjeni hiper-dualnih brojeva na dinamiku krutih tijela, slijedit će se formulacija koja je korištena u radu [14] u zapisu hiper-dualnih brojeva:

$$\begin{aligned} \epsilon &= \epsilon_1; \quad \epsilon^* = \epsilon_2 \\ \epsilon^2 &= (\epsilon^*)^2 = 0 \\ \epsilon, \epsilon^*, \epsilon \epsilon^* &\neq 0. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Jednadžba (2.12) uz (2.14) sada prelazi u oblik:

$$\widehat{x} = (a_0 + \epsilon a_1) + \epsilon^* (a_2 + \epsilon a_3). \quad (2.15)$$

Pomoću jednadžbe (2.15) zaključujemo da se hiper-dualni broj sastoji od dva dualna broja nižeg reda odijeljeni hiper-dualnom jedinicom  $\epsilon^*$ .

Taylorov razvoj hiper-dualne funkcije završava na drugoj derivaciji upravo zbog specijalnog svojstva hiper-dualne jedinice (2.14):

$$f(\widehat{x}) = f(a_0) + \epsilon a_1 f'(a_0) + \epsilon^* (a_2 f'(a_0) + \epsilon (a_3 f'(a_0) + a_1 a_2 f''(a_0))). \quad (2.16)$$

Jednadžbu (2.16) bilo bi korisno primjeniti na neke od osnovnih trigonometrijskih funkcija poput:

$$\begin{aligned} \sin(\widehat{\theta}) &= \sin a_0 + \epsilon a_1 \cos(a_0) + \epsilon^* (a_2 \cos(a_0) + \epsilon (a_3 \cos(a_0) - a_1 a_2 \sin(a_0))); \\ \cos(\widehat{\theta}) &= \cos a_0 - \epsilon a_1 \sin(a_0) - \epsilon^* (a_2 \sin(a_0) + \epsilon (a_3 \sin(a_0) + a_1 a_2 \cos(a_0))). \end{aligned} \quad (2.17)$$

### 2.1.3. Primjer iz kinematike

U ovom primjeru pokazat će se kako pravilnim zapisom hiper-dualnih argumenata u funkciji se može dobiti prva i druga derivacija funkcije u obliku članova razvoja Taylorovog reda, a odvojeni pripadajućim dualnim jedinicama. Za početak se definira hiper-dualni kut čiji je prvi član dualni kut, a drugi član je dualni broj koji se sastoji od derivacije dualnog kuta, pomnožen hiper-dualnom jedinicom  $\epsilon^*$ . Deriviranjem po vremenu dualne funkcije dualnog kuta dobiva se:

$$\frac{d}{dt}f(\theta + \epsilon d) = \frac{d}{dt} [f(\theta) + \epsilon df'(\theta)] = \dot{\theta}f'(\theta) + \epsilon \dot{d}f'(\theta) + \epsilon d\dot{\theta}f''(\theta). \quad (2.18)$$

Dobiveni izraz je upravo dio Taylorovog razvoja u jednadžbi (2.16) pomnožen hiper-dualnom jedinicom  $\epsilon^*$  uz uvođenje sljedećih substitucija:

$$\theta = a_0; \quad d = a_1; \quad \dot{\theta} = a_2; \quad \dot{d} = a_3; \quad (2.19)$$

pa se navedeni hiper-dualni kut može se zapisati kao:

$$\widehat{\theta} = \theta + \epsilon d + \epsilon^* \dot{\theta} + \epsilon^* \epsilon \dot{d}, \quad (2.20)$$

ili u kompaktnijem zapisu kao:

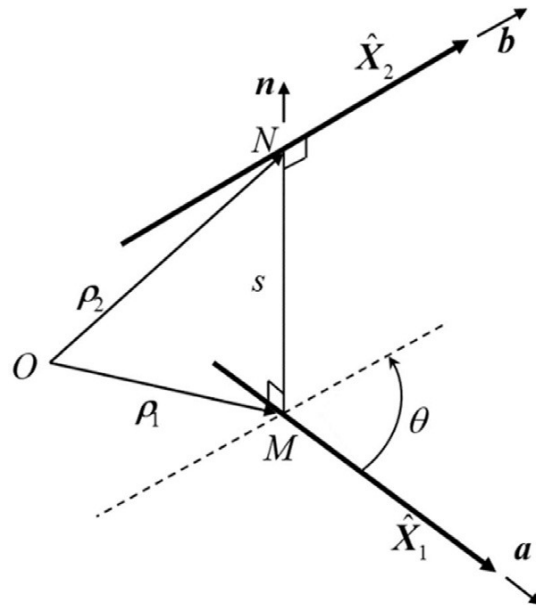
$$\widehat{\theta} = \hat{\theta} + \epsilon^* \hat{\dot{\theta}}. \quad (2.21)$$

Iz primjera se može zaključiti da se derivacija funkcije po vremenu može dobiti i substitucijom pripadajućeg hiper-dualnog umjesto dualnog kuta u argumentu funkcije kao izraz pomnožen hiper-dualnom jedinicom  $\epsilon^*$ , a sama vrijednost funkcije eksplicitno kao dio izraza koji nije pomnožen hiper-dualnom jedinicom. Prema tome se jednadžba (2.16) primijenjena na hiper-dualni kut iz (2.21) zapisuje kao:

$$f(\widehat{x}) = f(\theta) + \epsilon df'(\theta) + \epsilon^* \dot{\theta} f'(\theta) + \epsilon \epsilon^* \dot{d} f'(\theta) + \epsilon \epsilon^* d \dot{\theta} f''(\theta) \quad (2.22)$$

### 2.1.4. Skalarni i vektorski produkti hiper-dualnih vektora

U ovom poglavlju izvode se skalarni i vektorski produkti hiper-dualnih vektora. Kao referenca koristi se slika 2.2 na kojoj definiramo dva dualna vektora:  $\widehat{\mathbf{X}}_1 = \mathbf{a} + \epsilon(\boldsymbol{\rho}_1 \times \mathbf{a})$ ,  $\widehat{\mathbf{X}}_2 = \mathbf{b} + \epsilon(\boldsymbol{\rho}_2 \times \mathbf{b})$ , koji predstavljaju dva različita vektora, a  $\mathbf{n}$  je vektor na pravcu zajedničke okomice dvaju vektora usmjeren od  $\mathbf{a}$  prema  $\mathbf{b}$ . Ovdje će se koristiti dualni



Slika 2.1: Dualni vektori u 3D prostoru prema [1]

kut  $\hat{\theta}$  za zapis kuta i udaljenosti između pravaca na kojima leže dualni vektori  $\hat{X}_1$  i  $\hat{X}_2$ :

$$\begin{aligned}
 \hat{X}_1 \cdot \hat{X}_2 &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \epsilon(\mathbf{a} \cdot (\boldsymbol{\rho}_2 \times \mathbf{b}) + \mathbf{b} \cdot (\boldsymbol{\rho}_1 \times \mathbf{a})) = \\
 &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \epsilon((\boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{\rho}_2) \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})) = \\
 &= |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos(\theta) - \epsilon(s\mathbf{n} \cdot |\mathbf{a}||\mathbf{b}| s \sin(\theta)) = \\
 &= |\mathbf{a}||\mathbf{b}| (\cos(\theta) - \epsilon s \sin(\theta)) = \\
 &= |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos(\hat{\theta}). \tag{2.23}
 \end{aligned}$$

Nadalje, vektorski produkt dva dualna vektora jednak je:

$$\begin{aligned}
 \hat{X}_1 \times \hat{X}_2 &= \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \epsilon(\mathbf{a} \times (\boldsymbol{\rho}_2 \times \mathbf{b}) + (\boldsymbol{\rho}_1 \times \mathbf{a}) \times \mathbf{b}) = \\
 &= \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \epsilon((\boldsymbol{\rho}_2 - \boldsymbol{\rho}_1) \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \boldsymbol{\rho}_1 \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b})),
 \end{aligned}$$

Premještanjem  $O$  na  $N \rightarrow \{\boldsymbol{\rho}_2 = 0, \boldsymbol{\rho}_1 = -s\mathbf{n}\}$

$$\begin{aligned}
 &= |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \mathbf{n} \sin(\theta) + \epsilon\left(s\mathbf{n} \cdot \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \boldsymbol{\rho}_1 \times (|\mathbf{a}||\mathbf{b}| \mathbf{n} \sin(\theta))\right) = \\
 &= |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \mathbf{n} (\sin(\theta) + \epsilon s \cos(\theta)) = \\
 &= |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \mathbf{n} \sin(\hat{\theta}). \tag{2.24}
 \end{aligned}$$

Vektori  $\widehat{\mathbf{X}}_1$  i  $\widehat{\mathbf{X}}_2$  mogu se proširiti na hiper-dualne vektore na sličan način poput hiper-dualnih brojeva:

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbf{X}}_1 &= \widehat{\mathbf{a}} + \epsilon^*(\widehat{\boldsymbol{\rho}}_1 \times \widehat{\mathbf{a}}); \\ \widehat{\mathbf{X}}_2 &= \widehat{\mathbf{b}} + \epsilon^*(\widehat{\boldsymbol{\rho}}_2 \times \widehat{\mathbf{b}}).\end{aligned}\tag{2.25}$$

Skalarni produkt dva navedena hiper-dualna vektora jednak je:

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbf{X}}_1 \cdot \widehat{\mathbf{X}}_2 &= \widehat{\mathbf{a}} \cdot \widehat{\mathbf{b}} + \epsilon^*(\widehat{\mathbf{a}} \cdot (\widehat{\boldsymbol{\rho}}_2 \times \widehat{\mathbf{b}}) + \widehat{\mathbf{b}} \cdot (\widehat{\boldsymbol{\rho}}_1 \times \widehat{\mathbf{a}})) = \\ &= |\widehat{\mathbf{a}}||\widehat{\mathbf{b}}| \cos(\widehat{\theta}) + \epsilon^*((\widehat{\boldsymbol{\rho}}_1 - \widehat{\boldsymbol{\rho}}_2) \cdot (\widehat{\mathbf{a}} \times \widehat{\mathbf{b}})) = \\ &= |\widehat{\mathbf{a}}||\widehat{\mathbf{b}}| \cos(\widehat{\theta}) - \epsilon^*((\widehat{s}\mathbf{n}) \cdot (|\widehat{\mathbf{a}}||\widehat{\mathbf{b}}|\mathbf{n} \sin(\widehat{\theta}))),\end{aligned}$$

gdje je  $\widehat{s}$ , dualni broj, a prema definiciji apsolutne vrijednosti dualnog broja može se napisati sljedeće za dualni vektor:  $|\widehat{\mathbf{a}}||\widehat{\mathbf{b}}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| = a_0b_0$ , što uvršteno u raspis skalarnog produkta dva hiper-dualna broja daje:

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbf{X}}_1 \cdot \widehat{\mathbf{X}}_2 &= |\widehat{\mathbf{a}}||\widehat{\mathbf{b}}| \cos(\widehat{\theta}) - \epsilon^*((s_1 + \epsilon s_2)(|\widehat{\mathbf{a}}||\widehat{\mathbf{b}}| \sin(\widehat{\theta}))) = \\ &= |\widehat{\mathbf{a}}||\widehat{\mathbf{b}}| (\cos(\theta) - \epsilon s \sin(\theta) - \epsilon^*((s_1 + \epsilon s_2)(\sin(\theta) + \epsilon s \cos(\theta)))) = \\ &= |\widehat{\mathbf{a}}||\widehat{\mathbf{b}}| (\cos(\theta) - \epsilon s \sin(\theta) - \epsilon^*(s_1 \sin(\theta) + \epsilon s_1 s \cos(\theta) + \epsilon s_2 \sin(\theta))), \\ \epsilon^* &\rightarrow \epsilon_2; \epsilon \rightarrow \epsilon_1; \\ \widehat{\mathbf{X}}_1 \cdot \widehat{\mathbf{X}}_2 &= |\widehat{\mathbf{a}}||\widehat{\mathbf{b}}| \underbrace{(\cos(\theta) - \epsilon_1 s \sin(\theta) - \epsilon_2 s_1 \sin(\theta) - \epsilon_2 \epsilon_1 (s_1 s \cos(\theta) + s_2 \sin(\theta)))}_{(*)}\end{aligned}\tag{2.26}$$

Izraz u jednadžbi (2.26) osnačen s (\*) je upravo hiper-dualna funkcija kosinus prikazana u jednadžbi (2.17) uz iduće substitucije:

$$\theta = a_1; \quad s = a_2; \quad s_1 = a_3; \quad s_2 = a_4.\tag{2.27}$$

Prema tome, može se skalarni produkt dva hiper-dualna vektora jednostavnije zapisati kao:

$$\widehat{\mathbf{X}}_1 \cdot \widehat{\mathbf{X}}_2 = |\widehat{\mathbf{a}}||\widehat{\mathbf{b}}| \cos(\widehat{\theta}).\tag{2.28}$$

Ovo znači da je skalarni produkt hiper-dualnih vektora iste strukture kao i skalarni produkt dualnih vektora, a i realnih vektora koje možemo promatrati kao dualne vektore reda 0.

Vektorski produkt hiper-dualnih vektora izveden je sljedeće:

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathbf{X}}_1 \times \widehat{\mathbf{X}}_2 &= \widehat{\mathbf{a}} \times \widehat{\mathbf{b}} + \epsilon^* \left( \widehat{\mathbf{a}} \times (\widehat{\boldsymbol{\rho}}_2 \times \widehat{\mathbf{b}}) + (\widehat{\boldsymbol{\rho}}_1 \times \widehat{\mathbf{a}}) \times \widehat{\mathbf{b}} \right) = \\
&= |\widehat{\mathbf{a}}||\widehat{\mathbf{b}}|\mathbf{n} \sin(\widehat{\theta}) + \epsilon^* \left( (\widehat{\mathbf{a}} \cdot \widehat{\mathbf{b}}) (\widehat{\boldsymbol{\rho}}_2 - \widehat{\boldsymbol{\rho}}_1) + \widehat{\boldsymbol{\rho}}_1 \times (\widehat{\mathbf{a}} \times \widehat{\mathbf{b}}) \right), \\
\widehat{\boldsymbol{\rho}}_2 &= 0, \widehat{\boldsymbol{\rho}}_1 = -\widehat{s}\mathbf{n} \\
\widehat{\mathbf{X}}_1 \times \widehat{\mathbf{X}}_2 &= |\widehat{\mathbf{a}}||\widehat{\mathbf{b}}|\mathbf{n} \sin(\widehat{\theta}) + \epsilon^* |\widehat{\mathbf{a}}||\widehat{\mathbf{b}}| \cos(\widehat{\theta}) \widehat{s}\mathbf{n}, \\
\widehat{s} &= s_1 + \epsilon s_2 \\
\widehat{\mathbf{X}}_1 \times \widehat{\mathbf{X}}_2 &= |\widehat{\mathbf{a}}||\widehat{\mathbf{b}}|\mathbf{n} \left( \sin(\widehat{\theta}) + \epsilon^* \left( (s_1 + \epsilon s_2) \cos(\widehat{\theta}) \right) \right) = \\
&= |\widehat{\mathbf{a}}||\widehat{\mathbf{b}}|\mathbf{n} \left( \sin(\theta) + \epsilon s \cos(\theta) + \epsilon^* s_1 \cos(\theta) + \epsilon^* \epsilon (s_2 \cos(\theta) - s_1 s \sin(\theta)) \right) = \\
\epsilon^* &\rightarrow \epsilon_2; \epsilon \rightarrow \epsilon_1, \\
\widehat{\mathbf{X}}_1 \times \widehat{\mathbf{X}}_2 &= |\widehat{\mathbf{a}}||\widehat{\mathbf{b}}|\mathbf{n} \underbrace{\left( \sin(\theta) + \epsilon_1 s \cos(\theta) + \epsilon_2 s_1 \cos(\theta) + \epsilon_1 \epsilon_2 (s_2 \cos(\theta) - s_1 s \sin(\theta)) \right)}_{(*)}
\end{aligned} \tag{2.29}$$

Dio izraza označen s (\*) je upravo sinus funkcija hiper-dualnog kuta prikazana u jednadžbi (2.17) uz iste substitucije kao (2.27), prema tome, može se vektorski produkt hiper-dualnih vektora zapisati poput:

$$\widehat{\mathbf{X}}_1 \times \widehat{\mathbf{X}}_2 = |\widehat{\mathbf{a}}||\widehat{\mathbf{b}}|\mathbf{n} \sin(\widehat{\theta}). \tag{2.30}$$

Ovim zaključkom može se ustanoviti da svi zakoni i formule vektorske algebre koji uključuju skalarne i vektorske produkte, vrijede također u ekvivalentnom sistemu hiper-dualnih vektora, ako se svaka realna varijabla u formuli zamijeni odgovarajućom hiper-dualnom varijablom.

## 2.2. Primjena na dinamiku krutih tijela

U radu [11] predstavljen je dualni operator mase (inercije) prema kojem masa krutog tijela ima ulogu operatora u izvođenju jednadžbi dinamike.

Potreba uvođenja dualnog svojstva masi javlja se na primjeru opisivanja jednadžbi gibanja čestice u pravocrtnom gibanju. Prema [7] vektor brzine čestice u pravocrtnom



gibanju je čisti dualni vektor:

$$\hat{\mathbf{u}} = \epsilon \mathbf{v}, \quad (2.31)$$

dok se pripadajuće ubrzanje u dualnom zapisu može izraziti kao:

$$\hat{\mathbf{a}} = \epsilon \mathbf{a} = \frac{d}{dt} \epsilon \mathbf{u} = \frac{d}{dt} \hat{\mathbf{v}}. \quad (2.32)$$

Prema drugom Newtonovom zakonu, na tijelo akceleracije  $\mathbf{a}$ , djeluje odgovarajuća sila  $\mathbf{f}$  prema zakonu:

$$\mathbf{f} = m \mathbf{a}, \quad (2.33)$$

nadalje, prema [7], sila je u dualnom zapisu *rotorski* dio *motora*, što znači da je sila realan vektor:

$$\hat{\mathbf{f}} = \mathbf{f}, \quad (2.34)$$

dok je ubrzanje čestice u pravocrtnom gibanju prema [7] *dualni* dio *motora*, to jest čisti dualni vektor:

$$\hat{\mathbf{a}} = \epsilon \mathbf{a}. \quad (2.35)$$

Promatrajući jednadžbu (2.35) i uvrštavanjem u (2.33) očito je da postoji potreba uvođenja dodatnog operatora kako bi se očuvala jednakost u (2.33), i to u obliku dualnog operatora mase:

$$\hat{m} = m \frac{d}{d\epsilon}. \quad (2.36)$$

Sada se kombiniranjem jednadžbi (2.32) i (2.33), uz uvođenje (2.36) dobiva jednadžba gibanja čestice:

$$\hat{\mathbf{f}} = m \frac{d}{d\epsilon} \hat{\mathbf{a}} = m \frac{d}{d\epsilon} (\epsilon \mathbf{a}) = m \mathbf{a} = \hat{m} \hat{\mathbf{a}}. \quad (2.37)$$

Količina gibanja čestice se pomoću (2.36) može zapisati kao:

$$\hat{\mathbf{h}}_1 = \hat{m} \hat{\mathbf{v}}, \quad (2.38)$$

a promatrajući infinitezimalni element krutog tijela, količina gibanja u odnosu na neki inercijalni koordinatni sustav jednaka je:

$$d\hat{\mathbf{h}}_1 = d\hat{m} \hat{\mathbf{v}} = dm \frac{d}{d\epsilon} \epsilon \dot{\mathbf{r}} = dm (\hat{\mathbf{R}}_c + \omega \times \mathbf{r}_c), \quad (2.39)$$

gdje je  $\hat{\mathbf{R}}_c$ , vektor usmjeren od ishodišta pripadajućeg inercijalnog sustava prema centru mase krutog tijela,  $\mathbf{r}_c$  je vektor od centra mase do promatrane elementarne čestice na tijelu, a  $\hat{\mathbf{v}} = \epsilon \mathbf{v}$  je apsolutna brzina elementarne čestice.

Integriranjem (2.39) po tijelu, dualna kutna količina gibanja jednaka je:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{h}}_c &= \int_b [\hat{\mathbf{r}}_c \times d\hat{\mathbf{h}}_1] = \\ &= \int_b [\epsilon \mathbf{r}_c \times dm(\dot{\mathbf{R}}_c + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_c)] = \\ &= \epsilon \int_b \mathbf{r}_c dm \times \dot{\mathbf{R}}_c + \epsilon \int_b [\mathbf{r}_c \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_c)] dm = \epsilon \mathbf{I} \boldsymbol{\omega},\end{aligned}\quad (2.40)$$

gdje je  $\mathbf{I}$ , matrica inercija oko centra mase tijela.

Jednadžba (2.38) se uz dualnu brzinu može napisati u sljedećem obliku:

$$\hat{\mathbf{h}}_1 = \hat{m} \hat{\mathbf{v}} = m \frac{d}{d\epsilon} (\boldsymbol{\omega} + \epsilon \mathbf{v}_c) = m \mathbf{v}_c. \quad (2.41)$$

Na sličan način može se napisati i jednadžba (2.40) u obliku:

$$\hat{\mathbf{h}}_c = (\epsilon \mathbf{I}) (\boldsymbol{\omega} + \epsilon \mathbf{v}_c) = \epsilon \mathbf{I} \hat{\mathbf{v}}. \quad (2.42)$$

Kombiniranjem (2.41) i (2.42) dobiva se izraz za ukupnu količinu gibanja krutog tijela u obliku dualne količine gibanja;

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{h}} &= \hat{\mathbf{h}}_1 + \hat{\mathbf{h}}_c \\ &= \hat{m} \hat{\mathbf{v}} + \epsilon \mathbf{I} \hat{\mathbf{v}} = \\ &= \left( m \frac{d}{d\epsilon} + \epsilon \mathbf{I} \right) (\boldsymbol{\omega} + \epsilon \mathbf{v}_c) = \\ &= m \mathbf{v}_c + \epsilon \mathbf{I} \boldsymbol{\omega}.\end{aligned}\quad (2.43)$$

Proširivanjem dualne mase na dijagonalnu matricu i zbrajanjem sa matricom inercija, dobiva se dualna matrica inercija:

$$\hat{\mathbf{M}} = \hat{m} + \hat{\mathbf{I}} = m \frac{d}{d\epsilon} + \epsilon \mathbf{I}. \quad (2.44)$$

Dualni operator inercije definiran je u matričnom obliku kao:

$$\hat{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} m \frac{d}{d\epsilon} + \epsilon I_{xx} & \epsilon I_{xy} & \epsilon I_{xz} \\ \epsilon I_{yx} & m \frac{d}{d\epsilon} + \epsilon I_{yy} & \epsilon I_{yz} \\ \epsilon I_{zx} & \epsilon I_{zy} & m \frac{d}{d\epsilon} + \epsilon I_{zz} \end{bmatrix}. \quad (2.45)$$

Analogno dualnoj masi  $\hat{m}$  iz [11], u radu [13] se uvodi hiper-dualni operator mase:

$$\hat{m} = m \left( \frac{d}{d\epsilon^*} \frac{d}{d\epsilon} + \epsilon^* \frac{d}{d\epsilon} \right), \quad (2.46)$$

### 2.2.1. Energija u dualnom zapisu

Integriranjem jednadžbe gibanja čestice iz (2.37) dobiva se izraz za kinetičku energiju čestice:

$$\begin{aligned}\Delta\hat{K} &= \int_{r_1}^{r_2} \hat{\mathbf{f}} \cdot d\hat{\mathbf{r}} = \int_{r_1}^{r_2} \hat{m}\hat{\ddot{\mathbf{r}}} \cdot d\hat{\mathbf{r}} = \int_{r_1}^{r_2} \left( m \frac{d}{d\epsilon} \cdot \epsilon\ddot{\mathbf{r}} \right) \cdot (\epsilon d\mathbf{r}) = \\ &= \epsilon \int_{r_1}^{r_2} m\ddot{\mathbf{r}} d\mathbf{r} = \epsilon \frac{1}{2} m \int_{r_1}^{r_2} \frac{d}{dt} (\mathbf{v}^2) dt = \frac{1}{2} \epsilon m \mathbf{v}^2 \Big|_{t_1}^{t_2} = \\ &= \frac{1}{2} \epsilon m \mathbf{v}^2,\end{aligned}\tag{2.47}$$

gdje je  $\mathbf{v}$  vektor brzine pojedine čestice, uz  $\mathbf{v}(t_1) = 0$ ,  $\mathbf{v}(t_2) = \mathbf{v}$ . Potrebno je naglasiti da se u umnošku sile i infinitezimalnog pomaka radi o skalarnom produktu dvaju dualnih vektora. Na taj način kinetička energija izražena je kao čisti dualni broj.

Ako se kruto tijelo uzme kao integral infinitezimalnih elemenata, a centar gibajućeg koordinatnog sustava postavi u centru mase, njegova dualna kinetička energija je:

$$\begin{aligned}\hat{K} &= \int_b \frac{1}{2} \epsilon \mathbf{v}^2 dm = \int_b \frac{1}{2} \epsilon (\mathbf{v}_c + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})^2 dm = \\ &= \frac{1}{2} \int_b \epsilon \mathbf{v}_c^2 dm + \epsilon \int_b \mathbf{v}_c \cdot \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} dm + \frac{1}{2} \epsilon \int_b (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})^2 dm = \\ &= \frac{1}{2} \epsilon m \mathbf{v}_c^2 + \hat{K}_{rot},\end{aligned}\tag{2.48}$$

gdje je  $\mathbf{v}_c$ , brzina centra mase tijela,  $\boldsymbol{\omega}$  je kutna brzina tijela, a  $\mathbf{r}$  je radijus-vektor od centra mase tijela prema nekoj elementarnoj čestici u tijelu.

Član rotacijske kinetičke energije u jednadžbi (2.48) može se raspisati na sljedeći način:

$$\begin{aligned}\hat{K}_{rot} &= \frac{1}{2} \epsilon \int_b (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})^2 dm = \frac{1}{2} \epsilon \int_b [\boldsymbol{\omega}^2 \mathbf{r}^2 - (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r})^2] dm = \\ &= \frac{1}{2} \epsilon \sum_{i,k} \omega_i \omega_k I_{ik} = \frac{1}{2} \epsilon \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{I} \boldsymbol{\omega},\end{aligned}\tag{2.49}$$

gdje su  $\omega_i$  komponente vektora kutne brzine, uz  $i, k = 1, 2, 3$ . Kombiniranjem jednadžbi (2.48) i (2.49) dobiva se izraz za ukupnu kinetičku energiju krutog tijela:

$$\hat{K} = \frac{1}{2} \epsilon m \mathbf{v}^2 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T \epsilon \mathbf{I} \boldsymbol{\omega}.\tag{2.50}$$

Jednostavniji zapis energije prikazan je u radu [5], gdje je uvedena dodatna operacija dualnih vektora, *momentni produkt*. Prema [15] momentni produkt dva dualna vektora

definiran je kao:

$$[\hat{\mathbf{a}}|\hat{\mathbf{a}}] = [\mathbf{a} + \epsilon\mathbf{a}_0|\mathbf{b} + \epsilon\mathbf{b}_0] = \mathbf{a}\mathbf{b}_0 + \mathbf{a}_0\mathbf{b}. \quad (2.51)$$

U dualnom zapisu jednadžbi gibanja krutih tijela ovaj produkt ima jasno fizikalno značenje, naime, momentni produkt dualne sile i dualne brzine je snaga, jedna polovina momentnog produkta dualne količine gibanja i dualne brzine je iznos kinetičke energije tijela.

Prema (2.51), može se dati sličan izvod kinetičke energije u usporedbi s jednadžbom (2.50). Sada se u izrazu integrala za razliku od skalarnog produkta dualne sile i infinitezimalnog pomaka koristi momentni za razliku od skalarnog produkta:

$$\begin{aligned} \Delta K &= \int_{r_1}^{r_2} [\hat{\mathbf{f}}|d\hat{\mathbf{r}}] = \\ &= \int_{r_1}^{r_2} [d\hat{m} \frac{d\hat{\mathbf{v}}}{dt} | d\hat{\mathbf{v}} \cdot dt] = \\ &= \int_{r_1}^{r_2} [d\hat{m}\hat{\mathbf{v}}|\hat{\mathbf{v}}]. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Integracijom (2.52) po tijelu može se dobiti zapis kinetičke energije krutog tijela kao momentni produkt dualne brzine i dualne količine gibanja:

$$K = \frac{1}{2}[\hat{\mathbf{v}}_C|\hat{\mathbf{h}}_C] = \frac{1}{2} \left( m\mathbf{v}^2_C + \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{I} \boldsymbol{\omega} \right). \quad (2.53)$$

Preko definicije momentnog produkta iz (2.51), a iz zapisa kinetičke energije u (2.53) zaključuje se da je kinetička energija u dualnom zapisu realan broj, [5].

Na sličan način može se zapisati i iznos potencijalne energije krutog tijela na proizvoljnoj visini ( $\mathbf{x}_c$ ) kao momentni produkt dualne gravitacijske sile na tijelo i dualnog vektora pozicije u gravitacijskom polju:

$$P = [\hat{m}\epsilon\mathbf{g}|\epsilon\mathbf{x}_C]. \quad (2.54)$$

### 2.2.2. Pravila deriviranja momentnog produkta

U radu [5] dokazano je da je energija u dualnom zapisu realan skalarni broj (funkcija), ovisna o dualnim varijablama (dualna sila, dualna količina gibanja) preko momentnog

produkta. Za računanje Lagrangeovih jednadžbi gibanja potrebno je derivirati jednadžbe energije po dualnim generaliziranim koordinatama koje su u općem slučaju dualne varijable. Kako su ranije u radu predstavljena pravila deriviranja dualnih funkcija po dualnim varijablama, nameće se potreba za izvođenjem pravila deriviranja skalarnih funkcija (energija) po dualnim varijablama.

Rezultat momentnog produkta je realna skalarna funkcija prema jednadžbi (2.51). Ako momentni produkt uključuje barem jednu dualnu varijablu  $\hat{x} = x + \epsilon x_0$ , a rezultat operacije (skalarna funkcija) označi sa  $u$ , može se napisati njena zavisnost o dualnoj varijabli kao:

$$u = u(x, x_0). \quad (2.55)$$

Kako je ova funkcija zavisna o dvije nezavisne varijable, njen diferencijal je:

$$du(x, x_0) = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial x_0} dx_0. \quad (2.56)$$

Nadalje, pretpostavlja se da je ovakav diferencijal rezultat momentnog produkta derivacije realne funkcije po dualnoj varijabli,  $\hat{d}u/d\hat{x} = g(x, x_0) + \epsilon q(x, x_0)$  i diferencijala dualne varijable,  $d\hat{x}$ :

$$du(x, x_0) = \left[ \frac{\hat{d}u}{d\hat{x}} \middle| d\hat{x} \right] = [g + \epsilon q | dx + \epsilon dx_0] = g dx_0 + q dx. \quad (2.57)$$

Sada se mogu izjednačiti jednadžbe (2.56) i (2.57) pošto definiraju isti diferencijal funkcije  $u$ , dakle:

$$\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial x_0} dx_0 = g dx_0 + q dx, \quad (2.58)$$

ili,

$$\left( \frac{\partial u}{\partial x_0} - g \right) dx_0 + \left( \frac{\partial u}{\partial x} - q \right) dx = 0. \quad (2.59)$$

Da bi funkcija  $u$  bila analitička, jednadžba (2.59) treba biti zadovoljena za proizvoljne iznose  $dx/dx_0$ , dakle može se zapisati:

$$g = \frac{\partial u}{\partial x_0} \text{ i } q = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (2.60)$$

što daje derivaciju realne funkcije po dualnoj varijabli:

$$\frac{\hat{d}u}{d\hat{x}} = \frac{\partial u}{\partial x_0} + \epsilon \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (2.61)$$

Usporedbom zadnje jednadžbe sa izrazom za derivaciju dualne funkcije po dualnoj varijabli, (2.11), zaključuje se da su definirane preko istog izraza. Izvedena pravila deriviranja koristit će u izvodu Lagrangeovih jednadžbi.

### 2.2.3. Dualni zapis Lagrangeovih jednadžbi gibanja

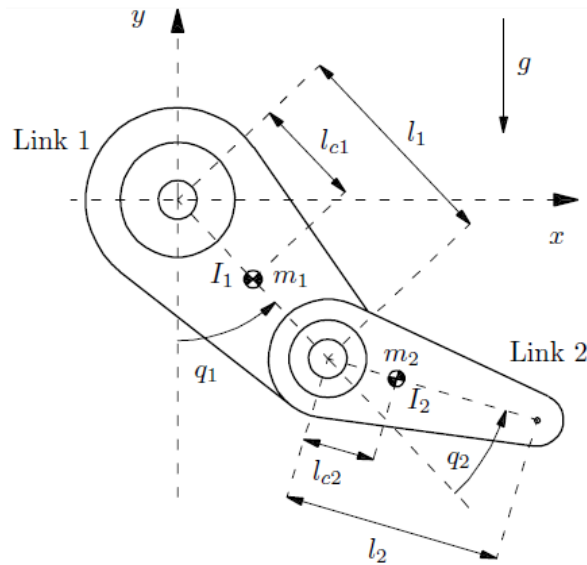
U izvodu dualne forme Lagrangeovih jednadžbi dualna generalizirana koordinata označava se kao  $\hat{q}_i = \theta_i + \epsilon d_i$ , a energija računa koristeći momentni produkt prema (2.51). Dualna generalizirana sila,  $\hat{Q}_i = f_i + \epsilon \tau_i$ , dobiva se deriviranjem energijske funkcije po dualnoj varijabli prema pravilu deriviranja momentnog produkta, (2.61):

$$\hat{Q}_i = \frac{d}{dt} \left( \frac{\hat{\partial} K}{\partial \dot{\hat{q}}_i} \right) - \frac{\hat{\partial} K}{\partial \hat{q}_i} + \frac{\hat{\partial} P}{\partial \hat{q}_i} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial K}{\partial \dot{d}_i} \right) - \frac{\partial K}{\partial d_i} + \frac{\partial P}{\partial d_i} + \epsilon \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial K}{\partial \dot{\theta}_i} \right) - \frac{\partial K}{\partial \theta_i} + \frac{\partial P}{\partial \theta_i} \right]. \quad (2.62)$$

Ako se generalizirana linearna koordinata prikaže kao čisti dualni broj, a generalizirana rotacijska koordinata prikaže kao čisti realni broj, onda se prema pravilima deriviranja momentnog produkta kao derivacija energije po dualnoj generaliziranoj koordinati dobiva čisti dualni broj u slučaju momenta, i čisti realni broj u slučaju sile, [5].

## 2.3. Primjer robota s 2 stupnja slobode gibanja

Razmatra se robotska ruka s 2 stupnja slobode gibanja.



Slika 2.2: Dijagram Pelican robota s 2 stupnja slobode gibanja, [2].

Dualne generalizirane koordinate ovog robota su:

$$\hat{q}_1 = q_1, \quad \hat{q}_2 = q_2. \quad (2.63)$$

Dualni vektori brzina centra mase prve i druge karike iznose:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{v}}_1 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_1 \end{bmatrix} + \epsilon \begin{bmatrix} l_{c1} \cos(q_1) \dot{q}_1 \\ l_{c1} \sin(q_1) \dot{q}_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{\omega}_1 + \epsilon \mathbf{v}_{c1}; \\ \hat{\mathbf{v}}_2 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \end{bmatrix} + \epsilon \begin{bmatrix} l_1 \cos(q_1) \dot{q}_1 + l_{c2} \cos(q_1 + q_2) [\dot{q}_1 + \dot{q}_2] \\ l_1 \sin(q_1) \dot{q}_1 + l_{c2} \sin(q_1 + q_2) [\dot{q}_1 + \dot{q}_2] \\ 0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{\omega}_2 + \epsilon \mathbf{v}_{c2}, \end{aligned} \quad (2.64)$$

nadalje, dualni moment prve karike po centru mase iznosi:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{h}}_1 &= \hat{\mathbf{M}}_1 \hat{\mathbf{v}}_1 = \left( m_1 \frac{d}{d\epsilon} + \epsilon \mathbf{I}_1 \right) (\boldsymbol{\omega}_1 + \epsilon \mathbf{v}_{c1}) = \\ &= m_1 \begin{bmatrix} l_{c1} \cos(q_1) \dot{q}_1 \\ l_{c1} \sin(q_1) \dot{q}_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \epsilon \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I_1 \dot{q}_1 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (2.65)$$

a dualni moment druge karike vezan za centar mase računa se prema:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{h}}_2 &= \left( m_2 \frac{d}{d\epsilon} + \epsilon \mathbf{I}_2 \right) (\boldsymbol{\omega}_2 + \epsilon \mathbf{v}_{c2}) = \\ &= m_2 \begin{bmatrix} l_1 \cos(q_1) \dot{q}_1 + l_{c2} \cos(q_1 + q_2) [\dot{q}_1 + \dot{q}_2] \\ l_1 \sin(q_1) \dot{q}_1 + l_{c2} \sin(q_1 + q_2) [\dot{q}_1 + \dot{q}_2] \\ 0 \end{bmatrix} + \epsilon \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I_2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.66)$$

Nadalje, računa se kinetička energija prve karike principom momentnog produkta (2.51):

$$\begin{aligned} K_1 &= \frac{1}{2} [\hat{\mathbf{v}}_1 | \hat{\mathbf{h}}_1] = \\ &= \frac{1}{2} \left[ I_1 \dot{q}_1^2 + m_1 \left( l_{c1}^2 \dot{q}_1^2 (\cos^2(q_1) + \sin^2(q_1)) \right) \right] = \\ &= \frac{1}{2} (I_1 \dot{q}_1^2 + m_1 l_{c1}^2 \dot{q}_1^2), \end{aligned} \quad (2.67)$$

a kinetička energija druge karike prema:

$$\begin{aligned}
 K_2 &= \frac{1}{2} \left[ \hat{\mathbf{v}}_2 | \hat{\mathbf{h}}_2 \right] = \\
 &= \frac{1}{2} \left[ I_2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + m_2 (l_1^2 \dot{q}_1^2 + l_{c2}^2 \dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_1 \dot{q}_2 + \dot{q}_2^2) + 2l_1 l_{c2} [\dot{q}_1^2 + \dot{q}_1 \dot{q}_2] \cos(q_2) \right] = \\
 &= \frac{1}{2} I_2 [\dot{q}_1 + \dot{q}_2]^2 + \frac{1}{2} m_2 l_1^2 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_{c2}^2 [\dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_1 \dot{q}_2 + \dot{q}_2^2] + m_2 l_1 l_{c2} [\dot{q}_1^2 + \dot{q}_1 \dot{q}_2] \cos(q_2).
 \end{aligned} \tag{2.68}$$

Potencijalna energija u dualnom zapisu momentni je produkt dualnog vektora gravitacijske sile i dualnog vektora pozicije centra mase pojedine karike u polju gravitacijske sile,  $(\hat{\mathbf{x}}_{ci})$ . Tako se vektor pozicije centra mase prve i druge karike u gravitacijskom polju u dualnom zapisu izražava kao:

$$\hat{\mathbf{x}}_{c1} = \epsilon \begin{bmatrix} 0 \\ -l_{c1} \cos(q_1) \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \hat{\mathbf{x}}_{c2} = \epsilon \begin{bmatrix} 0 \\ -(l_1 \cos(q_1) + l_{c2} \cos(q_1 + q_2)) \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{2.69}$$

a potencijalna energija prve karike računa na način:

$$\begin{aligned}
 P_1 &= \left[ m_1 \frac{d}{d\epsilon} \epsilon \mathbf{g} | \epsilon \mathbf{x}_{c1} \right] = \\
 &= m_1 \begin{bmatrix} 0 \\ g \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -l_{c1} \cos(q_1) \\ 0 \end{bmatrix} = \\
 &= -m_1 g l_{c1} \cos(q_1),
 \end{aligned} \tag{2.70}$$

slično se računa potencijalna energija druge karike:

$$\begin{aligned}
 P_2 &= \left[ m_2 \frac{d}{d\epsilon} \epsilon \mathbf{g} | \epsilon \mathbf{x}_{c2} \right] = \\
 &= m_2 \begin{bmatrix} 0 \\ g \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -(l_1 \cos(q_1) + l_{c2} \cos(q_1 + q_2)) \\ 0 \end{bmatrix} = \\
 &= -m_2 g (l_1 \cos(q_1) + l_{c2} \cos(q_1 + q_2)).
 \end{aligned} \tag{2.71}$$

Kako su generalizirane dualne varijable u ovom slučaju čisti realni brojevi, izraz (2.62) može se preformulirati na način:

$$\tau_i = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial K}{\partial \dot{\theta}_i} \right) - \frac{\partial K}{\partial \theta_i} + \frac{\partial P}{\partial \theta_i}, \tag{2.72}$$



gdje su  $\tau_i$  vanjski momenti aktuatora u zglobovima 1 i 2 robotske ruke. Uvrštavanjem izraza (2.67)-(2.71) dobivaju se izrazi za momente u zglobovima:

$$\begin{aligned}
\tau_1 = & [m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2 + m_2 l_{c2}^2 + 2m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) + I_1 + I_2] \ddot{q}_1 \\
& + [m_2 l_{c2}^2 + m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) + I_2] \ddot{q}_2 \\
& - 2m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 - m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_2^2 \\
& + [m_1 l_{c1} + m_2 l_1] g \sin q_1 \\
& + m_2 g l_{c2} \sin(q_1 + q_2),
\end{aligned} \tag{2.73}$$

i za zglob 2:

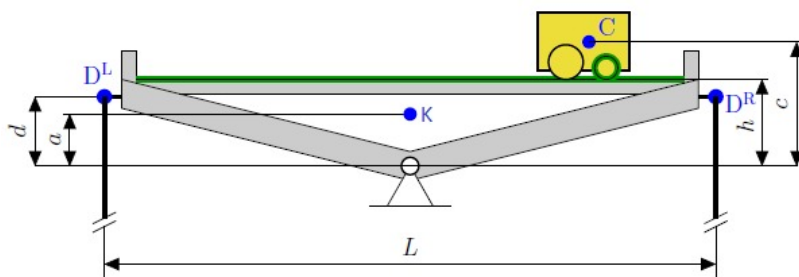
$$\begin{aligned}
\tau_2 = & [m_2 l_{c2}^2 + m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) + I_2] \ddot{q}_1 + [m_2 l_{c2}^2 + I_2] \ddot{q}_2 \\
& + m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_1^2 + m_2 g l_{c2} \sin(q_1 + q_2).
\end{aligned} \tag{2.74}$$

Prema tome, jednadžbe dinamike robota (2.73)-(2.74) čine set od dvije nelinearne diferencijalne jednadžbe varijabli stanja  $\mathbf{x} = [\mathbf{q}^T \dot{\mathbf{q}}^T]^T$ .

### 3 | Elastično povezani elektromehanički sustav kolica na klackalici

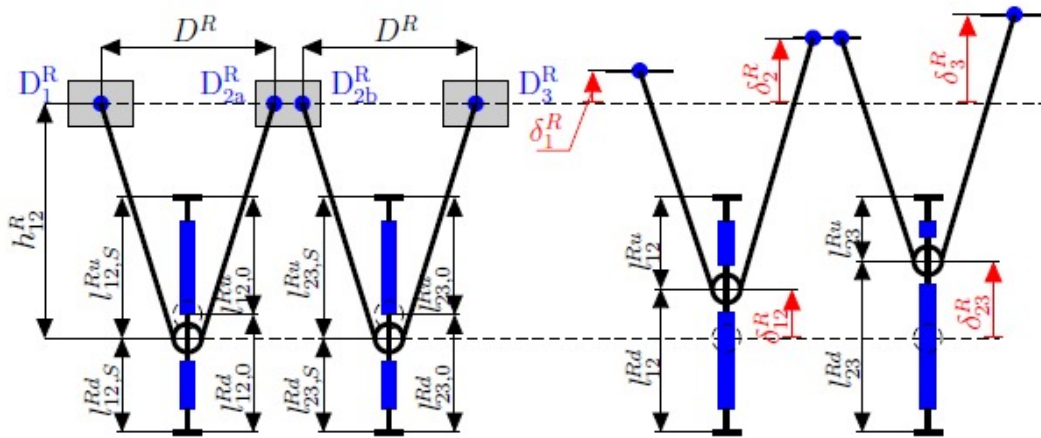
U ovom poglavlju razmatraju se komponente sustava kojeg čine tri identična podsustava klackalice s kolicima međusobno povezani neelastičnim užetom, analizira se način međusobnih veza, te se izvodi nelinearni matematički model primjenom metode dualnih brojeva.

Na slici 3.1 prikazan je podsustav klackalice s kolicima (kolica imaju ugrađen motor), a kretanje po klackalici omogućeno je ugradnjom vodilice i nazubljene letve. Pomak kolica omogućuje istosmjerni (DC) motor i zupčanik koji se giba po nazubljenoj letvi. Na slici 3.2 zorno se vidi prikaz desne strane sustava s elastičnim vezama. Klackalice su



Slika 3.1: Podsustav klackalice s kolicima, [3]

povezane neelastičnim užetom na način da je jedan kraj užeta zavezan za prvu klackalicu ( $D_1^R$ ) preko koloture spojene s dvije opruge, a drugi kraj užeta je zavezan za drugu klackalicu ( $D_{2a}^R$ ), gdje indeks  $R$  označava da se radi o desnoj strani sustava. Na isti način povezan je i drugi par klackalica s desne strane preko druge koloture. Na identičan način sustav je povezan i s lijeve strane.



Slika 3.2: Elastične veze, desna strana sustava, [3]

### 3.1. Matematičko modeliranje metodom dualnih brojeva

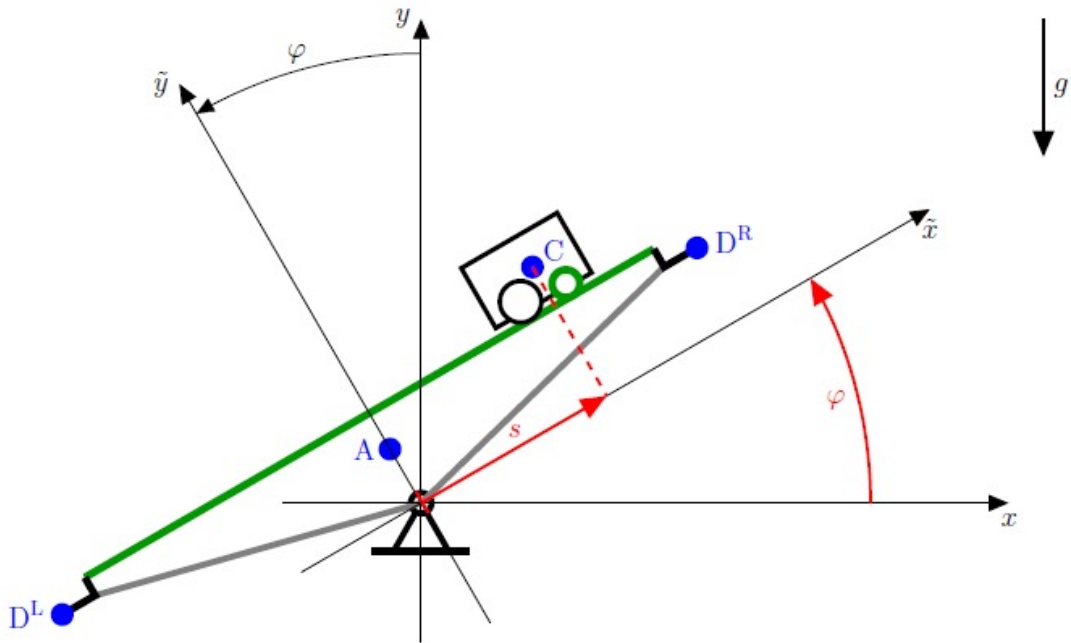
Izvod matematičkog modela sustava nužan je korak pri analizi dinamičkog ponašanja nelinearnog modela sustava. Matematički model skup je diferencijalnih jednadžbi koje opisuju realni sustav, a izvest će se primjenom Euler-Lagrange metode. Izvod matematičkog modela provodi se u pet koraka: izračun kinetičke energije, zatim potencijalne (gravitacijske i elastične), određivanje funkcije gubitaka, opisivanje dinamike istosmjernog motora i na kraju izvod Lagrangeovih jednadžbi dinamike.

#### 3.1.1. Izračun kinetičke energije

Kinetička energija sustava može se izraziti kao zbroj kinetičke energije svih podsustava. A za izračun pojedinih vrsta energija koristit će se ranije opisani momentni produkt.

Dualna generalizirana koordinata  $i$ -tog podsustava je:

$$\hat{q}_i = \varphi_i + \epsilon s_i, \quad (3.1)$$



Slika 3.3: Shema podustava prilikom zakreta, [3]

dualni vektor brzine  $i$ -te klackalice je:

$$\hat{\mathbf{v}}_i^A = \boldsymbol{\omega}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi}_i \end{bmatrix} = \dot{\varphi}_i, \quad (3.2)$$

dualni moment  $i$ -te klackalice je:

$$\hat{\mathbf{h}}_i^A = \hat{\mathbf{M}}_i^A \hat{\mathbf{v}}_i^A = \epsilon I_i \dot{\varphi}_i, \quad (3.3)$$

a kinetička energija  $i$ -te klackalice računa se preko momentnog produkta kao:

$$\begin{aligned} E_i^A &= \frac{1}{2} [\hat{\mathbf{v}}_i^A | \hat{\mathbf{M}}_i^A \hat{\mathbf{v}}_i^A] = \\ &= \frac{1}{2} [\boldsymbol{\omega}_i | \epsilon I_i \boldsymbol{\omega}_i] = \\ &= \frac{1}{2} I_i \dot{\varphi}_i^2. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Za određivanje dualnog vektora brzine  $i$ -tih kolica potrebno je izraziti dualni vektor

položaja centra mase kolica u mirujućem koordinatnom sustavu:

$$\hat{\mathbf{r}}_i^C = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \varphi_i \end{bmatrix} + \epsilon \begin{bmatrix} s_i \cos(\varphi_i) - c_i \sin(\varphi_i) \\ s_i \sin(\varphi_i) + c_i \cos(\varphi_i) \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.5)$$

Dualni vektor brzine  $i$ -tih kolica je:

$$\hat{\mathbf{v}}_i^C = \boldsymbol{\omega}_i + \epsilon \mathbf{v}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi}_i \end{bmatrix} + \epsilon \begin{bmatrix} \dot{s}_i \cos(\varphi_i) - s_i \dot{\varphi}_i \sin(\varphi_i) - c_i \dot{\varphi}_i \cos(\varphi_i) \\ \dot{s}_i \sin(\varphi_i) + s_i \dot{\varphi}_i \cos(\varphi_i) - c_i \dot{\varphi}_i \sin(\varphi_i) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.6)$$

a odgovarajuća dualna količina gibanja iznosi:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{h}}_i^C &= (m_i^C \frac{d}{d\epsilon} + \epsilon \mathbf{I}_i^C)(\boldsymbol{\omega}_i + \epsilon \mathbf{v}_i) = \\ &= m_i^C \mathbf{v}_i + \epsilon \mathbf{I}_i^C \boldsymbol{\omega}_i, \end{aligned} \quad (3.7)$$

gdje je  $\mathbf{I}_i^C$ , polarni moment tromosti  $i$ -tih kolica koji iznosi:

$$\mathbf{I}_i^C = m_i^C (\epsilon \mathbf{r}_i^C)^2 = 0, \quad (3.8)$$

pa se dualna količina gibanja  $i$ -tih kolica može raspisati kao:

$$\hat{\mathbf{h}}_i^C = m_i^C \mathbf{v}_i^C, \quad (3.9)$$

kinetička energija  $i$ -tih kolica iznosi:

$$\begin{aligned} E_i^C &= \frac{1}{2} [\hat{\mathbf{v}}_i^C | \hat{\mathbf{M}}_i^C \hat{\mathbf{v}}_i^C] = \\ &= \frac{1}{2} [\mathbf{v}_i^C | m_i^C \mathbf{v}_i^C] = \\ &= \frac{1}{2} m_i^C ((c_i^2 + s_i^2) \dot{\varphi}_i^2 - 2c_i \dot{\varphi}_i \dot{s}_i + \dot{s}_i^2). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Kinetička energija cijelog sustava može se zapisati na način:

$$E = \sum_{i=1}^3 (E_i^A + E_i^C). \quad (3.11)$$

### 3.1.2. Izračun potencijalne energije

Potencijalna gravitacijska energija u dualnom zapisu momentni je produkt gravitacijske sile i vektora položaja centra mase tijela u polju gravitacijske sile.

Potencijalna energija  $i$ -te klackalice je:

$$\begin{aligned}
 U_i^A &= [m_i^A \frac{d}{d\epsilon} \epsilon \mathbf{g} | \epsilon \mathbf{x}_i^A] = \\
 &= [m_i^A \frac{d}{d\epsilon} \epsilon \begin{bmatrix} 0 \\ g \\ 0 \end{bmatrix} | \epsilon \begin{bmatrix} 0 \\ a_i \cos(\varphi_i) \\ 0 \end{bmatrix}] = \\
 &= a_i m_i^A g \cos(\varphi_i),
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

a potencijalna gravitacijska energija  $i$ -tih kolica iznosi:

$$\begin{aligned}
 U_i^C &= [m_i^C \frac{d}{d\epsilon} \epsilon \mathbf{g} | \epsilon \mathbf{x}_i^C] = \\
 &= [m_i^C \frac{d}{d\epsilon} \epsilon \begin{bmatrix} 0 \\ g \\ 0 \end{bmatrix} | \epsilon \begin{bmatrix} 0 \\ s_i \sin(\varphi_i) + c_i \cos(\varphi_i) \\ 0 \end{bmatrix}] = \\
 &= a_i m_i^A g (s_i \sin(\varphi_i) + c_i \cos(\varphi_i)).
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

Nadalje, razmatra se elastična veza podustava klackalice prema slici 3.2. Potencijalna elastična energija u dualnom zapisu momentni je produkt dualne sile opruge i odmaka opruge od ravnotežnog stanja:

$$\begin{aligned}
 U_{el} &= \frac{1}{2} [k \frac{d}{d\epsilon} \epsilon \Delta x | \epsilon \Delta x] = \\
 &= \frac{1}{2} k (\Delta x)^2.
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

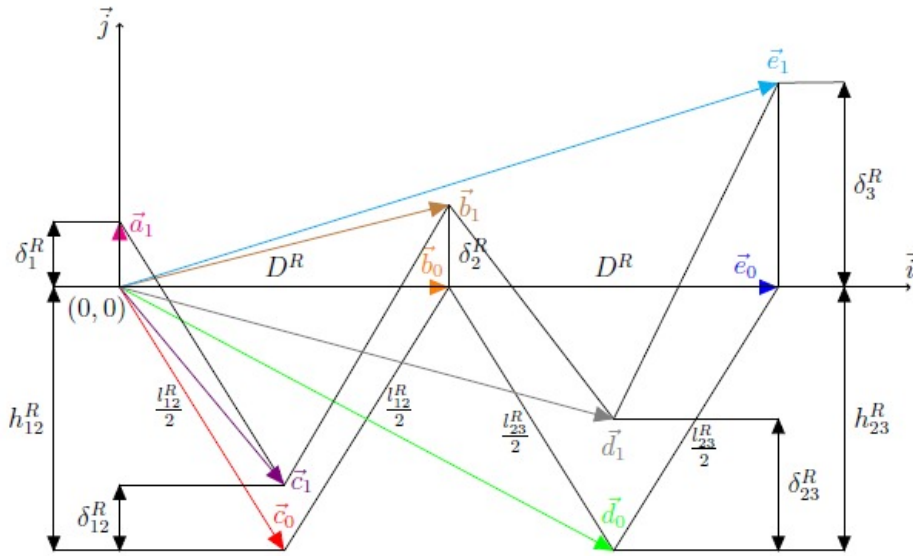
Potencijalna elastična energija za desnu stranu sustava koristeći formulu (3.14) iznosi:

$$\begin{aligned}
 U^R &= \frac{1}{2} k_{12}^{Ru} (l_{12}^{Ru} - l_{12,0}^{Ru})^2 + \frac{1}{2} k_{12}^{Rd} (l_{12}^{Rd} - l_{12,0}^{Rd})^2 \\
 &+ \frac{1}{2} k_{23}^{Ru} (l_{23}^{Ru} - l_{23,0}^{Ru})^2 + \frac{1}{2} k_{23}^{Rd} (l_{23}^{Rd} - l_{23,0}^{Rd})^2.
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

Potencijalna energija elastičnih veza na lijevoj strani sustava iznosi:

$$\begin{aligned}
 U^L &= \frac{1}{2} k_{12}^{Lu} (l_{12}^{Lu} - l_{12,0}^{Lu})^2 + \frac{1}{2} k_{12}^{Ld} (l_{12}^{Ld} - l_{12,0}^{Ld})^2 \\
 &+ \frac{1}{2} k_{23}^{Lu} (l_{23}^{Lu} - l_{23,0}^{Lu})^2 + \frac{1}{2} k_{23}^{Ld} (l_{23}^{Ld} - l_{23,0}^{Ld})^2,
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

gdje indeks 0 u jednadžbama (3.15) i (3.16) označava duljinu neopterećene opruge. Pretpostavlja se da su sve konstante opruge jednake;  $k_{12}^{Ru} = k_{12}^{Rd} = k_{23}^{Ru} = k_{23}^{Rd} = k_{12}^{Lu} = k_{12}^{Ld} = k_{23}^{Lu} = k_{23}^{Ld} = k[N/m]$ . Prema slici 3.2 mogu se izraziti veze između pomaka kolotura i duljina opruga na sljedeći način:  $l_{12}^{Ru} = l_{12,S}^{Ru} - \delta_{12}^R$ ,  $l_{12}^{Rd} = l_{12,S}^{Rd} - \delta_{12}^R$ ,  $l_{23}^{Ru} = l_{23,S}^{Ru} - \delta_{23}^R$ ,  $l_{23}^{Rd} = l_{23,S}^{Rd} + \delta_{23}^R$ ,  $l_{12}^{Lu} = l_{12,S}^{Lu} - \delta_{12}^L$ ,  $l_{12}^{Ld} = l_{12,S}^{Ld} + \delta_{12}^L$ ,  $l_{23}^{Lu} = l_{23,S}^{Lu} - \delta_{23}^L$ , i zadnje  $l_{23}^{Ld} = l_{23,S}^{Ld} + \delta_{23}^L$ , gdje index  $S$  označava duljinu prednapregnute opruge.



Slika 3.4: Vektorski prikaz elastičnih veza (desna strana sustava), [4]

Slika 3.4 daje vektorski prikaz veza iz slike 3.2. Promatrajući odnose između vektora mogu se napisati sljedeće jednakosti:

$$\|\vec{a}_1 - \vec{c}_1\| + \|\vec{b}_1 - \vec{c}_1\| = \frac{D^R}{2}, \quad \|\vec{b}_1 - \vec{d}_1\| + \|\vec{e}_1 - \vec{d}_1\| = \frac{D^R}{2}. \quad (3.17)$$

Jednadžba (3.17) može se linearizirati oko vrijednosti nula što odgovara malim kutevima zakreta klackalica i time dobiti izraze za pomak kolotura na desnoj i lijevoj strani:

$$\begin{aligned} \delta_{12}^R &= \frac{1}{2}(\delta_1^R + \delta_2^R), & \delta_{23}^R &= \frac{1}{2}(\delta_2^R + \delta_3^R), \\ \delta_{12}^L &= \frac{1}{2}(\delta_1^L + \delta_2^L), & \delta_{23}^L &= \frac{1}{2}(\delta_2^L + \delta_3^L). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Nadalje, iz slike 3.3 mogu se izraziti vertikalni pomaci krajeva klackalica za desnu i lijevu stranu:

$$\delta_i^R = \frac{L}{2} \sin(\varphi_i) + d_i \cos \varphi_i - d_i, \quad \delta_i^L = -\delta_i^R, \quad (3.19)$$

konačno, ukupna potencijalna energija cijelog sustava iznosi:

$$U = U^R + U^L + \sum_{i=1}^3 (U_i^A + U^C). \quad (3.20)$$

### 3.1.3. Funkcija gubitaka

Trenje u rotacijskom zglobu  $i$ -te klackalice izražava se kao funkcija gubitaka na način:

$$\Phi_i = \frac{1}{2} \kappa_i \dot{\varphi}_i^2, \quad (3.21)$$

gdje je  $\kappa_i [Nms/rad]$  koeficijent viskoznog trenja u  $i$ -tom zglobu. Pretpostavlja se da je koeficijent viskoznog trenja jednak za sva tri podsustava, pa se funkcija gubitaka za cijeli sustav može zapisati kao:

$$\Phi = \frac{1}{2} \kappa \sum_{i=1}^3 \dot{\varphi}_i^2, \quad (3.22)$$

dok se trenje između letve i zupčanika zanemaruje.

### 3.1.4. Elektromotor i prijenos

U sustavu se nalaze tri identična istosmjerna elektromotora za razvijanje sile  $F_M$  potrebne za kretanje kolica. Moment kojeg motor isporučuje ovisan je o naponu armature  $U_a [V]$ , a sila  $F_M$  ovisi i o prijenosnom omjeru.  $R_a [\Omega]$  je otpor armature,  $I_a [A]$  je struja armature,  $L_a [H]$  je induktivitet armature,  $e [V]$  je elektromotorna sila inducirana u navojima armature,  $\tau_{in} [Nm]$  je moment motora,  $\tau_M [Mn]$  je moment kojim se djeluje na nazubljenu letvu,  $\phi_{in} [rad]$  i  $\phi [rad]$  je kut zakreta, a  $p$  je prijenosni omjer reduktora. Primjenom drugog Kirchhoffovog zakona uz  $L_a \ll R_a$ , dobiva se dinamika motora:

$$F_{Mi} = \frac{K_i}{R_a p r} U_{ai} - \frac{K_e K_t}{R_a p^2 r^2} \dot{s}_i, \quad (3.23)$$

gdje je  $K_t [Nm/A]$  konstanta motora,  $K_e [Vs/rad]$  je elektromotorna konstanta, a  $r [m]$  jest efektivni radijus zupčanika u dodiru s nazubljenom letvom.

### 3.1.5. Jednadžbe dinamike

Za izvod jednadžbi dinamike koristit će se Euler-Lagrangeov pristup. Vektor generaliziranih koordinata u dualnom zapisu je  $\hat{\mathbf{q}} = [\hat{q}_1, \hat{q}_2, \hat{q}_3]^T$ , gdje su  $\hat{q}_i = \varphi_i + \epsilon s_1$  kutevi



zakreta njihala i pomaci kolica. Dualne generalizirane sile, oblika  $\hat{Q}_i = f_i + \epsilon\tau_i$ , dobivaju se deriviranjem momentnog produkta po dualnim varijablama.

$$F_{Mi} + \epsilon\tau_{Di} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E}{\partial \dot{s}_i} \right) - \frac{\partial E}{\partial s_i} + \frac{\partial U}{\partial s_i} + \epsilon \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E}{\partial \dot{\varphi}_i} \right) - \frac{\partial E}{\partial \varphi_i} + \frac{\partial U}{\partial \varphi_i} + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\varphi}_i} \right], \quad (3.24)$$

gdje je s  $E$  označena ukupna kinetička energija (3.11),  $U$  je ukupna potencijalna energija definirana jednadžbom (3.20),  $\Phi$  su gubici definirani jednadžbom (3.22),  $\tau_{Di}$  su momenti u zglobu  $i$ -te klackalice i  $F_M$  je sila kolica na letvu.

### 3.1.6. Matrični zapis dinamike sustava

Pristup izvođenju jednadžbi dinamike sustava metodom dualnih brojeva omogućuje zapis samo tri dualne Lagrangeove jednadžbe dinamike za razliku od šest realnih jednadžbi. Međutim, kod opisa dinamike sustava u obliku prostora stanja javlja se potreba za razdvajanjem matrica inercija, matrice Coriolisovih sila i ostalih matrica zato što bi one sada množile dualni broj umjesto dosadašnjih vektora generaliziranih koordinata. Nadalje, kako se svaka linearna generalizirana koordinata u dualnom zapisu mora dosljedno označavati kao čisti dualni broj, javlja se potreba uvođenja dualnih operatora i množenja članova matrica dualnim brojevima kako bi se očuvale jednakosti u jednadžbi (3.24), što nije praktično u numeričkoj implementaciji prostora stanja, pa se prema tome u ovome radu oslanja na klasični pristup zapisivanja prostora stanja i koriste se vektori generaliziranih koordinata. Napominje se također da ni u dostupnoj literaturi nisu obrađeni principi primjene metode dualnih brojeva u zapisu prostora stanja, a što bi bilo zanimljivo područje istraživanja. Dakle, odsada se u zapisima generaliziranih koordinata koriste realni brojevi, a pristup s dualnim brojevima ograničava na zapis Lagrangeovih jednadžbi dinamike.

Sada se zapisivanjem vektora generaliziranih koordinata u obliku  $\mathbf{q} = [q_1 q_2 \dots]^T$  gdje su  $q_1 = \varphi_1, q_2 = s_1 \dots$  kutevi zakreta i pomaci kolica po klackalicama i rastvljanjem jednadžbe (3.24) na dvije realne jednadžbe omogućava matrični zapis dinamike u obliku:

$$\mathbf{M}_i(\mathbf{q}_i)\ddot{\mathbf{q}}_i + \mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)\dot{\mathbf{q}}_i + \mathbf{g}_i(\mathbf{q}_i) + \mathbf{Z}_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{\Phi}_i\dot{\mathbf{q}}_i = \mathbf{e}_2 F_M, \quad i = 1, 2, 3, \quad (3.25)$$

gdje su  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  jedinični vektori u kojima indeks označava poziciju sa vrijednosti 1. Nadalje, vektor  $\mathbf{q}_i$  je vektor generaliziranih koordinata  $\mathbf{q}_i = [q_{2i-1} \ q_{2i}]^T$ . Matrica  $\mathbf{M}_i(\mathbf{q}_i)$  je

matrica inercija u obliku:

$$\mathbf{M}_i = \begin{bmatrix} m_i^C c_i^C + m_i^C q_{2i}^2 + I_i & -m_i^C c_i \\ -m_i^C c_i & m_i^C \end{bmatrix}, \quad (3.26)$$

a  $\mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i)$  je matrica Coriolisovih sila (momenata) u obliku:

$$\mathbf{C}_i(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i) = \begin{bmatrix} m_i^C q_{2i} \dot{q}_{2i} & m_i^C q_{2i} \dot{q}_{2i-1} \\ -m_i^C q_{2i} \dot{q}_{2i-1} & \frac{K_t K_e}{R_a P^2 r^2} \end{bmatrix}, \quad (3.27)$$

nadalje,  $\mathbf{g}_i(\mathbf{q}_i)$  je vektor gravitacijskih sila (momenata):

$$\mathbf{g}_i(\mathbf{q}_i) = \begin{bmatrix} -g a_i m_i^A \sin(q_{2i-1}) + g m_i^C (q_{2i} \cos(q_{2i-1}) - c_i \sin q_{2i-1}) \\ m_i^C g \sin(q_{2i-1}) \end{bmatrix}, \quad (3.28)$$

$\Phi_i$  je matrica gubitaka viskoznog trenja u rotacijskim zglobovima  $\Phi_i = \text{diag}(\kappa, 0)$ . Član  $\mathbf{Z}_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  je sprega sustava između  $i$ -te klackalice i ostatka sustava,  $\mathbf{Z}_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = [z_i \ 0]^T$ , gdje su:

$$z_1 = \frac{k}{4} \zeta_{1,1} (\zeta_{1,2} + l_{12,S}^{Ld} + l_{12,0}^{Lu} + l_{12,S}^{Rd} + l_{12,0}^{Ru} - l_{12,0}^{Ld} - l_{12,S}^{Lu} - l_{12,0}^{Rd} - l_{12,S}^{Ru}), \quad (3.29)$$

uz izraze:

$$\zeta_{1,1} = L \cos(q_1) - 2d_1 \sin(q_1), \quad (3.30)$$

$$\zeta_{1,2} = 2d_1 \cos(q_1) - 2d_1 + 2d_2 \cos(q_3) - 2d_2 + L \sin(q_1) + L \sin q_3, \quad (3.31)$$

i

$$\begin{aligned}
 z_2 = \frac{k}{4} [ & 4d_2L \cos^2(q_3) + L \cos(q_3) \cdot (-2d_1 - 4d_2 - 2d_3 \\
 & - l_{12,0}^{Ld} l_{12,0}^{Lu} + l_{12,S}^{Ld} - l_{12,S}^{Lu} - l_{23,0}^{Ld} + l_{23,0}^{Lu} + l_{23,S}^{Ld} - l_{23,S}^{Lu} \\
 & - l_{12,0}^{Rd} + l_{12,0}^{Ru} + l_{12,0}^{Ru} + l_{12,S}^{Rd} - l_{12,S}^{Ru} - l_{23,0}^{Rd} + l_{23,0}^{Ru} + l_{23,S}^{Rd} - l_{23,S}^{Ru} \\
 & + 2d_1 \cos(q_1) + 2d_3 \cos(q_5) + L \sin(q_1) + L \sin(q_5)) \\
 & - 2 \sin(q_3)(-2d_1d_2 - 4d_2^2 - 2d_2d_3 \\
 & - d_2l_{12,0}^{Ld} + d_2l_{12,0}^{Lu} + d_2l_{12,S}^{Ld} - d_2l_{12,S}^{Lu} \\
 & - d_2l_{23,0}^{Ld} + d_2l_{23,0}^{Lu} + d_2l_{23,S}^{Ld} - d_2l_{23,S}^{Lu} \\
 & - d_2l_{12,0}^{Rd} + d_2l_{12,0}^{Ru} + d_2l_{12,S}^{Rd} - d_2l_{12,S}^{Ru} \\
 & - d_2l_{23,0}^{Rd} + d_2l_{23,0}^{Ru} + d_2l_{23,S}^{Rd} - d_2l_{23,S}^{Ru} \\
 & + 2d_1d_2 \cos(q_1) + (4d_2^2 - L^2) \cos(q_3) \\
 & + 2d_2d_3 \cos(q_5) + d_2L \sin(q_1) + 2d_2L \sin(q_3) + d_2L \sin(q_5)], \quad (3.32)
 \end{aligned}$$

i na kraju

$$z_3 = \frac{k}{4} \zeta_{3,1} (\zeta_{3,2} + l_{23,S}^{Ld} + l_{23,0}^{Lu} + l_{23,S}^{Rd} + l_{23,0}^{Ru} - l_{23,0}^{Ld} - l_{23,S}^{Lu} - l_{23,0}^{Rd} - l_{23,S}^{Ru}), \quad (3.33)$$

uz

$$\begin{aligned}
 \zeta_{3,1} &= L \cos(q_5) - 2d_3 \sin(q_5), \\
 \zeta_{3,2} &= [2d_3 \cos(q_5) - 2d_3 + 2d_2 \cos(q_3) - 2d_2 + L \sin(q_5) + L \sin(q_3)]. \quad (3.34)
 \end{aligned}$$

Iz jednadžbi (3.29)-(3.34) zaključuje se da sprega sustava ovisi o generaliziranim koordinatama svih podsustava.

### 3.1.7. Prostor stanja

Zapis dinamike sustava u obliku diferencijalnih jednadžbi prvog reda naziva se prostor stanja, a ideja je zapisati dinamiku cijelog sustava u matričnom zapisu.

Sustav jednadžbi (3.25) može se u globalnom obliku zapisati kao

$$\mathcal{M}(\mathbf{Q})\ddot{\mathbf{Q}} + \mathcal{C}(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}})\dot{\mathbf{Q}} + \mathcal{G}(\mathbf{Q}) + \mathcal{F}\dot{\mathbf{Q}} + \mathcal{Z}(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}) = \boldsymbol{\varepsilon}_M \mathbf{u}_a, \quad (3.35)$$

gdje su

$$\begin{aligned}
 \mathbf{Q} &= \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_2 \\ \mathbf{q}_3 \end{bmatrix}, \mathbf{U}_a = \begin{bmatrix} U_{a1} \\ U_{a2} \\ U_{a3} \end{bmatrix}, \\
 \mathbf{E}_M &= \begin{bmatrix} e_2 \frac{K_t}{R_{apr}} & 0 & 0 \\ 0 & e_2 \frac{K_t}{R_{apr}} & 0 \\ 0 & 0 & e_2 \frac{K_t}{R_{apr}} \end{bmatrix}, \\
 \mathcal{M}(\mathbf{Q}) &= \begin{bmatrix} M_1(\mathbf{q}_1) & 0 & 0 \\ 0 & M_2(\mathbf{q}_2) & 0 \\ 0 & 0 & M_3(\mathbf{q}_3) \end{bmatrix}, \\
 \mathcal{C}(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}) &= \begin{bmatrix} C_1(\mathbf{q}_1, \dot{\mathbf{q}}_1) & 0 & 0 \\ 0 & C_2(\mathbf{q}_2, \dot{\mathbf{q}}_2) & 0 \\ 0 & 0 & C_3(\mathbf{q}_3, \dot{\mathbf{q}}_3) \end{bmatrix}, \\
 \mathcal{G}(\mathbf{Q}) &= \begin{bmatrix} \mathbf{g}_1(\mathbf{q}_1) \\ \mathbf{g}_2(\mathbf{q}_2) \\ \mathbf{g}_3(\mathbf{q}_3) \end{bmatrix}, \mathcal{F} = \begin{bmatrix} \Phi_1 & 0 & 0 \\ 0 & \Phi_2 & 0 \\ 0 & 0 & \Phi_3 \end{bmatrix}, \mathcal{Z}(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}) = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \\ \mathbf{Z}_2(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \\ \mathbf{Z}_3(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \end{bmatrix}. \quad (3.36)
 \end{aligned}$$

Uvođenjem vektora stanja kao

$$\mathbf{x} = [q_1 \dots q_6 \dot{q}_1 \dots \dot{q}_6]^T = [\mathbf{Q}^T \dot{\mathbf{Q}}^T]^T, \quad (3.37)$$

i vektora upravljanja  $\mathbf{u} = \mathbf{U}_a$ , sustav (3.35) se može zapisati u standardni nelinearni afin prostor stanja kao

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}) + B_1(\mathbf{x})\mathbf{u}, \quad (3.38)$$

gdje su

$$\begin{aligned}
 f(\mathbf{x}) &= \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{Q}} \\ -\mathcal{M}^{-1}(\mathbf{Q}) \left( \mathcal{C}(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}) + \mathcal{G}(\mathbf{Q}) + \mathcal{F}\dot{\mathbf{Q}} + \mathcal{Z}(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}) \right) \end{bmatrix}, \\
 B_1(\mathbf{x}) &= \begin{bmatrix} 0 \\ \mathcal{M}^{-1}(\mathbf{Q})\mathbf{E}_M \end{bmatrix}. \quad (3.39)
 \end{aligned}$$

# 4 Simulacija dinamike sustava

U ovom poglavlju prikazat će se rezultati simulacije dinamike sustava te će se prokomentirati vrijednosti odziva za različite vrijednosti početnih uvjeta i ulaze napona u pokretačke motore kolica.

Simulacije dinamike sustava provedene su u MATLAB-u čiji je kod prikazan u prilogu rada. Za računanje derivacije korištena je MATLAB-ova funkcija `ode45` koja služi za rješavanje običnih diferencijalnih jednadžbi. Trajanje simulacija je 5 sekundi što je dovoljno vremena da se analizira dinamika svakog podsustava i utvrdi utjecaj elastičnih veza na vremenski odziv povezanih podsustava, a da pritom fizikalno nemogući slučajevi zbog otvorenog upravljačkog kruga ne utječu previše na razmatranja rezultata.

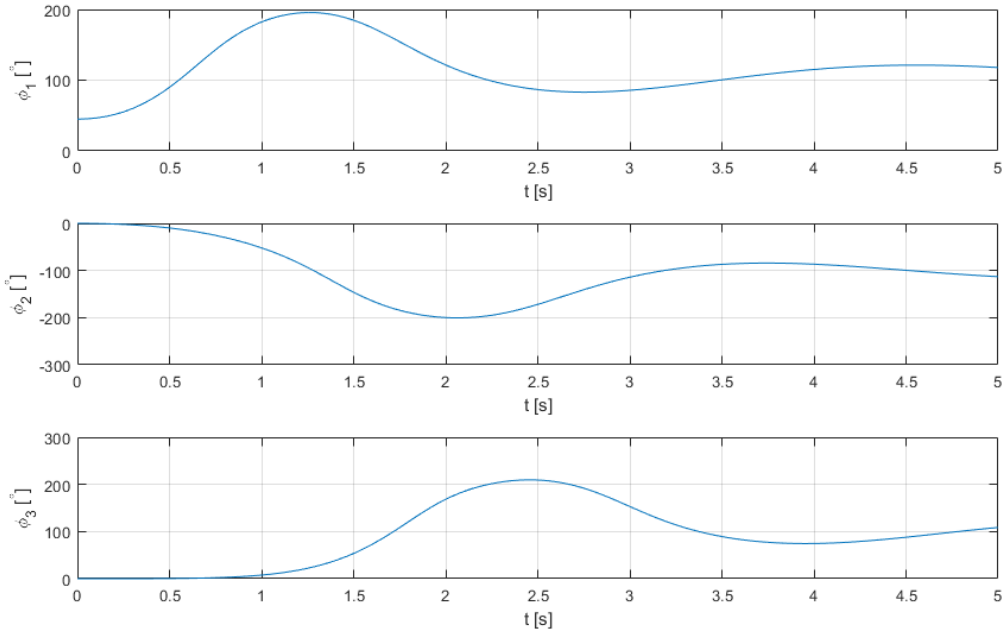
## 4.1. Slučaj 1

Kao početni uvjet uvršteno je za kut zakreta prve klackalice

$$\varphi_1(0) = \frac{\pi}{4}, \quad (4.1)$$

dok su vrijednosti napona na motorima jednake nuli u svrhu utvrđivanja utjecaja elastičnih veza na dinamiku i razlike u vremenskom odzivu međusobno povezanih podsustava.

Slika 4.1 pokazuje vrijednosti kuteva zakreta za početni uvjet naveden u jednadžbi (4.1), iz koje se može vidjeti da zbog inercije sustav 2, a još više sustav 3, imaju kasniji vremenski odziv i zato je za očekivati da se slične pojave mogu očekivati u svim idućim slučajevima simulacija. Zbog čisto matematičkog modela korištenog u simulaciji, vrijednosti kuteva zakreta imaju i fizikalno nevaljale vrijednosti, ali u svrhu analize ponašanja otvorenog kruga sustava, restrikcije na navedene vrijednosti nisu uvedene u

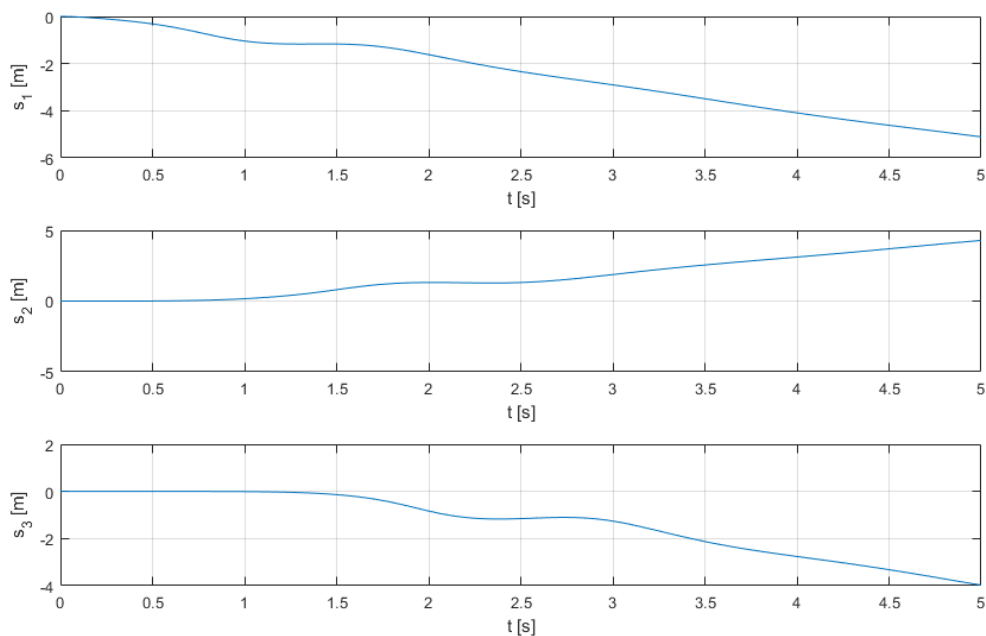


Slika 4.1: Kutevi zakreta za slučaj 1

MATLAB-ovoj implementaciji. Slika 4.2 prikazuje vremenski odziv pomaka kolica po klackalicama. Može se zaključiti da zbog početnog uvjeta otklona kuta klackalice 1, pomak kolica 1  $s_1(t)$  imaju najbrži odziv i stoga pridodaju brzini odziva otklona kuta klackalice 1, nadalje, pomak kolica 2 imaju brži i veći odziv u usporedbi sa kolicima trećeg podsustava zbog veza i inercija. Također, za vrijeme simulacije oko  $t = 0.5$  s, vidljiva je nagla promjena nagiba krivulje pomaka kolica 1 na slici 4.2 što zapravo odgovara vremenu značajnije rotacije klackalice 2 i pomaka kolica 2.

Valja primjetiti da, iako rezultati simulacija za vrijeme  $t > 0.65$  s nisu valjani za podsustav 1, oni odgovaraju za ostale podustave sve do  $t = 1.5$  s, a razlog je inercija i značajnija uloga elastičnih veza u međudjelovanju sustava 2 i 3 za vrijeme  $0.65 < t < 1.5$  s. Kod podsustava 2 zamjećuje se da se maksimalne vrijednosti nagiba krivulje zakreta kuta ostavaruju za vrijeme  $1 < t < 1.5$  s jer se vektor gravitacije sve više poklapa sa vektorom gibanja kolica 2 ubrzavajući ih na taj način.

Treća zamjedba tiče se usporedbe promjena vrijednosti kuta zakreta klackalice 1 i 3 za vremenski period  $1 < t < 1.5$  s. Dakle;  $\Delta\varphi_3 = \varphi_3(1.5) - \varphi_3(1) > \varphi_1(1.5) - \varphi_1(1)$ . U ovom vremenskom periodu elastične veze djeluju na podsustav 1 rotirajući



Slika 4.2: Pomaci kolica za slučaj 1

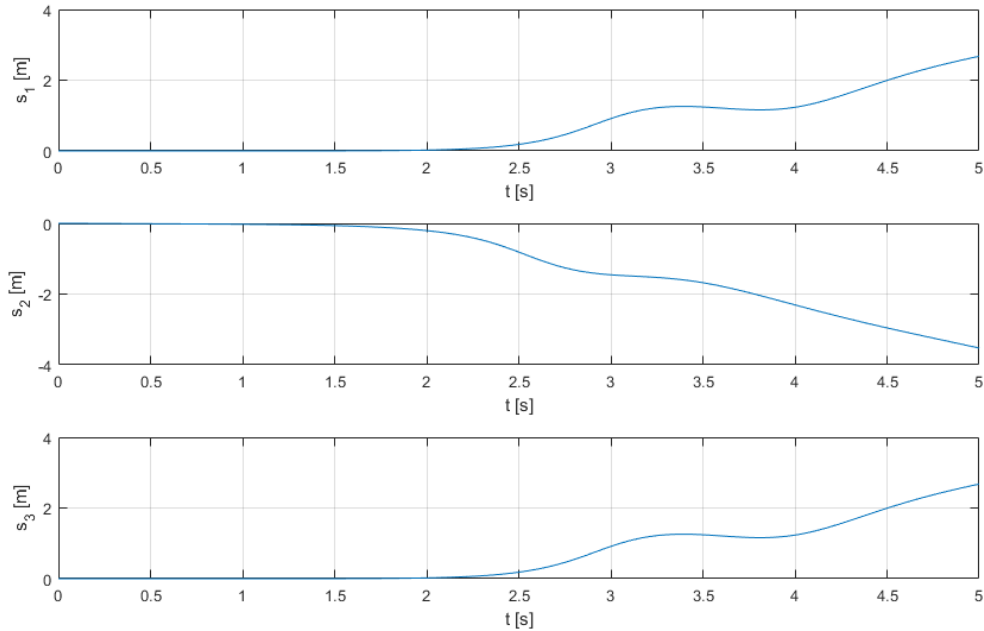
ga "u desno", ali pošto je polarni moment tromosti podsustava 3 manji u usporedbi sa podsustavom 1 zbog manjeg otklona kolica 3,  $s_3 \ll s_1$ , podsustav 3 se brže zakreće i time je promjena kuta zakreta čak  $45^\circ$  u samo pola sekunde, nakon toga, dodatno ubrzanje rotaciji podsustava 3 omogućeno je usljed djelovanja gravitacijske sile.

## 4.2. Slučaj 2

U ovom slučaju svi početni uvjeti jednaki su nuli, a uveden je konstantan napon na motoru kolica drugog podsustava sa vrijednošću

$$U_{a2} = -0.1 \text{ V.} \quad (4.2)$$

Očekivano, pomak drugih kolica  $s_2$  prikazan na slici 4.3 ima najbrži odziv. Razlog sve većem nagibu tangente na krivulju pomaka kolica 2 leži u tome što se zakretom klackalice 2 vektor gravitacije sve više podudara sa smjerom (vektorom) gibanja kolica 2 i time se ona ubrzavaju.

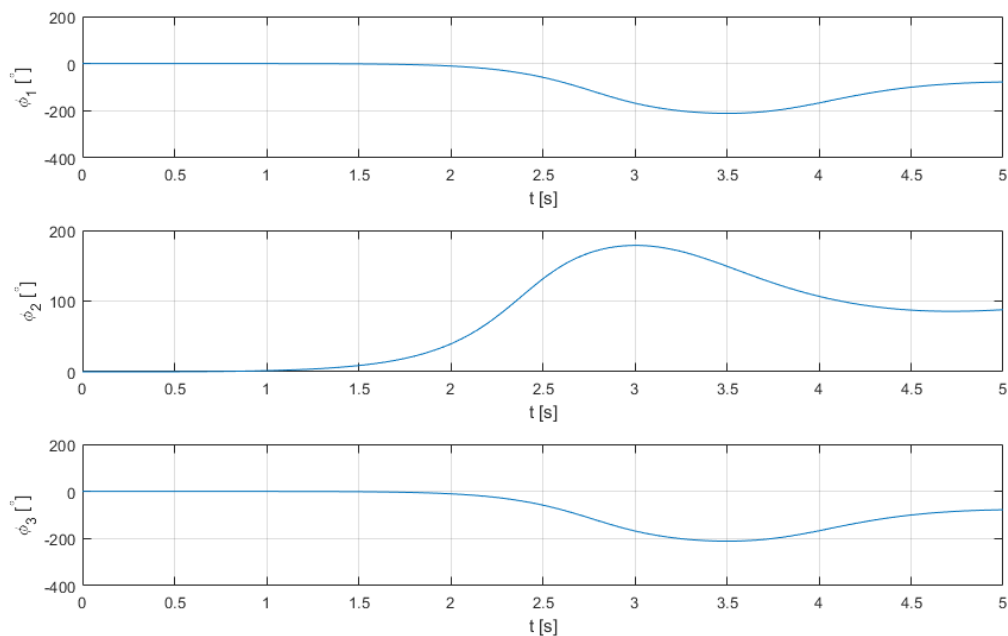


Slika 4.3: Pomaci kolica za slučaj 2

Razlog manjim oscilacijama u odzivima kuteva zakreta u usporedbi sa slučajem 1 leži u tome što elastične sile veza u ovom slučaju manje dolaze do izražaja.

Kao i u prethodnom slučaju, za podsustav s najbržom dinamikom, period valjanosti opisa dinamike ima najkraće trajanje, u ovom slučaju za podsustav 2 to je  $t < 2.3$  s, kada kolica dosegnu krajnju vrijednost mogućeg pomaka  $s_2 = -0.5L = -0.5$  m. Opis dinamike ostala dva podsustava valjan je za dodatnih pola sekunde, tj.  $t < 2.8$  s. Za vrijeme simulacije  $t = 2.8$  s, može se primjetiti da je druga derivacija krivulja pomaka kolica podsustava 1 i 3 jednaka nuli, a isto vrijedi i za krivulje kuteva zakreta za navedene podsustave, a razlog leži u tome što se u tom trenutku oslobađa elastična potencijalna energija veza nastojeći zakretati podsustave u suprotne smjerove a najveći utjecaj ima na drugi podsustav zbog najvećeg otklona što se može zaključiti iz slike 4.4.





Slika 4.4: Kutevi zakreta za slučaj 2

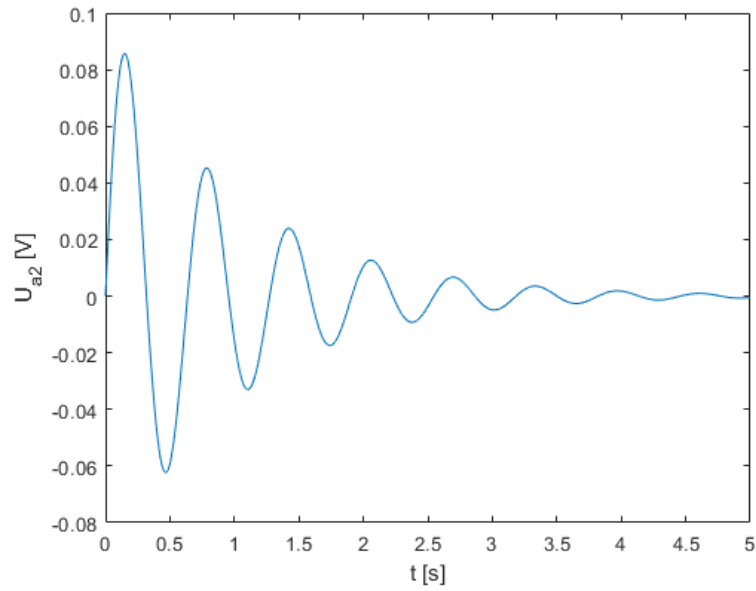
### 4.3. Slučaj 3

U ovom slučaju početni uvjeti također su jednaki nuli, ali je za ulaz dan prigušeni sinusni signal napona na motoru na kolicima 2 u obliku:

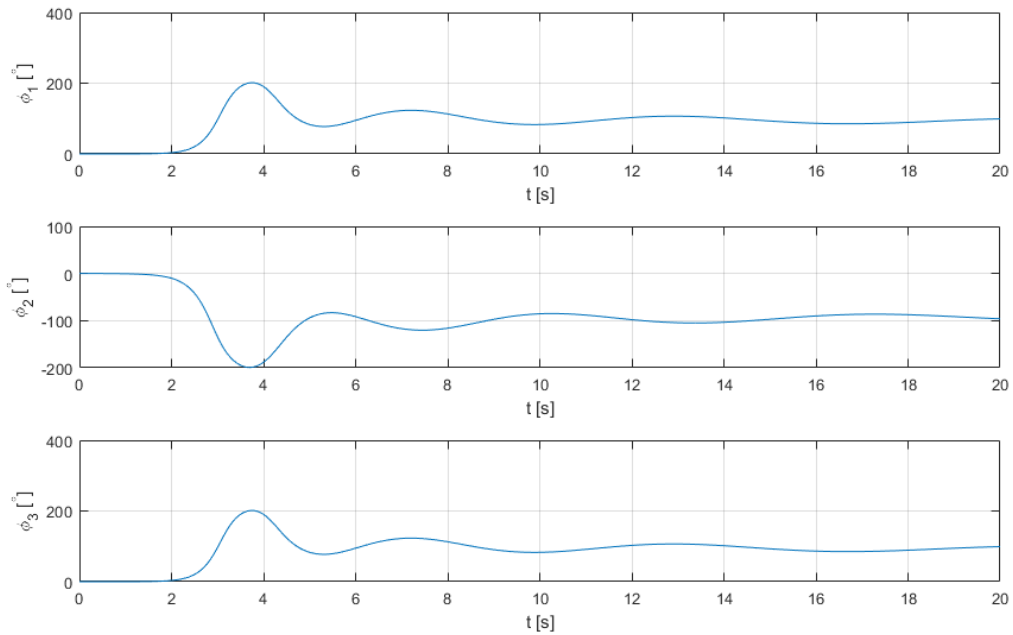
$$U_{a2}(t) = 0.1 \sin(\pi^2 t) e^{-t}, \quad (4.3)$$

čija je funkcija po vremenu prikazana na slici 4.5, a cilj je produljiti očekivano vrijeme nestabilnosti za pobuđeni podsustav koje iz prethodnih primjera se može pretpostaviti na otprilike  $t = 2.3$  s, s obzirom na ulazni napon amplitude samo 0.1 V. Također, vrijeme simulacije u ovom slučaju je u trajanju  $t = 20$  s kako bi se dodatno razmotrile oscilacije sustava.

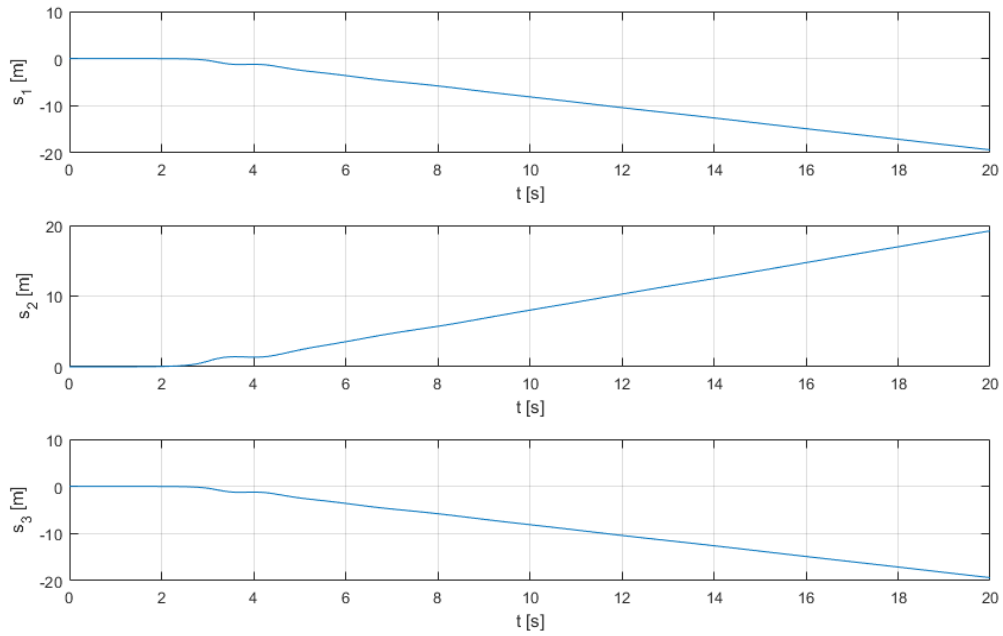
Na slici 4.6 prikazani su odzivi kuteva zakreta sva tri podsustava. Sada odzivi pobuđenog podsustava vjerno opisuju dinamiku realnog slučaja sve do  $t = 2.8$  s. Iz grafa funkcije ulaznog napona na slici 4.5, opravdana je težnja pomaka kolica 2 u desnu stranu podsustava, a vrijednosti najveće brzine promjene kuta zakreta klackalice 2 počinju u trenutku  $t = 2.5$  s kada se ulazni napon približava nuli, a vektor gravitacijskog ubrzanja sve više djeluje u smjeru gibanja kolica 2.



Slika 4.5: Ulazni napon na motoru kolica 2



Slika 4.6: Kutevi zakreta za slučaj 3



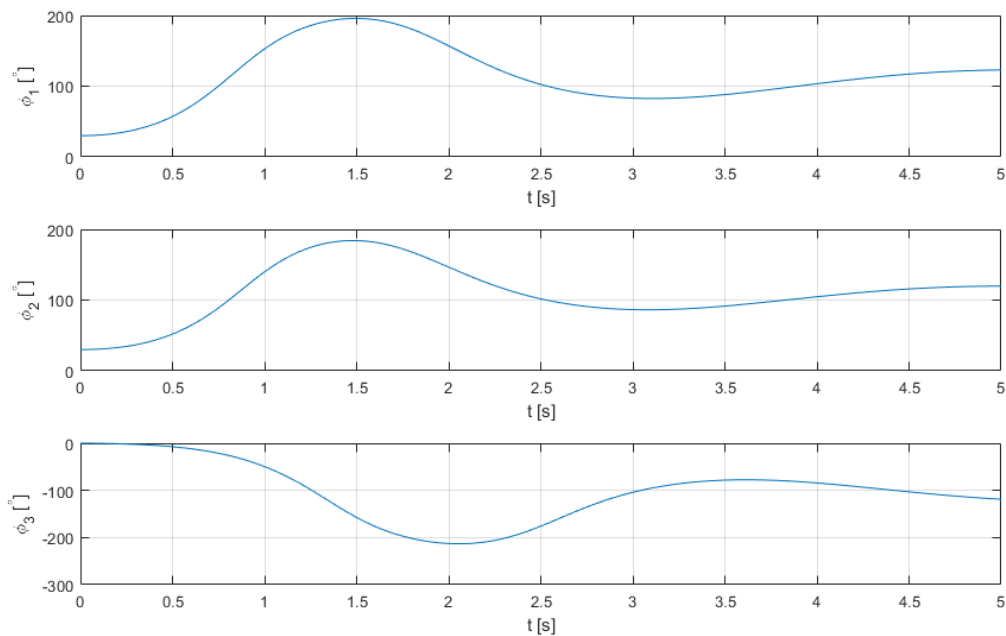
Slika 4.7: Pomaci kolica za slučaj 3

Nadalje, kao i u prethodnim slučajevima, točnost simulacije za nepobuđene sustave i sada je u kasnijim vremenskim razdobljima, a za opisani slučaj može se navesti da iznosi  $t = 3.1$  s.

## 4.4. Slučaj 4

Ovaj slučaj opisuje situaciju u kojoj bi se kolotura između prvog i drugog podsustava na lijevoj strani otklonila za neku vrijednost u smjeru prema dolje, a odgovara kutu zakreta prva dva podsustava za vrijednost

$$\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = \frac{\pi}{6}. \quad (4.4)$$

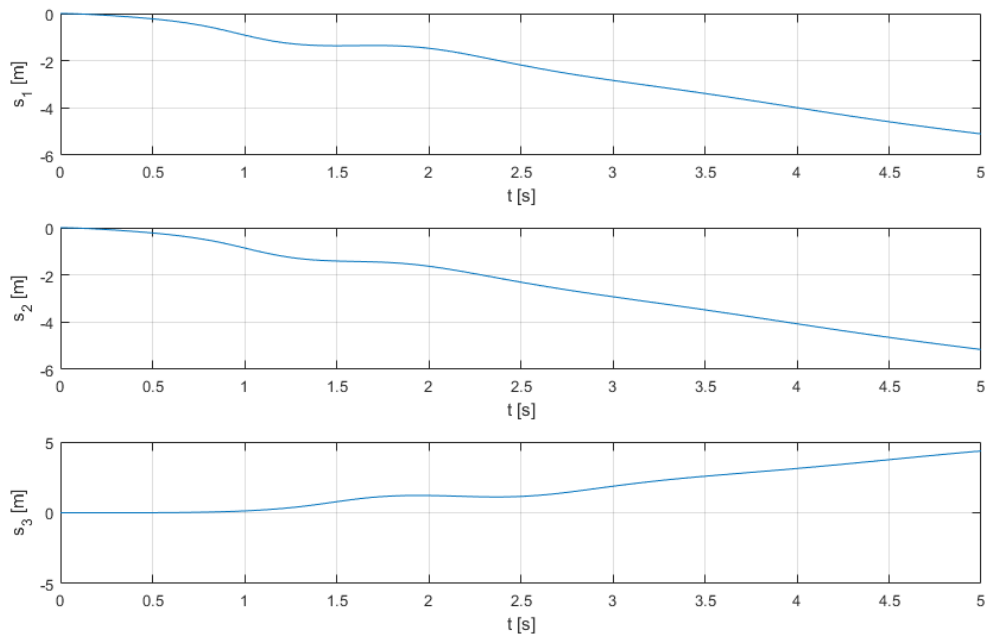


Slika 4.8: Kutevi zakreta u slučaju 4

U prvih pola sekunde simulacije otklon kuteva zakreta prvog i drugog podsustava značajniji je u odnosu na podsustav 3, a razlog je što zakretima prva dva podsustava pridodaju kolica pod utjecajem gravitacije, a i inercija samog podsustava 3 ima ulogu. Razlog minimalnog otklona kolica 3 u vremenu  $t = 0.5$  s leži u pojavljivanju statičkog trenja, a zanimljivo je da čak i za vrijednosti kuteva zakreta prva dva podsustava od  $90^\circ$ , uz odnos  $\varphi_1(1) > \varphi_2(1)$ , vrijednost kuta zakreta trećeg podsustava jedva da dostiže vrijednost od  $45^\circ$ .

Takoder, zanimljivo je i da je brzina promjene kuta zakreta podsustava 2 manja nego ona podsustava 1, a razlog je što je spojena na dva sustava kolotura s oprugama, a ni

spora dinamika trećeg podsustava ne pomaže u zakretanju sustava 2. Bitno je napomenuti da je ovakav slučaj donekle opisan u vrijednostima odmaka kolotura prikazanim na slici 3.2, uz razliku što je u ovom slučaju početni otklon koloture između zadnja dva podsustava jednak nula, ali to ne utječe na točnost navedenog odnosa te tri veličine u ovom slučaju.



Slika 4.9: Pomaci kolica u slučaju 4

# 5 | Primjena dualnih brojeva u optimizaciji

Robusnost upravljačkih zakona jedno je od najintenzivnije istraživanih problema iz teorije upravljanja nelinearnim dinamičkim sustavima. Jedna od metoda odnosi se na direktno optimiranje iznosa  $\mathcal{L}_2$  pojačanja gdje je  $\mathcal{L}_2$  norma (mjera) utjecaja neodređenosti na dinamiku nelinearnog dinamičkog sustava. U radu [6] se komponente vektora upravljanja i neodređenosti razmatraju kao aproksimacijske funkcije s linearnom ovisnošću o parametrima. Time se rješava minimaks optimizacijski problem pri čemu parametri aproksimacijskih funkcija upravljačkih varijabli minimiziraju  $\mathcal{L}_2$  pojačanje, dok parametri aproksimacijskih funkcija maksimiziraju  $\mathcal{L}_2$  pojačanje. Ograničenja na optimizacijski problem predstavlja dinamika sustava.

## 5.1. Formulacija optimizacijskog problema

Za afini nelinearni dinamički sustav u prostoru stanja u obliku:

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{G}_1(\mathbf{x})\mathbf{u} + \mathbf{G}_2(\mathbf{x})\mathbf{d}, \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \\ \mathbf{y} = \mathbf{x}, \\ \mathbf{z} = \mathbf{h}(\mathbf{x}) + \mathbf{L}(\mathbf{x})\mathbf{u} \end{cases} \quad (5.1)$$

gdje su  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  vektor stanja,  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$  vektor upravljanja,  $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^s$  vektor neodređenosti, a vektor izlaza je  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ . Vektor  $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^q$  je vektor izlaza nad kojim se upravlja. Kod optimalnog  $\mathcal{L}_2$  upravljanja mogu se varijable vektora upravljanja i neodređenosti aproksimirati funkcijama s linearnom ovisnošću o konačnom broju vremenski invarijantnih parametara. Računanje ovih parametara provodi se kombiniranjem subgradijentne,

Newtonove metode, Adamsove metode i automatskog diferenciranja u jedan algoritam. Komponente vektora upravljanja i neodređenosti daju se zapisati u obliku :

$$\hat{\mathbf{u}}_i(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n_\theta} p_j^i \theta_j^i(\mathbf{x}), \quad (5.2)$$

$$\hat{\mathbf{d}}_i = \sum_{j=1}^{n_\psi} r_j^i \psi_j^i(\mathbf{x}), \quad (5.3)$$

a za  $\theta_j^i(\mathbf{x})$  i  $\psi_j^i(\mathbf{x})$  vrijedi da su diferencijabilne po  $\mathbf{x}$ . A početni uvjeti jednaki su nula za  $\mathbf{x} = 0$ . Također,  $p_j^i$  i  $r_j^i$  su realne konstante. Matrični zapis jednadžbi (5.2) ima oblik

$$\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = \Theta(\mathbf{x})\boldsymbol{\pi}, \quad (5.4)$$

$$\hat{\mathbf{d}}(\mathbf{x}) = \Psi(\mathbf{x})\boldsymbol{\rho}, \quad (5.5)$$

gdje su

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\pi} &= [\mathbf{p}^1 \ \mathbf{p}^2 \ \dots \ \mathbf{p}^m]^T \\ \boldsymbol{\rho} &= [\mathbf{r}^1 \ \mathbf{r}^2 \ \dots \ \mathbf{r}^s]^T \\ \mathbf{p}^i &= [p_1^i \ p_2^i \ \dots \ p_{n_\theta}^i]^T \\ \mathbf{r}^i &= [r_1^i \ r_2^i \ \dots \ r_{n_\psi}^i]^T, \end{aligned} \quad (5.6)$$

a  $\Theta(\mathbf{x})$  i  $\Psi(\mathbf{x})$  dijagonalne matrice sastavljene od članova  $\theta^i(\mathbf{x})$  i  $\psi^i(\mathbf{x})$ , respektivno.

U minimax optimalnom upravljanju nastoje se odrediti parametri  $\boldsymbol{\pi}$  i  $\boldsymbol{\rho}$  uz sljedeći optimizacijski problem:

$$\lambda^*(\mathbf{x}_0) = \min_{\boldsymbol{\pi}} \max_{\boldsymbol{\rho}} \left\{ \frac{\|\mathbf{h}(\mathbf{x})\|_{\mathcal{L}_2}^2 + \|\Theta(\mathbf{x})\boldsymbol{\pi}\|_{\mathcal{L}_2}^2 - \beta(\mathbf{x}_0)}{\|\Psi(\mathbf{x})\boldsymbol{\rho}\|_{\mathcal{L}_2}^2} \right\}, \quad (5.7)$$

uz ograničenje dinamike sustava:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{G}_1(\mathbf{x})\Theta(\mathbf{x})\boldsymbol{\pi} + \mathbf{G}_2(\mathbf{x})\Psi(\mathbf{x})\boldsymbol{\rho}, \quad (5.8)$$

pri čemu je minimalno  $\mathcal{L}_2$  pojačanje jednako  $\gamma^* = \sqrt{\lambda^*(\mathbf{x}_0)}$ . Iz jednadžbe (5.8) uzima se da su parametri  $\boldsymbol{\pi}$ ,  $\boldsymbol{\rho}$  i vektor stanja sustava  $\mathbf{x}$  povezani preko dinamike sustava, što je potrebno za rekurzivno računanje gradijenata i Hessijana.

Transformacijom izraza (5.7) iz klase razlomačkih optimizacijskih problema u klasu parametarskih optimizacijskih problema postavlja se nova formulacija minimaks optimizacijskog problema:

$$J_{\mu_k}^* = \min_{\boldsymbol{\pi}} \max_{\boldsymbol{\rho}} \left\{ \|\mathbf{h}(\mathbf{x})\|_{\mathcal{L}_2}^2 + \|\Theta(\mathbf{x})\boldsymbol{\pi}\|_{\mathcal{L}_2}^2 - \mu_k \|\Psi(\mathbf{x})\boldsymbol{\rho}\|_{\mathcal{L}_2}^2 \right\} \quad (5.9)$$

## 5.2. Newtonova metoda

Ulaz u algoritam za računanje sedlaste točke Newtonovom metodom je vektor

$$\boldsymbol{\xi}_0 = [\boldsymbol{\pi}_0^T \boldsymbol{\rho}_0^T]^T \in \mathbb{R}^{n_\xi}, \epsilon \in \mathbb{R}_+. \quad (5.10)$$

Izlaz iz algoritma su optimalne vrijednosti parametara  $\boldsymbol{\pi}^*$ ,  $\boldsymbol{\rho}^*$ .

1. Postaviti  $j \leftarrow 0$ .
2. Odrediti vektor smjera traženja  $\mathbf{s}_j$  rješavanjem sustava linearnih jednadžbi

$$\nabla_\zeta \mathcal{J}(\boldsymbol{\xi}_j) \mathbf{s}_j = -\mathcal{J}(\boldsymbol{\xi}_j). \quad (5.11)$$

3. Odrediti korak konvergencije  $\eta_j > 0$  primjenom strategije pretraživanja po pravcu koja zadovoljava Wolfeove uvjete.
4. Izračunati

$$\boldsymbol{\xi}_{j+1} = \boldsymbol{\xi}_j + \eta_j \mathbf{s}_j. \quad (5.12)$$

5. Ako je kriterij  $\|\mathcal{J}(\boldsymbol{\xi}_j)\|_\infty \leq \epsilon$  ispunjen, tada završiti proces, inače postaviti  $j \leftarrow j + 1$  i vratiti se na korak 2.

U izrazu (5.11) imamo:

$$\boldsymbol{\xi} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\pi} \\ \boldsymbol{\rho} \end{bmatrix}, \mathcal{J}(\boldsymbol{\xi}) = [\nabla_\pi J \quad -\nabla_\rho J]^T, \nabla_\xi \mathcal{J}(\zeta) = \begin{bmatrix} \nabla_\pi^2 J & \nabla_{\pi,\rho}^2 J \\ -\nabla_{\rho,\pi}^2 J & -\nabla_\rho^2 J \end{bmatrix}, \quad (5.13)$$

$$J = \|\mathbf{h}(\mathbf{x})\|_{\mathcal{L}_2}^2 + \|\boldsymbol{\Theta}(\mathbf{x})\boldsymbol{\pi}\|_{\mathcal{L}_2}^2 - \mu \|\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{x})\boldsymbol{\rho}\|_{\mathcal{L}_2}^2, \quad (5.14)$$

pri čemu su:  $\nabla_\pi J \in \mathbb{R}^{n_\pi}$ ,  $\nabla_\rho J \in \mathbb{R}^{n_\rho}$ ,  $\nabla_\pi^2 J \in \mathbb{R}^{n_\pi \times n_\pi}$ ,  $\nabla_\rho^2 J \in \mathbb{R}^{n_\rho \times n_\rho}$ ,  $\nabla_{\pi,\rho}^2 J \in \mathbb{R}^{n_\pi \times n_\rho}$ ,  $\nabla_{\rho,\pi}^2 J \in \mathbb{R}^{n_\rho \times n_\pi}$ ,  $n_\pi = m \cdot n_\theta$ ,  $n_\rho = s \cdot n_\zeta$ . Kako bi se osigurala konvergencija opisane metode iz bilo koje početne točke koristi se korak konvergenije tako da su zadovoljeni uvjeti silaska i uvjet zakrivljenosti poznati po zajedničkim nazivom Wolfeovi uvjeti.



### 5.3. Računanje matrica Jacobijan i Hessijan metodom dualnih i hiper-dualnih brojeva

Izrazi u jednadžbi (5.13) mogu se računati metodama konačnih diferencija, metodom kompleksne varijable ili metodom automatskog diferenciranja, a uz to i metodom hiper-dualnih brojeva. Radi jednostavnosti, može se navesti primjer računanja elemenata matrica  $\nabla_x \mathbf{f}(\mathbf{x})$  u  $i$ -tom vremenskom trenutku

$$\frac{\partial f_k(\mathbf{x}(i))}{\partial x_j(i)} = \nabla_x f_k(\mathbf{x}(i)) \cdot \mathbf{e}_j, \quad j, k = 1, 2, \dots, n, \quad (5.15)$$

gdje je  $\mathbf{e}_j$  jedinični vektor, i još za računanje matrice  $\nabla_x \text{vec}(\nabla_x \mathbf{f}(\mathbf{x}))$  u  $i$ -tom vremenskom trenutku

$$\frac{\partial^2 f_k(\mathbf{x}(i))}{\partial x_j(i) \partial x_l(i)} = \frac{\partial}{\partial x_j(i)} [f_{k,x_l}(\mathbf{x}(i))], \quad j, k = 1, 2, \dots, n. \quad (5.16)$$

#### 5.3.1. Kvaternioni i hiper-dualni brojevi u numeričkom računanju derivacija

Kvaternioni su dobro poznata vrsta višedimenzionalne ekstenzije generaliziranih kompleksnih brojeva. Sačinjeni su od jednog realnog dijela i tri imaginarna dijela,

$$q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k, \quad (5.17)$$

sa svojstvom imaginarnih jedinica  $i^2 = j^2 = k^2 = -1$  i  $ijk = -1$ . Razvojem Taylorovog reda funkcije realne varijable s proizvoljnim korakom  $d$  može se formulirati aproksimacija druge derivacije funkcije pomoću kvaterniona:

$$f(x + d) = f(x) + df'(x) + \frac{1}{2!} d^2 f''(x) + \frac{1}{3!} d^3 f'''(x) + \dots \quad (5.18)$$

Proširivanjem koraka  $d$  na oblik kvaterniona na način  $d = h_1 i + h_2 j + 0k$ , može se iz Taylorovog razvoja funkcije (5.18) zaključiti da će prva derivacija funkcije biti vodeći član uz imaginarne jedinice. Ako  $d^2$  ima uz jedinicu  $k$  član različit on nule, može druga derivacija funkcije biti vodeći član uz  $k$ . Međutim zbog pravila množenja kvaterniona (5.17), množenje kvaterniona nije komutativno, to jest,  $ij = k$  ali  $ji = -k$  i time se izrazi uz  $k$  krate u  $d^2$ , što znači da je  $d^2$  čisti realni broj a druga derivacija funkcije

nije vodeći član razvoja Taylorovog reda zbog člana  $f(x)$ . Formula za računanje druge derivacije može se napisati kao

$$f''(x) = \frac{2(f(x) - \operatorname{Re}[f(x + h_1i + h_2j + 0k)])}{h_1^2 + h_2^2} + O(h_1^2 + h_2^2), \quad (5.19)$$

ali je ovakva aproksimacija podložna greškama kraćenja, što u praktičnim primjenama nije poželjno svojstvo.

Time se uvodi potreba za uvođenjem novog sustava brojeva koji bi mogao zadržati kao član uz treću imaginarnu jedinicu vrijednost druge derivacije funkcije. Kao prvo, očito je da bi množenje trebalo biti komutativno u definiciji pravila množenja novih imaginarnih jedinica, a da u razvoju Taylorovog reda se izbjegnu greške kraćenja u najčešćim slučajevima inženjerske primjene računanja prve i druge derivacije funkcije. Ovakvim razmišljanjem uvode se hiper-dualni brojevi sa svojstvom množenja

$$\epsilon_1^2 = \epsilon_2^2 = (\epsilon_1\epsilon_2) = 0, \quad (5.20)$$

Uz svosjstvo:

$$\epsilon_1\epsilon_2 \neq 0. \quad (5.21)$$

u Taylorovom razvoju funkcije  $f(x)$  (5.18) može se sada sa hiper-dualnim korakom  $h_1\epsilon_1 + h_2\epsilon_2 + 0\epsilon_1\epsilon_2$  analizirati vrijednosti potencija kompleksnog koraka  $d^i$

$$d = h_1\epsilon_1 + h_2\epsilon_2 + 0\epsilon_1\epsilon_2, \quad (5.22)$$

$$d^2 = h_1^2\epsilon_1^2 + h_2^2\epsilon_2^2 + 2h_1h_2\epsilon_1\epsilon_2, \quad (5.23)$$

$$d^3 = h_1^3\epsilon_1^3 + 3h_1h_2^2\epsilon_1\epsilon_2^2 + 3h_1^2h_2\epsilon_1^2\epsilon_2 + h_2^3\epsilon_2^3, \quad (5.24)$$

a iz pravila množenja hiper-dualnih brojeva može se vidjeti da svi izrazi koji uključuju potenciju hiper-dualne jedinice na potenciju 2 ili više iščezavaju, što znači da nema greški kraćenja, to jest mogu se efikasno izdvojiti vrijednosti prve i druge derivacije funkcije kao članove uz različite dualne jedinice.

Točnost računanja derivacija metodom hiper-dualnih brojeva prikazana je u radu [16] gdje se metoda ispitala na jednostavnoj analitičkoj funkciji zadanoj kao

$$f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{\sin(x)^3 + \cos(x)^3}}. \quad (5.25)$$

Analitički oblik prve derivacije funkcije je

$$f'(x) = \frac{e^x(3 \cos(x) + 5 \cos(3x) + 9 \sin(x) + \sin(3x))}{8(\sin^3(x) + \cos^3(x))^{\frac{3}{2}}}, \quad (5.26)$$

a druga derivacija funkcije je

$$f''(x) = \left( \frac{e^x}{64(\sin^3(x) + \cos^3(x))^{\frac{5}{2}}} \right) (130 - 12 \cos(2x) + 30 \cos(4x) + 12 \cos(6x) - 111 \sin(2x) + 48 \cos(4x) + 5 \sin(6x)). \quad (5.27)$$

Pri računanju derivacija funkcije metodom hiper-dualnih brojeva slijedi iduća procedura:

$$\begin{aligned} t_0 &= x \\ t_1 &= e^{t_0} = e^x \\ t_2 &= \sin(t_0) = \sin(x) \\ t_3 &= t_2^3 = \sin^3(x) \\ t_4 &= \cos(t_0) = \cos(x) \\ t_5 &= t_4^3 = \cos^3(x) \\ t_6 &= t_3 + t_5 = (\sin^3(x) + \cos^3(x)) \\ t_7 &= t_6^{-0.5} = (\sin^3(x) + \cos^3(x))^{-0.5} \\ t_8 &= t_1 \cdot t_7 = \frac{e^x}{\sqrt{\sin^3(x) + \cos^3(x)}}. \end{aligned} \quad (5.28)$$

Ovakva procedura uz primjenu hiper-dualnih brojeva daje iduće rezultate:

$$\begin{aligned}
 t_0 &= x \\
 &= x + h_1\epsilon_1 + h_2\epsilon_2 + 0\epsilon_1\epsilon_2 \\
 &= 1.5 + 1\epsilon_1 + 1\epsilon_2 + 0\epsilon_1\epsilon_2 \\
 t_1 &= e^{t_0} \\
 &= e^x + h_1e^x\epsilon_1 + h_2e^x\epsilon_2 + h_1h_2e^x\epsilon_1\epsilon_2 \\
 &= 4.4817 + 4.4817\epsilon_1 + 4.4817\epsilon_2 + 4.4817\epsilon_1\epsilon_2 \\
 t_2 &= \sin(t_0) \\
 &= \sin(x) + h_1\cos(x)\epsilon_1 + h_2\cos(x)\epsilon_2 - h_1h_2\sin(x)\epsilon_1\epsilon_2 \\
 t_3 &= t_2^3 \\
 &= \sin^3(x) + 3h_1\cos(x)\sin^2(x)\epsilon_1 + 3h_2\cos(x)\sin^2(x)\epsilon_2 - \frac{3}{4}h_1h_2(\sin(x) - 3\sin(3x))\epsilon_1\epsilon_2 \\
 &= 0.9925 + 0.21115\epsilon_1 + 0.21115\epsilon_2 - 2.9476\epsilon_1\epsilon_2 \\
 t_4 &= \cos(t_0) \\
 &= \cos(x) - h_1\sin(x)\epsilon_1 - h_2\sin(x)\epsilon_2 - h_1h_2\cos(x)\epsilon_1\epsilon_2 \\
 &= 0.070737 - 0.99749\epsilon_1 - 0.99749\epsilon_2 - 0.070737\epsilon_1\epsilon_2 \\
 t_5 &= t_4^3 \\
 &= \cos^3(x) - 3h_1\cos^2(x)\sin(x)\epsilon_1 - 3h_2\cos^2(x)\sin(x)\epsilon_2 - \frac{3}{4}h_1h_2(\cos(x) + 3\cos(3x))\epsilon_1\epsilon_2 \\
 &= 0.00035395 - 0.014974\epsilon_1 - 0.014974\epsilon_2 + 0.42124\epsilon_1\epsilon_2 \\
 t_6 &= t_3 + t_5 \\
 &= (\sin^3(x) + \cos^3(x)) + 3h_1\cos(x)\sin(x)(\sin(x) - \cos(x))\epsilon_1 + \\
 &\quad + 3h_2\cos(x)\sin(x)(\sin(x) - \cos(x))\epsilon_2 \\
 &\quad - \frac{3}{4}h_1h_2(\sin(x) - 3\sin(3x) + \cos(x) + 3\cos(3x))\epsilon_1 \\
 &= 0.99286 + 0.19618\epsilon_1 + 0.19618\epsilon_2 - 2.5263\epsilon_1\epsilon_2 \\
 t_7 &= t_6^{-0.5} \\
 &= (\sin^3(x) + \cos^3(x))^{-\frac{1}{2}} - \frac{3}{2}h_1\frac{\cos(x)\sin(x)(\sin(x) - \cos(x))}{(\sin^3(x) + \cos^3(x))^{\frac{3}{2}}}\epsilon_1 - \\
 &\quad - \frac{3}{2}h_1\frac{\cos(x)\sin(x)(\sin(x) - \cos(x))}{(\sin^3(x) + \cos^3(x))^{\frac{3}{2}}}\epsilon_2 + \\
 &\quad + \frac{3}{64}h_1h_2\frac{(30 + 2\cos(4x) - 41\sin(2x) + 3\sin(6x))}{(\sin^3(x) + \cos^3(x))^{\frac{5}{2}}}\epsilon_1\epsilon_2 \\
 &= 1.0036 - 0.099148\epsilon_1 - 0.099148\epsilon_2 + 1.3062\epsilon_1\epsilon_2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
t_8 &= t_1 \cdot t_7 \\
&= \frac{e^x}{\sqrt{\sin^3(x) + \cos^3(x)}} + h_1 \frac{e^x(3 \cos(x) + 5 \cos(3x) + 9 \sin(x) + \sin 3x)}{8(\sin^3(x) + \cos^3(x))^{\frac{3}{2}}} \epsilon_1 \\
&+ h_2 \frac{e^x(3 \cos(x) + 5 \cos(3x) + 9 \sin(x) + \sin 3x)}{8(\sin^3(x) + \cos^3(x))^{\frac{3}{2}}} \epsilon_2 \\
&+ h_1 h_2 \left( \frac{e^x}{64(\sin^3(x) + \cos^3(x))^{\frac{5}{2}}} \right) (130 - 12 \cos(12x) + 30 \cos(4x) + 12 \cos(6x) \\
&- 111 \sin(2x) + 48 \sin(4x) + 5 \sin(6x)) \epsilon_1 \epsilon_2 \\
&= 4.4978 + 4.0534 \epsilon_1 + 4.0534 \epsilon_2 + 9.4631 \epsilon_1 \epsilon_2
\end{aligned} \tag{5.30}$$

Numerički rezultati prikazuju operacije koje se zapravo odvijaju prilikom računanja derivacija hiper-dualnim brojevima u MATLAB-u ili u C++. Ova metoda pokazala se superiornijom u odnosu na metodu konačnih diferencija ali i kompleksno koračnu metodu kada se ne uzimaju dovoljno mali koraci.

## 6 | Zaključak

U radu su provedeni izvodi jednadžbi dinamike nelinearnog međusobno povezanog elektromehaničkog sustava metodom dualnih brojeva. Metoda je pokazala da se dobiju identični rezultati energijskih izraza kao i u klasičnom pristupu. Dualni zapis omogućuje zapis samo tri dualne Lagrangeove jednadžbe za navedeni sustav za razliku od šest jednadžbi koje se dobiju klasičnim pristupom. Prilikom izvoda dinamike sustava važno je dosljedno označavati dualne i realne varijable čime se garantira točnost izvoda. Iako se primjena hiper-dualnih brojeva pokazala izrazito korisnom i intuitivnom u opisu kinematskih relacija, primjena ovog seta brojeva u opisu dinamike krutih tijela ostaje aktivno područje istraživanja. Mogući napretci uključuju formulaciju modela prostora stanja u dualnom zapisu kako bi se mogla iskoristiti svojstva automatskog diferenciranja dualnih brojeva.

U simulacijama dinamike sustava korišten je nelinearni model sustava. Globalni model prostora stanja sustava zapisan je u blokovskom načinu dodavanjem matrica pripadajućih podsustava. Simulacijama na računalu zaključena je nestabilnost sustava, a vjernost prikazanih odziva za pobuđene podsustave je u redu nekoliko sekundi, dok za nepobuđene podsustave zbog inercija i elastičnih veza se to vrijeme ograničava na dodatnih par sekundi. Kao ulaz u sistem definiran je vektor ulaznih napona na pokretačke motore kolica. U jednom od slučajeva simulacija odmak kolica na trećem podsustavu pokazao je netipično ponašanje, a uzrok se može nalaziti u pojavljivanju statičkog trenja i zanemarenog trenja između vodilice i koloture u ovom radu.

Konačno, dana je usporedba metode računanja derivacija funkcija između kvaterniona i hiper-dualnih brojeva. Pokazano je da zbog specijalnog svojstva množenja hiper-

dualnih brojeva ne postoje greške kraćenja, a implementacija metode bazira se uglavnom na preopterećivanju operatora (*engl. operator overloading*) što znači redefiniranje osnovnih operatora poput  $+$ ,  $-$ ,  $*$ ,  $/$  za rad s vektorskim varijablama. Kao moguću motivaciju za daljni rad s hiper-dualnim brojevima navodi se također potreba računanja derivacija vektorskih funkcija u području optimizacije, gdje je efikasnost računanja derivacija od velike važnosti.

# A | Prvi prilog: MATLAB skripte

Definiranje parametara sustava

```
L = 1.0;
```

```
% SEESAW 1
```

```
a1 = 0.116;
```

```
d1 = 0.095;
```

```
c1 = 0.180;
```

```
mA1 = 4.84;
```

```
mC1 = 0.6;
```

```
J1 = 0.68;
```

```
% SEESAW 2
```

```
a2 = 0.116;
```

```
d2 = 0.095;
```

```
c2 = 0.180;
```

```
mA2 = 4.84;
```

```
mC2 = 0.6;
```

```
J2 = 0.68;
```

```
% SEESAW 3
```

```
a3 = 0.116;
```

```
d3 = 0.095;
```



```
c3 = 0.180;
```

```
mA3 = 4.84;
```

```
mC3 = 0.6;
```

```
J3 = 0.68;
```

```
% MOTORS
```

```
Ke = 0.0077;
```

```
Kt = 0.0077;
```

```
Ra = 2.6;
```

```
% SPRINGS
```

```
k = 5.0;
```

```
LR12su = 0.25;
```

```
LR12sd = 0.25;
```

```
LR120u = 0.10;
```

```
LR120d = 0.10;
```

```
LR23su = 0.25;
```

```
LR23sd = 0.25;
```

```
LR230u = 0.10;
```

```
LR230d = 0.10;
```

```
LL12su = 0.25;
```

```
LL12sd = 0.25;
```

```
LL120u = 0.10;
```

```
LL120d = 0.10;
```

```
LL23su = 0.25;
```

```
LL23sd = 0.25;

LL230u = 0.10;
LL230d = 0.10;

g = 9.81; % gravity acceleration

r = 0.0077; % radius of pinion

kappa = 0.1; % coefficient of the viscous damping in the joint

p = 1/3.7; % radius of pulleys

Model sustava
function dx = ODEseesaw(t, x)

parameters_values

q1=x(1);
q2=x(2); q3=x(3); q4=x(4); q5=x(5); q6=x(6);
dq1=x(7); dq2=x(8); dq3=x(9); dq4=x(10); dq5=x(11); dq6=x(12);

% INERTIA MATRIX
M111 = mC1*c1^2 + mC1*q2^2 + J1;
M112 = -mC1*c1;
M121 = M112;
M122 = mC1;
M1 = [M111 M112;M121 M122];
M211 = mC2*c2^2 + mC2*q4^2 + J2;
M212 = -mC2*c2;
M221 = M212;
M222 = mC2;
M2 = [M211 M212;M221 M222];
```

```

M311 = mC3*c3^2 + mC3*q6^2 + J3;
M312 = -mC3*c3;
M321 = M312;
M322 = mC3;
M3 = [M311 M312;M321 M322];

% CORIOLIS VECTOR
C11 = 2*mC1*q2*dq2*dq1;
C12 = -mC1*q2*dq1^2 + (Kt*Ke/Ra/(p^2)/(r^2))*dq2;
C1 = [C11;C12];
C21 = 2*mC2*q4*dq4*dq3;
C22 = -mC2*q4*dq3^2 + (Kt*Ke/Ra/(p^2)/(r^2))*dq4;
C2 = [C21;C22];
C31 = 2*mC3*q6*dq6*dq5;
C32 = -mC3*q6*dq5^2 + (Kt*Ke/Ra/(p^2)/(r^2))*dq6;
C3 = [C31;C32];
g11 = -g*a1*mA1*sin(q1) + g*mC1*(q2*cos(q1) - c1*sin(q1));
g12 = mC1*g*sin(q1);
g1 = [g11;g12];
g21 = -g*a2*mA2*sin(q3) + g*mC2*(q4*cos(q3) - c2*sin(q3));
g22 = mC2*g*sin(q3);
g2 = [g21;g22];
g31 = -g*a3*mA3*sin(q5) + g*mC3*(q6*cos(q5) - c3*sin(q5));
g32 = mC3*g*sin(q5);
g3 = [g31;g32];

% VISCOUS DAMPING
Phi1 = [kappa*dq1;0];
Phi2 = [kappa*dq3;0];
Phi3 = [kappa*dq5;0];

% INTERCONNECTION
zeta11 = L*cos(q1) - 2*d1*sin(q1);

```

```

zeta12 = 2*d1*cos(q1) - 2*d1 + 2*d2*cos(q3) - 2*d2 + L*sin(q1) + L*sin(q3)
z1 = k*zeta11*(zeta12 + LL12sd + LL120u + LR12sd + LR120u -...
LL120d - LL12su - LR120d - LR12su)/4;
z2 = k*(4*d2*L*cos(q3)^2 + L*cos(q3)*...
(-2*d1 - 4*d2 - 2*d3 -...
LL120d + LL120u + LL12sd - LL12su -...
LL230d + LL230u + LL23sd - LL23su -...
LR120d + LR120u + LR12sd - LR12su -...
LR230d + LR230u + LR23sd - LR23su +...
2*d1*cos(q1) + 2*d3*cos(q5) +...
L*sin(q1) + L*sin(q5)) -...
2*sin(q3)*(-2*d1*d2 - 4*d2^2 - 2*d2*d3 + d2*...
(-LL120d + LL120u + LL12sd - LL12su -...
LL230d + LL230u + LL23sd - LL23su -...
LR120d + LR120u + LR12sd - LR12su -...
LR230d + LR230u + LR23sd - LR23su) +...
2*d1*d2*cos(q1) + (4*d2^2 - L^2)*cos(q3) + ...
2*d2*d3*cos(q5) + d2*L*sin(q1) + ...
2*d2*L*sin(q3) + d2*L*sin(q5)))/4;
zeta31 = L*cos(q5) - 2*d3*sin(q5);
zeta32 = 2*d3*cos(q5) - 2*d3 + 2*d2*cos(q3) - 2*d2 +...
L*sin(q5) + L*sin(q3);
z3 = k*zeta31*(zeta32 + LL23sd + LL230u + LR23sd + LR230u -...
LL230d - LL23su - LR230d - LR23su)/4;
Z1 = [z1;0];
Z2 = [z2;0];
Z3 = [z3;0];

% NONLINEAR STATE SPACE
M = blkdiag(M1,M2,M3);
C = [C1;C2;C3];
G = [g1;g2;g3];
F = [Phi1;Phi2;Phi3];

```

```
Z = [Z1;Z2;Z3];
```

```
cff = Kt/Ra/p/r;
```

```
e1 = [1;0]; e2 = [0;1]*cff;
```

```
EM = blkdiag(e2, e2, e2);
```

```
fx = [x(7:12);(-M^-1)*(C + G + F + Z)];
```

```
Bx1 = [zeros(6,3);(M^-1)*EM];
```

```
UM = [0;0;0];
```

```
dx = fx + Bx1*UM;
```

Rješavanje diferencijalne jednačbe sustava

```
clear all
```

```
close all
```

```
clc
```

```
t_0=0;
```

```
t_f=5;
```

```
x_0=[pi/6;0;pi/6;zeros(9,1)];
```

```
[T,X]=ode45(@ODEseesaw,[t_0 t_f],x_0);
```

# Literatura

- [1] A. Cohen and M. Shoham. Principle of transference – an extension to hyper-dual numbers. *Mechanism and Machine Theory*, 125:101–110, 2018.
- [2] V. Santibáñez Kelly, R. and J. A. Loría Perez. *Control of robot manipulators in joint space*. Springer Science & Business Media, 2005.
- [3] M. Lobrović, A. Jokić, V. Milić, T. Žilić, M. Jokić, J. Kasać, Z. Domitran, and M. Crneković. A case study in distributed control: Elastically interconnected seesaw-cart systems. In *2017 25th Mediterranean Conference on Control and Automation (MED)*, pages 1159–1164, 2017.
- [4] A. Jokic, V. Milic, M. Jokic, J. Kasac, M. Crnekovic, T. Zilic, and M. Lobrovic. *Control of Spatially Distributed Dynamical Systems, Laboratory setup*. Internal report, University of Zagreb, 2017.
- [5] V. Brodsky and M. Shoham. Dual numbers representation of rigid body dynamics. *Mechanism and Machine Theory*, 34(5):693–718, 1999.
- [6] V. Milić. *Minimaks optimalno upravljanje nelinearnim dinamičkim sustavima*. PhD thesis, 2015.
- [7] M. A. Clifford. Preliminary sketch of biquaternions. *Proceedings of the London Mathematical Society*, s1-4(1):381–395, 1871.
- [8] A.P. Kotelnikov. Screw calculus and some applications to geometry and mechanics. *Annals of the Imperial University of Kazan*, 24, 1895.

- [9] F. M. Dimentberg. The screw calculus and its applications in mechanics. Technical report, FOREIGN TECHNOLOGY DIV WRIGHT-PATTERSONAFB OH, 1968.
- [10] D.P. Chevallier and J. Lerbet. *Multi-Body Kinematics and Dynamics with Lie Groups*. Elsevier Science, 2017.
- [11] V. Brodsky and M. Shoham. The Dual Inertia Operator and Its Application to Robot Dynamics. *Journal of Mechanical Design*, 116(4):1089–1095, 12 1994.
- [12] J. Fike and J. Alonso. The development of hyper-dual numbers for exact second-derivative calculations. In *49th AIAA aerospace sciences meeting including the new horizons forum and aerospace exposition*, page 886, 2011.
- [13] A. Cohen and M. Shoham. Application of hyper-dual numbers to rigid bodies equations of motion. *Mechanism and Machine Theory*, 111:76–84, 2017.
- [14] A. Cohen and M. Shoham. Application of hyper-dual numbers to multibody kinematics. *Journal of Mechanisms and Robotics*, 8:011015, 2016.
- [15] D.P Chevallier. On the transference principle in kinematics: its various forms and limitations. *Mechanism and Machine Theory*, 31(1):57–76, 1996.
- [16] Jeffrey Alan Fike. *Multi-objective optimization using hyper-dual numbers*. Stanford university, 2013.