

# Numerička analiza dinamičkog ponašanja prostornog RRR manipulatora

---

**Filipčić, Dominik**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2022**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:235:199769>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-11-20**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# **DIPLOMSKI RAD**

**Dominik Filipčić**

Zagreb, 2022.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# DIPLOMSKI RAD

Mentor:

Izv. prof. dr. sc. Marko Jokić

Student:

Dominik Filipčić

Zagreb, 2022.



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE



Središnje povjerenstvo za završne i diplomske ispite  
Povjerenstvo za diplomske ispite studija strojarstva za smjerove:

Procesno-energetski, konstrukcijski, inženjersko modeliranje i računalne simulacije i brodstrojarski

Sveučilište u Zagrebu Fakultet strojarstva i brodogradnje	
Datum	Prilog
Klasa: 602 - 04 / 22 - 6 / 1	
Ur.broj: 15 - 1703 - 22 -	

## DIPLOMSKI ZADATAK

Student: **Dominik Filipčić**

JMBAG: 0035204670

Naslov rada na hrvatskom jeziku: **Numerička analiza dinamičkog ponašanja prostornog RRR manipulatora**

Naslov rada na engleskom jeziku: **Numerical analysis of spatial RRR manipulator dynamics**

Opis zadatka:

Prostorni manipulator s RRR konfiguracijom (manipulator s tri rotacijska stupnja slobode) odlikuje se pokretljivošću i kompaktnim radnim prostorom, te je često korišten u industriji. Prilikom sinteze sustava upravljanja manipulatora, ali i prilikom samog procesa konstruiranja, nužno je poznavanje dinamičkog ponašanja manipulatora.

U ovom radu je potrebno izvesti matematički model dinamičkog ponašanja prostornog RRR manipulatora. Opisati kinematiku manipulatora, izvesti jednadžbe gibanja, te matematički model implementirati u vidu računalnog programa. Računalni program mora omogućiti izračun svih potrebnih veličina (sve kinematičke veličine i sile i momenti prilikom gibanja) potrebnih za daljnji proces sinteze i konstrukcije.

U radu je potrebno navesti korištenu literaturu i eventualno dobivenu pomoć.

Zadatak zadan:

Datum predaje rada:

Predviđeni datumi obrane:

5. svibnja 2022.

7. srpnja 2022.

18. – 22. srpnja 2022.

Zadatak zadao:

Predsjednik Povjerenstva:

Izv.prof. Marko Jokić

Prof. dr. sc. Tanja Jurčević Lulić

Izjavljujem da sam ovaj rad izradio samostalno koristeći znanja stečena tijekom studija i navedenu literaturu.

Zahvaljujem se svom mentoru Marku Jokiću na iskazanom povjerenju i ustupljenom vremenu i pomoći kada god je bilo potrebno, svojoj obitelji i prijateljima na podršci tijekom čitavog mog školovanja, bez čega ovaj uspjeh ne bi bio moguć.

Dominik Filipčić

## SADRŽAJ

SADRŽAJ .....	I
POPIS SLIKA .....	II
POPIS TABLICA.....	III
POPIS OZNAKA .....	IV
SAŽETAK.....	VI
SUMMARY .....	VII
1. UVOD.....	1
1.1. Industrijski roboti .....	2
2. KINEMATIKA ROBOTA .....	5
2.1. Matrica rotacije .....	6
2.2. Eulerovi kutovi.....	9
2.3. Direktna kinematika .....	11
2.4. Radni prostor.....	16
2.5. Inverzni kinematski problem .....	17
3. DIFERENCIJALNA KINEMATIKA ROBOTA.....	20
3.1. Singularnost .....	24
3.2. Redundantnost manipulatora.....	26
3.3. Analitička Jacobijeva matrica .....	27
3.4. Statika manipulatora .....	28
4. DINAMIKA ROBOTA .....	30
4.1. Lagrangeova jednadžba.....	30
4.2. Dinamika RRR manipulatora.....	34
4.3. Jednadžba gibanja prihvatnice .....	41
4.4. Model prostora stanja.....	42
5. REZULTATI SIMULACIJA.....	45
5.1. Simulacija pozicije prihvatnice .....	46
5.2. Simulacija putanje prihvatnice.....	53
5.3. Simulacija momenata torzije zglobova .....	54
6. ZAKLJUČAK.....	61
LITERATURA.....	63
PRILOZI.....	64

**POPIS SLIKA**

Slika 1.	Robot iz predstave Karela Čapeka [4].....	1
Slika 2.	Industrijski robot [5].....	3
Slika 3.	Pozicija i orijentacija krutog tijela.....	5
Slika 4.	Rotacija ravnine za kut $\varphi$ .....	7
Slika 5.	Eulerovi kutovi [6] .....	9
Slika 6.	Denavit-Hartenbergova metoda RRR manipulatora .....	14
Slika 7.	Različita rješenja za identičnu poziciju prihvatnice .....	18
Slika 8.	Singularnost RRR strukture manipulatora .....	25
Slika 9.	Primjer dinamičkog sustava s 2 štapa.....	31
Slika 10.	Dinamika RRR manipulatora .....	34
Slika 11.	Dijagram toka .....	45
Slika 12.	Dijagram pozicije prihvatnice za prve podatke (1) .....	47
Slika 13.	Dijagram pozicije prihvatnice za prve podatke (2) .....	48
Slika 14.	Dijagram pozicije prihvatnice za prve podatke (3) .....	48
Slika 15.	Dijagram pozicije prihvatnice za druge podatke (1) .....	49
Slika 16.	Dijagram pozicije prihvatnice za druge podatke (2) .....	49
Slika 17.	Dijagram pozicije prihvatnice za druge podatke (3) .....	50
Slika 18.	Dijagram pozicije prihvatnice za treće podatke (1).....	51
Slika 19.	Dijagram pozicije prihvatnice za treće podatke (2).....	51
Slika 20.	Dijagram pozicije prihvatnice za treće podatke (3).....	52
Slika 21.	Dijagram putanje prihvatnice .....	54
Slika 22.	Dijagram momenata zglobova (1).....	55
Slika 23.	Dijagram momenata zglobova (2).....	56
Slika 24.	Dijagram momenata zglobova (3).....	57
Slika 25.	Dijagram momenata zglobova (4).....	58
Slika 26.	Dijagram momenata zglobova (5).....	59

---

**POPIS TABLICA**

Tablica 1. Denavit-Hartenbergovi parametri..... 14



**POPIS OZNAKA**

OZNAKA	JEDINICA	OPIS
$A$	-	Matrica homogenih transformacija
$a_i$	m	Duljina štapa manipulatora i DH parametar
$a_{ij}$	-	Koeficijenti jednadžbe gibanja
$d_i$	m	Linearni pomak zglobova manipulatora
$dW_\tau$	J	Torzijski rad
$E_k$	J	Kinetička energija
$E_p$	J	Potencijalna energija
$F$	N	Sila
$g$	m/s <sup>2</sup>	Gravitacijska konstanta
$G$	-	Matrica gravitacijske komponente
$H$	m	Horizontalni pomak prihvatnice manipulatora
$I_i$	kgm <sup>2</sup>	Matrica momenta inercije
$J, J_v, J_\omega$	-	Jacobieve matrice
$L$	-	Lagrangeova matrica
$l_i$	m	Duljina štapa
$M$	-	Matrica inercijske komponente
$m_i$	kg	Masa
$p_x, p_y, p_z$	-	Komponente vektora pozicije
R	-	Rotacijski zglob
$R$	-	Matrica rotacije
T	-	Translacijski zglob
$T$	-	Matrica transformacije
$T_i$	Nm	Moment torzije
$V$	m	Vertikalni pomak prihvatnice manipulatora
$V$	-	Matrica centrifugalne komponente
$v$	-	Vektor pozicije
$v_r$	m/s	Translacijska brzina
$x^v$	-	Komponenta vektora pozicije

---

$y^v$	-	Komponenta vektora pozicije
$z^v$	-	Komponenta vektora pozicije

<b>OZNAKA</b>	<b>JEDINICA</b>	<b>OPIS</b>
$\alpha_i$	rad	Kut zakreta i DH parametar
$\alpha, \beta, \gamma$	rad	Kutovi rotacije koordinatnih osi
$\vartheta_i$	rad	Rotacijski pomak zglobova manipulatora
$\phi$	-	Vektor Eulerovih kutova
$\varphi$	rad	Kut orijentacije
$\varphi, \vartheta, \psi$	rad	Eulerovi kutovi
$\omega$	rad/s	Kutna brzina

**SAŽETAK**

Ovaj diplomski rad bavi se izvodom kinematskog i dinamičkog modela RRR manipulatora. Izvedena je dinamička jednačba i jednačba gibanja manipulatora, koja se pomoću unesenih početnih uvjeta precizno definira. Za zadanu početnu i krajnju točku program računa putanju prihvatnice, koja u kombinaciji sa zadanim duljinama i masama dijelova manipulatora crta dijagrame torzijskih momenata potrebnih za konstrukciju robota.

Ključne riječi:

RRR manipulator, kinematika robota, dinamika robota, jednačbe gibanja, računalna simulacija

---

**SUMMARY**

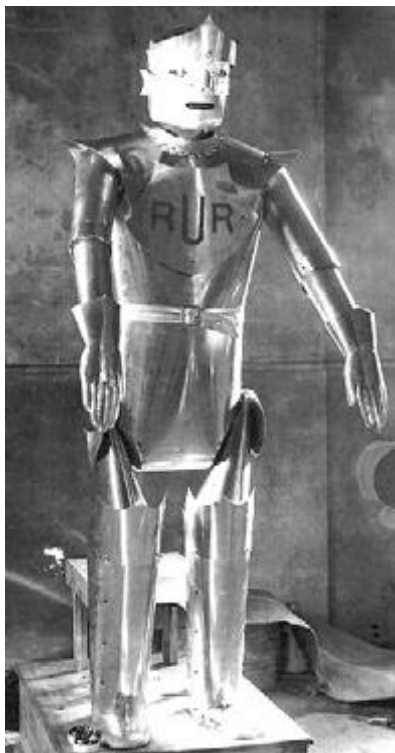
This thesis deals with the derivation of the kinematic and dynamic model of the RRR manipulator. The dynamic equation and the equation of motion of the manipulator are derived, which are defined using the chosen initial conditions. For a chosen start and end point, the program calculates the path of the receiver, which, in combination with the given lengths and masses of the manipulator parts, draws diagrams of the torsional moments required for the construction of the robot.

Key words:

RRR manipulator, robot kinematics, robot dynamics, motion equations, computer simulation

## 1. UVOD

Tisućljećima unazad, ljudi pokušavaju izumiti nove stvari kako bi si olakšali život. Sve je krenulo od izuma vatre i kotača, a nastavilo se sve do suvremenog doba. U današnje vrijeme čovjek teži izumu strojeva koji bi mogli zamijeniti njegov, kako fizički, tako i mentalni rad. Točnije, u obavljanju raznih fizičkih poslova, te procesu donošenja odluka. To bi zahtijevalo raznolike strojeve, ovisno o vrsti zadatka kojeg je potrebno obaviti, a sve te strojeve možemo zajedničkim imenom nazvati roboti. Riječ robot nastala je od predstave Karela Čapeka 1921. godine zvane R.U.R. (*Rossum's Universal Robots*), koja je pričala o čovjekolikim strojevima koji su imali nadnaravne moći, a nazvao ih je roboti. Znanost koja se bavi proučavanjem takvih vrsti strojeva, u nastavku teksta robota, nazivamo robotika.



Slika 1. Robot iz predstave Karela Čapeka [4]

Mogli bismo reći da je robotika spoj strojarstva, elektrotehnike, elektronike i informatike. Njeno proučavanje robota se detaljnije može opisati tako što se bavi proračunom, konstruiranjem, programiranjem i upravljanjem robota. Prati njegov rad pomoću raznih senzora, pronalazi njegove primjene u svakodnevnom životu te obrađuje povratne informacije. Pojam robotika uveo je ruski književnik Isaac Asimov, dvadesetak godina nakon Čapekove

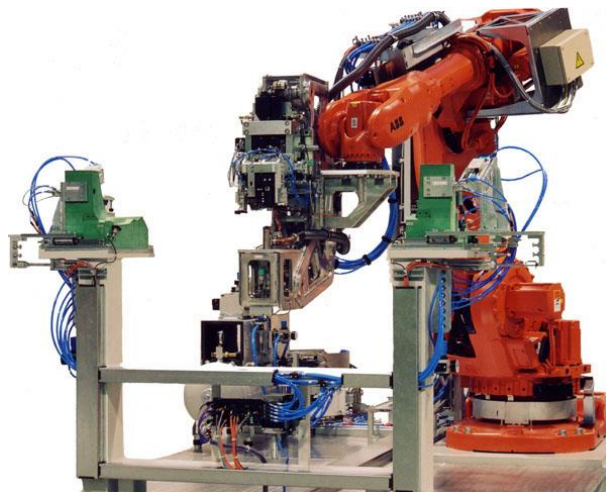
predstave, te je u svojim knjigama, opisujući pojavu robota, napisao sljedeća tri osnovna pravila robotike:

1. Robot ne smije ozlijediti čovjeka, ili na bilo koji način dozvoliti da dođe do njegove povrede.
2. Robot mora slušati čovjekove naredbe, osim kada su one u suprotnosti s gornjim pravilom.
3. Robot mora zaštititi svoju vlastitu sigurnost, osim kada je to u suprotnosti s gornjim pravilima.

Pri izradi robota, svi proračuni, konstrukcija, senzori, način programiranja, materijali za izradu i ostalo moraju poštivati sva tri gore navedena zakona. Različiti dijelovi sustava robota mu omogućuju različite stvari. Njegovu sposobnost da izvrši fizičke zadatke osigurava mehanički sustav, sposobnost da opaža okolinu osiguravaju mu senzori, sposobnost da poveže prethodne dvije osigurava mu njegov upravljački sustav itd. Kada se pred robot stavlja jednostavni zadaci, on može biti vrlo jednostavne izrade s osnovnim mogućnostima. Međutim, kada se pred njega stavlja nešto kompleksniji zadaci, poput kirurških operacija, vrlo precizne proizvodnje, ili oni moraju raditi otežanim uvjetima poput svemira, nuklearnih elektrana i slično, tada oni moraju napredne sustave na sebi koji će im omogućiti izvršenje tih zadataka.

### **1.1. Industrijski roboti**

Kako su prije nekoliko stoljeća ljudi radili proizvodnju u tvornicama vlastoručno, a dolazila je potreba da ih stroj zamijeni, isti su postupno izumljeni te uvedeni u primjenu, a nazivamo ih industrijskim robotima. Proces zamjene čovjeka s industrijskim robotom u proizvodnji nazivamo automatizacijom. Nju dijelimo na tri podskupine: krutu, programabilnu te fleksibilnu. Kruta automatizacija orijentirana je na masovnu proizvodnju identičnog proizvoda, za koji postupak proizvodnje mora biti visoko kvalitetan te identičan za svaki proizvod, pa su potrebni fiksni radni roboti. Programabilna automatizacija orijentirana je na proizvodnju više različitih proizvoda srednjeg volumena. Te vrste robota neko vrijeme proizvode jednu vrstu proizvoda, te u svakom trenutku kada je to potrebno, mogu se automatski prebaciti na proizvodnju druge vrste proizvoda. Fleksibilna automatizacija je ustvari poboljšana programabilna automatizacija, gdje je cilj što brže i preciznije promijeniti robotovu proizvodnju jednog proizvoda u drugi, integracijom napredne računalne tehnologije s industrijskom tehnologijom.



**Slika 2. Industrijski robot [5]**

Industrijski robot je po svojoj definiciji manipulator koji pomiče stvari vlastitim gibanjem kako bi izvršio svoje radne zadatke. Industrijski robot sastavljen je od:

1. Nosive konstrukcije koja se sastoji od niza međusobno povezanih krutih dijelova. Mjesta gdje su ti dijelovi povezani nazivamo zglobovi. Nosivi dio ima svoju tzv. ruku koja mu omogućava pokretljivost, te šaku koja mu omogućava izvršavanje radnih zadataka.
2. Aktuatora, kojeg čine električni, pneumatski ili hidraulički motori, a oni omogućavaju gibanje zglobova nosive konstrukcije.
3. Senzora koji prate ponašanje industrijskog robota te njegove radne okoline.
4. Računala kojim se upravlja gibanjem industrijskog robota.

Nosivi dio konstrukcije, zajedno s međusobno povezanim krutim dijelovima, čini robotov kinematski lanac. Najjednostavniji kinematski lanac može biti jedan pokretljivi zglob, koji veže dva kruta štapa robota. Postoje otvoreni i zatvoreni kinematski lanac. Kod otvorenog kinematskog lanca, svaki zglob osigurava jedan stupanj slobode gibanja robota, dok kod zatvorenog kinematskog lanca broj stupnjeva sloboda gibanja ne odgovara broju zglobova robota, već je on manji. Robot mora imati dovoljan broj stupnjeva slobode gibanja za izvršenje svog radnog zadatka.

Ukupno poznajemo šest različitih stupnjeva slobode gibanja, od čega su tri translacijska i tri rotacijska. Po jedan je translacijski stupanj raspoređen za kretanje po svakoj od Kartezijevih osi, a također je i po jedan rotacijski stupanj raspoređen za rotacije oko istih tih osi. Ovisno od kojih se stupnjeva gibanje robota sastoji, on će se moći kretati po prostoru oko

sebe i izvršavati zadatke, a taj prostor nazivamo radni prostor robota. Ovisno o tome ima li robot translacijski ili rotacijski zglob, u ime strukture pridajemo mu slovo T, odnosno R. Neke od najpoznatijih robotskih struktura su: Kartezijska (TTT), cilindrična (RTT), sferna (RRT), rotacijska (RRR) itd.

Kako se ovaj rad bavi rotacijskom (RRR) strukturom, nju ćemo u nastavku detaljnije obraditi. Kako se naziv njene strukture sastoji od tri slova R, to znači da ona ima tri rotacijska zgloba, odnosno stupnjeva slobode gibanja. Rotacijska os prvog zgloba je okomita na rotacijsku os druga dva zgloba, koji su međusobno paralelni. Motorima pokretani zglobovi omogućuju robotu veliki radni prostor, što je jedan od najvećih prednosti ovog robota. Pošto njegova struktura ima otvoren kinematski lanac, kada god je potrebno raditi s većim opterećenjima, bitno je da robot ima što veću krutost, kako bi zadovoljio potrebnu preciznost zadatka.

Pri nabavci robota, obično je prvo potrebno znati funkciju koju bi robot trebao obavljati. Nakon toga, bitno je kakva je struktura robota potrebna za obavljanje navedenih zadataka. Osim strukture robota, još neki podaci o njemu su nam potrebni, poput najveće brzine robota, što je bitno zbog preciznosti. Ako radimo brže od toga, ne možemo očekivati precizno obavljen zadatak. Najviša dozvoljena nosivost robota ne smije se prelaziti, jer može doći do puknuća nekih od dijelova robota. Obično se uz brzinu robota navede i ponovljivost robota, odnosno područje preciznosti dostave predmeta pomoću robota između dvije uzastopne radnje.

Pri izradi robota, ovisno o fizičkim veličinama kojima je potrebno raditi, primjerice radnom brzinom te nosivosti, važno je pravilno modelirati kinematički i dinamički model robota. Na osnovu toga radi se detaljni proračun svih elemenata, koji moraju zadovoljavati postavljene kriterije. Kinematska analiza svih dijelova robota radi se u odnosu na neku fiksnu točku unutar Kartezijevog koordinatnog sustava robota. Kinematski model robota je osnova za dinamički model robota, odnosno, postavljanju jednadžbi gibanja kao funkciju sila i momenata koji djeluju na njega. U sljedećem poglavlju postaviti ćemo kinematski model robota.



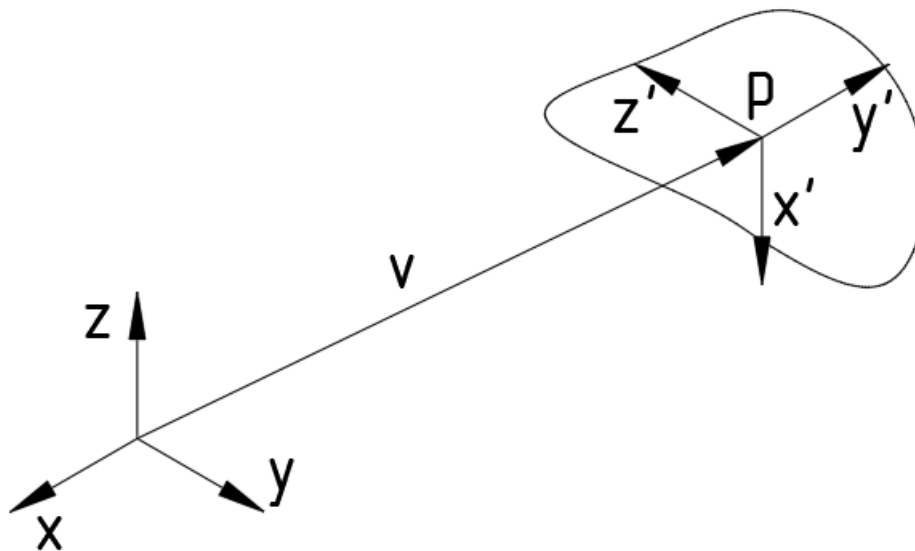
## 2. KINEMATIKA ROBOTA

Kako je i u prethodnom poglavlju napisano, struktura robota sastoji se od krutih dijelova, štapova, međusobno povezanih pokretljivim zglobovima. Ti zglobovima povezani štapovi čine kinematski model robota. Zglobovi se mogu gibati translacijski ili rotacijski, ovisno od konstrukcije. Koristit ćemo vektore i ravnine kako bi postavili matrice transformacije. Opisat ćemo položaj robotske prihvatnice u odnosu na temelje robota, gdje ono ima svoju poziciju i orijentaciju. Njih je najlakše objasniti jediničnim vektorima, gdje svaki vektor predstavlja jednu koordinatnu os. Neka pozicija prihvatnice čini neku točku u prostoru, a vektor koji spaja temelj robota s tom točkom nazvat ćemo vektor  $v$ . Neka se taj vektor sastoji od sljedećih komponenata:

$$v = \begin{bmatrix} x^v \\ y^v \\ z^v \end{bmatrix}. \quad (2.1)$$

Tada poziciju bilo koje točke robota (npr. prihvatnice), od njegovog ishodišta iz temelja možemo opisati sljedećom jednačinom:

$$v = x_1^v p_x + y_1^v p_y + z_1^v p_z. \quad (2.2)$$



Slika 3. Pozicija i orijentacija krutog tijela

## 2.1. Matrica rotacije

Taj vektor opisuje najjednostavniju translaciju robota. Također, prethodnu jednadžbu možemo napisati u i obliku skalarnog produkta, što će nam biti bitno za daljnju formulaciju transformacija gibanja.

$$v = \begin{bmatrix} p_x & 0 & 0 \\ 0 & p_y & 0 \\ 0 & 0 & p_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x^v \\ y^v \\ z^v \end{bmatrix}. \quad (2.3)$$

Translacija može biti opisana i kao zbroj dva vektora, gdje je prvi vektor točke u početnom stanju od ishodišta, a drugi vektor je taj pomak, odnosno, translacija točke do svoje konačne pozicije. Može biti i opisana kao skalarni produkt, gdje početnu točku podrazumijevamo ishodištem te točke u prostoru. Taj skalarni produkt sastoji se od umnoška matrice i vektora. Vektor je prethodno objašnjen, a matricu s ovim koeficijentima nazivamo matrica translacija neke točke. Kako ta točka može biti usmjerena u bilo kojem smjeru u prostoru, njegovu orijentaciju potrebno je opisati pomoću ravnine u kojoj se nalazi, a u odnosu na početnu ravninu temelja robota. Tada je svaka os ravnine te točke udaljena od početne točke za jedinični vektor pomnožen s nekim koeficijentom koji pripada toj koordinatnoj osi. Potrebna su nam dakle tri vektora, po jedan za svaku os.

$$\begin{aligned} p_x &= x \cos \varphi - y \sin \varphi + 0z, \\ p_y &= x \sin \varphi + y \cos \varphi + 0z, \\ p_z &= 0x + 0y + 1z. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Komponente svih jediničnih vektora su smjerovi svake od osi u odnosu na početnu os uz pridruženi koeficijent umnoška. Prethodno određeni jedinični vektori, umjesto u tri jednadžbe, mogu biti napisani u obliku jedne matrice, koju nazivamo matrica rotacije.

$$R = \begin{bmatrix} p_x & p_y & p_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

Vektori stupci iz prethodne matrice su međusobno okomiti te jedinične norme. Normu vektora možemo dokazati njegovim umnoškom sa svojom transponiranom matricom.

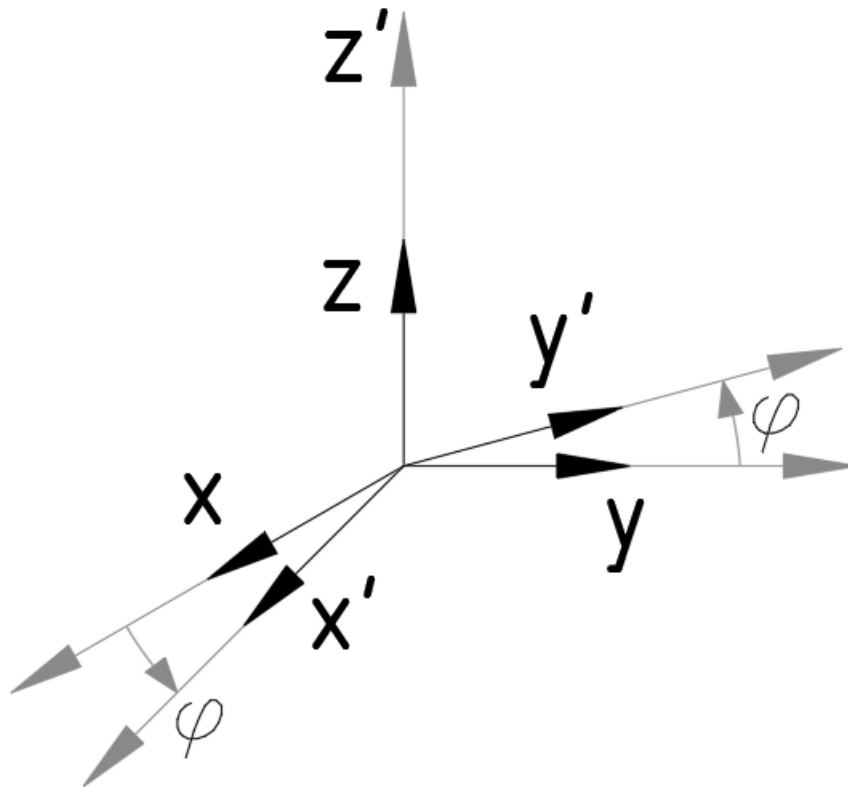
$$p_x^T p_x = 1; \quad p_y^T p_y = 1; \quad p_z^T p_z = 1. \quad (2.6)$$

Također, skalarnim produktom bilo koja dva vektora međusobno, trebali bi dobiti nulu ako su oni međusobno okomiti. Kako bi ih pomnožili, jedan od vektora potrebno je prvo transponirati.

$$p_x^T p_y = 0; p_y^T p_z = 0; p_z^T p_x = 0. \quad (2.7)$$

Kako su svi vektori međusobno okomiti te im je norma jednaka 1, pošto je uvjet zadovoljen za sve vektore, to znači da će i skalarni produkt matrice sa svojom transponiranom matricom biti jednak:

$$R^T R = I. \quad (2.8)$$



Slika 4. Rotacija ravnine za kut  $\varphi$

Rezultat prethodnog umnoška je jedinična matrica dimenzija 3x3. Treba primijetiti iz sastava matrice rotacije kako su vektori u njoj jedinični, pa će tako inverzna matrica rotacije biti jednaka transponiranoj matrici rotacije.

$$R^T = R^{-1}. \quad (2.9)$$

Matricu rotacije koristit ćemo kod transformacija rotacija zglobova manipulatora. Prvi zglob koji se rotira je zglob temelja robota. On se rotira oko koordinatne osi z, pri čemu se nova os z poklapa sa starom osi, a osi x i y mijenjaju svoj položaj u odnosu na stare osi za iznos kuta  $\alpha$ . Bitno je obratiti pozornost na smjer rotacije zbog predznaka. Ako je smjer rotacije oko osi suprotno od smjera kazaljke na satu, tada je predznak rotacije pozitivan. U

suprotnom, ako je smjer rotacije oko osi u smjeru kazaljke na satu, tada je predznak rotacije negativan. Jedinične vektore nakon rotacije tada možemo izraziti u odnosu na početne jedinične vektore, tako da iskoristimo trigonometrijske odnose između njih i prethodno navedenim kutom  $\alpha$ .

$$p_x = \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \\ 0 \end{bmatrix}; p_y = \begin{bmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \\ 0 \end{bmatrix}; p_z = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (2.10)$$

Kada sve te jedinične vektore zapišemo u jedinstvenu matricu rotacije jediničnih vektora, ta matrica dobije sljedeći izgled:

$$R(z) = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.11)$$

Slična se matrica rotacije naravno može dobiti i za rotacije oko ostale dvije osi, samo koristeći se kutovima  $\beta$  i  $\gamma$ . Inače proširenu matricu rotacije često označavamo slovom  $A$ .

$$R(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta & -\sin \beta \\ 0 & \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix}; R(y) = \begin{bmatrix} \cos \gamma & 0 & \sin \gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \gamma & 0 & \cos \gamma \end{bmatrix}. \quad (2.12)$$

Za svaku od prethodne tri matrice rotacije vrijedi da je ta matrica identična svojoj transponiranoj matrici za suprotni smjer rotacije oko pojedine osi. Također, kombinacija ovih matrica koristit će se za opisivanje bilo koje nasumično odabrane rotacije u prostoru, a koja se ne mora nužno poklapati s rotacijom oko neke od tri prethodno navedene osi. U jednadžbama (1.1) i (1.5) smo opisali vektor koji predstavlja neku točku u prostoru, te vektor koji opisuje u kojem smjeru je okrenuta ta ravnina. Sada možemo iskoristiti vektor rotacije iz prethodnih matrica, kako bismo doveli u vezu ta dva vektora. Množenjem matrice dimenzija  $3 \times 3$  s vektorom dimenzija  $3 \times 1$ , kao rezultat dobiti ćemo vektor dimenzija  $1 \times 3$ .

$$v_i = R(i) p_i. \quad (2.13)$$

Iz prethodnih jednadžbi možemo zaključiti da matrica rotacije ima sljedeće geometrijske značajke:

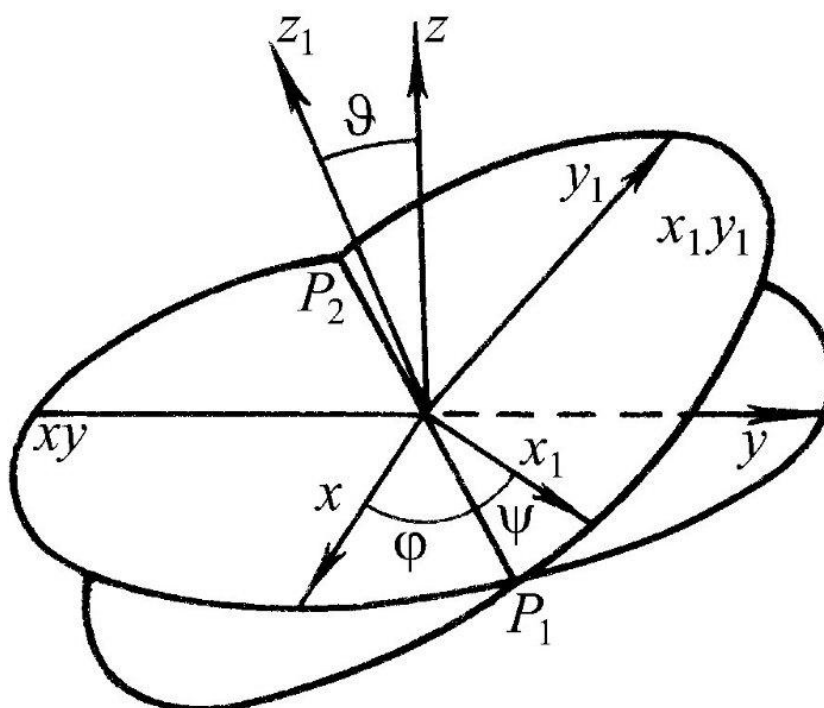
1. Opisuje orijentaciju jednog vektora u odnosu na drugi. Vektori stupci sadrže relativnu duljinu vektora uzduž svake koordinatne osi u odnosu na početni jedinični vektor.
2. To je matrica transformacije koja opisuje vezu između koordinata točaka iz dvije različite ravnine koje imaju zajedničko ishodište.

3. Matrica koja omogućuje računanje rotacije vektora unutar iste ravnine.

## 2.2. Eulerovi kutovi

Matrica rotacije sastoji se od tri vektora, koji se sastoje od tri komponente. To znači da se matrica rotacije sastoji od ukupno devet komponentata, koji opisuju promjenu orijentacije neke točke, odnosno njegove rotacije. Kako imamo ukupno samo tri koordinatne osi, te su nam bitne rotacije samo oko njih, moguće je opisati rotaciju neke točke pomoću samo tri komponente, gdje nam je ostalih 6 komponenti nepotrebno. Te tri komponente su tri kuta rotacije oko pojedine osi, a nazivamo ih Eulerovi kutovi. Ti kutovi čine sljedeći vektor:

$$\phi = \begin{bmatrix} \varphi \\ \vartheta \\ \psi \end{bmatrix}. \quad (2.14)$$



Slika 5. Eulerovi kutovi [6]

U jednadžbama (1.11) i (1.12) opisane su matrice rotacije oko pojedinih osi, a te matrice koristit će i Eulerovi kutovi (vektori). Općenita rotacija neke točke sastoji se od kombinacije rotacija oko svih osi, pa će ukupna rotacija biti umnožak sve tri pojedine matrice rotacije. Dakle, potrebno je utvrditi tri jednakosti.

$$R(\psi) = R(x); R(\varphi) = R(y); R(\vartheta) = R(z). \quad (2.15)$$

Kada međusobno pomnožimo te matrice, dobiti ćemo ukupnu Eulerovu matricu rotacije kao rezultat. Koristimo vrijednosti iz prethodno opisanih matrica.

$$\begin{aligned}
R(\phi) &= R(\varphi) \cdot R(\vartheta) \cdot R(\psi) \\
&= \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \gamma & 0 & \sin \gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \gamma & 0 & \cos \gamma \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta & -\sin \beta \\ 0 & \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \quad (2.16) \\
&= \begin{bmatrix} \cos \varphi \cos \vartheta & \cos \varphi \sin \vartheta \sin \psi - \sin \varphi \cos \psi & \cos \varphi \sin \vartheta \cos \psi + \sin \varphi \sin \psi \\ \sin \varphi \sin \vartheta & \sin \varphi \sin \vartheta \sin \psi + \cos \varphi \cos \psi & \sin \varphi \sin \vartheta \cos \psi - \cos \varphi \sin \psi \\ -\sin \vartheta & \cos \vartheta \sin \psi & \cos \vartheta \cos \psi \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Radi jednostavnosti zapisa često se funkcija sin zamjenjuje sa slovom s, a funkcija cos sa slovom c. Također, svaka komponenta prethodne matrice rotacije je označena vlastitim mjestom u matrici  $r_{ij}$ , pa je recimo prema tome prva komponenta matrice označena sa  $r_{11}$ . Kako smo već i prethodno objasnili, promjenu pozicije neke točke definiramo njenom translacijom od početne do krajnje pozicije u odnosu na ishodište, a orijentaciju neke točke definiramo rotacijom, odnosno promjenom kuta krajnje ravnine u odnosu na početnu, koristeći istu ishodišnu točku oko koje se vrši rotacija. Pomak koji uključuje kombinaciju translaciju i rotaciju točke opisuje se homogenim transformacijama.

Zamislimo sada neku točku u prostoru koju ćemo označiti slovom P. Moramo moći opisati njenu poziciju i orijentaciju. Krenut ćemo od pozicije. Njene koordinate u odnosu na početno ishodište opisati ćemo vektorom  $p^0$ . Kako moramo opisati i orijentaciju te točke, za to nam je potrebna nova zakrenuta ravnina. Vektor od ishodišta te ravnine do točke P opisati ćemo vektorom  $p^1$ , a vektor kojim ćemo opisati orijentaciju te ravnine, odnosno povezivati njihova dva ishodišta, označit ćemo sa  $o^1$ . Koristit ćemo proširenu matricu rotacije  $R_1^e$ . Oznake u indeksu i eksponentu matrice rotacije znače da se matrica primjenjuje na ravninu 1 u odnosu na ravninu 0. Koristeći sve prethodno opisane oznake vektora i matrica, pozicija točke opisana vektorom  $p^0$  može biti opisana i sljedećom jednačinom:

$$p^0 = o^1 + R_1^e \cdot p^1. \quad (2.17)$$

Transponiranjem matrice iz prethodne jednačine, moguće je zapisati poziciju i orijentaciju točke pomoću vektora  $p^1$ , koristeći zapis preko druge ravnine. Tada će matrica rotacije opisivati kako je potrebno zakrenuti početnu ravninu kako bi dobili drugu jednačinu pomaka točke.

$$p^1 = -R_0^1 o^1 + R_0^1 p^0. \quad (2.18)$$

Možemo zaključiti kako smo opisali identičnu poziciju i orijentaciju neke točke na dva različita načina. Kako bi usvojili općeniti zapis vektora, uvesti ćemo dodatnu komponentu,

odnosno jedinični vektor, kako bi dobili matricu homogenih transformacija. Za zakrenutu ravninu iz prethodnih jednadžbi tada dobivamo matricu homogenih transformacija  $A$ . Oznake u indeksu i eksponentu matrice koje su vrijedile za matricu rotacije, vrijede i za matricu homogenih transformacija.

$$A_1^0 = \begin{bmatrix} R_1^0 & o^1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.19)$$

Bila nam je potrebna kvadratna matrica, pa su u zadnji red dodani nul vektor i jedinični vektor. Prvi red matrice sastoji se od matrice rotacije te vektora translacije određene točke. Samim množenjem te matrice i vektora, dobijemo novi položaj točke. Množenjem jednog vektora položaja s homogenom matricom transformacija, trebali bi kao rezultat dobiti drugi vektor položaja.

$$p^1 = A_1^0 \cdot p^0. \quad (2.20)$$

Jednadžbu (1.20) možemo iskoristiti kako bi proširili zapis vektora u matrici homogenih transformacija. Uzevši u obzir bilo koji vektor pomaka, jednakost će vrijediti i za matricu rotacija i za transponiranu matricu.

$$A_0^1 = \begin{bmatrix} R_0^1 & -R_0^1 \cdot o_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1^{0T} & -R_1^{0T} o_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.21)$$

Primijetimo i kako matrica nije ortogonalna, što znači da njen inverz nije jednak transponiranoj matrici homogenih transformacija  $A^{-1} \neq A^T$ . Ono što je njena prednost je to što transformaciju koordinata između dvije ravnine s različitim ishodištem čini kompaktnom, dobijemo općeniti zapis te transformacije. Ukoliko bi transformirali koordinate između dvije ravnine sa zajedničkim ishodištem, tada bi nam matrica rotacija bila dovoljna.

### 2.3. Direktna kinematika

Kinematski lanac robota može biti otvoren ili zatvoren, a čini ga niz štapova međusobno povezanih sa zglobovima. Ti zglobovi mogu biti rotacijski ili translacijski, pa ih prema tome grafički prikazujemo kao valjke ili kao prizme. Jedan kraj lanca povezan je za postolje robota, a drugi za prihvatnicu robota. Svaki zglob omogućuje robotu dodatni stupanj slobode gibanja, pa često kažemo da je broj zglobova direktno povezan sa brojem stupnjeva slobode gibanja robota. Prihvatnica je složeni mehanički sklop koji pomaže robotu da manipulira raznim objektima, a sastoji se od mnoštva vektora. Vektori prihvatnice su: vektor normale  $n$ , vektor orijentacije  $o$ , vektor djelovanja  $a$  i vektor položaja  $p$ . Ti vektori nalaze se u matrici homogenih transformacija u funkciji direktne kinematike, koju nazivamo matrica  $T_n^o$ . Slovo  $o$

u eksponentu matrice označava da se odnosi na ishodišnu točku O ravnine prihvatnice, a slovo  $n$  u indeksu matrice označava broj matrice o kojoj se radi, budući da ih može biti više, ovisno o položaju i orijentaciji.

$$T_n^o = \begin{bmatrix} n_n^o & o_n^o & a_n^o & p_n^o \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x^o & o_x^o & a_x^o & p_x^o \\ n_y^o & o_y^o & a_y^o & p_y^o \\ n_z^o & o_z^o & a_z^o & p_z^o \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.22)$$

To je posebno korisno kod otvorenog kinematskog lanca koji se sastoji od  $n+1$  štapova i  $n$  zglobova (uvijek je 1 štap više u odnosu na broj zglobova!). Zglobovi se nalaze između štapova, a početak prvog štapa vezan je direktno za postolje robota. Kod takvog lanca prvo je potrebno opisati kinematiku zglobova međusobno, pa tek onda čitavog lanca kao cjeline. Zamislimo da svaki zglob ima svoj koordinatni sustav s ishodištem u centru zgloba. Koristeći direktnu kinematsku funkciju, moguće je odrediti međusobnu poziciju i orijentaciju pojedinih zglobova, tako da njihove matrice homogene transformacije množimo redom od prve do zadnje, u odnosu na ishodište prvog zgloba (ili temelja!). Tako možemo izračunati i odnos prihvatnice robota u odnosu na temelj robota.

$$T_n^o = A_1^o \cdot A_2^1 \cdot A_3^2 \cdots A_n^{n-1}. \quad (2.23)$$

Kako bi izračunali tu jednadžbu, koristit ćemo Denavit-Hartenbergovu metodu. Ona opisuje relativnu poziciju i orijentaciju jednog zgloba u odnosu na drugo, obzirom na njihove ravnine. Oznaka  $i$  označavat će os zgloba koji povezuje štap  $i-1$  sa štapom  $i$ . Denavit-Hartenbergova pravila su sljedeća:

1. Os  $z_{i-1}$  koordinatnog sustava  $i-1$ , leži u smjeru gibanja  $i$  – tog stupnja slobode gibanja.
2. Ishodište koordinatnog sustava postavljamo na sjecištu osi  $z_i$  sa zajedničkom normalom osi  $z_{i-1}$  i  $z_i$ . Također, ishodište sljedećeg koordinatnog sustava postavljamo na presjecištu zajedničke normale s osi  $z_{i-1}$ .
3. Os  $x_{i-1}$  okomita je na os  $z_{i-1}$  i paralelna je s osi koja ide uzduž štapa.
4. Os  $y_{i-1}$  odabiremo tako da u kombinaciji s ostalim osima čini desnokretni koordinatni sustav.



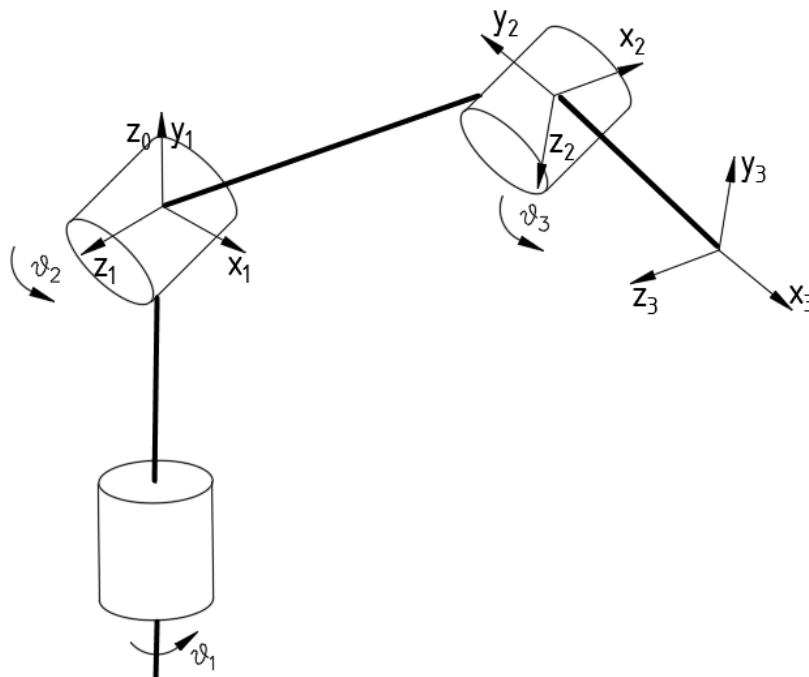
Isto tako, Denavit-Hartenbergova metoda daje neke definicije za ravnine u specifičnim slučajevima:

1. Kod ravnine temelja robota, jedino os  $z_0$  je definirana, ostale osi i ishodište mogu se izabrati proizvoljno. Za ravninu prihvatnice, budući da nakon nje nema nikakvih sljedećih dijelova robota, os  $z_n$  nije jedinstveno definirana osim da os  $x_n$  mora biti okomita na nju. Često je zglob prihvatnice rotacijski, pa je preporučljivo da os  $z_n$  i  $z_{n-1}$  budu paralelne.
2. Kada su dvije susjedne osi paralelne, njihova zajednička normala nije jednoznačno definirana, a kada se te osi sijeku, onda je smjer osi  $x_i$  proizvoljan.
3. Kada se radi o translacijskom zglobu, smjer osi  $z_i$  je također proizvoljan.

Svi prethodno navedeni slučajevi dani su uz pretpostavku otvorenog kinematskog lanca. Kod zatvorenog kinematskog lanca ne moramo uvijek imati jasna ograničenja geometrije, osim ako se radi o vrlo jednostavnoj kinematskoj strukturi. Za radnu strukturu zatvorenog kinematskog lanca manipulatora, postoji postupak računanja direktne kinematske funkcije koristeći Denavit-Hartenbergove zakone:

1. Odaberemo neki zglob manipulatora i zamislimo da ga odvajamo od ostatka strukture kako bi stvorili zamišljeni otvoreni kinematski lanac manipulatora.
2. Izračunamo homogene transformacije koristeći Denavit-Hartenbergova pravila.
3. Zadamo zajedničke rubne uvjete za dvije nove ravnine nastale presijecanjem odabranog zgloba manipulatora, te riješimo postavljene jednadžbe kako bi smanjili broj nepoznatih varijabli.
4. Koristeći poznate varijable, postavimo matricu homogenih transformacija i izračunamo direktnu kinematsku funkciju od postolja do hvataljke manipulatora.

Objasnit ćemo sada primjenu Denavit-Hartenbergove metode na primjeru našeg manipulatora. On ima tri rotacijska zgloba, što najviše podsjeća na pravu ljudsku ruku. Kada je nešto nalik čovječjem dijelu tijela, kažemo da je to antropomorfno. Dakle, takvu strukturu manipulatora možemo nazvati antropomorfnom strukturom. Os  $z_0$  odabrali smo u štapu koji je spojen s temeljem manipulatora, vertikalno u smjeru prema gore. Kako srednji i zadnji zglob rotiraju oko identične osi, njihove osi  $z_1$  i  $z_2$  su paralelne, pa smo njima pripadajuće osi  $x_1$  i  $x_2$  postavili u smjeru osi njihovih štapova.



**Slika 6. Denavit-Hartenbergova metoda RRR manipulatora**

Uočimo kako u Denavit-Hartenbergovoj metodi imamo 4 parametra koja pratimo, a to su kutovi zakreta  $\alpha_i$ , duljine štapova  $a_i$ , pomaci zglobova  $\mathcal{G}_i$  i pomak štapova  $d_i$ . Pošto se drugi i treći zglob ne rotiraju oko iste osi kao i prvi zglob, njihov kut zakreta možemo smatrati jednakim nuli. Treći zglob će najveću promjenu trigonometrijske vrijednosti kuta imati za promjenu od  $\pi/2$ . Za potrebe ovog računa, pomaci zglobova bit će  $\mathcal{G}_1$ ,  $\mathcal{G}_2$  i  $\mathcal{G}_3$ , a pomaci štapova bit će  $d_1$ ,  $d_2$  i  $d_3$ . Kako bi što jednostavnije prikazali odabir Denavit-Hartenbergovih parametara za ovu vrstu manipulatora, iskoristit ćemo prigodnu tablicu s 4 stupca rezervirana za svaki od parametara, te 4 redaka za svaki od osi koje koristimo. Name, svaki zglob čini jednu os, a kako imamo tri zglobova, tako ćemo imati i tri osi i njima dodati os prihvatnice koja je također važan dio ovog manipulatora.

**Tablica 1. Denavit-Hartenbergovi parametri**

$i$	$\alpha_{i-1}$	$a_{i-1}$	$d_i$	$\mathcal{G}_i$
1	0	0	$L_1$	$\mathcal{G}_1$
2	$\frac{\pi}{2}$	0	0	$\mathcal{G}_2 + \frac{\pi}{2}$
3	0	$L_2$	0	$\mathcal{G}_3$
4	0	$L_3$	0	0

Homogena matrica deformacije prvog člana rotira oko osi temelja koja se poklapa s globalnom osi i može se definirati kao:

$$A_1^0(\mathcal{G}_1) = \begin{bmatrix} \cos \mathcal{G}_1 & -\sin \mathcal{G}_1 & 0 & 0 \\ \sin \mathcal{G}_1 & \cos \mathcal{G}_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.24)$$

Homogena matrica rotacije prvog zgloba rotirala je oko globalne osi  $z$ , dok će ostala dva zgloba rotirati oko globalne osi  $x$ , pa je zato potrebno postaviti drugačiju homogenu matricu rotacije za njih. Indeks  $i$  označava broj 2 za drugi zglob, a broj 3 za treći zglob manipulatora. Kut rotacije za drugu os je  $\mathcal{G}_2$ .

$$A_2^1(\mathcal{G}_2) = \begin{bmatrix} -\sin \mathcal{G}_2 & -\cos \mathcal{G}_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \cos \mathcal{G}_2 & -\sin \mathcal{G}_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.25)$$

Kut rotacije treće osi jednak je  $\mathcal{G}_3$ , pa se zato njena homogena matrica rotacije razlikuje od matrice prethodnog zgloba.

$$A_3^2(\mathcal{G}_3) = \begin{bmatrix} \cos \mathcal{G}_3 & -\sin \mathcal{G}_3 & 0 & L_2 \\ \sin \mathcal{G}_3 & \cos \mathcal{G}_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.26)$$

Također imamo i četvrtu os prihvatnice manipulatora, koja služi samo za prihvat nekog objekta, ali i kao takva radi gibanje i ima svoju homogenu matricu transformacije.

$$A_4^3(\mathcal{G}_4) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & L_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.27)$$

Direktna kinematička funkcija ovakve strukture robota jednaka je umnošku prethodne tri homogene matrice rotacija međusobno. Kako smo u ranijim poglavljima napomenuli, funkcije  $\sin$  označavat ćemo sa  $s$ , a funkcije  $\cos$  sa slovom  $c$ , radi jednostavnosti zapisa. Tako će primjerice oznaka  $s_1$  označavati  $\sin \mathcal{G}_1$  i tako dalje.

$$T_4^0 = A_1^0 A_2^1 A_3^2 A_4^3$$

$$= \begin{bmatrix} -c_1 c_3 s_2 - c_1 c_2 s_3 & c_1 s_3 s_2 - c_1 c_2 c_3 & s_1 & -L_3 (c_1 c_3 s_2 + c_1 c_2 s_3) - L_2 c_1 s_2 \\ -s_1 c_3 s_2 - c_1 c_2 s_3 & s_1 s_2 s_3 - s_1 c_2 c_3 & -c_1 & -L_3 (s_1 c_3 s_2 - s_1 c_2 s_3) - L_2 s_1 s_2 \\ c_2 c_3 - s_2 s_3 & -c_2 s_3 - s_2 c_3 & 0 & L_3 (c_2 c_3 - s_2 s_3) - L_2 c_2 + L_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.28)$$

Pomoću ovih parametara moguće je definirati vektor pozicije neke točke u Kartezijevim koordinatama. Vektor čine sljedeća tri parametra.

$$\begin{aligned} p_x &= -L_3 (\cos \vartheta_1 \cos \vartheta_3 \sin \vartheta_2 + \cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2 \sin \vartheta_3) - L_2 \cos \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \\ p_y &= -L_3 (\sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \cos \vartheta_3 - \sin \vartheta_1 \cos \vartheta_2 \sin \vartheta_3) - L_2 \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \\ p_z &= L_3 (\cos \vartheta_2 \cos \vartheta_3 - \sin \vartheta_2 \sin \vartheta_3) + L_2 \cos \vartheta_2 + L_1. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Ako bolje pogledamo prethodnu jednadžbu, vidimo da ju možemo zapisati na jednostavniji način, ako iskoristimo dobro poznate trigonometrijske relacije.

$$\begin{aligned} p_x &= -L_3 \sin(\vartheta_2 + \vartheta_3) \cos \vartheta_1 - L_2 \cos \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \\ p_y &= -L_3 \sin(\vartheta_2 + \vartheta_3) \sin \vartheta_1 - L_2 \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \\ p_z &= L_3 \cos(\vartheta_2 + \vartheta_3) + L_2 \cos \vartheta_2 + L_1. \end{aligned} \quad (2.30)$$

## 2.4. Radni prostor

Direktna kinematička funkcija pomogla nam je postaviti jednadžbu pozicije i orijentacije prihvatnice u odnosu na postolje manipulatora, ali ponekad je to potrebno izraziti u ovisnosti o vremenu. Poziciju je donekle jednostavno opisati, problem stvara zapis orijentacije. Sve komponente njenih jediničnih vektora moraju zadovoljavati sve postavljene rubne uvjete u svakom vremenskom trenutku. U najjednostavnijem slučaju, poziciju možemo opisati pomoću vektora koordinata prihvatnice u odnosu na temelj manipulatora, a orijentaciju možemo opisati pomoću Eulerovih kutova između prihvatnice i temelja. Za vektor koordinata koristit ćemo vektor  $p$ , a za orijentaciju ćemo koristit vektor  $\phi$  s Eulerovim kutovima.

Dakle, vektor  $x$  opisuje poziciju i orijentaciju prihvatnice u prostoru u kojem on obavlja svoje zadatke, pa taj prostor često nazivamo i radni prostor. Radni prostor opisan je kao područje oko robota koje može dohvatiti prihvatnica nakon što zglobovi manipulatora odrade sva svoja moguća gibanja. To uključuje sve pozicije koje prihvatnica može dohvatiti s barem jednim načinom orijentacije zglobova. Postoji i tzv. spretni dio radnog prostora, a to uključuje sve pozicije koje prihvatnica može dohvatiti s dva ili više načina orijentacije zglobova, što mu omogućuje veću fleksibilnost tijekom obavljanja radnog zadatka. Jasno je da je spretni dio radnog prostora dosta manji od cjelokupnog radnog prostora. Veličina radnog prostora

također je opisana i brojem stupnjeva slobode gibanja manipulatora, rastom broja stupnjeva slobode, raste i radni prostor.

Pošto razlikujemo samo translacijske i rotacijske zglobove, oblik dohvatnog radnog prostora manipulatora opisan je graničnom površinom. Taj volumen može poprimiti ravninski, sferni, toroidni i cilindrični oblik. Pri kupnji robotskog manipulatora, proizvođač mora naznačiti o kakvoj se vrsti radnog prostora kod tog manipulatora radi. Kod stvarno manipulatora, broj varijabli se može razlikovati od broja varijabli dobivenih računanjem direktne kinematske jednadžbe. Također, precizno izračunata pozicija manipulatora može odstupati u stvarnosti zbog greške tolerancije u izradi manipulatora. Tu pogrešku odstupanja nazivamo preciznost, a njezina vrijednost ovisi o dimenzijama robota. Još jedan parametar se često nalazi u brošurama proizvođača, a to je ponovljivost. To je sposobnost robota da se vrati u prethodno dohvaćenu poziciju prihvatnice, a bitna je kod zadavanja pozicije manipulatoru prilikom programiranja. Ponovljivost je većinom jedan red veličine manja od preciznosti, a obje su nekoliko redova veličine manja od maksimalnog dohvata manipulatora, što je isto naznačeno u brošuri.

Kada je broj stupnjeva slobode gibanja manipulatora veći od broja varijabli potrebnih za obavljanje nekog zadatka, tada kažemo da je taj manipulator redundantan. Međutim, to može vrijediti za trenutno zadani zadatak, ali ako je robot namijenjen za obavljanje više različitih radnji, može postojati radnja za koju on neće biti redundantan. Odnosno, da će mu broj stupnjeva slobode gibanja biti jednak broju varijabli zadatka. Zašto je onda redundantnost dobra? Ponekad želimo imati više stupnjeva slobode gibanja, nego što to zahtijeva zadatak. Primjerice, ako nam se na putu između prihvatnice i objekta nalaze neke prepreke, puno ćemo ih lakše prijeći ili zaobići ako imamo više stupnjeva slobode gibanja. Također, ovisno o željenoj poziciji i orijentaciji robota, neku točku u prostoru ćemo moći dohvatiti na nekoliko različitih načina, pa je lakše računalno pronaći optimalan put kretanja manipulatora do te točke uz što veći broj stupnjeva slobode gibanja.

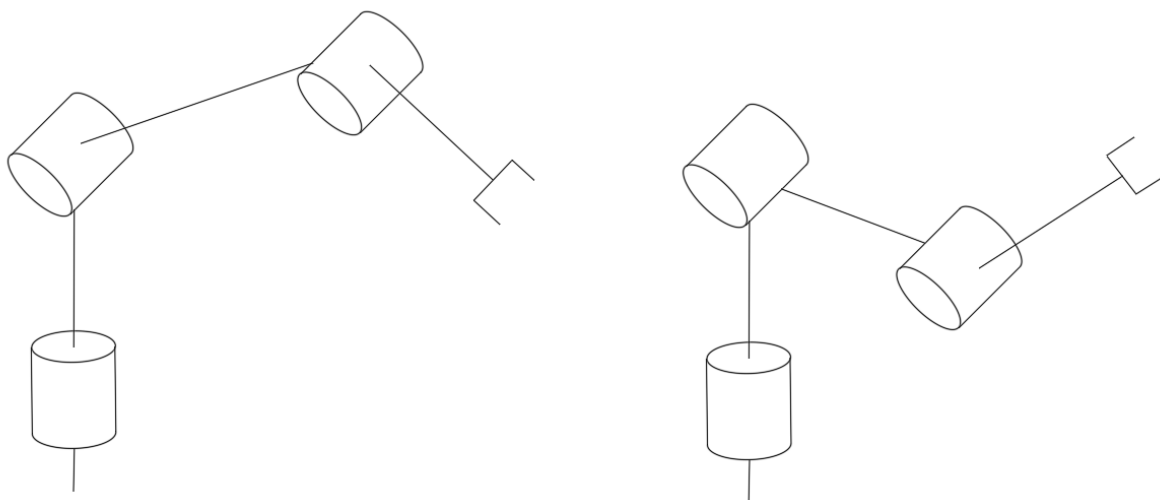
## 2.5. Inverzni kinematski problem

Pomoću direktne kinematske jednadžbe dobili smo vezu između varijabli zglobova te pozicije i orijentacije prihvatnice manipulatora. U inverznom kinematskom problemu određujemo varijable zglobova u odnosu na poziciju i orijentaciju prihvatnice, što je izrazito bitno kako bi postavili jednadžbe zglobova koji omogućuju prihvatnici da dohvati željenu

poziciju i orijentaciju u nekoj točki u prostoru. Za odrediti varijable zglobova potrebno je postaviti matrice transformacije, ali to je u ovom problemu dosta kompliciranije jer:

1. Postavljene jednadžbe su nelinearne, pa je teško odrediti točno rješenje problema.
2. Postoje slučajevi s nekoliko rješenja problema ili čak beskonačno rješenja, primjerice kod prethodno spomenutog redundantnog manipulatora.
3. Rješenja koja uspijemo dobiti nekad se ne smiju implementirati u pojedinom manipulatoru radi njegovog konstrukcijskog rješenja.

Kako god bilo, uvijek ćemo dobiti barem jedno rješenje inverznog kinematskog problema, pod uvjetom da ta točka pripada radnom prostoru manipulatora. Broj rješenja tog problema ovisi o parametrima sustava i o broju stupnjeva slobode gibanja. Kod bilo kojeg manipulatora sa 6 stupnjeva slobode gibanja, bez postavljenih rubnih uvjeta, broj rješenja inverznog kinematskog problema jednak je 16. Većina tih rješenja je primjenjiva u stvarnom manipulatoru. U rješavanju sustava nelinearnih jednadžbi s više nepoznanica pomaže nam postavljanje pretpostavki. Te pretpostavke mogu prekriti neke jednadžbe i varijable, čime smanjujemo broj nepoznanica u sustavu.



**Slika 7. Različita rješenja za identičnu poziciju prihvatnice**

Svaka robotska struktura posjeduje drugačije varijable te ima različit broj stupnjeva slobode gibanja od ostalih, pa će tako imati i različita rješenja inverznog kinematskog problema. Mi ćemo razmotriti rješenje tog problema za manipulator RRR strukture, dakle, sa tri rotacijska zglobova. Neka je zadana neka pozicija prihvatnice manipulatora opisana vektorom  $p$ . Želimo odrediti vektor zglobova  $\mathcal{G} = [\mathcal{G}_1 \quad \mathcal{G}_2 \quad \mathcal{G}_3]^T$ . Postoji nekoliko pravila kojih se potrebno pridržavati prilikom računanja ovog problema. Rješenje problema mora biti

jednoznačno. Nemamo algoritam za rješavanje jednadžbi, ali imamo postupak koji ovisi o strukturi robota. Varijable u jednadžbi ne smijemo dijeliti sa trigonometrijskim funkcijama sin i cos. U zatvorenoj kinematskoj strukturi smo već ranije izrazili vektor pozicije

$p = [p_x \ p_y \ p_z]^T$  u sustavu jednadžbi (1.27). Za potrebe računanja parametara zglobova, izraziti ćemo također i horizontalnu i vertikalnu apsolutnu poziciju točke koju računamo.

$$\begin{aligned} H &= \sqrt{[p_x - (d_2 + d_3) \sin \vartheta_1]^2 + [p_y + (d_2 + d_3) \cos \vartheta_1]^2} \\ V &= p_z - d_1. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Taj sustav možemo riješiti kako bismo izračunali komponente vektora  $\vartheta$  i izrazili ih posebno.

$$\begin{aligned} \vartheta_1 &= \sin^{-1} \frac{p_x (d_2 + d_3) + p_y \sqrt{p_x^2 + p_y^2 - (d_2 + d_3)^2}}{p_x^2 + p_y^2} \\ \vartheta_2 &= \tan^{-1} \frac{V (a_2 + a_3 \cos \vartheta_3) - H \cdot a_3 \sin \vartheta_3}{H (a_2 + a_3 \cos \vartheta_3) + V \cdot a_3 \sin \vartheta_3} \\ \vartheta_3 &= \tan^{-1} \frac{\pm \sqrt{1 - (H^2 + V^2 - a_2^2 - a_3^2)^2}}{(2a_2 a_3)^2}}{H^2 + V^2 - a_2^2 - a_3^2}}{2a_2 a_3}. \end{aligned} \quad (2.33)$$

### 3. DIFERENCIJALNA KINEMATIKA ROBOTA

U prethodnom poglavlju smo izveli jednadžbe koje povezuju poziciju i orijentaciju prihvatnice manipulatora s varijablama zglobova manipulatora, pomoću direktne i inverzne kinematike. U ovom poglavlju bavit ćemo se s diferencijalnom kinematikom, koja govori o brzini translacije i rotacije zglobova i prihvatnice. Brzine dijelova manipulatora opisujemo pomoću Jacobijeve matrice, koja je za svaku strukturu robota različita. Dakle, želimo dovesti u međusobnu vezu brzinu gibanja zglobova s brzinom gibanja prihvatnice, tako da jedno od njih pomnožimo s Jacobijevom matricom  $J$ . Vektor pozicije ćemo i ovdje označiti sa  $p$ , pa će linearna brzina biti označena sa  $\dot{p}$ , a kutnu brzinu iz fizike označujemo sa  $\omega$ , pa će i ovdje to biti slučaj. Varijable gibanja manipulatora koje ćemo koristiti za deriviranje u jednadžbama su sadržane u vektoru  $q = [q_1 \dots q_n]^T$ . To znači da linearnu i kutnu brzinu manipulatora možemo izraziti sljedećim jednadžbama:

$$\begin{aligned}\dot{p} &= J_v \dot{q} \\ \dot{\omega} &= J_\omega \dot{q}.\end{aligned}\tag{3.1}$$

Općeniti vektor brzine sastoji se od članova linearne i kutne brzine, koji koristi općenitu Jacobijevu matricu koju množimo s vektorom  $q$ . Isto tako se i Jacobijeva matrica sastoji od dijelova linearne i kutne Jacobijeve matrice.

$$v = [\dot{p} \quad \dot{\omega}]^T = J \dot{q}.\tag{3.2}$$

Jednadžba direktne kinematike je povezivala poziciju i orijentaciju prihvatnice s varijablama zglobova. Kako je nama potrebna veza između njihovih brzina, koristit ćemo činjenicu da je brzina derivacija pozicije po vremenu i derivirat ćemo direktnu kinematsku jednadžbu, točnije, matricu rotacije. Kao što smo već i prethodno objasnili, umnožak matrice rotacije sa svojom transponiranom matricom jednak je jediničnoj matrici. Uvesti ćemo pomoćnu matricu  $S$  zbog potrebe proračuna.

$$S = \dot{R} \cdot R^T.\tag{3.3}$$

Iz čega možemo izraziti deriviranu matricu rotaciju s jedne strane, a ostale parametre s desne strane jednadžbe.

$$\dot{R} = S \cdot R.\tag{3.4}$$

Tu relaciju iskoristit ćemo kod poveznice između vektora položaja i vektora linearne brzine neke točke, a koje međusobno povezuje derivirana matrica rotacije.

$$\dot{p} = \dot{R} \cdot p = S \cdot R \cdot p.\tag{3.5}$$



Kod kutne brzine je razlika u tome što ne koristimo skalarni, već vektorski produkt s vektorom kutne brzine  $\omega$ .

$$\dot{p} = \omega \times R \cdot p. \quad (3.6)$$

Ako pogledamo sličnost između jednadžbi (3.5) i (3.6) možemo vidjeti da je pomoćna matrica  $S$  jednaka vektorskom produktu između kutne brzine i matrice rotacije. Ta matrica simetrična je s obzirom na svoju dijagonalu, van koje se nalaze komponente kutne brzine oko svake koordinatne osi.

$$S = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.7)$$

Ukupna linearna i kutna brzina jednog štapu jednake su zbroju vlastite brzine te relativne brzine u odnosu na brzinu prethodnog štapu. Ovisno radi li se o translacijskom ili rotacijskom zglobo, u jednadžbu za brzinu iskoristit ćemo linearnu, odnosno kutnu brzinu. Kod translacijskog zgloba nema relativne kutne brzine između štapova, jer oboje se gibaju linearnu, tako da ako jedan zglob ima neku linearnu brzinu, tako će i sljedeći imati identičnu kutnu brzinu.

$$\omega_i = \omega_{i-1}. \quad (3.8)$$

Ukupna linearna brzina jednog štapu, bit će jednaka zbroju linearne brzine prethodnog štapu, vektorskom produktu kutne brzine i udaljenosti štapu od centra rotacije te translacijskoj brzini prethodnog štapu (derivacija pozicije pomnožena s jediničnim vektorom u smjeru osi gibanja).

$$\dot{p}_i = \dot{p}_{i-1} + \dot{q}_i z_{i-1} + \omega_i \times r_r. \quad (3.9)$$

Kod rotacijskog zgloba je razlika što rotacijska jednog štapu u odnosu na drugi nije identična, pa ćemo imati razliku u rotacijskim brzinama. Za kutnu brzinu vrijedi pravilo:

$$\omega_r = \dot{q}_i z_{i-1}. \quad (3.10)$$

Translacijska brzina štapu koristi istu jednadžbu kao i kod translacijskog zgloba.

$$v_r = \omega_r \times r_r. \quad (3.11)$$

Kutna brzina štapu s rotacijskim zglobo jednaka je sumi kutne brzine prethodnog štapu i relativne kutne brzine trenutnog štapu u odnosu na prethodni.

$$\omega_i = \omega_{i-1} + \omega_r = \omega_{i-1} + \dot{q}_i z_{i-1}. \quad (3.12)$$

Linearna brzina štapu jednaka je sumi linearne brzine prethodnog štapu i linearno brzini što ga čini rotacija štapu zbog rotacijskog zgloba.

$$\dot{p}_i = \dot{p}_{i-1} + \omega_i \times r_i. \quad (3.13)$$

Jacobijeva matrica sadrži parametre linearne i kutne brzine, gdje svaki zglobov doprinosi brzini tog gibanja. Kako bi izračunali matricu, moramo i izračunati pojedinačne parametre te matrice. Kako zglobovi mogu biti translacijski ili rotacijski, tako drugačije utječu na kutnu, odnosno linearnu brzinu. Kod kutne brzine imamo dva slučaja. Za slučaj kada je zglobov rotacijski  $J_{oi}$  će biti jednak  $z_{i-1}$ . Za slučaj kada je zglobov translacijski, tada će  $J_{oi}$  biti jednak 0. Kod linearne brzine imamo također dva slučaja. Za prvi slučaj kada imamo translacijski zglobov,  $J_{vi}$  će biti jednak  $z_{i-1}$ . Jedini kompliciraniji slučaj je kod linearne brzine kada imamo rotacijski zglobov, jer moramo uzeti u obzir i relativnu linearnu brzinu koju uzrokuje rotacija zgloba u odnosu na prethodni zglobov. Tada uzimamo vektorski produkt za rotaciju oko osi tog zgloba.

$$\begin{aligned} \dot{q}_i J_{vi} &= \dot{q}_i z_{i-1} \times (p_i - p_{i-1}) \\ J_{vi} &= z_{i-1} \times (p_i - p_{i-1}). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Ako preciznije pogledamo, svi parametri Jacobijeve matrice zadani su pomoću koordinatnih osi zglobova manipulatora. Svi položaji i smjerovi tih osi mogu se pronaći u matricama transformacije koje su prethodno postavljene za odabrani manipulator. To znači da Jacobijevu matricu možemo koristiti za računanje linearnih i kutnih brzina bilo koje točke manipulatora, dokle god je poznata prethodno definirana direktna kinematička funkcija za tu točku. Važno je naglasiti da su kutna i linearna brzina neke točke manipulatora izračunate u odnosu na temeljnu točku manipulatora.

Jacobijeva matrica je specifična za svaku strukturu robota posebno. Pošto ova struktura ima tri rotacijska zgloba, tzv. RRR struktura robota, tako će i njegova Jacobijeva matrica imati tri stupac vektora. Svaki vektor imat će ukupno šest komponenti, po tri za rotacijske i linearne parametre. Općeniti oblik jednadžbe s Jacobijevom matricom će, dakle, izgledati otprilike ovako:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{bmatrix}_{6 \times 3} \cdot \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix}. \quad (3.15)$$

Dakle Jacobijeva matrica bit će dimenzija 6x3 za ovu strukturu manipulatora. Kako se općenita matrica sastoji od  $J_v$  i  $J_\omega$ , a svi zglobovi su joj rotacijski, općeniti zapis matrice izgledat će ovako:

$$J = \begin{bmatrix} J_v \\ J_\omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{i-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times (p - p_{i-1}) \\ R_{i-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}. \quad (3.16)$$

Kako smo pri prethodnom opisivanju parametara objasnili, najbitnija koordinatna os za računanje Jacobijeve matrice bit će os  $z$ . Iz tog razloga smo pomnožili matricu rotacije manipulatora s vektorom  $[0 \ 0 \ 1]^T$ . Tako ćemo, ovisno o indeksu člana, dobiti vektor sačinjen samo od te osi za pojedini zglob, koji čini parametar rotacije sam za sebe. Prvi zglob je zglob temelja, i on ima samo rotaciju oko svoje  $z$  osi.

$$z_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (3.17)$$

Drugi i treći zglob robota se rotiraju, ali njihovo gibanje ovisi i o rotaciji prvog zgloba manipulatora, što se vidi i iz njegove rotacije za tu os.

$$z_1 = z_2 = \begin{bmatrix} \sin q_1 \\ -\cos q_1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.18)$$

Za parametar linearne Jacobijeve matrice, potreban nam je njegov vektorski produkt s relativnim vektorom pozicije za taj zglob. Pošto ovaj manipulator ima tri rotacijska zgloba, potrebno je dakle izračunati tri vektora pozicije za izračun matrice. Prvi zglob je zglob postolja, a pošto je njegova pozicija u ishodištu globalnog koordinatnog sustava manipulatora, njegov vektor bit će jednak početnom vektoru položaja. Isto vrijedi i za drugi zglob, koji je na identičnoj poziciji kao i prvi zglob, pomaknut po  $z$  osi za fiksnu dimenziju koja ovisi o konstrukciji manipulatora.

$$p_0 = p_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.19)$$

Kako se prva dva zgloba rotiraju, tako i pozicija trećeg zgloba ovisi o kutovima rotacije prethodna dva zgloba. Kutnu brzinu kod Jacobijeve matrice označavali smo s parametrom  $\dot{q}_i$ , a znamo da je kutna brzina jednaka prvoj derivaciji kuta gibanja, tako ćemo kut zakreta prvih dvaju zglobova označiti sa  $q_1$ , odnosno  $q_2$ . Koristimo se i prethodno definiranom dimenzijom  $a_2$ .

$$p_2 = \begin{bmatrix} a_2 \cos q_1 \cos q_2 \\ a_2 \sin q_1 \cos q_2 \\ a_2 \sin q_2 \end{bmatrix}. \quad (3.20)$$

Za izračunati relativnu poziciju pojedinog zgloba, potrebna nam je pozicija prihvatnice manipulatora. Za općenitu poziciju prihvatnice robota, potrebno je uzeti u obzir sve tri rotacije, sa svim njihovim dimenzijama i kutovima. Nakon odrađenih zakreta, pozicija prihvatnice će biti:

$$p = \begin{bmatrix} a_2 \cos q_1 \cos q_2 + a_3 \cos q_1 \cos(q_2 + q_3) \\ a_2 \sin q_1 \cos q_2 + a_3 \sin q_1 \cos(q_2 + q_3) \\ a_2 \sin q_2 + a_3 \sin(q_2 + q_3) \end{bmatrix}. \quad (3.21)$$

Vidljivo je kako jednadžbe (3.17) i (3.18) čine kutni dio Jacobijeve matrice, dok jednadžbe (3.19), (3.20) i (3.21) se koriste za linearni dio Jacobijeve matrice. Uvrstimo li sve navedene parametre u matricu, te izračunamo i sredimo izraze, njezin konačni oblik je sljedeći.

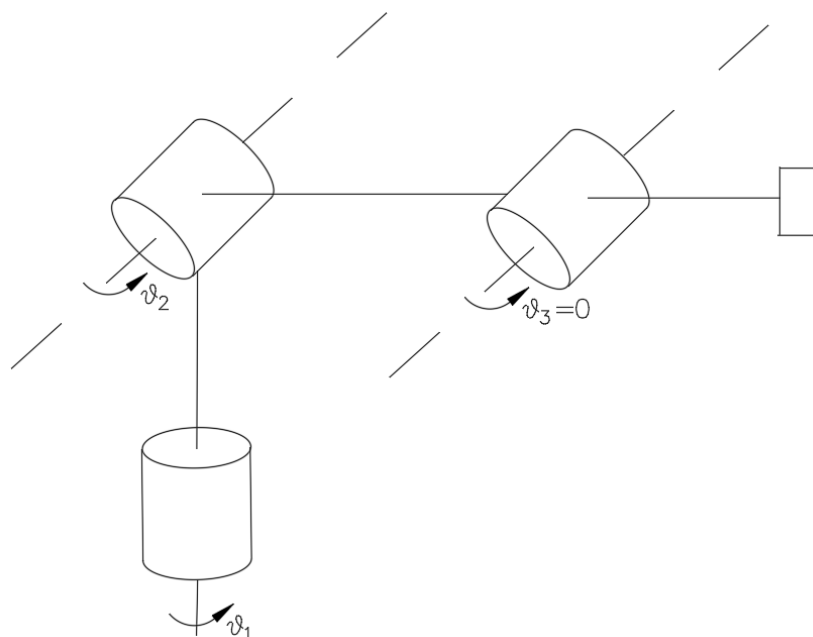
$$J = \begin{bmatrix} -a_2 s q_1 c q_2 - a_3 s q_1 c (q_2 + q_3) & -a_2 c q_1 s q_2 - a_3 c q_1 s (q_2 + q_3) & -a_3 c q_1 s (q_2 + q_3) \\ a_2 c q_1 c q_2 + a_3 c q_1 c (q_2 + q_3) & -a_2 s q_1 s q_2 - a_3 s q_1 s (q_2 + q_3) & -a_3 s q_1 s (q_2 + q_3) \\ 0 & a_2 c q_2 + a_3 c (q_2 + q_3) & a_3 c (q_2 + q_3) \\ 0 & s q_1 & s q_1 \\ 0 & -c q_1 & -c q_1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.22)$$

### 3.1. Singularnost

U svojoj suštini, Jacobijeva matrica povezuje parametre brzine gibanja zglobova s vektorom brzina gibanja prihvatnice manipulatora, gdje direktno ovise o parametru  $q$ . Ako je on nedovoljno određen, možemo reći da je matrica singularna. Kada je matrica singularna, može doći do nekoliko potencijalnih problema. Označava stanje smanjene gibljivosti manipulatora, pa prihvatnica možda neće moći odraditi neko određeno gibanje. Prethodno

smo već objasnili da inverzni kinematski problem treba imati jedno rješenje, ali kod singularnosti ono može imati beskonačan broj rješenja. Također, da bi došli u određenu poziciju, koja nije daleko od naše trenutne, prihvatnica neće morati prijeći veliki put, pa će ga moći odraditi pri manjim brzinama gibanja, ali će zato jedan od zglobova možda morati odraditi velike brzine gibanja, što dovodi do nepreciznosti radnog zadatka, nepotrebnog trošenja dijelova te opasnosti preopterećenja sustava. Singularnost možemo podijeliti u dvije skupine:

1. Unutarnje singularnosti – događaju se kada se unutar radnog prostora robota dvije ili više osi lokalnih koordinatnih sustava zglobova manipulatora poravnaju na istom pravcu i to predstavlja veliki problem za radni sustav jer je to pozicija u kojoj postoji velika šansa za pogrešku u radu manipulatora.
2. Granične singularnosti – događaju se na vanjskim i unutarnjim granicama radnog prostora robota, dakle, na njenim najudaljenijim i najbližim točkama ishodištu koordinatnog sustava manipulatora. Ova singularnost isto predstavlja problem za rad manipulatora, ali ju je vrlo lako izbjeći tako što ne dovodimo prihvatnicu u te točke radnog prostora.



**Slika 8. Singularnost RRR strukture manipulatora**

Pošto svaka struktura robota ima drugačiji izračun singularnosti svoje matrice, tako i RRR struktura robota ima svoju. Pri singularnosti ustvari određujemo determinantu Jacobijeve matrice za tu strukturu. Za to nam je potrebna kvadratna matrica, a kako smo

prethodno izveli Jacobijevu matricu dimenzija  $6 \times 3$ , to neće biti moguće bez nekih promjena.

Primijetimo kako se Jacobijeva matrica sastoji od linearnu dijela i kutnog dijela, gdje je svaki dio ustvari kvadratna matrica dimenzija  $3 \times 3$ . Iskoristit ćemo tu činjenicu i uzeti linearni dio Jacobijeve matrice, te umnoškom i sumom parametara odrediti njenu determinantu, čiji je konačni rezultat:

$$\det(J_v) = -a_2^2 a_3 \cos q_2 \sin q_3 - a_2 a_3^2 \cos(q_2 + q_3) \sin q_3. \quad (3.23)$$

Ako uzmemo da je fizikalno nemoguće da parametri  $a_2$  i  $a_3$  budu jednaki nuli, jer im je duljina veća od nule i ovisna o konstrukciji manipulatora, onda je determinanta jednaka nuli samo u slučaju da je parametar  $\sin q_3$  jednak nuli. To je moguće samo u sljedeća dva slučaja:

$$\begin{aligned} q_3^1 &= 0 \\ q_3^2 &= \pi. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Što bi značilo da je srednji zglob u potpunosti ispružen ili je u potpunosti uvučen, za što postoji naziv *lakatna singularnost*. Također, kada je zglob uvučen, tada se  $z$  os prihvatnice poklapa sa  $z_0$  osi temelja manipulatora, što nazivamo *ramena singularnost*. Ove dvije singularnosti je vrlo lako prepoznati unutar radnog prostora manipulatora, pa ih je zbog toga lako u potpunosti izbjeći u fazi planiranja putanje gibanja prihvatnice manipulatora.

### 3.2. Redundantnost manipulatora

Redundantnost smo već ranije definirali kao vezu između stupnjeva slobode gibanja manipulatora i broja radnih varijabli manipulatora u radnom prostoru koji su potrebni za neki određeni radni zadatak. Kod RRR strukture manipulatora, obje vrijednosti su jednake 3, gdje su nam važni parametri položaja. Ovaj manipulator po definiciji nije redundantan, niti može postati redundantan kada dobije radni zadatak koji je potrebno obaviti u istoj ravnini. Takav radni zadatak postavlja rubne uvjete na parametre linearne brzine prihvatnice manipulatora.

$$v = J_v \dot{q}. \quad (3.25)$$

Pošto se radi o gibanju unutar iste ravnine, vektor linearne brzine  $v$  će se sastojati od samo jednog parametra (dimenzija  $r \times 1$ ), dok će mu pripadajuća Jacobijeva matrica  $J_v$  biti dimenzija  $r \times n$ . Da bi zadovoljili pravila matričnog množenja, vektor brzine zglobova  $\dot{q}$  će biti dimenzija  $n \times 1$ . Logično je da ako je vrijednost parametra  $r$  manja od vrijednosti parametra  $n$ , da će manipulator biti redundantan s redundantnim stupnjevima slobode gibanja. Neki stupnjevi pokretljivosti koji su nam viška, mogu biti iskorišteni u proizvoljno odabranom vektoru brzina zglobova, tako da se bavi unutarnjim gibanjima manipulatora tako

da ne mijenja poziciju niti orijentaciju prihvatnice, ali zglobove i štapove manipulatora dovodi u povoljniji položaj i tako omogućava manipulatoru učinkovitije rješavanje zadanog radnog zadatka.

### 3.3. Analitička Jacobijeva matrica

Jacobijeva matrica pokazuje kako brzina zglobova doprinosi parametrima linearne i kutne brzine prihvatnice manipulatora. Problem nastaje kada su pozicija i orijentacija prihvatnice definirani s minimalnim brojem parametara, pa je teško dobiti analitičku vezu između linearne i kutne Jacobijeve matrice. Koristit ćemo diferencijalne jednadžbe za njihovu poveznicu. Tako recimo u jednadžbi za linearnu brzinu prihvatnice Jacobijevu matricu možemo prikazati kao diferencijal.

$$\dot{p} = J_v \dot{q} = \frac{\partial p}{\partial q} \dot{q}. \quad (3.26)$$

Pošto su pozicija i orijentacija prihvatnice definirani s minimalnim brojem parametara, tako i kutnu brzinu možemo prikazati koristeći samo jedan parametar  $\phi$  kao kut zakreta. Njena prva derivacija je kutna brzina, a druga je kutno ubrzanje. Isto kao i za linearni dio, i u jednadžbi za kutnu brzinu prihvatnice Jacobijevu matricu možemo prikazati kao diferencijal navedenog kuta.

$$\dot{\phi} = J_\omega \dot{q} = \frac{\partial \phi}{\partial q} \dot{q}. \quad (3.27)$$

Kada to sve stavimo u jedan vektor koji se sastoji od linearne i kutne brzine gibanja, dobijemo sljedeću jednadžbu:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_v \\ J_\omega \end{bmatrix} \dot{q} = J_A \cdot \dot{q}. \quad (3.28)$$

U ovoj jednadžbi matrica  $J_A$  ne predstavlja klasičnu Jacobijevu jednadžbu već analitičku Jacobijevu matricu, jer kutnu brzinu prihvatnice manipulatora ne prikazujemo pomoću kuta zakreta  $\phi$  i njegovih derivacija. S fizikalne strane gledano, značenje vektora  $\omega$  je prirodnije od značenja vektora  $\dot{\phi}$ . Svaka od komponenti vektora  $\omega$  predstavlja komponentu kutne brzine u odnosu na osi temeljnog koordinatnog sustava manipulatora. Za razliku od toga, komponente vektora  $\dot{\phi}$  predstavljaju neokomite komponente kutne brzine u odnosu na osi temeljnog koordinatnog sustava manipulatora, ovisno o tome kako se mijenja orijentacija

prihvatnice u prostoru. Kako je vektor  $\dot{\phi}$  prva derivacija vektora  $\phi$ , što znači da će integral vektora  $\dot{\phi}$  kao rezultat dati vektor  $\phi$ , kod vektora  $\omega$  nije jasno definiran rezultat integracije.

Najbolji način da povežemo ove dvije matrice je taj da uvedemo matricu transformacije, koju ćemo nazvati matrica  $T_A$ . Umnoškom jedne matrice s matricom transformacije, kao rezultat ćemo dobiti drugu matricu.

$$J = T_A J_A. \quad (3.29)$$

Ta jednadžba najbolje pokazuje da se Jacobijeve matrice razlikuju, ovisno o sadržaju matrice transformacije. Važno je reći da Jacobijevu matricu o kojoj smo pričali u prethodnim poglavljima često nazivaju i geometrijski Jacobijan, dok se matrica koju smo u ovom poglavlju analizirali naziva analitički Jacobijan. Analitički Jacobijan se najčešće koristi pri diferencijalnim računima, dok se geometrijski Jacobijan koristi za definiranje fizikalnih načela manipulatora. O vezi između te dvije matrice odlučivat će i broj stupnjeva slobode gibanja pojedinog manipulatora.

### 3.4. Statika manipulatora

Kao i općenito kod statike, ovdje je također ideja ispitati ravnotežu manipulatora i provjeriti sve sile i momente koji na njega djeluju. Potrebno je dovesti u vezu sile koje su primijenjene na prihvatnicu manipulatora te na sve pojedine zglobove kako bi odredili njegovu sveukupnu statiku u stanju ravnoteže. Sve fizikalne veličine do sada su bile u obliku matričnog ili vektorskog zapisa, pa ćemo tako za torzijsko naprezanje koristiti vektor  $\tau$ , a vektor sila ćemo značiti kao vektor  $F$ . Kako bi ih povezali unutar iste jednadžbe, koristit ćemo metodu virtualnog rada. Parametri pomaka ovise o varijabli zglobova  $q$ , pa će se virtualni pomaci poklapati s osnovnim pomacima dijelova manipulatora. Torzijski rad jednak je djelujućem torzijskom momentu na zakretnom kutu koji je odradio.

$$dW_\tau = \tau \cdot dq. \quad (3.30)$$

Kod rada što ga obavi sila moramo uzeti u obzir dva elementa. Prvi je sila koja djeluje na manipulator, a drugi je moment koji uzrokuje linearno gibanje. Rad ta dva elementa potrebno je zbrojiti kako bi dobili konačni rad sile. U izraz za rad možemo uvrstiti i Jacobijeve matrice.

$$\begin{aligned} dW_F &= f \cdot dp + M \cdot \omega dt \\ &= f \cdot J_v dq + M \cdot J_\omega dq \\ &= F \cdot J dq. \end{aligned} \quad (3.31)$$



Jednadžbe (3.29) i (3.30) čine sustav jednadžbi jer se virtualni i stvarni pomaci poklapaju. Pošto se pomaci poklapaju, kako bi manipulator bio u stanju ravnoteže potrebno je i da im se virtualni radovi poklapaju, odnosno da je njihova razlika jednaka nuli.

$$\delta W_\tau - \delta W_F = 0. \quad (3.32)$$

Primijetimo da smo u prethodnoj jednadžbi umjesto oznake diferencijala  $d$  koristili oznaku  $\delta$  za diferencijal virtualnog rada. U stanju ravnoteže, kako ne bi bila narušena statika manipulatora, sve sile koje djeluju na njega moraju biti izjednačene s momentima, uz faktor Jacobijeve matrice, ovisno o njihovim veličinama.

$$\tau = J^T \cdot F. \quad (3.33)$$

Ili ako to želimo pojednostaviti, vidljivo je da je veza između sila koje djeluju na prihvatnicu manipulatora i momenata koji djeluju na zglobove manipulatora jednaka transponiranoj Jacobijevoj matrici, u ovom slučaju geometrijskoj. S ovime završavamo pregled kinematike robotskog manipulatora, te prelazimo na dinamiku istog.

## 4. DINAMIKA ROBOTA

U prethodnim poglavljima smo detaljno proučili kinematiku robota i neke od najbitnijih specifikacija manipulatora. Ono što nam fali za detaljno opisivanje ponašanja samog robota je njegova dinamika, čime ćemo se baviti u ovom poglavlju, kako bi pobliže objasnili upravljanje samim robotom. Manipulatori predstavljaju komplicirani dinamički sustav koji, da bismo ga detaljnije objasnili, potrebno je obraditi ih na što sistematičniji način. Iskoristit ćemo Lagrangeove zakone mehanike, jer na vrlo jednostavan način možemo analizirati komplicirane dinamičke strukture. Dinamičke jednačbe povezuju sile i momente s pozicijama, brzinama i ubrzanjima, te ih rješavamo kako bi dobili jednačbe gibanja manipulatora. Mogli bi to interpretirati i na drugačiji način, jer kada već definiramo gibanje manipulatora, onda pomoću tih jednačbi nekada želimo saznati koje su nam sile i momenti potrebni kako bi ostvarili to gibanje. Postavljanjem dinamičkih uvjeta na manipulator, dobijemo sustav jednačbi koje je veoma teško trivijalno riješiti, pa ih zato pojednostavljujemo i zapisujemo u matricnom obliku kako bi ih brže i jednostavnije riješili. Ono što nas najviše zanima iz tih matrica su inercije članova manipulatora, pogotovo zglobova. Drugim riječima, želimo znati vezu između momenta i ubrzanja u zglobovima, te vezu između momenta u jednom zglobovima te ubrzanja u nekom drugom zglobovima. Ako su iznosi inercija dovoljno mali, onda možemo tretirati manipulator kao sklop više neovisnih mehaničkih sustava.

Sile i momente koje je potrebno odrediti moraju biti dovoljno veliki da svladaju sve probleme i smetnje na putu. Jedno od otežavajućih okolnosti po zglobove robota je gravitacija koju je također potrebno savladati. Ostale sitne otpore gibanju, poput otpora zraka pri malim brzinama, ćemo zanemariti jer su po veličini vrlo malene, pa ne radi veliku razliku u računu ako ih zanemarimo, a olakšat ćemo si proračun. Iako su jednačbe teške za riješiti jer nekada znaju imati i po nekoliko tisuća parametara koje je potrebno uzeti u obzir, mi ćemo ih pojednostaviti na brz i vrlo lagan način. Iz pojednostavljenih jednačbi lako ćemo doći do parametara koji su nam potrebni za upravljanje robotom.

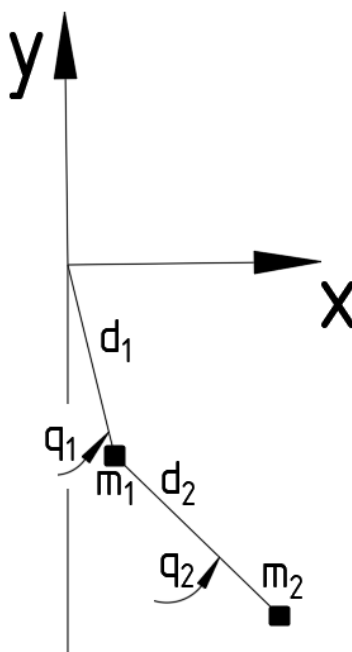
### 4.1. Lagrangeova jednačba

Lagrangeovu matricu označavamo sa  $L$ , a može biti definiran kao razlika između kinetičke i potencijalne energije nekog sustava.

$$L = E_k - E_p. \quad (4.1)$$

Ove ukupne energije mogu biti iskazane u bilo kojem koordinatnom sustavu, kako bi se olakšalo njihovo računanje. Nije potrebno izraziti ih u Kartezijevom sustavu ako će to zakomplicirati njihove jednačbe. Dinamička jednačba za prikaz proizvoljnih koordinata je sljedeća:

$$F_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i}. \quad (4.2)$$



Slika 9. Primjer dinamičkog sustava s 2 štapa

Prethodno prikazana jednačba je jednačba za izračun sile ili momenta na zglobov manipulatora, gdje je  $q_i$  koordinata u kojima izražavamo potencijalnu i kinetičku energiju, a njena derivacija označava brzinu u istom tom koordinatnom sustavu. Jednačba je prikazana u općenitom obliku. Kako bi lakše shvatili o čemu se radi, objasnit ćemo na primjeru manipulatora s dva štapa koji se rotiraju u Kartezijevom koordinatnom sustavu u istoj ravnini (naš manipulator ima tri štapa, ali će jednačba s dva štapa biti puno jednostavnija za pojasniti). Na oba kraja štapova duljine  $l_i$  nalazi se masa  $m_i$  i koriste se općenitim koordinatama  $q_i$ . Počet ćemo s izračunom kinetičke energije prve mase sustava, koristeći se s jednačbama koje od prije znamo iz fizike.

$$E_{K1} = \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{q}_1^2. \quad (4.3)$$

Nakon kinetičke energije, možemo također izračunati i potencijalnu energiju prve mase sustava. Ona ovisi direktno o visini, odnosno položaju mase u prostoru.

$$E_{p1} = -m_1 g l_1 \cos q_1. \quad (4.4)$$

Za drugu masu se postupak već lagano komplicira, jer njezina pozicija ne ovisi samo o sebi, već i o poziciji prve mase. Prvo ćemo morati definirati njenu poziciju, kako bi mogli dobiti jednadžbu za njihove brzine iz koje ćemo dobiti kinetičku energiju. Za početak potrebno je naći udaljenost po osima  $x$  i  $y$  od ishodišta u Kartezijevom koordinatnom sustavu.

$$\begin{aligned} x_2 &= l_1 \sin q_1 + l_2 \sin(q_1 + q_2) \\ y_2 &= -l_1 \cos q_1 - l_2 \cos(q_1 + q_2). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Komponente brzine u Kartezijevom koordinatnom sustavu jednake su prvim derivacijama prethodno dobivenih koordinata položaja.

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= \dot{q}_1 l_1 \cos q_1 + (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) l_2 \cos(q_1 + q_2) \\ \dot{y}_2 &= \dot{q}_1 l_1 \sin q_1 + (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) l_2 \sin(q_1 + q_2). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Izračunali smo brzinu po pojedinoj koordinatnoj osi, ali kako bi dobili ukupnu brzinu gibanja, potrebno je koristiti Pitagorin poučak te izračunati korijen od sume prethodna dva parametra kada se svaki od njih kvadrira, te dobijemo konačno rješenje brzine.

$$v_2^2 = l_1^2 \dot{q}_1^2 + l_2^2 (\dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_1 \dot{q}_2 + \dot{q}_2^2) + 2l_1 l_2 (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_1 \dot{q}_2) \cos q_2. \quad (4.7)$$

Pomoću te brzine možemo izračunati kinetičku energiju druge mase, gdje i prva i druga masa utječu na brzinu gibanja.

$$E_{K2} = \frac{1}{2} m_2 \left( l_1^2 \dot{q}_1^2 + l_2^2 (\dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_1 \dot{q}_2 + \dot{q}_2^2) + 2l_1 l_2 (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_1 \dot{q}_2) \cos q_2 \right). \quad (4.8)$$

Kako smo za prvu masu izračunali i potencijalnu i kinetičku energiju, isto je potrebno napraviti i za drugu masu. Kinetičku energiju smo prethodno izračunali, pa je sada ostalo za izračunati potencijalnu energiju druge mase.

$$E_{p2} = -m_2 g l_1 \cos q_1 - m_2 g l_2 \cos(q_1 + q_2). \quad (4.9)$$

Kinetičku energiju dviju masa je potrebno međusobno zbrojiti, isto kao i potencijalne energije istih masa, te to sve zajedno uvrstiti u Lagrangeovu jednadžbu za dobiti njegov ukupni koeficijent.

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} (m_1 + m_2) l_1^2 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_2^2 (\dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_1 \dot{q}_2 + \dot{q}_2^2) + m_2 l_1 l_2 \cos q_2 (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_1 \dot{q}_2) \\ &\quad + (m_1 + m_2) g l_1 \cos q_1 + m_2 g l_2 \cos(q_1 + q_2). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Kako smo koristili koordinatne oznake  $\dot{q}_1$  i  $\dot{q}_2$ , da dobijemo diferencijalne jednačbe iz Lagrangeovog koeficijenta, potrebno je Lagrangeovu jednačbu derivirati po tim koordinatama. Krenimo od koordinate  $\dot{q}_1$ .

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = \left[ (m_1 + m_2) l_1^2 + m_2 l_2^2 + 2m_2 l_1 l_2 \cos q_2 \right] \ddot{q}_1 + \left[ m_2 l_2^2 + m_2 l_1 l_2 \cos q_2 \right] \ddot{q}_2 - 2m_2 l_1 l_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 \sin q_2 - m_2 l_1 l_2 \dot{q}_2^2 \sin q_2. \quad (4.11)$$

Nakon što smo pronašli derivaciju po vremenu prve derivirane koordinate, sada je potrebno naći derivaciju po samoj toj koordinati  $q_1$ .

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} = -(m_1 + m_2) g l_1 \sin q_1 - m_2 g l_2 \sin(q_1 + q_2). \quad (4.12)$$

Sada to možemo izračunati po uzoru na jednačbu (4.2) te kao rezultat dobiti moment torzije za prvi član manipulatora.

$$T_1 = \left[ (m_1 + m_2) l_1^2 + m_2 l_2^2 + 2m_2 l_1 l_2 \cos q_2 \right] \ddot{q}_1 + \left[ m_2 l_2^2 + m_2 l_1 l_2 \cos q_2 \right] \ddot{q}_2 - 2m_2 l_1 l_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 \sin q_2 - m_2 l_1 l_2 \dot{q}_2^2 \sin q_2 - (m_1 + m_2) g l_1 \sin q_1 - m_2 g l_2 \sin(q_1 + q_2). \quad (4.13)$$

Isti proračun možemo napraviti i za moment drugog člana. Prvo ćemo derivirati po koordinati  $\dot{q}_2$ .

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = m_2 l_2^2 \ddot{q}_1 + m_2 l_2^2 \ddot{q}_2 + m_2 l_1 l_2 \dot{q}_1 \cos q_2 - m_2 l_1 l_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 \sin q_2. \quad (4.14)$$

Nakon što smo pronašli derivaciju po vremenu prve derivirane koordinate, sada je potrebno naći derivaciju po samoj toj koordinati  $q_2$ .

$$\frac{\partial L}{\partial q_2} = -m_2 l_1 l_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 \sin q_1 - m_2 g l_2 \sin(q_1 + q_2). \quad (4.15)$$

Prethodne dvije derivacije potrebno je međusobno zbrojiti po zakonu iz jednačbe (4.2) kako bi dobili moment torzije drugog člana manipulatora.

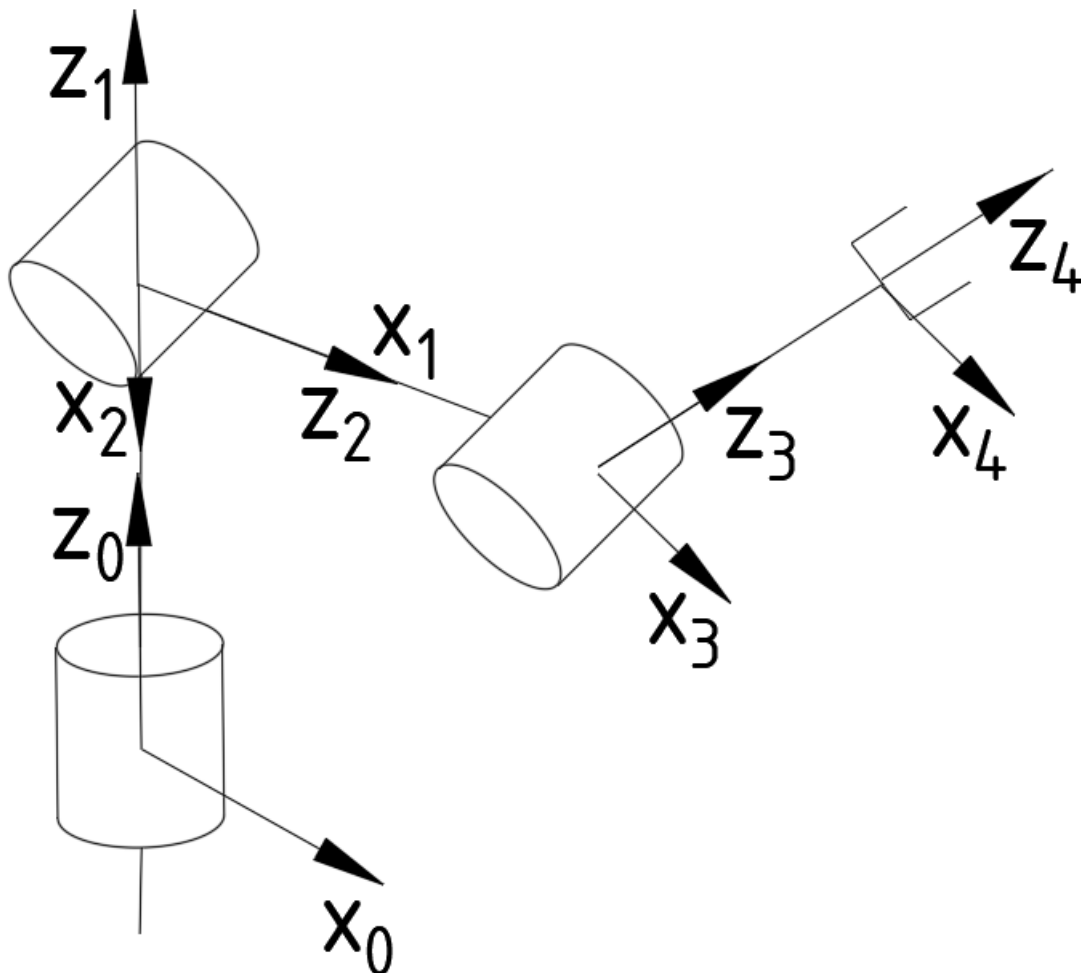
$$T_2 = \left[ m_2 l_2^2 + m_2 l_1 l_2 \cos q_2 \right] \ddot{q}_1 + m_2 l_2^2 \ddot{q}_2 - 2m_2 l_1 l_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 \sin q_2 - m_2 l_1 l_2 \dot{q}_1^2 \sin q_2 - m_2 g l_2 \sin(q_1 + q_2). \quad (4.16)$$

Koeficijenti koji stoje uz derivacije po osima predstavljaju sile inercije između pojedinih zglobova, te redom kako se javljaju, tako ih i popunjavamo u matricu koju izvučemo iz diferencijalnih jednačbi. Jasno, sve parametre u prethodnim jednačbama označili smo u općenitom obliku. Kada radimo bilo kakvu vrstu analize iz ovakvih jednačbi, u njih uvrštavamo njihove prave vrijednosti, ovisno o njihovim duljinama, masama i slično. S obzirom na vrijednosti njihovih parametara, iz prethodno izračunatih jednačbi, vrlo je

jednostavno dobiti vrijednosti sila i momenata koje je potrebno koristiti u danom manipulatoru, što će još lakše biti učiniti iz matričnog zapisa diferencijalnih jednačbi koje opisuju ponašanje manipulatora. Ovakvu identičnu analizu provesti ćemo također za RRR manipulator.

#### 4.2. Dinamika RRR manipulatora

Analizu dinamike RRR manipulatora radit ćemo po osima koje smo prethodno definirali za Denavit-Hartenbergove parametre, a to su osi  $q_1$ ,  $q_2$  i  $q_3$ . Za definiranje njihovih parametara odlučili smo se za Lagrangeovu metodu umjesto Newton-Eulerove pošto je ona prekomplikirana za korištenje na ovoj vrsti manipulatora. Lagrangeova metoda je najbolja i najlakše primjenjiva metoda za izračunati momente torzije u pojedinim zglobovima.



Slika 10. Dinamika RRR manipulatora

Krenuti ćemo s proračunom osi  $q_1$ . Za početak ćemo prvo definirati Denavit-Hartenbergove parametre za ovaj zglob. U prijašnjim poglavljima za kut zakreta koristili smo oznaku  $\mathcal{G}$ , ali ćemo ovdje radi diferencijalnih jednadžbi koristiti oznaku  $q$ .

$$\begin{aligned} a_0 &= 0 \\ \alpha_0 &= 0 \\ d_1 &= \frac{L_1}{2} \\ \mathcal{G}_1 &= q_1. \end{aligned} \tag{4.17}$$

Za proračun energija prvog zgloba, potreban nam je centar mase prvog štapa. Njegove koordinate jednostavno je zapisati, pošto je uvijek vertikalno postavljen,  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = L_1 / 2$ . Za računanje ukupne kinetičke energije svakog člana koristit ćemo jednadžbu koja zbraja kinetičke energije linearnog i rotacijskog gibanja.

$$E_{ki} = \frac{m_i v_i^2}{2} + \frac{I_i \omega_i^2}{2}. \tag{4.18}$$

Pošto prvi zglob samo rotira oko vlastite osi  $z$ , njegov vektor linearne brzine bit će jednak nul vektoru, što znači da u tom zglobu nema nikakve linearne brzine.

$$v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{4.19}$$

Iako je linearna brzina jednaka nuli, zbog prethodno spomenute rotacije oko osi  $z$ , imat ćemo iznos rotacijske brzine za taj zglob.

$$\omega_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_1 \end{bmatrix}. \tag{4.20}$$

U općoj jednadžbi za kinetičku energiju, za rotacijski dio sume energije, oznaka  $I$  predstavlja moment inercije dijela manipulatora koji rotira. Općenita matrica momenta inercije izgleda ovako:

$$I_i = \begin{bmatrix} \frac{m_i L_i^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_i L_i^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_i L_i^2}{12} \end{bmatrix}. \tag{4.21}$$

Naravno, ovisno o broju zgloba, tako je potrebno i promijeniti indeks u oznaci matrice inercije. Za matricu prvog zgloba potrebno je uvrstiti broj 1.

$$I_1 = \begin{bmatrix} \frac{m_1 L_1^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_1 L_1^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.22)$$

Ako nam je poznata masa prvog člana  $m_1$  možemo uvrstiti sve prethodno navedene članove u jednadžbu za kinetičku energiju prvog zgloba.

$$E_{K1} = \frac{m_1 L_1^2 \dot{q}_1^2}{24}. \quad (4.23)$$

Ovo poglavlje započeli smo s jednim jednostavnim primjerom da vidimo kakav je postupak Lagrangeove metode u kojoj smo osim kinetičke energije računali i potencijalnu energiju sustava. Kako smo već izračunali kinetičku energiju prvog zgloba, ostaje da još izračunamo potencijalnu energiju tog zgloba. Iskoristit ćemo općenitu jednadžbu potencijalne energije  $E_p = mgh$ . Visina koju trebamo za proračun jednaka je udaljenosti između centra mase prvog člana manipulatora i temelja istog.

$$E_{p1} = \frac{m_1 g L_1}{2}. \quad (4.24)$$

Za svaki zglob potrebno je izračunati njegovi kinetičku i potencijalnu energiju. Pošto smo to uspješno napravili, možemo nastaviti s proračunom drugog zgloba. Kao i za prvi zglob, ovdje ćemo također prvo postaviti Denavit-Hartenbergove parametre.

$$\begin{aligned} a_1 &= 0 \\ \alpha_1 &= \frac{\pi}{2} \\ d_2 &= 0 \\ \vartheta_2 &= q_1 + \frac{\pi}{2}. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Kod proračuna ovog zgloba pomoći će nam i ako postavimo Denavit-Hartenbergove parametre i sljedećeg zgloba.



$$\begin{aligned}
a_2 &= \frac{L_2}{2} \\
\alpha_2 &= 0 \\
d_3 &= 0 \\
g_3 &= 0.
\end{aligned}
\tag{4.26}$$

Centar mase drugog štapa potreban nam je kako bismo izračunali brzine ovog dijela manipulatora, a nakon toga i kinetičku i potencijalnu energiju. Centar mase drugog štapa nalazi se na polovici njegove duljine, a nama je bitna njegova pozicija u nekom trenutku u odnosu na ishodište temelja manipulatora.

$$P_2^0 = \begin{bmatrix} -\frac{L_2}{2} \cos q_1 \sin q_2 \\ -\frac{L_2}{2} \sin q_1 \sin q_2 \\ L_1 + \frac{L_2}{2} \cos q_2 \end{bmatrix}.
\tag{4.27}$$

Za razliku od prvog zgloba, drugi zglob će imati komponentu linearne brzine zbog rotacije prvog zgloba u temelju manipulatora. Tražimo brzinu centra mase drugog štapa, koji će ovisiti o kutu rotacije prvog zgloba  $q_1$ , ali i kako drugi zglob može rotirati oko druge osi, to ćemo morati uzeti u obzir i računati rotaciju prvog zgloba u kombinaciji s rotacijom drugog zgloba  $q_1$ . Za njihove brzine koristimo iste oznake, samo njihove prve derivacije. Brzina drugog člana tada je:

$$v_2 = \begin{bmatrix} \frac{L_2}{2} \dot{q}_1 \sin q_1 \sin q_2 - \frac{L_2}{2} \dot{q}_2 \cos q_1 \cos q_2 \\ -\frac{L_2}{2} \dot{q}_1 \sin q_1 \cos q_2 - \frac{L_2}{2} \dot{q}_2 \cos q_1 \sin q_2 \\ -\frac{L_2}{2} \dot{q}_2 \sin q_2 \end{bmatrix}.
\tag{4.28}$$

Kvadriranje vektora brzina ustvari je množenje vektora brzine sa svojom transponiranom matricom, što će rezultirati sljedećom jednadžbom.

$$v_2 v_2^T = \frac{L_2^2 \dot{q}_2^2 \sin^2 q_2}{4} + \frac{L_2^2 \dot{q}_2^2}{4}.
\tag{4.29}$$

Matrica inercije drugog člana jednaka je kao i prethodna koja je izvedena iz općenite matrice inercije, samo ovdje koristimo indeks 2.

$$I_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_2 L_2^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_2 L_2^2}{12} \end{bmatrix}. \quad (4.30)$$

Što se kutne brzine tiče, ovaj član ima sve članove različite od nule, ovisno o kojoj se osi radi. Treba paziti koji zglob utječe na koju os rotacije.

$$\omega_2 = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \cos q_2 \\ -\dot{q}_1 \sin q_2 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix}. \quad (4.31)$$

Ako nam je poznata masa drugog člana  $m_2$  možemo uvrstiti sve prethodno navedene članove u jednadžbu za kinetičku energiju drugog zgloba.

$$E_{K2} = \frac{m_2 L_2^2 \dot{q}_2^2 \sin^2 q_2}{8} + \frac{m_2 L_2^2 \dot{q}_2^2}{6} + \frac{m_2 L_2^2 \dot{q}_1^2 \sin^2 q_2}{24}. \quad (4.32)$$

Uz kinetičku energiju drugog člana, potreban nam je i iznos potencijalne energije tog člana. Visina koju trebamo za proračun jednaka je udaljenosti između centra mase drugog člana manipulatora i temelja istog.

$$E_{P2} = m_2 g \left( L_1 + \frac{L_2}{2} \cos q_2 \right). \quad (4.33)$$

Prethodnom jednadžbom završen je i proračun drugog zgloba, pa nam samo ostaje proračunati treći zglob. I ovdje ćemo također prvo postaviti Denavit-Hartenbergove parametre.

$$\begin{aligned} a_3 &= \frac{L_3}{2} \\ \alpha_3 &= 0 \\ d_4 &= 0 \\ \mathcal{G}_4 &= 0. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Poziciju centra mase ovog štapa, koji se također nalazi na polovici njegove duljine, je najkompliciranije za izračunati od svih prethodnih štapova. Računamo njegovu poziciju u nekom trenutku u odnosu na ishodište temelja manipulatora, a na to utječu rotacije svih prethodnih zglobova, te duljine svih prethodnih štapova. Trigonometrijskim relacijama potrebno je odrediti udaljenost po svakoj osi od ishodišta, te sve to zapisati u jedan vektor pozicije koji će nam trebati za sljedeće derivacije.

$$P_3^0 = \begin{bmatrix} -L_2 \cos q_1 \sin q_2 - \frac{L_3}{2} (\cos q_1 \sin q_3 \cos q_2 + \cos q_1 \cos q_3 \sin q_2) \\ -L_2 \sin q_1 \sin q_2 - \frac{L_3}{2} (\sin q_1 \sin q_3 \cos q_2 + \sin q_1 \cos q_3 \sin q_2) \\ L_1 + L_2 \cos q_2 + \frac{L_3}{2} (\cos q_3 \cos q_2 + \sin q_3 \sin q_2) \end{bmatrix}. \quad (4.35)$$

Vektor linearne brzine trećeg zgloba jednak je prvom derivaciji vektora pozicije istog zgloba.

$$v_3 = \begin{bmatrix} -L_2 (-\dot{q}_1 s q_1 s q_2 + \dot{q}_2 c q_1 c q_2) - \frac{L_3}{2} (-\dot{q}_1 s q_1 s (q_2 + q_3) + \dot{q}_3 c q_1 c (q_2 + q_3)) \\ -L_2 (\dot{q}_1 c q_1 s q_2 + \dot{q}_2 s q_1 c q_2) - \frac{L_3}{2} (\dot{q}_1 c q_1 s (q_2 + q_3) + \dot{q}_3 s q_1 c (q_2 + q_3)) \\ -\dot{q}_2 L_2 s q_2 - \dot{q}_3 \frac{L_3}{2} s (q_2 + q_3) \end{bmatrix}. \quad (4.36)$$

Kvadriranje vektora brzina ustvari je množenje vektora brzine sa svojom transponiranom matricom, što će rezultirati sljedećom jednačinom.

$$v_3 v_3^T = L_2 \dot{q}_1^2 + \frac{L_3^2 \dot{q}_3^2}{4} + L_2^2 \dot{q}_1^2 \sin^2 q_2 + \frac{L_3^2 \dot{q}_1^2 \sin^2 (q_2 + q_3)}{4} + L_2 L_3 \dot{q}_1^2 \sin q_2 \sin (q_2 + q_3) + L_2 L_3 \dot{q}_2^2 \dot{q}_3^2 \cos q_2. \quad (4.37)$$

Matrica inercije trećeg člana jednaka je kao i prethodna koja je izvedena iz općenite matrice inercije, samo ovdje koristimo indeks 3.

$$I_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_3 L_3^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_3 L_3^2}{12} \end{bmatrix}. \quad (4.38)$$

Što se kutne brzine tiče, ovaj član ima sve članove različite od nule, ovisno o kojoj se osi radi. Treba paziti koji zglob utječe na koju os rotacije.

$$\omega_3 = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \cos (q_2 + q_3) \\ -\dot{q}_1 \sin (q_2 + q_3) \\ \dot{q}_2 + \dot{q}_3 \end{bmatrix}. \quad (4.39)$$

Ako nam je poznata masa trećeg člana  $m_3$  možemo uvrstiti sve prethodno navedene članove u jednačinu za kinetičku energiju trećeg zgloba.

$$E_{K3} = \frac{m_3 L_2 \dot{q}_1^2}{2} + \frac{m_3 L_3^2 \dot{q}_3^2}{8} + \frac{m_3 L_2^2 \dot{q}_1^2 \sin^2 q_2}{2} + \frac{m_3 L_3^2 \dot{q}_1^2 \sin^2 (q_2 + q_3)}{8} + \frac{m_3 L_2 L_3 \dot{q}_1^2 \sin q_2 \sin (q_2 + q_3)}{2} + \frac{m_3 L_2 L_3 \dot{q}_2^2 \dot{q}_3^2 \cos q_3}{2} + \frac{m_3 L_3^2 \dot{q}_1^2}{24} + \frac{m_3 L_3^2 \dot{q}_3^2}{24}. \quad (4.40)$$

Visinu trećeg zgloba izračunati ćemo posebno jer je najkompliciranije od svih zglobova. Potrebno je zbrojiti vertikalnu komponentu svaku od štapova zglobova kako bi dobili ukupnu visinu potrebnu za proračun potencijalne energije trećeg člana.

$$H_3 = L_1 + L_2 \cos q_2 + \frac{L_3}{2} \cos (q_2 + q_3). \quad (4.41)$$

Prethodno izračunatu visinu trećeg člana ćemo pomnožiti s masom trećeg člana i gravitacijskom konstantom kako bi izračunali potencijalnu energiju trećeg člana manipulatora.

$$E_{P3} = m_3 g \left( L_1 + L_2 \cos q_2 + \frac{L_3}{2} \cos (q_2 + q_3) \right). \quad (4.42)$$

Ukupna kinetička energija RRR manipulatora jednaka je sumi kinetičkih energija svih njenih članova. Kako smo računali kinetičku energiju za tri različita zgloba, sve te tri kinetičke energije zbrojit ćemo i taj rezultat će predstavljati kinetičku energiju čitavog promatranog sustava.

$$E_K = E_{K1} + E_{K2} + E_{K3} = \frac{m_1 L_1^2 \dot{q}_1^2}{24} + \frac{m_2 L_2^2 \dot{q}_1^2 \sin^2 q_2}{8} + \frac{m_2 L_2^2 \dot{q}_2^2}{6} + \frac{m_2 L_2^2 \dot{q}_1^2}{24} + \frac{m_3 L_2 \dot{q}_1^2}{2} + \frac{m_3 L_3^2 \dot{q}_3^2}{8} + \frac{m_3 L_2 \dot{q}_1^2 \sin^2 q_2}{2} + \frac{m_3 L_3^2 \dot{q}_1^2 \sin^2 (q_2 + q_3)}{8} + \frac{m_3 L_2 L_3 \dot{q}_1^2 \sin q_2 \sin (q_2 + q_3)}{2} + \frac{m_3 L_2 L_3 \dot{q}_2^2 \dot{q}_3^2 \cos q_3}{2} + \frac{m_3 L_3^2 \dot{q}_1^2}{24} + \frac{m_3 L_3^2 \dot{q}_3^2}{24}. \quad (4.43)$$

Isto tako ćemo i za ukupno potencijalnu energiju cijelog sustava zbrojiti sve pojedinačne potencijalne energije koje smo prethodno izračunali.

$$E_P = E_{P1} + E_{P2} + E_{P3} = \frac{m_1 g L_1}{2} + m_2 g \left( L_1 + \frac{L_2}{2} \cos q_2 \right) + m_3 g \left( L_1 + L_2 \cos q_2 + \frac{L_3}{2} \cos (q_2 + q_3) \right). \quad (4.44)$$

Osim ukupne kinetičke i potencijalne energije, ono što još trebamo izračunati su momenti torzije pojedinih zglobova. Primijenit ćemo Lagrangeov izraze iz jednadžbi (4.1) i (4.2) na prethodno izračunate vrijednosti i uvrstiti ih u jednadžbe. Moment torzije prvog zgloba manipulatora jednak je:

$$T_1 = \frac{m_1 L_1^2 \ddot{q}_1}{12} + \frac{m_2 L_2^2 (2\dot{q}_1 \dot{q}_2 s q_2 c q_2 + \ddot{q}_1 s^2 q_2)}{12} + \frac{m_1 L_2^2 \ddot{q}_1}{12} + m_3 L_2^2 \ddot{q}_1 \quad (4.45)$$

$$+ m_3 L_2 (2\dot{q}_1 \dot{q}_2 s q_2 c q_2 + \ddot{q}_1 s^2 q_2) + \frac{m_3 L_3^2 (2\dot{q}_1 \dot{q}_3 s q_3 c q_3 + \ddot{q}_1 s^2 q_3)}{4} + \frac{m_3 L_3^2 \ddot{q}_1}{12}.$$

Isti postupak primijenit ćemo i na drugi zglob manipulatora, pa će njegov moment torzije biti jednak sljedećem:

$$T_2 = m_2 L_2^2 \ddot{q}_2 + m_3 L_2 L_3 (-\dot{q}_2 \dot{q}_3 s q_3 + \ddot{q}_2 c q_3) + m_3 L_2 L_3 (-\dot{q}_3^2 s q_3 + \ddot{q}_3 c q_3)$$

$$+ \frac{m_3 L_3^2 (\ddot{q}_2 + \ddot{q}_3)}{12} - m_3 L_2^2 \ddot{q}_1^2 s q_2 c q_2 - \frac{m_3 L_3^2 s q_3 c q_3 \dot{q}_1^2}{4} \quad (4.46)$$

$$- m_3 L_2 L_3 (s q_3 c q_2 + s q_2 c q_3) - \frac{m_2 L_2 g s q_2}{2} - \frac{m_3 L_3 g s q_3}{2} - m_3 L_2 g s q_2.$$

Isti postupak primijenit ćemo i na treći zglob manipulatora, pa će njegov moment torzije biti jednak sljedećem:

$$T_3 = \frac{m_3 L_3^2 (\ddot{q}_2 + \ddot{q}_3)}{3} - \frac{m_3 L_3^2 \dot{q}_1^2 s q_3 c q_3}{4} - \frac{m_3 L_2 L_3 \dot{q}_1^2 s q_2 c q_3}{2}$$

$$+ \frac{m_3 L_2 L_3 \dot{q}_2 \dot{q}_3 s q_3 c q_3}{2} - \frac{m_3 L_3 g s q_3}{2}. \quad (4.47)$$

### 4.3. Jednadžba gibanja prihvatnice

Jednadžba gibanja prihvatnice je u čestoj uporabi u robotici, kako bi se osigurala glatko i kontinuirano gibanje zglobova, kutnim zakretima jednog u odnosu na drugi, kako bi se prihvatnica pomaknula između dvije pozicije u Kartezijevom koordinatnom sustavu. Jednadžbe kutova u početnoj ili krajnjoj poziciji možemo opisati pomoću sljedećeg sustava kubičnih polinoma:

$$q_1 = a_{10} + a_{11}t + a_{12}t^2 + a_{13}t^3$$

$$q_2 = a_{20} + a_{21}t + a_{22}t^2 + a_{23}t^3 \quad (4.48)$$

$$q_3 = a_{30} + a_{31}t + a_{32}t^2 + a_{33}t^3.$$

Brzine zglobova tada je jednostavno izračunati jer su one jednake prvim derivacijama prethodnog sustava jednadžbi, pa ćemo mi te jednadžbe sada jednom derivirati.

$$\dot{q}_1 = a_{11} + 2a_{12}t + 3a_{13}t^2$$

$$\dot{q}_2 = a_{21} + 2a_{22}t + 3a_{23}t^2 \quad (4.49)$$

$$\dot{q}_3 = a_{31} + 2a_{32}t + 3a_{33}t^2.$$

Varijabla  $t$  u prethodnim jednadžbama označava vrijeme u sekundama. Kod ovakvog računanja najčešće uzimamo da je ono jednako jednoj sekundi, radi jednostavnosti računanja.

Vrijednosti parametara u početnoj poziciji možemo izračunati pomoću inverzne kinematike, pa se za danu početnu i krajnju poziciju mogu izračunati svi kutovi zglobova koji su mogući za te pozicije. Postoji i način da za početnu poziciju izračunamo parametre tako što uvrstimo da je varijabla  $t$  jednaka nuli, pa ćemo dobit sljedeće:

$$\begin{aligned}
 q_1(0) &= a_{10} \\
 q_2(0) &= a_{20} \\
 q_3(0) &= a_{30} \\
 \dot{q}_1(0) &= a_{11} \\
 \dot{q}_2(0) &= a_{21} \\
 \dot{q}_3(0) &= a_{31}.
 \end{aligned}
 \tag{4.50}$$

Za krajnju poziciju možemo uvrstiti da je varijabla  $t$  jednaka 1, pa kombinirajući jednadžbe za poziciju i brzinu zglobova možemo izraziti jednadžbe za koeficijente koji nam još nisu poznati.

$$\begin{aligned}
 a_{12} &= q_1 - a_{10} - a_{11} - a_{13} \\
 a_{13} &= \dot{q}_1 - 2q_1 + 2a_{10} + a_{11} \\
 a_{22} &= q_2 - a_{20} - a_{21} - a_{23} \\
 a_{23} &= \dot{q}_2 - 2q_2 + 2a_{20} + a_{21} \\
 a_{32} &= q_3 - a_{30} - a_{31} - a_{33} \\
 a_{33} &= \dot{q}_3 - 2q_3 + 2a_{30} + a_{31}.
 \end{aligned}
 \tag{4.51}$$

Kada znamo neku početnu i krajnju točku, uvrstimo njene vrijednosti po koordinatnim osima te izračunamo sve prethodno navedene koeficijente. Tada dobivene koeficijente vratimo u jednadžbe za poziciju i brzinu gibanja manipulatora i dobili smo jednadžbu gibanja manipulatora.

#### 4.4. Model prostora stanja

Ovaj model je jako popularan u strojarstvu, a najviše se koristi u automatizaciji kod zadataka upravljanja sustavima. To je matematički model nekog fizičkog sustava, koji uzima njegove ulazne, izlazne i varijable stanja, te ih povezuje diferencijalnim jednadžbama prvog reda. Varijable stanja su ovisne o vremenu, te se samim time i mijenjaju u vrijednosti kako se i vrijeme mijenja. Ulazne podatke trebali bi sami znati, jer to su podaci s kojima krećemo u rad nekog sustava, dok izlazne varijable ovise o varijablama stanja do kraja radnog ciklusa. Sve te varijable prikazujemo kao vektore, jer i stanje sustava možemo prikazati kao vektor

stanja. Radi jednostavnosti proračuna, sustav diferencijalnih jednažbi možemo zapisati u obliku matrice, pod uvjetom da je sustav linearan i vremenski invarijantan.

Ovo je idealan model za analizu nekog sustava koji ima više od jednog ulaza i izlaza. Najčešće je najmanji broj varijabli stanja koje su nam potrebne kako bi opisali ponašanje sustava jednak broju diferencijalnih jednažbi. Primjerice, u strujnom krugu je najmanji broj varijabli stanja koji je potreban jednak broju elemenata koji se nalaze unutar tog strujnog kruga. Varijable stanja koje definiramo moraju biti linearno neovisne. Preciznije rečeno, ako matematički kombiniramo bilo koje dvije ili više varijabli stanja, ne bismo smjeli kao rezultat dobiti treću, ili bilo koju ostalu varijablu stanja koju smo prethodno definirali, u protivnom je sustav nerješiv. Ukupni vektor momenta torzije zglobova izgleda ovako:

$$T = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix}. \quad (4.52)$$

Također, moment torzije možemo prikazati i kao sumu skupa vektora i matrica, koje ćemo podijeliti na nekoliko različitih komponenti. Ta suma sastojala bi se od sljedećih vektora:

$$T = M(q) \cdot \ddot{q} + V(q, \dot{q}) + G(q). \quad (4.53)$$

Uz prethodno navedeni vektor momenta torzije,  $M$  je matrica komponenti inercije koja ovisi o parametru  $q$ , a nju množimo sa vektorom  $\ddot{q}$ .  $V$  predstavlja vektor centrifugalnih komponenti, koje direktno ovise o parametrima  $q$  i  $\dot{q}$ . Posljednji vektor je vektor gravitacijskih komponenti  $G$ . U poglavlju 5.2. već smo definirali jednažbe svakog momenta torzije posebno, a sada to možemo sve uvrstiti u jedan vektor torzijskih momenata i njegove pribrojnice razdvojiti u upravo definirane vektore  $V$  i  $G$  te matricu  $M$ .

Gravitacijska konstanta iz zadnjeg pribrojnika prethodne jednažbe je zapravo smetnja sustava. Kako smo već i ranije objasnili, nije ovo jedina smetnja kod gibanja manipulatora, jer tu imamo još i otpor zraka, trenje u ležajevima, razne gubitke, ali su svi oni u usporedbi s gravitacijom vrlo zanemarivi, čime smo si veoma olakšali proračun.

Sve ove varijable prikazat ćemo u matričnom zapisu, odnosno, vektoru stupcu. Svaki moment torzije se sastoji od sume inercijskog, centrifugalnog i gravitacijskog člana, a razdvojiti ćemo ih radi **lakšeg programiranja koda u MATLAB-u**.

Prva komponenta prostora stanja je inercija, koju ćemo prikazati u obliku matrice. Svaki redak pripada jednom zglobo manipulatora.

$$M = \begin{bmatrix} \frac{m_1 L_1^2}{12} + \frac{m_1 L_1^2 s^2 q_2}{4} + \frac{m_2 L_2^2}{12} + m_3 L_2^2 + & 0 & 0 \\ + m_3 L_2 s^2 q_2 + \frac{m_3 L_3^2 s^2 (q_2 + q_3)}{4} + \frac{m_3 L_3^2}{12} & & \\ 0 & \frac{m_2 L_2^2}{4} + \frac{m_3 L_3^2}{12} + & \frac{m_2 L_2^2}{4} + \frac{m_3 L_3^2}{12} + \\ & + m_3 L_2 L_3 c q_3 & + m_3 L_2 L_3 c q_3 \\ 0 & \frac{m_3 L_3^2}{3} & \frac{m_3 L_3^2}{3} \end{bmatrix}. \quad (4.54)$$

Druga komponenta jednadžbe (4.53) je centrifugalna komponenta, koju ćemo prikazati u obliku stupac vektora, sa ukupno 3 redova, od kojeg svaki pripada jednom zglobo.

$$V = \begin{bmatrix} \frac{m_2 L_2^2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 s q_2 c q_2}{2} + 2 m_3 L_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 s q_2 c q_2 + \frac{m_3 L_3^2 \dot{q}_1 \dot{q}_3 s q_3 c q_3}{2} \\ - m_3 L_2 L_3 \dot{q}_3 s q_3 (\dot{q}_2 + 1) - m_3 L_2 \dot{q}_1^2 s q_2 c q_2 - \\ - \frac{m_3 L_3^2 \dot{q}_1^2 s q_3 c q_3}{4} - m_3 L_3 L_2 \dot{q}_1^2 (s q_2 c q_3 + s q_3 c q_2) \\ - \frac{m_3 L_3^2 \dot{q}_1^2 s q_3 c q_3}{4} - \frac{m_3 L_2 L_3 \dot{q}_1^2 s q_2 c q_3}{2} + \frac{m_3 L_2 L_3 \dot{q}_2 \dot{q}_3 s q_3}{2} \end{bmatrix}. \quad (4.55)$$

Ostaje nam zadnja komponenta, a to je utjecaj gravitacije. To ćemo također prikazati kao vektor stupac, koji će imati tri reda, po jedan za svaku koordinatnu os. Unutar iste koordinatne osi ćemo zbrojiti komponente od svih zglobova zajedno, te dobiti ukupni vektor gravitacije.

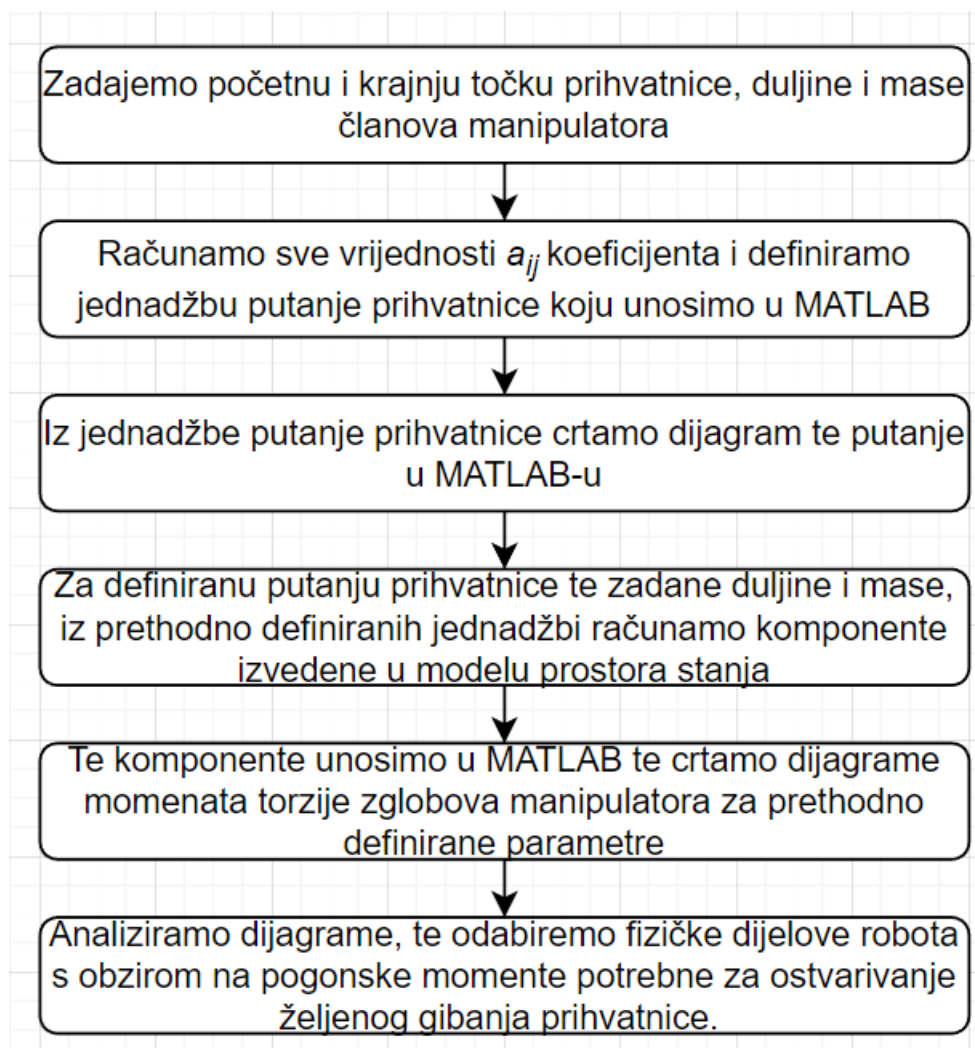
$$G = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{m_2 L_2 \sin q_2 g}{2} - \frac{m_3 L_3 \sin q_3 g}{2} - m_3 L_2 \sin q_2 g \\ - \frac{m_3 L_3 \sin q_3 g}{2} \end{bmatrix}. \quad (4.56)$$

Ovako dobivene jednadžbe zapisati ćemo u MATLAB-u i za zadane vrijednosti početnih parametara napraviti ćemo simulaciju rada manipulatora, kako bi mogli analizirati njegove ostale (izlazne) parametre.



## 5. REZULTATI SIMULACIJA

U ovome poglavlju prikazat ćemo rezultate simulacija koje smo napravili koristeći prethodno izvedene jednačbe. U odnosu na osnovne Denavit-Hartenbergove parametre, kroz nekoliko sljedećih simulacija analizirat ćemo kinematiku i dinamiku robotskog manipulatora RRR strukture. Izvode jednačbi iz prethodnih poglavlja ćemo unijeti u programski paket MATLAB, na početku programskog koda zadati ćemo početne vrijednosti parametara koje pratimo, te iz toga svega izvući grafove koji su nam bitni za daljnju analizu ponašanja manipulatora. Cijeli postupak najlakše je prikazati u dijagramu toka.



Slika 11. Dijagram toka

U prilogu su dani programski kodovi iz MATLAB-a koje smo koristili u sljedećim analizama. Kod koristi početnu i krajnju točku kretanja prihvatnice, koju na početku programa moramo definirati. Za te točke onda računamo parametre koeficijenata  $a_{ij}$  i definiramo jednačbe putanje prihvatnice u prostoru. Osim početne i krajnje točke, program koristi još i dvije

međutočke, kroz koje onda svojim funkcijama optimira putanju kretanja tako da ta linija bude kontinuirana i glatka. Tu putanju crtamo u dijagramu kako bi se uvjerali da je to ono gibanje koje želimo postići, nakon što smo pregledali sve moguće dostupne pozicije unutar radnog prostora robotskog manipulatora. Za tako definiranu putanju prihvatnice, potrebno je znati pogonske momente zglobova kako bi postigli željene pozicije. Koristimo identične točke iz njene putanje, zadajemo programu duljine i mase štapova manipulatora, te program računa komponente modela prostora stanja, a to su inercijska, centrifugalna i gravitacijska komponenta. Tako dobivene modele međusobno sumiramo kako bi dobili vektor torzijskih momenata koji kasnije i crtamo u dijagram. Analizom dijagrama moguće je odabrati fizičke dijelove robota koji će njegovim dijelovima omogućiti željenu putanju. Za početak ćemo analizirati sve moguće pozicije prihvatnice manipulatora, ovisno o njegovoj prostornoj geometriji koju ćemo mu zadati.

### 5.1. Simulacija pozicije prihvatnice

U poglavlju 2. kod izvoda direktne i inverzne kinematike vidjeli smo da je moguće pomoću zadavanja nekih od Denavit-Hartenbergovih parametara doći do pozicije prihvatnice manipulatora u prostoru. Ovdje ćemo za zadane duljine štapa 2 i štapa 3 pokušati pronaći sve moguće pozicije manipulatora u prostoru. Svaki zglob manipulatora ima jedan stupanj slobode gibanja, a to je rotacija. Prvi zglob rotira oko globalne osi  $z$ , dok ostala dva zgloba rotiraju oko globalne osi  $x$ . Iz tog razloga, promatrat ćemo ravninu  $y$ - $z$  manipulatora i promjenu pozicije prihvatnice unutar te ravnine, za bilo koji proizvoljno odabrani kut zakreta oko  $z$  osi, koji je nebitan jer neće mijenjati izlazne vrijednosti na našem grafu.

Tu u obzir moramo uzeti nekoliko ograničenja. Iako je u teoriji moguće beskonačno mnogo rješenja, u praksi to ipak nije slučaj zbog čitavog niza ograničenja cijene, konstrukcije, materijala, mase, okolnog prostora, atmosfere i tako dalje. Tako ćemo uzeti da svaki zglob ima mogućnost rotacije u rasponu od  $90^\circ$ . Postavit ćemo parametre i provjeriti moguće pozicije prihvatnice za njegovu maksimalnu horizontalnu i vertikalnu radnu poziciju. Uzeti ćemo tri različita početna parametra za duljinu štapova 2 i 3, gdje će za maksimalnu poziciju prihvatnice u vertikalnom položaju trebati uzeti i duljinu štapa 1 na kraju analize.

U prilogu je dan programski kod za ovu analizu, kojeg ćemo sada ukratko objasniti. Nakon što smo postavili duljine svih članova manipulatora, s naredbom *linspace* generirali smo linearni prostorni vektor za svaki od tri člana. Ukupno ćemo gledati 4 različite pozicije za svaki od štapa, što po kutu zakreta znači da ćemo ih postaviti u pozicije  $0^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $60^\circ$  i  $90^\circ$ . Kako bi to

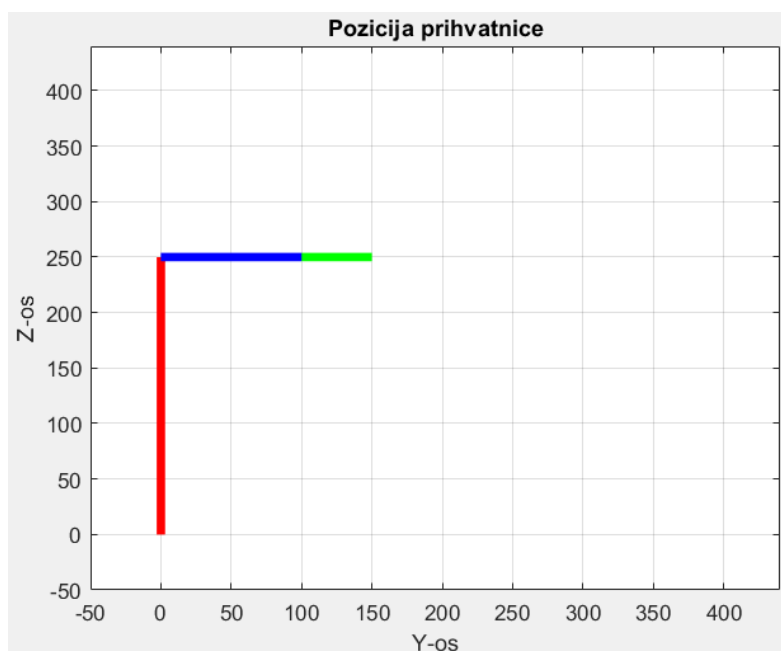
izveli, koristili smo *for* petlju za računanje pozicije svih točaka koje su nam potrebne za crtanje dijagrama. Zadnji dio koda je iskorišten za crtanje dijagrama i za postavljanje svih bitnih oznaka i parametara dijagrama. Ovisno o postavljenim početnim duljinama, tako će se i veličina okvira po osima mijenjati naredbom *axis*. Koristili smo naredbu *pause* za ljepši pregled dijagrama.

Prvi štap označiti ćemo crvenom bojom, drugi štap označit ćemo plavom bojom i treći štap označit ćemo zelenom bojom. U dijagramima ćemo prikazati tri različite pozicije prihvatnice manipulatora.

U praksi je najčešće duljina štapa 1 najveća, pa slijedi štap 2 kao srednji po duljini, a štap 3 je najkraći od svih članova manipulatora. U našim analizama uzeti ćemo duljinu člana 1 fiksnu, a duljine ostalih članova ćemo mijenjati i pratiti kako se to odražava u odnosu prema duljini prvog člana na maksimalni vertikalni i horizontalni dohvat. Prvi parametri koje ćemo analizirati (u milimetrima) su sljedeći:

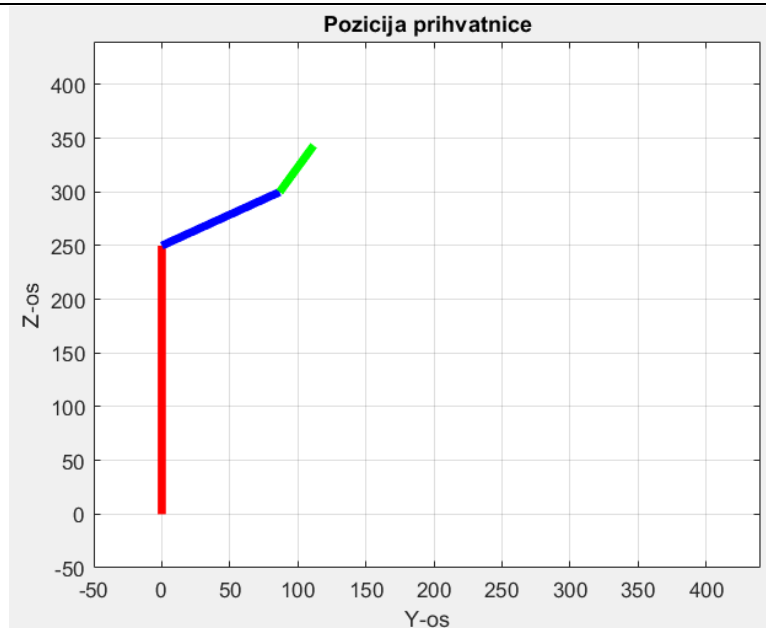
$$L_1 = 250; \quad L_2 = 100; \quad L_3 = 50. \quad (5.1)$$

Za početne parametre odabrali smo duljinu prvog štapa jednaku za sve analize, a duljine drugih štapova najkraće od svih početnih parametara, gdje je duljina prvog štapa nekoliko puta veća od duljina ostala dva štapa.



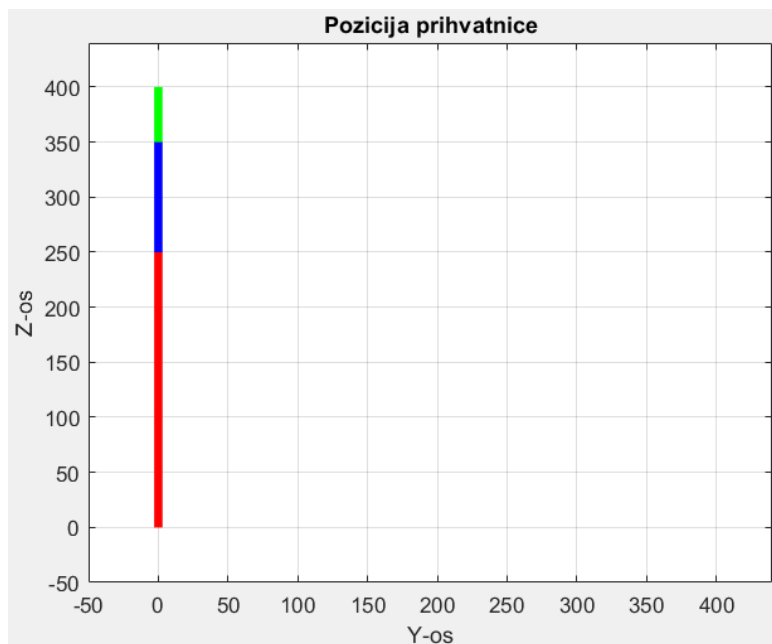
Slika 12. Dijagram pozicije prihvatnice za prve podatke (1)

Slika 12. prikazuje dijagram pozicije prihvatnice manipulatora za prve zadane parametre. Na slici vidimo maksimalni horizontalni dohvat prihvatnice za ovaj slučaj, koji iznosi 150 milimetara očitano po y osi.



**Slika 13. Dijagram pozicije prihvatnice za prve podatke (2)**

Slika 13. prikazuje dijagram pozicije prihvatnice manipulatora za prve zadane parametre. Na slici vidimo jednu nasumičnu poziciju prihvatnice unutar radnog prostora robota. U ovoj poziciji ruka robota nije ispružena, već se svi kutovi zglobova razlikuju.



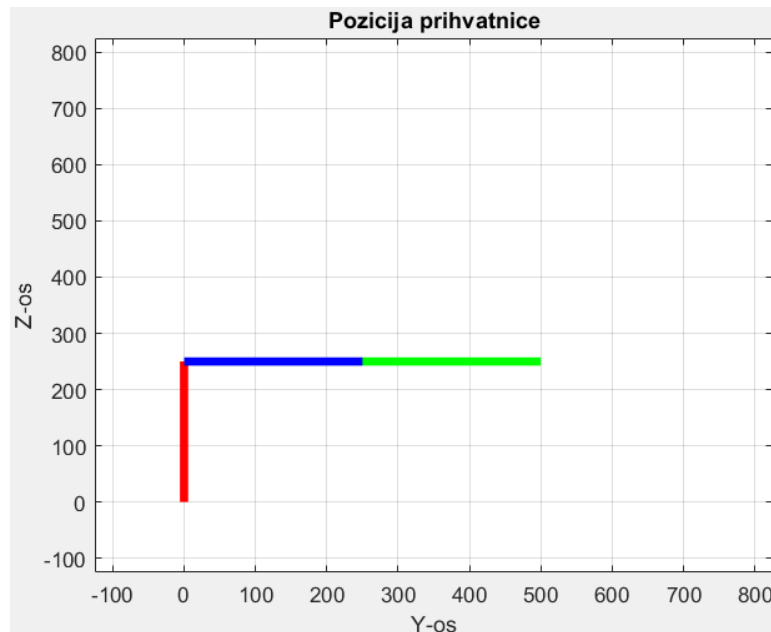
**Slika 14. Dijagram pozicije prihvatnice za prve podatke (3)**

Slika 14. također prikazuje poziciju prihvatnice robota za prve zadane parametre. Na ovoj slici vidimo maksimalni vertikalni dohvat robota za trenutno zadane parametre, koji zajedno s prvim štapom iznose 400 milimetara, očitano po z osi. Primijetimo kako ova i slika 11. prikazuju singularnost RRR robotske strukture, svaka u jednom smjeru. Na sva tri prethodna dijagrama vidljiva je dominacija duljine prvog štapa u odnosu na ostala dva.

Drugu analizu provesti ćemo za sljedeće parametre, koji će biti više izjednačeni u odnosu na prvi štap, za razliku od prethodne analize.

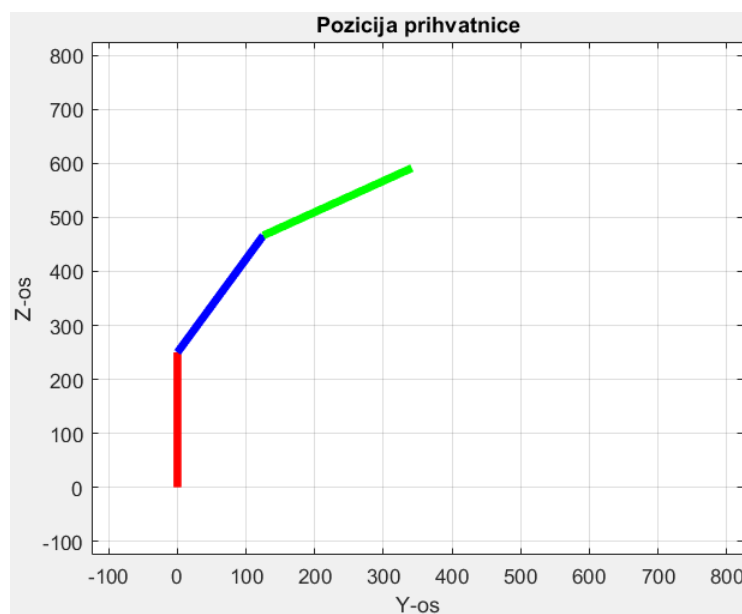
$$L_1 = 250; \quad L_2 = 250; \quad L_3 = 250. \quad (5.2)$$

U programskom kodu ćemo promijeniti parametre da odgovaraju parametrima nabrojanim u prethodnoj jednadžbi, te ponovno pokrenuti analizu. Prikazat ćemo ponovno ukupno 3 dijagrama, u sličnim pozicijama kao i za prvu analizu, kako bi ih lakše mogli usporediti.



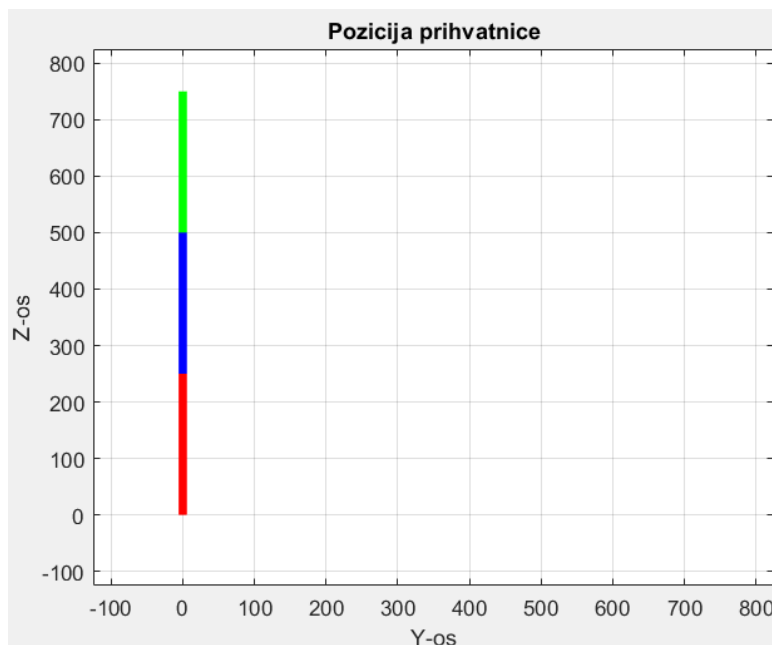
Slika 15. Dijagram pozicije prihvatnice za druge podatke (1)

Slika 15. prikazuje maksimalni horizontalni dohvat prihvatnice za podatke iz jednadžbe (5.2), a iznosi 500 milimetara. Ova pozicija pokazuje singularnost manipulatora.



Slika 16. Dijagram pozicije prihvatnice za druge podatke (2)

Slika 16. pokazuje nasumično odabranu poziciju manipulatora za druge podatke zadane za analizu, koju smo dobili prilikom rotacije zglobova robota. Trenutna pozicija prihvatnice je otprilike pri sredini radnog prostora manipulatora. Vidljiva je razlika u maksimalnim iznosima na obje koordinatne osi u odnosu na prvu analizu.



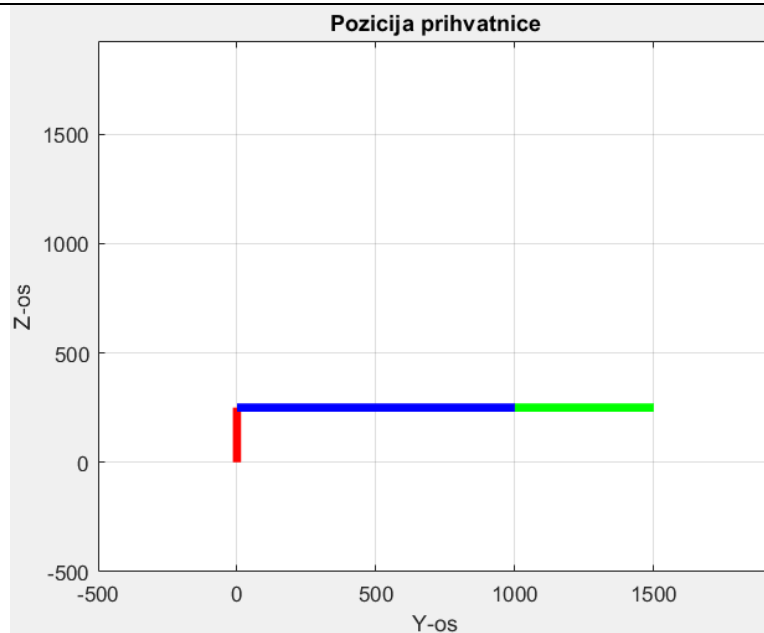
**Slika 17. Dijagram pozicije prihvatnice za druge podatke (3)**

Slika 17. prikazuje maksimalni vertikalni dohvat prihvatnice manipulatora za podatke iz jednadžbe (5.2). Ono u ovom slučaju iznosi 750 milimetara, očitano po z osi. Kako su sva tri štap dulja u odnosu na štapove iz prve analize, to je dovelo do većeg maksimalnog vertikalnog i horizontalnog dohvata. Također, kako su ovdje duljine svih štapova jednake, niti jedan štap nema dominaciju u kinematici, odnosno, poziciji prihvatnice u prostoru, dok je kod prve analize bila vidljiva dominacija prvog štapa. Koordinatne osi su u drugoj analizi imale veću maksimalnu vrijednost s koje smo mogli očitavati.

Za treću analizu ponovno ćemo povećati duljine drugog i trećeg štapa u odnosu na prethodne analize, dok ćemo duljinu prvog štapa ostaviti identičnom. Podaci koje ćemo koristiti su sljedeći:

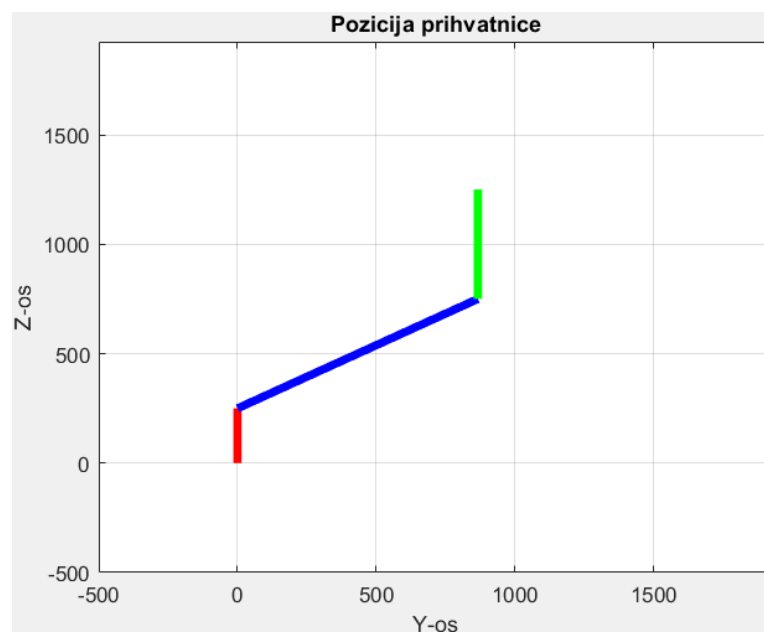
$$L_1 = 250; \quad L_2 = 1000; \quad L_3 = 500. \quad (5.3)$$

Za ovaj primjer uzeli smo duljine drugog i trećeg štapa osjetno dulje nego duljinu prvog štapa, da vidimo koliki će sada biti utjecaj duljine prvog štapa na poziciju prihvatnice manipulatora.



**Slika 18. Dijagram pozicije prihvatnice za treće podatke (1)**

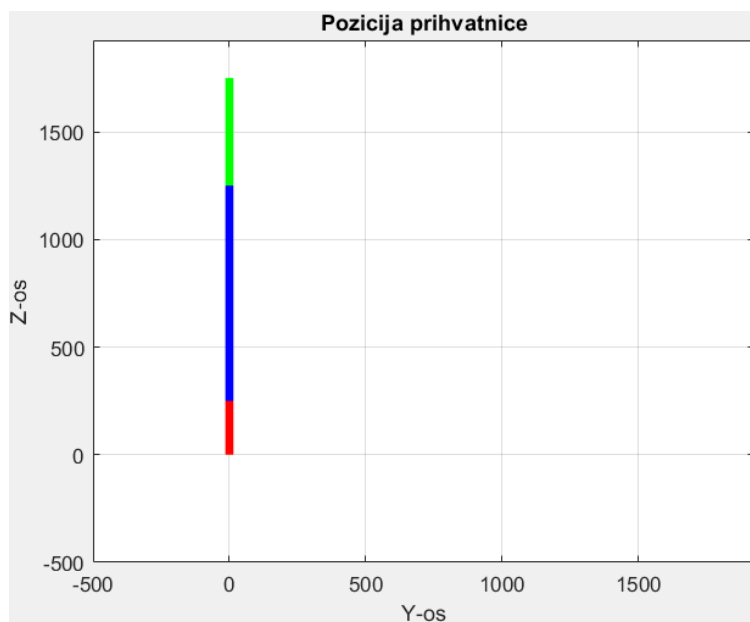
Slika 18. prikazuje maksimalni horizontalni dohvat prihvatnice manipulatora za treću analizu zadanih podataka. Njen iznos jednak je 1500 milimetara, očitano po y osi. Vidljivo je da je utjecaj duljine prvog štapa manipulatora gotovo zanemariv kada pogledamo do kuda idu osi koordinatnog sustava s prethodnog dijagrama.



**Slika 19. Dijagram pozicije prihvatnice za treće podatke (2)**

Slika 19. prikazuje nasumično odabranu poziciju prihvatnice manipulatora unutar njegovog radnog prostora, za treći skup ulaznih podataka. Kao i u primjeru prvih podataka,

zadali smo duljinu drugog štapa da bude duplo veća nego duljina trećeg štapa, pa je i dominacija drugog štapa vidljiva na prethodnom dijagramu.



**Slika 20.** Dijagram pozicije prihvatnice za treće podatke (3)

Slika 20. prikazuje maksimalni vertikalni dohvat za prihvatnicu manipulatora iz treće grupe ulaznih podataka. Ona iznosi 1750 milimetara, očitano po z osi dijagrama. Ovaj dijagram najbolje prikazuje kako je u ovom slučaju, radi vlastite duljine, utjecaj prvog štapa na poziciju manipulatora vrlo zanemariv.

Ovu analizu proveli smo za različite duljine štapova, gdje smo jedino duljinu prvog štapa držali identičnom. Tu smo mogli vidjeti kako što je duljina drugih štapova veća, to je utjecaj prvog štapa na ukupnu poziciju prihvatnice manipulatora sve manji. Kako je prvi štap fiksno postavljen vertikalno, na horizontalni dohvat on nije utjecao, ali zato je na vertikalni dohvat prihvatnice. Zbog jednostavnije analize, ograničili smo raspon kutova prihvatnice na  $90^\circ$ , da je bilo više, manipulator bi mogao lakše dohvatiti neke pozicije unutar svog radnog prostora, jer bi imao više rješenja kako dohvatiti željenu poziciju. Iznimka od tog pravila su maksimalni vertikalni i horizontalni dohvati, kada je ruka bila u potpunosti ispružena, takozvano stanje singularnosti, jer je tu postojalo samo jedno rješenje kako dohvatiti tu poziciju. Povećanjem duljine štapova, rastao je i maksimalni dohvat, pa je tako u trećoj grupi ulaznih podataka, gdje smo imali i najveće duljine štapova, maksimalni dohvat u oba smjera bio najveći. U praksi zglobovi neće biti ograničeni na  $90^\circ$  rotacije, pa će se moći spustiti i u pozicije niže od prethodno prikazanih maksimalnih horizontalnih dohvata. Tu dolazimo do potencijalnog problema, jer vidimo da što je bila veća duljina drugog i trećeg štapa, to je manipulator bio osjetljiv na koliziju s podlogom ( $z=0$ ). Za mali kut rotacije drugo zglobo prema podlozi, kod



trećeg primjera postajala je najveća opasnost od takvog događaja. Važno je zato još jedanput napomenuti kako se u praksi najčešće rade manipulatori slični onome iz prve grupe ulaznih podataka, gdje je prvi štap ujedno bio i štap s najvećom duljinom u cijelom manipulatoru, a treći štap je najčešće najkraći, jer na njegovu duljinu utječu još i dimenzije prihvatnice, koju ovdje nismo uzeli u obzir radi pojednostavljenja analize.

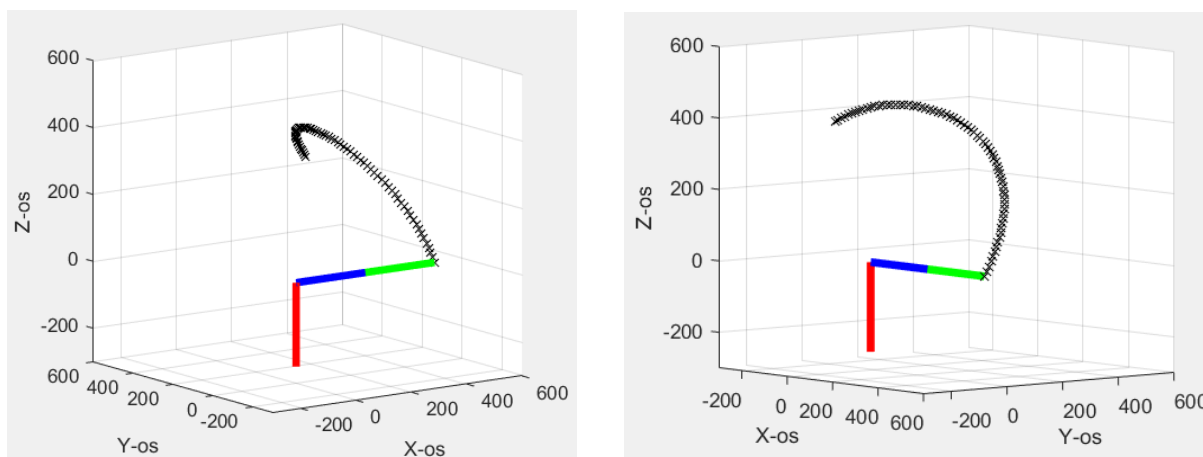
## 5.2. Simulacija putanje prihvatnice

U poglavlju 4.3. izvodili smo jednadžbu gibanja prihvatnice manipulatora i koristili smo se jednadžbama u kojima smo imali niz koeficijenata označenih sa  $a_{ij}$  gdje su indeksi  $i$  i  $j$  jednaki brojevima 0, 1, 2 i 3. Ta jednadžba definira putanju kretanja prihvatnice za jasno definirane točke u trenutku kada je  $t = 0$  što je ujedno i početna točka, te  $t = 1$  što je ujedno i završna točka kretanja prihvatnice. Za zadanu početnu i završnu točku, izračunali smo vrijednosti svih koeficijenata  $a_{ij}$  (pomoću jednadžbi (4.50) i (4.51)!) koji su nam potrebni za definiranje putanje i uvrstili ih u MATLAB. Programski kod koji je dan u prilogu ovog rada crta na 3D dijagramu jasnu putanju prihvatnice, gdje program koristi ukupno 4 točke za polinom trećeg stupnja: početnu, završnu, te dvije takozvane međutočke. Funkcijama unutar programskog paketa program sam pronalazi optimalnu krivulju kretanja, a da pritom prođe kroz sve 4 točke i da ta krivulja bude glatka i kontinuirana, bez potreba za naglim trzajima, što smo i htjeli izbjeći.

U prethodnoj analizi smo radi jednostavnosti analize podijelili gibanje manipulatora samo unutar y-z ravnine, ali kada gledamo gibanje cijelog manipulatora u prostoru, on prati neku trajektoriju u prostoru, koje nazivamo putanja. Za ista ograničenja zglobova iz prethodne analize, provjerit ćemo putanju između pozicije singularnosti vertikalnog dohvata i pozicije singularnosti horizontalnog dohvata. Kako smo u prošloj analizi imali dominacije nekih štapova u prvoj i trećoj grupi ulaznih podataka, uzet ćemo drugu grupu ulaznih podataka radi jednakosti utjecaja štapova na kinematiku manipulatora. Prema tome, duljina svih štapova bit će jednaka 250 milimetara, a redoslijed boja crvena, plava, zelena će također ostati isti.

Kako bi precizno pratili po kojoj će se putanji kretati prihvatnica manipulatora, koristit ćemo *for* petlju u kojoj ćemo za konačni broj pozicija između početne i završne označiti s oznakom  $x$ . Optimiranjem petlje, probali smo postići da ne bude premalo točaka, jer tada možda ne bi bila jasna točna putanja prihvatnice manipulatora, ali da ne bude niti previše

točaka, jer bi to moglo narušiti preglednost dijagrama. Odlučili smo se na 70 točki između vertikalnog i horizontalnog maksimalnog dohvata prihvatnice.



**Slika 21. Dijagram putanje prihvatnice**

U programskom kodu definirali smo par točki kroz koje bi prihvatnica trebala proći, pa program sam pronalazi optimalnu putanju između početne i završne točke koju smo zamislili. Slika 21. prikazuje prihvatnicu manipulatora u poziciji singularnosti maksimalnog horizontalnog dohvata, koja je ujedno i završna pozicija putanje koju smo pratili. Malim oznakama  $x$  označena je točna trajektorija kojom se prihvatnica kretala, pa smo ju prikazali iz dva različita kuta gledanja, da se dobije bolji dojam o gibanju prihvatnice kroz prostor.

U kodu nakon početnog postavljanja parametara dijagrama, radi njegove bolje vidljivosti i kvalitete, zadali smo koordinate točaka prihvatnice manipulatora. Točke smo zatim povezali linijama kretanja, te ponovno *for* petljom crtali 70 različitih pozicija između početne i završne točke. Radi jednostavnosti programskog koda, koristili smo nekoliko pomoćnih funkcija, gdje smo računali nove koordinate pozicije i sve ih povezali u vektor. Pri računanju imali smo pomoćne funkcije za računanje matrica rotacija oko dvije različite koordinatne osi. Mijenjanjem točaka u kodu, te promjenom Denavit-Hartenbergovih parametara u pomoćnoj funkciji, možemo promijeniti željenu duljinu štapova, trajektoriju gibanja prihvatnice, te početnu i krajnju točku gibanja. Ako želimo da se trajektorija vidi gušće ili rjeđe, s nekim drugim oznakama, možemo promijeniti parametre postavljene *for* petlje.

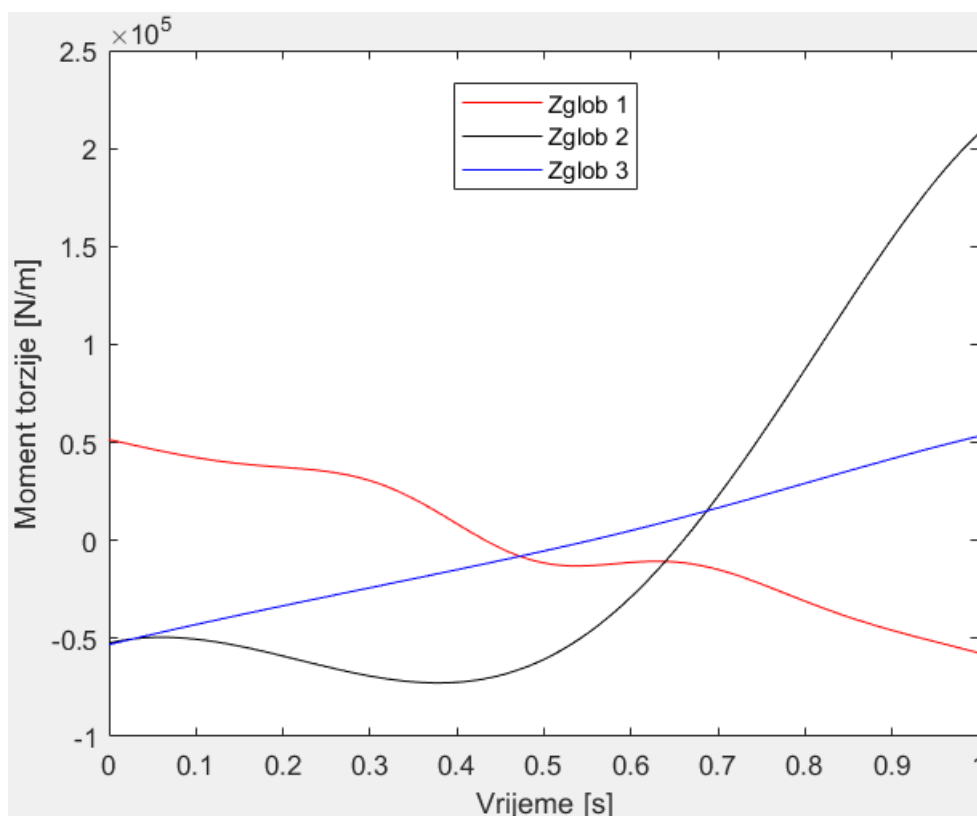
### 5.3. Simulacija momenata torzije zglobova

Iz poglavlja u kojem smo izveli jednadžbe dinamike manipulatora, napravili smo programski kod u MATLAB-u kako bi analizirali iznose momenata torzije zglobova manipulatora. Kao ulazne parametre potrebno je postaviti iznose mase i duljine sva tri štapa,

jer smo kod računanja matrica koristili sve tri varijable iz modela prostora stanja. Ovu analizu provesti ćemo na dva različita načina. Prvi način bit će da koristimo ulazne grupe parametara iz prve analize, gdje ćemo duljinu i masu prvog štapu držati istom u sve tri simulacije, a parametre ostala dva štapu ćemo postupno povećavati i pratiti ćemo kretanje momenta torzije prvog člana u odnosu na ostala dva kako se parametri redom mijenjaju. Zatim ćemo napraviti novu analizu gdje ćemo držati jednaku duljinu i masu svih štapova, ali ih redom povećavati i vidjeti hoćemo li dobiti neke očekivane dijagrame, ovisno o tome koliko povećamo parametre mase i duljine pripadajućih članova manipulatora. Da ponovimo, početni parametri analize bit će sljedeći:

$$\begin{aligned} L_1 &= 250 \text{ mm}; & L_2 &= 100 \text{ mm}; & L_3 &= 50 \text{ mm}; \\ m_1 &= 10 \text{ kg}; & m_2 &= 4 \text{ kg}; & m_3 &= 2 \text{ kg}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Na horizontalnoj osi dijagrama nalaziti će se vrijeme u sekundama, a na vertikalnoj osi bit će moment torzije u Nm. Ovisno o redu veličine rezultata analize, tako će se i brojčane vrijednosti na vertikalnoj osi prilagođavati, dok će vrijeme uzorkovanja svake analize biti ravno jedna sekunda.



Slika 22. Dijagram momenata zglobova (1)

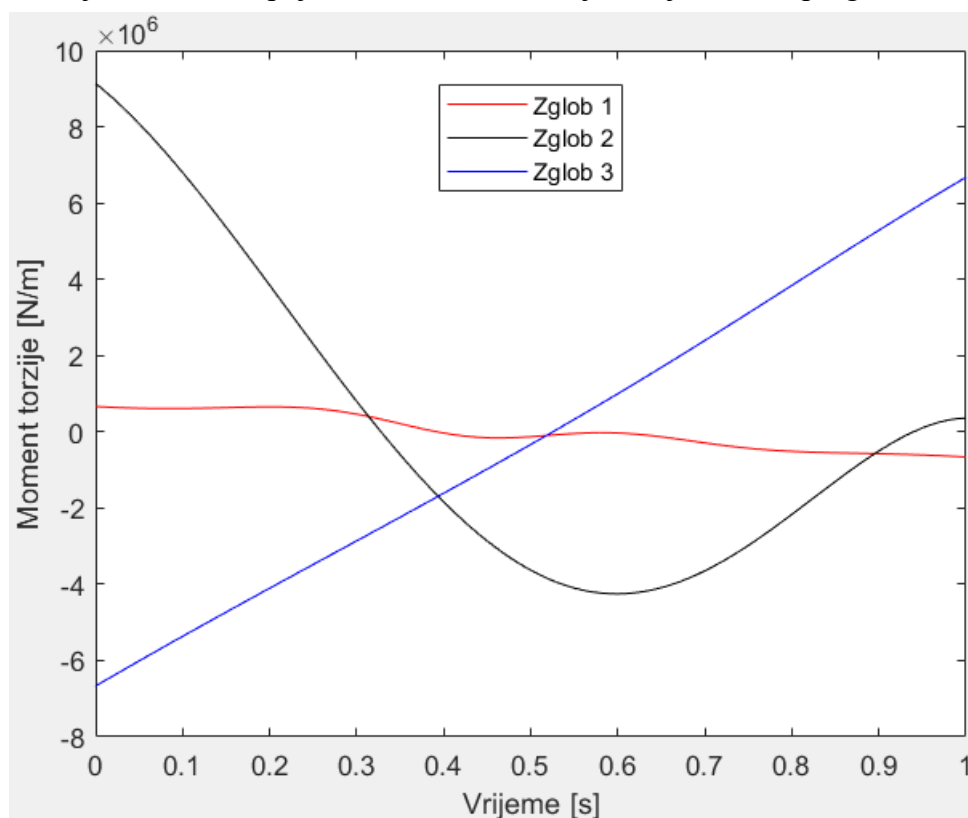
Dijagram sa slike 22. prikazuje vrijednost momenta torzije sva tri zgloba u ovisnosti o vremenu. Vidimo da jedino vrijednost momenta torzije prvog zgloba pada s vremenom, dok

ostala dva rastu. Važno je napomenuti kako se ovi momenti torzije odnose na trajektoriju definiranu iz prethodne analize. Kako smo dobili i u izvedenim jednadžbama, mase drugog i trećeg člana utječu na prvi zglob, dok na drugi zglob utječe i masa trećeg člana. Kako na zglob trećeg člana utječe samo njegova masa, ovisnost vrijednosti momenta torzije o vremenu je linearna, te ima jednaku vrijednost na početku i na kraju perioda analize. Vrijednost se kreće između  $\pm 0.5 \cdot 10^5$  Nm, ovisno o tome je li potrebno pokrenuti ili zaustaviti gibanje zgloba. Najveću vrijednost momenta na cijelom dijagramu ima drugi zglob pri zaustavljanju, a on iznosi otprilike  $2 \cdot 10^5$  Nm, što je čak četiri puta više nego što mu je potrebno da se pokrene.

Parametri sljedeće analize jednaki su ulaznim parametrima druge grupe iz prve analize, a njima ćemo prilagoditi pripadajuće mase članova manipulatora.

$$\begin{aligned} L_1 &= 250 \text{ mm}; & L_2 &= 250 \text{ mm}; & L_3 &= 250 \text{ mm}; \\ m_1 &= 10 \text{ kg}; & m_2 &= 10 \text{ kg}; & m_3 &= 10 \text{ kg}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Druga grupa ulaznih parametara imala je sve duljine štapova jednake, pa smo prema tome izjednačili i vrijednosti masa pojedinih članova, te unijeli vrijednosti u programski kod.



Slika 23. Dijagram momenata zglobova (2)

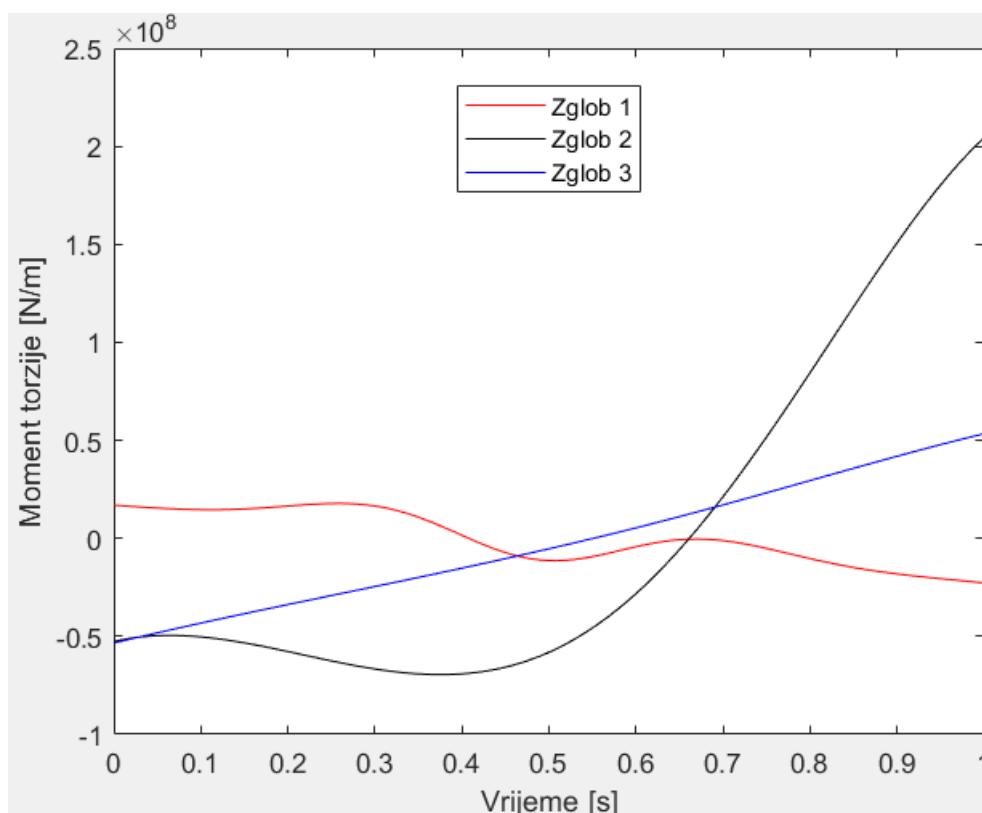
Slika 23. prikazuje dijagram momenata zglobova za drugu analizu, gdje smo povećali duljine i mase drugog i trećeg člana, tako da njihove vrijednosti odgovaraju vrijednostima prvog člana. Vidimo da je moment prvog zgloba u ovisnosti o vremenu ostao gotovo nepromijenjen,

dok kod ostala dva člana imamo promjene. Treći zglob zadržao je slično ponašanje kao u prethodnoj analizi, ali su se minimalna i maksimalna vrijednost povećale, pa je raspon momenta torzije za taj zglob sada oko  $\pm 6 \cdot 10^6$  Nm. Maksimalna vrijednost na ovom dijagramu je početna vrijednost momenta torzije drugog zgloba koja iznosi  $9 \cdot 10^6$  Nm.

Zadnje ulazne vrijednosti ove analize uzeti ćemo iste duljine štapova kao i iz prve analize, gdje su drugi i treći štap bili dulji od prvog. Prema tome ćemo i mase članova promijeniti da pripadaju povećanju duljine pojedinih članova. Ti parametri su sljedeći:

$$\begin{aligned} L_1 &= 250 \text{ mm}; & L_2 &= 1000 \text{ mm}; & L_3 &= 500 \text{ mm}; \\ m_1 &= 10 \text{ kg}; & m_2 &= 40 \text{ kg}; & m_3 &= 20 \text{ kg}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

U ovoj analizi je prvi štap najmanje duljine, ali i najlakši od svih članova. Vrijednosti smo unijeli u programski kod kako bi dobili sljedeći dijagram.



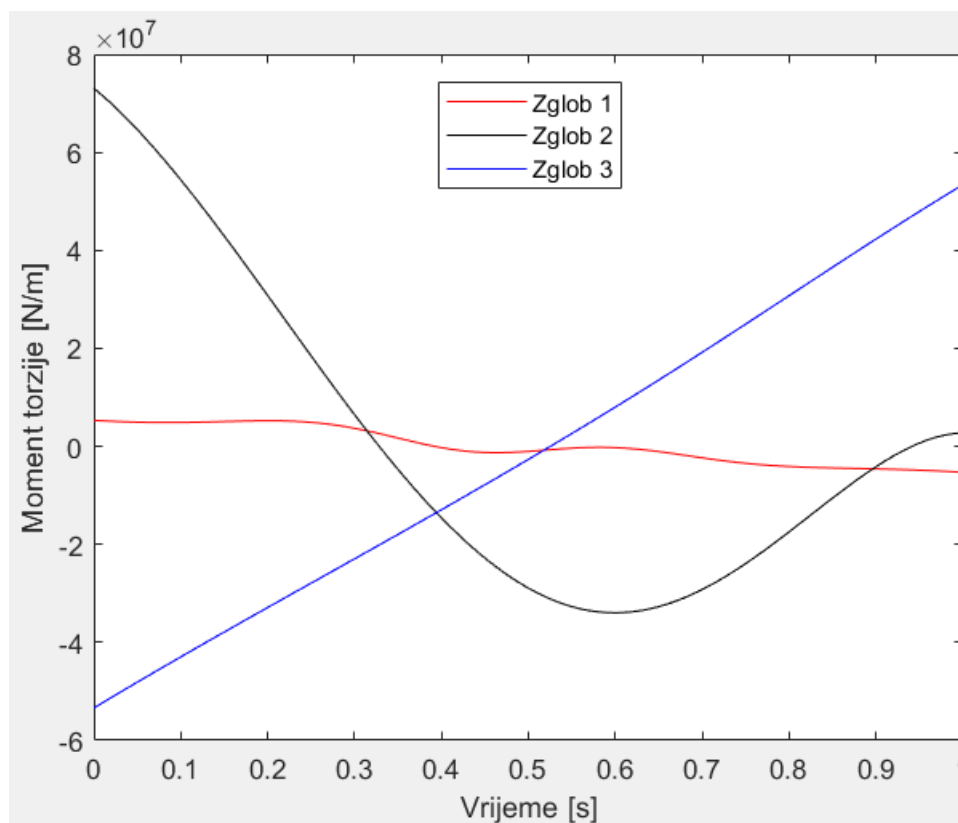
Slika 24. Dijagram momenata zglobova (3)

Slika 24. prikazuje momente zglobova za treću grupu ulaznih parametara koje smo analizirali. Moment torzije prvog zgloba i ovdje ostaje nepromijenjen u odnosu na prethodne dijagrame. Maksimalna vrijednost ovog dijagrama postigla se za krajnji moment drugog zgloba i iznosi oko  $2 \cdot 10^8$  Nm. Kretanje vrijednosti momenta torzije trećeg zgloba je i ovdje linearno, samo s puno manjim nagibom u odnosu na prethodni dijagram, gdje su mase svih članova bile

jednake, a ovdje je masa drugog člana duplo veća u odnosu na masu trećeg člana. Vrijednost mu se kreće između  $\pm 0.5 \cdot 10^8$  Nm. Usporedimo li graf prve analize s ovim, gdje je ista razlika masa između članova bila dupla, vidimo da im startni moment torzije kreće iz gotovo pa identične točke na dijagramu.

Sada ćemo za analizu staviti duljine i mase svih članova jednake, kao u drugoj grupi ulaznih parametara, samo za razliku od njih postupno ćemo povećati vrijednosti. Koristit ćemo dvije različite grupe ulaznih parametara i pratit ćemo hoćemo li dobiti očekivano linearno povećanje svih vrijednosti na dijagramu. Prva grupa ulaznih vrijednosti parametara s jednakim duljinama i masama je sljedeća:

$$\begin{aligned} L_1 = 500 \text{ mm}; & \quad L_2 = 500 \text{ mm}; & \quad L_3 = 500 \text{ mm}; \\ m_1 = 20 \text{ kg}; & \quad m_2 = 20 \text{ kg}; & \quad m_3 = 20 \text{ kg}. \end{aligned} \quad (5.7)$$



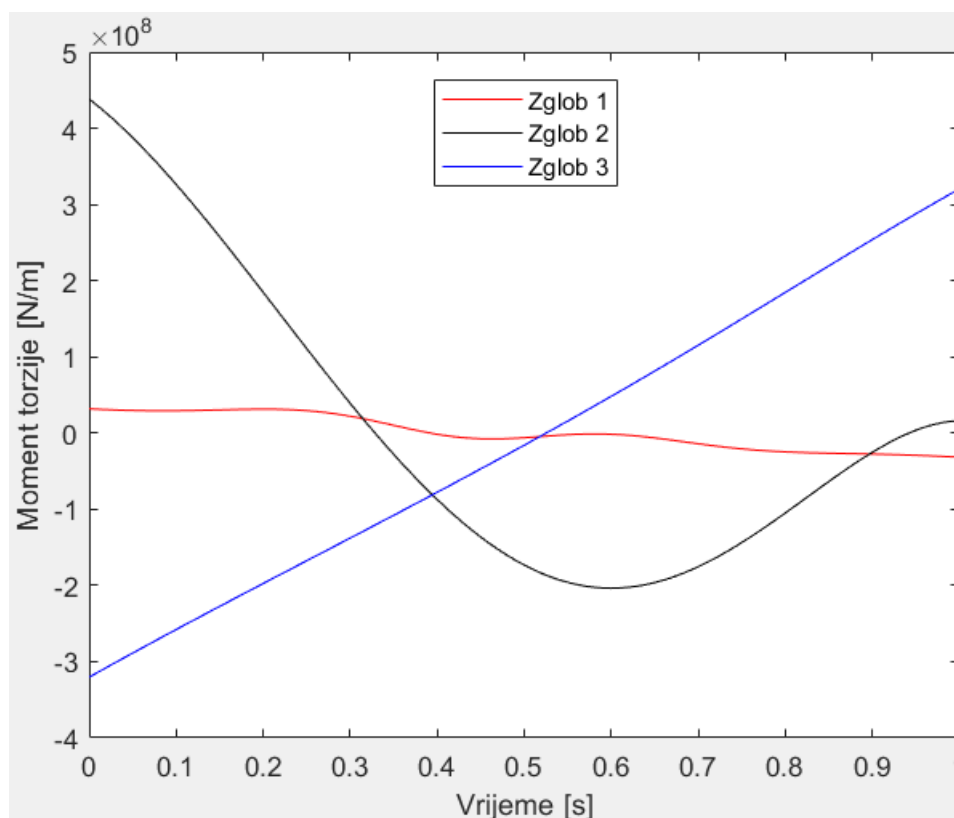
Slika 25. Dijagram momenata zglobova (4)

Slika 25. prikazuje kretanje vrijednosti momenata torzije zglobova manipulatora u ovisnosti o vremenu. Ulazni parametri duljina štapova i masa članova međusobno su jednaki, pa dijagram sa slike 25. uspoređujemo s onim sa slike 23. U odnosu na taj dijagram, sve smo vrijednosti doslovno poduplali, i dobili smo identične linije na dijagramu, s drugačijim vrijednostima momenata. Moment torzije trećeg zgloba s vremenom i ovdje linearno raste, a vrijednost mu se kreće između  $\pm 5 \cdot 10^7$  Nm. Na slici 23. maksimalan moment na dijagramu bio

je početni moment torzije drugog zgloba koji je iznosio  $9 \cdot 10^6$  Nm, dok je ovdje vrijednost za duplo veće početne vrijednosti jednaka  $7 \cdot 10^7$  Nm. U odnosu na dijagrame iz prethodnih analiza, moment torzije prvog zgloba ovdje je zadržao svoje ponašanje u ovisnosti o vremenu, s blago padajućim trendom, ali na ovom dijagramu uz osjetno manje oscilacije.

U zadnjoj grupi ulaznih parametara također ćemo zadržati jednake duljine i mase članova, ali ih nećemo linearno povećati. U prethodnom dijagramu vidjeli smo da linearnim povećanjem parametara, njihovo ponašanje u ovisnosti o vremenu ostaje isto, pa ćemo sada provjeriti mijenja li se njihovo ponašanje ako ne povećamo linearno njihove ulazne parametre. Duljine i mase članova za ovu analizu bit će jednake sljedećem:

$$\begin{aligned} L_1 &= 1000 \text{ mm}; & L_2 &= 1000 \text{ mm}; & L_3 &= 1000 \text{ mm}; \\ m_1 &= 30 \text{ kg}; & m_2 &= 30 \text{ kg}; & m_3 &= 30 \text{ kg}. \end{aligned} \quad (5.8)$$



Slika 26. Dijagram momenata zglobova (5)

Slika 26. prikazuje dijagram momenata zglobova za petu grupu ulaznih podataka koje smo analizirali. Usporedimo li ovaj dijagram s dijagramom sa slike 23. vidljivo je da je ponašanje momenata torzije s vremenom ostalo isto, samo su se ponovno vrijednosti promijenile. Čak su linije zadržale svoj nagib, pa je primjerice moment torzije trećeg zgloba zadržao identični nagib, uz različitu vrijednost momenta torzije.

Možemo zaključiti da će ponašanje promjene momenata torzije zglobova u odnosu o vremenu ostati identične, ako zadržimo jednake duljine štapova te mase članova manipulatora, neovisno o tome kako mijenjali te parametre (povećavali ili smanjivali ih linearno ili nelinearno!). Jedina promjena ponašanja vrijednosti momenata torzije događa se ako promijenimo duljine i mase članova da ne budu međusobno jednake. Tada možemo utjecati na nagibe linija na grafovima, apsolutne vrijednosti momenata, kao i o tome hoće li moment biti pozitivan ili negativan na početku ili kraju perioda analiziranja, koji je ovdje bio jednak jednu sekundu. Primijetili smo i da kada povećamo ulazne parametre za analizu s nekim koeficijentom, primjerice s 2, da se izlazni parametri mijenjaju, ali ne u vrijednosti tog koeficijenta kojeg smo primijenili na ulazne. Kako smo koristili program za računalnu simulaciju, mogli smo ubaciti bilo koje vrijednosti, od beskonačno malih, do beskonačno velikih, ali to ne bi imalo smisla jer takvi manipulatori u praksi nisu mogući za izraditi. Za realne vrijednosti ulaznih parametara koje smo koristili, vidjeli smo da je bitan i njihov međusobni odnos. Ovisno o tom odnosu parametara članova manipulatora, vrijednosti momenta torzije nekog člana imale su manje oscilacije u ovisnosti o vremenu.



## 6. ZAKLJUČAK

RRR struktura robota za istu poziciju i orijentaciju robota unutar njegovog radnog prostora nudi dva ili više moguća rješenja kako ih postići. Iznimka od tog pravila su vanjske granice radnog prostora manipulatora, gdje on te radne točke može postići samo u stanju singularnosti, odnosno, ispružene ruke. Laki dohvat pozicija unutar radnog prostora omogućuju mu tri rotacijska zglobova od kojih se sastoji, po čemu ta struktura i nosi ime. Nakon izvoda jednadžbi kinematike i dinamike robota, specifično za ovu strukturu, krajnje jednadžbe unijeli smo u programski paket MATLAB gdje smo radili analize ponašanja ovog manipulatora. Pratili smo poziciju njegove prihvatnice u prostoru, točnu putanju kojom se kreće kako bi dohvatio tu poziciju, te iznose momenata torzije svih zglobova u ovisnosti o trajanju kretanja. Sve to je u radu prikazano dijagramima, čijim pregledom izbor potencijalnih motora postaje puno jednostavniji.

Vidjeli smo da se postavljanjem Denavit-Hartenbergovih parametara može precizno definirati pozicija i orijentacija prihvatnice u prostoru. Promjenom tih parametara, pratili smo i promjenu pozicije prihvatnice. Vidjeli smo da je pozicija singularnosti manipulatora potencijalni problem strukture zbog opasnosti od kolizije s okolinom. Pažljivim optimiranjem parametara članova robota možemo direktno utjecati na vrijednosti momenata torzije, koji mogu biti manji ili veći, ovisno o našim potrebama. Tim postupkom možemo uštedjeti na izradi robota, napraviti ga učinkovitijim za radne zadatke uz manje gubitke.

U prilogu su dani programski kodovi iz MATLAB-a koje smo koristili u sljedećim analizama. Kod koristi početnu i krajnju točku kretanja prihvatnice, koju na početku programa moramo definirati. Za te točke onda računa parametre koeficijenata  $a_{ij}$  i definira jednadžbe putanje prihvatnice u prostoru. Osim početne i krajnje točke, program koristi još i dvije međutočke, kroz koje onda svojim funkcijama optimira putanju kretanja tako da ta linija bude kontinuirana i glatka. Tu putanju crtamo u dijagramu kako bi se uvjerali da je to ono gibanje koje želimo postići, nakon što smo pregledali sve moguće dostupne pozicije unutar radnog prostora robotskog manipulatora. Za tako definiranu putanju prihvatnice, potrebno je znati pogonske momente zglobova kako bi postigli željene pozicije. Koristimo identične točke iz njene putanje, zadajemo programu duljine i mase štapova manipulatora, te program računa komponente modela prostora stanja, a to su inercijska, centrifugalna i gravitacijska komponenta. Tako dobivene modele međusobno sumiramo kako bi dobili vektor torzijskih

---

momenata koji kasnije i crtamo u dijagram. Analizom dijagrama moguće je odabrati fizičke dijelove robota koji će njegovim dijelovima omogućiti željenu putanju.

---

**LITERATURA**

- [1] Kraut, B.: Strojarski priručnik, Tehnička knjiga Zagreb, 1970.
- [2] Decker, K. H.: Elementi strojeva, Tehnička knjiga Zagreb, 1975.
- [3] Herold, Z.: Računalna i inženjerska grafika, Zagreb, 2003.
- [4] [https://www.researchgate.net/figure/Figura-22-Robot-de-la-obra-RUR-de-Karel-Capek\\_fig1\\_266395779](https://www.researchgate.net/figure/Figura-22-Robot-de-la-obra-RUR-de-Karel-Capek_fig1_266395779)
- [5] [https://hr.wikipedia.org/wiki/Industrijski\\_robot](https://hr.wikipedia.org/wiki/Industrijski_robot)
- [6] <https://enciklopedija.hr/natuknica.aspx?ID=18608>
- [7] Bruyninckx H.: Robot kinematics and dynamics, Leuven, 2010.
- [8] Kostic D., Steinbuch K.: Modeling and Identification for High-Performance Robot Control: An RRR Robotic Arm Case Study, Eindhoven, 2004
- [9] <https://automaticaddison.com/the-ultimate-guide-to-jacobian-matrices-for-robotics/>
- [10] [https://wblog.wiki/sh/State\\_space\\_representation](https://wblog.wiki/sh/State_space_representation)
- [11] Paul R.: Robot manipulators: mathematics, programming and control, London, 1981.
- [12] Crneković M.: Robotika, materijali s predavanja, FSB Zagreb, 2021.
- [13] Sciavicco L, Siciliano B.: Advanced Textbooks in Control and Signal Processing, Rim, 2000.

**PRILOZI**

- I. CD-R disc
- II. Prilog I
- III. Prilog II
- IV. Prilog II

---

**PRILOG I.**

Programski kod „simulacija pozicije prihvatnice“

```
clc;
close all;
clear all;

% Duljine štapova
L1=250;
L2=1000;
L3=500;

% Generiranje linearnih prostornih vektora
q1=linspace(0,90,4);
q2=linspace(0,90,4);
q3=linspace(0,90,4);
brojac=1;

% Program
for j = 1:length(q2);
    Q2=q2(j);
    for k = 1:length(q3);
        Q3=q3(k);

% Početna točka
x0=0;
y0=0;
% Točka 1
x1=0;
y1=L1;
% Točka 2
x2=x1+L2*cosd(Q2);
y2=y1+L2*sind(Q2);
% Točka 3
```

---

```
x3=x2+L3*cosd(Q3);
```

```
y3=y2+L3*sind(Q3);
```

```
% Dijagram
```

```
plot([x0 x1],[y0 y1],'r',[x1 x2],[y1 y2],'b',[x2 x3],[y2 y3],'g','Linewidth',4);
```

```
xlabel('Y-os'), ylabel('Z-os'), title('Pozicija prihvatnice')
```

```
axis([-L2*0.5 (L1+L2+L3)*1.1 -L2*0.5 (L1+L2+L3)*1.1]);
```

```
grid;
```

```
pause(0.5);
```

```
M(brojac)=getframe(gcf);
```

```
brojac=brojac+1;
```

```
    end
```

```
end
```

---

**PRILOG II.**

Programski kod „simulacija putanje prihvatnice“

```
clc;
clear all;
close all;

% Postavljanje parametara dijagrama
figure;
h = plot3(0,0,0);
p = get(h,'Parent');
xlim(p,'manual');
xlim(p,[-300 600]);
ylim(p,'manual');
ylim(p,[-300 600]);
zlim(p,'manual');
zlim(p,[-300 600]);
axis vis3d;
grid on;

%Točka 1
tocka1.x =0;
tocka1.y = 0;
tocka1.z = -250;

% Točka 2
tocka2.x = 0;
tocka2.y = 0;
tocka2.z = 250;

% Točka 3
tocka3.x = 0;
tocka3.y = 0;
tocka3.z = 250;
```

```
%Točka 4
tocka4.x = 250;
tocka4.y = 250;
tocka4.z = 250;

% Linije kretanja između točaka
l= line([tocka1.x, tocka2.x],[tocka1.y,tocka2.y],[tocka1.z,tocka2.z],'Color','r','LineWidth',4);
l1 = line([tocka2.x,
tocka3.x],[tocka2.y,tocka3.y],[tocka2.z,tocka3.z],'Color','b','LineWidth',4);
l2 = line([tocka3.x,
tocka4.x],[tocka3.y,tocka4.y],[tocka3.z,tocka4.z],'Color','g','LineWidth',4);
pause(0.5);
q2 = 30;
q3 =0;

% For petlja za crtanje dijagrama
for q1 =70:-1:0
    [tocka2,tocka3,tocka4] = IzDenavitHartenbergaiq(q1,q1,q1);
    set(l,'ZData',[tocka1.z,tocka2.z],'YData',[tocka1.y,tocka2.y],'XData',[tocka1.x,tocka2.x]);
    set(l1,'ZData',[tocka2.z,tocka3.z],'YData',[tocka2.y,tocka3.y],'XData',[tocka2.x,tocka3.x]);
    set(l2,'ZData',[tocka3.z,tocka4.z],'YData',[tocka3.y,tocka4.y],'XData',[tocka3.x,tocka4.x]);
    hold on;
    plot3(tocka4.x,tocka4.y,tocka4.z,'xk');
    xlabel('X-os'),ylabel('Y-os'),zlabel('Z-os');
    pause(0.05);
end

% Pomoćna funkcija 1
function [tocka2,tocka3,tocka4] = IzDenavitHartenbergaiq(q1,q2,q3)
% Denavit Hartenbergovi parametri
s1 = [0;0;0];
s2 = [250;0;0];
s3 = [250;0;0];
```



```
alpha1 = 90;
```

```
alpha2 = 0;
```

```
alpha3 = 0;
```

```
% Vektor pozicija
```

```
tockaA = izraziUizq(q1)*izraziVizAlpha(alpha1)*s1 + [0;0;1];
```

```
tockaB = izraziUizq(q1)*izraziVizAlpha(alpha1)*izraziUizq(q2)*izraziVizAlpha(alpha2)*s2  
+ tockaA;
```

```
tockaC =
```

```
izraziUizq(q1)*izraziVizAlpha(alpha1)*izraziUizq(q2)*izraziVizAlpha(alpha2)*izraziUizq(q  
3)*izraziVizAlpha(alpha3)*s3 + tockaB;
```

```
% Koordinate pozicija po točkama
```

```
tocka2.x = tockaA(1); tocka2.y = tockaA(2); tocka2.z = tockaA(3);
```

```
tocka3.x = tockaB(1); tocka3.y = tockaB(2); tocka3.z = tockaB(3);
```

```
tocka4.x = tockaC(1); tocka4.y = tockaC(2); tocka4.z = tockaC(3);
```

```
end
```

```
% Pomoćna funkcija 2
```

```
function U = izraziUizq(q)
```

```
U = [cosd(q), -sind(q), 0; sind(q), cosd(q), 0; 0, 0, 1];
```

```
end
```

```
% Pomoćna funkcija 2
```

```
function V = izraziVizAlpha(alpha)
```

```
V = [ 1, 0 ,0; 0, cosd(alpha), -sind(alpha); 0, sind(alpha), cosd(alpha)];
```

```
end
```

---

**PRILOG III.**

Programski kod „simulacija momenata torzije zglobova“

```
clc;
clear all;
close all;

format short

% Početne mase i duljine štapova
M1=20;
M2=20;
M3=20;
L1=2000;
L2=2000;
L3=2000;

% Početna pozicija
q10=0;
q20=0;
q30=0;

% DH parametri i matrica transformacije prvog zgloba
q=q10;d=0;a=0;alpha=0;
T01=[cos(q) -sin(q) 0 a;sin(q)*cos(alpha) cos(q)*cos(alpha) -sin(alpha) -
sin(alpha)*d;sin(q)*sin(alpha) cos(q)*sin(alpha) cos(alpha) cos(alpha)*d;0 0 0 1];

% Drugi zglob
q=q20+(pi/2);d=L1;a=0;alpha=pi/2;
T12=[cos(q) -sin(q) 0 a;sin(q)*cos(alpha) cos(q)*cos(alpha) -sin(alpha) -
sin(alpha)*d;sin(q)*sin(alpha) cos(q)*sin(alpha) cos(alpha) cos(alpha)*d;0 0 0 1];

% Treći zglob
q=q30;d=0;a=L2;alpha=0;
```

```
T23=[cos(q) -sin(q) 0 a;sin(q)*cos(alpha) cos(q)*cos(alpha) -sin(alpha) -
sin(alpha)*d;sin(q)*sin(alpha) cos(q)*sin(alpha) cos(alpha) cos(alpha)*d;0 0 0 1];
q=0;d=0;a=L3;alpha=0;
```

```
T34=[cos(q) -sin(q) 0 a;sin(q)*cos(alpha) cos(q)*cos(alpha) -sin(alpha) -
sin(alpha)*d;sin(q)*sin(alpha) cos(q)*sin(alpha) cos(alpha) cos(alpha)*d;0 0 0 1];
```

% U odnosu na ishodište

```
T02=T01*T12;
```

```
T03=T01*T12*T23;
```

```
T04=T01*T12*T23*T34;
```

% Moment torzije svakog koord. sustava

```
axis([-2 3 -2 3 -2 3]);
```

```
Ax1 = [T01(1,4),T02(1,4)];
```

```
Ay1 = [T01(2,4),T02(2,4)];
```

```
Az1 = [T01(3,4),T02(3,4)];
```

```
Ax2 = [T02(1,4),T03(1,4)];
```

```
Ay2 = [T02(2,4),T03(2,4)];
```

```
Az2 = [T02(3,4),T03(3,4)];
```

```
Ax3 = [T03(1,4),T04(1,4)];
```

```
Ay3 = [T03(2,4),T04(2,4)];
```

```
Az3 = [T03(3,4),T04(3,4)];
```

```
Ax4 = [-.1,.1];
```

```
Ay4= [0,0];
```

```
Az4= [0,0];
```

```
p1 = line(Ax1,Ay1,Az1,'LineWidth',[3],'Color','k');
```

```
p2 = line(Ax2,Ay2,Az2,'LineWidth',[3],'Color','M');
```

```
p3 = line(Ax3,Ay3,Az3,'LineWidth',[3],'Color','R');
```

```
p4 = line(Ax4,Ay4,Az4,'LineWidth',[12],'Color','B');
```

```
drawnow
```

% Računanje diferencijalnih jednadžbi

```
n=1;
```

```
g=9.81;
```

```

for t=0:.01:1
q1=0.7854+(0.332*t^2)-(0.2213*t^3);
q2=3.1416-(14.1372*(t^2))+9.4248*t^3);
q3=2.5102-(1.8867*t^2)+(1.2578*(t^3));

dq1=(0.664*t)-(0.6639*(t^2));
ddq1=-1.3278*t+0.664;
dq2=(-28.2744*t)+(28.2744*(t^2));
ddq2=-28.2744+(56.5488*t);
dq3=-3.7734*t+(3.7734*(t^2));
ddq3=-3.7734+(7.5468*t);

% Zglob 1
q=q1;d=0;a=0;alpha=0;
T01=[cos(q) -sin(q) 0 a;sin(q)*cos(alpha) cos(q)*cos(alpha) -sin(alpha) -
sin(alpha)*d;sin(q)*sin(alpha) cos(q)*sin(alpha) cos(alpha) cos(alpha)*d;0 0 0 1];

% Zglob 2
q=q2+(pi/2);d=L1;a=0;alpha=pi/2;
T12=[cos(q) -sin(q) 0 a;sin(q)*cos(alpha) cos(q)*cos(alpha) -sin(alpha) -
sin(alpha)*d;sin(q)*sin(alpha) cos(q)*sin(alpha) cos(alpha) cos(alpha)*d;0 0 0 1];

% Zglob 3
q=q3;d=0;a=L2;alpha=0;
T23=[cos(q) -sin(q) 0 a;sin(q)*cos(alpha) cos(q)*cos(alpha) -sin(alpha) -
sin(alpha)*d;sin(q)*sin(alpha) cos(q)*sin(alpha) cos(alpha) cos(alpha)*d;0 0 0 1];
q=0;d=0;a=L3;alpha=0;
T34=[cos(q) -sin(q) 0 a;sin(q)*cos(alpha) cos(q)*cos(alpha) -sin(alpha) -
sin(alpha)*d;sin(q)*sin(alpha) cos(q)*sin(alpha) cos(alpha) cos(alpha)*d;0 0 0 1];

% U odnosu na ishodište
T02=T01*T12;
T03=T01*T12*T23;
T04=T01*T12*T23*T34;

```

## % Moment torzije svakog koord. sustava

$$Ax1 = [T01(1,4), T02(1,4)];$$

$$Ay1 = [T01(2,4), T02(2,4)];$$

$$Az1 = [T01(3,4), T02(3,4)];$$

$$Ax2 = [T02(1,4), T03(1,4)];$$

$$Ay2 = [T02(2,4), T03(2,4)];$$

$$Az2 = [T02(3,4), T03(3,4)];$$

$$Ax3 = [T03(1,4), T04(1,4)];$$

$$Ay3 = [T03(2,4), T04(2,4)];$$

$$Az3 = [T03(3,4), T04(3,4)];$$

$$Ax4 = [-.1, .1];$$

$$Ay4 = [0, 0];$$

$$Az4 = [0, 0];$$

## % Postavljanje varijabli po osima

$$\text{set}(p1, 'X', Ax1, 'Y', Ay1, 'Z', Az1)$$

$$\text{set}(p2, 'X', Ax2, 'Y', Ay2, 'Z', Az2)$$

$$\text{set}(p3, 'X', Ax3, 'Y', Ay3, 'Z', Az3)$$

$$\text{set}(p4, 'X', Ax4, 'Y', Ay4, 'Z', Az4)$$

## % Varijable prostora stanja

$$M = [(M1 * L1^2) / 12 + (M2 * L2^2 * \sin(q2) * \sin(q2)) / 4 + (M2 * L2^2) / 12 + (M3 * L2^2) + (M3 * L2 * \sin(q2) * \sin(q2)) + (M3 * L3^2 * (\sin(q2 + q3))^2) + (M3 * L3^2) / 12 \quad 0 \quad 0; 0$$

$$(M2 * L2^2) / 4 + (M3 * L2 * L3 * \cos(q3)) + (M3 * L3^2) / 12$$

$$(M3 * L2 * L3 * \cos(q3)) / 2 + (M3 * L3^2) / 12; 0 \quad (M3 * L3^2) / 3 \quad (M3 * L3^2) / 3];$$

$$V = [(M2 * L2^2 * \sin(q2) * \cos(q2) * dq1 * dq2) / 2 + (2 * M3 * L2 * \sin(q2) * \cos(q2) * dq1 * dq2) + (M3 * L3^2 * \sin(q2 + q3) * \cos(q2 + q3) * dq1 * (dq1 + dq2)) / 2; (-M3 * L2 * L3 * \sin(q3) * dq3 * dq2) -$$

$$(M3 * L2 * L3 * \sin(q3) * (dq3)^2) / 2 - (M3 * L2^2 * \sin(q2) * \cos(q2) * (dq1^2)) -$$

$$(M3 * L3^2 * \sin(q2 + q3) * \cos(q2 + q3) * (dq1^2)) / 4 -$$

$$(M3 * L2 * L3 * dq1^2 * ((\cos(q2) * \sin(q2 + q3) + (\sin(q2) * \cos(q2 + q3))))); (-$$

$$M3 * L3^2 * \sin(q2 + q3) * \cos(q2 + q3) * (dq1^2)) / 4 -$$

$$(M3 * L2 * L3 * \sin(q2) * \cos(q2 + q3) * (dq1^2)) / 2 + (M3 * L2 * L3 * \sin(q3) * dq1 * (dq2 + dq3)) / 2];$$

$$G=[0;(-M2*L2*\sin(q2)*g)/2-(M3*L3*\sin(q2+q3)*g)/2-(M3*L2*\sin(q2)*g);(-$$

$$M3*L3*\sin(q2+q3)*g)/2];$$

$$T=M*[ddq1;ddq2;ddq3]+V+G;$$

% Torzija po zglobovima

A1(n,1)=t;

A2(n,1)=T(1,1);

A3(n,1)=T(2,1);

A4(n,1)=T(3,1);

drawnow

n=n+1;

end

% Crtanje dijagrama

hold on

figure

plot(A1(:,1),A2(:,1),'r')

hold on

plot(A1(:,1),A3(:,1),'k')

hold on

plot(A1(:,1),A4(:,1),'b')

xlabel('Vrijeme [s]')

ylabel('Moment torzije [N/m]')

legend('Zglob 1','Zglob 2','Zglob 3');