

# Metoda harmoničke ravnoteže za kontrarotirajuće propelere

---

Ćurčin, Franko

Master's thesis / Diplomski rad

2022

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:235:706026>

*Rights / Prava:* [Attribution-NoDerivatives 4.0 International/Imenovanje-Bez prerada 4.0 međunarodna](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-04-01**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

## DIPLOMSKI RAD

Franko Ćurčin

ZAGREB, 2022



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

## DIPLOMSKI RAD

METODA HARMONIČKE RAVNOTEŽE ZA KONTRAROTIRAJUĆE  
PROPELERE

Mentor:  
prof. dr. sc. Hrvoje Jasak

Student:  
Franko Ćurčin

ZAGREB, 2022

*Zahvaljujem se profesoru Hrvoju Jasaku na pruženom mentorstvu, pomoći, vremenu i povjerenju tokom izrade ovog diplomskog rada.*

*Također, htio bih se zahvaliti Tessi Uroić i Luki Balatincu na svom pruženom znanju, savjetima i pomoći. Isto tako bih se htio zahvaliti ostatku 8. kata, koji su moj boravak tamo učinili zanimljivim iskustvom.*

*Konačno, veliko hvala mojoj obitelji i prijateljima na svojoj podršci, potpori i razumijevanju tijekom studiranja. Kroz najbolje trenutke i kroz najteže trenutke, ovo je za vas.*

## **Izjava**

Izjavljujem da sam ovaj rad radio samostalno koristeći znanja stečena tijekom studija i navedenu literaturu.

Zagreb, ožujak 2022.

Franko Ćurčin



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE



Središnje povjerenstvo za završne i diplomske ispite  
Povjerenstvo za diplomske ispite studija strojarstva za smjerove:

Procesno-energetski, konstrukcijski, inženjersko modeliranje i računalne simulacije i brodostrojarški

Sveučilište u Zagrebu Fakultet strojarstva i brodogradnje	
Datum	Prilog
Klasa: 602 - 04 / 22 - 6 / 1	
Ur.broj: 15 - 1703 - 22 -	

## DIPLOMSKI ZADATAK

Student: **Franko Ćurčin**

JMBAG: 0035207123

Naslov rada na hrvatskom jeziku: **Metoda harmoničke ravnoteže za kontrarotirajuće propelere**

Naslov rada na engleskom jeziku: **Harmonic balance method for contra-rotating propellers**

Opis zadatka:

Računalna mehanika fluida široko se, akademski i industrijski, primjenjuje za simulacije strujanja u turbostrojevima. Strujanje u statorskim i rotorskim rešetkama vrlo je složeno, a posebno se ističe problem vremenske promjenjivosti veličina strujanja. Budući da je geometrija rešetke periodična, u strujanju se javljaju harmoničke komponente, a za analizu je dovoljno ostvariti kvazi-stacionarni prikaz strujanja. Takve se simulacije provode pomoću metode harmoničke ravnoteže (engl. *Harmonic Balance*), gdje se vremenska ovisnost pojava opisuje spektralnom dekompozicijom u dominantne frekvencijske komponente.

Kandidat će tijekom izrade rada izvršiti sljedeće zadatke:

- izvršiti pregled literature i napisati izvod i formulaciju matematičkog modela harmoničke ravnoteže na sustavu Navier-Stokesovih jednadžbi u računalnoj dinamici fluida te analizirati postupak dekompozicije vremenskog signala za slučaj frekvencijskih rješenja s više frekvencija,
- testirati metodu harmoničke ravnoteže i validirati je usporedbom s rezultatima tranzijentne simulacije za odabrani jednostavni slučaj,
- upotrijebiti metodu harmoničke ravnoteže za slučaj kontrarotirajućih propelera te usporediti performanse metode i dobivene rezultate s performansama i rezultatima tranzijentne simulacije te stacionarne simulacije, dostupnima u diplomskom radu - Luka Balatinec: Pregled metode povezivanja rotorske i statorske mreže u proračunskoj dinamici fluida za simulacije turbostrojeva, 2019.

U radu je potrebno navesti korištenu literaturu i eventualno dobivenu pomoć.

Zadatak zadan:

Datum predaje rada:

Predviđeni datumi obrane:

20. siječnja 2022.

24. ožujka 2022.

28. ožujka 2022. – 1. travnja 2022.

Zadatak zadao:

Predsjednik Povjerenstva:

Prof. dr. sc. Hrvoje Jasak

Prof. dr. sc. Tanja Jurčević Lulić

# Sadržaj

<b>Sadržaj</b>	<b>v</b>
<b>Popis slika</b>	<b>viii</b>
<b>Popis tablica</b>	<b>xi</b>
<b>Popis oznaka</b>	<b>xii</b>
<b>Sažetak</b>	<b>xiv</b>
<b>Abstract</b>	<b>xv</b>
<b>1. Uvod</b>	<b>1</b>
1.1. Algoritmi računalne dinamike fluida . . . . .	1
1.2. Opća skalarna transportna jednačba . . . . .	2
1.2.1. Temeljne jednačbe . . . . .	4
1.3. Metoda kontrolnih volumena . . . . .	5
1.3.1. Diskretizacija opće skalarne transportne jednačbe . . . . .	6
1.4. Pregled rada . . . . .	9
1.5. Struktura rada . . . . .	9
<b>2. Matematički model</b>	<b>10</b>
2.1. Uvod . . . . .	10
2.2. Razvoj Fourierovog reda . . . . .	11

---

2.3. Harmonička ravnoteža u skalarnom transportu . . . . .	13
2.4. Zaključak . . . . .	20
<b>3. Implementacija harmoničke ravnoteže u metodi kontrolnih volumena</b>	<b>21</b>
3.1. Uvod . . . . .	21
3.2. Diskretizacija prostora . . . . .	22
3.3. Diskretizacija vremena . . . . .	22
3.4. Diskretizacija jednadžbe očuvanja količine gibanja . . . . .	23
3.5. Sprega tlaka-brzine u harmoničkoj ravnoteži . . . . .	24
3.6. Zaključak . . . . .	24
<b>4. Primjena metode harmoničke ravnoteže na primjeru hidromlaznice</b>	<b>25</b>
4.1. Uvod . . . . .	25
4.2. Geometrija modela i prostorna domena . . . . .	26
4.3. Rubni uvjeti . . . . .	27
4.4. Rezultati . . . . .	28
4.5. Zaključak . . . . .	34
<b>5. Kontrarotirajući propeleri</b>	<b>35</b>
5.1. Uvod . . . . .	35
5.2. Osnove i princip rada . . . . .	35
5.3. Geometrija modela i prostorna domena . . . . .	37
5.4. Rubni uvjeti . . . . .	42
5.5. Rezultati . . . . .	48
5.6. Zaključak . . . . .	62
<b>6. Zaključak</b>	<b>63</b>
<b>Prilog</b>	<b>66</b>
<b>A. Utjecaj mreže na rezultate simulacije</b>	<b>66</b>
<b>B. Postavke rotirajuće rešetke</b>	<b>70</b>
B.1. Hidromlaznica . . . . .	70

B.2. Kontrarotirajući propeleri . . . . . 72

**Literatura** . . . . . **73**

# Popis slika

1.1	Kontrolni volumen [1]. . . . .	6
2.1	Aproksimacija funkcije kvadratnog vala povećanjem broja harmonika [2].	13
4.1	Pregled domene i rubnih ploha hidromlaznice. . . . .	26
4.2	Polje brzine hidromlaznice; 1 harmonik. . . . .	28
4.3	Polje brzine hidromlaznice; 3 harmonika. . . . .	28
4.4	Polje brzine hidromlaznice; 5 harmonika. . . . .	29
4.5	Polje brzine hidromlaznice; MRF simulacija. . . . .	29
4.6	Polje tlaka hidromlaznice; 1 harmonik. . . . .	30
4.7	Polje tlaka hidromlaznice; 3 harmonika. . . . .	30
4.8	Polje tlaka hidromlaznice; 5 harmonika. . . . .	31
4.9	Polje tlaka hidromlaznice; MRF simulacija. . . . .	31
4.10	Pre tlačna i potlačna strana hidromlaznice za 1 harmonik. . . . .	32
4.11	Pre tlačna i potlačna strana hidromlaznice za 3 harmonika. . . . .	32
4.12	Pre tlačna i potlačna strana hidromlaznice za 5 harmonika. . . . .	32
4.13	Pre tlačna i potlačna strana hidromlaznice MRF simulacije. . . . .	32
4.14	Polje turbulentne kinetičke energije hidromlaznice; 1 harmonik. . . . .	33
4.15	Polje turbulentne kinetičke energije hidromlaznice; 3 harmonika. . . . .	33
4.16	Polje turbulentne kinetičke energije hidromlaznice; 5 harmonika. . . . .	34
4.17	Polje turbulentne kinetičke energije hidromlaznice; MRF simulacija. . . .	34
5.1	Primjer kontrarotirajućih propelera [1]. . . . .	36



5.2	Pregled domena i rubnih ploha kontrarotirajućih propelera. . . . .	38
5.3	Nazivi rubnih ploha vanjske domene koji su u izravnoj interakciji s mrežama propelera. . . . .	39
5.4	Nazivi rubnih ploha mreže <i>foreProp</i> (lijevo) i mreže <i>aftProp</i> (desno). . . . .	39
5.5	Prikaz kvalitete mreže na lopaticama propelera. . . . .	40
5.6	Prikaz profinjenja KV uz lopatice propelera; ravnina $x = konst.$ . . . . .	41
5.7	Prikaz profinjenja KV uz lopatice propelera; ravnina $z = konst.$ . . . . .	41
5.8	Polje tlaka kontrarotirajućih propelera u $z = konst.$ ravnini; harmonička ravnoteža. . . . .	48
5.9	Polje tlaka kontrarotirajućih propelera u $z = konst.$ ravnini; MRF simulacija [1]. . . . .	49
5.10	Polje tlaka kontrarotirajućih propelera u $z = konst.$ ravnini; tranzijentna simulacija [1]. . . . .	49
5.11	Raspodjela tlaka pretlačne strane <i>foreProp</i> propelera (lijevo) i potlačne strane (desno); harmonička ravnoteža. . . . .	50
5.12	Raspodjela tlaka pretlačne strane <i>aftProp</i> propelera (lijevo) i potlačne strane (desno); harmonička ravnoteža. . . . .	50
5.13	Raspodjela tlaka pretlačne strane <i>foreProp</i> propelera (lijevo) i potlačne strane (desno); MRF simulacija [1]. . . . .	51
5.14	Raspodjela tlaka pretlačne strane <i>aftProp</i> propelera (lijevo) i potlačne strane (desno); MRF simulacija [1]. . . . .	51
5.15	Raspodjela tlaka pretlačne strane <i>foreProp</i> propelera (lijevo) i potlačne strane (desno); tranzijentna simulacija [1]. . . . .	52
5.16	Lokalna promjena tlaka na presjecima (lijevo prednji propeler, desno stražnji) ravnine $x = konst.$ ; harmonička ravnoteža. . . . .	53
5.17	Lokalna promjena tlaka na presjecima (lijevo prednji propeler, desno stražnji) ravnine $x = konst.$ ; MRF simulacija [1]. . . . .	53
5.18	Prikaz polja brzine u ravnini $z = konst.$ ; harmonička ravnoteža. . . . .	54
5.19	Odnos ulazne i aksijalne brzine u ravnini $z = konst.$ ; harmonička ravnoteža. . . . .	55
5.20	Odnos ulazne i aksijalne brzine u ravnini $z = konst.$ ; MRF simulacija [1]. . . . .	55
5.21	Prikaz strujnica fluida u interakciji kontrarotirajućih propelera. . . . .	56
5.22	Polje brzine na presjecima $x/R = 0$ i $x/R = 0.334$ ; harmonička ravnoteža. . . . .	57
5.23	Polje brzine na presjecima $x/R = 0$ i $x/R = 0.334$ ; MRF simulacija [1]. . . . .	57

---

5.24	Polje brzine na presjecima $x/R = 0$ i $x/R = 0.334$ ; tranzijentna simulacija [1]. . . . .	57
5.25	Polje turbulentne kinetičke energije u presjeku ravnine $z = konst.$ ; harmonička ravnoteža. . . . .	59
5.26	Polje turbulentne kinetičke energije u presjeku ravnine $z = konst.$ ; MRF simulacija [1]. . . . .	60
5.27	Polje turbulentne kinetičke energije u presjeku ravnine $z = konst.$ ; tranzijentna simulacija [1]. . . . .	60
5.28	Raspodjela tke na lopaticama prednjeg i stražnjeg propelera; harmonička ravnoteža. . . . .	61
5.29	Raspodjela tke na lopaticama prednjeg i stražnjeg propelera; MRF simulacija [1]. . . . .	61
5.30	Raspodjela tke na lopaticama prednjeg i stražnjeg propelera; tranzijentna simulacija [1]. . . . .	62
A.1	Mreža A; sitni KV uz propelere s naglom promjenom veličine u vanjskoj domeni. . . . .	66
A.2	Mreža A; rezultat polja tlaka. . . . .	67
A.3	Mreža A; rezultat polja brzine. . . . .	67
A.4	Mreža B; različite veličine KV na mjestu spajanja domena propelera s vanjskom domenom. . . . .	68
A.5	Mreža B; rezultat polja tlaka. . . . .	69
A.6	Mreža B; rezultat polja brzine. . . . .	69

# Popis tablica

4.1	Pregled rubnih uvjeta hidromlaznice. . . . .	27
5.1	Karakteristike i geometrije propelera. . . . .	37
5.2	Pregled pojedinosti mreža. . . . .	38
5.3	Tipovi rubnih ploha prednjeg propelera. . . . .	42
5.4	Tipovi rubnih ploha stražnjeg propelera. . . . .	43
5.5	Tipovi rubnih ploha vanjske mreže. . . . .	43
5.6	Pregled rubnih uvjeta na rubnoj plohi <i>outerMesh</i> . . . . .	45
5.7	Pregled rubnih uvjeta na rubnoj plohi <i>foreProp</i> . . . . .	46
5.8	Pregled rubnih uvjeta na rubnoj plohi <i>aftProp</i> . . . . .	47

# Popis oznaka

## Latinične oznake

<b>u</b>	$[m/s]$	Konvektivna brzina
<b>q</b>	$[W/m^2]$	Toplinska gustoća
<b>Q</b>	$[-]$	Primarna varijabla u vremenskoj domeni
<b>Q</b>	$[-]$	Matrica varijable Q u diskretnim vremenskim trenucima
<b>R</b>	$[-]$	Članovi skalarne transportne jednadžbe u vremenskoj domeni
<b>R</b>	$[-]$	Matrica varijable R u diskretnim vremenskim trenucima
<b>A</b>	$[-]$	Matrica koeficijenata
<b>E</b>	$[-]$	Matrica transformacije iz vremenske u frekvencijsku domenu
<b>E<sup>-1</sup></b>	$[-]$	Matrica transformacije iz frekvencijske u vremensku domenu
<b>Q</b>	$[-]$	Matrica Fourierovih koeficijenata
<b>R</b>	$[-]$	Matrica Fourierovih koeficijenata
<b>Q<sub>0</sub></b>	$[-]$	Skalarno polje za nulti harmonik Fourierovog reda
<b>Q<sub>C<sub>n</sub></sub></b>	$[-]$	Skalarno polje za n-ti harmonik kosinusa Fourierovog reda
<b>Q<sub>S<sub>n</sub></sub></b>	$[-]$	Skalarno polje za n-ti harmonik sinusa Fourierovog reda
<b>R<sub>0</sub></b>	$[-]$	Ostatak za nulti harmonik Fourierovog reda
<b>R<sub>C<sub>n</sub></sub></b>	$[-]$	Ostatak za n-ti harmonik kosinusa Fourierovog reda
<b>R<sub>S<sub>n</sub></sub></b>	$[-]$	Ostatak za n-ti harmonik sinusa Fourierovog reda
<b>A</b>	$[-]$	Amplituda sinusa
<b>a<sub>0</sub></b>	$[-]$	Srednja vrijednost Fourierovog reda
<b>A<sub>n</sub><sup>2</sup></b>	$[-]$	Energija n-tog harmonika
<b>a<sub>n</sub></b>	$[-]$	Fourierov koeficijent n-tog harmonika kosinusa
<b>b<sub>n</sub></b>	$[-]$	Fourierov koeficijent n-tog harmonika sinusa
<b>F</b>	$[m^3/s]$	Protok kroz rubnu plohu
<b>f</b>	$[Hz]$	Frekvencija
<b>k</b>	$[-]$	Indeks sumacije
<b>n</b>	$[-]$	Broj harmonika
<b>P</b>	$[-]$	Period Fourierovog reda
<b>T</b>	$[s]$	Period
<b>t</b>	$[s]$	Vrijeme

## Grčke oznake

$\gamma$	$[m^2/s]$	koeficijent difuzije
$\nu$	$[m^2/s]$	kinematska viskoznost
$\omega$	$[1/s]$	kutna brzina
$\phi$	$[-]$	opće svojstvo
$\rho$	$[kg/m^3]$	gustoća fluida

## Skraćenice

CFD	engl. <i>Computational Fluid Dynamics</i>
RDF	Računalna dinamika fluida
DFT	Direktna Fourierova transformacija
KV	Kontrolni volumen
MRF	engl. <i>Multiple Reference Frame</i>
GGI	engl. <i>General Grid Interface</i>
TKE	Turbulentna kinetička energija

# Sažetak

Računalna dinamika fluida (RDF) postala je gotovo konvencionalnim alatom u inženjerskoj praksi. Numeričkim rješavanjem setova jednadžbi dobiva se uvid u strujanje fluida u prostoru, a dobivena rješenja inženjerima i znanstvenicima daju mogućnost kvantifikacije strujanja u smislu sila, momenata i iskoristivosti na promatranom problemu. Visoki zahtjevi za računalnim resursima te vrijeme trajanja proračuna jedni su od glavnih izazova. Kako bi se smanjilo vrijeme potrebno za simulaciju uz očuvanje vremenske rezolucije rješenja, zbog periodičnosti strujanja u turbostrojevima moguće je koristiti tzv. spektralne metode. Spektralne metode zasnivaju se na pretvorbi veličina iz vremenske domene u frekvencijsku i obrnuto. Harmonička ravnoteža jedna je od spektralnih metoda, a često je primjenjiva u turbostrojevima. Harmonička ravnoteža svodi se na rješavanje određenog broja stacionarnih jednadžbi čiji se rezultati dobivaju za cijeli period  $T$ . Veća točnost rješenja ili smanjenje trajanja simulacije postiže se ovisno o odabranom broju harmonika. U sklopu ovog rada, izložena je teorijska pozadina matematičkog modela harmoničke ravnoteže te njegova implementacija u metodi kontrolnih volumena. Simulacije su provedene u svrhu validacije korištenja metode harmoničke ravnoteže u turbostrojevima. Proučavana su dva slučaja interakcije rotirajućih lopatičnih rešetki. U prvom slučaju razmatrana je rotirajuća rešetka rotora s mirujućom rešetkom statora, a u drugom slučaju razmatrane su rotirajuće rešetke oba rotora. Provedene su iduće simulacije:

- Simulacija harmoničke ravnoteže na primjeru hidromlaznice uz primjenu različitog broja harmonika.
- Simulacija harmoničke ravnoteže na primjeru kontrarotirajućih propelera.

Provedena je analiza rezultata navedenih simulacija na temelju dostupnih rezultata stacionarnih i tranzijentnih simulacija. Pokazano je da harmonička ravnoteža, uz korištenje niskog broja harmonika, daje detaljniji prikaz rezultata uspoređujući sa stacionarnom MRF simulacijom, dok je za dobivanje rezultata približnima rezultatima tranzijentne simulacije broj harmonika potrebno povećati.

**Ključne riječi:** računalna dinamika fluida, spektralne metode, harmonička ravnoteža, hidromlaznica, kontra-rotirajući propeleri, OpenFOAM

# Abstract

Computational Fluid Dynamics (CFD) has become almost conventional tool in engineering practice. Solving sets of equations numerically can provide insight into fluid flow, thus giving engineers and scientists opportunity to quantify flow in terms of forces, torques and the efficiency of given problem. High demands for computer resources and simulation time are one of main drawbacks. In order to reduce simulation time while preserving the time resolution of the solution, due to periodicity of the flow in turbomachines it is possible to use the so-called spectral methods. Spectral methods are based on conversion of quantities from time domain to frequency domain and vice versa. Harmonic balance is one of spectral methods and it is often used in turbomachines. Harmonic balance is based on solving a number of stationary equations whose results are obtained for the entire period  $T$ . Higher accuracy of the solution or reduction of the simulation time is achieved depending on the selected number of harmonics. As a part of this thesis, the theoretical background of the mathematical model of harmonic balance and its implementation in the finite volume method are presented. The simulations were performed for the purpose of validating the use of harmonic balance method in turbomachines. Two types of rotating grids interaction were studied. In the first case, the rotating grid of the rotor and the stationary grid of the stator was considered. In the second case, the rotating grid of both rotors was considered. The following simulations were performed:

- Simulation of harmonic balance method on the water jet with different number of harmonics.
- Simulation of harmonic balance method on the contra-rotating propellers.

The analysis of the results was based on the available results of steady-state and transient simulations. It has been shown that with the use of lower number of harmonics given results are of high accuracy and more detailed compared to steady-state simulation, while compared to transient simulation results, the number of harmonic has to be increased.

**Keywords:** computational fluid dynamics, spectral methods, harmonic balance, water jet, contra-rotating propellers, OpenFOAM

# 1 | Uvod

## 1.1. Algoritmi računalne dinamike fluida

Računalna dinamika fluida (RDF), engl. *Computational Fluid Dynamics* (CFD), gotovo je postala konvencionalnim alatom u inženjerskoj praksi. Računalna dinamika fluida metoda je numeričkog rješavanja setova jednadžbi koje opisuju strujanje fluida u prostoru, a pritom dobivena rješenja daju inženjerima i znanstvenicima mogućnost kvantifikacije strujanja u smislu sila, momenata, iskoristivosti na razmatranom problemu.

Nedostatci RDF-a za inženjersku primjenu odnose se na visoke zahtjeve za računalnim resursima te vrijeme trajanja proračuna. Izrada prototipa i eksperimentalno ispitivanje alternativa je numeričkoj analizi razmatranog problema, no financijski trošak izrade postave je visok i nezanemariv. Stoga je razvoj novih RDF alata i metoda usmjeren na smanjenje potrebne računalne snage i trajanja simulacije. Prema vremenskoj promjenjivosti slike strujanja, algoritme RDF-a možemo podijeliti na stacionarne i tranzijentne.

Glavna pretpostavka kod stacionarne metode je vremenska nepromjenjivost veličina strujanja. U turbostrojevima, zbog rotacije strujanje ne može biti stacionarno, no može se uočiti kako se veličine u strujanju mijenjaju i ponavljaju ovisno o frekvenciji strujanja. Kako bi se izbjegla tranzijentna simulacija s pomičnom mrežom, set jednadžbi može se modificirati uzimanjem u obzir cenfrifugalne i Coriolisove sile. Ovakav pristup naziva se *frozen rotor* pristupom, budući da dobiveno rješenje predstavlja jednu „zamrznutu” sliku strujnica fluida u turbostroju za odabranu poziciju rotora. Iako ovakav pristup ne može opisati tranzijentne pojave, daje dobru aproksimaciju integralnih veličina u turbostrojevima kao što su snaga, okretni moment, sile na stijenkama, stupanj djelovanja,



itd. Prednost ovog pristupa je značajno smanjenje proračunskog vremena, uz smanjenu točnost rezultata.

Tranzijentna metoda zasniva se na dobivanju slike strujanja u inkrementalno malim vremenskim koracima u vremenskom periodu koji je potreban da se razvije potpuna slika strujanja. Stabilnost ovog pristupa ograničena je Courantovim brojem  $Co = \frac{u\Delta t}{\Delta x}$ , koji stavlja u odnos brzinu, vrijeme te veličinu ćelije. S obzirom na kriterij stabilnosti vremenski korak za turbostrojeve s visokim brzinama vrtnje mora biti dovoljno malen, što u konačnici rezultira dugim vremenom simulacije. Glavna prednost ove metode je dobra vremenska rezolucija u promatranom vremenskom rasponu, te se fizikalne pojave interakcije rotora i statora mogu dobro opisati.

Kako bi se sačuvala vremenska rezolucija rješenja, a umanjilo vrijeme potrebno za simulaciju, zbog periodičnosti strujanja u turbostrojevima moguće je koristiti tzv. spektralne metode. Spektralna metoda zasniva se na principu pretvorbe veličina iz vremenske domene u frekvencijsku i obrnuto, ovisno o pristupu. Harmonička ravnoteža jedna je od spektralnih metoda koja se često primjenjuje u turbostrojevima, a svodi se na rješavanje određenog broja stacionarnih jednačbi, te se rezultati dobivaju za cijeli period  $T = \frac{1}{f}$ . Ovisno o odabranom broju harmonika može se dobiti veća točnost rješenja ili smanjiti duljina trajanja simulacije.

U ovom diplomskom radu na primjeru kontrarotirajućih propelera primijenit će se spektralna metoda harmoničke ravnoteže te će se dobiveni rezultati usporediti s rezultatima tranzijentne simulacije [1] Simulacije će se provesti pomoću RDF softvera otvorenog koda, OpenFOAM.

## 1.2. Opća skalarna transportna jednačba

Reynoldsov transportni teorem (RTT) opisuje brzinu promjene općeg svojstva  $\phi$  u promatranom prostoru, odnosno, kontrolnom volumenu. Kontrolni volumen (KV) predstavlja zatvoreni sustav u kojem je brzina promjene općeg svojstva  $\phi$  jednaka zbroju svih promjena svojstava unutar KV i neto iznosa protoka kroz površinu koja zatvara KV. RTT za KV prikazan je jednačbom [3]:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_m} \phi dV = \int_{V_m} \frac{\partial \phi}{\partial t} dV + \oint_{S_m} \phi(\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}) dS. \quad (1.1)$$

Kako bi se površinski integral iz jednadžbe 1.1 pretvorio u integral po volumenu, koristi se opći zapis Gaussovog teorema:

$$\int_{V_P} \nabla \cdot \mathbf{a} dV = \oint_{\partial V_P} d\mathbf{s} \cdot \mathbf{a} = \oint_{\partial V_P} d\mathbf{n} \cdot \mathbf{a} dS. \quad (1.2)$$

Primjenom jednadžbe 1.2 na jednadžbu 1.1, volumenski integral RTT prelazi u sljedeći oblik:

$$\frac{d}{dt} \int_V \phi dV = \int_V \left[ \frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot (\phi \mathbf{u}) \right] dV, \quad (1.3)$$

te opisuje konvektivni transport općeg svojstva  $\phi$  konvektivnom brzinom  $\mathbf{u}$ . Ulazni protok općeg svojstva  $\phi$  definiran je s negativnim predznakom  $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) < 0$  dok je izlazni protok definiran s pozitivnim predznakom  $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) > 0$ .

Površinski i volumenski izvori, isto kao i konvektivni transport, sudjeluju u promjeni općeg svojstva unutar KV. Doprinos površinskih i volumenskih izvora prikazan je jednadžbom:

$$\frac{d}{dt} \int_V \phi dV = \int_V q_v dV - \oint_S (\mathbf{n} \cdot \mathbf{q}_s) dS. \quad (1.4)$$

Primjenom Gaussovog teorema na izvorski član u jednadžbi 1.4 te izjednačavanjem lijeve strane rezultirajuće jednadžbe s jednadžbom 1.3, i primjenom volumenskog integrala na KV ( $V = konst.$ ), dobiva se sljedeći izraz:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot (\phi \mathbf{u}) = q_v - \nabla \cdot \mathbf{q}_s. \quad (1.5)$$

Članovi koji predstavljaju površinske sile te djeluju na površinu P kontrolnog volumena KV, modeliraju se korištenjem difuzijskog transporta. Fizikalno gledano, opće svojstvo  $\phi$  zatvorenoj domeni (KV) bit će preneseno iz područja više koncentracije u područje niže koncentracije, sve dok se ne uspostavi ravnoteža po prostoru:

$$\mathbf{q}_s = -\gamma \nabla \phi, \quad (1.6)$$

gdje  $\nabla\phi$  predstavlja gradijent svojstva  $\phi$ , koji ima smjer od točke niže prema točki više vrijednosti svojstva, a  $\gamma$  je koeficijent proporcionalnosti (difuzivnost).

Umetanjem jednadžbe 1.6 u jednadžbu 1.5 dobiva se skalarna transportna jednadžba:

$$\underbrace{\frac{\partial\phi}{\partial t}}_{\text{vremenska promjena}} + \underbrace{\nabla \cdot (\phi\mathbf{u})}_{\text{konvekcijski prijenos}} - \underbrace{\nabla \cdot (\gamma\nabla\phi)}_{\text{difuzijski prijenos}} = \underbrace{q_v}_{\text{izvorski prijenos}}. \quad (1.7)$$

Vremenska derivacija iz jednadžbe 1.7 predstavlja akumulaciju svojstva  $\phi$  u KV-u. Konvekcijski izraz je koordinatna transformacija svojstva, odnosno količina svojstva  $\phi$  prenesena iz sustava ili u sustav, konvektivnom brzinom  $\mathbf{u}$ . Difuzijski prijenos predstavlja transport svojstva  $\phi$ , zbog postojanja neravnoteže (gradijenta). Izvorski ili ponorski članovi definiraju lokalno stvaranje (ili razaranje) općeg svojstva  $\phi$ .

### 1.2.1. Temeljne jednadžbe

Skalarna transportna jednadžba 1.7 jedna je od temeljnih jednadžbi mehanike kontinuuma. Zamjenom općeg svojstva  $\phi$  nekim drugim svojstvom mogu se dobiti osnovni zakoni očuvanja:

#### Očuvanje mase

Zamjenom općeg svojstva  $\phi$  u skalarnoj transportnoj jednadžbi 1.7 gustoćom fluida  $\rho$  te izjednačavanjem izvorskog člana s nulom, dobiva se jednadžba koja očuvanja mase:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{u}) = 0. \quad (1.8)$$

Kod nestlačivih strujanja gustoća fluida je konstantna  $\rho = konst.$ , što pojednostavnjuje jednadžbu 1.8 na:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (1.9)$$

Jednadžba očuvanja mase za nestlačiva strujanja, jednadžba (1.9), naziva se jednadžbom kontinuiteta.

## Očuvanje količine gibanja

Jednadžba za očuvanje količine gibanja izvodi se iz jednadžbe 1.7 zamjenom opće varijable  $\phi$  vektorom količine gibanja  $\rho\mathbf{u}$ :

$$\frac{\partial(\rho\mathbf{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{u}\mathbf{u}) = \underbrace{\rho\mathbf{g}}_{\text{gravitacijska sila}} + \underbrace{\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}}_{\text{površinske sile}}. \quad (1.10)$$

Kod nestlačivih strujanja, jednadžba 1.10 može se prikazati kao:

$$\underbrace{\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}}_{\text{lokalna promjena}} + \underbrace{\nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u})}_{\text{konvekcija}} - \underbrace{\nabla \cdot (\nu_{\text{eff}}\nabla\mathbf{u})}_{\text{difuzija}} = - \underbrace{\nabla \frac{p}{\rho}}_{\text{gradijent tlaka}}, \quad (1.11)$$

gdje je Cauchyjev tenzor površinskih sila dan kao suma gradijenta tlaka  $\nabla p$  i tenzora viskoznih naprezanja predstavljenih u difuzijskom izrazu. Brzina fluida  $\mathbf{u}$  javlja se u jedn. 1.11 kao transportna i transportirana varijabla, što konvekcijski član čini nelinearnim [3].

## Očuvanje energije

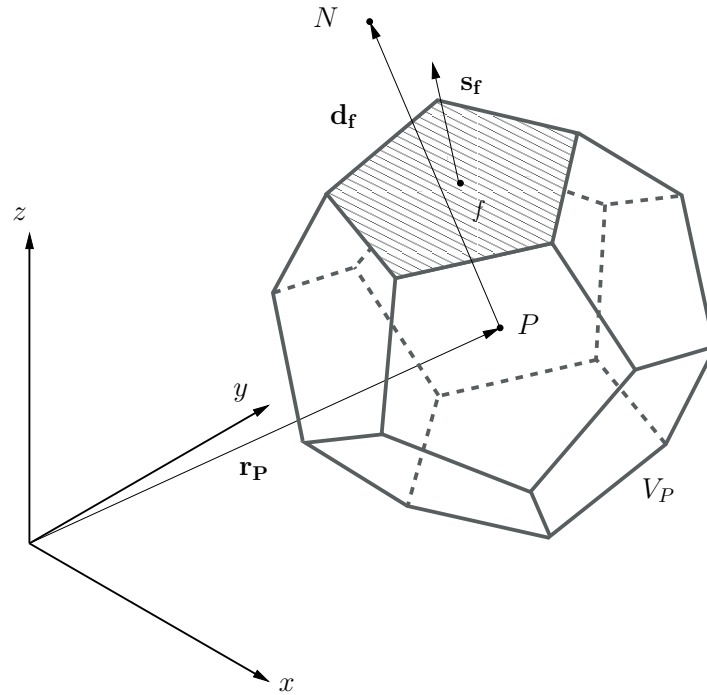
Ukoliko se opće svojstvo  $\phi$  iz jednadžbe 1.7 zamijeni specifičnom unutrašnjom energijom  $\rho e$  i izrazi izvora/ponora budu izjednačeni sumom snaga sila koje djeluju na KV i neto toplinskim tokom definiranim specifičnim toplinskim tokom  $\mathbf{q}$  te volumenskim izvorom topline, dobiva se jednadžba očuvanja energije:

$$\frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho e\mathbf{u}) = \underbrace{\rho\mathbf{g} \cdot \mathbf{u}}_{\text{snaga gravitacijske sile}} + \underbrace{\nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{u})}_{\text{snaga površinskih sila}} - \underbrace{\nabla \cdot \mathbf{q} + \rho Q}_{\text{neto toplinski tok}}. \quad (1.12)$$

## 1.3. Metoda kontrolnih volumena

Metoda kontrolnih volumena polazi od temeljnih jednadžbi koje predstavljaju zakone očuvanja mase i energije te ih transformira u diskretne algebarske izraze u kontrolnom volumenu (KV). Prvi korak u numeričkom rješavanju parcijalnih diferencijalnih jednadžbi je diskretizacija. Proces diskretizacije podrazumijeva transformaciju parcijalnih

diferencijalnih jednadžbi u algebarske izraze ekvivalentnih svojstava [3]. Rješenja jednadžbi pohranjuju se u središte KV, čije je težište označeno slobom  $P$ , a težište susjednog KV slovom  $N$  (slika 1.1). Podaci o rubnim uvjetima pohranjuju se u središta rubnih ploha.



Slika 1.1: Kontrolni volumen [1].

Algebarski izrazi zapisuju se u obliku matrice, nepoznate veličine zapisuju se u obliku vektora. Rješavanjem sustava navedenih algebarskih izraza dobivaju se vrijednosti varijabli u svakom KV.

### 1.3.1. Diskretizacija opće skalarne transportne jednadžbe

#### Diskretizacija vremenske promjene

Vremenski član u općem zapisu skalarne transportne jednadžbe 1.7,  $\frac{\partial \phi}{\partial t}$  opisuje lokalnu promjenu varijable  $\phi$ . Iznos nepoznate varijable  $\phi$  u starom i novom vremenskom trenutku može se zapisati:

$$\phi^n = \phi(t = t_{novo}), \quad (1.13)$$

$$\phi^o = \phi(t = t_{staro}). \quad (1.14)$$

Vremenski član  $\frac{\partial \phi}{\partial t}$  može se prikazati izratom:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\phi^n - \phi^o}{\Delta t}. \quad (1.15)$$

Budući da vremenski član govori o lokalnoj promjeni varijable  $\phi$  u KV, potrebno ga je integrirati po volumenu:

$$\int_V \frac{\partial \phi}{\partial t} dV = \frac{\phi^n - \phi^o}{\Delta t} V_P. \quad (1.16)$$

### Diskretizacija konvekcijskog prijenosa

Konvekcijski član iz jednadžbe 1.7 govori o transportu općeg svojstva konvektivnom brzinom  $\mathbf{u}$  kroz plohe kontrolnog volumena. Površinskim integralom općeg svojstva  $\phi$  koje se prenosi konvektivnom brzinom  $\mathbf{u}$  dobiva se:

$$\oint_S \phi(\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}) dS = \sum_f \phi_f (\mathbf{s}_f \cdot \mathbf{u}_f) = \sum_f F \phi_f, \quad (1.17)$$

gdje je  $\phi_f$  vrijednosti općeg svojstva  $\phi$  na plohi KV, a  $F$  maseni protok kroz plohu, koji glasi:

$$F = \mathbf{s}_f \cdot \mathbf{u}_f. \quad (1.18)$$

### Diskretizacija difuzijskog prijenosa

Diskretizacija difuzijskog člana jednadžbe 1.7 provodi se po istom principu kao i diskretizacija konvekcijskog člana. Integracijom difuzijskog člana po površini dobiva se:

$$\begin{aligned}
\int_V \nabla \cdot (\gamma \nabla \phi) dV &= \oint_S \gamma (\mathbf{n} \cdot \nabla \phi) dS \\
&= \sum_f \int_{S_f} \gamma (\mathbf{n} \cdot \nabla \phi) dS \\
&= \sum_f \gamma_f \mathbf{s}_f \cdot (\nabla \phi)_f.
\end{aligned} \tag{1.19}$$

Koeficijent difuzije  $\gamma_f$  potrebno je interpolirati, a skalarni umnožak vektora normale na plohu  $\mathbf{s}_f$  i gradijenta opće varijable  $\phi$  određuje se prema:

$$\mathbf{s}_f \cdot (\nabla \phi)_f = |\mathbf{s}_f| \frac{\phi_N - \phi_P}{|\mathbf{d}_f|}, \tag{1.20}$$

gdje je  $\mathbf{d}_f$  udaljenost središta dva susjedna KV. Jednadžba 1.20 vrijedi ukoliko je vektor normale na plohu  $\mathbf{s}_f$  kolinearan s vektorom  $\mathbf{d}_f$ , inače je potrebno primjeniti određene ortogonalne korektore [3].

### Diskretizacija izvorskog prijenosa

Izvorski, odnosno ponorski član opisuje lokalne pojave u KV koje se mogu modelirati kompleksnom varijablom  $S$ , prema zapisu:

$$\int_V S dV = SV_P, \tag{1.21}$$

gdje  $S$  može biti član općeg svojstva  $\phi$ , vremena, prostora ili ostalih varijabli, što ga čini složenim za integriranje. Stoga se  $S$  može linearizirati s obzirom na opće svojstvo  $\phi$ :

$$S(\phi) = S_u - S_p \phi. \tag{1.22}$$

## 1.4. Pregled rada

U ovom diplomskom radu primjenjena je metoda harmoničke ravnoteže za simulacije strujanja u turbostrojevima. Na početku rada prikazana je teorijska podloga metode kontrolnih volumena, matematički model harmoničke ravnoteže te diskretizacija jednadžbi metodom kontrolnih volumena (MKV). Metoda harmoničke ravnoteže bit će uspoređena s tranzijentnim algoritmom, za slučaj kontrarotirajućih propelera.

## 1.5. Struktura rada

Diplomski rad podijeljen je na sljedeća poglavlja:

- poglavlje 1 s uvodnim pregledom računalne dinamike fluida i osnova numeričkog modeliranja,
- u poglavlju 2 dan je matematički izvod metode harmoničke ravnoteže,,
- u poglavlju 3 povezane su metoda harmoničke ravnoteže i kontrolnih volumena te je prikazana diskretizacija modificiranih jednadžbi harmoničke ravnoteže,
- u poglavlju 4 prikazana je primjena metode harmoničke ravnoteže na primjeru hidromlaznice, a dobiveni rezultati uspoređeni su s rezultatima MRF simulacije,
- u poglavlju 5 prikazane su pojave koje se javljaju u interakciji kontrarotirajućih propelera, te su dane postavke mreže i simulacije. Za kraj, prikazani su rezultati dane simulacije te usporedba dobivenih rezultata s rezultatima tranzijentne i MRF simulacije,
- a u poglavlju 6 izložen je zaključak diplomskog rada.



## 2 Matematički model

### 2.1. Uvod

Harmonička ravnoteža je kvazi-stacionarna metoda primjenjiva za simulacije periodičnih strujanja. Budući da je geometrija lopatične rešetke periodična, u strujanju se javljaju harmoničke komponente veličina strujanja koje se vrlo točno mogu prikazati Fourierovom transformacijom u vremenskom koraku, korištenjem  $n$  broja harmonika te srednjom vrijednosti pojedine veličine. Metoda omogućuje zamjenu vremenskog člana momentne jednačbe dodatnim izvorskim članovima, čime se sustav tranzijentnih jednačbi pretvara u sustav većeg broja stacionarnih jednačbi. U prethodnom je poglavlju prikazan skup zakona očuvanja fizikalnih veličina strujanja i pristup odvojenog rješavanja zakona očuvanja količine gibanja i jednačbe kontinuiteta za nestlačivo strujanje. Model je izveden za nestlačivo strujanje, koristeći odvojen pristup sprege polja tlaka i brzine. Model vrijedi za opći broj harmonika te ne ovisi o odabiru bazne frekvencije. Metoda je implementirana u RDF softveru otvorenog pristupa kodu OpenFOAM [4], temeljem rada [5].

## 2.2. Razvoj Fourierovog reda

Metoda harmoničke ravnoteže zasniva se na razvoju periodične funkcije u Fourierov red. Razvoj se temelji na pretvorbi periodične funkcije u niz funkcija sinusa i kosinusa. Izrazi sinusa i kosinusa ovise o amplitudi i frekvenciji, tj. broju oscilacija funkcije u jednoj sekundi, čija suma pobliže aproksimira vrijednosti izvorne analitičke funkcije. Ako je funkcija  $f(x)$  funkcija realne varijable  $x$  te se može integrirati po intervalu  $[x_0, x_0 + P]$ , gdje je  $P$  period funkcije  $f(x)$ , tada razvoj funkcije pomoću Fourierovog reda glasi:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \left( \frac{2\pi nx}{P} \right) + b_n \sin \left( \frac{2\pi nx}{P} \right) \right), \quad x \in [x_0, x_0 + P]. \quad (2.1)$$

Radi periodičnosti funkcije, gdje se funkcija ponavlja u periodu  $P$  prije i poslije intervala  $[x_0, x_0 + P]$ , sam odabir perioda nije važan. Koeficijenti  $a_n$  i  $b_n$  nazivaju se Fourierovi koeficijenti te se mogu izračunati ukoliko je poznata funkcija  $f(x)$ :

$$a_n = \frac{2}{P} \int_{x_0}^{x_0+P} f(x) \cdot \cos \left( \frac{2\pi nx}{P} \right) dx, \quad (2.2)$$

$$b_n = \frac{2}{P} \int_{x_0}^{x_0+P} f(x) \cdot \sin \left( \frac{2\pi nx}{P} \right) dx. \quad (2.3)$$

Jednadžba 2.1 sadrži sumu beskonačnog broja izraza, što je nepraktično u primjeni. Stoga se u praksi koristi se konačan broj  $N$  funkcija sinus i kosinus, čime je greška u aproksimaciji jednaka sumi zanemarenih izraza. U većini slučajeva, vrijednost svakog idućeg izraza manja je od prethodnog, što znači da već samo nekoliko prvih izraza dobro aproksimira funkciju  $f(x)$  te su stoga oni i najznačajniji. Viši harmonici doprinose točnijoj aproksimaciji pojava s frekvencijama višim od baznih te se na taj način točnije mogu prikazati „finije” nestabilnosti unutar promatranog perioda. No, ukoliko funkcija  $f(x)$  nije neprekidna u intervalu  $[x_0, x_0 + P]$ , Fourierov red neće konvergirati prema točnom rješenju.

Za postizanje zadovoljavajuće aproksimacije analitičke funkcije treba se odabrati odgovarajući broj harmonijskih funkcija sinus i kosinus, gdje se traži kompromis između vremena proračuna te greške u aproksimaciji, ovisno o promatranom problemu:

$$f(x) \approx a_0 + \sum_{n=1}^N \left( a_n \cos \left( \frac{2\pi nx}{P} \right) + b_n \sin \left( \frac{2\pi nx}{P} \right) \right), \quad x \in [x_0, x_0 + P]. \quad (2.4)$$

Gornju granicu broja članova sume,  $N$ , također nazivamo brojem harmonika, gdje se stoga  $n$ -ti izraz Fourierovog reda naziva  $n$ -tim harmonikom:

$$f_n(x) = a_n \cos \left( \frac{2\pi nx}{P} \right) + b_n \sin \left( \frac{2\pi nx}{P} \right). \quad (2.5)$$

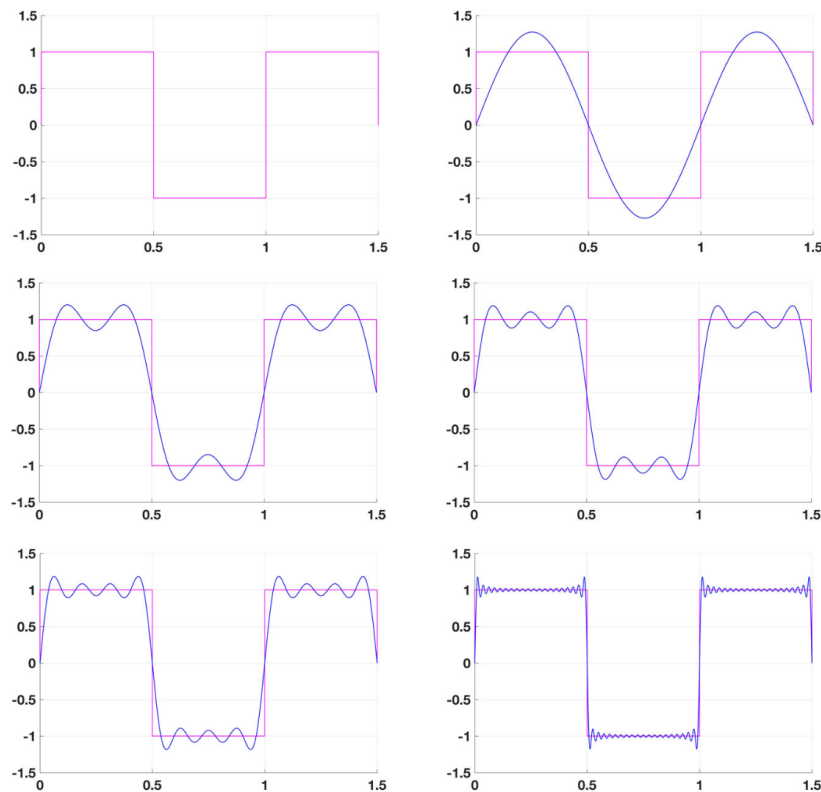
Za  $n = 0$ , funkcija se sastoji od samo nultog harmonika, odnosno člana  $a_0$  te on predstavlja srednju vrijednost funkcije. Razvoj funkcije s odabranim brojem harmonika  $n$  dat će  $2n + 1$  harmonijskih funkcija:  $n$  sinusa,  $n$  kosinusa te srednja vrijednost  $a_0$ .

Pritom amplituda  $n$ -tog harmonika glasi:

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad (2.6)$$

a njezin kub  $A_n^2$  predstavlja energiju  $n$ -tog harmonika.

Grafički prikaz razvoja Fourierovog reda prikazan je na slici 2.1. Analitička funkcija ima oblik kvadratnog vala, te se prikazuje njezina aproksimacija Fourierovim redom, uz povećanje točnosti povećanjem broja harmonika.



Slika 2.1: Aproksimacija funkcije kvadratnog vala povećanjem broja harmonika [2].

### 2.3. Harmonička ravnoteža u skalarnom transportu

Metoda harmoničke ravnoteže temelji se na razvoju skalarne transportne jednadžbe u Fourierov red. Uz pretpostavku da se svaka varijabla može aproksimirati Fourierovim redom u vremenu, korištenjem  $n$  broja harmonika te srednje vrijednosti, u obzir treba uzeti grešku nastalu odbacivanjem viših harmonika iz aproksimacije redom. Kako je već objašnjeno u prethodnom poglavlju, korištenjem većeg broja harmonika  $n$  greška u aproksimaciji rješenja se smanjuje. Uz korištenje  $n$ -tog harmonika, fluktuacije varijable koje se javljaju na frekvencijama reda višeg od  $n$ -tog harmonika neće biti točno prikazane. Budući da se korištenjem većeg broja harmonika  $n$  povećava vrijeme proračuna, proračunsko vrijeme može znatno varirati za dva različita harmonika  $n$  gdje su razlike u rješenjima neznatne, potrebno je pažljivo odabrati dovoljno velik  $n$ . U metodi harmoničke ravnoteže za RDF i MKV, vrijednost Fourierovih koeficijenata prostorno su ovisni te se proračunavaju za svaki KV.

Uz pretpostavku da je razmatrani transport periodične prirode, skalarna transportna jednačba može se napisati na sljedeći način:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \mathcal{R} = 0, \text{ gdje je } Q \text{ primarna varijabla,} \quad (2.7)$$

a u  $\mathcal{R}$  su sadržani za članovi konvekcije<sup>1</sup>, difuzije te izvora/ponora:

$$\mathcal{R} = \nabla \cdot (\mathbf{u}Q) - \nabla \cdot (\gamma \nabla Q) - S_Q. \quad (2.8)$$

U jednačbi 2.8  $\mathbf{u}$  je konvektivna brzina,  $\gamma$  je koeficijent difuzije. Funkcijska ovisnost varijable  $Q$  u vremenu može se raspisati koristeći Fourierov red s  $n$  harmonika:

$$Q(t) = Q_0 + \sum_{i=1}^n Q_{S_i} \sin(i\omega t) + Q_{C_i} \cos(i\omega t), \quad (2.9)$$

gdje je  $\omega$  varijabla kutne brzine, a  $t$  varijabla vremena. Fourierov razvoj za  $\mathcal{R}$  analogan je onom iz jednačbe 2.9:

$$\mathcal{R}(t) = R_0 + \sum_{i=1}^n R_{S_i} \sin(i\omega t) + R_{C_i} \cos(i\omega t). \quad (2.10)$$

Jedan harmonik u razvoju Fourierovog reda predstavlja sumu jednog izraza sinusa te jednog izraza kosinusa, dok se za  $n$ -ti harmonik odgovarajući dio rješenja može zapisati kao:

$$Q_n = Q_{S_n} \sin(n\omega t) + Q_{C_n} \cos(n\omega t). \quad (2.11)$$

Umetanjem izraza za  $Q$  iz jednačbe 2.9 i Fourierovog razvoja  $\mathcal{R}$  iz jednačbe 2.10, u skalarnu transportnu jednačbu 2.7 dobiva se:

<sup>1</sup>U matematičkom modelu harmoničke ravnoteže u skalarnoj transportnoj jednačbi simbol  $Q$  se koristi za vremensku domenu, dok se simbol  $Q$  koristi u frekvencijskoj domeni.

$$\sum_{i=1}^n [i\omega (Q_{S_i} \cos(i\omega t) - Q_{C_i} \sin(i\omega t)) + (R_{C_i} \cos(i\omega t) + R_{S_i} \sin(i\omega t))] = R_0. \quad (2.12)$$

Jednadžba 2.12 predstavlja skalarnu transportnu jednadžbu u frekvencijskoj domeni, gdje su Fourierovi koeficijenti  $Q_{S_i}$  i  $Q_{C_i}$  nepoznanice. Koeficijenti  $Q$  i  $R$  odgovaraju prostornoj domeni. U Fourierovoj dekompoziciji postoje za svaku točku prostora, uz pretpostavku da je frekvencija konstantna. Grupiranjem koeficijenta s istim harmoni-  
cima iz jednadžbe 2.12 dobiva se sustav od  $2n + 1$  jednadžbi:

$$\begin{aligned} -i\omega Q_{C_i} + R_{S_i} &= 0 \rightarrow n \text{ jednadžbi za sinusni dio, gdje je } i = 1 \dots n, \\ R_0 &= 0 \rightarrow \text{jednadžba srednje vrijednosti,} \\ i\omega Q_{C_i} + R_{C_i} &= 0 \rightarrow n \text{ jednadžbi za kosinusni dio, gdje je } i = 1 \dots n. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Jednadžba 2.13 može se zapisati i u matričnom obliku:

$$\omega \mathbf{A} \mathbf{Q} + \mathbf{R} = \mathbf{0}, \quad (2.14)$$

gdje su matrice  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{Q}$  i  $\mathbf{R}$ :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} & & 0 & -1 & & & & & & \\ & & 0 & & -2 & & & & & \\ & 0 & & & & & -3 & & & \\ & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & -n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & & & & & & & & & \\ & 2 & & & & & & & & \\ & & 3 & & & & & 0 & & \\ & & & \ddots & & 0 & & & & \\ & & & & n & 0 & & & & \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} Q_{S_1} \\ Q_{S_2} \\ Q_{S_3} \\ \vdots \\ Q_{S_n} \\ Q_0 \\ Q_{C_1} \\ Q_{C_2} \\ Q_{C_3} \\ \vdots \\ Q_{C_n} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} R_{S_1} \\ R_{S_2} \\ R_{S_3} \\ \vdots \\ R_{S_n} \\ R_0 \\ R_{C_1} \\ R_{C_2} \\ R_{C_3} \\ \vdots \\ R_{C_n} \end{bmatrix}. \quad (2.15)$$

Jednadžba 2.14 sadrži set Fourierovih koeficijenata  $\mathbf{Q}$  za  $\mathcal{Q}(t)$ , a  $\mathbf{R}$  sadrži diferencijalne operatore koje je potrebno pretvoriti u frekvencijsku domenu. Za prijelaz između vremenske i frekvencijske domene u diskretnom prostoru koristi se matični zapis diskretne Fourierove transformacije (DFT). Za jedinstvenu transformaciju po svakom vremenskom koraku, definiran je diskretni vektor vremenske domene:

$$\mathcal{Q}^T = \left[ \mathcal{Q}_{t_1} \quad \mathcal{Q}_{t_2} \quad \mathcal{Q}_{t_3} \quad \dots \quad \mathcal{Q}_{t_{2n+1}} \right], \quad (2.16)$$

gdje  $n$  predstavlja vremenske korake kroz period  $T$ :

$$t_i = \frac{iT}{2n+1}, \quad \text{za } i = 1 \dots 2n+1. \quad (2.17)$$

DFT iz vremenske domene vektora  $\mathcal{Q}$ , u frekvencijsku domenu vektora  $\mathbf{Q}$  može se zapisati u matičnom obliku:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{E}\mathcal{Q}, \quad (2.18)$$

gdje blok matrica  $\mathbf{E}$  poprima sljedeći oblik:

$$\mathbf{E} = \frac{2}{2n+1} \begin{bmatrix} \sin(\omega t_1) & \sin(\omega t_2) & \sin(\omega t_3) & \dots & \sin(\omega t_{2n+1}) \\ \sin(2\omega t_1) & \sin(2\omega t_2) & \sin(2\omega t_3) & \dots & \sin(2\omega t_{2n+1}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sin(n\omega t_1) & \sin(n\omega t_2) & \sin(n\omega t_3) & \dots & \sin(n\omega t_{2n+1}) \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \dots & \frac{1}{2} \\ \cos(\omega t_1) & \cos(\omega t_2) & \cos(\omega t_3) & \dots & \cos(\omega t_{2n+1}) \\ \cos(2\omega t_1) & \cos(2\omega t_2) & \cos(2\omega t_3) & \dots & \cos(2\omega t_{2n+1}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \cos(n\omega t_1) & \cos(n\omega t_2) & \cos(n\omega t_3) & \dots & \cos(n\omega t_{2n+1}) \end{bmatrix}. \quad (2.19)$$

Množenjem jednadžbe 2.18 s  $\mathbf{E}^{-1}$  s lijeve strane transformiraju se veličine iz vremenske u frekvencijsku domenu frekvencijske domene iz vremenske:

$$\mathcal{Q} = \mathbf{E}^{-1}\mathbf{Q}, \quad (2.20)$$

gdje je  $\mathbf{E}^{-1}$  inverz matrice  $\mathbf{E}$ :

$$\mathbf{E}^{-1} = \begin{bmatrix} \sin(\omega t_1) & \dots & \sin(n\omega t_1) & 1 & \cos(\omega t_1) & \dots & \cos(n\omega t_1) \\ \sin(\omega t_2) & \dots & \sin(n\omega t_2) & 1 & \cos(\omega t_2) & \dots & \cos(n\omega t_2) \\ \sin(\omega t_3) & \dots & \sin(n\omega t_3) & 1 & \cos(\omega t_3) & \dots & \cos(n\omega t_3) \\ & & & & \vdots & & \\ & & & & \vdots & & \\ \sin(\omega t_{2n+1}) & \dots & \sin(n\omega t_{2n+1}) & 1 & \cos(\omega t_{2n+1}) & \dots & \cos(n\omega t_{2n+1}) \end{bmatrix}. \quad (2.21)$$

Umetanjem matrica  $\mathbf{E}$  (2.20) i  $\mathbf{E}^{-1}$  (2.21) u jednadžbe 2.18 i 2.20 dobivaju se jednadžbe skalarnog transporta u frekvencijskoj domeni, izražene vektorom vremenske domene  $\mathcal{Q}$ :

$$\omega \mathbf{A} \mathbf{E} \mathcal{Q} + \mathbf{E} \mathcal{R} = \mathbf{0}, \quad (2.22)$$

gdje je ista transformacija primjenjena i na  $\mathbf{R}$  i  $\mathcal{Q}$ .

Budući da je izračun flukseva u frekvencijskoj domeni računalno zahtjevan i nepraktičan, jednadžba 2.21 vraća se u vremensku domenu, množenjem s  $\mathbf{E}^{-1}$  s lijeve strane:

$$\omega \mathbf{E}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{E} \mathcal{Q} + \mathcal{R} = \mathbf{0}, \quad (2.23)$$

Ova jednadžba predstavlja vremenski spregnut sustav  $2n + 1$  stacionarnih jednadžbi, analognih početnoj jednadžbi 2.7.

Uspoređujući izvedenu jednadžbu 2.23 s originalnom transportnom jednadžbom 2.7 može se zaključiti sljedeće:



- $\mathcal{R}$  se zamjenjuje odgovarajućom diskretnom formulacijom  $\mathcal{R}$ , gdje se rješenje dobiva iz fiksnog broja diskretnih vremenskih trenutaka. Broj tih trenutaka određuje se uz pomoć odabranog broja harmonika  $n$ , jednačba (2.16).
- dobivena rješenja nisu vremenski kontinuirane funkcije u vremenu, već diskretna, gdje se rješenja dobivaju po svakom vremenskom trenutku.

Umnožak matrica  $\mathbf{E}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{E}$  iz jednačbe 2.23 daje:

$$\mathbf{E}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{E} = \frac{2}{2n+1} \begin{bmatrix} 0 & P_1 & P_2 & P_3 & \dots & \dots & P_{2n} \\ -P_1 & 0 & P_1 & P_2 & P_3 & & \vdots \\ -P_2 & -P_1 & 0 & P_1 & P_2 & & \vdots \\ -P_3 & -P_2 & -P_1 & 0 & P_1 & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & & P_2 \\ \vdots & & & & & \ddots & P_1 \\ -P_{2n} & \dots & \dots & -P_3 & -P_2 & -P_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

gdje se  $P_l$  definira kao:

$$P_l = \sum_{k=1}^n k \sin(lk\omega\Delta t), \quad \text{za } l = 1 \dots 2n, \quad (2.25)$$

gdje je:

$$\Delta t = \frac{T}{2n+1}. \quad (2.26)$$

Koeficijenti  $P_l$  ovise samo o baznoj frekvenciji te odabranom broju harmonika. Dakle,  $P_l$  se mogu izračunati i pohraniti na početku simulacije, uz korištenje zanemarive količine potrebom računalne memorije u usporedbi sa zahtjevima za provedbu računalne simulacije.

Korištenjem jednačbe 2.24 u kombinaciji s 2.23, dobiva se razvijeni oblik skalarne transportne jednačbe harmoničke ravnoteže:

$$\nabla \cdot (\mathbf{u}Q_{t_j}) - \nabla \cdot (\gamma \nabla Q_{t_j}) - S_{Q_{t_j}} = -\frac{2\omega}{2n+1} \left( \sum_{i=1}^{2n} P_{i-j} Q_{t_i} \right), \quad (2.27)$$

za  $j = 1 \dots 2n + 1$ ,

gdje se  $P_{i-j}$  definira kao:

$$P_{i-j} = P_l = \sum_{k=1}^n k \sin(lk\omega\Delta t), \text{ for } l = -2n \dots 2n. \quad (2.28)$$

Član  $P_{i-j}$  uzima u obzir vremensku razliku između dvaju dobivenih rješenja u odgovarajućim vremenskim koracima.  $P_{i-j}$  sadrži vrlo mali koeficijent za spregu vremenski udaljenih rješenja, dok su vremenski uzastopna rješenja jako međuovisna, kao što je prikazano na slici 2.1. Pritom se mora riješiti minimalno  $2n + 1$  vremenskih trenutaka, kako bi se izbjegle greške poduzorkovanja. Sustav jednadžbi se nikako ne može sastojati s manje od  $2n + 1$  vremenskih trenutaka, jer bi to prouzročilo svojedobno odstupanje od rješenja. Sustav od  $2n + 1$  jednadžbi je najmanji traženi broj vremenskih trenutaka za odabran broj harmonika  $n$  koji daje točna rješenja. Sprega rješenja u različitim vremenskim trenucima  $t_j$  je ostvarena uz pomoć  $P_{i-j}$  koeficijenata, čime se sada vremenski član skalarne transportne jednadžbe modelira kao dodatan izvor.  $Q_{t_j}$  predstavlja rješenje u vremenskom trenutku  $t_j$  te se za sve  $2n + 1$  vremenske trenutke rješava istodobno kao zatvoren sustav jednadžbi. Stoga, tranzijentna jednadžba (2.7) pretvara se u set od  $2n + 1$  jednadžbi spregnutih stacionarnih problema, jednadžba (2.27), iz kojih se dobivaju rješenja  $2n + 1$  vremenskih koraka. Kako se vremenski izraz zamjenjuje spregom harmoničke ravnoteže, jednadžbe se može smatrati i kvazi-stacionarnima.

## 2.4. Zaključak

U ovom poglavlju izveden je matematički model harmoničke ravnoteže za nestlačivo strujanje s odvojenim pristupom sprege tlaka i brzine. Izvod matematičkog modela je općenit te vrijedi za bilo koji broj harmonika i baznu frekvenciju.

Iduće poglavlje pokazati će implementaciju harmoničke ravnoteže u metodu konačnih volumena. Uz navedeni matematički izvod, prikazat će se transformacija općih jednadžbi u jednadžbe prikladne metodi kontrolnih volumena.

# 3 Implementacija harmoničke ravnoteže u metodi kontrolnih volumena

## 3.1. Uvod

U prethodnom poglavlju prikazan je izvod matematičkog modela harmoničke ravnoteže za nestlačivo strujanje. Razvoj Fourierovog reda osnovni je princip na kojemu se temelji razvoj periodične funkcije u metodi harmoničke ravnoteže. Izrazi Fourierovog reda za  $N$  harmonika primjenjuju se i za metodu harmoničke ravnoteže u skalarnom transportu. Izvod jednadžbi harmoničke ravnoteže prikazuje transformaciju vremenski zavisnih jednadžbi u sustav od  $2n + 1$  spregnutih jednadžbi s  $n$  harmonika.

U ovom poglavlju će se prikazati primjena harmoničke ravnoteže u prostornoj domeni. Dakle, prikazat će se transformacija iz općih jednadžbi u jednadžbe prikladne metodi kontrolnih volumena.

## 3.2. Diskretizacija prostora

Diskretizacija dijelova jednadžbe odnosi se na prilagodbu matematičkog oblika modificirane skalarne transportne jednadžbe u numerički stabilan izraz prikladan za iterativno rješavanje u sklopu sučelja kontrolnih volumena, odnosno ćelija.

Za početak je potrebno definirati pristup diskretizacije prostorne domene. Vremenski kontinuirana jednadžba se pretvara u konfiguraciju prikladnu kontrolnim volumenima, što bi značilo da se promatran prostor više ne razmatra kao kontinuum već je diskretiziran. Dakle, domena se sastoji od ćelija, unutrašnjih i rubnih površina. Pristup diskretizacije prostora u metodi harmoničke ravnoteže nije potrebno modificirati te princip ostaje isti kao u poglavlju 1. Veličine KV određuju diskretizaciju prostora, iz tog se razloga odabire sukladno razmatranom problemu, gdje se područja visokih gradijenata opisuju finijom diskretizacijom.

## 3.3. Diskretizacija vremena

Diskretizacija vremenskog člana odnosi se na podjelu vremenskog kontinuuma u diskretne vremenske trenutke za koje se traži rješenje. U tranzijentnim simulacijama, diskretizacija vremena određena je odabranim vremenskim korakom. Do rješenja se dolazi kretanjem kroz vrijeme, malim koracima, počevši s prethodno definiranim početnim uvjetima, sve do zadanog kriterija konvergencije. Zavisno o problemu i vremenskim ovisnostima strujanja odabire se odgovarajući vremenski korak, kako bi se točno opisale sve specifičnosti strujanja fluida.

Nadalje, treba se uzeti u obzir ograničenje Courantovog broja,  $Co = \frac{u\Delta t}{\Delta x}$ , tako da informacije, to jest rješenja, ne propagiraju više od jedne ćelije po vremenskom koraku. Uvjet Courantovog broja stavlja u odnos veličinu ćelije, brzinu unutar ćelije i vremenski korak. U slučaju metode harmoničke ravnoteže diskretizacija vremena koristi se drugačiji pristup: jedan period uzima se kao sveukupno vrijeme koje se zatim dijeli na  $2n + 1$  ravnomjerno udaljenih vremenskih trenutaka. Dakle, vremenski korak se može razmatrati kao  $\delta t = \frac{T}{2n+1}$ , gdje je  $T$  ukupan period, a  $n$  je broj korištenih harmonika. Bitno je za napomenuti da vremenski koraci nemaju isto značenje kao kod tranzijentnih simulacija. Utjecaj vremenskog odmaka između vremenskih trenutaka izražava se kroz spregu izraza harmoničke ravnoteže, bez kretanja od jednog vremenskog trenutka

do drugog. Sprega koeficijenata izvorskog člana harmoničke ravnoteže postaje veća što je vremenski odmak manji. Jednadžba 2.1 prikazuje vremensku diskretizaciju u metodi harmoničke ravnoteže. Greška Fourierove aproksimacije govori da su za mali broj harmonika  $n$  vremenski koraci visoki, dok za slučaj beskonačnog broja harmonika  $n$  diskretizacija vremena ne bi više bila potrebna pošto bi se promatran problem gledao kao kontinuum s infinitezimalno malim vremenskim koracima.

### 3.4. Diskretizacija jednadžbe očuvanja količine gibanja

Za implicitnu diskretizaciju koristit će se indeks  $i$  [6], a za eksplicitnu indeks  $e$ . Budući da konvekcija, difuzija te izvorski i ponorski članovi u metodi harmoničke ravnoteže ostaju nepromijenjeni, diskretizirani oblik sustava tlak-brzina glasi:

$$\left[ \nabla \cdot (\mathbf{u}_{t_j} \mathbf{u}_{t_j}) \right]_i - \left[ \nabla \cdot (\nu \nabla \mathbf{u}_{t_j}) \right]_i = - \left[ \frac{\nabla p_{t_j}}{\rho} \right]_e - \left[ \frac{2\omega}{2n+1} \left( \sum_{i=1}^{2n} P_{i-j} \mathbf{u}_{t_i} \right) \right]_e, \quad (3.1)$$

$$j = 1 \dots 2n + 1,$$

gdje se izvorski član metode harmoničke ravnoteže tretira eksplicitno, te se stoga koristi odvojeni pristup rješavanja sustava tlak - brzina.

Jednadžba tlaka u metodi konačnih volumena proizlazi iz zakona očuvanja mase za nestlačiva strujanja. Diskretizirana jednadžba tlaka glasi:

$$\left[ \nabla \cdot \left( \frac{1}{a_{Pt_j}} \nabla p_{t_j} \right) \right]_i = \left[ \nabla \cdot \left( \frac{\mathbf{H}(\mathbf{u}_{t_j})}{a_{Pt_j}} \right) \right]_e, \quad j = 1 \dots 2n + 1, \quad (3.2)$$

gdje je  $a_{Pt_j}$  dijagonalni element jednadžbe očuvanja količine gibanja u vremenskom trenutku  $t_j$ , a  $\mathbf{H}(\mathbf{u}_{t_j})$  predstavlja operator protoka [3]. Jednadžba tlaka u harmoničkoj ravnoteži dobiva se iz jednadžbe kontinuiteta prilagođenoj za harmoničku ravnotežu,  $\nabla \cdot \mathbf{u}_{t_j} = 0$ , uz korištenje standardne procedure za segregirane algoritme rješavanja. Pristup vrijedi budući da jednadžba kontinuiteta mora vrijediti za sve vremenske trenutke, odnosno, za svaki  $2n + 1$  trenutak. Budući da u jednadžbi tlaka nema vremenskog člana,

krajnji izvod jednadžbe tlaka ne sadrži harmonički izvorski član. Stoga se za rješavanje sprege tlaka-brzine po svakom vremenskom trenutku  $t_j$  koristi SIMPLE algoritam.

### 3.5. Sprega tlaka-brzine u harmoničkoj ravnoteži

U metodi harmoničke ravnoteže pojavljuju se unutarnja i vanjska sprega. Vanjska sprega se odnosi na klasičan problem sprege polja tlaka i brzine u nestlačivim strujanjima. No, u harmoničkoj ravnoteži, varijable  $p$  i  $\mathbf{u}$  moraju biti spregnute ovisno i o vremenskom koraku  $t$ .

Dakle, unutarnja se sprega odnosi na ovisnost konzervativne varijable o samoj sebi iz nekog drugog vremenskog trenutka, npr. ovisnost polja brzine u trenutku  $t_1$  o polju brzine u trenutku  $t_2$ , koja se modelira izvorskim članom u jednadžbi 3.1.

### 3.6. Zaključak

Ovo poglavlje prikazalo je implementaciju jednadži harmoničke ravnoteže u prostornoj domeni, točnije, metoda harmoničke ravnoteže se implementirala u metodu kontrolnih volumena. Prikazana je diskretizacija prostora, vremena, jednadžbe očuvanja količine gibanja te sprege tlaka i brzine.

U idućem poglavlju će se na testnom primjeru hidromlaznice pokazati primjena metode harmoničke ravnoteže u RDF. Metoda će se provjeriti kvantitativnom usporedbom rezultata s rezultatima MRF simulacije, koja koristi *frozen rotor* pristup u kojemu se promatra jedna pozicija rotora.

# 4 | Primjena metode harmoničke ravnoteže na primjeru hidromlaznice

## 4.1. Uvod

U prethodnom poglavlju prikazana je implementacija harmoničke ravnoteže u metodi kontrolnih volumena.

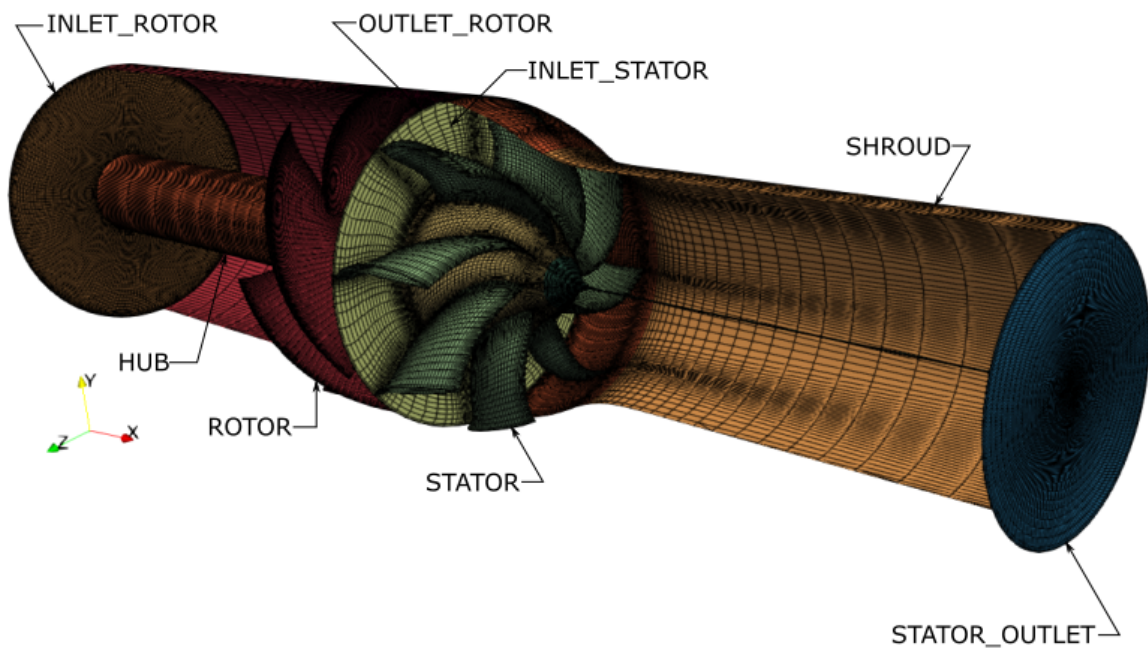
U ovom je poglavlju prikazana primjena metode harmoničke ravnoteže na primjeru hidromlaznice. Rezultati su prikazani za različite brojeve harmonika te su kvantitativno uspoređeni s rezultatima stacionarne MRF (engl. *Multiple Reference Frame*) metode.



## 4.2. Geometrija modela i prostorna domena

Promatranu hidromlaznicu pod nazivom ONR AxWJ-2 konstruirao je *NSWC Carderock* odjel kao protorip za eksperimente [7]. Geometrija pumpe sastoji se od 6 lopatica na rotoru te 8 lopatica na statoru, vratila promjera  $d = 0.0508m$  i duljine  $l = 0.3048m$  te usisne cijevi promjera  $D_u = 0.3048m$  [8].

Prostorna domena sastoji se od 2.153.424 heksaedarskih ćelija te je podijeljena u dvije zone: **zonu rotora** u koju se dovodi voda i **zonu statora** kojoj se poprečni presjek postupno smanjuje te služi kao istrujni volumen. Zone su međusobno povezane *ggi* interpolacijskom shemom [1]. Zoni rotora pridodana je rotirajuća rešetka koja se zakreće kutnom brzinom od  $\omega = 209.333rad/s$ , dok je zona statora definirana mirujućom rešetkom. Za modeliranje turbulencije koristio se  $k - \epsilon$  [9] model turbulencije.



Slika 4.1: Pregled domene i rubnih ploha hidromlaznice.

### 4.3. Rubni uvjeti

Kako bi se dokazala pouzdanost metode harmoničke ravnoteže rezultati su uspoređeni s rezultatima MRF simulacije. S obzirom da MRF metoda i metoda harmoničke ravnoteže imaju dugačiji pristup glede tretiranja vremenske komponente sustava, morat će se koristiti drugačiji rubni uvjeti. MRF je stacionarna metoda, što znači da odbacuje vremenski član jednadžbe očuvanja količine gibanja te vrijedi za jednu odabranu poziciju rotora. Dodavanjem dodatnog izvorskog člana nametnuta je obodna komponenta brzine u rotorskom dijelu mreže. Tako dobivena rješenja jednadžbi ne mogu dostatno opisati sve prisutne pojave u strujanju fluida. Harmonička ravnoteža, s druge strane, uvodi  $2n + 1$  rubnih uvjeta za  $n$  broj harmonika. Kao što je ranije objašnjeno, harmonička ravnoteža rješava set od  $2n + 1$  stacionarnih jednadžbi, gdje svaka od njih zahtjeva zadavanje zasebnih rubnih uvjeta. Izmjenom rubnih uvjeta, od jednog vremenskog koraka do idućeg, osigurava se periodičnost strujanja. Rješavaču harmoničke ravnoteže bitno je definirati iznos kutne brzine  $\omega$  koja se zadaje u `dynamicMeshDict` te u `harmonicBalanceDict` datotekama, gdje su također zadane bazna frekvencija  $f$  i broj lopatica  $n$ . Detaljniji pregled postavki može se pronaći u prilogu B. Rubni uvjeti korišteni u ovoj simulaciji prikazani su u tablici 4.1.

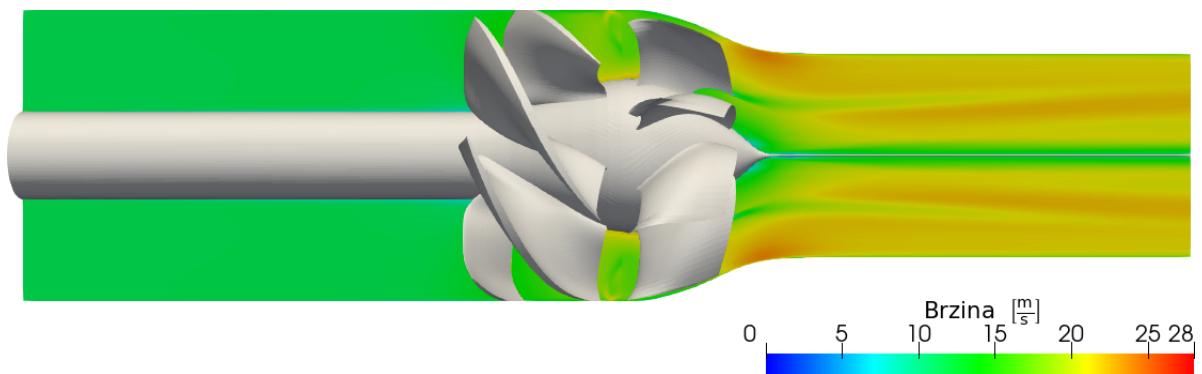
Tablica 4.1: Pregled rubnih uvjeta hidromlaznice.

Broj	Naziv rubne plohe	Rubni uvjeti			
		U [m/s]	p [ $m^2/s^2$ ]	k [ $m^2/s^2$ ]	omega [1/s]
01	INLET_ROTOR	fixedValue; uniform (11.43 0 0);	zeroGradient;	fixedValue;	fixedValue;
02	OUTLET_STATOR	inletOutlet; uniform (11.43 0 0);	fixedValue;	zeroGradient;	zeroGradient;
03	HUB; SHROUD; ROTOR; STATOR	fixedValue;	zeroGradient;	hbKqRWallFunction;	hbOmegaWallFunction;
05	OUTLET_ROTOR	ggi; uniform (11.43 0 0);	ggi; uniform 0;	ggi; uniform 0.038;	ggi; uniform 10;
06	INLET_STATOR	ggi; uniform (11.43 0 0);	ggi; uniform 0;	ggi; uniform 0.038;	ggi; uniform 10;

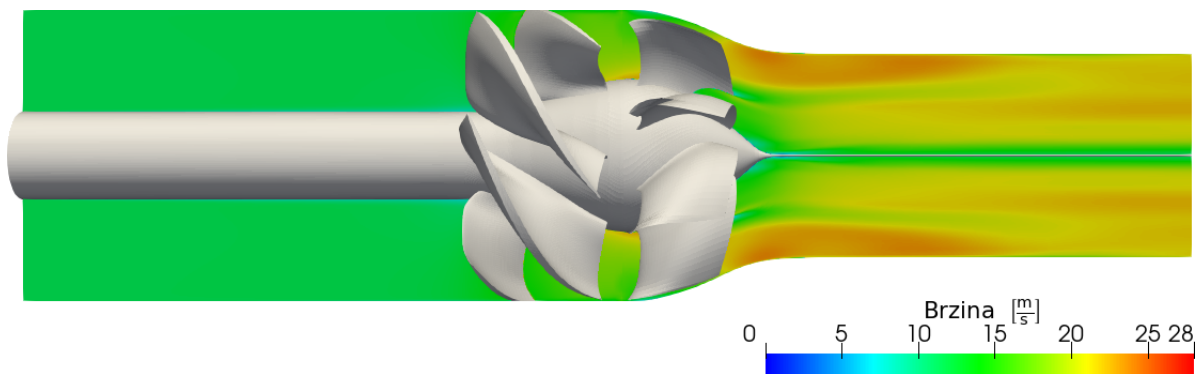
## 4.4. Rezultati

Svi prikazani rezultati odnose se za zadnji vremenski trenutak jednog punog perioda  $T$ . Usporedba rezultata s rezultatima MRF simulacije je kvantitativna, a razmatratrana su polja tlaka, brzine te turbulentne kinetičke energije.

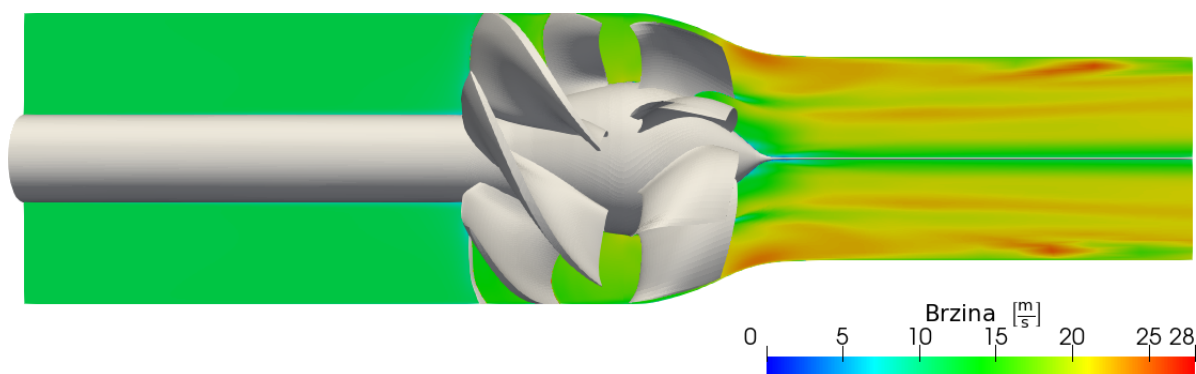
Slika 4.2 prikazuje polje brzine unutar kućišta hidromlaznice za simulaciju harmoničke ravnoteže korištenjem jednog harmonika, slika 4.3 za tri harmonika te slika 4.4 za pet harmonika. Na slici 4.5 prikazano je polje brzine dobiveno MRF simulacijom.



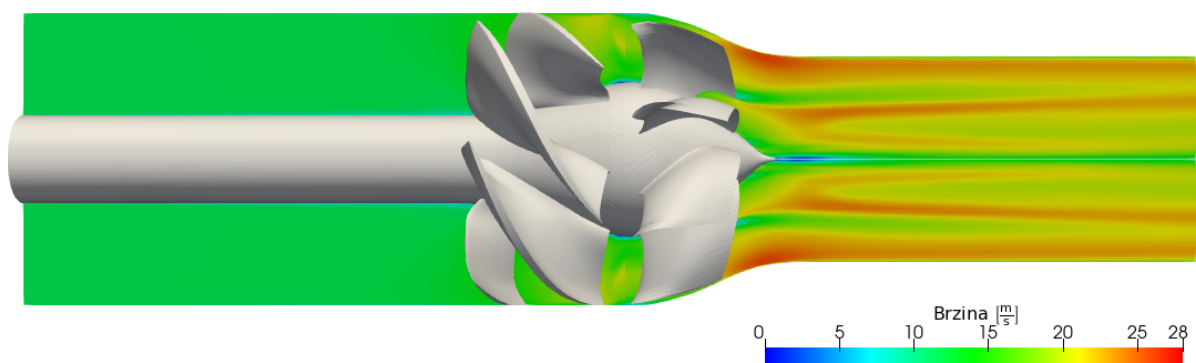
Slika 4.2: Polje brzine hidromlaznice; 1 harmonik.



Slika 4.3: Polje brzine hidromlaznice; 3 harmonika.



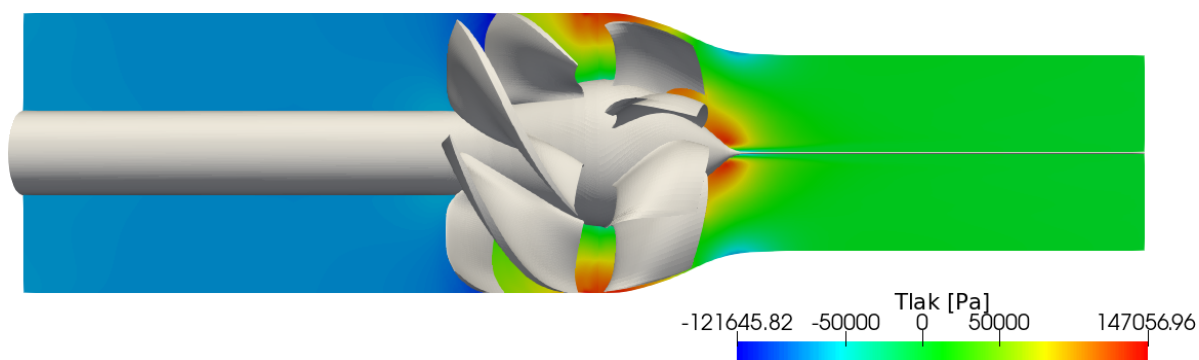
Slika 4.4: Polje brzine hidromlaznice; 5 harmonika.



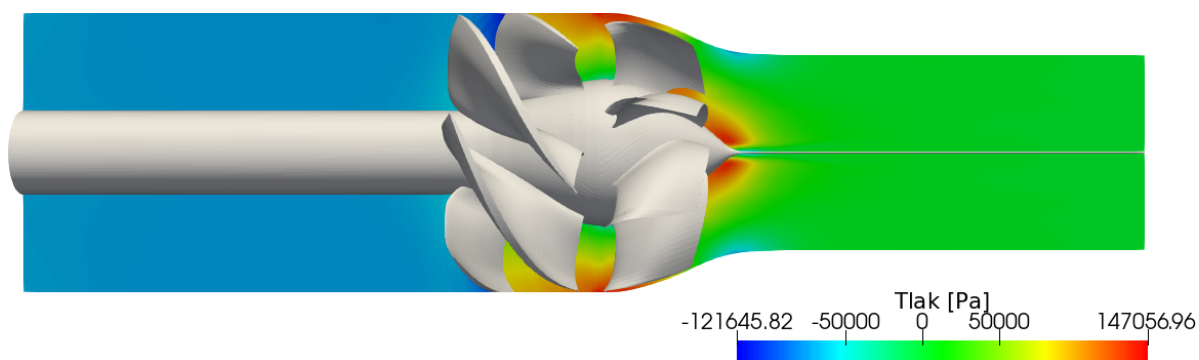
Slika 4.5: Polje brzine hidromlaznice; MRF simulacija.

Sa slika je vidljiva raspodjela polja brzine fluida oko lopatica te u kanalu iza statora. Može se primijetiti da je profil brzine po vanjskom obodu uz lopatice i uz kućište statora približno sličan u svim provedenim simulacijama. Promjena količina detalja jasno je vidljiva povećanjem broja harmonika  $n$ . Razlika je najuočljivija u profilu brzine u središtu kućišta statora gdje je utjecaj turbulencije najviši. Viši broj harmonika rješava veći broj stacionarnih jednadžbi za  $2n + 1$  položaja rotora čime se u rješenjima može obuhvatiti veća količina detalja. Detalji koji se javljaju povećanjem harmonika posljedica su utjecaja turbulentnih vrtloga. MRF simulacija (slika 4.5) primjerice ne obuhvaća toliku razinu detalja, a pogotovo ne turbulentni trag, radi toga što je rotor stacionaran, te se rješenja varijabli strujanja dobivaju za samo jedan odabrani položaj. Stoga MRF simulacija ne prikazuje fine pojedinosti tranzijentnih pojava.

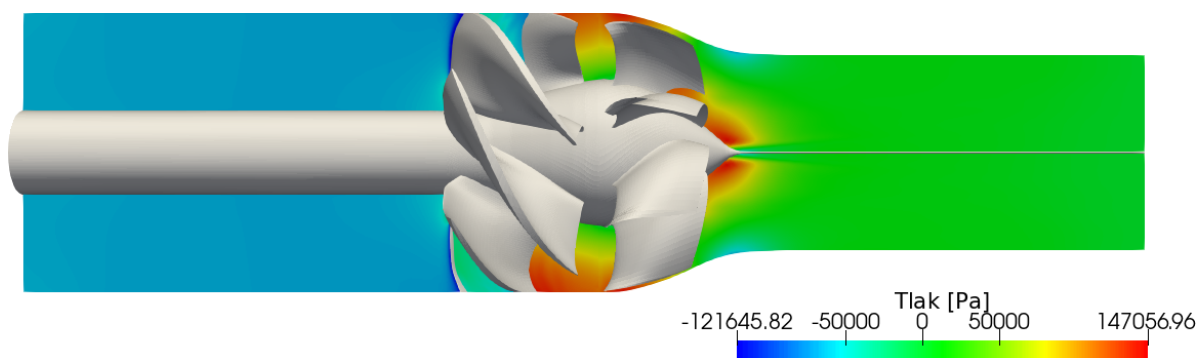
Polje tlaka prikazano je na slici 4.6 za jedan harmonik, slici 4.7 za tri harmonika, slici 4.8 za pet harmonika te na slici 4.9 za MRF simulaciju. Povećanjem broja harmonika može se uočiti bolja rezolucija raspodjele polja tlaka u području između stijenke kućišta i vrhova lopatica. MRF simulacija (slika 4.9) ne daje dovoljno detaljan prikaz polja tlaka. Iznos tlaka prije rotora i nakon statora je manjeg iznosa, a ispred vratila na dijelu statora javlja se potlak, kojeg nema na rješenjima harmoničke ravnoteže.



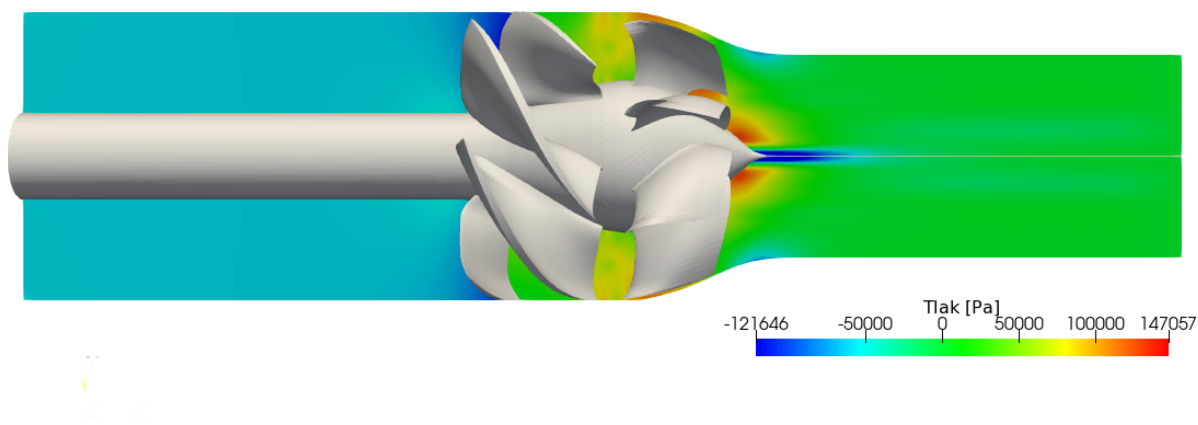
Slika 4.6: Polje tlaka hidromlaznice; 1 harmonik.



Slika 4.7: Polje tlaka hidromlaznice; 3 harmonika.

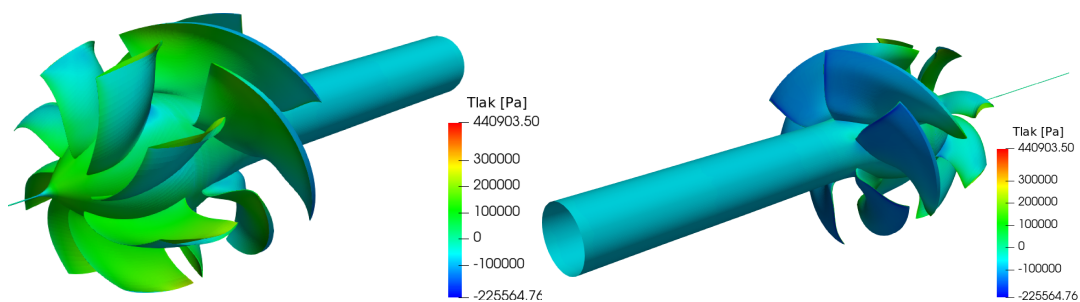


Slika 4.8: Polje tlaka hidromlaznice; 5 harmonika.

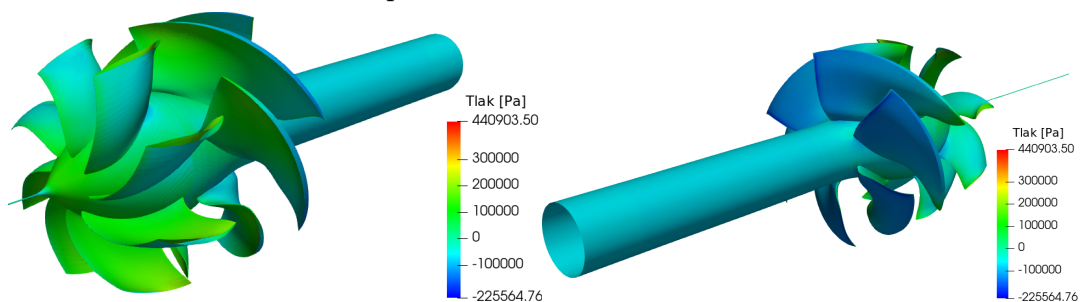


Slika 4.9: Polje tlaka hidromlaznice; MRF simulacija.

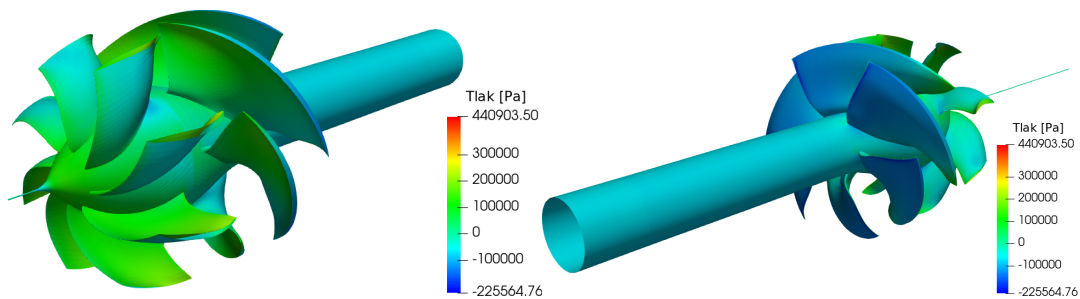
Može se uočiti da povećanje broja harmonika daje potpuniju sliku polja tlaka uz stijenku zida kućišta pri vrhu lopatica rotora i statora. Slika strujanja (4.9) dobivena MRF simulacijom prikazuje manje detalja u području vrhova lopatica. Slike 4.10-4.13 prikazuju raspodjelu tlaka pretlačne i potlačne strane lopatica hidromlaznice. Povećanje broja harmonika ne donosi velike promjene kvalitete rješenja, no svakako daje detaljniju raspodjelu tlaka od MRF simulacije (slika 4.13). Simulacije harmoničke ravnoteže, provedene na Intel Core i7-7800X 3,5ghz računalu s 109 gigabajta radne memorije, računale su se korištenjem četiri računalne jezgre u paralelnom načinu rada. Vrijeme proračuna metode harmoničke ravnoteže za jedan harmonik iznosilo je 14 sati i 39 minuta, za tri harmonika iznosilo je 39 sati i 36 minuta, za pet harmonika iznosilo je 48 sati i 27 minuta. MRF simulacija također se pokretala na četiri jezgre u paralelnom načinu rada, a vrijeme simulacije je iznosilo 9 sati i 7 minuta.



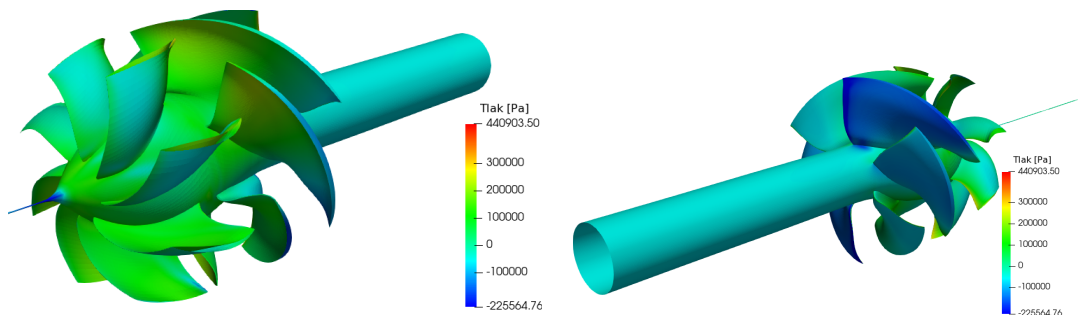
Slika 4.10: Pretlačna i potlačna strana hidromlaznice za 1 harmonik.



Slika 4.11: Pretlačna i potlačna strana hidromlaznice za 3 harmonika.



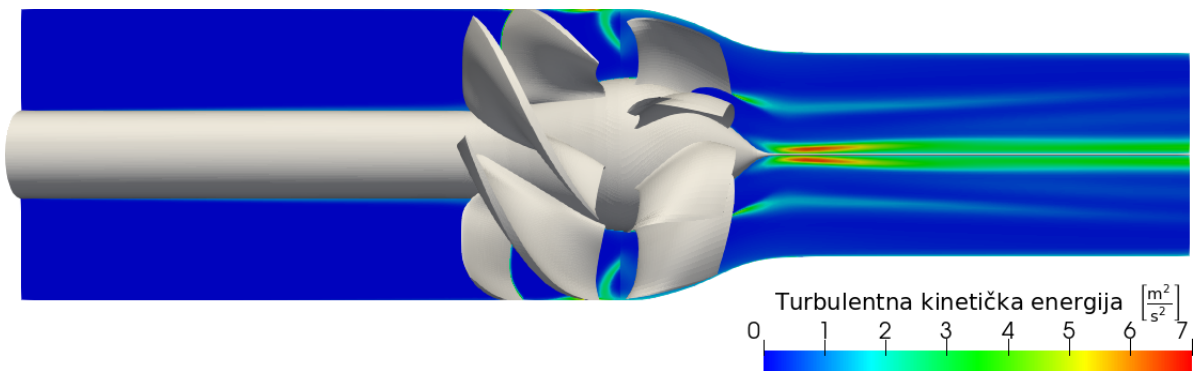
Slika 4.12: Pretlačna i potlačna strana hidromlaznice za 5 harmonika.



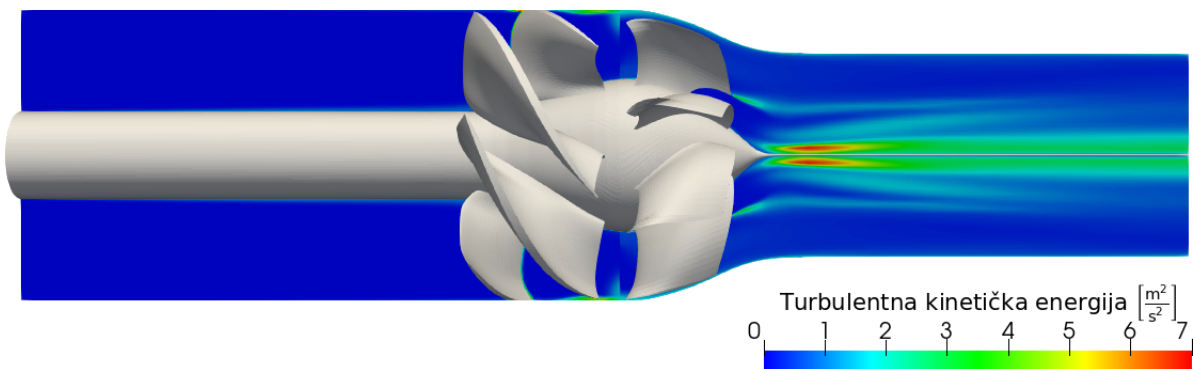
Slika 4.13: Pretlačna i potlačna strana hidromlaznice MRF simulacije.



Turbulentno strujanje ilustrirano je poljem turbulentne kinetičke energije u presjeku ravnine  $z = konst.$  Iznosi turbulentne kinetičke energije najviši su u području iza vrha vratila te u području izlaznog brida lopatice statora. Viši broj harmonika smanjuje difuziju rješenja, ali i prikazuje pojavu turbulencije uz stijenku kućišta na izlazu iz domene (slika 4.16). Stavljanjem rotora u povećan broj pozicija približe se opisuju tranzijentne pojave. MRF simulacija daje znatno veće iznose turbulentne kinetičke energije te je iz tog razloga potrebno modificirati skalu kako bismo korektno prikazali i usporedili rezultate. U području iza vratila statora primjećuje se da MRF simulacija daje dulji turbulentni trag.

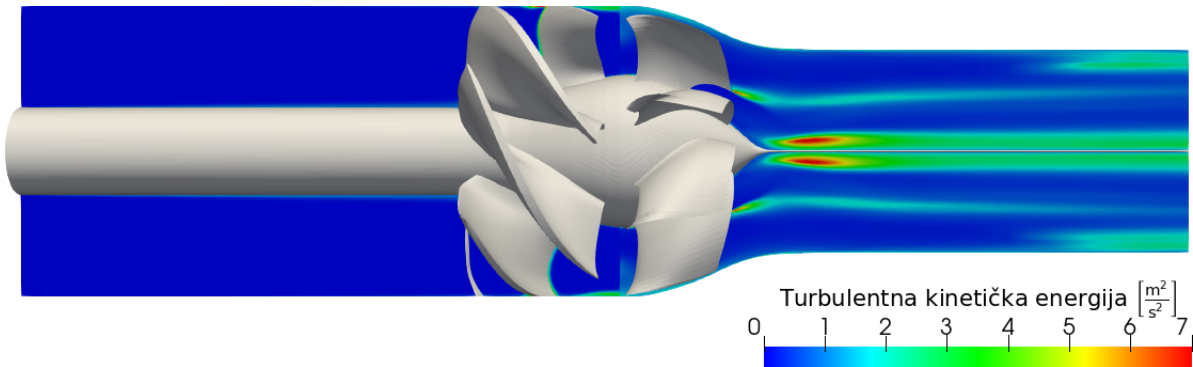


Slika 4.14: Polje turbulentne kinetičke energije hidromlaznice; 1 harmonik.

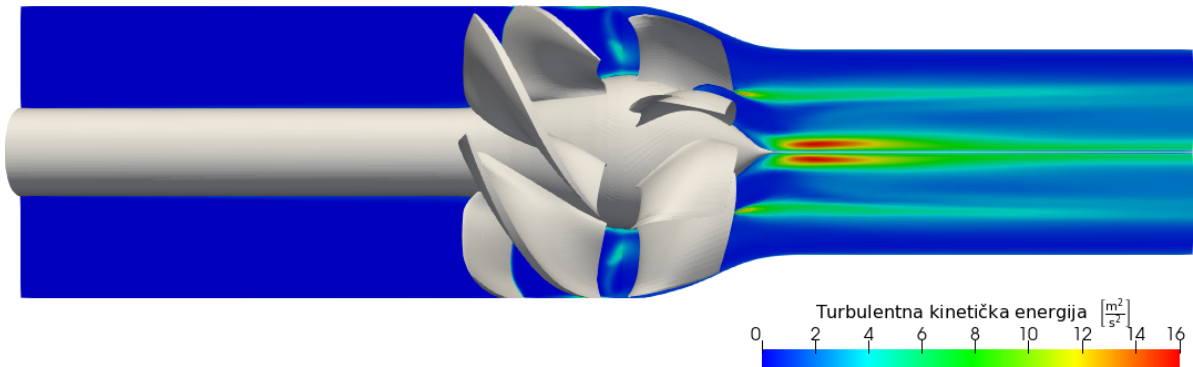


Slika 4.15: Polje turbulentne kinetičke energije hidromlaznice; 3 harmonika.





Slika 4.16: Polje turbulentne kinetičke energije hidromlaznice; 5 harmonika.



Slika 4.17: Polje turbulentne kinetičke energije hidromlaznice; MRF simulacija.

## 4.5. Zaključak

Prikazana je primjena metode harmoničke ravnoteže na testnom primjeru hidromlaznice. Provedena je usporedba s konvencionalnom stacionarnom MRF metodom, gdje su se prikazale prednosti harmoničke metode gdje se razina točnosti rješenja povećala s povećanjem broja harmonika  $n$ . Radi drugačijeg pristupa, stavljanjem računalne domene u  $2n + 1$  pozicija, bolje se mogu opisati tranzijentne pojave koje inače nisu vidljive korištenjem stacionarnih rješavača.

Kvantitativnom usporedbom rješenja utvrdila se pouzdanost korištenja metode harmoničke ravnoteže te će se ona koristiti u analizi kontrarotirajućih propelera u idućem poglavlju. Dobiveni rezultati usporedit će se s rezultatima MRF i tranzijentne simulacije za isti slučaj.

# 5 Kontrarotirajući propeleri

## 5.1. Uvod

U prethodnom poglavlju prikazana je primjena metode harmoničke ravnoteže na hidromlaznici. Prikazana su polja tlaka, brzine i turbulentne kinetičke energije te su se rezultati usporedili s rezultatima MRF simulacije. Harmonička ravnoteža, radi rješavanja većeg broja stacionarnih jednadžbi za različite pozicije rotora, može bolje opisati tranzijentne pojave koje se javljaju radi interakcije rotora i statora.

U idućem poglavlju dan je pregled sustava kontrarotirajućih propelera te fizikalnih pojava koje nastaju kao posljedice interakcije lopatica. Prikazat će se pojedinosti osnova i principa rada te njihove prednosti i mane. Također je dan prikaz geometrije modela i računalne domene koja se koristila za postavljanje simulacija. Za kraj, dan je pregled rubnih uvjeta korištenih u simulacijama.

## 5.2. Osnove i princip rada

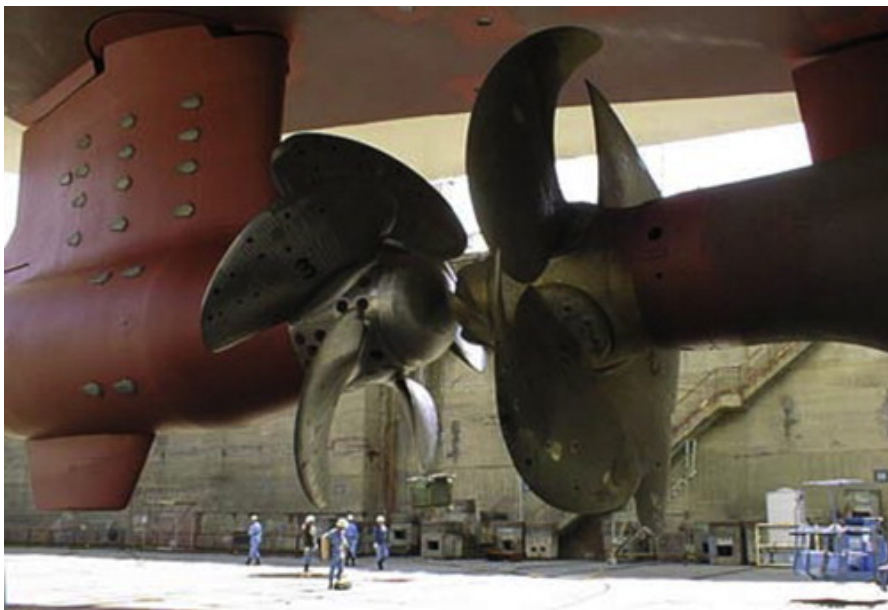
Razvoj trupa broda i pogonskog sustava teži k smanjenju potrošnje i povećanju efikasnosti. Jedna od izvedbi optimizacije potrošnje broda je sustav kontrarotirajućih propelera.

Rad klasičnog propelera zasniva se na okretanju rotora pri čemu fluid prolaskom kroz lopatice daje rezultantnu silu. Moment koji zakretanjem propelera uvodimo u sustav stvara potisak broda. U tragu koji nastaje nizvodno od propelera stvara se strujanje s vrtložnom komponentom. Strujanje s vrtložnom komponentom predstavlja gubitak energije. Sustav kontrarotirajućih propelera potencijalno može značajno poboljšati efi-

kasnost iskorištavanjem energetske gubitaka izazvanih strujanjem s vrtložnom komponentom i smanjiti potrošnju goriva [10].

Kontrarotirajući se propeleri sastoje od para koaksijalnih propelera koji rotiraju u suprotnim smjerovima. Stražnji propeler nastoji „ispraviti” strujanje tj. povratiti dio energije izgubljene zbog vrtložne komponente strujanja, te na taj način ovaj sustav postiže višu efikasnost od klasičnih propelera s jednim rotorom. Kako oba propelera svojim zakretanjem stvaraju okretni moment u različitim smjerovima, momenti će se međusobno poništiti. Poništavanjem okretnih momenata postiže se veća stabilnost plovila te se iz navedenog razloga ovaj sustav često primjenjuje na podmornicama i torpedima.

Hidrodinamička interakcija prednjeg i stražnjeg propelera glavni je izvor kompleksnosti ovog sustava. Međusobna interakcija propelera je periodična, a sile i momenti osciliraju na visokim frekvencijama [11].



Slika 5.1: Primjer kontrarotirajućih propelera [1].

### 5.3. Geometrija modela i prostorna domena

Model koji je služio u izradi računalne domene, odnosno mreže, korišten je u eksperimentalnim ispitivanjima [12]. Model se sastoji od jednog para propelera, dok svaki od propelera ima četiri lopatice. Propeleri su povezani jednim zajedničkim vratilom, a orijentirani su tako da se zakreću u suptornim smjerovima jednakom brzinom vrtnje. Model je u eksperimentu položen u cijev, gdje se osigurava pravilan, kolinearan nalet vanjskog strujanja na propelere. Tablica 5.1 prikazuje karakteristike oba propelera:

Tablica 5.1: Karakteristike i geometrije propelera.

<b>Tip propelera</b>	3686	3687A
<b>Pozicija</b>	prednja	stražnja
<b>Broj lopatica</b>	4	4
<b>Promjer [m]</b>	0.2991	0.3052
<b>Smjer vrtnje</b>	u smjeru kazaljke na satu	obrnuto od smjera kazaljke na satu
<b>Omjer proširene površine</b>	0.303	0.324
<b>Skeletnica</b>	NACA a=0.8	NACA a=0.8
<b>Raspored debljine</b>	NACA 66	NACA 66

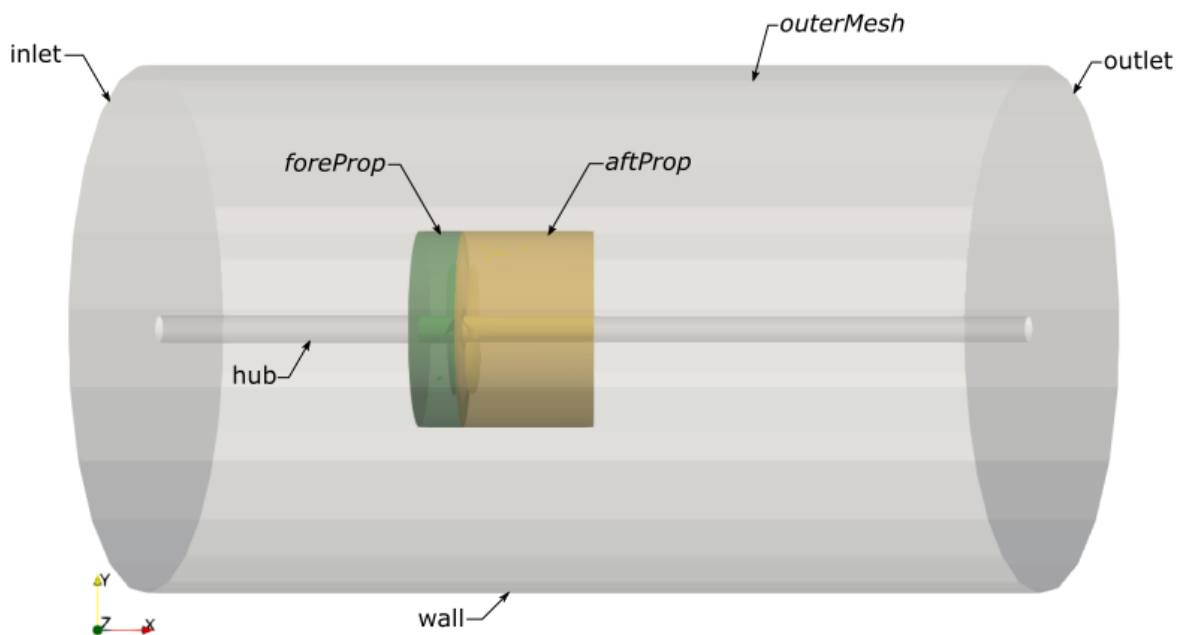
Na temelju prethodno opisanog modela provedena je prostorna diskretizacija te je izrađena prostorna domena. Ista je korištena za postavljanje numeričkih simulacija korištenjem *foam-extend* inačice OpenFOAM-a, paketa otvorenog koda za računalnu dinamiku fluida. Prostorna domena sastoji se od dvije domene koje opisuju prednji i stražnji propeler te vanjske domene koja služi za povezivanje svih domena u jednu cjelinu. Dakle, potrebno je generirati tri zasebne domene koje se povezuju u cjelinu uz primjenu interpolacijskih algoritama zadanih prilikom postavljanja simulacije. Odvojene se domene koriste kako bi se jednostavnije definirale zone rotirajućeg dijela mreže, potrebne za rješavač harmoničke ravnoteže. Računalna domena (mreža) je izrađena uz pomoć alata *cfMesh* [13]. *cfMesh* [13] je alat otvorenog koda za automatizirano stvaranje mreže te se nalazi unutar programskog okruženja *foam-extend*. Za postojeći model korišten u simulaciji, odabirom postavki unutar *meshDict* datoteke mogu se zadati maksimalna i minimalna veličina ćelija, zone profinjenja, granični slojevi itd. Kontrolni volumeni

korišteni za kreiranje mreža propelera pretežito su heksaedarski, dok su na prijelazima s manjih na veće KV korišteni poliedarski KV. Mreža je izrađena algoritmom za izradu dominantno heksaedarske mreže pod nazivom *cartesianMesh*.

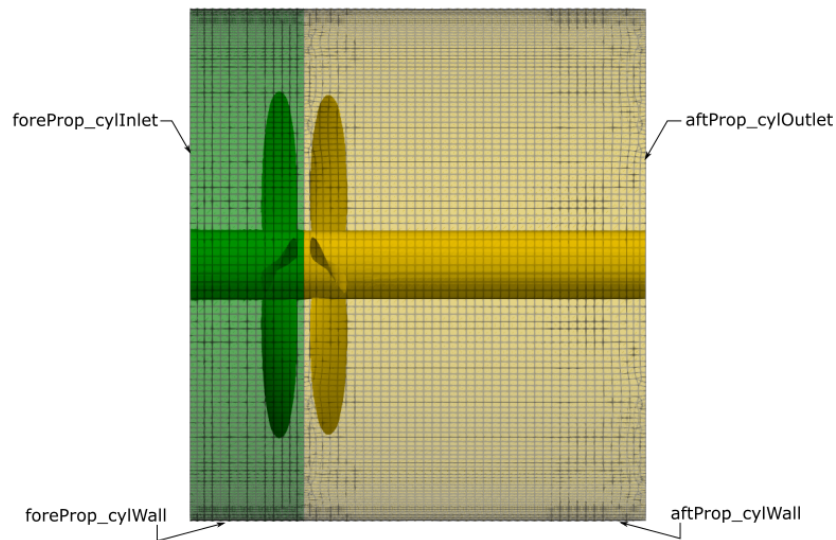
Pregled pojedinosti svake mreže prikazan je tablicom 5.2:

Tablica 5.2: Pregled pojedinosti mreža.

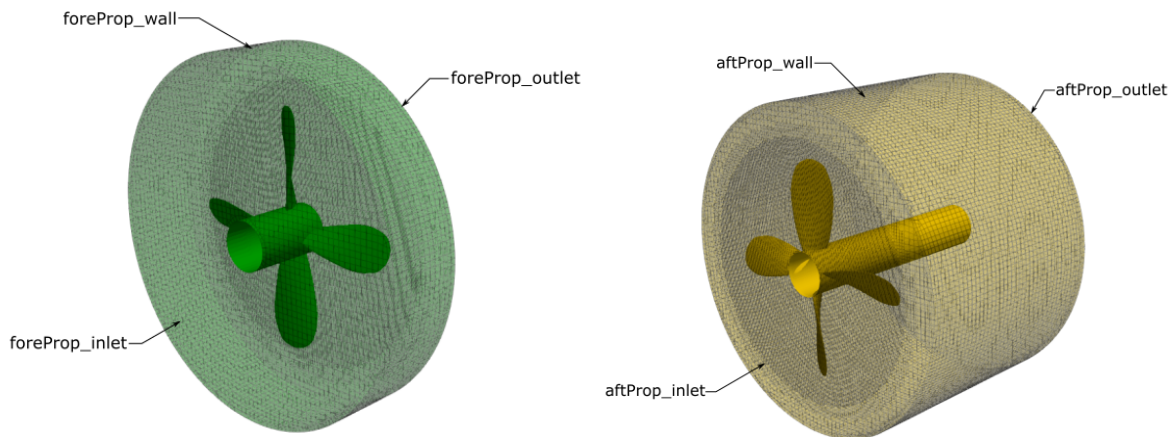
Naziv domene	<i>foreProp</i>	<i>aftProp</i>	<i>outerMesh</i>
Broj KV	817389	893645	5265116
Vrste KV	heksaedarske	heksaedarske	heksaedarske
Rotirajuće zone	<i>Prop1</i>	<i>Prop2</i>	/



Slika 5.2: Pregled domena i rubnih ploha kontrarotirajućih propelera.



Slika 5.3: Nazivi rubnih ploha vanjske domene koji su u izravnoj interakciji s mrežama propelera.

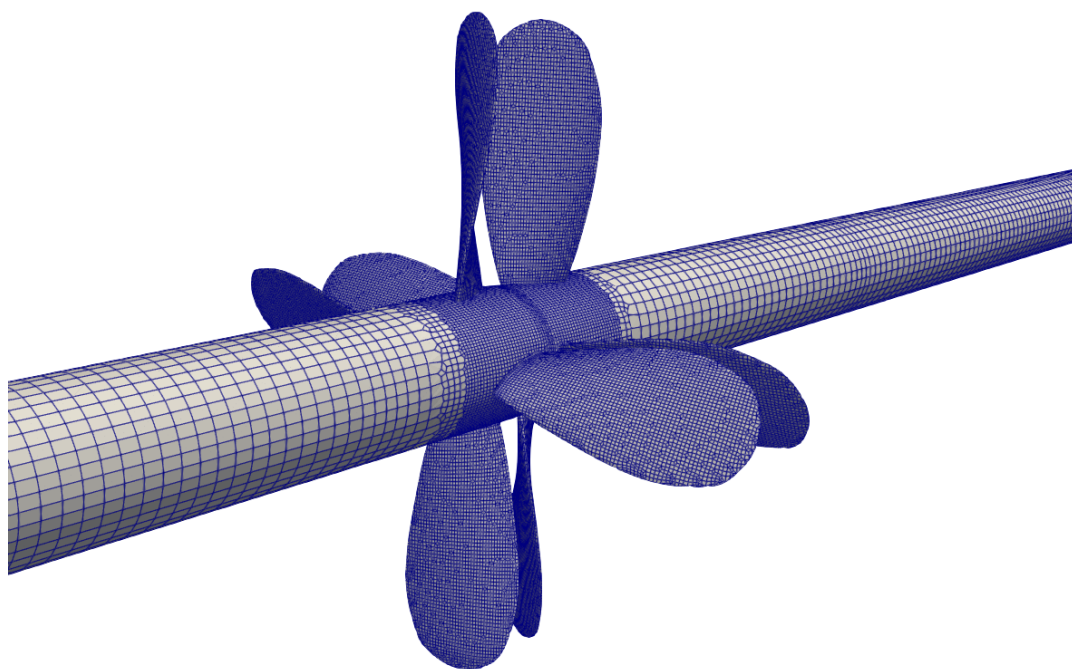


Slika 5.4: Nazivi rubnih ploha mreže *foreProp* (lijevo) i mreže *aftProp* (desno).

Vanjska mreža (*outerMesh*) dimenzijama je najveća mreža te služi za povezivanje mreža oba propelera. Definirana je rubnim plohama ulaza, izlaza, zida te rotirajućeg vratila kojima su pripisani nazivi *inlet*, *outlet*, *outerWall* i *hub* (slika 5.2). Nadalje, rubnim plohama *foreProp* i *aftProp* mreža, koje dijele iste pozicije u domeni, definiraju se parovi rubnih ploha kojima se dodjeljuju dodatne *ggi* interpolacijske sheme [1]. Nazivi tih rubnih ploha (slika 5.3) imaju prefiks "*fore*" za rubne plohe koje se odnose na prednji

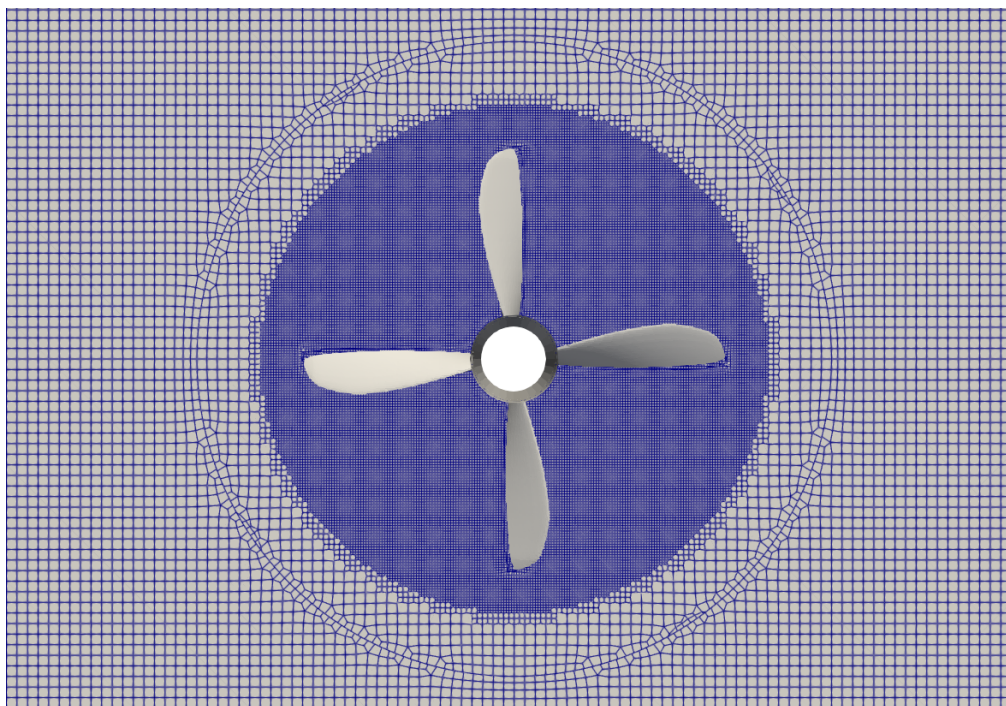
propeler te "aft" na one koje se odnose na stražnji propeler. "cyl" u nazivu označava da navedene rubne plohe pripadaju mreži *outerMesh*.

Dvije mreže, definirane za prednji i stražnji propeler, prikazane su na slici 5.4 s odgovarajućim nazivima rubnih ploha. Mreže propelera, koje su u obliku cilindra, sastoje se od rubnih ploha ulaza, izlaza i zida. Kako bi se uspostavila točna komunikacija između sve 3 domene koristila se *ggi* interpolacijska shema [1] na parovima rubnih ploha prema idućem principu: rubne plohe na ulazu *foreProp* mreže i izlazu *aftProp* mreže u paru su s rubnim plohami *outerMesh* mreže u istoj poziciji, rubne plohe zida *foreProp* i *aftProp* mreže u paru su s odgovarajućim rubnim plohami *outerMesh* mreže te rubne plohe izlaza *foreProp* mreže i ulaska u *aftProp* mrežu također čine jedan par na istoj poziciji.

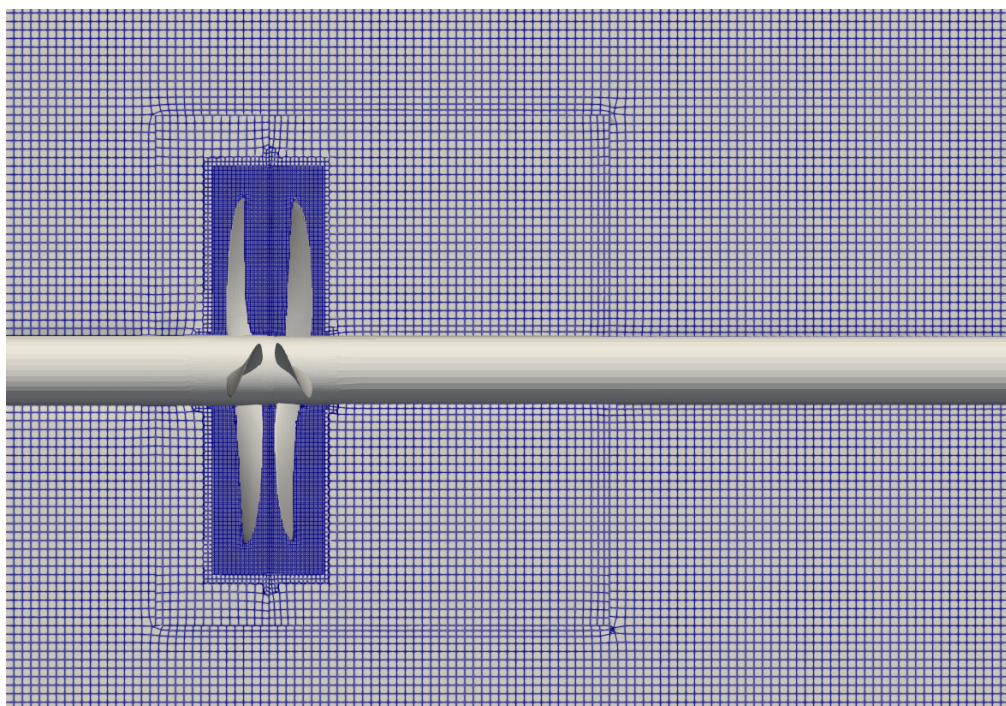


Slika 5.5: Prikaz kvalitete mreže na lopaticama propelera.





Slika 5.6: Prikaz profinjenja KV uz lopatice propelera; ravnina  $x = konst..$



Slika 5.7: Prikaz profinjenja KV uz lopatice propelera; ravnina  $z = konst..$



Slike (5.5 - 5.7) prikazuju lokalno profinjenje mreže uz lopatice propelera. Problem se pojavio radi promjene veličine KV između domena propelera i vanjske mreže. Zbog nedovoljno profinjene mreže nisu bili obuhvaćeni turbulentni vrtlozi što je dovelo do pogrešno izračunatih polja brzine i tlaka pri korištenju rješavača harmoničke ravnoteže. Slike 5.6 i 5.7 prikazuju male KV uz lopatice propelera, uz postupno povećanje do KV vanjske mreže, gdje je osiguran približno uniforman prijelaz na rubnim plohama između domena.

## 5.4. Rubni uvjeti

Rubni uvjeti zadaju se na odgovarajućim rubnim plohama, koje su prikazane u prošlom poglavlju. Zadaju se rubni uvjeti za polje brzine  $\mathbf{u}$ , polja tlaka  $p$ , turbulentnu kinetičku energiju  $k$  te specifičnu brzinu disipacije turbulentne kinetičke energije  $\omega$ . Rubnim plohama je osim rubnih uvjeta potrebno definirati i tip rubne plohe. Tako se primjerice ulazu i izlazu iz domene zadaje *patch* tip rubne plohe, dok se lopaticama propelera i vratilu zadaje *wall* tip rubne plohe. Rubne plohe koje spajaju domene uparene su *ggi* interpolacijskom shemom. Samo definiranje tipova obavlja se u datoteci *boundary*. Pregled zadanih tipova rubnih ploha dan je tablicama 5.3, 5.4 i 5.5.

Tablica 5.3: Tipovi rubnih ploha prednjeg propelera.

<b>foreProp</b>	
<b>Naziv rubne plohe</b>	<b>Tip rubne plohe</b>
FORE_prop	<i>wall</i>
hub_fore	<i>wall</i>
foreProp_inlet	<i>ggi</i>
foreProp_outlet	<i>ggi</i>
foreProp_wall	<i>ggi</i>

Tablica 5.4: Tipovi rubnih ploha stražnjeg propelera.

<b>aftProp</b>	
<b>Naziv rubne plohe</b>	<b>Tip rubne plohe</b>
AFT_prop	<i>wall</i>
hub_aft	<i>wall</i>
aftProp_inlet	<i>ggi</i>
aftProp_outlet	<i>ggi</i>
aftProp_wall	<i>ggi</i>

Tablica 5.5: Tipovi rubnih ploha vanjske mreže.

<b>outerMesh</b>	
<b>Naziv prube plohe</b>	<b>Tip rubne plohe</b>
inlet	<i>patch</i>
outlet	<i>patch</i>
wall	<i>wall</i>
hub	<i>wall</i>
foreProp_cylInlet	<i>ggi</i>
foreProp_cylWall	<i>ggi</i>
aftProp_cylOutlet	<i>ggi</i>
aftProp_cylWall	<i>ggi</i>

Početni i rubni uvjeti, kao što je već ranije definirano, moraju se definirati za  $2n + 1$  vremenskih trenutaka, gdje je  $n$  broj odabranih harmonika. Za postavke simulacije kontrarotirajućih propelera uz primjenu metode harmoničke ravnoteže korišten je jedan harmonik ( $n = 1$ ). Stoga se rubni uvjeti trebaju zadati za sve varijable jednadžbi strujanja za tri različita položaja propelera, čime se opisuje periodičnost strujanja. Dobiveni rezultati su izračunati za tri vremenska koraka  $\frac{1}{3}T$ ,  $\frac{2}{3}T$  i  $T$  unutar jednog perioda gdje jedan period  $T$  označava jedan potpuni zaokret lopatica prednjeg i stražnjeg propelera. Za metodu harmoničke ravnoteže nužna je stvarna rotacija proračunske mreže, prema definiranoj kutnoj brzini  $\omega$ . Ona je definirana u `dynamicMeshDict` datoteci, gdje se zadaje odabranim zonama ćelija. Također je isto tako definirana u datoteci

`harmonicBalanceDict`, gdje se uz brzinu vrtnje zadaje i bazna frekvencija  $f$  i broj lopatica  $n$ . Detaljniji pregled postavki nalazi se u prilogu B.

Korišteni model turbulencije je  $k - \omega SST$  [14], dok se odabrani rubni uvjeti mogu pronaći u tablicama 5.6 - 5.8.

Tablica 5.6: Pregled rubnih uvjeta na rubnoj plohi *outerMesh*.

Broj	Naziv rubne plohe	Rubni uvjeti				
		U [m/s]	p [ $m^2/s^2$ ]	k [ $m^2/s^2$ ]	$\omega$ [1/s]	
01	inlet	hbPressureInletOutletVelocity;	hbTotalPressure;	fixedValue;	fixedValue;	
02	outlet	inletOutlet;	outletInlet;	inletOutlet;	inletOutlet;	
03	wall	fixedValue;	zeroGradient;	hbKqRWallFunction;	hbOmegaWallFunction;	
04	hub	fixedValue;	zeroGradient;	hbKqRWallFunction;	hbOmegaWallFunction;	
05	foreProp_cylInlet	ggi; uniform (1.8312 0 0);	ggi; uniform 0;	ggi; uniform 0.036;	ggi; uniform 36;	
06	foreProp_cylWall	ggi; uniform (1.8312 0 0);	ggi; uniform 0;	ggi; uniform 0.036;	ggi; uniform 36;	
07	aftProp_cylOutlet	ggi; uniform (1.8312 0 0);	ggi; uniform 0;	ggi; uniform 0.036;	ggi; uniform 36;	
08	aftProp_cylWall	ggi; uniform (1.8312 0 0);	ggi; uniform 0;	ggi; uniform 0.036;	ggi; uniform 36;	

Tablica 5.7: Pregled rubnih uvjeta na rubnoj plohi *foreProp*.

Broj	Naziv rubne plohe	Rubni uvjeti				$\omega$ [1/s]
		U [m/s]	p [ $m^2/s^2$ ]	k [ $m^2/s^2$ ]		
09	FORE_prop	fixedValue; uniform (0 0 0);	zeroGradient;	hbKqRWallFunction;	hbOmegaWallFunction;	
10	hub_fore	fixedValue; uniform (0 0 0);	zeroGradient;	hbKqRWallFunction;	hbOmegaWallFunction;	
11	foreProp_inlet	ggi; uniform (1.8312 0 0);	ggi; uniform 0;	ggi; uniform 0.036;	ggi; uniform 36;	
12	foreProp_outlet	ggi; uniform (1.8312 0 0);	ggi; uniform 0;	ggi; uniform 0.036;	ggi; uniform 36;	
13	foreProp_wall	ggi; uniform (1.8312 0 0);	ggi; uniform 0;	ggi; uniform 0.036;	ggi; uniform 36;	

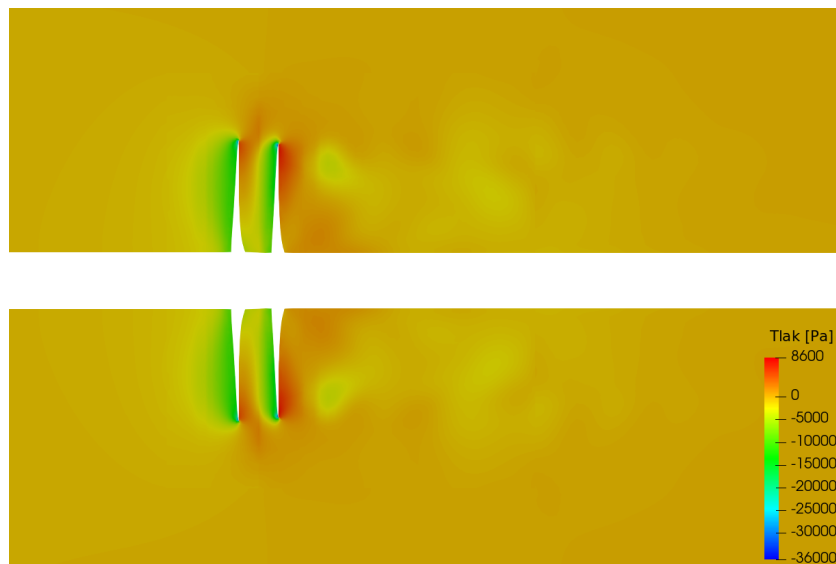
Tablica 5.8: Pregled rubnih uvjeta na rubnoj plohi *aftProp*.

Broj	Naziv rubne plohe	Rubni uvjeti				$\omega$ [1/s]
		U [m/s]	p [ $m^2/s^2$ ]	k [ $m^2/s^2$ ]		
14	AFT_prop	fixedValue; uniform (0 0 0);	zeroGradient,	hbKqRWallFunction;	hbOmegaWallFunction;	
15	hub_aft	fixedValue; uniform (0 0 0);	zeroGradient;	hbKqRWallFunction;	hbOmegaWallFunction;	
16	aftProp_inlet	ggi; uniform (1.8312 0 0);	ggi; uniform 0;	ggi; uniform 0.036;	ggi; uniform 36;	
17	aftProp_outlet	ggi; uniform (1.8312 0 0);	ggi; uniform 0;	ggi; uniform 0.036;	ggi; uniform 36;	
18	aftProp_wall	ggi; uniform (1.8312 0 0);	ggi; uniform 0;	ggi; uniform 0.036;	ggi; uniform 36;	

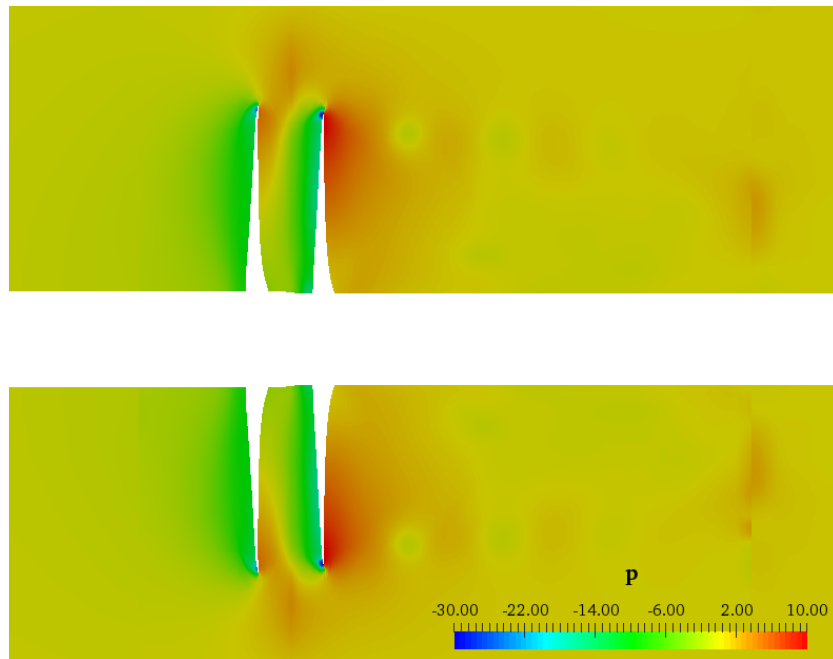
## 5.5. Rezultati

Simulacija kontrarotirajućih propelera korištenjem metode harmoničke ravnoteže izvedena je za koeficijent napredovanja  $J = 0.5$ . Koeficijent napredovanja  $J$  je omjer brzine strujanja fluida ispred propelera i brzine okretanja propelera  $J = \frac{U}{nD_f}$ . Rezultati polja tlaka, brzine i turbulentne kinetičke energije uspoređeni su s rezultatima MRF i tranzijentne simulacije [1].

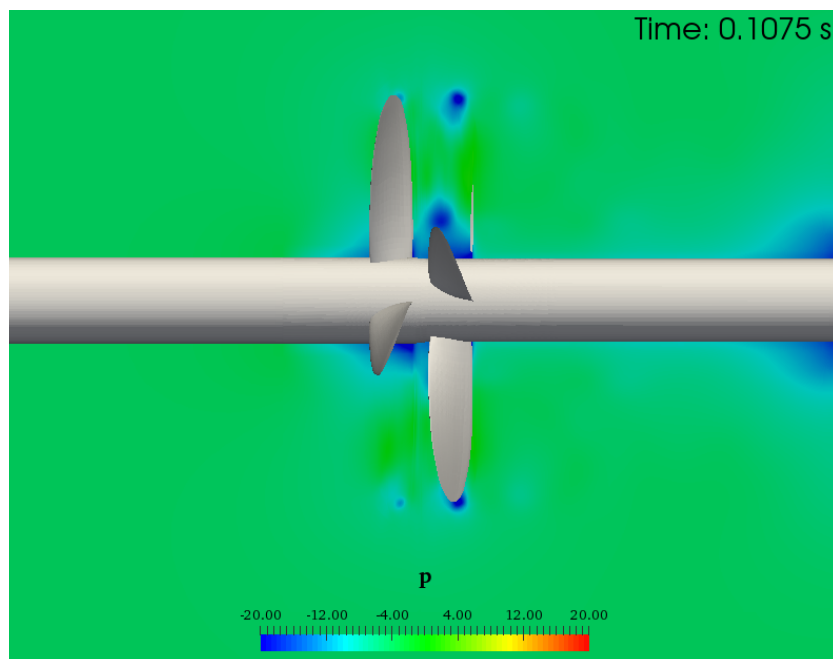
Polje tlaka prikazano je na slici 5.8 u presjeku ravnine  $z = konst.$  Jasno je vidljivo područje pretlačne i potlačne strane oba propelera. Isto tako, radi interakcije propelera koji rotiraju u suprotnim smjerovima, na slici 5.8 vidljiva su područja lokalnog pada tlaka koji je posljedica stvaranja turbulentnih vrtloga iza stražnjeg propelera. Prestrujavanje fluida preko vrhova lopatica izrazito je turbulentna pojava. Slike 5.9 i 5.10 prikazuju rezultate MRF i tranzijentne simulacije za polje tlaka. Razlika MRF metode (slika 5.9) i metode harmoničke ravnoteže (slika 5.10) najbolje se može uočiti uspoređujući veličinu turbulentnih vrtloga. Turbulentni vrtlozi kod harmoničke ravnoteže (slika 5.8) su u promjeru veći te se postupno smanjuju, za razliku od MRF simulacije (slika 5.9) gdje su vrtlozi manji i uniformni uzduž strujanja. Tranzijentna simulacija također prikazuje pojavu nastajanja vrtloga (slika 5.10), a apsolutni iznos tlaka veći je nego u prethodne dvije simulacije.



Slika 5.8: Polje tlaka kontrarotirajućih propelera u  $z = konst.$  ravnini; harmonička ravnoteža.



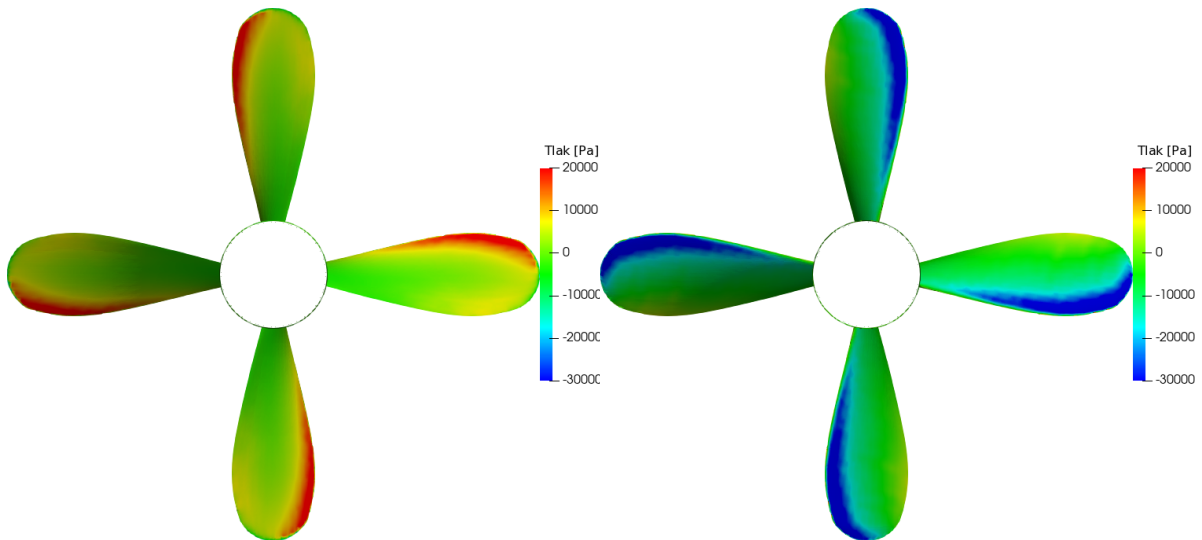
Slika 5.9: Polje tlaka kontrarotirajućih propelera u  $z = konst.$  ravnini; MRF simulacija [1].



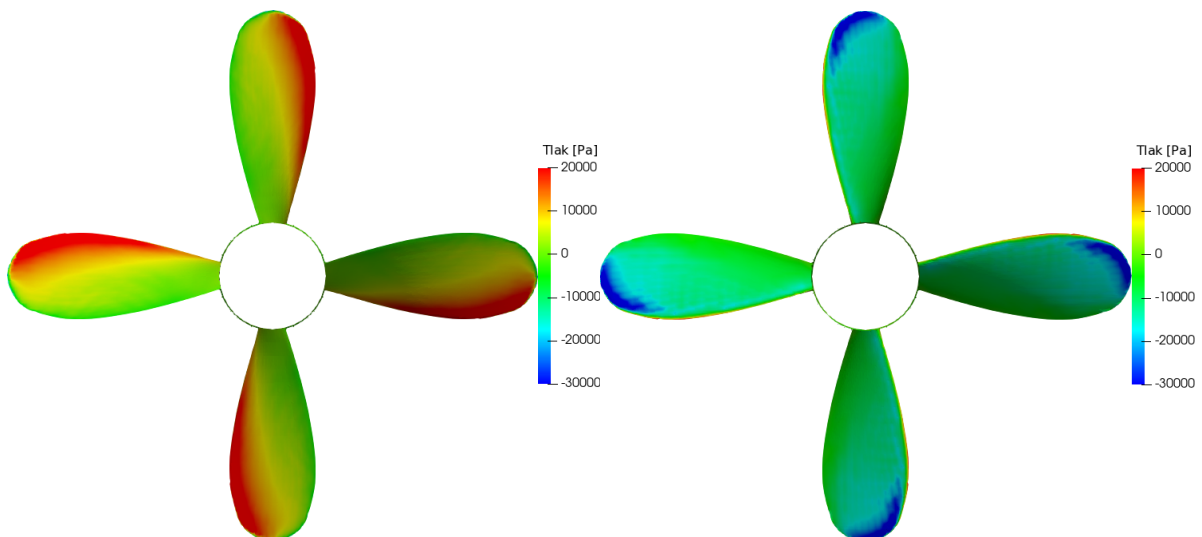
Slika 5.10: Polje tlaka kontrarotirajućih propelera u  $z = konst.$  ravnini; tranzijentna simulacija [1].



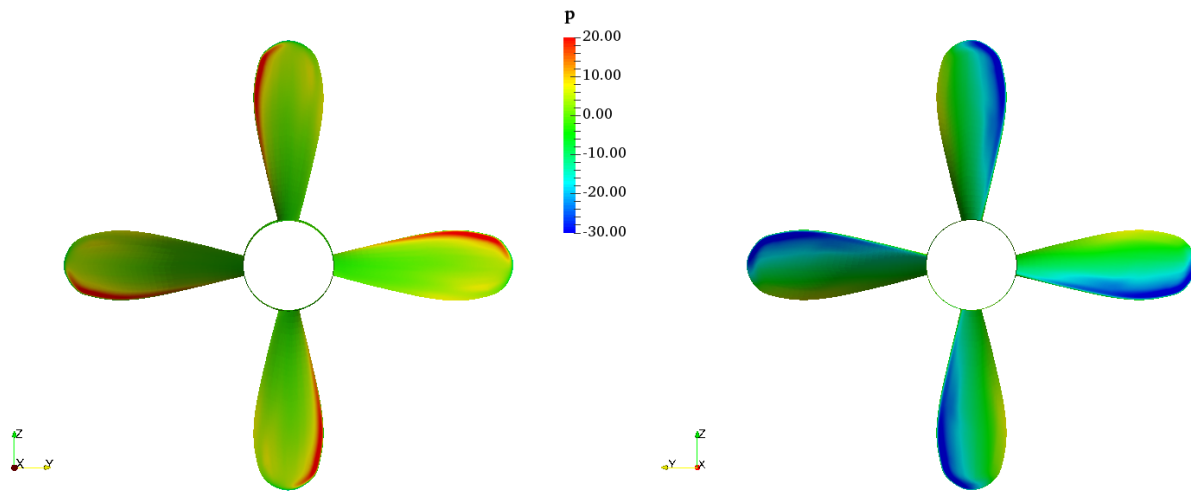
Detaljniji prikaz raspodjele tlaka na lopaticama propelera vidljiv je na slikama 5.13 - 5.15.



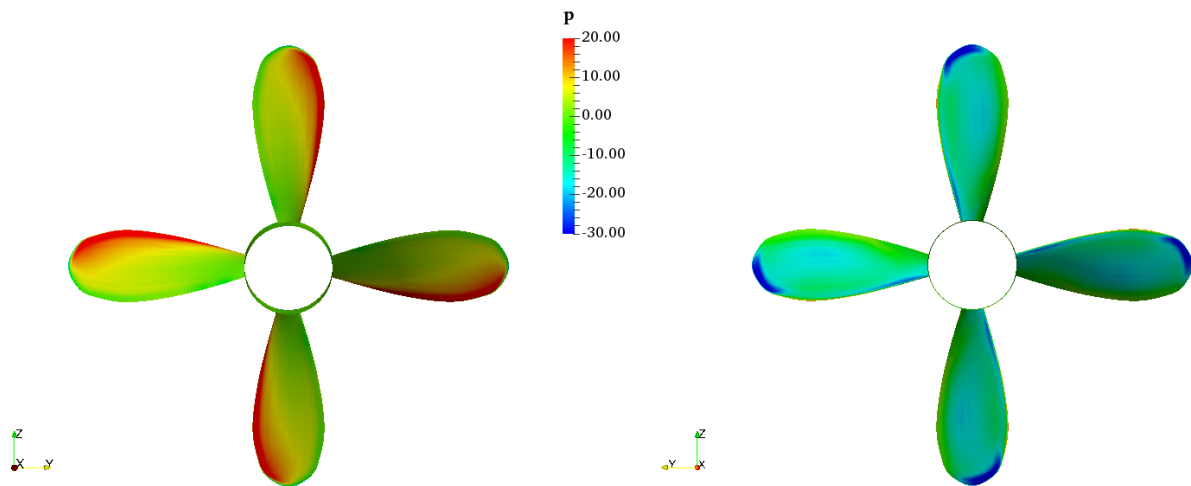
Slika 5.11: Raspodjela tlaka prelaćne strane *foreProp* propelera (lijevo) i potlaćne strane (desno); harmonička ravnoteža.



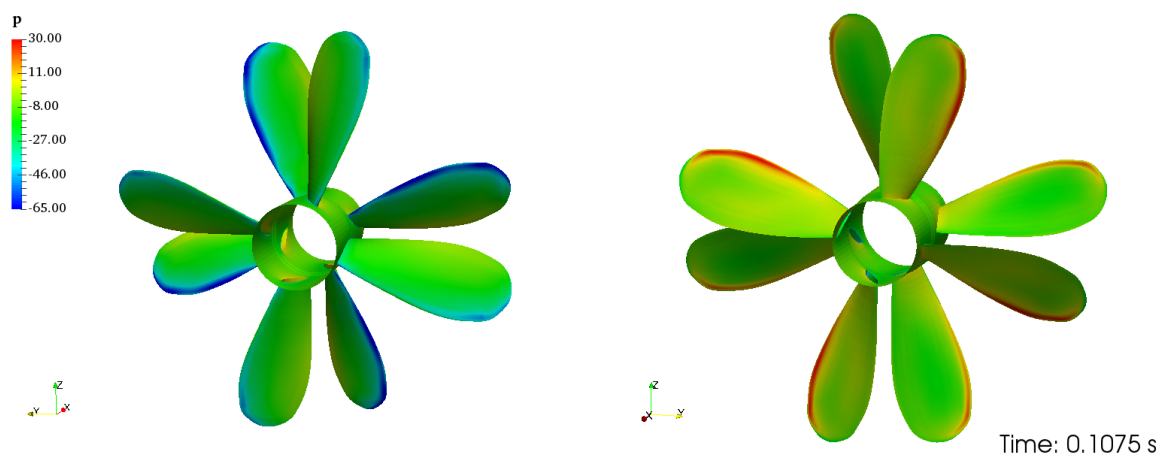
Slika 5.12: Raspodjela tlaka prelaćne strane *aftProp* propelera (lijevo) i potlaćne strane (desno); harmonička ravnoteža.



Slika 5.13: Raspodjela tlaka pretljučne strane *foreProp* propelera (lijevo) i potlačne strane (desno); MRF simulacija [1].

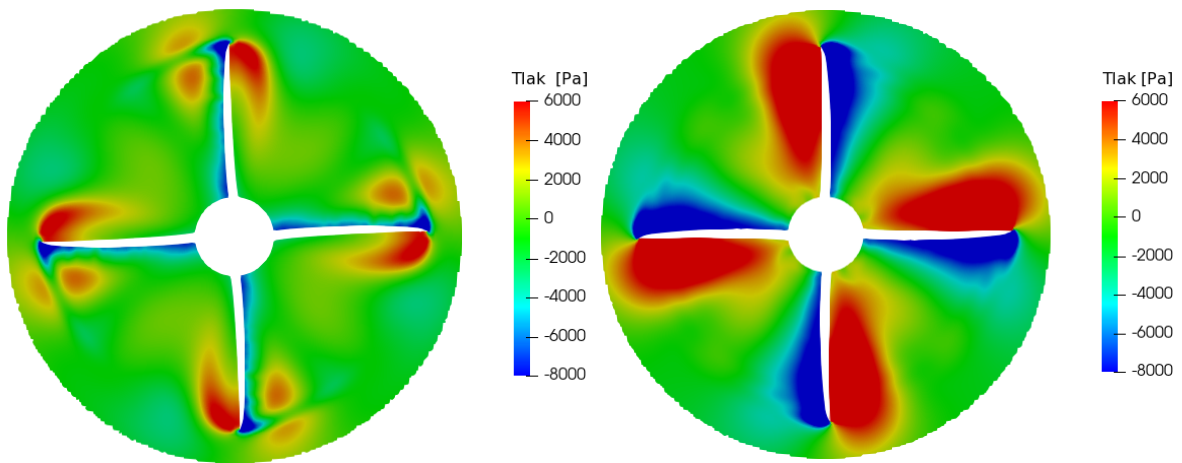


Slika 5.14: Raspodjela tlaka pretljučne strane *aftProp* propelera (lijevo) i potlačne strane (desno); MRF simulacija [1].

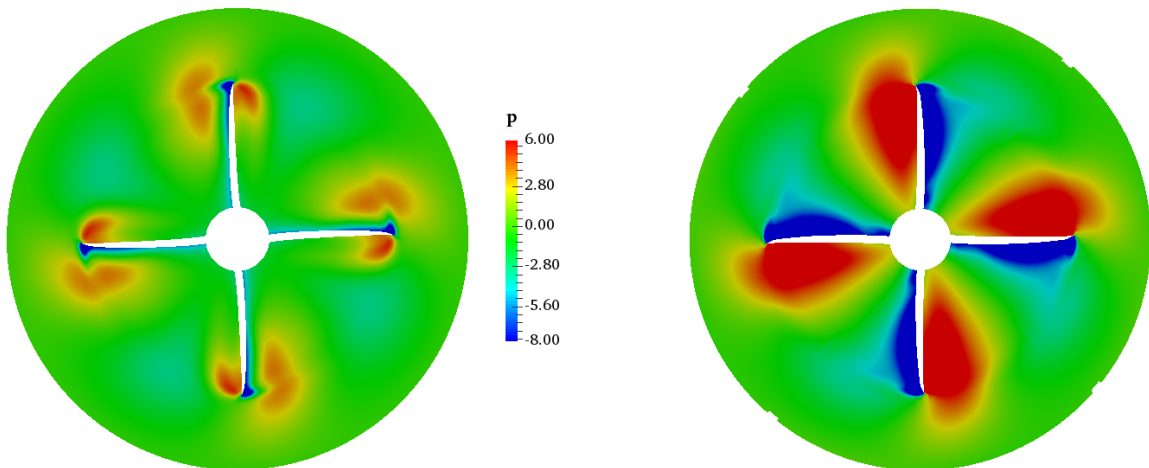


Slika 5.15: Raspodjela tlaka pretlačne strane *foreProp* propelera (lijevo) i potlačne strane (desno); tranzijentna simulacija [1].

Slike 5.13 - 5.15 prikazuju raspodjelu tlaka po lopaticama oba propelera za MRF i tranzijentnu simulaciju. Rezultati polja tlaka prikazani su za kinematički tlak, tj. apsolutni iznos tlaka podijeljen gustoćom fluida  $\rho$ . Simulacija propelera korištenjem hamoničke ravnoteže daje detaljniju sliku raspodjele tlaka pretlačne i potlačne strane lopatica (slike 5.11 - 5.12), u odnosu na MRF simulaciju. Uspoređujući s MRF metodom (slike 5.13 - 5.14) metoda hamoničke ravnoteže osim što daje pregled raspodjele tlaka na ulaznom i izlaznom bridu, daje i prikaz raspodjele tlaka na trbuhu i leđima lopatica. Raspodjela tlaka na lopaticama propelera u tranzijentnoj simulaciji (slika 5.15) prikazana je u većoj skali, kako bi rezultati bili usporedivi sa simulacijama hamoničke ravnoteže i MRF. Kako bismo razmotrili lokalni utjecaj promjene tlaka dani su presjeci oba propelera u  $x = konst.$  ravnini (slike 5.16 - 5.17). Sa slike 5.17 je vidljivo da MRF simulacija daje veće iznose pretlaka prednjeg i stražnjeg propelera. Kod prednjeg propelera je vidljiv veći iznos potlaka na lopaticama u blizini vratila, a dok je kod stražnjeg propelera raspodjela potlaka približno ista kao i kod MRF simulacije (slika 5.17). Simulacija hamoničke ravnoteže bolje opisuje pojavu turbulentnih vrtloga koji su posljedica prestrujavanja fluida na vrhovima lopatica (slika 5.16).

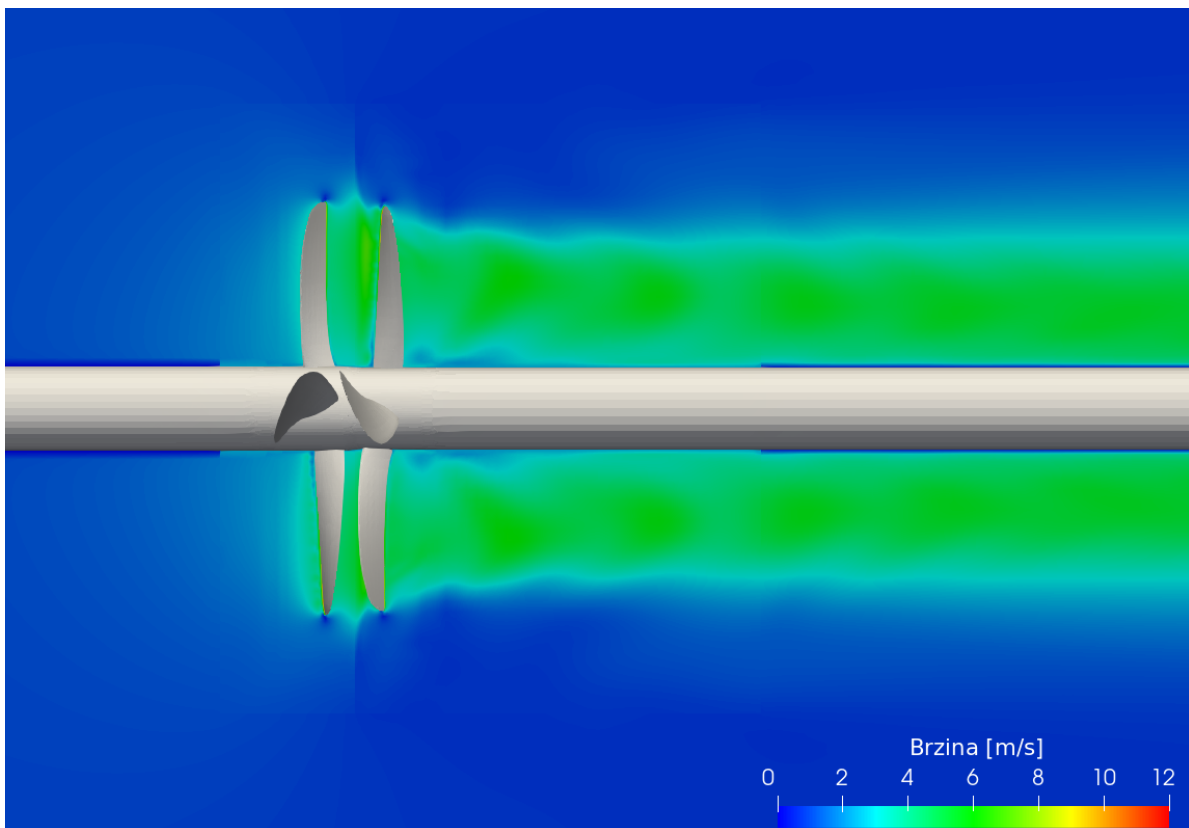


Slika 5.16: Lokalna promjena tlaka na presjecima (lijevo prednji propeler, desno stražnji) ravnine  $x = konst.$ ; harmonička ravnoteža.

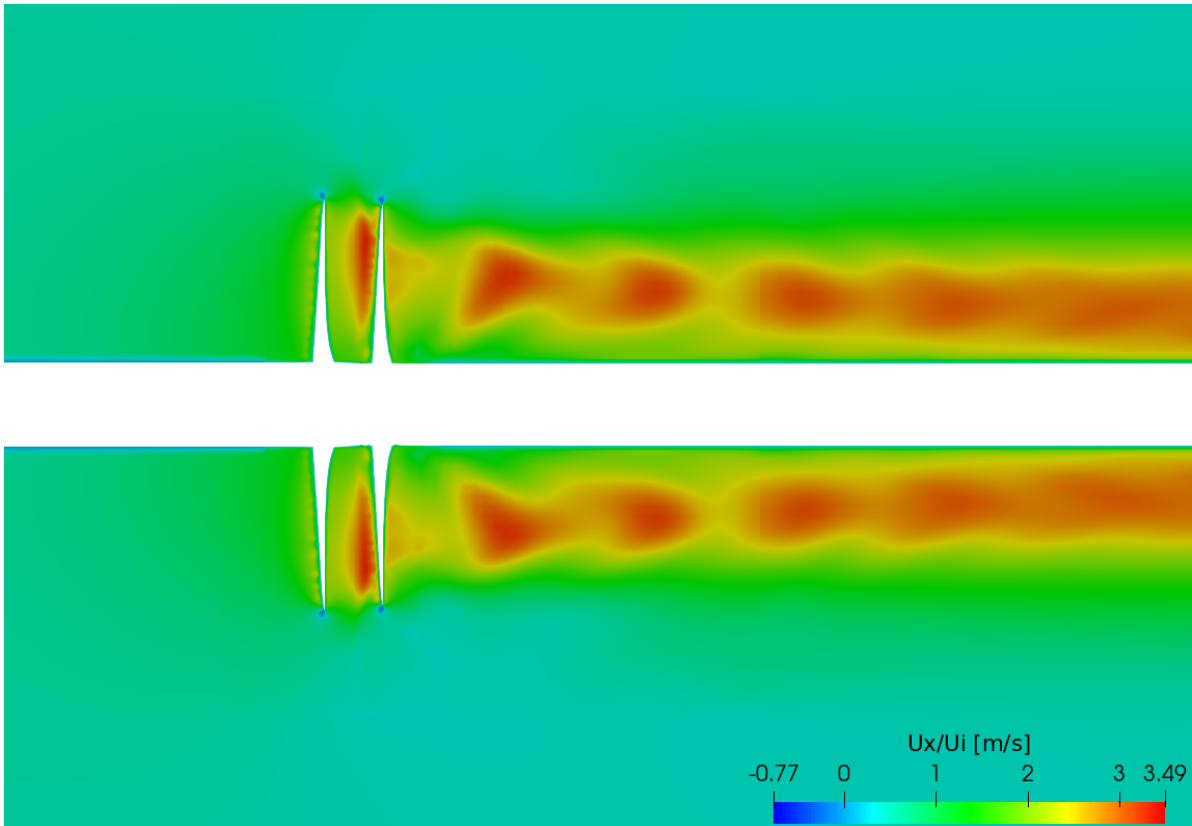


Slika 5.17: Lokalna promjena tlaka na presjecima (lijevo prednji propeler, desno stražnji) ravnine  $x = konst.$ ; MRF simulacija [1].

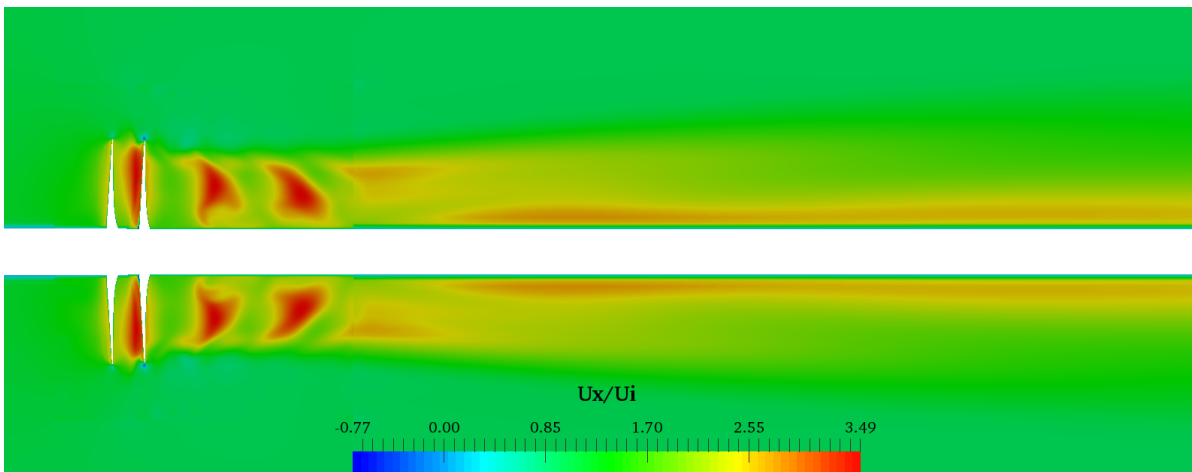
Polje brzine strujanja fluida u presjeku ravnine  $z = konst.$  prikazano je na slici 5.18. Može se primjetiti da je brzina po iznosu najviša oko lopatica oba propelera te u tragu strujanja iza lopatica. Za jasniji prikaz lokalnog ubrzanja fluida poslužit će slika 5.19 koja stavlja u odnos ulaznu brzinu  $U_i$  i aksijalnu brzinu  $U_x$ . Za korišteni koeficijent napredovanja  $J = 0.5$  ulazna brzina fluida iznosi  $U_i = 1.8312m/s$ .



Slika 5.18: Prikaz polja brzine u ravnini  $z = konst.$ ; harmonička ravnoteža.

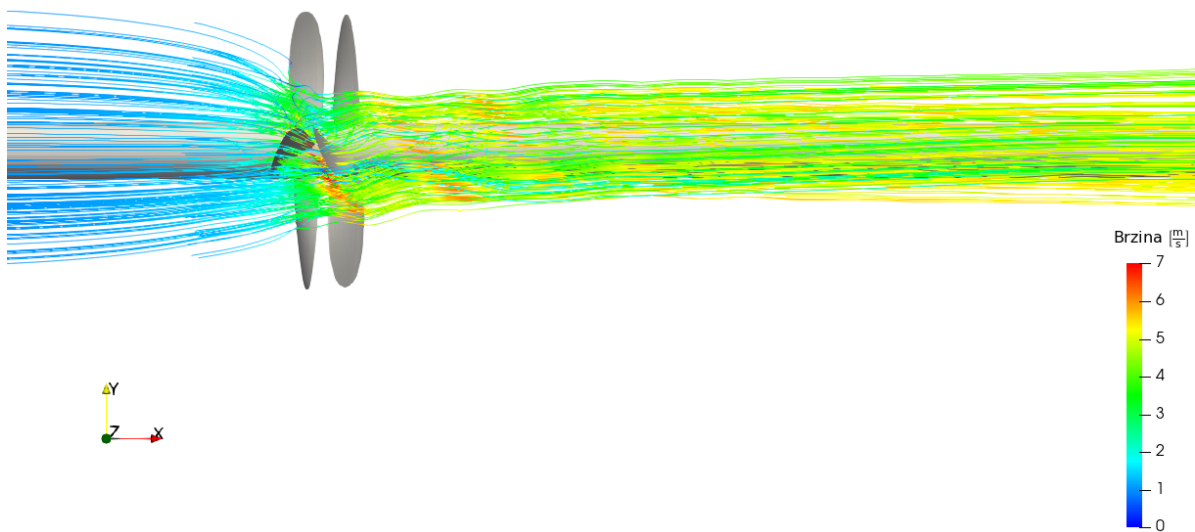


Slika 5.19: Odnos ulazne i aksijalne brzine u ravnini  $z = konst.$ ; harmonička ravnoteža.



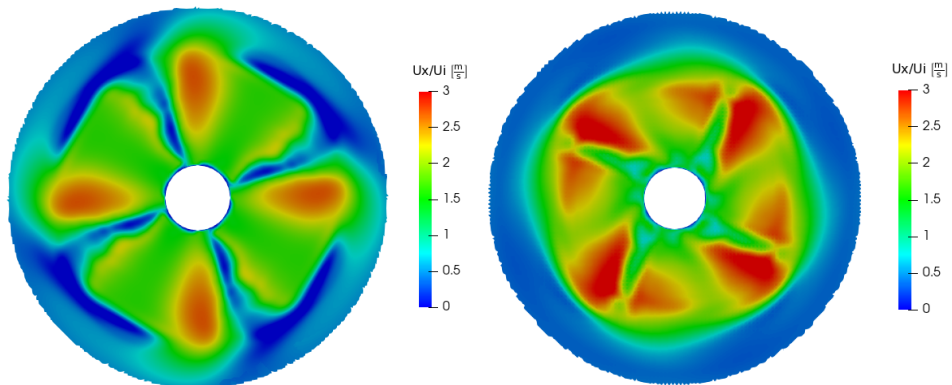
Slika 5.20: Odnos ulazne i aksijalne brzine u ravnini  $z = konst.$ ; MRF simulacija [1].

Uspoređujući sliku 5.19 i sliku 5.20 može se zaključiti da MRF simulacija daje veće rezultate lokalnog ubrzanja u iznosima do 3.49 m/s, no nedovoljno dobro opisuje izgled vrtložne komponente koja je rezultat interakcije kontrarotirajućih propelera. Kod MRF simulacije lokalno ubrzanje odjednom prestaje te ne propagira uzduž strujanja, kao što je to vidljivo na simulaciji harmoničke ravnoteže (slika 5.19). Razlog tome je, kao što je ranije pojašnjeno, da MRF simulacija razmatra samo jednu poziciju propelera za koju im zadaje dodatan izvor centrifugalne i Coriolisove sile. Slika koju vidimo (slika 5.20) prikaz je samo jedne „zamrznute” slike strujanja koje rotacijsku komponentu postiže nametanjem obodne brzine te iz tog razloga ono ne propagira kroz ostatak domene. Na lopaticama stražnjeg propelera (slika 5.19) vidljivo je lokalno ubrzanje koje je posljedica naleta fluida koji prestrujava s prvog propelera na drugi. Lokalno ubrzanje fluida radi međusobne interakcije kontrarotirajućih propelera vidljivo je na strujnicama sa slike 5.21.

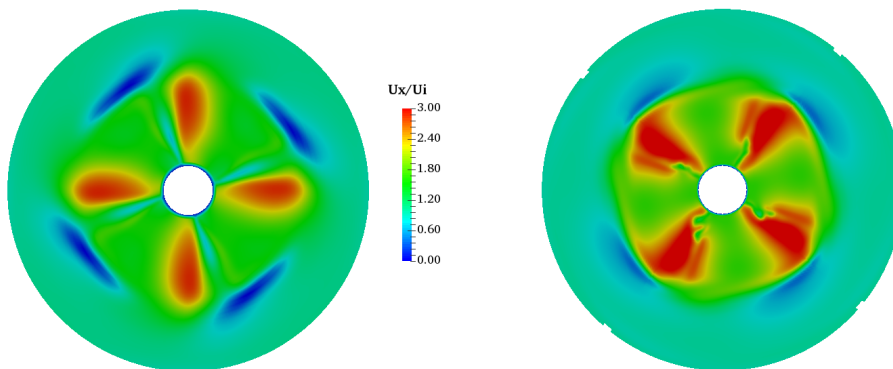


Slika 5.21: Prikaz strujnica fluida u interakciji kontrarotirajućih propelera.

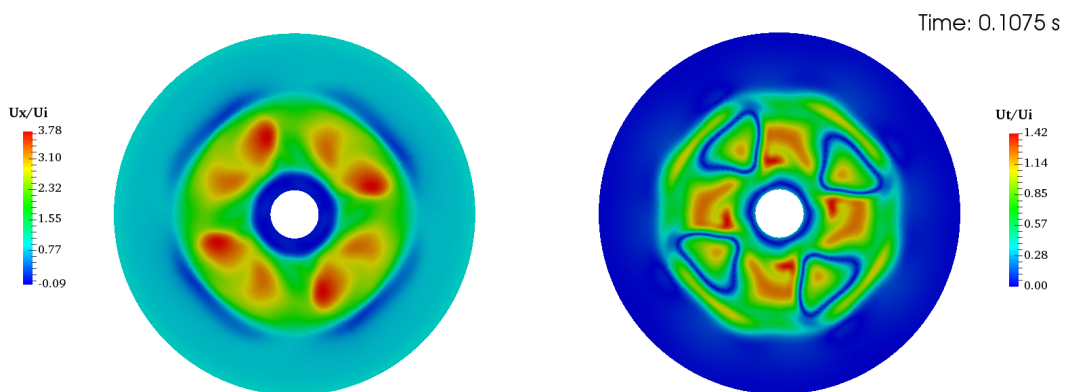
Kako bi se bolje predočili iznosi brzina koji su posljedica interakcije oba propelera, prikazana su dva različita presjeka u ravnini  $x = konst$ . Ti presjeci daju uvid u profil i iznose brzine koja nastaje prolaskom fluida prvo preko prednjeg propelera, a zatim preko stražnjeg. Rezultati su uspoređeni s MRF i tranzijentnom simulacijom, a vidljivi su na slikama 5.22 - 5.24.



Slika 5.22: Polje brzine na presjecima  $x/R = 0$  i  $x/R = 0.334$ ; harmonička ravnoteža.



Slika 5.23: Polje brzine na presjecima  $x/R = 0$  i  $x/R = 0.334$ ; MRF simulacija [1].

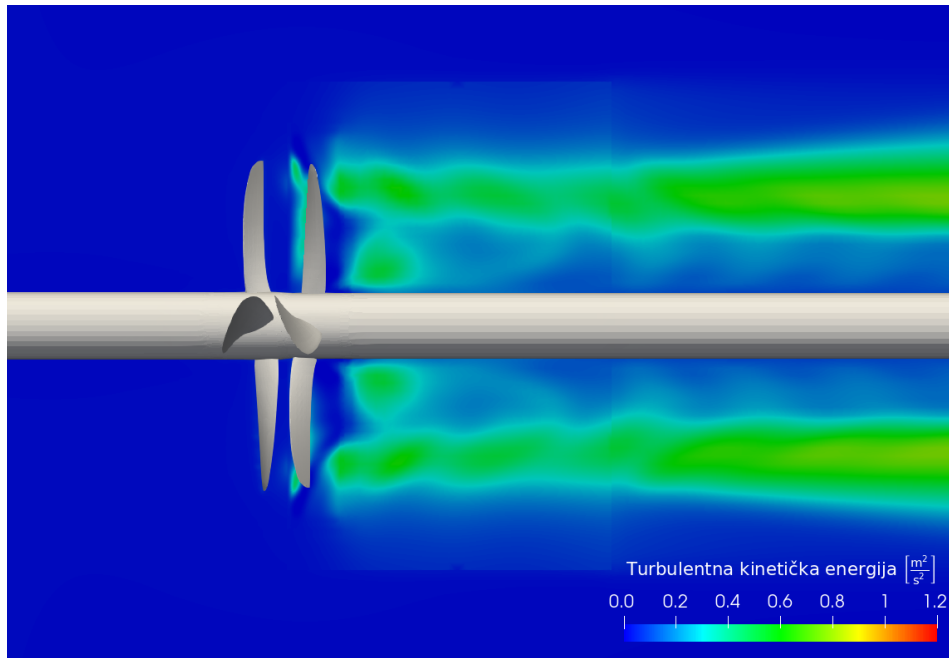


Slika 5.24: Polje brzine na presjecima  $x/R = 0$  i  $x/R = 0.334$ ; tranzijentna simulacija [1].



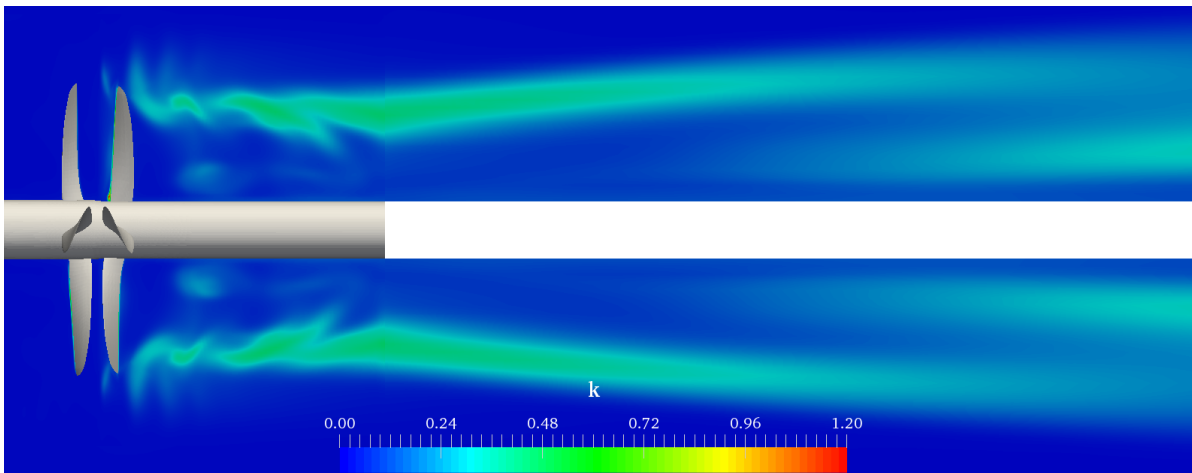
Presjek  $x/R = 0$  odnosi se na presjek ravnine  $x = konst.$  koja se nalazi između propelera, dok se presjek  $x/R = 0.334$  odnosi na presjek netom iza stražnjeg propelera. Sva tri rješenja simulacija pokazuju jasno vidljiva lokalna ubrzanja fluida oko lopatica propelera. Isto tako, na presjeku  $x/R = 0$  može se uočiti područje niske brzine strujanja na vrhovima lopatica, što je posljedica promjene smjera strujanja naletom fluida na lopaticu stražnjeg propelera. Također, može se uočiti da na presjeku iza stražnjeg propelera fluid dobiva na ubrzanju radi toga što stražnji propeler pretvara tangencijalnu komponente brzine, dobivenu prestrujavanjem fluida preko lopatica prednjeg propelera, u aksijalnu, pritom „ispravljaajući” strujanje. Simulacija korištenjem metode harmoničke ravnoteže (slika 5.22) daje više detalja o polju brzine strujanja, za razliku od MRF metode (slika 5.23). Na presjeku  $x/R = 0$  između propelera javljaju se dodatni izvori lokalnog ubrzanja strujanja fluida, a na presjeku  $x/R = 0.334$  iza stražnjeg propelera može se uočiti veća difuzija rezultata polja brzine. Uspoređujući polje brzine harmoničke ravnoteže (slika 5.22) s rezultatima tranzijentne simulacije (slika 5.24) može se vidjeti da su na presjeku  $x/R = 0$  neke od tranzijentnih pojava dobro prikazane, no rezultati nisu dovoljno dobro usporedivi jer se u tranzijentnoj simulaciji strujanje nije u potpunosti razvilo. Dobiveni rezultati harmoničke ravnoteže odnose se na vremenski trenutak  $t = 153,75s$ , dok se za tranzijentnu simulaciju odnose na vremenski trenutak  $t = 0,1075s$

Slike 5.25 - 5.27 prikazuju rezultate polja turbulentne kinetičke energije za harmoničku ravnotežu, MRF i tranzijentnu simulaciju u presjeku ravnine  $z = konst.$  Može se uočiti da je razina turbulentne kinetičke energije najviša uzduž vrhova lopatica, a pojava turbulentnih vrloga vidljiva je i u blizini vratila netom iza stražnjeg propelera (slika 5.25). Kao što je ranije prikazano, na polju tlaka (slika 5.8) su jasno vidljivi turbulentni vrtlozi koji nastaju radi prestrujavanja fluida s pretlačne na potlačnu stranu, preko vrhova lopatica.

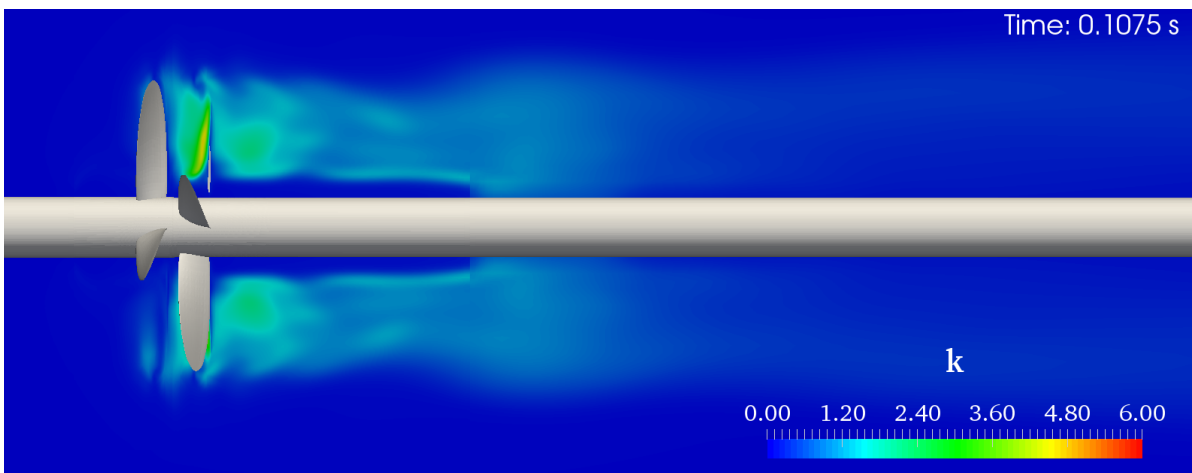


Slika 5.25: Polje turbulentne kinetičke energije u presjeku ravnine  $z = konst.$ ; harmonička ravnoteža.

Simulacija korištenjem harmoničke ravnoteže (slika 5.25) dobro prikazuje propagaciju turbulencije uzduž strujanja (slika 5.26), isto tako dobro opisuje turbulenciju nakon izlaznog brida lopatica statora, koja je rezultat tranzijentnih pojava (slika 5.27). Razlog tome je taj da metoda harmoničke ravnoteže vrlo dobro opisuje vrtložne komponente jer računa više slika strujanja za propelere u različitim pozicijama.



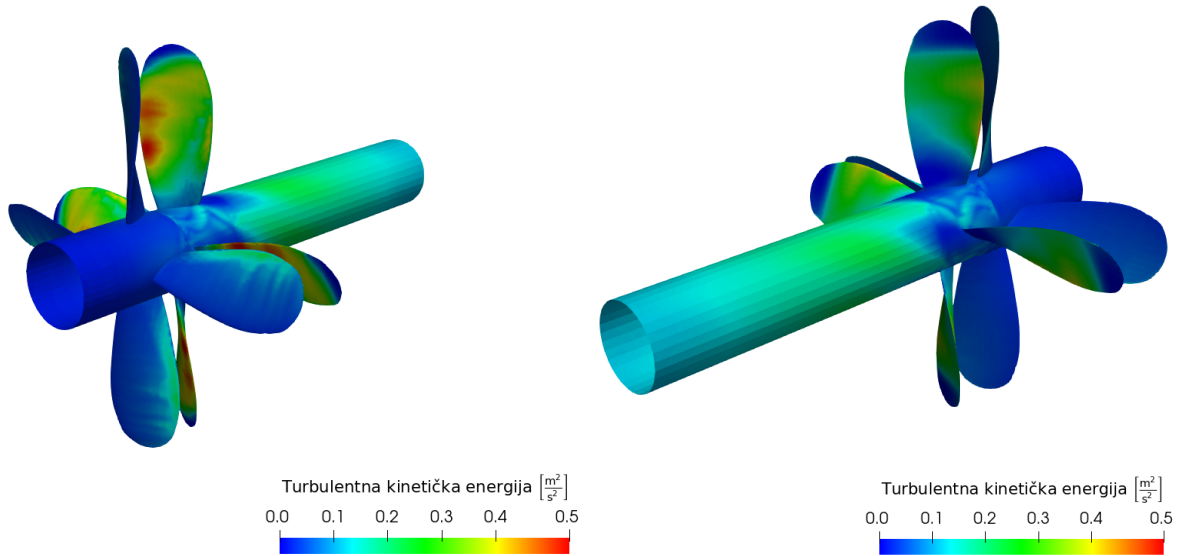
Slika 5.26: Polje turbulentne kinetičke energije u presjeku ravnine  $z = konst.$ ; MRF simulacija [1].



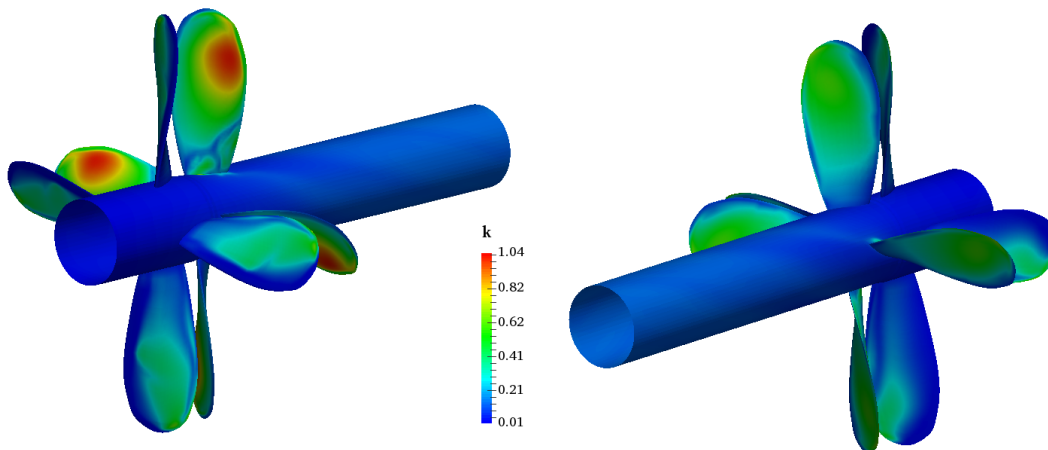
Slika 5.27: Polje turbulentne kinetičke energije u presjeku ravnine  $z = konst.$ ; tranzijentna simulacija [1].

Na stražnjem propeleru (slika 5.28) vidljiva je raspodjela turbulentne kinetičke energije po lopaticama, no po iznosu i raspodjeli puno je manja za razliku od MRF simulacije (slika 5.29) i tranzijentne simulacije (slika 5.30), koje daju realističniji prizor raspodjele. Ovaj neadekvatan prizor turbulencije možemo pripisati kvaliteti domene (mreže). Da se koristila finija mreža s blažim (postupnijim) prijelazima s manjih na veće KV, dobili bi se bolji rezultati. No, kako se mreža izradila u alatu za automatsko generiranje mreže *cfMesh* [13], svako dodatno profinjenje bi rezultiralo velikim skokom u broju KV što bi

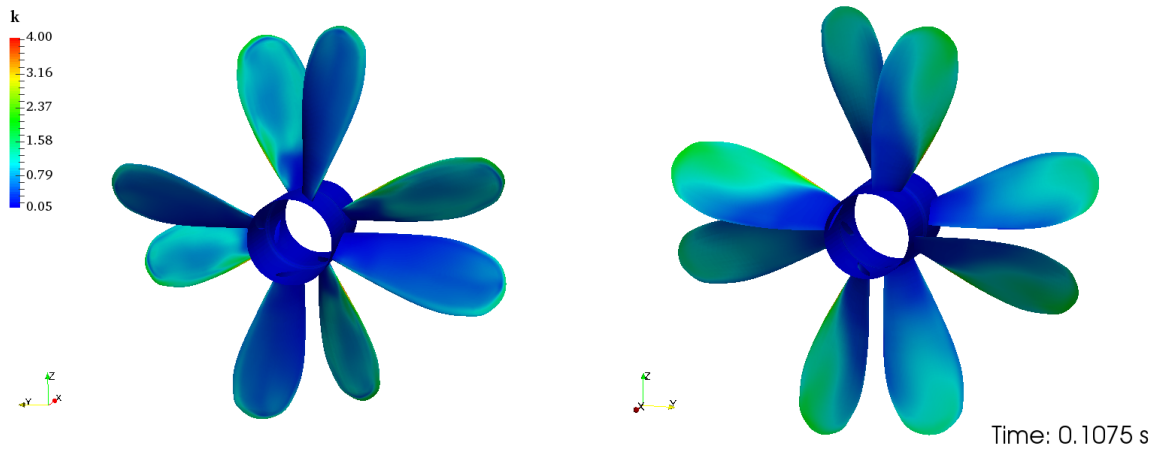
znatno produjilo vrijeme simulacije.



Slika 5.28: Raspodjela tke na lopaticama prednjeg i stražnjeg propelera; harmonička ravnoteža.



Slika 5.29: Raspodjela tke na lopaticama prednjeg i stražnjeg propelera; MRF simulacija [1].



Slika 5.30: Raspodjela tke na lopaticama prednjeg i stražnjeg propelera; tranzijentna simulacija [1].

## 5.6. Zaključak

U ovom poglavlju dane su osnove i princip rada kontrarotirajućih propelera te kratki pregled prednosti ovog načina brodskog pogona. Predstavljena je kompleksnost hidrodinamičke interakcije dvaju rotora. Prikazane su karakteristike i geometrije propelera korištenih u eksperimentu za validaciju rješenja simulacija. Opisan je princip izrade prostorne domene i njihovog povezivanja u jednu cjelinu. Također, navedeni su svi korišteni rubni uvjeti koji su dodijeljeni rubnim ploham domena. Prikazani su rezultati simulacija korištenjem metode harmoničke ravnoteže za par kontrarotirajućih propelera. Polja tlaka, brzine i turbulentne kinetičke energije uspoređena su s rezultatima MRF i tranzijentne simulacije prethodnog diplomskog rada Luke Balatinca [1] provedenim na identičnoj geometriji propelera. Vrijeme trajanja simulacije harmoničke ravnoteže iznosilo je 269 sati i 52 minute, dok je vrijeme tranzijentne simulacije iznosilo približno dva mjeseca, što nam govori da dobiveni rezultati metode harmoničke ravnoteže dobro opisuju periodična strujanja i tranzijentne pojave koje se javljaju radi vrtložne komponente, uz smanjeno vrijeme potrebno za dobivanje rezultata. Kako bi se povećala točnost rješenja, broj harmonika se može povećati, ali uz dodatno profinjenje mreže. Iduće poglavlje je zaključak ovog diplomskog rada, koje daje pregled svih opisanih stavki metode harmoničke ravnoteže te zaključak rezultata simulacija.

## 6 | Zaključak

U ovom je diplomskom radu prikazana primjena harmoničke ravnoteže u računalnoj dinamici fluida na primjeru kontrarotirajućih propelera. Spektralna metoda, kao jedan od algoritama računalne dinamike fluida, pokazala se povoljnom za rješavanje periodičnih strujanja u smislu točnosti dobivenog rješenja i vremena potrebnog za proračun. Spektralna metoda temelji se na pretvorbi varijabli jednadžbi strujanja iz vremenske u frekvencijsku domenu i obrnuto. Harmonička ravnoteža jedna je od izvedenica spektralne metode, a njena rješenja se dobivaju rješavanjem  $2n + 1$  sustava stacionarnih jednadžbi, za  $n$  harmonika. Ovisno o odabranom broju harmonika  $n$  postiže se veća točnost (veći broj harmonika) ili se smanjuje vrijeme trajanja simulacije (manji broj harmonika).

Korišten je matematički model harmoničke ravnoteže za nestlačivo strujanje s odvojenim pristupom sprege tlaka i brzine. Prikazana je aproksimacija varijabli Fourierovim redom u vremenu, korištenjem  $n$  harmonika i srednje vrijednosti varijable. U trećem poglavlju prikazana je implementacija metode harmoničke ravnoteže u metodi kontrolnih volumena, tj. modificirane jednadžbe harmoničke ravnoteže prikazane su u prostornoj domeni diskretiziranoj kontrolnim volumenima. Validacija metode harmoničke ravnoteže na primjeru hidromlaznice prikazana je u četvrtom poglavlju. Za dobivenu geometriju, rezultati harmoničke ravnoteže uspoređeni su s rezultatima MRF simulacije: polje tlaka, brzine te turbulentne kinetičke energije. Princip rada, geometrija i računalna domena za slučaj kontrarotirajućih propelera opisani su u petom poglavlju. Provedena je računalna simulacija za jedan harmonik te su se rezultati polja tlaka, brzine i turbulentne kinetičke energije usporedili s rezultatima MRF i tranzijentne simulacije.

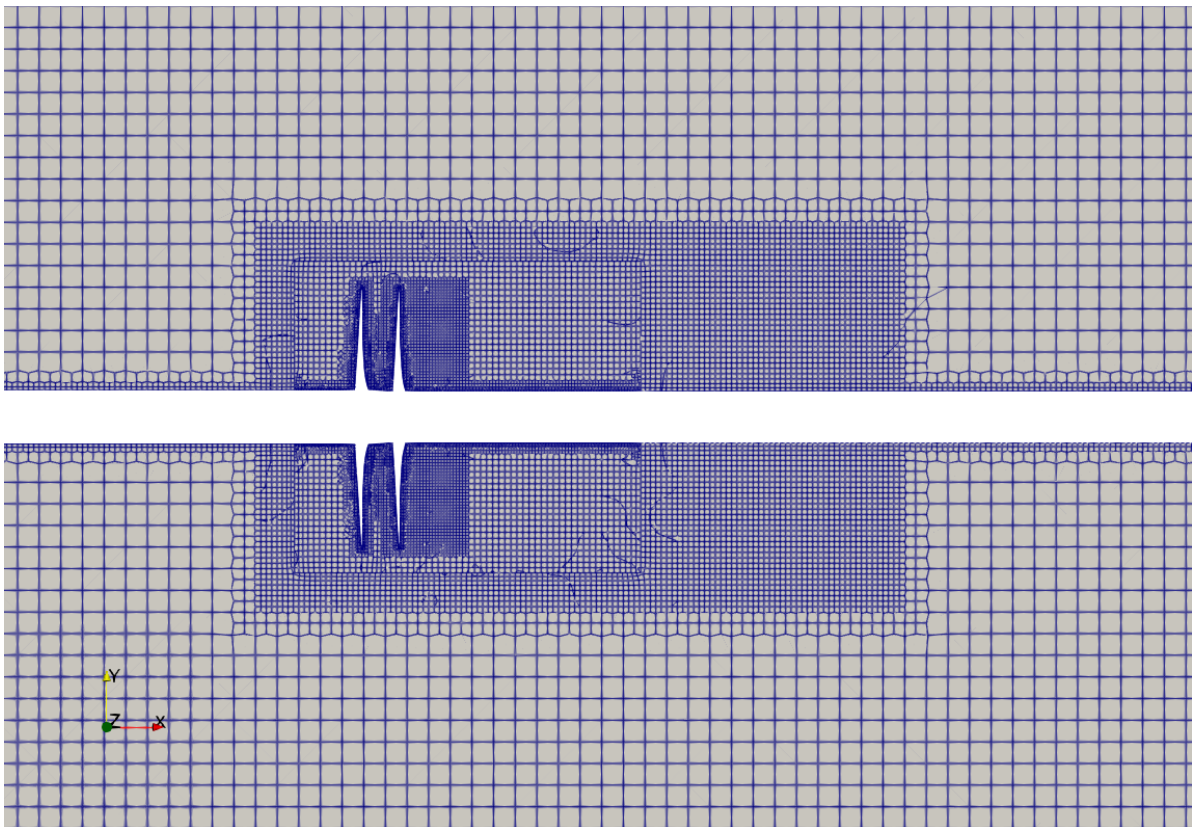
Prikazane su raspodjele tlaka i turbulentne kinetičke energije po lopaticama propelera, te na odabranim ravninskim presjecima; prikazan je profil brzina na poprečnom presjeku između propelera te netom iza stražnjeg propelera. Dobiveni rezultati pokazuju da harmonička ravnoteža dobro opisuje periodična strujanja i tranzijentne pojave koje se javljaju radi vrtložne komponente. Kako bi se povećala točnost rješenja, broj harmonika se može povećati, ali uz dodatno profinjenje mreže. U prilogu A. prikazan je utjecaj mreže na rezultate simulacije, gdje je pokazano kako mreže nedovoljno dobre kvalitete ne daju dobre rezultate.

# Prilog

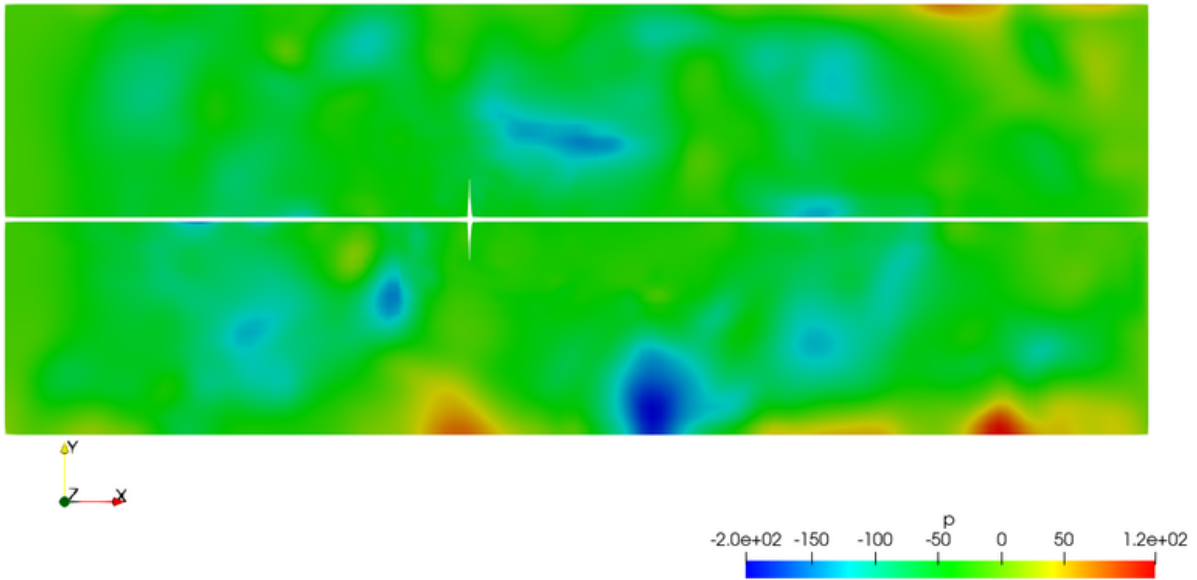


# A | Utjecaj mreže na rezultate simulacije

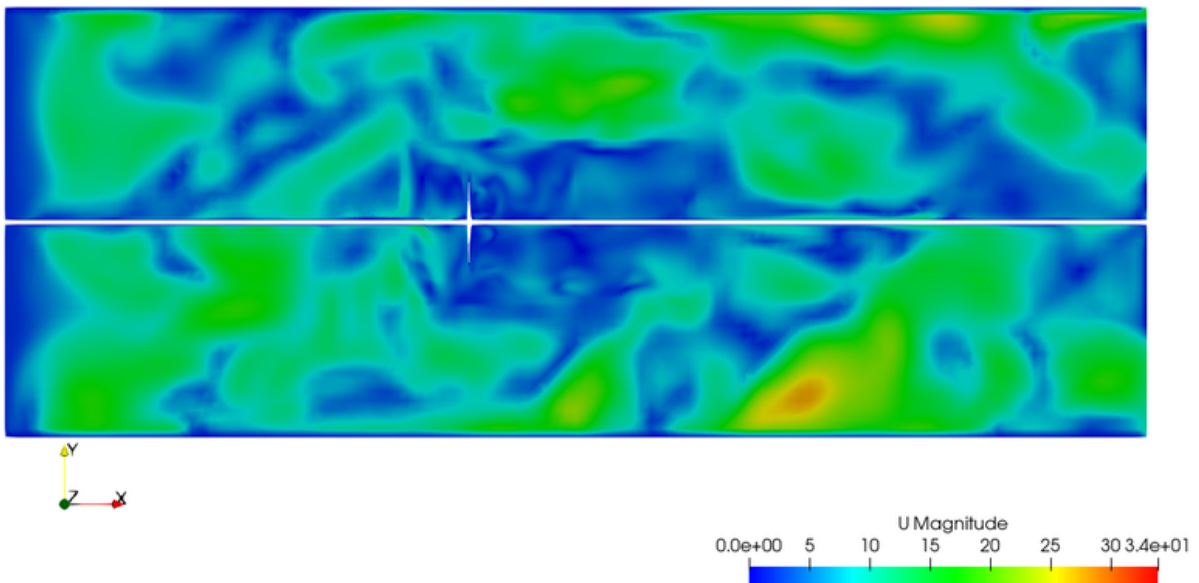
Izrada mreže kontrarotirajućih propelera imala je više pristupa, koji na kraju nisu rezultirali zadovoljavajućim rezultatima, a neki od pristupa prikazani su idućim slikama.



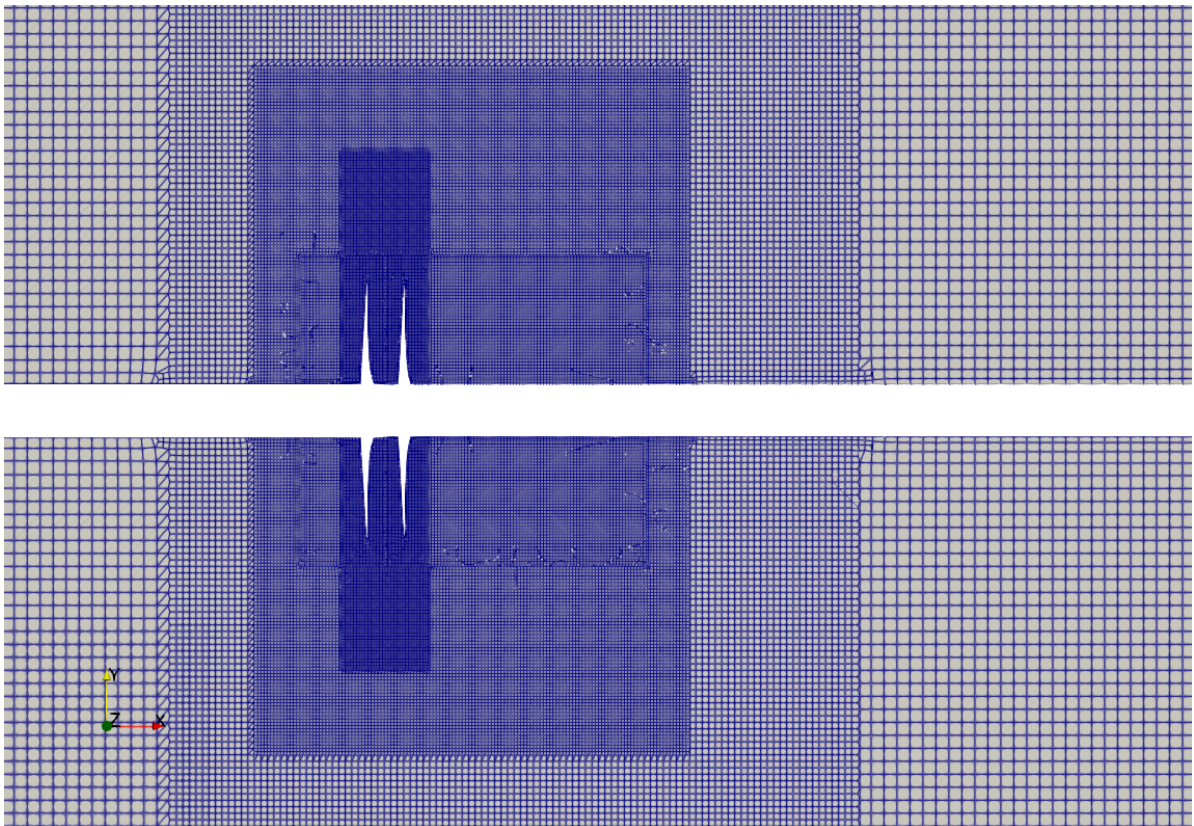
Slika A.1: Mreža A; sitni KV uz propelere s naglom promjenom veličine u vanjskoj domeni.



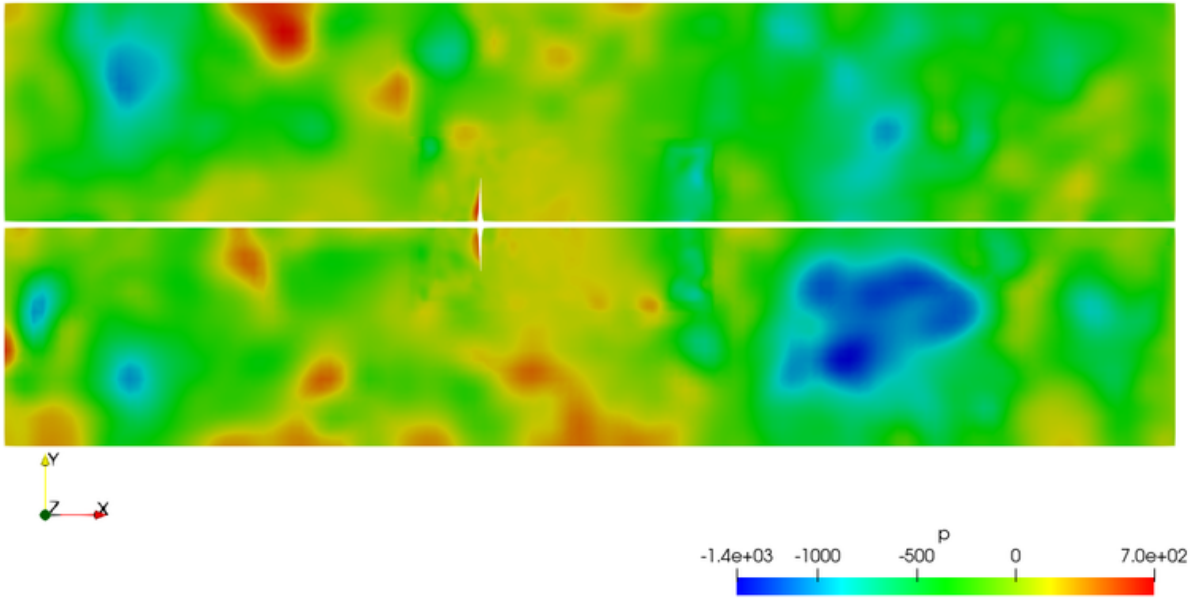
Slika A.2: Mreža A; rezultat polja tlaka.



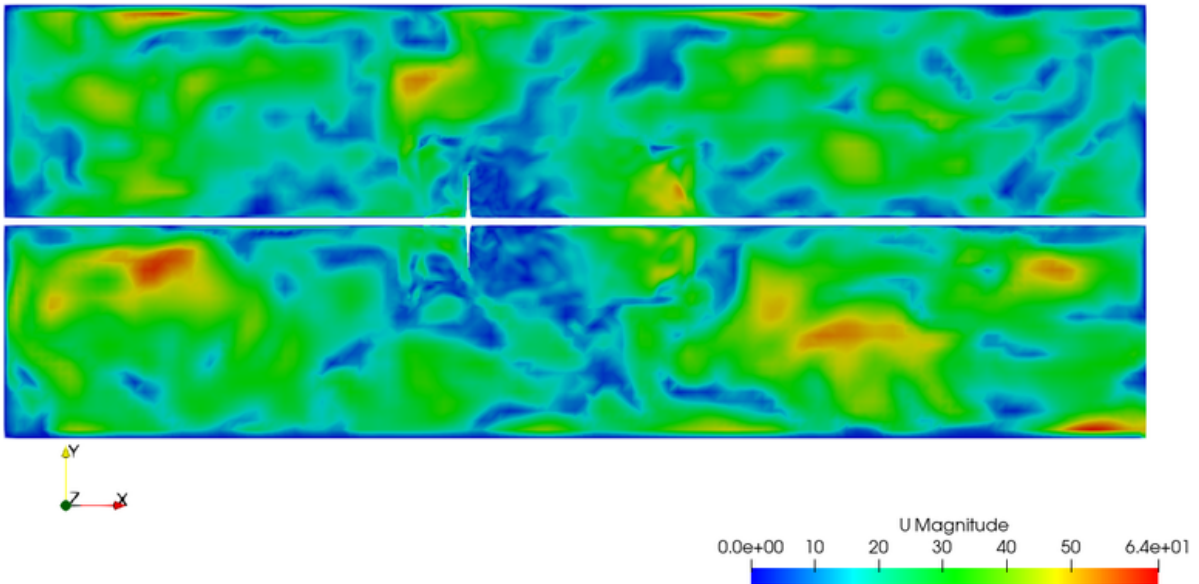
Slika A.3: Mreža A; rezultat polja brzine.



Slika A.4: Mreža B; različite veličine KV na mjestu spajanja domena propelera s vanjskom domenom.



Slika A.5: Mreža B; rezultat polja tlaka.



Slika A.6: Mreža B; rezultat polja brzine.

# B | Postavke rotirajuće rešetke

Prilog B prikazuje postavke koje se odnose na zadavanje rotirajuće mreže kontrolnim volumenima.

## B.1. Hidromlaznica

Datoteka `dynamicMeshDict` nalazi se unutar *constant* dokumenta, a koristi se za zadavanje postavki pomične rešetke za odabranu zonu ćelija rotora hidromlaznice.

```
hbDynamicFvMesh          singleStageDynamicHbMesh ;

singleStageDynamicHbMeshCoeffs
{
    coordinateSystem
    {
        type          cylindrical ;
        origin        ( 0 0 0 );
        axis          (-1 0 0 );
        direction     ( 0 1 0 );
        // Note: coordinate system must be in radians.
        degrees       false ;
    }

    movingCellZoneName rotor ;

    slider
    {
        moving        ( OUTLET_ROTOR );
        static        ( INLET_STATOR );
    }
}
```

```
writeAllMeshes true;  
  
nonRotatingPatches ( INLET_ROTOR SHROUD1 SHROUD2 );  
}
```

Datoteka `harmonicBalanceDict` nalazi se unutar *system* dokumenta, a koristi se za zadavanje broja harmonika  $n$  i frekvencije  $f$  korištenih u simulaciji hidromlaznice.

```
// Number of harmonics in the harmonic balance simulation  
numberOfHarmonics 1;  
frequency 1;  
  
// Is the frequency given in Herz or in rad/s  
inHerz yes;  
  
// Turbomachinery keywords  
numberOfBlades 4;  
rpm 720;  
  
useBladePassingFrequency false;
```



## B.2. Kontrarotirajući propeleri

Datoteka `dynamicMeshDict` nalazi se unutar *constant* dokumenta, a koristi se za zadavanje postavki pomične rešetke za odabranu zonu ćelija rotora propelera.

```
hbDynamicFvMesh          multiStageDynamicHbMesh;

multiStageDynamicHbMeshCoeffs
{
    axisOfRotation ((1 0 0) (-1 0 0));
    centreOfRotation (0 0 0);

    cellZoneNames (cellRegion1 cellRegion2);
    writeAllMeshes true;

    nonRotatingPatches ();
}
```

Datoteka `harmonicBalanceDict` nalazi se unutar *system* dokumenta, a koristi se za zadavanje broja harmonika  $n$  i frekvencije  $f$  korištenih u simulaciji propelera.

```
// Number of harmonics in the harmonic balance simulation
numberOfHarmonics 1;
frequency 1;

// Is the frequency given in Herz or in rad/s
inHerz yes;

// Turbomachinery keywords
numberOfBlades 4;
rpm 720;

useBladePassingFrequency false;
```

# Literatura

- [1] L. Balatinec. *An Overview of Rotor-Stator Interfaces for Computational Fluid Dynamics Simulations in Turbomachinery*. Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture, University of Zagreb, 2019.
- [2] Maria Teresa Caccamo and Salvatore magazù. Variable length pendulum analyzed by a comparative fourier and wavelet approach. *Revista Mexicana de Fisica E*, 2018.
- [3] H. Jasak. Course materials for Numerical Methods in Continuum Mechanics Method, February 2018.
- [4] H. G. Weller, G. Tabor, H. Jasak, and C. Fureby. A tensorial approach to computational continuum mechanics using object-oriented techniques. *Computers in Physics*, 12(6):620–631, 1998.
- [5] Gregor Cvijetic. *Transient Instabilities in Turbomachinery*. PhD thesis, University of Zagreb, 2019.
- [6] Vuko Vukcevic. *Numerical Modelling of Coupled Potential and Viscous Flow for Marine Applications*. PhD thesis, University of Zagreb, 2019.
- [7] Lucia Leon Calderon. Numerical simulations of the tip leakage vortex in a waterjet pump using a reynolds averaged approach. Master’s thesis, 2018.



- [8] Seth Schroeder, Sung-Eun Kim, and Hrvoje Jasak. Toward predicting performance of an axial flow waterjet including the effects of cavitation and thrust breakdown. 01 2009.
- [9] B.E. Launder and D.B. Spalding. The numerical computation of turbulent flows. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1974.
- [10] Alessandro Capone, Fabio Di Felice, and Francisco Alves Pereira. On the flow field induced by two counter-rotating propellers at varying load conditions. *Ocean Engineering*, 221, 2021.
- [11] M. L. Miller. *Experimental Determination of Unsteady Forces on Contrarotating Propellers in Uniform Flow*. David W. Taylor Naval Ship R & D Center, Bethesda Md., 1976.
- [12] M. L. Miller. *Experimental Determination of Unsteady Forces on Contrarotating Propellers for Application to Torpedoes*. David W. Taylor Naval Ship R & D Center, Bethesda Md., 1981.
- [13] Franjo Juretić. *cfMesh User's Guide*. Creative Fields, Ltd., 2011.
- [14] David C. Wilcox. *Turbulence Modeling for CFD*. DCW Industries, 1993.