

# Matematički model ćelije aktivnog metamaterijala za nerekipročnu transmisiju zvuka uz upotrebu povratnih veza po pomaku i brzini vibriranja

---

Suton, Dina

Undergraduate thesis / Završni rad

2022

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:235:491492>

*Rights / Prava:* [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom](#).

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-02-15**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# ZAVRŠNI RAD

**Dina Suton**

Zagreb, 2022.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# ZAVRŠNI RAD

Mentori:

izv. prof. dr. sc. Neven Alujević, dipl. ing.

Student:

Dina Suton

Zagreb, 2022.

Izjavljujem da sam ovaj rad izradio samostalno koristeći znanja stečena tijekom studija i navedenu literaturu.

Prvenstveno se zahvaljujem mentoru izv. prof. dr. sc. Nevenu Alujeviću na strpljenju, pomoći i znanju koje mi je prenio u cijelom procesu izrade ovog rada. Potpomogla je i Hrvatska zaklada za znanost projektom HRZZ-IP-2019-04-5402 (DARS).

Zahvaljujem se i svim svojim prijateljima, obitelji i roditeljima. Prijatelji su moj studij učinili ugodnijim, a roditelji lagodnijim.

Dina Suton



Sveučilište u Zagrebu Fakultet strojarstva i brodogradnje	
Datum	Prilog
Klasa: 602 – 04 / 22 – 6 / 1	
Ur.broj: 15 - 1703 - 22 -	

## ZAVRŠNI ZADATAK

Student: **Dina Suton** JMBAG: **0035211731**

Naslov rada na hrvatskom jeziku: **Matematički model ćelije aktivnog metamaterijala za neregipročnu transmisiju zvuka uz upotrebu povratnih veza po pomaku i brzini vibriranja**

Naslov rada na engleskom jeziku: **Mathematical model of an active metamaterial cell for non-reciprocal sound transmission using displacement and velocity feedback loops**

### Opis zadatka:

U radu je potrebno analizirati i diskutirati rezultate dobivene pojednostavljenim diskretnim modelom jedne ćelije aktivnog metamaterijala uz upotrebu povratnih veza po pomaku i po brzini vibriranja. Potrebno je pretpostaviti ćeliju aktivnog metamaterijala geometrije pogodna za 3D ispis jednostavnim uređajem: cijev pravokutnog poprečnog presjeka koja je naizmjenice isprekidana dvostrukim membranama. Treba izvesti jednadžbe gibanja i odgovarajuće prijenosne funkcije za diskretni linearni dinamički model za cijev s dva para membrana i dva aktuatora pretpostavljajući da se dinamika svake od membrana i pravokutnih akustičkih šupljina između njih može aproksimirati njihovom prvom formom vibriranja tj. sustavom masa-opruga za membranu, a opruga-prigušivač za akustičku šupljinu. Tako dobiveni model s četiri stupnja slobode treba analizirati i diskutirati s obzirom na stabilnost para povratnih veza koristeći Routh-Hurwitzov kriterij stabilnosti. Treba odrediti parametre pasivnog sustava koji jamče stabilnost aktivnog sustava s dvije povratne veze. Nadalje, za stabilne sustave treba pokazati i kvantificirati gubitak akustičke recipročnosti u širokom spektru frekvencija uspoređujući odgovarajuće parove od ukupno 16 izvedenih prijenosnih funkcija između sila i brzina vibriranja svake od četiri mase u diskretnom mehaničkom sustavu.

U radu je potrebno navesti korištenu literaturu i eventualno dobivenu pomoć.

Zadatak zadan:

30. 11. 2021.

Zadatak zadao:

Doc. dr. sc. Neven Alujević

*Neven Alujević*

Datum predaje rada:

1. rok: 24. 2. 2022.  
2. rok (izvanredni): 6. 7. 2022.  
3. rok: 22. 9. 2022.

Predviđeni datumi obrane:

1. rok: 28. 2. – 4. 3. 2022.  
2. rok (izvanredni): 8. 7. 2022.  
3. rok: 26. 9. – 30. 9. 2022.

Predsjednik Povjerenstva:

*V Soldo*  
Prof. dr. sc. Vladimir Soldo

# SADRŽAJ

SADRŽAJ .....	I
POPIS SLIKA .....	II
POPIS TABLICA.....	III
POPIS OZNAKA .....	IV
SAŽETAK.....	VI
SUMMARY .....	VII
1. UVOD.....	1
2. MATEMATIČKI MODEL.....	4
2.1. Uvođenje bezdimenzijskih parametara .....	7
2.2. Bezdimenzijski oblik karakterističnog polinoma.....	9
3. STABILNOST SUSTAVA .....	10
3.1. Routh-Hurwitzov kriterij stabilnosti .....	10
3.2. Determinante karakterističnog polinoma $D_1$ .....	11
3.3. Determinante karakterističnog polinoma $D_2$ .....	12
3.4. Utjecaj pojačanja proporcionalnog regulatora na stabilnost sustava .....	13
3.5. Utjecaj pojačanja integralnog regulatora na stabilnost sustava .....	15
4. PERFORMANSE .....	17
5. ZAKLJUČAK.....	20
LITERATURA.....	21

## POPIS SLIKA

Slika 1 Shema jedne ćelije aktivnog akustičnog metamaterijala sa sensorima i aktuatorima ...	4
Slika 2 Model s diskretnim parametrima jedne ćelije aktivnog akustičkog metamaterijala .....	5
Slika 3 Determinante polinoma $D_1$ u ovisnosti o bezdimenzijskom pojačanju proporcionalnog člana regulatora, $\lambda$ .....	14
Slika 4 Determinante polinoma $D_2$ u ovisnosti o bezdimenzijskom pojačanju proporcionalnog člana regulatora, $\lambda$ .....	14
Slika 5 Determinanta $\Delta_{1,4}$ u ovisnosti o bezdimenzijskom pojačanju proporcionalnog člana regulatora ( $\lambda$ ) za različite iznose bezdimenzijskog pojačanja integralnog člana regulatora ( $\kappa$ ).....	15
Slika 6 Ovisnost bezdimenzijskog pojačanja integralnog člana regulatora ( $\kappa$ ) o bezdimenzijskom pojačanju proporcionalnog člana regulatora ( $\lambda$ ) .....	16
Slika 7 Utjecaj vrijednosti bezdimenzijskog pojačanja proporcionalnog člana regulatora ( $\lambda$ ) na prijenosnu funkciju $Y_{4,1}$ .....	17
Slika 8 Utjecaj vrijednosti bezdimenzijskog pojačanja proporcionalnog člana regulatora ( $\lambda$ ) na recipročnost sustava.....	18
Slika 9 Utjecaj vrijednosti bezdimenzijskog pojačanja integralnog člana regulatora ( $\kappa$ ) na prijenosnu funkciju $Y_{4,1}$ .....	18
Slika 10 Utjecaj vrijednosti bezdimenzijskog pojačanja integralnog člana regulatora ( $\kappa$ ) na recipročnost sustava .....	19

---

## **POPIS TABLICA**

Tablica 1 Vrijednosti bezdimenzijskih parametara korištene za prikaz determinanti ..... 13

Tablica 2 Vrijednosti bezdimenzijskih parametara korištene za prikaz prijenosnih funkcija.. 17



---

**POPIS OZNAKA**

Oznaka	Jedinica	Opis
$a_i$	-	koeficijenti polinoma
$a_{i,j}$	-	koeficijenti polinoma $D_i$
$B_{i,j}$	-	brojnik bezdimenzijskih prijenosnih funkcija
$c_{a12}$	Ns/m	koeficijent viskoznog prigušenja
<b>C</b>	Ns/m	matrica prigušenja
$D$	-	karakteristični polinom prijenosnih funkcija 8. reda
$D_i$	-	polinomi 4. reda čijim se množenjem dobiva polinom $D$
<b>F</b>	N	matrica sila
$\hat{\mathbf{F}}$	N	amplituda uzbudne sile
$F_i(t)$	N	uzbudna sila
$f$	N	sila aktuatora
$g_i$	N/m	pojačanje integralnog regulatora
$g_p$	Ns/m	pojačanje proporcionalnog regulatora
<b>H</b>	-	Hurwitzova matrica
<b>H<sub>i</sub></b>	-	Hurwitzova matrica za polinome $D_i$
<b>K</b>	N/m	matrica krutosti
$k_i$	N/m	krutost membrane mase $i$
$k_{aij}$	N/m	krutost zraka u prostoru između membrana
<b>M</b>	kg	matrica masa
$m_i$	kg	masa membrane
<b>S</b>	N/m	matrica dinamičke krutosti
$S$	-	bezdimenzijska Laplaceova varijabla
$s$	1/s	Laplaceova varijabla
<b>x</b>	m	vektor pomaka

$\dot{\mathbf{x}}$	m/s	vektor brzina
$\ddot{\mathbf{x}}$	m/s <sup>2</sup>	vektor akceleracija
$\hat{\mathbf{x}}$	m	amplituda odziva
$x_i(t)$	m	pomak
$\dot{x}_i(t)$	m/s	brzina
$\ddot{x}_i(t)$	m/s <sup>2</sup>	akceleracija
$\mathbf{Y}$	m/N	matrica prijenosnih funkcija
$Y_{i,j}$	m/N	prijenosna funkcija
$\alpha$	-	bezdimenzijski parametar koji predstavlja kvadrirani omjer prirodnih frekvencija
$\beta$	-	bezdimenzijski parametar koji predstavlja kvadrirani omjer prirodnih frekvencija
$\Delta_{i,j}$	-	Determinante podmatrice dobivenih iz Hurwitzove matrice
$\delta$	-	bezdimenzijski parametar koji predstavlja kvadrirani omjer prirodnih frekvencija
$\eta$	-	bezdimenzijski parametar koji predstavlja omjer prigušenja i kritičnog prigušenja
$\kappa$	-	bezdimenzijski parametar koji predstavlja kvadrirani omjer prirodnih frekvencija
$\lambda$	-	bezdimenzijski parametar koji predstavlja omjer pojačanja $g_p$ i prigušenja
$\mu$	-	omjer masa
$Y_{i,j}$	-	bezdimenzijska prijenosna funkcija
$\Omega$	-	bezdimenzijski parametar frekvecije
$\Omega_i$	-	bezdimenzijski parametar prirodne frekvecije
$\Omega_{aij}$	-	bezdimenzijski parametar prirodne frekvecije
$\omega$	1/s	kružna frekvencija

---

## SAŽETAK

U ovom radu analizirani su i diskutirani rezultati dobiveni pojednostavljenim diskretnim modelom jedne ćelije aktivnog metamaterijala uz upotrebu povratnih veza po pomaku i po brzini vibriranja. Pretpostavljena je ćelija aktivnog metamaterijala geometrije pogodne za 3D ispis jednostavnim uređajem: cijev pravokutnog poprečnog presjeka periodično isprekidana dvostrukim membranama. Pretpostavljeno je da se dinamika svake od membrana i pravokutnih akustičnih šupljina između njih može aproksimirati njihovom prvom formom vibriranja tj sustavom masa-opruga za membranu, a opruga-prigušivač za akustičku šupljinu. Izvedene su jednadžbe gibanja i odgovarajuće prijenosne funkcije za diskretni linearni dinamički model cijevi s dva para membrana i dvije povratne veze. Provedena je analiza stabilnosti tako dobivenog aktivnog sustava s četiri stupnja slobode s dvije povratne veze. Korišten je Routh-Hurwitz kriterij stabilnosti. Određeni su parametri pasivnog sustava koji jamče stabilnost aktivnog sustava. Nadalje, za stabilne sustave pokazan je i kvantificiran gubitak recipročnosti u širokom spektru frekvencija uspoređivanjem odgovarajućeg para prijenosnih funkcija između sila i brzina vibriranja u diskretnom mehaničkom sustavu.

Ključne riječi: *Akustika, Zvuk, Vibracije, Akustički metamaterijali, Aktivni akustički metamaterijali, Gubitak recipročnosti*

---

## SUMMARY

In this thesis, the results obtained by a simplified discrete model of a single cell of active metamaterial with the use of both position and velocity feedbacks are analyzed and discussed. The geometry of the active metamaterial cell is suitable for 3D printing with a simple device is envisaged: a rectangular pipe periodically intermitted by a pair of membranes. It is assumed that the dynamics of each of the membranes and rectangular acoustic cavities between them can be approximated by their first vibration mode, i.e. a mass-spring system for the membrane and a spring-damper system for the acoustic cavity. The equations of motion and the corresponding transfer functions for the discrete linear dynamic model of a pipe with two pairs of membranes and two feedback loops are derived. The resulting four DOF (degree of freedom) model is analysed and discussed with respect to the stability of the two feedback loops using the Routh-Hurwitz stability criterion. Parameters of the passive system that guarantee the stability of the active system are determined. Furthermore, for stable systems, the loss of reciprocity in a broad band of frequencies has been quantified by comparing the corresponding pair of transfer functions between forces and vibration velocities in a discrete mechanical system.

*Key words: Acoustics, Sound, Vibration, Acoustic Metamaterials, Active Acoustic Metamaterials, Loss of Reciprocity*

## 1. UVOD

Princip recipročnosti nalaže da ako se točkama pobude i mjerenja u vibracijskom sustavu zamijene mjesta, iznos mjerene veličine ostaje nepromijenjen. Drugim riječima, funkcija frekvencijskog odziva dobivena između mjerene veličine i uzbude ostaje jednaka, neovisno o zamjeni njihovih mjesta. Recipročnost obično vrijedi za pasivne, linearne i vremenski nepromjenjive sustave. Često je korisno svojstvo u modalnoj analizi [1] pri dobivanju prijenosnih funkcija korištenih za ocjenu vibroakustičke kvalitete u automobilske industriji [2] te za određivanje gustoće i modula stlačivosti tla iz izmjerenih podataka kod inverznih seizmičkih problema [3].

Također može biti korisno i zaobilaženje principa recipročnosti, na primjer, želi li se postići akustička izolacija odnosno zaštita dijela prostora omogućujući propuštanje valova u jednom smjeru uz blokadu valova u suprotnom smjeru [4]. Dosad su provedena brojna istraživanja u raznim područjima fizike s ciljem razvoja novih materijala, uređaja ili konstrukcija za koje ne vrijedi princip recipročnosti [4,5,6]. U području vibroakustike zanimljive primjene su: nevidljivi akustični senzori [7], uređaji za akustičko prikrivanje [8], izolacija vibracija [9] ili „full-duplex“ zvučna komunikacija kod koje se akustični valovi mogu odašiljati i primati pomoću jednog pretvarača na istom frekvencijskom kanalu [10,11].

Do sada je razmatrano nekoliko različitih pristupa da bi se inducirao nerekipročan odziv u strukturnim i akustičnim medijima. Uglavnom su razvijani u nastojanju da se prošire fizikalne granice postojećih parametara akustičnih i strukturnih metamaterijala [11,12], koje nameće njihova pasivnost, linearnost ili vremenska nepromjenjivost. Funkcije frekvencijskog odziva pasivnih, linearnih i vremenski nepromjenjivih medija ograničene su Kramers-Kronigovim relacijama. Kramers-Kronigove relacije posljedica su kauzalnosti i povezuju realne i imaginarne dijelove funkcija frekvencijskih odziva [13]. S druge strane, pasivnost u vibroakustici usko je povezana s prigušnim karakteristikama medija te s povezanim gubitkom energije. Prigušenje uzrokuje slabljenje valova s relativno visokim valnim brojem. Na primjer, valovi kraći od karakteristične debljine rezonantnog metamaterijala ili, ustvari, bilo kakve konstrukcije s uključinama kao što su porozne apsorbirajuće pjene, značajno slabe. Također, korisna svojstva pasivnih rezonantnih metamaterijala često su ograničena na određeni frekvencijski pojas. Širina tih frekvencijskih pojaseva mijenja se ovisno o veličini uključina u

metamaterijalu, [11]. Iz svih ovih razloga, ulažu se sve veći napori u istraživanje aktivnih akustičnih metamaterijala, pomoću kojih bi se potencijalno mogli savladati prethodno navedeni izazovi i povećati efikasnost metamaterijala. Čelije aktivnih metamaterijala neuobičajenih svojstava razmatrane su u nekoliko različitih pristupa razvoju aktivnih konstrukcija [15, 16, 17]. Pojam „aktivno“ koristi se kako bi se ukazalo na čelije unutar metamaterijala koje upadnom valu mogu dati energiju odnosno primijeniti povratne veze u vibroakustičkom sustavu na način da se njime može upravljati pomoću vanjske komande [11].

Razvijajući aktivne metamaterijale za postizanje jednosmjerne transmisije zvuka, Fleury et al. [7] predložili su aktivnu čeliju metamaterijala koja potpuno propušta tonalni zvuk (zvuk na jednoj frekvenciji) kad propagira s lijeva na desno, a gotovo ga potpuno reflektira kad propagira u suprotnom smjeru. Da bi se to postiglo, par zvučnika postavljen je u 1D akustičnom valovodu (cijevi pravokutnog poprečnog presjeka) na udaljenosti manjoj od valne duljine emitiranog zvuka. Lijevi, apsorbirajući zvučnik, prespojen je pasivnim električnim krugom, dok je desni (laserski) zvučnik prespojen pažljivo ugođenim ne-Fosterskim električnim krugom (krugom negativne električne impedancije), [18]. Na taj način je dobiven aktivan sustav bez korištenja senzora ili povratnih veza. Autori su time jasno demonstrirali akustički senzor koji postaje u potpunosti „nevidljiv“ kad je ozračen akustičkim valom frekvencije 250 Hz. Ova čelija aktivnog metamaterijala temelji se na konceptu PT (engl. parity-time), [19], simetrije s uravnoteženim pojačanjima i gubitcima [20]. Ravnoteža gubitaka i pojačanja zapravo se odnosi na omjer između ukupnog gubitka snage u pasivnim disipatorima unutar same konstrukcije (kao što su strukturna prigušenja) ili snage apsorbirane od strane aktivnih elemenata sustava, te snage unesene u sustav aktivnim elementima sustava, u nedostatku vanjskih uzbuđa. Upitno je mogu li se takvi aktivni sustavi bez globalnih gubitaka izraditi uz standardne amplitudne i fazne rezerve koji su tradicionalno nužne kako bi osigurali stabilnost i operativnu robusnost aktivnih regulacijskih sustava u praksi [21]. Za ilustraciju, u većini suvremenih radova na automatskoj regulaciji zvuka i vibracija koriste se napredne strategije regulacije kao što su tehnike postavljanja polova/nula [22, 23, 24] ili namjenskih kompenzacijskih krugova [25], za postizanje tzv. hiperstabilnosti [26].

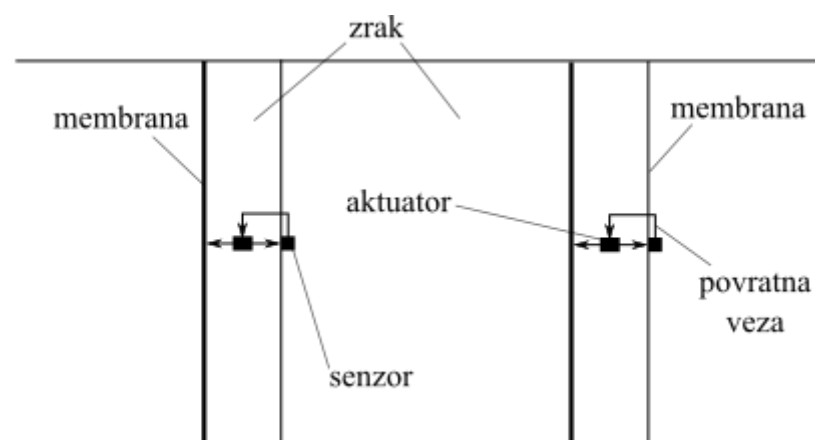
Nasuprot pristupu opisanom u referenci [7], Tan et al., [10], predložili su upravljačku (engl. „feed-forward“) strategiju kako bi se postigla jednosmjerna transmisija, odnosno jednosmjerna apsorpcija zvuka u 1D valovodu. Ova strategija koristi dva točkasta regulacijska akustička izvora (akustičke monopole) koji minimiziraju reflektirane i transmitirane valove pa tako

maksimiziraju apsorpciju, odnosno jedan točkasti regulacijski izvor koji minimizira samo transmitirane valove. U oba slučaja korišten je adaptivni algoritam (FxLMS), [27], za konvergenciju parametara regulatora u optimalni vektor upravljačkih signala. Dobiveni simulacijski rezultati sugeriraju gotovo savršenu jednosmjernu transmisiju odnosno apsorpciju zvuka u širokom frekvencijskom pojasu između 400 Hz i 1600 Hz.

U ovom radu, predložen je način za induciranje efekta gubitka recipročnosti pri transmisiji vibracija u jednoj aktivnoj konstrukciji. Pokazano je da se efekt gubitka recipročnosti može postići korištenjem povratne veze po brzini vibracija za pogon aktuatora sile s nekolociranim osjetnikom brzine vibriranja. Na ovaj način nastaje razlika u amplitudi para prijenosnih funkcija pokretljivosti (engl. „mobility“) koji opisuju transmisiju vibracija u dva suprotna smjera, a koje bi inače kod pasivnog sustava bile jednake. Ova amplitudna razlika povećava se s porastom frekvencije. Pri nižim frekvencijama efekt gubitka recipročnosti prilično je malen i pada u nulu u statičkom slučaju. S ciljem da se gubitak recipročnosti ostvari i pri niskim frekvencijama, kao signal regulacijske pogreške upotrijebljena je ne samo brzina vibriranja nego i vibracijski pomak. Time je u stvari sintetiziran proporcionalno-integralni (PI) regulator, smatramo li brzinu vibracija reguliranom varijablom. Obzirom na to da aktuator sile u praksi zahtijeva reakcijsku podlogu, odnosno aktuator se odupire o konstrukciju koja je istovremeno i regulacijski objekt, a samo jedan od njegovih mehaničkih terminala je opremljen senzorom, ovakvim pristupom nastaje sustav s nekolociranim parovima osjetnika i aktuatora. Samim time, stabilnost aktivnog sustava nije osigurana. Zato je u ovom radu poseban naglasak stavljen na analizu stabilnosti regulacijskog sustava. Određeni su odnosi proporcionalnog i integralnog pojačanja u povratnim vezama koji su potrebni za održavanje stabilnosti sustava. Pokazano je kako gubitak recipročnosti sada može biti induciran i na niskim frekvencijama. Konačno, pokazano je kako su spektri funkcije pokretljivosti u jednom i u drugom smjeru međusobno vrlo sličnog oblika ali vrlo različitih amplituda, što i jest cilj. Stoga predložena aktivna konstrukcija blokira prijenos vibracija u jednom smjeru ali ga pospješuje u suprotnom i to u širokom pojasu frekvencija.

## 2. MATEMATIČKI MODEL

U ovom poglavlju izvodi se matematički model za jednu ćeliju aktivnog akustičnog metamaterijala. Ćelija je zapravo cijev pravokutnog poprečnog presjeka ispunjena akustičkim medijem. U ovom radu pretpostavljeno je da je taj medij zrak. U cijevi su periodično raspoređeni parovi membrana između kojih je aktuator koji se povratnom vezom pogoni pojačanim signalom sa senzora koji mjeri brzinu vibriranja i vibracijski pomak jedne od membrana. Ovakva ne-kolocirana veza otvara mogućnost postizanja gubitka recipročnosti [9]. Shema jedinične ćelije prikazana je slikom:

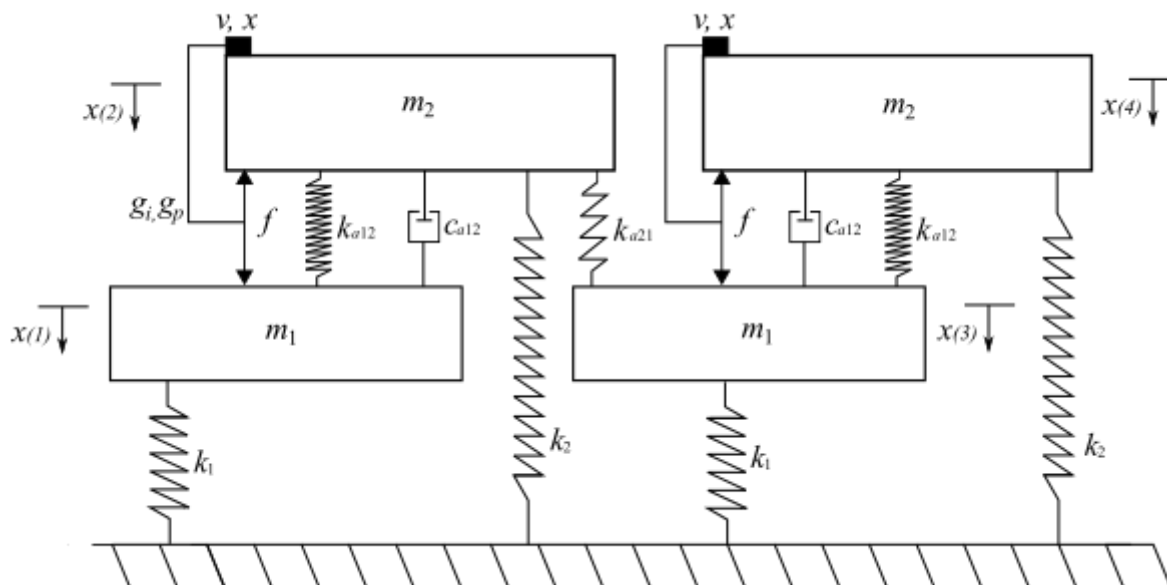


Slika 1 Shema jedne ćelije aktivnog akustičnog metamaterijala sa senzorima i aktuatorima

Ovu ćeliju prikazat ćemo kao mehanički spregnuti diskretni sustav masa, prigušivača i idealiziranih parova aktuatora i senzora uz neke pretpostavke. Pretpostavlja se da je stjenka cijevi idealno kruta te da se svaka membrana može aproksimirati pločom pravokutnog poprečnog presjeka jednostavno oslonjenih rubova, a u obzir se uzima samo njena prva forma vibriranja pa ju možemo modelirati kao sustav mase i opruge. Također u obzir uzimamo samo nultu formu vibriranja akustične šupljine koja zapravo predstavlja uniformni porast odnosno pad akustičkog tlaka unutar cijele šupljine pa istu možemo modelirati kao oprugu. Gubitci zbog prigušenja koje nastaje u sloju zraka u području malih zračnosti između mehaničkih dijelova aktuatora (magneta i zavojnice) prilikom njihovog pokretanja modelirani su kao viskozni prigušivači. Mase  $m_1$  i  $m_2$  predstavljaju modalne mase prve i druge membrane (Slika 1.). Opruge krutosti  $k_1$  i  $k_2$  predstavljaju modalne krutosti membrana. Koeficijent prigušenja  $c_{a12}$  predstavlja pojavu prigušenja između membrana koja nastaju zbog strujanja zraka između magneta i zavojnice aktuatora. Krutosti  $k_{a12}$  i  $k_{a21}$  zapravo su krutosti zraka između membrana. Krutost  $k_{a12}$  je krutost zraka između jednog para membrana, a krutost  $k_{a21}$  između membrana masa  $m_2$



i  $m_1$  (gledano s lijeva na desno). Sila aktuatora je  $f$ . Matematički model prikazan je na slici:



Slika 2 Model s diskretnim parametrima jedne ćelije aktivnog akustičkog metamaterijala

Zakon povratne veze može se napisati kao veza između regulacijske sile aktuatora i veličina ( $x$  i  $v$ ) mjerene senzorom

$$f = -(g_i + g_p)\dot{x}_2 \quad (1)$$

Jednadžbe gibanja dobivaju se oslobađanjem veza svake od masa. Nakon sređivanja dobiva se:

$$F_1(t) = m_1\ddot{x}_1 + \dot{x}_1c_{a12} + x_1(k_1 + k_{a12}) - \dot{x}_2(c_{a12} + g_p) - (k_{a12} + g_i)x_2 \quad (2)$$

$$F_2(t) = m_2\ddot{x}_2 + \dot{x}_2(c_{a12} + g_p) + x_2(k_2 + k_{a21} + k_{a12} + g_i) - \dot{x}_1c_{a12} - k_{a12}x_1 - k_{a21}x_3 \quad (3)$$

$$F_3(t) = m_1\ddot{x}_3 + \dot{x}_3c_{a12} + x_3(k_1 + k_{a21} + k_{a12}) - \dot{x}_4(c_{a12} + g_p) - (k_{a12} + g_i)x_4 - k_{a21}x_2 \quad (4)$$

$$F_4(t) = m_2\ddot{x}_4 + \dot{x}_4(c_{a12} + g_p) + x_4(k_2 + k_{a12} + g_i) - \dot{x}_3c_{a12} - k_{a12}x_3 \quad (5)$$

U jednadžbama sile  $F_i(t)$  predstavljaju sile koje djeluju u  $i$ -tom stupnju slobode. U ovom radu analizirat će se samo dva slučaja: kada postoji pobuda sustava silom  $F_4(t)$  dok su ostale sile jednake nuli te kada je sustav pobuđen samo silom  $F_1(t)$ .

Jednadžbe od (2) do (5) mogu se zapisati matrično

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{F} \quad (6)$$

gdje su:  $\mathbf{M}$  matrica masa,  $\mathbf{C}$  matrica prigušenja,  $\mathbf{K}$  matrica krutosti,  $\mathbf{x}$ ,  $\dot{\mathbf{x}}$  i  $\ddot{\mathbf{x}}$  su redom vektori pomaka, brzine i akceleracije, a  $\mathbf{F}$  je vektor pobude. Možemo ih prikazati kao

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_2 \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{a12} & -c_{a12} - g_p & 0 & 0 \\ -c_{a12} & c_{a12} + g_p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{a12} & -c_{a12} - g_p \\ 0 & 0 & -c_{a12} & c_{a12} + g_p \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 + k_{a12} & -k_{a12} - g_i & 0 & 0 \\ -k_{a12} & k_2 + k_{a12} + k_{a21} + g_i & -k_{a21} & 0 \\ 0 & -k_{a21} & k_1 + k_{a12} + k_{a21} + g_i & -k_{a12} \\ 0 & 0 & -k_{a12} - g_i & k_2 + k_{a12} \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix}, \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \end{bmatrix}, \ddot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \\ \ddot{x}_3(t) \\ \ddot{x}_4(t) \end{bmatrix}, \mathbf{F} = \begin{bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \\ F_3(t) \\ F_4(t) \end{bmatrix} \quad (10, 11, 12, 13)$$

Matrica prigušenja  $\mathbf{C}$  i matrica krutosti  $\mathbf{K}$  su asimetrične obzirom na glavnu dijagonalu. Uzrok tome leži u ne-kolociranom postavu senzora i aktuatora. Pretpostavi li se jednostavna harmonijska uzbuda i odziv stacionarnog stanja u obliku

$$\mathbf{F}(t) = \hat{\mathbf{F}}e^{j\omega t}, \mathbf{x}(t) = \hat{\mathbf{x}}e^{j\omega t} \quad (14,15)$$

jednadžba (6) postaje

$$\mathbf{S}(j\omega)\mathbf{x}(j\omega) = \mathbf{F}(j\omega) \quad (16)$$

gdje je  $\mathbf{S}(j\omega)$  matrica dinamičke krutosti

$$\mathbf{S}(j\omega) = -\omega^2\mathbf{M} + j\omega\mathbf{C} + \mathbf{K} \quad (17)$$

Pomnoži li se jednačba (16) s inverzom matrice dinamičke krutosti  $\mathbf{S}(j\omega)$  dobiva se rješenje jednačbe

$$\mathbf{x}(j\omega) = \mathbf{S}^{-1}(j\omega)\mathbf{F}(j\omega) \quad (18)$$

Brzine se dobivaju deriviranjem po vremenu jednačbe (18)

$$\dot{\mathbf{x}}(j\omega) = \mathbf{Y}(j\omega)\mathbf{F}(j\omega) \quad (19)$$

U matrici  $\mathbf{Y}(j\omega)$  dimenzija  $4 \times 4$ , za koju vrijedi  $\mathbf{Y}(j\omega) = j\omega\mathbf{S}^{-1}(j\omega)$ , svaki od članova predstavlja prijenosnu funkciju između brzina i sila. Član matrice  $Y_{i,j}$  predstavlja prijenosnu funkciju brzine  $\dot{x}_i(t)$  kao posljedicu sile koja djeluje na  $j$ -tu masu. Matrica  $\mathbf{Y}(j\omega)$  je dakle popunjena kako slijedi:

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} Y_{1,1} & Y_{1,2} & Y_{1,3} & Y_{1,4} \\ Y_{2,1} & Y_{2,2} & Y_{2,3} & Y_{2,4} \\ Y_{3,1} & Y_{3,2} & Y_{3,3} & Y_{3,4} \\ Y_{4,1} & Y_{4,2} & Y_{4,3} & Y_{4,4} \end{bmatrix} \quad (20)$$

Uz supstituciju  $s = j\omega$  dobiva se zapis u Laplaceovoj domeni. Treba primijetiti da poradi asimetričnosti matrice dinamičke krutosti sustava, njen inverz također nije simetrična matrica. Zbog toga u matrici pokretljivosti sustava (20) ne vrijedi  $Y_{i,j} = Y_{j,i}$  odnosno za aktivni sustav ne vrijedi princip dinamičke recipročnosti.

## 2.1. Uvođenje bezdimenzijskih parametara

Prijenosne funkcije moguće je prikazati u bezdimenzijskom obliku uvođenjem bezdimenzijskih parametara

$$\alpha = \left( \frac{\Omega_{a12}}{\Omega_1} \right)^2 \quad (21)$$

$$\beta = \left( \frac{\Omega_2}{\Omega_1} \right)^2 \quad (22)$$

$$\delta = \left( \frac{\Omega_{a21}}{\Omega_1} \right)^2 \quad (23)$$

$$\kappa = \left(\frac{\Omega_3}{\Omega_1}\right)^2 \quad (24)$$

$$\mu = \frac{m_2}{m_1} \quad (25)$$

$$\eta = \frac{c_{a12}}{2\sqrt{m_1 k_1}} \quad (26)$$

$$\Omega = \frac{\omega}{\Omega_1} \quad (27)$$

$$\lambda = \frac{g_p}{c_{a12}} \quad (28)$$

gdje su vlastite frekvencije

$$\Omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}} \quad (29)$$

$$\Omega_2 = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}} \quad (30)$$

$$\Omega_{a12} = \sqrt{\frac{k_{a12}}{m_2}} \quad (31)$$

$$\Omega_{a21} = \sqrt{\frac{k_{a21}}{m_2}} \quad (32)$$

$$\Omega_3 = \sqrt{\frac{g_i}{m_2}} \quad (33)$$

Uvrštavanjem gore navedenih bezdimenzijskih parametara u prijenosne funkcije  $Y_{i,j}$  dobiva se bezdimenzijska prijenosna funkcija  $\Upsilon_{i,j}$ . Bezdimenzijska prijenosna funkcija pomnožena iznosom mase  $m_1$  i vlastitom frekvencijom iste te mase  $\Omega_1$  jednaka je dimenzijskoj prijenosnoj funkciji pa slijedi veza

$$Y_{i,j}(S) = m_1 \Omega_1 \cdot \Upsilon_{i,j}(s) \quad (34)$$

gdje je  $S = j\Omega$ . Pretpostavka je da su  $m_1$  i  $\Omega_1$  konstantni. Svaka od prijenosnih funkcija može se prikazati preko tih konstanti jer su bezdimenzijski parametri izraženi preko istih ( $\alpha, \beta, \delta, \kappa, \mu, \eta, \Omega$ ).

## 2.2. Bezdimenzijski oblik karakterističnog polinoma

Karakteristični polinom prijenosne funkcije krije se u nazivniku prijenosnih funkcija. Taj nazivnik je isti u svim prijenosnim funkcijama analiziranog sustava te je jednak polinomu 8. reda koji se može prikazati kao umnožak dvaju polinoma 4. reda. U daljnjem izlaganju govorit će se o umnošku dvaju karakteristična polinoma 4. reda umjesto o jednom polinomu 8. reda. Karakteristični polinomi  $D_1$  i  $D_2$  uz supstituciju jednaki su

$$S = j\Omega \quad (35)$$

$$D = D_1 D_2 \quad (36)$$

$$D_1 = \left\{ \begin{array}{l} \mu S^4 + 2(\eta + \mu\eta + \eta\lambda)S^3 + \mu(\beta + 1 + \kappa + \alpha + \alpha\mu)S^2 \\ + 2\eta(1 + \beta\mu + \lambda)S + \mu(\beta\mu\alpha + \beta + \alpha + \kappa) \end{array} \right\} \quad (37)$$

$$D_2 = \left\{ \begin{array}{l} \mu S^4 + 2(\eta + \mu\eta + \eta\lambda)S^3 + \mu(\delta + \alpha + \kappa + \beta + \alpha\mu + \delta\mu + 1)S^2 \\ + 2\eta(\lambda + \delta\mu\lambda + 2\delta\mu + \beta\mu + 1)S \\ + \mu(\delta\mu\beta + \beta\mu\alpha + \delta\mu\kappa + 2\delta\mu\alpha + \alpha + \kappa + \delta + \beta) \end{array} \right\} \quad (38)$$

Prijenosne funkcije koje će se kasnije posebno promatrati su  $Y_{1,4}$  i  $Y_{4,1}$  mogu se prikazati kao

$$Y_{1,4} = \frac{B_{1,4}}{D} \quad (39)$$

$$Y_{4,1} = \frac{B_{4,1}}{D} \quad (40)$$

gdje su brojnici  $B_{1,4}$  i  $B_{4,1}$

$$B_{1,4} = S\delta 4\mu \left( \left( \frac{1}{2}\kappa + \frac{1}{2}\alpha \right) \mu + S\eta(1 + \lambda) \right)^2 \quad (41)$$

$$B_{4,1} = S\delta 4\mu \left( S\eta + \frac{1}{2}\alpha\mu \right)^2 \quad (42)$$

a nazivnik obje prijenosne funkcije karakteristični polinom (36).

### 3. STABILNOST SUSTAVA

Kako bi sustav bio stabilan svi realni dijelovi korijena karakterističnih polinoma moraju biti negativni. U ovom slučaju govori se o polinomu 8. reda koji se može prikazati kao umnožak dvaju polinoma 4. reda. Svaki od tih polinoma ima po 4 korijena te su ti korijeni ujedno i korijeni polinoma 8. reda. Budući da postoje izrazi za računanje korijena polinoma 4. reda u teoriji mogli bismo iste izračunati i direktno provjeriti stabilnost sustava. Taj postupak nije jednostavan i zahtjeva puno vremena. Za polinome reda višeg od 4 ne postoje analitički izrazi za dobivanje njihovih korijena pa se pojavila potreba za pronalaskom drugačijih metoda analiziranja stabilnosti sustava. Do jednog od rješenja došao je njemački matematičar Hurwitz koncem 19. stoljeća dokazavši da se o prirodi korijena polinoma oblika

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0 \quad (43)$$

može zaključivati na temelju koeficijenata  $a_0, \dots, a_n$  tog polinoma.

#### 3.1. Routh-Hurwitzov kriterij stabilnosti

Ovaj kriterij koristi se za određivanje stabilnosti linearnih sustava. Za zadovoljavanje Hurwitzovog kriterija moraju biti ispunjena dva nužna uvjeta kako bi se sa sigurnošću moglo tvrditi da je sustav stabilan. Prvi od tih uvjeta je da svi koeficijenti od  $a_0$  do  $a_n$  moraju biti istog predznaka te različiti od 0. Drugi je uvjet nešto složeniji. Potrebno je svih  $n$  koeficijenata složiti u kvadratnu matricu  $n \times n$  dimenzija po posebnim pravilima. Na glavnu dijagonalu upisuju se svi koeficijenti od  $a_1$  do  $a_n$ . U svakom redu desno od dijagonale indeks je za jedan manji od prethodnog, a lijevo od dijagonale za jedan veći. Mjesta na kojima ne postoji član sa većim odnosno manjim indeksom upisuje se nula. Poštivanjem tih pravila dobiva se matrica koeficijenata polinoma četvrtog stupnja

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ 0 & a_4 & a_3 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 \end{bmatrix} \quad (44)$$

u kojoj se mogu uočiti 4 podmatrice (isprekidane crte ilustriraju podjelu na te podmatrice). Ako su sve determinante tih podmatrica pozitivne i različite od nule ispunjen je i drugi uvjet te je sustav stabilan.

### 3.2. Determinante karakterističnog polinoma $D_1$

Primjene li se prethodno navedena pravila na karakteristični polinom  $D_1$  dobivaju se četiri determinante koje moraju biti veće od nule. Hurwitzova matrica je

$$\mathbf{H}_1 = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{0,1} & 0 & 0 \\ a_{3,1} & a_{2,1} & a_{1,1} & a_{0,1} \\ 0 & a_{4,1} & a_{3,1} & a_{2,1} \\ 0 & 0 & 0 & a_{4,1} \end{bmatrix} \quad (45)$$

gdje su koeficijenti:

$$a_{0,1} = \mu \quad (46)$$

$$a_{1,1} = 2\eta\lambda + 2\mu\eta + 2\eta \quad (47)$$

$$a_{2,1} = \alpha\mu + \kappa\mu + \alpha\mu^2 + \beta\mu + \mu \quad (48)$$

$$a_{3,1} = 2\beta\mu\eta + 2\eta + 2\eta\lambda \quad (49)$$

$$a_{4,1} = \beta\mu^2\alpha + \kappa\mu + \alpha\mu + \beta\mu \quad (50)$$

Sada se mogu izračunati sve četiri determinante koje su redom

$$\Delta_{1,1} = 2\eta(\lambda + \mu + 1) \quad (51)$$

$$\Delta_{2,1} = 2\mu\eta \left( \alpha\mu^2 + ((2 + \lambda)\alpha + 1 + \kappa)\mu + (\lambda + 1)(\alpha + \kappa + \beta) \right) \quad (52)$$

$$\Delta_{3,1} = 4\mu^2\eta^2(1 - \beta)(\lambda^2\alpha + (1 - \beta - \kappa + (1 + \mu)\alpha)\lambda + 1 - \beta - (\mu + 1)\kappa) \quad (53)$$

$$\Delta_{4,1} = 4\mu^3\eta^2(1 - \beta)(\kappa + \alpha + \beta + \beta\alpha\mu)(\lambda^2\alpha + (1 - \beta - \kappa + (1 + \mu)\alpha)\lambda + 1 - \beta - (\mu + 1)\kappa) \quad (54)$$

Izrazi  $\Delta_{3,1}$  i  $\Delta_{4,1}$  su proporcionalni te je njihov faktor proporcionalnosti jednak  $\mu(\kappa + \alpha + \beta + \beta\alpha\mu)$  koji je sigurno veći od nule jer je svaki od bezdimenzijskih članova sam po sebi pozitivan. Jedan od faktora je parabola koja je funkcija bezdimenzijskog parametra  $\lambda$ . Budući da je član uz kvadrat te parabole  $\alpha$  pozitivan poznata je i kvalitativna slika parabole. Ona je pozitivna kada  $\lambda$  teži u  $+\infty$  i  $-\infty$   $\Delta_{1,1}$  i  $\Delta_{2,1}$  su očigledno pozitivni te se mogu interpretirati kao pravci u ovisnosti o  $\lambda$  rastućeg karaktera sa pozitivnim odsječkom na ordinati. Faktor  $1 - \beta$  u  $\Delta_{3,1}$  i  $\Delta_{4,1}$  mora biti pozitivan kako bi zadovoljili Routh-Hurwitzov kriterij, a budući da je  $\beta$  pozitivna može se odrediti jedan od uvjeta stabilnosti promatranog sustava koji glasi:

$$\beta < 1 \quad (55)$$

### 3.3. Determinante karakterističnog polinoma $D_2$

Hurwitzova matrica koeficijenata drugog karakterističnog polinoma je

$$\mathbf{H}_2 = \begin{bmatrix} a_{1,2} & a_{0,2} & 0 & 0 \\ a_{3,2} & a_{2,2} & a_{1,2} & a_{0,2} \\ 0 & a_{4,2} & a_{3,2} & a_{2,2} \\ 0 & 0 & 0 & a_{4,2} \end{bmatrix} \quad (56)$$

gdje su koeficijenti:

$$a_{0,2} = \mu \quad (57)$$

$$a_{1,2} = 2\eta\lambda + 2\mu\eta + 2\eta \quad (58)$$

$$a_{2,2} = \mu(\alpha + \beta + 1 + \kappa + \delta\mu + \alpha\mu + \delta) \quad (59)$$

$$a_{3,2} = 2\eta(\beta\mu + 2\delta\mu + \delta\mu\lambda + \lambda + 1) \quad (60)$$

$$a_{4,2} = \mu(2\delta\mu\alpha + \beta\mu\alpha + \delta\mu\beta + \delta\mu\kappa + \alpha + \kappa + \delta + \beta) \quad (61)$$

a determinante su:

$$\Delta_{1,2} = 2\eta(\lambda + \mu + 1) \quad (62)$$

$$\Delta_{2,2} = 2\eta\mu((\delta + \alpha)\mu^2 + (\lambda\alpha + 2\alpha + 1 + \kappa)\mu + (\lambda + 1)(\alpha + \beta + \kappa + \delta)) \quad (63)$$

$$\Delta_{3,2} = 4\eta^2\mu^2(A_1\lambda^2 + A_2\lambda + A_3) \quad (64)$$

$$\Delta_{4,2} = 4\eta^2\mu^3((1 + (2\alpha + \beta + x)\mu)\delta + \kappa + \beta(\mu\alpha + 1) + \alpha)(A_1\lambda^2 + A_2\lambda + A_3) \quad (65)$$

gdje su:

$$A_1 = \alpha(\mu - 1)\delta + \delta^2 - \alpha(\beta - 1) \quad (66)$$

$$A_2 = (3 + \mu^2)\delta^2 + (\alpha\mu - \kappa + 2(1 - \beta) + \alpha)(\mu - 1)\delta - (1 - \beta + \alpha\mu - \kappa + \alpha)(\beta - 1) \quad (67)$$

$$A_3 = 2\delta^2(\mu^2 + 1) - (\mu - 1)(\kappa\mu + \kappa - 2(1 - \beta)\delta + (\beta - 1)(\beta - 1 + \kappa + \kappa\mu)) \quad (68)$$



Determinante  $\Delta_{1,2}$  i  $\Delta_{2,2}$  su također pravci sa pozitivnim odsječkom na ordinati, a  $\Delta_{3,2}$  i  $\Delta_{4,2}$  parabole sa istim nultočkama. Veže ih faktor proporcionalnosti. Uz poštivanje uvjeta  $\beta < 1$  moguće je provesti analizu koeficijenta koji stoji uz  $\lambda^2$ . Željeni oblik parabole osigurat će se uz uvjet da je  $A_1$  iz jednadžbe (66) veći od nule. Uvjet se dobiva iz nejednadžbe:

$$\alpha(\mu - 1)\delta + \delta^2 - \alpha(\beta - 1) > 0 \quad (69)$$

$$\mu > 1 - \frac{\delta}{\alpha} + \frac{\beta - 1}{\delta} \quad (70)$$

Budući da  $\mu$  ovisi o negativnim članovima koji se sastoje od ostalih bezdimenzijskim parametara, moguće je zanemariti te članove pa uvjet postaje praktičniji:

$$\mu > 1 \quad (71)$$

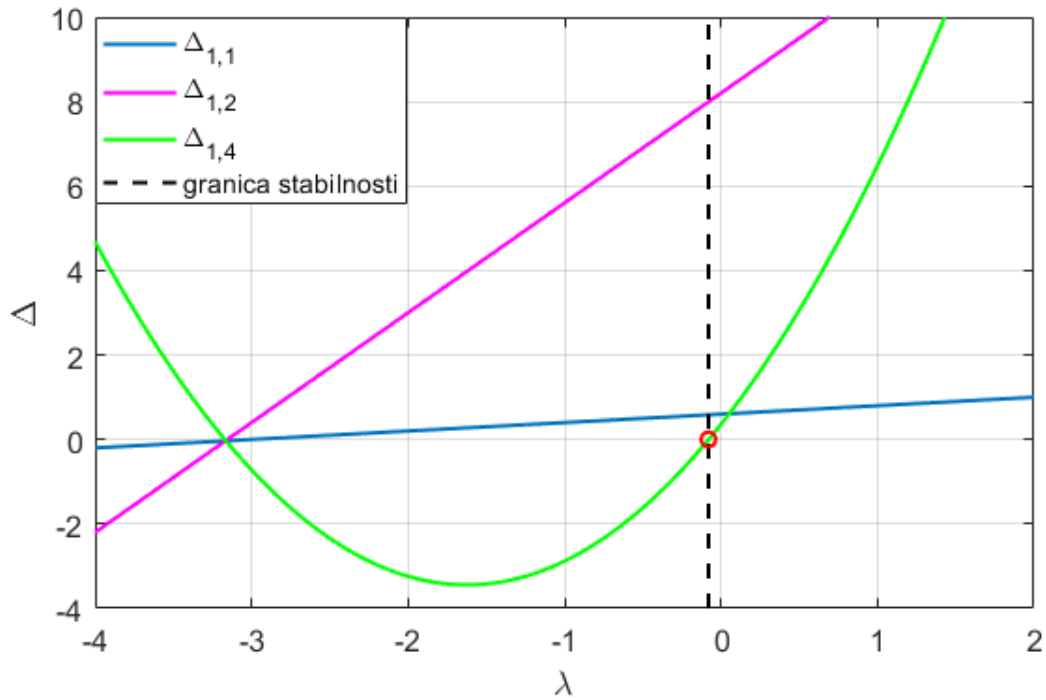
### 3.4. Utjecaj pojačanja proporcionalnog regulatora na stabilnost sustava

Uz poštivanje prethodno navedenih uvjeta stabilnosti:  $\beta < 1$  i  $\mu > 1$  determinante  $\Delta_{i,j}$  mogu se prikazati grafički u ovisnosti o  $\lambda$ . Za prikaz su uzete vrijednosti ostalih parametara dane u tablici:

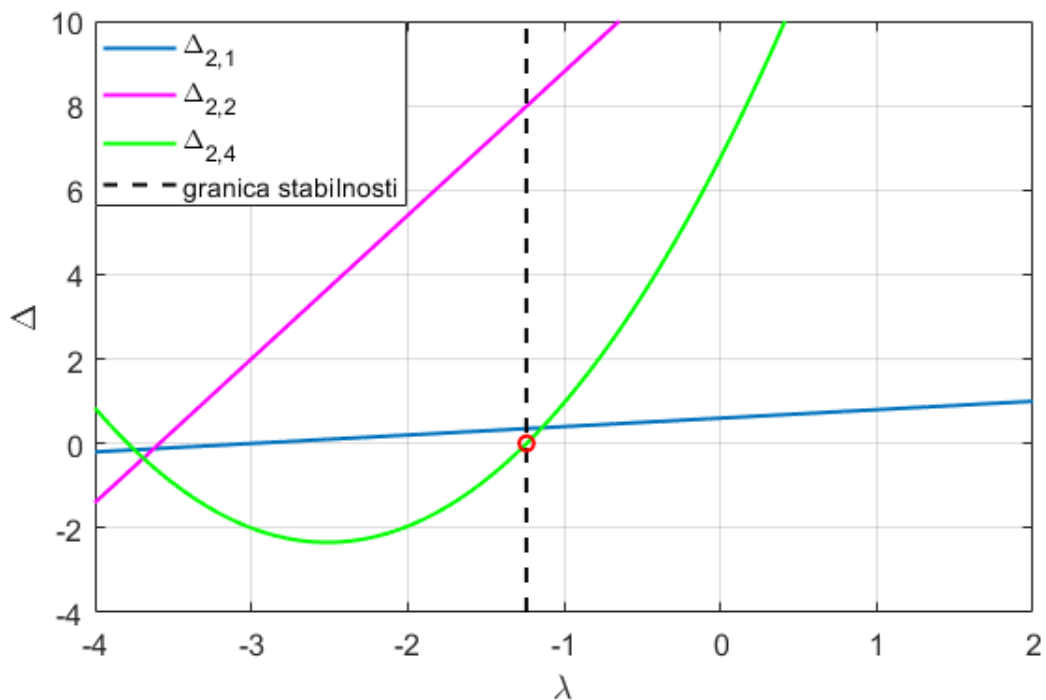
**Tablica 1** Vrijednosti bezdimenzijskih parametara korištene za grafički prikaz determinanti

$\alpha$	$\beta$	$\delta$	$\eta$	$\kappa$	$\mu$
2	0.5	2	0.1	0	2

Od determinanata svakog od polinoma dvije determinante su parabole s istim nultočkama pa je u prikazima radi preglednosti prikazana samo jedna od te dvije parabole.



Slika 3 Determinante polinoma  $D_1$  u ovisnosti o bezdimenzijskom pojačanju proporcionalnog člana regulatora,  $\lambda$

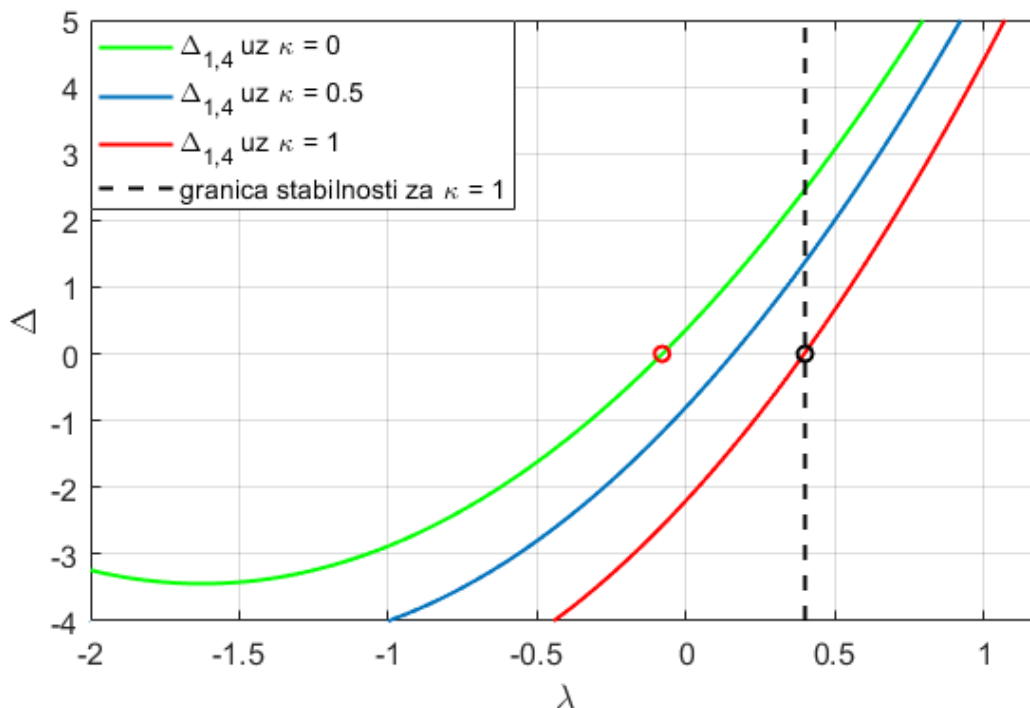


Slika 4 Determinante polinoma  $D_2$  u ovisnosti o bezdimenzijskom pojačanju proporcionalnog člana regulatora,  $\lambda$

Iz dijagrama se može zaključiti kako je sustav bezuvjetno stabilan za sve pozitivne vrijednosti  $\lambda$  kada je  $\kappa = 0$ .

### 3.5. Utjecaj pojačanja integralnog regulatora na stabilnost sustava

Uzimajući u obzir da je  $\kappa$  pozitivan parametar može se zaključiti kako ne utječe značajno na prve dvije determinante svakog od polinoma. Zanimljiv je utjecaj parametra  $\kappa$  na parabole koji će se prikazati u dijagramu uz iste vrijednosti ostalih parametara.

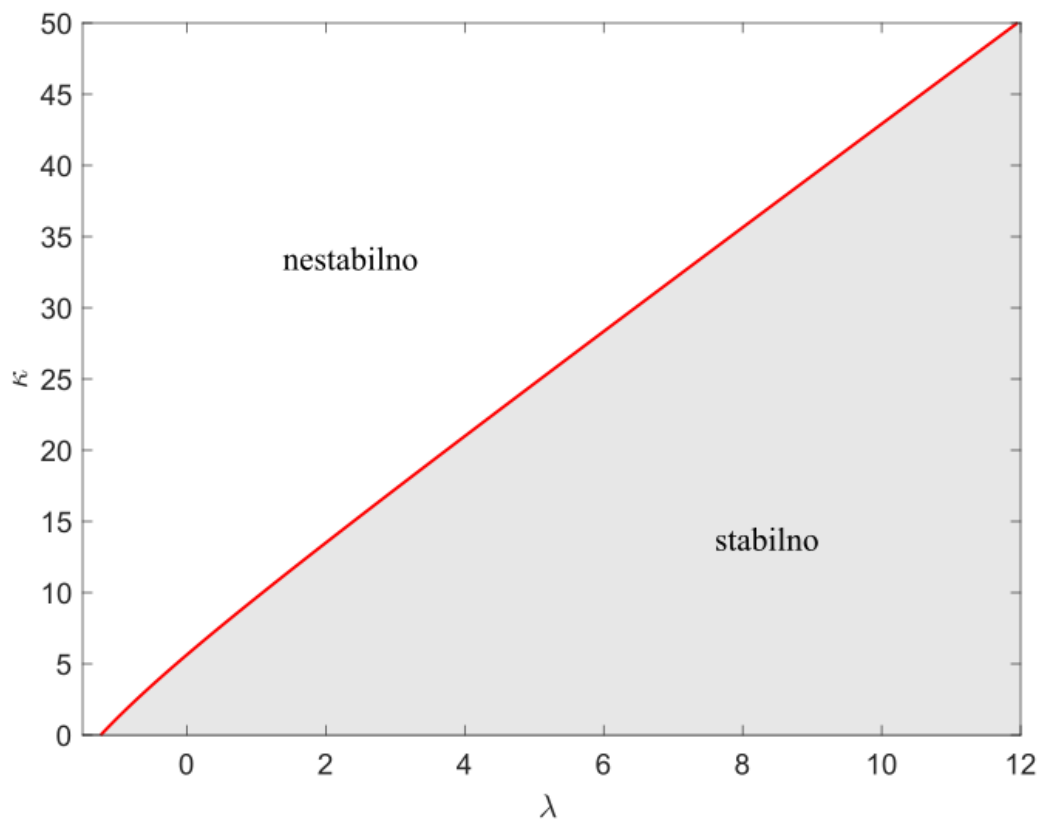


Slika 5 Determinanta  $\Delta_{1,4}$  u ovisnosti o bezdimenzijskom pojačanju proporcionalnog člana regulatora ( $\lambda$ ) za različite iznose bezdimenzijskog pojačanja integralnog člana regulatora ( $\kappa$ )

Povećanjem parametra  $\kappa$  granica stabilnosti se translata u desnu poluravninu pa sustav više nije bezuvjetno stabilan za sve pozitivne parametre  $\lambda$ . Veza između  $\lambda$  i  $\kappa$  je:

$$\kappa = \frac{(\delta^2 + \alpha\delta + \frac{1}{2}\alpha)\lambda^2 + (7\delta^2 + (3\alpha + 1)\delta + \frac{1}{4} + \frac{3}{2}\alpha)\lambda + 10\delta^2 + \delta + \frac{1}{4}}{(\delta + \frac{1}{2})(3 + \lambda)} \quad (72)$$

te se može prikazati u dijagramu:



**Slika 6 Ovisnost bezdimenzijskog pojačanja integralnog člana regulatora ( $\kappa$ ) o bezdimenzijskom pojačanju proporcionalnog člana regulatora ( $\lambda$ )**

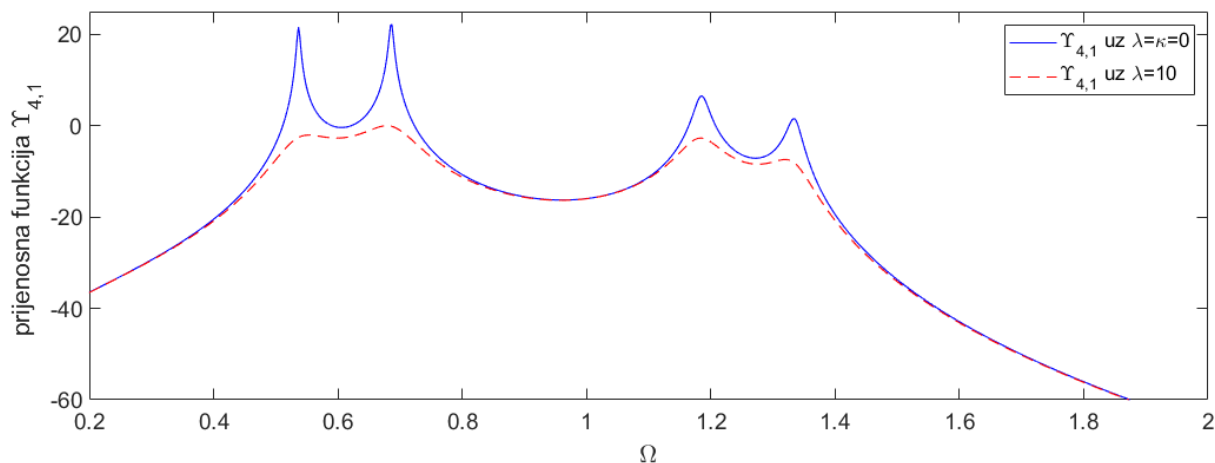
U ovom dijagramu grafički je prikazana veza parametra  $\kappa$  i parametra  $\lambda$ . Područje ispod krivulje označeno sivom bojom je područje u kojem je sustav stabilan. Time se dokazalo da je teoretski moguće postići stabilnost ne samo sa P regulacijom već i sa PI regulacijom uz ne-kolociranu postavu senzora i aktuatora, ali uz dodatan uvjet. Kada se aktivnu regulaciju provodi povratnim vezama i po brzini i po pomaku, mora se voditi računa pri izboru koeficijenata pojačanja  $g_p$  i  $g_i$  uzimajući u obzir relaciju (72).

## 4. PERFORMANSE

Prikazom amplituda bezdimenzijskih prijenosnih funkcija  $Y_{1,4}$  i  $Y_{4,1}$  pokazat će se gubitak recipročnosti i ostali efekti automatske regulacije uz  $\lambda \neq 0$  te uz oboje  $\lambda \neq 0$  i  $\kappa \neq 0$ . Veličine ostalih bezdimenzijskih parametara korištene za prikaze dane su u tablici:

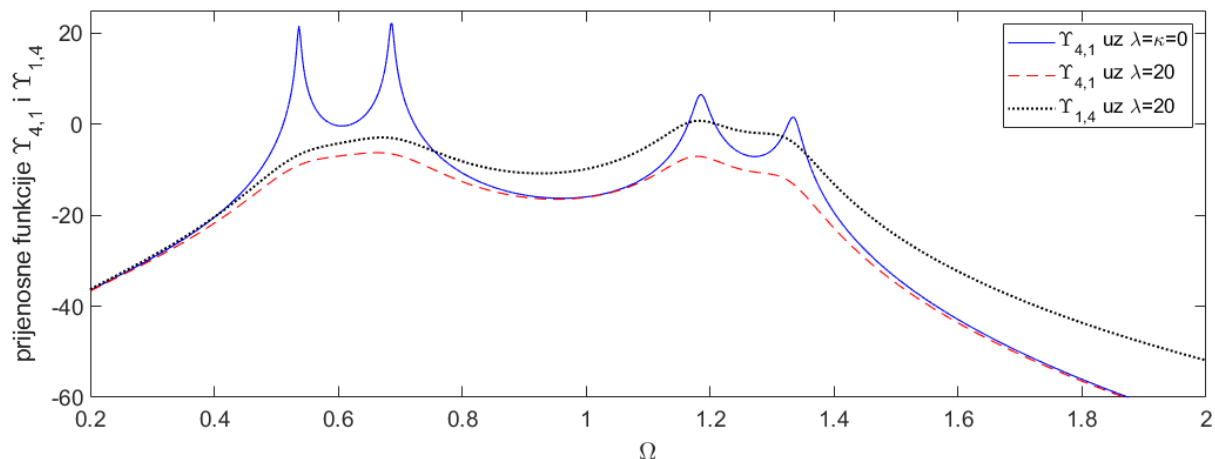
Tablica 2 Vrijednosti bezdimenzijskih parametara korištene za grafički prikaz prijenosnih funkcija

$\alpha$	$\beta$	$\delta$	$\eta$	$\mu$
0.2427	0.1217	0.2387	0.008	1.35



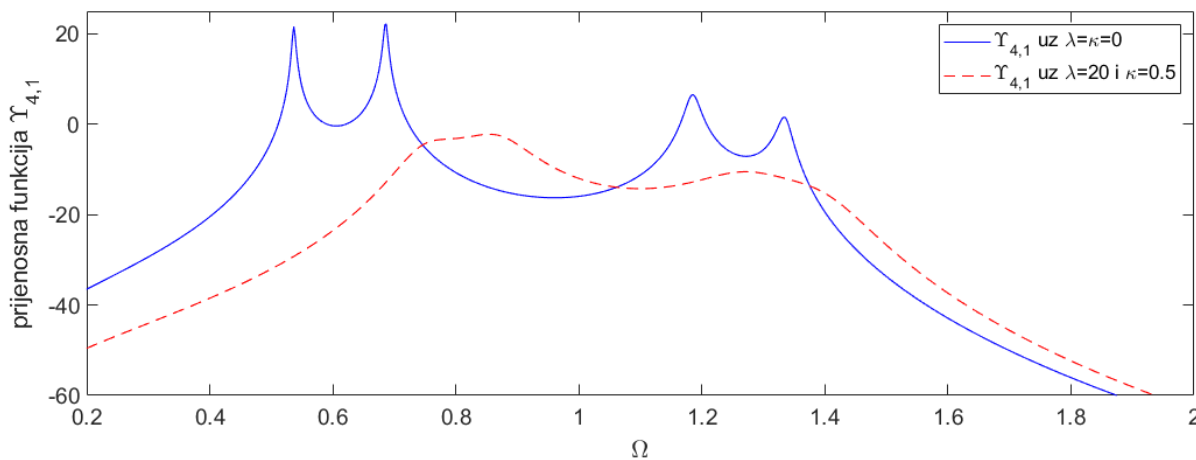
Slika 7 Utjecaj vrijednosti bezdimenzijskog pojačanja proporcionalnog člana regulatora ( $\lambda$ ) na prijenosnu funkciju  $Y_{4,1}$

U ovom prikazu  $\kappa$  je jednak 0 te se razmatra utjecaj vrijednosti  $\lambda$  na prijenosnu funkciju  $Y_{4,1}$ . S povećanjem  $\lambda$  smanjuje se rezonantni odziv sustava, tj. odziv pri vlastitim frekvencijama sustava. Što je vrijednost  $\lambda$  veća veće je i prigušenje.



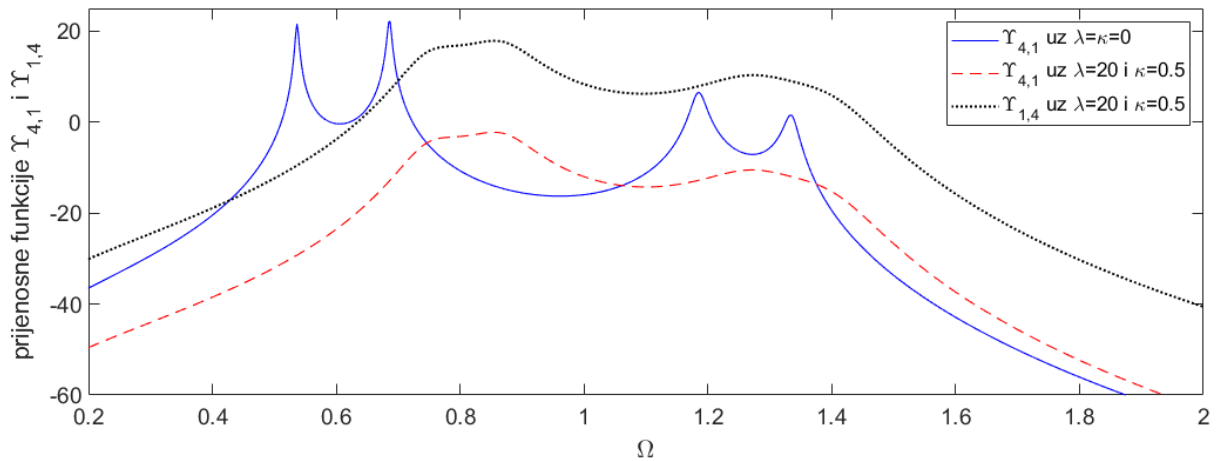
**Slika 8** Utjecaj vrijednosti bezdimenzijskog pojačanja proporcionalnog člana regulatora ( $\lambda$ ) na recipročnost sustava

Uz povratnu vezu po brzini neregipročnost sustava izraženija je s porastom frekvencija dok pri niskim frekvencijama gotovo potpuno izostaje.



**Slika 9** Utjecaj vrijednosti bezdimenzijskog pojačanja integralnog člana regulatora ( $\kappa$ ) na prijenosnu funkciju  $\Upsilon_{4,1}$

U ovom dijagramu prikazana su prijenosna funkcija pasivnog sustava i prijenosna funkcija sustava s automatskom regulacijom povratnom vezom i po brzini i po pomaku. Usporedi li se ovakav odziv sa odzivom sustava reguliranim samo povratnom vezom po brzini (Slika 7.) može se primjetiti da osim prigušenja dolazi do promjene vlastitih frekvencija sustava pa se može zaključiti da povratna veza po pomaku utječe na krutost sustava.



**Slika 10** Utjecaj vrijednosti bezdimenzijskog pojačanja integralnog člana regulatora ( $\kappa$ ) na recipročnost sustava

Dodavanjem integracijskog člana u regulacijski sustav s proporcionalnim djelovanjem postignut je željeni rezultat. Dobiven je aktivni sustav s gubitkom recipročnosti na širokom spektru frekvencija uključujući i niske frekvencije. Također se pokazalo kako prijenosne funkcije  $Y_{1,4}$  i  $Y_{4,1}$  jedna drugoj nalikuju oblikom, ali se razlikuju amplitudom. U prikazanom slučaju, gdje su iznosi bezdimenzijskih parametara dane u Tablici 2,  $\lambda = 20$ , a  $\kappa = 0.5$ , amplitudna razlika iznosi 20 dB.

## 5. ZAKLJUČAK

U ovom radu izveden je pojednostavljeni diskretni model jedne ćelije aktivnog metamaterijala. Diskretni model aktiviran je sustavom povratnih veza po pomaku i brzini vibracija koji je realiziran pomoću ne-kolociranih parova senzora i aktuatora. Takvom sustavu s ne-kolociranim vezama nije zagwarantirana stabilnost pa je izvedena analiza stabilnosti sustava pomoću Routh-Hurwitzovog kriterija. Dobiveni se kriteriji stabilnosti čime se pokazalo kako uz određene uvjete sustav s ne-kolociranim vezama i dalje ostaje stabilan. Prvi kriterij stabilnosti je  $\beta < 1$  što fizikalno znači da vlastita frekvencija prve membrane (membrana bez senzora) mora biti viša od vlastite frekvencije druge membrane (membrana se senzorom). Drugi kriterij stabilnosti je  $\mu > 1$  što znači da masa druge membrane  $m_2$  mora biti veća od mase prve membrane  $m_1$ . Posljednji kriterij sadržan je u jednadžbi (64) i prikazan je grafički na slici 6. te pokazuje da postoji veza između koeficijenata  $g_i$  i  $g_p$  te se pri njihovom izboru mora uzeti u obzir kako bi sustav bio stabilan. Pomoću prikaza prijenosnih funkcija  $Y_{1,4}$  i  $Y_{4,1}$  za nekoliko različitih slučajeva pokazano je kako je u ovakvom aktivnom sustavu gubitak recipročnosti prisutan i na nižim frekvencijama. Efekt je izražen na širokom spektru frekvencija. Konačno, pokazano je kako su dva spektra jednakog oblika ali različitih amplituda. Za slučaj prikazan na slici 10 razlika amplituda iznosi 20 dB.

## ZAHVALA

Ovaj rad je financirala Hrvatska zaklada za znanost projektom HRZZ- [IP-2019-04-5402](#) ([DARS](#))



---

**LITERATURA**

- [1] W. Heylen, S. Lammens, P. Sas, *Modal analysis theory and testing*, Leuven: Katholieke Universiteit Leuven, Faculty of Engineering, Department of Mechanical Engineering, Division of Production Engineering, Machine Design and Automation, 1998.
- [2] Gi-Jeon Kim, Nam-Jeon Kim, "The identification of tire-induced vehicle interior noise", SAE International, 2000-05-0359
- [3] J.T. Fokkema and P.M. van den Berg, *Seismic Applications of Acoustic Reciprocity*, Elsevier, 1993.
- [4] R. Fleury, D. L. Sounas, C. F. Sieck, M. R. Haberman, A. Alù, "Sound Isolation and Giant Linear Nonreciprocity in Compact Acoustic Circulator", *Science*, vol. 343, pp. 516–519, 2014, doi: 10.1126/science.1246957
- [5] D. Sounas, C. Caloz & A. Alù, "Giant non-reciprocity at the subwavelength scale using angular momentum-biased metamaterials", *Nat Commun* 4, 2407 (2013). <https://doi.org/10.1038/ncomms3407>
- [6] A. Kamal, J. Clarke & M. Devoret, "Noiseless non-reciprocity in a parametric active device", *Nature Phys* 7, 311–315 (2011). <https://doi.org/10.1038/nphys1893>
- [7] R. Fleury, D. Sounas, and A. Alù, "An invisible acoustic sensor based on parity-time symmetry," *Nature communications*, vol. 6, p. 5905, 2015, doi: 10.1038/ncomms6905.
- [8] C. House, J. Cheer, S. Daley, "An experimental investigation into active structural acoustic cloaking of a flexible cylinder", *Applied Acoustics*, vol. 170, 2020, 107436, ISSN 0003-682X, <https://doi.org/10.1016/j.apacoust.2020.107436>
- [9] N. Alujević, I. Senjanović, I. Čatipović, and N. Vladimir, "The absence of reciprocity in active structures using direct velocity feedback," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 438, pp. 251–256, 2019, doi: 10.1016/j.jsv.2018.09.035.
- [10] J. Tan, J. Cheer, S. Daley, "Wave-based active control for nonreciprocal sound transmission and absorption", *The 27th International Congress on Sound and Vibration*, Jul. 2021.
- [11] S. Cummer, J. Christensen & A. Alù, "Controlling sound with acoustic metamaterials", *Nat Rev Mater* 1, 16001 (2016). <https://doi.org/10.1038/natrevmats.2016.1>
- [12] F. Zangeneh-Nejad and R. Fleury, "Active times for acoustic metamaterials," *Reviews in Physics*, vol. 4, p. 100031, 2019, doi: 10.1016/j.revip.2019.100031.
- [13] Ben Yu-Kuang Hu, "Kramers–Kronig in two lines", *American Journal of Physics* 57, 821–821 (1989) <https://doi.org/10.1119/1.15901>

- [14] C. Claeys, N. G. Rocha de Melo Filho, L. van Belle, E. Deckers, and W. Desmet, "Design and validation of metamaterials for multiple structural stop bands in waveguides," *Extreme Mechanics Letters*, vol. 12, pp. 7–22, 2017, doi: 10.1016/j.eml.2016.08.005.
- [15] L. Y.M. Sampaio, Gabriel K. Rodrigues, Jaime A. Mosquera-Sánchez, Carlos De Marqui, Leopoldo P.R. de Oliveira, "Membrane smart metamaterials for unidirectional wave propagation problems", *Journal of Sound and Vibration*, vol. 512, 2021, 116374, <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2021.116374>.
- [16] Qishan Xu, Jing Qiao, Jiayue Sun, Guangyu Zhang, Longqiu Li, "A tunable massless membrane metamaterial for perfect and low-frequency sound absorption", *Journal of Sound and Vibration*, vol. 493, 2021, 115823, <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2020.115823>.
- [17] Lea Sirota, Fabio Semperlotti, Anuradha M. Annaswamy, "Tunable and reconfigurable mechanical transmission-line metamaterials via direct active feedback control", *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 123, 2019, Pages 117-130, <https://doi.org/10.1016/j.ymsp.2019.01.001>.
- [18] D. H. Sheingold, "Impedance & Admittance Transformations Using Operational Amplifiers," *Lightning Empiricist*, vol. 12, No. 1, 1964, pp. 1-8.
- [19] C. M. Bender, S. Boettcher, "Real Spectra in Non-Hermitian Hamiltonians Having PT Symmetry", *Phys. Rev. Lett.*, vol. 80, 24, pp. 5243-5246, 1998, American Physical Society, 10.1103/PhysRevLett.80.5243
- [20] J. Christensen, M. Willatzen, V. R. Velasco and M.-H. Lu, "Parity-Time Synthetic Phononic Media", *Phys. Rev. Lett.*, vol. 116, 20, 207601, 2016, American Physical Society, 10.1103/PhysRevLett.116.207601
- [21] J. Lončar, J. Vuković, I. Krois, S. Hrabar, "Stability Constraints on Practical Implementation of Parity-Time-Symmetric Electromagnetic Systems", *Photonics* 2021, 8, 56. <https://doi.org/10.3390/photonics8020056>
- [22] M. Ghandchi Tehrani, J.E. Mottershead, "An Overview of the Receptance Method in Active Vibration Control", *IFAC Proceedings Volumes*, vol. 45, 2, 2012, pp. 1174-1178, <https://doi.org/10.3182/20120215-3-AT-3016.00208>.
- [23] J. E. Mottershead, M. Ghandchi Tehrani, S. James, Y. M. Ram, "Active vibration suppression by pole-zero placement using measured receptances", *Journal of Sound and Vibration*, vol. 311, 3–5, 2008, pp. 1391-1408, <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2007.10.024>.
- [24] S. Chesné, & C. Collette, "Experimental validation of fail-safe hybrid mass damper", *JVC/Journal of Vibration and Control*, 24, 4395–4406 (2018)
- [25] J. Rohlfing, S. J. Elliott & P. Gardonio, "Feedback compensator for control units with proof-mass electrodynamic actuators", *Journal of Sound and Vibration* 331, 3437–3450 (2012).
- [26] C. Collette. & S. Chesné, "Robust hybrid mass damper", *Journal of Sound and Vibration* 375, 19–27 (2016).

---

[27] Stephen Elliot, *Signal Processing for Active Control*, Elsevier, 2000.

[28] Daniel Krivačić, „Fizikalno utemeljen pojednostavljeni model ćelije aktivnog metamaterijala, Završni rad“, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb, 2020.

[29] Marin Jalšić, „Aktivna ćelija metamaterijala za neregipročnu transmisiju vibracija, Diplomski rad“, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb, 2021.