

# Smanjenje mase gonjenog zupčanika kod velikog prijenosnog omjera

---

**Vlašićek, Dorian**

**Undergraduate thesis / Završni rad**

**2022**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:235:904222>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-01-20**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# ZAVRŠNI RAD

**Dorian Vlašićek**

Zagreb, 2022.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# ZAVRŠNI RAD

Mentor:

Izv. prof. dr. sc. Dragan Žeželj, dipl. ing.

Student:

Dorian Vlašićek

Zagreb, 2022.

Izjavljujem da sam ovaj rad izradio samostalno koristeći znanja stečena tijekom studija i navedenu literaturu.

Zahvaljujem se mentoru izv. prof. dr. sc. Draganu Žeželju na trudu, savjetima, uloženom vremenu i suradnji prilikom pisanja ovoga rada.

Zahvaljujem se svojoj obitelji, najviše roditeljima i bratu, djedovima, bakama te djevojci na konstantnoj podršci i razumijevanju tijekom preddiplomskog studija.

Zahvaljujem se prijateljima i fakultetskim kolegama na suradnji i zabavi olakšavajući tako nošenje sa ponekad stresnim studentskim razdobljima.

Zahvaljujem se tvrtki nTopology koja mi je omogućila korištenje njihovog programa za topološku optimizaciju.

Zahvaljujem se svim ostalim dobrim ljudima koji su na bilo koji način sudjelovali na ovom mom dosadašnjem studentskom putovanju te bi htio svim budućim studentima poručiti da budu uporni, ne odustaju i da se trude više nego je potrebno. Isplatit će se, sigurno.

Dorian Vlašićek



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE



Središnje povjerenstvo za završne i diplomske ispite  
Povjerenstvo za završne i diplomske ispite studija strojarstva za smjerove:  
Procesno-energetski, konstrukcijski, inženjersko modeliranje i računalne simulacije i brodstrojarski

Sveučilište u Zagrebu	
Fakultet strojarstva i brodogradnje	
Datum	Prilog
Klasa: 602 – 04 / 22 – 6 / 1	
Ur.broj: 15 - 1703 - 22 -	

## ZAVRŠNI ZADATAK

Student: **Dorian Vlašićek** JMBAG: **0035213923**

Naslov rada na hrvatskom jeziku: **Smanjenje mase gonjenog zupčanika kod velikog prijenosnog omjera**

Naslov rada na engleskom jeziku: **Reduction of driven gear mass at a high gear transmission ratio**

Opis zadatka:

Gonjeni zupčanci u reduktorima s velikim prijenosnim omjerom mogu, zavisno od modula, imati značajne dimenzije iz kojih tada proizlaze i velike mase. U slučajevima izrazito intermitirajućeg pogona, a u sprezi s velikim ulaznim brzinama vrtnje i kratkim vremenom upuštanja u rad, zagonski momenti mogu imati velik utjecaj na modul para, ali i ostale elemente sustava (vratila, ležajeve, spojke). U takvim se slučajevima provode konstrukcijski zahvati nad tijelom gonjenog zupčanika s ciljem smanjenja mase.

U okviru rada potrebno je sljedeće:

- analizirati utjecaj prijenosnog omjera i modula na zagonski moment gonjenog čeličnog zupčanika za raspon vrijednosti prijenosnog omjera od 1 do 10, modula 1, reda prednosti u rasponu 1 mm do 10 mm, broj zubi pogonskog zupčanika 14 i širinu zupčanika 25 mm,
- prikazati detaljno uobičajena konstrukcijska rješenja za smanjenje mase zupčanika,
- dati pregled komercijalno dostupnih programa za topološku optimizaciju,
- za odabrani slučaj prijenosa, broja okretaja elektromotora, vremena upuštanja u rad i zagonskog momenta radnog stroja dati konstrukcijsko rješenje smanjenja mase za zupčanik izveden postupkom obrade odvajanjem čestica,
- upoznati se s odabranim programom za topološku optimizaciju te provesti postupak za prethodni slučaj i napraviti usporedbu.

Vrijednosti potrebne za proračun i odabir pojedinih komponenti usvojiti iz postojećih rješenja sličnih sustava, iskustvenih vrijednosti te u dogovoru s mentorom.

Računalni model odabranog rješenja izraditi u 3D CAD sustavu te prikazati odgovarajućom radioničkom dokumentacijom.

U radu je potrebno navesti korištenu literaturu, norme kao i eventualnu pomoć.

Zadatak zadan:

30. 11. 2021.

Zadatak zadao:

Izv. prof. dr. sc. Dragan Žeželj

Datum predaje rada:

1. rok: 24. 2. 2022.  
2. rok (izvanredni): 6. 7. 2022.  
3. rok: 22. 9. 2022.

Predviđeni datumi obrane:

1. rok: 28. 2. – 4. 3. 2022.  
2. rok (izvanredni): 8. 7. 2022.  
3. rok: 26. 9. – 30. 9. 2022.

Predsjednik Povjerenstva:

*V Soldo*  
Prof. dr. sc. Vladimir Soldo

## SADRŽAJ

SADRŽAJ .....	I
POPIS SLIKA .....	III
POPIS TABLICA.....	V
POPIS OZNAKA .....	VI
SAŽETAK.....	VIII
SUMMARY .....	IX
1. UVOD.....	1
1.1. Dimenzije zupčanika.....	2
1.2. Upotreba zupčanika .....	3
2. ZAGONSKI MOMENT ZUPČANIKA .....	4
2.1. Utjecaj zagonskog momenta na rad .....	4
2.2. Analiza utjecaja prijenosnog omjera i modula na zagonski moment .....	5
3. UOBIČAJENA KONSTRUKCIJSKA RJEŠENJA ZA SMANJENJE MASE ZUPČANIKA .....	9
3.1. Zavareni zupčanici .....	9
3.2. Lijevani zupčanici.....	12
3.3. Kovani zupčanici .....	13
3.4. Obrada odvajanjem čestica .....	14
3.5. Metalurgija praha – kompaktiranje.....	16
3.6. Metalurgija praha – sinteriranje .....	16
4. REFERENTNI ZUPČANIK.....	18
4.1. Modul zupčanika.....	18
4.2. Dimenzije zupčanika.....	23
4.3. Analiza naprezanja.....	25
4.3.1. Naprezanje na savijanje u korijenu zuba prema ISO 6336.....	26
4.3.2. Naprezanje na bokovima zubi.....	28
4.3.3. Naprezanja i pomaci dobiveni programskim paketom Ansys .....	29
5. OPTIMIRANI ZUPČANIK – OBRADA ODVAJANJEM ČESTICA .....	34
5.1. Naprezanje prema ISO 6336 i izrada .....	34
5.2. Naprezanja i pomaci dobiveni programskim paketom Ansys .....	36
6. TOPOLOŠKA OPTIMIZACIJA .....	40
6.1. Tehnologija .....	40
6.2. Najpoznatiji programi za topološku optimizaciju.....	41
6.2.1. Altair .....	41
6.2.2. Ansys i Abaqus .....	42
6.2.3. nTopology .....	43
7. OPTIMIRANI ZUPČANIK – TOPOLOŠKA OPTIMIZACIJA .....	45
7.1. Metoda topološke optimizacije .....	45

---

7.2.	Topološka optimizacija – sila na bok zuba .....	46
7.3.	Topološka optimizacija – moment.....	50
7.4.	Konačan oblik optimiranog zupčanika .....	52
7.5.	Naprezanja i pomaci dobiveni programskim paketom Ansys .....	53
8.	USPOREDBA REZULTATA .....	57
9.	ZAKLJUČAK.....	58

## POPIS SLIKA

Slika 1.	Različite vrste ozubljenja zupčanih parova [1].	1
Slika 2.	Osnovne dimenzije zupčanika s ravnim zubima [2].	2
Slika 3.	Skica unutrašnjosti džepnog sata [3].	3
Slika 4.	Zagonski moment gonjenog zupčanika za raspon vrijednosti prijenosnog omjera od 1 do 10 te za modul 1. reda prednosti od 1 mm do 3 mm prema (2.6).	6
Slika 5.	Zagonski moment gonjenog zupčanika za raspon vrijednosti prijenosnog omjera od 1 do 10 te za modul 1. reda prednosti od 4 mm do 10 mm prema (2.6).	6
Slika 6.	Zagonski moment gonjenog zupčanika za raspon vrijednosti prijenosnog omjera od 1 do 10 te za raspon vrijednosti modula od 1 mm do 10 mm prema (2.6).	7
Slika 7.	Tlocrt grafa sa slike 6.	8
Slika 8.	Zavareni zupčanik 1 [2].	10
Slika 9.	Zavareni zupčanik 2 [2].	10
Slika 10.	Primjer sličan zavarenom zupčaniku 2 iz prakse, ali s kosim zubima [8].	10
Slika 11.	Zavareni zupčanik 3 [7].	11
Slika 12.	Zavareni zupčanik 4 [2].	11
Slika 13.	Lijevani zupčanici, a) i b) s pločom i rebrima, c) s paocima I presjeka [2].	12
Slika 14.	Primjer sličan zupčaniku b) sa slike 13, ali s kosim zubima [8].	13
Slika 15.	Zupčanik kovan u ukovnju [2].	14
Slika 16.	Primjer sličan zupčaniku sa slike 15, ali s kosim zubima [9].	14
Slika 17.	a) Tokareni zupčanik sa smanjenom debljinom u sredini, b) tokareni zupčanik sa bušenim provrtima.	15
Slika 18.	Tokareni zupčanik sa smanjenom debljinom u sredini i bušenim provrtima.	15
Slika 19.	Kompaktirani zupčanik [8].	16
Slika 20.	Zupčanik nastao DMLS tehnologijom [11].	17
Slika 21.	CAD model referentnog zupčanika.	24
Slika 22.	Raspodjela opterećenja kod istovremenog zahvata dva para zubi [2].	25
Slika 23.	Kontaktne naprezanja na dodirnim bokovima dvaju zaobljenih tijela [2].	26
Slika 24.	Opterećenja i oslonci na promatranom sedmini referentnog zupčanika.	30
Slika 25.	Konvergencija rezultata promjenom broja, odnosno veličine konačnih elemenata.	30
Slika 26.	Mreža konačnih elemenata na promatranom zubu.	31
Slika 27.	Ukupni pomaci dobiveni metodom konačnih elemenata za referentni zupčanik.	32
Slika 28.	Naprezanja dobivena metodom konačnih elemenata za referentni zupčanik.	32
Slika 29.	Naprezanja kod opterećenog zuba referentnog zupčanika.	33
Slika 30.	Primjer optički prikazanog toka naprezanja u korijenu zuba [2].	33
Slika 31.	Grafički način dobivanja faktora debljine vijenca.	34
Slika 32.	CAD model zupčanika olakšanog obradom odvajanjem čestica.	35
Slika 33.	Opterećenja i oslonci na promatrane dvije sedmine zupčanika olakšanog obradom odvajanjem čestica.	36
Slika 34.	Naprezanja na zupčaniku olakšanom obradom odvajanjem čestica.	37
Slika 35.	Iznosi naprezanja na odabranim mjestima zupčanika olakšanog obradom odvajanjem čestica.	37
Slika 36.	Naprezanja kod opterećenog zuba zupčanika olakšanog obradom odvajanjem čestica.	38
Slika 37.	Ukupni pomaci na zupčaniku olakšanom obradom odvajanjem čestica.	39



Slika 38.	Topološki optimiran kutni nosač za zrakoplovnu industriju [17].	40
Slika 39.	Nosač motora u automobilskoj industriji optimiran u programu Altair Inspire [16].	42
Slika 40.	Analiza naprezanja nosača olakšanog transformacijom punog u rešetkasti materijal u programu Ansys [18].	43
Slika 41.	Zupčanik optimiran topološkom optimizacijom u programu Abaqus [19].	43
Slika 42.	Pedala kočnice dizajnirana u programu nTopology [20].	44
Slika 43.	Odabrani sektor zupčanika za topološku optimizaciju.	46
Slika 44.	Opterećenja i oslonci na promatranom sektoru zupčanika.	47
Slika 45.	Raspored ukupnih pomaka na promatranom sektoru zupčanika.	47
Slika 46.	Topološki optimiran sektor zupčanika.	48
Slika 47.	Topološki optimirana sedmina zupčanika sa ubačenom mrežom.	49
Slika 48.	Topološki optimirana sedmina zupčanika sa preoblikovanom ubačenom mrežom.	49
Slika 49.	Odabrani dio zupčanika za topološku optimizaciju s obzirom na moment.	50
Slika 50.	Raspored naprezanja promatranog predmeta dobiven statičkom analizom.	51
Slika 51.	Topološki optimirano tijelo zupčanika.	51
Slika 52.	Topološki optimirano tijelo zupčanika sa preoblikovanom ubačenom mrežom.	52
Slika 53.	Konačni oblik zupčanika optimiranog primjenom topološke optimizacije.	53
Slika 54.	Opterećenja i oslonci na promatrane dvije sedmine zupčanika optimiranog topološkom optimizacijom.	54
Slika 55.	Ukupni pomaci na zupčaniku optimiranom topološkom optimizacijom.	54
Slika 56.	Naprezanja na zupčaniku optimiranom topološkom optimizacijom.	55
Slika 57.	Iznosi naprezanja na odabranim mjestima zupčanika optimiranog topološkom optimizacijom.	55
Slika 58.	Naprezanja kod opterećenog zuba zupčanika optimiranog topološkom optimizacijom.	56

**POPIS TABLICA**

Tablica 1. Početni uvjeti analize zagonskog momenta.....	5
Tablica 2. Vrijednosti zagonskog momenta sa slika 4 i 5 za prijenosni omjer 10 prema (2.6). .....	7
Tablica 3. Ulazni podatci promatranog sustava. ....	18
Tablica 4. Karakteristike referentnog zupčanika.....	24
Tablica 5. Usporedne vrijednosti naprezanja. ....	31
Tablica 6. Usporedba rezultata naprezanja i ukupnih pomaka.....	57

## POPIS OZNAKA

Oznaka	Jedinica	Opis
$a$	mm	Računski razmak osi vratila
$a_w$	mm	Ugradbeni razmak osi vratila
$b$	mm	Širina zupčanika
$d$	mm	Diobeni promjer zupčanika
$d_a$	mm	Tjemeni promjer zupčanika
$d_b$	mm	Temeljni promjer zupčanika
$d_f$	mm	Podnožni promjer zupčanika
$d_{go}$	mm	Vanjski promjer glavine zupčanika olakšanog obradom odvajanja čestica
$d_{gt}$	mm	Vanjski promjer glavine zupčanika optimiranog topološkom optimizacijom
$d_{vj}$	mm	Unutarnji promjer vijenca
$d_{vr}$	mm	Unutarnji promjer glavine, odnosno dosjedni promjer vratila
$d_w$	mm	Promjer kinematske kružnice zupčanika
$e$	mm	Širina uzubine
$F_{bn}$	N	Normalna sila na zub
$F_t$	N	Obodna sila na diobenom promjeru
$g$	m/s <sup>2</sup>	Gravitacijsko ubrzanje
$GD^2$	Nm <sup>2</sup>	Zagonski moment
$h$	mm	Ukupna visina zuba
$h_a$	mm	Tjemena visina zuba
$h_f$	mm	Podnožna visina zuba
$i$	/	Prijenosni omjer
$J$	kgm <sup>2</sup>	Moment tromosti, odnosno moment inercije mase
$K_A$	/	Pogonski faktor
$K_{H\alpha}$	/	Faktor raspodjele opterećenja na pojedine zube pri opteretivosti bokova
$K_{H\beta}$	/	Faktor raspodjele opterećenja po dužini boka pri opteretivosti bokova
$m$	mm	Modul zupčanog para
$m_{go}$	kg	Masa glavine zupčanika olakšanog obradom odvajanja čestica
$m_{gt}$	kg	Masa glavine zupčanika optimiranog topološkom optimizacijom
$m_{vj}$	kg	Masa vijenca
$m_z$	kg	Masa zupčanika
$n$	s <sup>-1</sup>	Brzina vrtnje

$p$	mm	Diobeni korak zupčanika
$P$	W	Snaga
$r_i$	mm	Polumjer inercije
$s$	mm	Debljina zuba
$s_R$	mm	Debljina vijenca
$S_F$	/	Faktor sigurnosti korijena zuba
$S_H$	/	Faktor sigurnosti protiv stvaranja rupičenja
$t_u$	s	Vrijeme uključivanja elektromotora
$T_o$	Nm	Radni okretni moment
$T_{uk}$	Nm	Ukupni okretni moment
$T_\varepsilon$	Nm	Moment ubrzanja masa
$x$	/	Faktor pomaka profila
$Y_B$	/	Faktor debljine vijenca
$Y_F$	/	Faktor oblika
$Y_S$	/	Faktor ispravka naprezanja
$z$	/	Broj zubi zupčanika
$Z_B$	/	Faktor zahvata u točki B
$Z_H$	/	Faktor oblika zuba
$Z_M$	/	Faktor materijala
$Z_\varepsilon$	/	Faktor prekrivanja
$\alpha$	°	Zahvatni kut
$\alpha_w$	°	Pogonski kut
$\varepsilon_0$	rad/s <sup>2</sup>	Kutno ubrzanje
$\eta$	/	Stupanj iskoristivosti
$\lambda$	/	Utjecaj načina ležištenja
$\rho_F$	mm	Radijus zaobljenja korijena zuba
$\sigma_{Flim}$	N/mm <sup>2</sup>	Dinamička izdržljivost u korijenu zuba
$\sigma_F$	N/mm <sup>2</sup>	Naprezanje u korijenu zuba
$\sigma_{FP}$	N/mm <sup>2</sup>	Dozvoljeno naprezanje u korijenu zuba
$\sigma_{Hlim}$	N/mm <sup>2</sup>	Dinamička izdržljivost bokova zubi
$\sigma_H$	N/mm <sup>2</sup>	Naprezanje na bokovima zubi u točki C
$\sigma_{HB}$	N/mm <sup>2</sup>	Naprezanje na bokovima zubi u točki B
$\sigma_{HP}$	N/mm <sup>2</sup>	Dozvoljeno naprezanja na bokovima zubi
$\omega$	rad/s	Kutna brzina

## SAŽETAK

U ovom radu analizirat će se tehnologije smanjenja mase zupčanika pri velikom utjecaju zagonskog momenta zupčanika na modul zupčanog para, ali i ostale elemente sustava koji nastaju uslijed određenih uvjeta rada. Prikazat će se ovisnost zagonskog momenta gonjenog zupčanika o odabranom rasponu vrijednosti prijenosnog omjera i modula za odabranu širinu zupčanika i broj zubi pogonskog zupčanika. Detaljno će se prikazati uobičajena konstrukcijska rješenja za smanjenje mase zupčanika te će se za odabrani slučaj prijenosa i uvjeta rada sustava dati rješenje smanjenja mase referentnog gonjenog zupčanika tog sustava postupkom obrade odvajanjem čestica i topološkom optimizacijom. Istražit će se mogućnosti komercijalno dostupnih programa za topološku optimizaciju te će u odabranom programu rezultat topološke optimizacije poslužiti za definiranje mreže čija raspodjela elemenata prati koncentraciju materijala na optimiranom dijelu zupčanika. Formirana mreža ubacit će se zatim u odabrani CAD program gdje će se napraviti model optimiranog zupčanika. U odabranom programu za analizu naprezanja metodom konačnih elemenata, napraviti će se usporedba naprezanja i ukupnih pomaka referentnog zupčanika, zupčanika olakšanog obradom odvajanjem čestica te topološki optimiranog zupčanika za slučaj opterećenja koje uzrokuje najveća naprezanja u korijenu zuba.

Ključne riječi: zupčanik, zagonski moment, obrada odvajanjem čestica, topološka optimizacija.

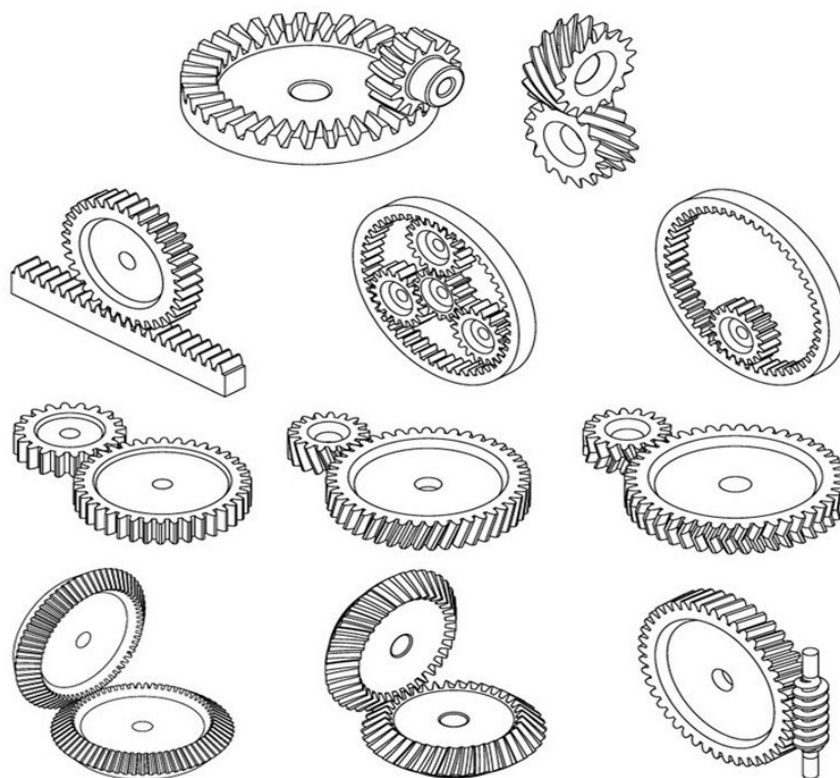
## **SUMMARY**

In this paper, technologies of reducing gear mass with big influence of moment of inertia on gear module and other system elements due to certain operating conditions will be analyzed. Dependence of moment of inertia of the driven gear for selected range of gear ratio and gear module values with certain gear width and teeth number of the drive gear will be determined. Usual design solutions for reducing gear mass will be shown in detail and for selected transmission and operating conditions of the system, two solutions for reducing mass of the reference gear will be given, using metal removing operations and topology optimization. Capabilities of commercially available topology optimization software will be compared and in selected software, topology optimization solution will be used for defining a mesh whose element distribution follows the concentration of material on the optimized part of the gear. Formed mesh will then be inserted into the selected CAD software where an optimized gear will be designed. Afterwards, in the selected software for stress analysis using the finite element method, comparison of stresses and deformations occurred on reference gear, gear lightweighted using metal removing operations and topology optimized gear for the load causing the highest stress in the tooth root will be made.

Key words: gear, moment of inertia, metal removing operations, topology optimization.

## 1. UVOD

Zupčanici su rotacijski strojni elementi koji služe za prijenos snage i gibanja s jednog vratila na drugo. Prijenos se ostvaruje preko ozubljenja koje je sastavni dio svakog zupčanika. Broj, profil i dimenzije zubaca, odnosno karakteristike ozubljenja zupčanika ovise o zupčanom paru koji će prenositi gibanje, o sustavu u koji se ugrađuju zupčanici te o posebnim uvjetima kao što može biti potreba za smanjenjem buke prijenosnika [Slika 1].



Slika 1. Različite vrste ozubljenja zupčanih parova [1].

Ovisno o upotrebi zupčanog para, broj zuba svakog zupčanika u paru može se jako razlikovati, a omjer broja zuba gonjenog zupčanika sa brojem zuba pogonskog zupčanika naziva se prijenosni omjer (1.1). Prijenosni omjer je također proporcionalan odnosu brzine vrtnje pogonskog vratila sa brzinom vrtnje gonjenog vratila te se prema tome prijenos gibanja s obzirom na brzinu vrtnje gonjenog vratila dijeli na:

- redukcija ( brzina vrtnje gonjenog vratila manja od brzine vrtnje pogonskog vratila)
- čisti prijenos ( brzine vrtnje pogonskog i gonjenog vratila su jednake )
- multiplikacija ( brzina vrtnje gonjenog vratila veća od brzine vrtnje pogonskog vratila)

$$i = \frac{z_2}{z_1} = \frac{n_1}{n_2} \quad (1.1)$$

gdje je:

- $z_1$  – broj zubi pogonskog zupčanika,
- $z_2$  – broj zubi gonjenog zupčanika,
- $n_1$  – brzina vrtnje pogonskog vratila,
- $n_2$  – brzina vrtnje gonjenog vratila [2].

Zajednička karakteristika zupčanika koji čine zupčani par je modul (1.2).

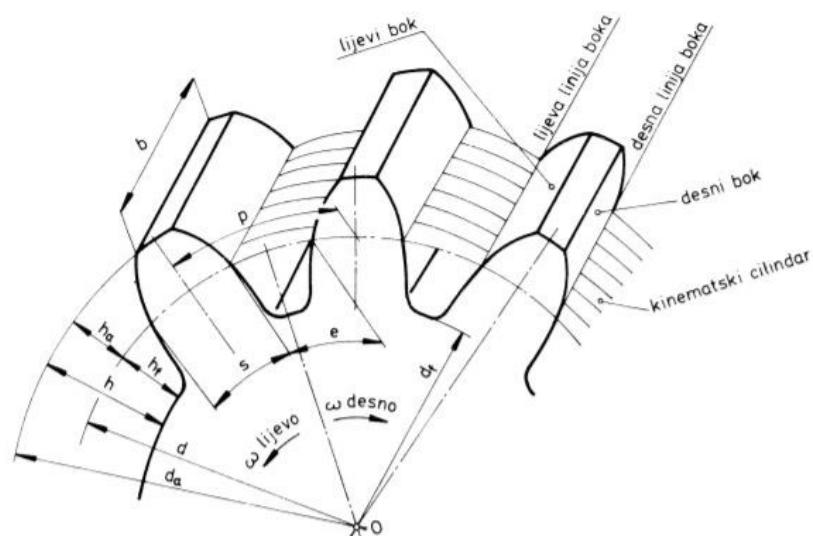
$$m = \frac{p}{\pi} \quad (1.2)$$

gdje je:

- $p$  – diobeni korak zupčanika [2].

### 1.1. Dimenzije zupčanika

Slika 2 prikazuje osnovne dimenzije zupčanika s ravnim zubima budući da će se takav zupčanik analizirati u ovome radu.



Slika 2. Osnovne dimenzije zupčanika s ravnim zubima [2].



Značenje dimenzija:

$b$  – širina zupčanika,

$h$  – visina zuba,

$e$  – širina uzubine,

$h_a$  – tjemena visina zuba,

$d$  – promjer diobene kružnice,

$h_f$  – podnožna visina zuba,

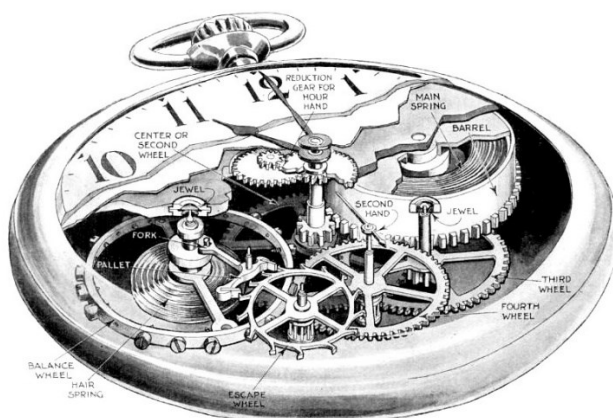
$d_a$  – promjer tjemene kružnice,

$s$  – debljina zuba [2].

$d_f$  – promjer podnožne kružnice,

## 1.2. Upotreba zupčanika

Zupčanici su jedni od najvažnijih elemenata strojeva zbog mogućnosti prijenosa snage i gibanja gdje se mogu ostvariti izrazito velike razlike između ulaznih i izlaznih vrijednosti, a da se ne narušava sigurnost sustava, samim time i čovjeka zbog izrazite trajnosti i velike opteretivosti temeljito konstruiranih zupčanika. Nije potreban prijenosni element kao što je to slučaj kod remenskih i lančanih prijenosnika, a u usporedbi sa tarnim prijenosom, puno je bolja iskoristivost sustava. Zupčanici čija je primarna zadaća prijenos gibanja mogu se vidjeti u satovima gdje postoji više promjena brzine gibanja kako bi se kazaljka sekundi, odnosno sati mogla okretati točno određenom brzinom vrtnje [Slika 3].



Slika 3. Skica unutrašnjosti džepnog sata [3].

Zupčanici čija je primarna zadaća prijenos snage mogu se pronaći na svakom automobilu za mijenjanje brzina pa sve do kućišta vjetroturbina za rotaciju velikih masa. Uz sve prednosti upotrebe zupčanika, u određenim pogonima njihova potencijalno velika masa postaje izrazito nepovoljan faktor te se teži smanjenju mase zupčanika različitim metodama.

## 2. ZAGONSKI MOMENT ZUPČANIKA

### 2.1. Utjecaj zagonskog momenta na rad

Zagonski ili zamašni moment (2.1) je veličina koja se u prošlosti više koristila nego danas za opisivanje tromosti nekog tijela, odnosno predstavlja veličinu kojom se opisuje koliko je neko tijelo teško pokrenuti u rotaciju i koliko je teško takvom tijelu zaustaviti rotaciju. Danas se češće koristi moment inercije mase iako su to dvije srodne veličine.

$$GD_i^2 = 4 \cdot g \cdot J = 4 \cdot g \cdot m_z \cdot r_i^2 \quad (2.1)$$

gdje je:

$g$  – gravitacijsko ubrzanje ( $9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ ),

$J$  – moment inercije mase, odnosno moment tromosti,

$m_z$  – masa rotacijskog tijela ( u ovome radu masa zupčanika ),

$r_i$  – polumjer inercije [4].

Rotacijska tijela imaju svoj moment tromosti i određenu brzinu vrtnje u nekom sustavu te su ti podatci bitni za proračun reduciranog momenta tromosti cijelog sustava na odabrano vratilo koji se mora provesti ako se svi rotacijski elementi ne nalaze na istoj osi rotacije. Reducirani moment tromosti je dalje bitan pri izračunu momenta potrebnog za ubrzanje svih gibajućih masa nekog sustava pri čemu moment ovisi i o kutnom ubrzanju vratila na koje je provedena redukcija (2.2). Spojka tada uz radni okretni moment treba prenijeti i moment za ubrzanje svih gibajućih masa sa svoje gonjene strane (2.3).

$$T_\varepsilon = J_{\text{red}} \cdot \varepsilon_0 \quad (2.2)$$

gdje je:

$J_{\text{red}}$  – reducirani moment tromosti sustava,

$\varepsilon_0$  – kutno ubrzanje vratila na koje je provedena redukcija [4].

$$T_{\text{uk}} = K_A \cdot T_0 + T_\varepsilon \quad (2.3)$$

gdje je:

$K_A$  – pogonski faktor,

$T_0$  – radni okretni moment [4].

## 2.2. Analiza utjecaja prijenosnog omjera i modula na zagonski moment

Za potrebe ove analize, zupčanik će se smatrat punim cilindrom jer je teško odrediti ovisnost unutarnjeg promjera glavine zupčanika sa prijenosnim omjerom i modulom budući da unutarnji promjer glavine ovisi o još brojnim drugim elementima. Ako se u jednadžbu (2.1) ubaci izraz za moment tromosti punog cilindra prema [4] dobije se:

$$GD_{z_i}^2 = 4 \cdot g \cdot \frac{1}{2} \cdot m_z \cdot \left(\frac{d_z}{2}\right)^2 \quad (2.4)$$

Diobeni promjer zupčanika se određuje prema:

$$d_i = m \cdot z_i \quad (2.5)$$

Analiza zagonskog momenta kao i kasnije u ovome radu analiza smanjenja mase gonjenog zupčanika krenut će od sljedećih početnih uvjeta:

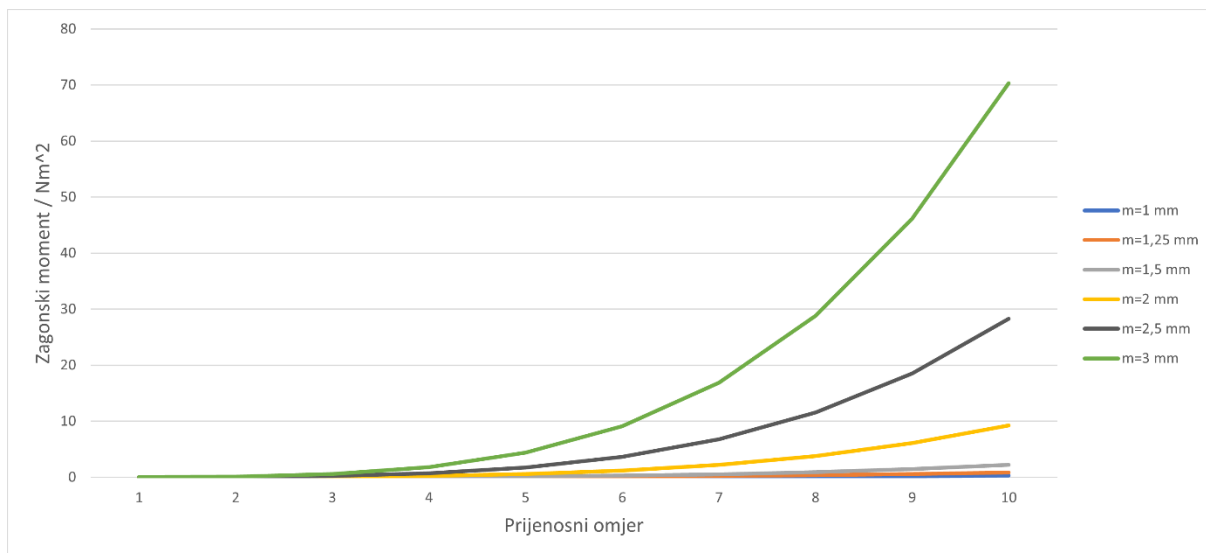
**Tablica 1. Početni uvjeti analize zagonskog momenta..**

Broj zubi pogonskog zupčanika $z_1$	14
Širina zupčanika	$25 \cdot m$
Čelik Ck 60	$\rho = 7820 \text{ kg/m}^3$

Ako se masa zupčanika raspiše kao umnožak gustoće materijala i volumena cilindra prema početnim uvjetima, te ako se u jednadžbu (2.4) ubace jednadžbe (1.1) te (2.5), dobije se izraz za zagonski moment gonjenog zupčanika ovisan samo o prijenosnom omjeru i modulu:

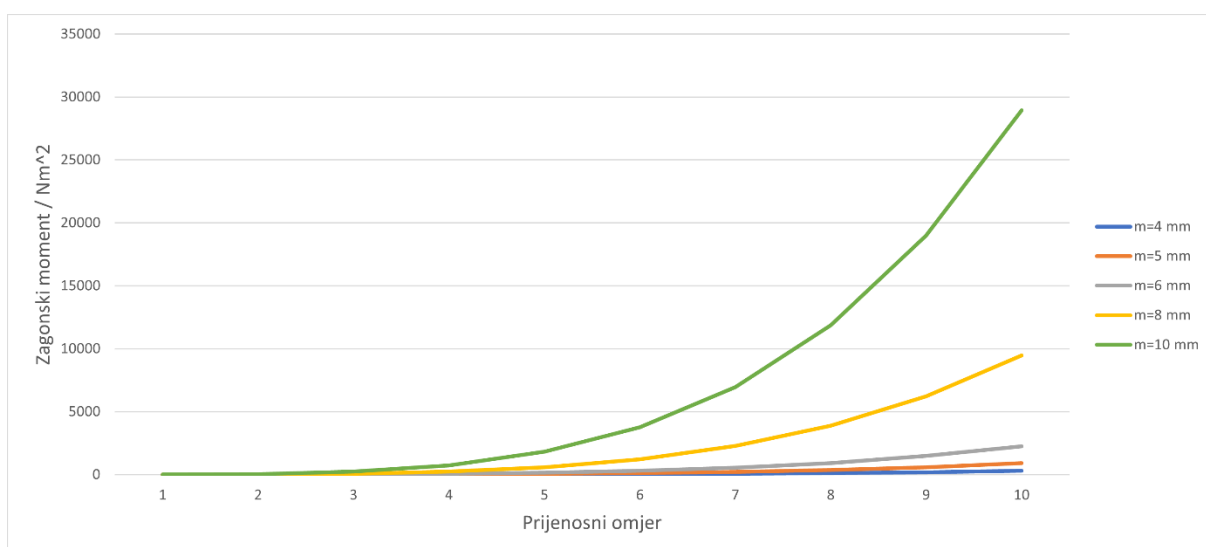
$$GD_{z_2}^2 = 2,89326 \cdot 10^{-5} \cdot i^4 \cdot m^5 \quad (2.6)$$

Slika 4 prikazuje kretanje zagonskog momenta gonjenog zupčanika za raspon vrijednosti prijenosnog omjera od 1 do 10 te za raspon vrijednosti modula 1. reda prednost od 1 mm do 3 mm prema (2.6).



**Slika 4. Zagonski moment gonjenog zupčanika za raspon vrijednosti prijenosnog omjera od 1 do 10 te za modul 1. reda prednosti od 1 mm do 3 mm prema (2.6).**

Slika 5 prikazuje kretanje zagonskog momenta gonjenog zupčanika za raspon vrijednosti prijenosnog omjera od 1 do 10 te za raspon vrijednosti modula 1. reda prednosti od 4 mm do 10 mm prema (2.6).

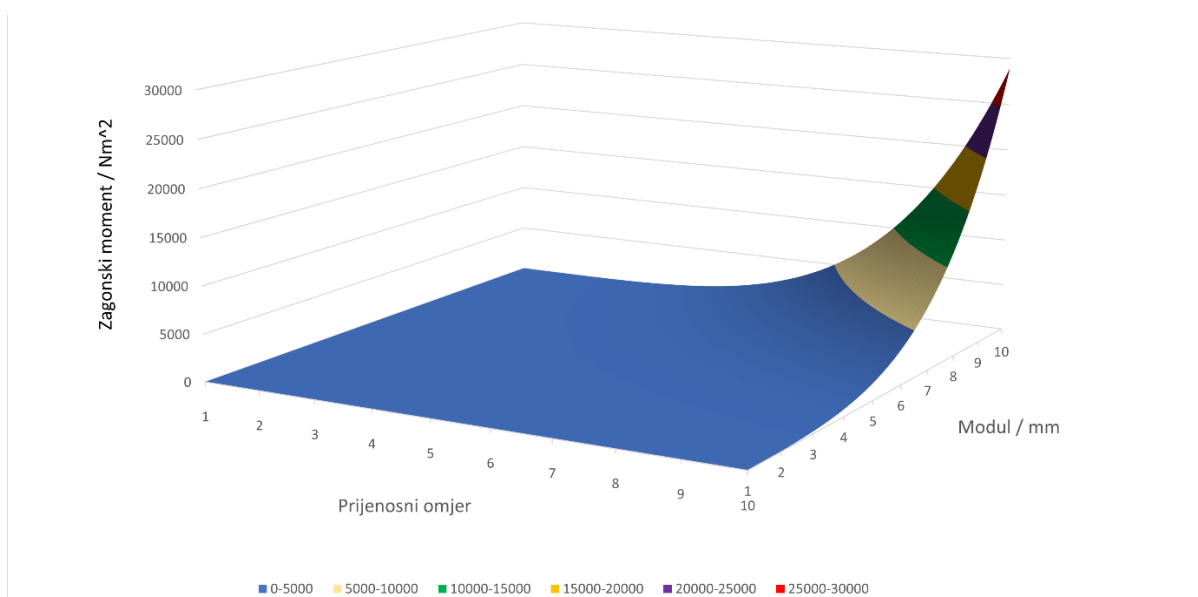


**Slika 5. Zagonski moment gonjenog zupčanika za raspon vrijednosti prijenosnog omjera od 1 do 10 te za modul 1. reda prednosti od 4 mm do 10 mm prema (2.6).**

Tablica 2 prikazuje vrijednosti zagonkog momenta gonjenog zupčanika za prijenosni omjer 10 te za modul 1. reda prednosti od 1 mm do 10 mm koje se također mogu očitati sa grafa na slici 4, odnosno na slici 5.

**Tablica 2. Vrijednosti zagonkog momenta sa slika 4 i 5 za prijenosni omjer 10 prema (2.6).**

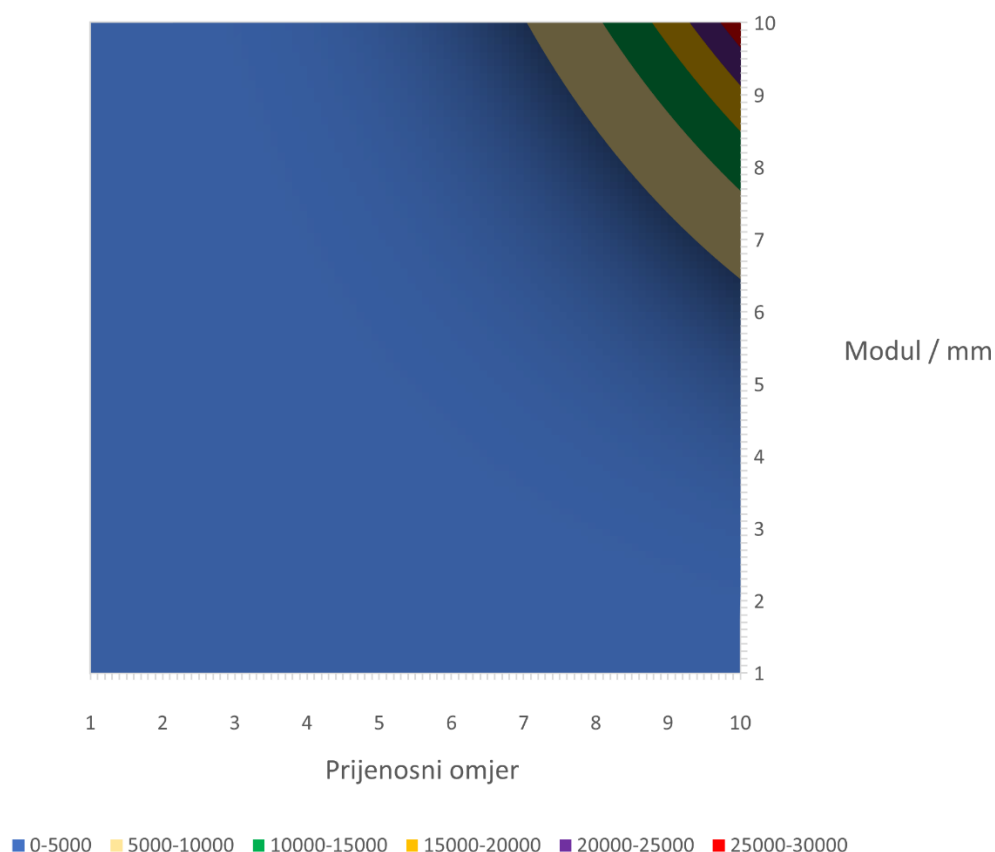
Modul / mm	Zagonski moment / Nm <sup>2</sup>
1	0,28933
1,25	0,88295
1,5	2,19707
2	9,25843
2,5	28,2545
3	70,3062
4	296,27
5	904,144
6	2249,8
8	9480,63
10	28932,6



**Slika 6. Zagonski moment gonjenog zupčanika za raspon vrijednosti prijenosnog omjera od 1 do 10 te za raspon vrijednosti modula od 1 mm do 10 mm prema (2.6).**

Slika 6 prikazuje kretanje zagonskog momenta gonjenog zupčanika prema (2.6) za raspon vrijednosti prijenosnog omjera od 1 do 10 te za raspon vrijednosti modula od 1 mm do 10 mm.

Slika 7 prikazuje tlocrt grafa prikazanog na slici 6.



**Slika 7. Tlocrt grafa sa slike 6.**

Analizirajući slike 6 i 7 može se vidjeti kako zagonski moment gonjenog zupčanika prema (2.6) ima umjeren rast u većem dijelu odabranog raspona prijenosnog omjera i modula. Međutim, vrijednost zagonskog momenta naglo se povećava od vrijednosti  $5000 \text{ Nm}^2$  pa nadalje što na slikama 6 i 7 predstavlja prijelaz sa plavog na žuto područje. Prema (2.2) porastom zagonskog momenta doći će i do porasta momenta potrebnog za ubrzanje svih gibajućih masa, a samim time i do porasta ukupnog momenta koji spojka treba prenijeti (2.3). Upravo zbog toga treba obratiti veliku pozornost na zagonski moment zupčanika, a ako je moguće potrebno ga je smanjiti na način da se smanji masa zupčanika.

### 3. UOBİČAJENA KONSTRUKCIJSKA RJEŠENJA ZA SMANJENJE MASE ZUPČANIKA

Mogućnosti smanjenja mase zupčanika ovise o samoj tehnologiji izrade zupčanika. Pri tome treba paziti u kojoj će mjeri smanjenje mase utjecati na krutost i nosivost zupčanika što će biti analizirano u ovome radu, uspoređujući dva zupčanika istih dimenzija, ali napravljenih s različitim pristupom smanjenju mase pojedinog zupčanika. Prema [5] smanjenje mase zupčanika utječe na promjenu vibracija koje se javljaju pri radu zupčanika tako da prilikom upuštanja zupčanika u rad treba kontrolirati da se vlastita frekvencija zupčanika nalazi van kritične vrijednosti kako ne bi došlo do rezonancije. Članak [6] uz analizu vibracija, spominje i promjenu u visini buke rada zupčanika nakon konstrukcijskih zahvata smanjenja mase tijela zupčanika. Pojedine metode smanjenja mase zupčanika imaju za negativnu posljedicu upravo povećanje buke pri velikim brzinama vrtnje tako da je buka još jedan faktor kojem treba obratiti veliku pažnju. Ukoliko se zupčanik sastavlja od više dijelova, treba obratiti pozornost na redoslijed sastavljanja, odnosno na redoslijed obrade pojedinih dijelova, obrađuju li se prije ili nakon sklapanja, svaka tehnologija ima svoje preporuke.

#### 3.1. Zavareni zupčanici

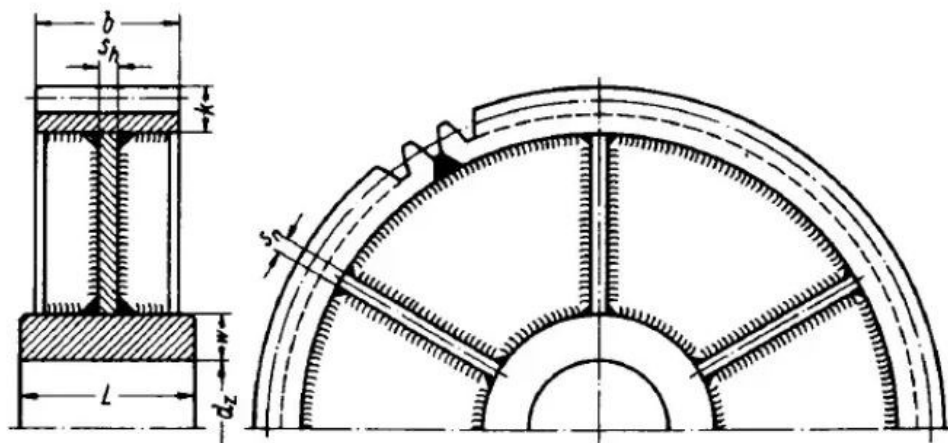
Kod male serije zupčanika, često se oblikovanje zupčanika ostvaruje na način da se dijelovi zupčanika spoje zavarivanje pri čemu je moguće dosta smanjiti ukupnu masu zupčanika. Kod takvih se konstrukcija najčešće koriste dijelovi zupčanika od različitih materijala pri čemu je vijenac od najkvalitetnijeg, a ostali dijelovi od manje kvalitetnog materijala. Zavare je potrebno strogo kontrolirati i unaprijed odredit odgovarajući tehnološki postupak kako bi eventualne deformacije izazvane zavarivanjem bile što niže. Preostala naprezanja uklanjaju se konačnom obradom nakon zavarivanja i eventualnog žarenja. Prednost ovakve izrade zupčanika je osim u smanjenoj masi i u smanjenom otpadnom materijalu, ali i u nižoj konačnoj cijeni [2].

Glavina ovakvih zupčanika je najčešće od valjanog okruglog čelika na koju se zavaruje ploča koja se najčešće autogeno reže iz lima. Ploča dodatno može biti olakšana pravilno raspoređenim izrezanim provrtima. Cijela konstrukcija može se dodatno ojačati dodavanjem rebra između glavine i vijenca. Vijenac se oblikuje savijanjem plosnatog profila zavarenog X zavarom [Slika 11]. Izrazito veliki zupčanici, radi jednostavnije montaže i transporta mogu se napraviti i od dva dijela [7].



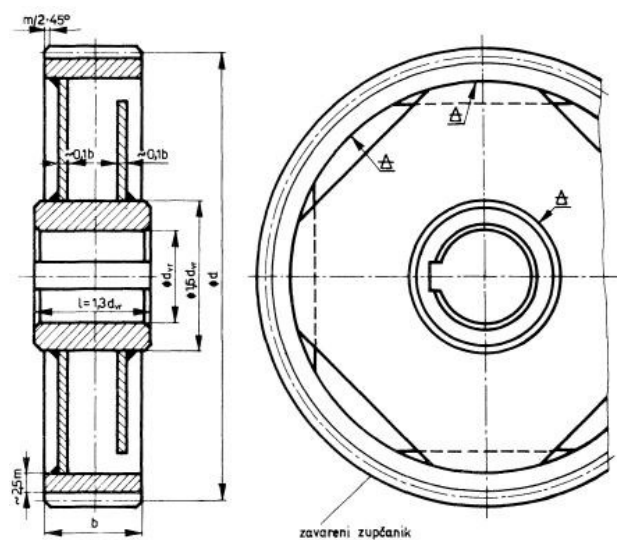


Slika 11 prikazuje sličnu metodu zavarivanja uz razliku što sada ploča ne nasjeda na glavinu i vijenac kao na slikama 8 i 9 već se pozicionira na sredinu i onda zavaruje te je ovdje ploča čitava, bez izrezanih provrta koji služe dodatnom smanjenju mase zupčanika.



Slika 11. Zavareni zupčanik 3 [7].

Slika 12 prikazuje malo drugačiji način zavarivanja zupčanika gdje se glavina i vijenac povezuju zavarivanjem s dvije međusobno zaokrenute ploče.



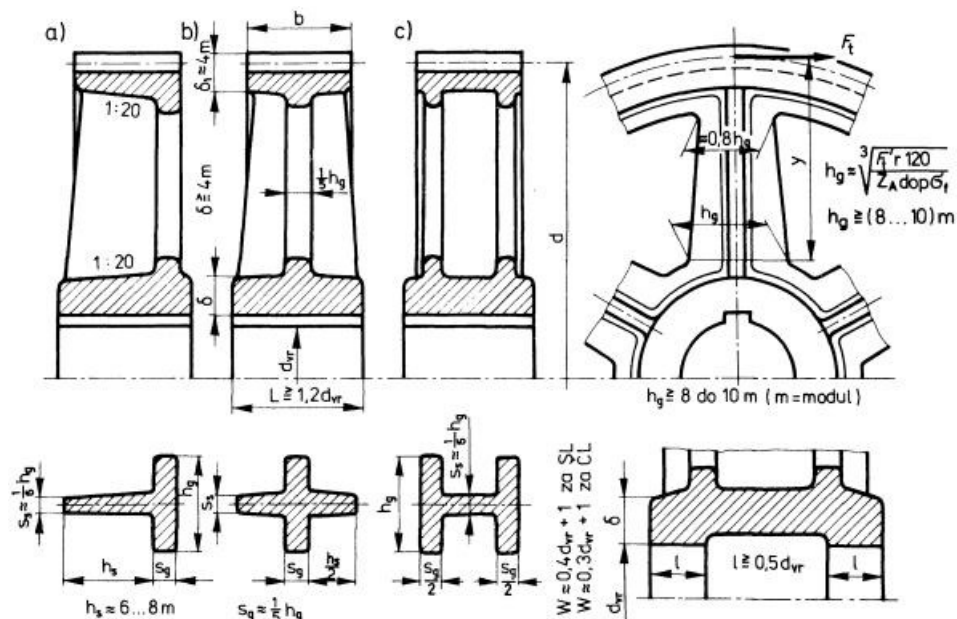
Slika 12. Zavareni zupčanik 4 [2].

Zbog tankih stijenki koje se javljaju kod zavarenih zupčanika, a što se može vidjeti iz prethodnih slika, pri velikim obodnim brzinama može doći do povećane buke [2].

### 3.2. Lijevani zupčanici

Zupčanici velikih dimenzija su najčešće lijevani te se ovom tehnologijom mogu napraviti zupčanici izrazito kompleksne geometrije, ali manje nosivosti. Lijevanjem se najčešće dobije zupčanik bez ozubljenja koje se naknadno urezuje, ali postoje i razne izvedbe gdje se i ozubljenje formira samim lijevanjem bez potrebe za daljnjom mehaničkom obradom. Kod velikih serija zupčanika ova tehnologija je izrazito povoljna zbog veće upotrebljivosti kalupa s time da je nužno napraviti kontrolu poroznosti. Treba obratiti pažnju na sami kalup te previdjeti eventualni otežani protok tamo gdje postoji promjena smjera kretanja rastaljenog metala ili gdje dolazi do nagle promjene presjeka. Na tim mjestima treba ostvariti blage prijelaze materijala. Također treba pri dizajniranju i izradi kalupa, odnosno zupčanika, izbjegavati gomilanje materijala na pojedinim mjestima da ne dođe do preostalih naprezanja i deformacija [2].

Manje izvedbe lijevanih zupčanika izrađuju se sa punim tijelom, odnosno diskom ili sa pločom i rebrima ukoliko se želi dobiti zupčanik smanjene mase [Slika 14]. Lijevani zupčanici promjera većeg od 500 mm izrađuju se sa paocima koji mogu imati eliptični presjek, a za izrazito velike zupčanike paoci imaju presjek u obliku slova I [Slika 13]. Slično kao i kod zavarenih zupčanika, radi pojednostavljenja transporta i montaže moguće je zupčanik podijeliti i odlijevati u segmentima te kasnije spajati vijcima. Ukoliko zupčanik treba imati vijenac od visokovrijednog legiranog čelika, a tijelo i glavina mogu biti od lijevanog materijala, tada se vijenac na tijelo zupčanika toplo navlači [4].



Slika 13. Lijevani zupčanici, a) i b) s pločom i rebrima, c) s paocima I presjeka [2].



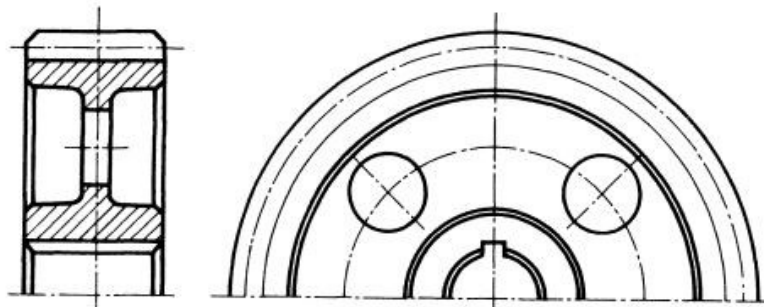
Slika 14. Primjer sličan zupčaniku b) sa slike 13, ali s kosim zubima [8].

Da bi odljevak mogao jednostavno izaći iz kalupa potrebno je predvidjeti nagib stijenki čija se preporučena vrijednost može vidjeti na zupčaniku a) na slici 13.

### 3.3. Kovani zupčanici

Kada se traži velika specifična nosivost, tada se zupčanici izrađuju kovanjem. Kod malih serija, zupčanici se izrađuju najčešće prešanjem iz valjanog materijala dok se kod velikih serija zupčanici kuju u ukovnjima. Kao što se spomenulo u točki 3.2., zupčanike je moguće sklapati tako da se vijenac od visokokvalitetnog legiranog čelika toplo navuče na tijelo zupčanika. Takav vijenac je najčešće dobiven kovanjem jer se dobije bolja struktura materijala vijenca, odnosno veća žilavost. Prilikom oblikovanja zupčanika treba izbjeći nagomilavanje materijala, paziti na preporučeni nagib stijenki i naravno imati blage prijelaze gdje je to moguće [4].

Kao i kod lijevanja, postoje metode gdje se kovanjem dobije zupčanik bez ozubljenja koje se naknadno urezuje, postoje metode gdje se oblikuje ozubljenje, ali treba na daljnju obradu te postoji precizno kovanje gdje se ozubljenje formira tijekom kovanja sa jako malim odstupanjima profila zuba nakon čega ne treba daljnju obradu [9]. Slika 15 prikazuje jedno od rješenja kovanog zupčanika sa smanjenom masom, a slika 16 prikazuje sličan primjer iz prakse, uz drugačiju raspodjelu provrta za smanjenje mase.



Slika 15. Zupčanik kovan u ukovnju [2].

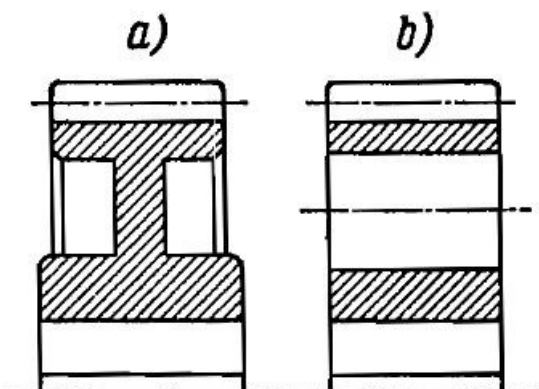


Slika 16. Primjer sličan zupčaniku sa slike 15, ali s kosim zubima [9].

### 3.4. Obrada odvajanjem čestica

Zupčanici se također mogu napraviti iz velikih čeličnih šipki. Kreće se od tokarenja čelične šipke gdje se skida materijal gdje nije potreban. Brzinom linearnog gibanja tokarskog noža ostvaruje se željena površinska hrapavost koja se kasnije može dodatno korigirati daljnjom površinskom obradom. Ukoliko se samim tokarenjem više ne bi smjelo skidati materijala sa tijela zupčanika, poseže se za bušenjem ili glodanjem provrta na određenoj radijalnoj udaljenosti od središta zupčanika. Tokareni zupčanici su uglavnom manjih i srednjih veličina, a veliki tokareni zupčanici se izrađuju kada postoje posebni zahtjevi na sigurnost i brzinu vrtnje. Nakon obrade odvajanjem čestica, izrađuje se ozubljenje te zupčanik odlazi na daljnju toplinsku

obradu. Veliki nedostatak obrade odvajanjem čestica je puno nepotrebnog, uklonjenog materijala.



Slika 17. a) Tokareni zupčanik sa smanjenom debljinom u sredini, b) tokareni zupčanik sa bušenim provrtima.



Slika 18. Tokareni zupčanik sa smanjenom debljinom u sredini i bušenim provrtima.

### 3.5. Metalurgija praha – kompaktiranje

Kompaktiranje je postupak zbijanja čestica praha u željeni oblik. Zupčanci nastali kompaktiranjem praškastog materijala najčešće se koriste u automobilskoj industriji. Najveća prednost zupčanika nastalih ovom tehnologijom je proizvodnost jer je puno brže i jeftinije napraviti zupčanic od praha nego zupčanic istih dimenzija nekom drugom tradicionalnom tehnologijom. Proizvod je izrazito precizan tako da nije potrebna daljnja mehanička obrada. Uz cijenu, prednost ovakvih zupčanika je u tome što su lagani i što se mogu kompaktirati iz različitih vrsta praha. Mana zupčanika dobivenih kompaktiranjem je niska čvrstoća i niska otpornost na trošenje te im je stoga upotreba ograničena [10]. Na slici 19 može se vidjeti kako je i ovom tehnologijom moguće napraviti provrte na tijelu zupčanika s ciljem smanjenja mase.



Slika 19. Kompaktirani zupčanic [8].

### 3.6. Metalurgija praha – sinteriranje

Sinteriranje je drugačiji postupak od kompaktiranja budući da se ovdje čestice praha pod utjecajem topline povezuju u čvrstu masu sve dok se ne dobije željeni proizvod. Najrazvijenija metoda sinteriranja je DMLS (direktno lasersko sinteriranje metala) te se najčešće koristi za proizvode u zrakoplovnoj industriji te u autoindustriji. Ovom tehnologijom je moguće napraviti izrazito kompleksne dijelove koje nije moguće napraviti nijednom drugom tehnologijom.

Konačni proizvodi imaju visoku čvrstoću i izrazito povoljna mehanička svojstva. Proizvodi koji se naprave ovom tehnologijom često prije prolaze kroz topološku optimizaciju, postupak istovremenog smanjivanja mase i povećanja krutosti koji će se obraditi kasnije u ovome radu. Najveći nedostatak ove metode je izrazito visoka cijena i ograničenost volumena koji je moguće napraviti ovom tehnologijom [12]. Također vrijeme da se proizvod napravi ovom tehnologijom je puno duže u usporedbi sa ostalim spomenutim tehnologijama u ovome radu. Na slici 20 je prikazan zupčanik napravljen DMLS tehnologijom. Tijelo zupčanika je zamijenjeno takozvanom rešetkastom strukturom koja povezuje vijenac sa glavinom te je zbog takve šupljikave strukture masa ovog zupčanika drastično smanjena.



**Slika 20. Zupčanik nastao DMLS tehnologijom [11].**

## 4. REFERENTNI ZUPČANIK

U ovome radu, detaljno će se uspoređivati dvije metode smanjenja mase zupčanika, obrada odvajanjem čestica i topološka optimizacija. Referentni zupčanik na kojem će se provoditi metode smanjenje mase dobit će se preko jednadžbe približnog modula prema [13]. Usporedba se nastavlja na analizu zagonskog momenta te su tako uz početne uvjete zadane u tablici 1 preostali početni uvjeti potrebni za izračun približnog modula zupčanog para prikazani u tablici 3. Promatrani sustav je jednostupanjski prijenosnik s ravnim zubima [13] sa svim potrebnim elementima sustava.

**Tablica 3. Ulazni podatci promatranog sustava.**

Potrebna snaga radnog stroja $P$ / kW	26
Brzina vrtnje elektromotora $n_{EM}$ / o/min	2850
Standardni prijenosni omjer $i$	6,5
Zagonski moment radnog stroja $GD_{RS}^2$ / Nm <sup>2</sup>	80
Vrijeme uključivanja elektromotora $t_u$ / s	0,9
Torzijsko opterećenje	Jednosmjerno
Pogon uključen	Intermitirajuće
Čelik kaljen / nekaljen	Nekaljen
Faktor sigurnosti korijena zuba $S_F$	2
Faktor sigurnosti protiv stvaranja rupičenja $S_H$	2

### 4.1. Modul zupčanika

Do modula zupčanog para doći će se preko jednadžbe orijentacijskog modula prema [13]. Kod prvog proračuna modula nisu uzeti u obzir svi djelujući zagonski momenti jer se ne mogu znati zbog nedovoljno informacija o dimenzijama elemenata sustava. Oni će se ubaciti kasnije u istu jednadžbu te će se tada vidjeti stvarni potrebni modul.



$$m \leq \sqrt[3]{\frac{i+1}{i} \cdot \frac{2 \cdot T_{1 \max}}{\lambda \cdot z_1^2 \cdot \sigma_{\text{HP}}^2} \cdot K_{\text{H}\alpha} \cdot K_{\text{H}\beta} \cdot Z_{\text{M}}^2 \cdot Z_{\text{H}}^2 \cdot Z_{\epsilon}^2} \quad (4.1)$$

gdje je:

$\sigma_{\text{HP}} = 310 \text{ MPa}$  – dopušteno Hertzovo naprezanje za odabrani materijal,

$Z_{\text{M}} = 189,84\sqrt{\text{MPa}}$  – faktor materijala za zupčanike materijala čelik / čelik,

$Z_{\text{H}} = 2,4$  – faktor oblika, orijentacijski,

$Z_{\epsilon} = 1$  – faktor stupnja prekrivanja, orijentacijski,

$K_{\text{H}\alpha} = 1$  – faktor raspodjele opterećenja na pojedine zube kod opteretivosti boka, orijentacijski,

$K_{\text{H}\beta} = 1$  – faktor raspodjele opterećenja po dužini boka zuba, orijentacijski,

$\lambda = 25$  – utjecaj načina ležištenja [13].

$T_{1 \max}$  je maksimalni okretni moment pogonskog zupčanika koji uzima u obzir i moment ubrzanja masa, odnosno zagonski moment elemenata sustava. Radni okretni moment iznosi:

$$T_0 = \frac{P}{\omega \cdot \eta'_{\text{uk}}} = \frac{26000}{2 \cdot \pi \cdot \frac{2850}{60} \cdot 0,93} = 93,6735 \text{ Nm.} \quad (4.2)$$

gdje je:

$\eta'_{\text{uk}} = 0,93$  – orijentacijski stupanj iskoristivosti sustava prema [13].

Zagonski moment (2.1) kada se reducira na pogonsko vratilo iznosi:

$$GD_{\text{red}}^2 = GD_{\text{RS}}^2 \cdot \left(\frac{1}{i}\right)^2 = 80 \cdot \left(\frac{1}{6,5}\right)^2 = 1,8935 \text{ Nm}^2. \quad (4.3)$$

Kada se reducirani zagonski moment preko (2.1) ubaci u (2.2), maksimalni okretni moment sada iznosi:

$$T_{1 \max} = T_0 + T_{\epsilon} = 93,6735 + 15,99 = 109,664 \text{ Nm.} \quad (4.4)$$

Kada se sve vrijednosti sada ubace u (4.1) dobije se orijentacijska vrijednost modula, zaokružena na prvu veću vrijednost standardnog modula 1. reda prednosti.

$$m = 4,814 \text{ mm} \cong 5 \text{ mm.} \quad (4.5)$$

Orijentacijski modul će se sada koristiti za izračunavanje dimenzija zupčanika, a samim time i zagonskih momenata zupčanika. Diobeni promjer pogonskog zupčanika iznosi:

$$d_1 = m \cdot z_1 = 5 \cdot 14 = 70 \text{ mm.} \quad (4.6)$$

Zagonski moment pogonskog zupčanika prema (2.4) iznosi:

$$GD_{z_1}^2 = 4 \cdot 9,81 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{0,07^2 \cdot \pi}{4} \cdot 0,125 \cdot 7820 \cdot \left(\frac{0,07}{2}\right)^2 = 0,0904 \text{ Nm}^2. \quad (4.7)$$

Diobeni promjer gonjenog zupčanika iznosi:

$$d_2 = m \cdot i \cdot z_1 = 5 \cdot 6,5 \cdot 14 = 455 \text{ mm.} \quad (4.8)$$

Zagonski moment gonjenog zupčanika prema (2.4) iznosi:

$$GD_{z_2}^2 = 4 \cdot 9,81 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{0,455^2 \cdot \pi}{4} \cdot 0,125 \cdot 7820 \cdot \left(\frac{0,455}{2}\right)^2 = 161,4 \text{ Nm}^2. \quad (4.9)$$

Isti rezultat dobije se ako se vrijednosti orijentacijskog modula i standardnog prijenosnog omjera ubace u (2.6).

Prema [13] odabrana je elastična spojka zagonskog momenta  $GD_S^2 = 1,85 \text{ Nm}^2$ .

Reducirani zagonski moment na pogonsko vratilo sada iznosi:

$$GD_{\text{red}}^2 = GD_{z_1}^2 + (GD_{z_2}^2 + GD_S^2 + GD_{RS}^2) \cdot \left(\frac{1}{i}\right)^2 = 5,8478 \text{ Nm}^2. \quad (4.10)$$

Moment potreban za ubrzanje masa (2.2) sada iznosi:

$$T_{\varepsilon} = \frac{GD_{\text{red}}^2 \cdot n_1}{375 \cdot t_u} = \frac{5,8478 \cdot 2850}{375 \cdot 0,9} = 49,381 \text{ Nm}^2. \quad (4.11)$$

Maksimalni okretni moment sada iznosi:

$$T_{1\text{max}} = T_0 + T_{\varepsilon} = 93,6735 + 49,381 = 143,05 \text{ Nm}. \quad (4.12)$$

Kada se nove vrijednosti ubace u (4.1) dobije se potrebna vrijednost modula zaokružena na prvu veću vrijednost standardnog modula 1. reda prednosti.

$$m = 5,26 \text{ mm} \cong 6 \text{ mm}. \quad (4.13)$$

Budući da je potreban modul sada 6 mm, postupak bi se trebao ponoviti sa novim modulom, nakon čega bi jednadžba ponovno pokazala da je potreban veći modul, odnosno rješenje jednadžbe divergira. Glavni razlog tome je što zagonski moment gonjenog zupčanika ima veliki utjecaj na modul para u kombinaciji sa izrazito intermitirajućim pogonom, velikim brzinama vrtnje i kratkim vremenom upuštanja u rad. Slika 6 dokazuje divergenciju rješenja jednadžbe. Zagonski moment gonjenog zupčanika počne sve intenzivnije rasti kako se modul i prijenosni omjer povećavaju. Ukoliko je zahtjevan modul zupčanog para 5 mm, jasno je da se to sa postojećim uvjetima neće moći realizirati. Upravo zbog toga je potrebno napraviti konstrukcijske zahvate na gonjenom zupčaniku i vidjeti kako je moguće i za koliko je potrebno smanjiti masu zupčanika kako bi se na taj način smanjio i zagonski moment zupčanika.

Potrebno je saznati kolika smije biti maksimalna masa zupčanika kako bi modul prema (4.1) iznosio upravo 5 mm te će se tako moći izračunati za koliko se mora smanjiti masa gonjenog zupčanika diobenog promjera  $d_2 = 455 \text{ mm}$ .

Ukoliko se raspisani izraz (4.10) ubaci u (4.11) i ako se zatim cijeli izraz za maksimalni okretni moment raspiše u (4.1), moguće je dobiti koliki će iznositi zagonski moment gonjenog zupčanika za modul 5 mm i početne uvjete prema Tablica 1 i Tablica 3.

$$GD_{z_2}^2 \leq \left( \frac{m^3 \cdot i \cdot \lambda \cdot z_1^2 \cdot \sigma_{HP}^2}{2000 \cdot (1+i) \cdot K_{H\alpha} \cdot K_{H\beta} \cdot Z_M^2 \cdot Z_H^2 \cdot Z_\varepsilon^2} - \frac{P}{2 \cdot \pi \cdot n_1 \cdot \eta'_{uk}} \right) \cdot \frac{g \cdot t_u \cdot i^2}{n_1 \cdot 1,5708} - \left( GD_{z_1}^2 + [GD_S^2 + GD_{RS}^2] \cdot \frac{1}{i^2} \right) \cdot i^2. \quad (4.14)$$

Nakon što se ubace sve vrijednosti, zagonski moment gonjenog zupčanika da modul zupčanog para prema (4.1) ostane 5 mm iznosi:

$$GD_{z_2}^2 \leq 60,311 \text{ Nm}^2. \quad (4.15)$$

Masa gonjenog zupčanika za zagonski moment iz (4.9) prema (2.4) iznosi:

$$m'_z = \frac{2 \cdot GD_{z_2}^2}{g \cdot d_2^2} = \frac{2 \cdot 161,4}{9,81 \cdot 0,455^2} = 158,94 \text{ kg}. \quad (4.16)$$

Masa gonjenog zupčanika za zagonski moment iz (4.15) prema (2.4) iznosi:

$$m''_z = \frac{2 \cdot GD_{z_2}^2}{g \cdot d_2^2} = \frac{2 \cdot 60,311}{9,81 \cdot 0,455^2} = 59,393 \text{ kg}. \quad (4.17)$$

Masa koja se mora smanjiti gonjenom zupčaniku zagonskog momenta prema (4.9) da bi se dobio zagonski moment gonjenog zupčanika prema (4.15) iznosi:

$$\Delta m = m'_z - m''_z = 158,94 - 59,393 = 99,547 \text{ kg}. \quad (4.18)$$

Relativna razlika mase između referentnog i optimiranog zupčanika će iznositi:

$$\Delta m(\%) = \frac{m''_z - m'_z}{m'_z} = \frac{59,393 - 158,94}{158,94} = -0,626 = -62,6 \%. \quad (4.19)$$

## 4.2. Dimenzije zupčanika

Razmak osi vratila prema (4.6) i (4.8) iznosi:

$$a = \frac{d_1 + d_2}{2} = \frac{70 + 455}{2} = 262,5 \text{ mm.} \quad (4.20)$$

Razmak na koji će se zupčanici ugraditi iznosi  $a_w = 265 \text{ mm}$ . Zahvatni kut iznosi  $\alpha = 20^\circ$ , a pogonski kut nakon ugrađivanja zupčanika na razmak  $a_w$  prema [13] iznosi:

$$\alpha_w = \cos^{-1} \left( a \cdot \frac{\cos \alpha}{a_w} \right) = \cos^{-1} \left( 262,5 \cdot \frac{\cos 20}{265} \right) = 21,436^\circ. \quad (4.21)$$

Suma faktora pomaka profila prema [13] iznosi:

$$x_1 + x_2 = (z_1 + z_2) \cdot \frac{ev(\alpha_w) - ev(\alpha)}{2 \cdot \tan \alpha} = (14 + 91) \cdot \frac{0,01849 - 0,0149}{2 \cdot 0,364} =$$

$$x_1 + x_2 = 0,5178. \quad (4.22)$$

Odabrani faktori pomaka profila prema [13] iznose:

$$x_1 = 0,4484,$$

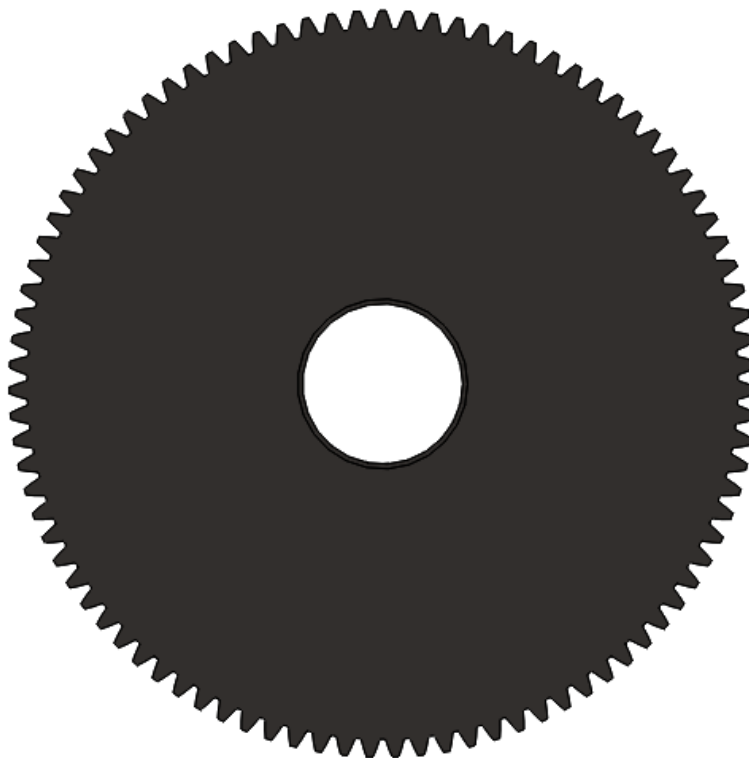
$$x_2 = 0,069. \quad (4.23)$$

Pomak profila se koristi kako bi se izbjegla podrezanost korijena zuba pogonskog zupčanika, ali i kako bi se poboljšala svojstva zupčanog para. Naime, pozitivnim pomakom profila debljina zuba se povećava, samim time i zub postaje u korijenu jači, uvjeti klizanja su povoljniji te je opteretivost ozubljenja veća [2]. Zupčani par predstavlja V+ par, a tablica 4 prikazuje karakteristike referentnog, gonjenog zupčanika prema [13]. Kontrolom tjemene zračnost prema [2] nije potrebno skraćenje tjemena zupčanika.

**Tablica 4. Karakteristike referentnog zupčanika.**

Broj zuba	$z_2$	91
Modul	$m$	5 mm
Promjer diobene kružnice	$d_2$	455 mm
Pomak profila	$x_2 \cdot m$	0,345 mm
Promjer temeljne kružnice	$d_{b2}$	427,56 mm
Promjer kinematske kružnice	$d_{w2}$	459,33 mm
Promjer podnožne kružnice	$d_{f2}$	443,19 mm
Promjer tjemene kružnice	$d_{a2}$	465,69 mm

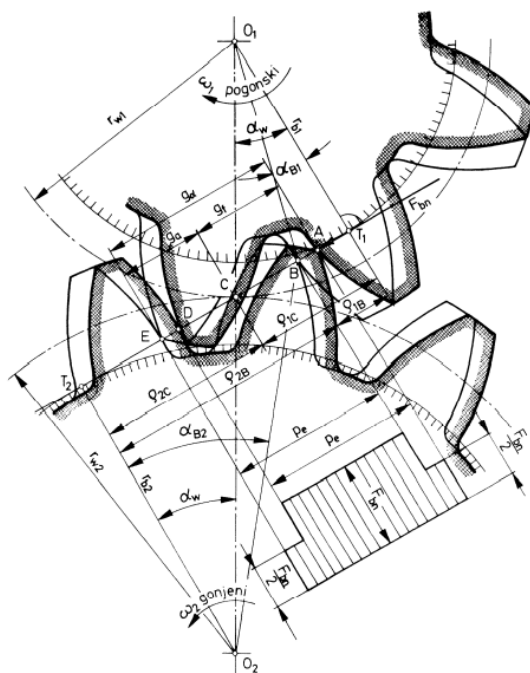
Pretpostavit će se da je spoj vratila i zupčanika ostvaren steznim spojem te je prema tome odabran promjer vratila  $d_{vr} = 100$  mm. Prema [14] i [22] izračunat je radijus zaobljenja korijena zuba na kritičnom presjeku te iznosi  $\rho_F = 1,912$  mm. Slika 21 prikazuje referentni zupčanik napravljen u programu SolidWorks.

**Slika 21. CAD model referentnog zupčanika.**

Budući da se u analizi zagonskog momenta zupčanik pretpostavio kao puno cilindrično tijelo, već samim provrtom za vratilo masa je smanjena tako da je sada masa referentnog zupčanika  $m_{z,ref} = 151,275$  kg.

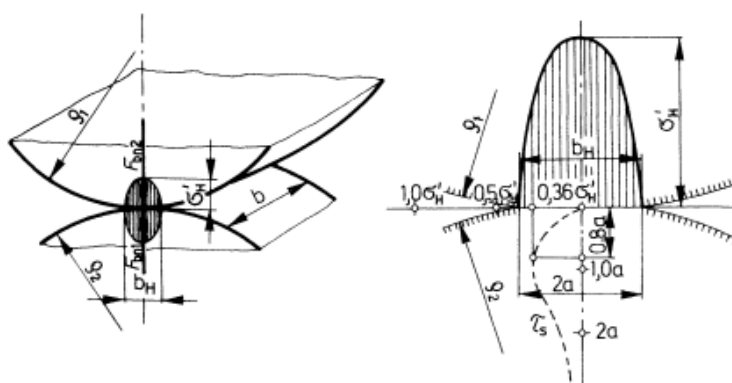
### 4.3. Analiza naprezanja

Kao što je spomenuto ranije, prijenos snage kod zupčanika se ostvaruje ozubljenjem. Budući da se zubi koji su u zahvatu stalno izmjenjuju tako se izmjenjuje i koncentracija naprezanja. Zub jednog zupčanika prilikom prijenosa snage preko zuba drugog zupčanika je opterećen istovremeno na savijanje, tlak i smik. Karakteristika ozubljenja koja se može jako razlikovati kod različitih vrsta ozubljenja [Slika 1] je stupanj prekrivanja  $\epsilon_\alpha$  koji predstavlja prosječan broj zubi u zahvatu. Za dva zupčanika s ravnim zubima, iskustvene vrijednosti stupnja prekrivanja se kreću u granicama od 1,15 do 1,65. Promatrani zupčani par ima stupanj prekrivanja 1,548, odnosno ako se promatra jedan zub, on će snagu prenositi većinu vremena skupa sa još jednim parom zubi u zahvatu, a ostatak vremena će snagu prenositi sam. Slika 22 prikazuje idealni slučaj raspodjele opterećenja tokom zahvata [2]. Idealni zato što je pretpostavljena visoka točnost zupčanika dok u stvarnosti, raspodjela izgleda nešto drugačije.



Slika 22. Raspodjela opterećenja kod istovremenog zahvata dva para zubi [2].

Prema slici 22, u točki E, par zubi koji je od prije bio u zahvatu izlazi iz zahvata te sada samo jedan par zubi u točki B prenosi opterećenje. Upravo u tom trenutku će naprezanje u korijenu zuba gonjenog zupčanika biti najveće te će se to naprezanje uspoređivati na referentnom i optimiranim zupčanicima. Iako se na tlačnoj strani zuba nalaze maksimalna naprezanja, analizirat će se vlačna strana jer tamo postoji opasnost od javljanja plastičnih deformacija. Osim naprezanja u korijenu zuba, uspoređivat će se i Hertzov pritisak u točki B koji se javlja između bokova dodirujućih zubi. Slika 23 prikazuje kontaktna naprezanja koja se javljaju na dodirnoj elastično deformiranoj površini dvaju zaobljenih tijela.



Slika 23. Kontaktna naprezanja na dodirnim bokovima dvaju zaobljenih tijela [2].

#### 4.3.1. Naprezanje na savijanje u korijenu zuba prema ISO 6336

Prema ISO 6336, maksimalno naprezanje na savijanje u korijenu zuba idealnog zupčanika s ravnim zubima i zanemarenim dodatnim faktorima iznosi:

$$\sigma_F = \frac{F_t}{b \cdot m} \cdot Y_F \cdot Y_S \cdot Y_B, \quad (4.24)$$

gdje je:

$Y_F$  – faktor oblika,

$Y_S$  – faktor ispravka naprezanja,

$Y_B$  – faktor debljine vijenca,

$F_t$  – obodna sila na diobenom promjeru [14].



Obodna sila na diobenom promjeru iznosi:

$$F_t = \frac{2 \cdot T_{1\max}}{d_1} = \frac{2 \cdot 143050}{70} = 4087,1 \text{ N.} \quad (4.25)$$

Maksimalni okretni moment gonjenog zupčanika iznosi:

$$T_{2\max} = T_{1\max} \cdot i \cdot \eta'_{z,bb} = 143050 \cdot 6,5 \cdot 0,957 = 889843 \text{ Nmm.} \quad (4.26)$$

gdje je:

$\eta'_{z,bb}$  - iskoristivost prijenosa snage između pogonskog i gonjenog zupčanika [13].

Prema [14], faktor oblika za referentni zupčanik iznosi  $Y_F = 1,4102$ , a faktor ispravka napreznja  $Y_S = 2,251$ . Faktor debljine vijenca se uzima u obzir samo kada vijenac zupčanika ima određeni omjer debljine vijenca i visine zuba, a budući da referentni zupčanik nema vijenac već je cijeli zupčanik iz jednog komada, uzet će se da je  $Y_B = 1$ .

Maksimalno napreznje na savijanje u korijenu zuba prema (4.24) sada iznosi:

$$\sigma_F = \frac{4087,1}{125 \cdot 5} \cdot 1,4102 \cdot 2,251 \cdot 1 = 20,7583 \text{ MPa.} \quad (4.27)$$

Dozvoljeno napreznje na savijanje u korijenu zuba za čelik Ck60 iznosi:

$$\sigma_{FP} = \frac{\sigma_{Flim}}{S_F} = \frac{220}{2} = 110 \text{ MPa.} \quad (4.28)$$

Maksimalno napreznje na savijanje u korijenu zuba je manje od dozvoljenog tako da zupčanik zadovoljava kontrolu napreznja korijena za sigurnost 2. Vrijednost maksimalnog napreznja (4.27) će u daljnjem proračunu poslužiti kao referentna vrijednost napreznja jer će se usporediti sa napreznjem dobivenim metodom konačnih elemenata.

### 4.3.2. Naprezanje na bokovima zubi

Prema [2] naprezanje na bokovima zubi idealnog zupčanika s ravnim zubima i zanemarenim dodatnim faktorima iznosi:

$$\sigma_H = Z_M \cdot Z_H \cdot Z_\varepsilon \cdot \sqrt{\frac{i+1}{i} \cdot \frac{F_t}{b \cdot d_1}} \quad (4.29)$$

Za izračun orijentacijskog modula koristile su se orijentacijske vrijednosti faktora, ali sada će se uzeti računске vrijednosti prema [2], odnosno  $Z_M = 189,84\sqrt{\text{MPa}}$ ,  $Z_H = 2,4$  i  $Z_\varepsilon = 0,904$ . Stvarna vrijednost naprezanja na bokovima zubi u točki C prema slici 22 sada iznosi:

$$\sigma_H = 189,84 \cdot 2,4 \cdot 0,904 \cdot \sqrt{\frac{7,5}{6,5} \cdot \frac{4087,1}{125 \cdot 70}} = 302,37 \text{ MPa.} \quad (4.30)$$

Naprezanje za točku B se dobije množenjem (4.30) sa faktorom zahvata u točki B koji se dobije prema [13]:

$$\sigma_{HB} = \sigma_H \cdot Z_B = 302,37 \cdot 1,0413 = 314,86 \text{ MPa.} \quad (4.31)$$

Dozvoljeno naprezanje na bokovima zubi za čelik Ck60 iznosi:

$$\sigma_{HP} = \frac{\sigma_{Hlim}}{S_H} = \frac{620}{2} = 310 \text{ MPa.} \quad (4.32)$$

Naprezanje na bokovima zubi u točki B ispadne veće od dozvoljenog naprezanja za sigurnost 2 te prema tome referentni zupčanik mora biti od čvršćeg materijala, ali zbog male relativne razlike između dobivenog i dozvoljenog naprezanja, pretpostavit će se da zupčanik zadovoljava sigurnost i usporediti sa naprezanjem koje se dobije metodom konačnih elemenata.

### 4.3.3. Naprezanja i pomaci dobiveni programskim paketom Ansys

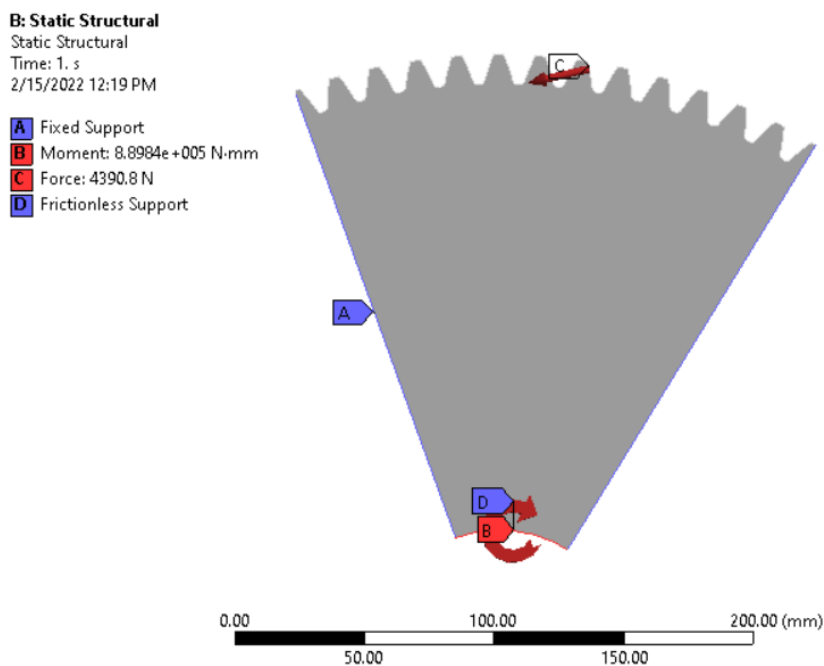
Jednadžba (4.24) vrijedi samo za pune zupčanike ili zupčanike sa sektorskim otvorima gdje omjer debljine vijenca i visine zuba utječe na naprezanja u korijenu te će za omjer manji od 1,2 naprezanja u korijenu biti veća nego kod punog zupčanika za faktor debljine vijenca  $Y_B$ . Za jednadžbu (4.29) nije napomenuto u kojim slučajevima vrijedi tako da će pri odabiru odgovarajućeg broja konačnih elemenata upotrijebljenih za analizu naprezanja zupčanika referentnim poslužiti upravo izračunato naprezanje u korijenu zuba (4.24). Referentni zupčanik analizirat će se na način da će se u programu koristiti samo jedna sedmina zupčanika promatrana kao 2D tijelo sa debljinom  $b = 125$  mm. Normalna sila na bok zuba  $F_{bn}$  će djelovati u točki B [Slika 22] na odabranom zubu i na površini  $b_H$  [Slika 23] koja prema [2] iznosi 0,126 mm. Normalna sila na bok zuba iznosi:

$$F_{bn} = \frac{F_t}{\cos \alpha_w} = \frac{4087,1}{\cos 21,436^\circ} = 4390,83 \text{ N.} \quad (4.33)$$

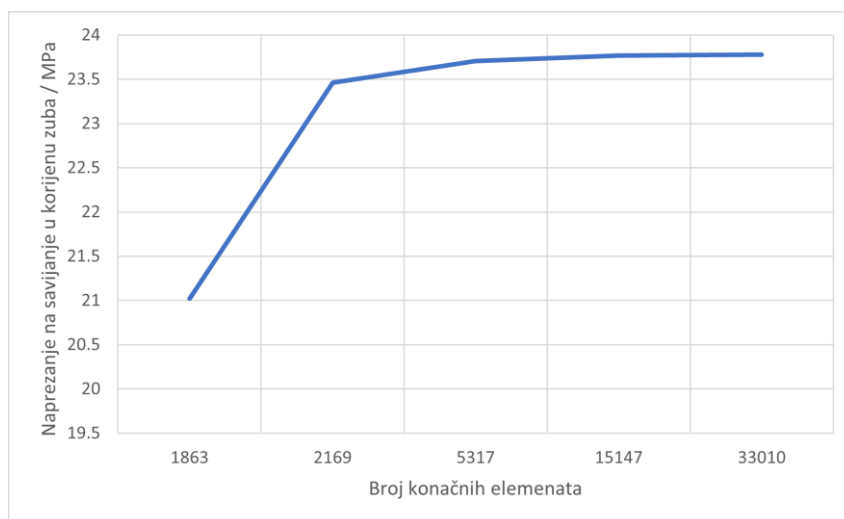
Moment  $T_{2max}$  koji djeluje na promjeru glavine ubačen je kao reakcijski koji pokreće vratilo koje je steznim spojem spojeno sa zupčanicom, a dosjedna površina je postavljena tako da onemogućuje pomake u smjeru okomice na promatranu površinu sedmine zupčanika. Reakcijske sile i momente program u pravilu sam izračuna, ali zbog statičke analize samo jedne sedmine zupčanika gdje će se pokazati da naprezanja na zubu nemaju skoro pa nikakav utjecaj na naprezanja kod glavine zupčanika zbog velike udaljenosti između djelovanja opterećenja, odabrane su ovakve postavke. Bočne stranice promatrane sedmine zupčanika postavljene su kao uklještenje jer sa dovoljnom sigurnošću možemo pretpostaviti da sila koja djeluje na zub neće bitno utjecati na dijelove punog zupčanika toliko udaljene od hvatišta sile što će se analizom i dokazati. Slika 24 prikazuje sedminu zupčanika sa svim opterećenjima i osloncima.

Da bi vrijednosti naprezanja dobivene ovom metodom bile ispravne potrebno je analizirati promjenu vrijednosti naprezanja za različite veličine konačnih elemenata i provjeriti kojoj konačnoj vrijednosti rješenje konvergira. Slika 25 prikazuje promjenu naprezanja na tlačnoj strani korijena zuba za različit broj, odnosno veličinu konačnih elemenata. Mreža konačnih elemenata nije ista po cijeloj površini sedmine zupčanika već je odabrano da se na promatranom zubu i susjednim bokovima prethodnog i sljedećeg zuba veličina konačnih elemenata smanjuje

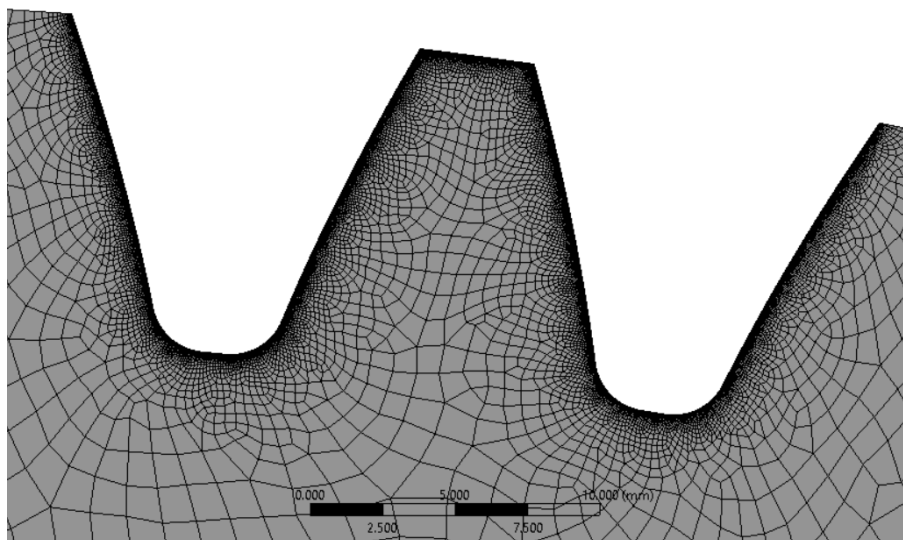
[Slika 26]. Odabran je dominantni osnovni pravokutni konačni element drugog reda koji se transformira u osnovni četverokutni izoparametrijski element drugog reda. Iste ili slične postavke mreže konačnih elemenata koristit će se kasnije u analizi naprezanja optimiranih zupčanika.



Slika 24. Opterećenja i oslonci na promatranoj sedmini referentnog zupčanika.



Slika 25. Konvergencija rezultata promjenom broja, odnosno veličine konačnih elemenata.

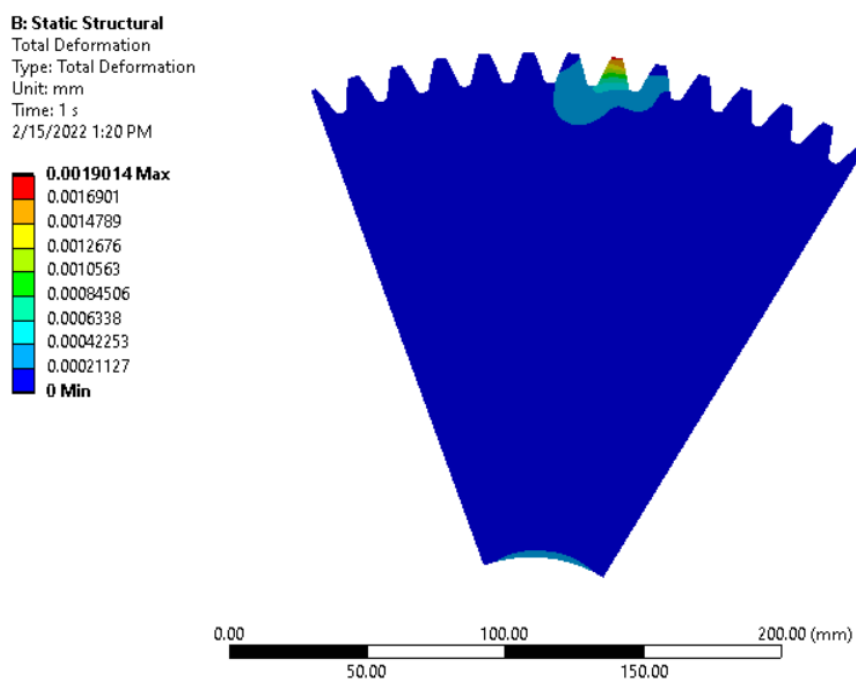


**Slika 26. Mreža konačnih elemenata na promatranom zubu.**

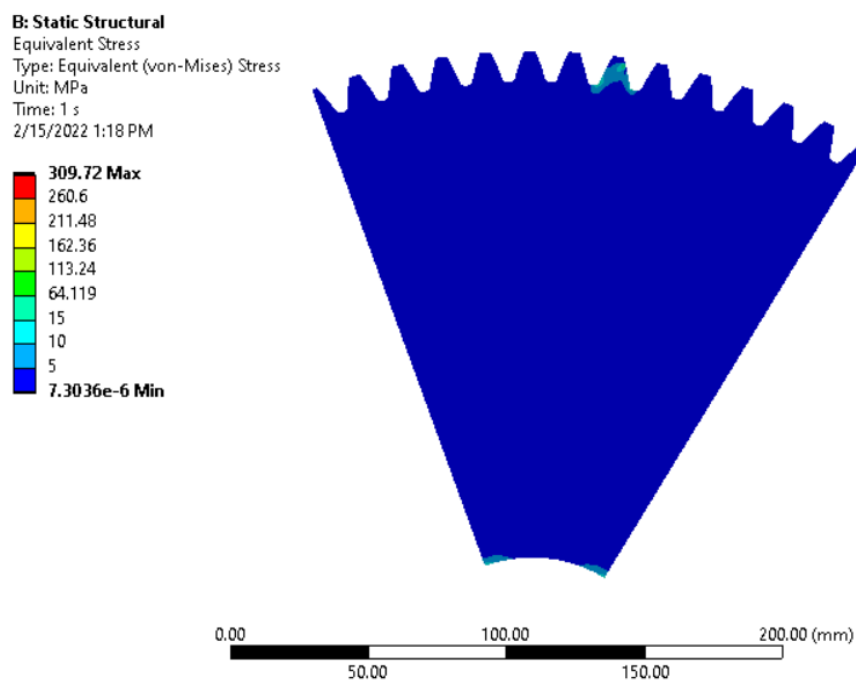
Rezultati analize prikazani su na slikama 27, 28 i 29. Ukupni pomaci i naprezanja na području glavine neće se uzimati kao referentne vrijednosti za usporedbu kod optimiranih zupčanika jer će se kod optimiranih zupčanika promatrati dvije sedmine zupčanika. Kao što je pretpostavljeno, sila koja djeluje na zub ne utječe na naprezanja i pomake na ostatku zupčanika u tolikoj mjeri da bismo pretpostavku uklještenja na bokovima sedmine zupčanika smatrali pogrešnom. Sila na vlačnoj strani korijena zuba dobivena metodom konačnih elemenata nešto je niža od sile dobivene preko (4.24), a naprezanje na bokovima zubi preko metode konačnih elemenata također ispadne nešto manje nego naprezanje dobiveno preko (4.31). Usporedne vrijednosti kao i relativna razlika prikazane su u tablici 5.

**Tablica 5. Usporedne vrijednosti naprezanja.**

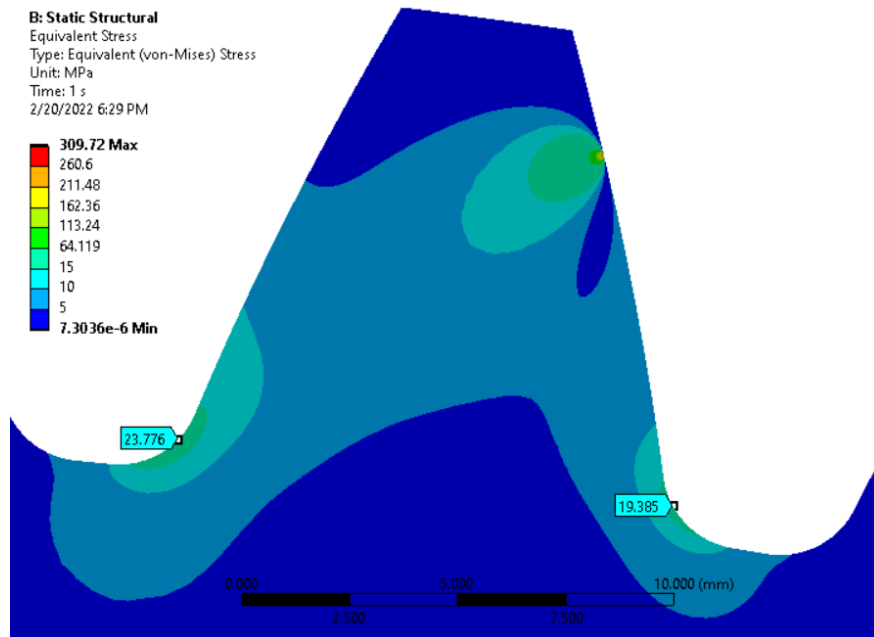
	JEDNADŽBA	MKE	Relativna razlika u odnosu na vrijednosti dobivene jednadžbom
Naprezanje u korijenu zuba $\sigma_F$ / MPa	20,7583	19,385	-6,62 %
Naprezanje na bokovima zubi $\sigma_{BH}$ / MPa	314,86	309,72	-1,6 %



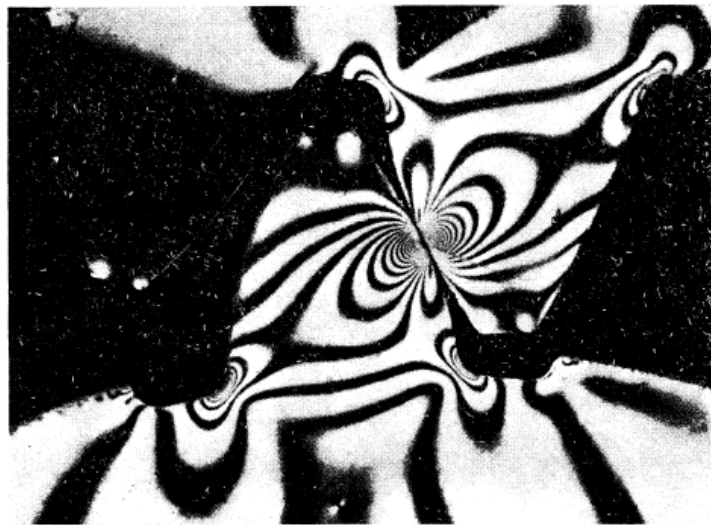
Slika 27. Ukupni pomaci dobiveni metodom konačnih elemenata za referentni zupčanik.



Slika 28. Naprezanja dobivena metodom konačnih elemenata za referentni zupčanik.



Slika 29. Naprezanja kod opterećenog zuba referentnog zupčanika.



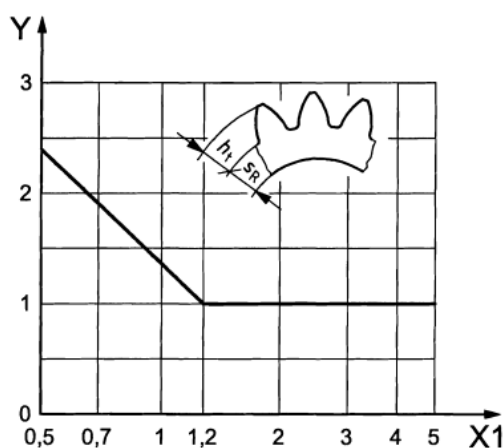
Slika 30. Primjer optički prikazanog toka naprezanja u korijenu zuba [2].

Rezultati naprezanja dobiveni metodom konačnih elemenata mogu se pretpostaviti kao točni, a tok naprezanja jako je sličan primjeru iz knjige [2]. Dobiveno naprezanje u korijenu zadovoljava dozvoljeno naprezanje prema (4.28). Isto tako naprezanje na bokovima zubi zadovoljava dozvoljeno naprezanje prema (4.32). Za sve daljnje usporedbe i analize naprezanja koristiti će se ista ili slična mreža konačnih elemenata kao što se koristila za ovaj slučaj te će se vrijednosti dobivenih naprezanja uspoređivati sa vrijednostima naprezanja dobivenih metodom konačnih elemenata za referentni zupčanik [Slika 29].

## 5. OPTIMIRANI ZUPČANIK – OBRADA ODVAJANJEM ČESTICA

### 5.1. Naprezanje prema ISO 6336 i izrada

Jedna od opcija smanjenja mase zupčanika je obrada odvajanjem čestica spomenuta u točki 3.4. Prema (4.17) masa optimiranog zupčanika treba iznositi 59,393 kg. Kao što je spomenuto kod referentnog zupčanika, već samim oduzimanjem materijala za provrt vratila masa zupčanika se smanji na 151,257 kg. Prema [13] orijentacijski vanjski promjer glavine za promjer vratila  $d_{vr} = 100$  mm iznosi  $d_{go} = 180$  mm. Prema [14] omjer debljine vijenca  $s_R$  i visine zuba  $h$  ne smije biti ispod 0,5. Ukoliko se za promjer vijenca odabere  $d_{vj} = 429$  mm, omjer iznosi 0,631 što je unutar granica no sada će se pri proračunu naprezanja u korijenu zuba morati dodati faktor debljine vijenca. Slika 31 prikazuje grafički način dobivanja faktora debljine vijenca.



Slika 31. Grafički način dobivanja faktora debljine vijenca.

Prema [14] faktor debljine vijenca iznosi:

$$Y_B = 1,6 \ln \left( 2,242 \frac{h}{s_R} \right). \quad (5.1)$$

Visina zuba referentnog zupčanika prema [2] iznosi  $h = 11,25$  mm, a debljina vijenca za unutarnji promjer vijenca  $d_{vj} = 429$  mm iznosi  $s_R = 7,1$  mm. Faktor debljine vijenca iznosi:



$$Y_B = 1,6 \ln \left( 2,242 \frac{11,25}{7,1} \right) = 2,028. \quad (5.2)$$

Naprezanje u korijenu zuba prema (4.24) za optimirani zupčanik s vijencem iznosi:

$$\sigma_F = \frac{4087,1}{125 \cdot 5} \cdot 1,4102 \cdot 2,251 \cdot 2,028 = 42,1 \text{ MPa}. \quad (5.3)$$

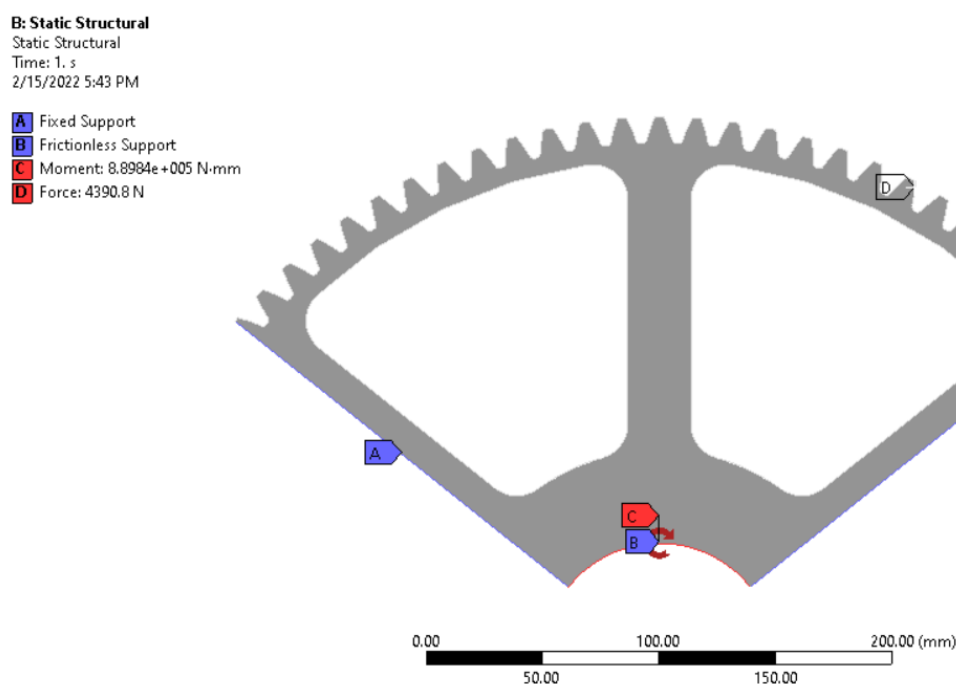
Dobiveno naprezanje u korijenu zuba je manje od dozvoljenog prema (4.28) pa se prema tome može nastaviti s analizom zupčanika. Nakon što je na tokarilici pripremljen valjak širine 125 mm i promjera koji odgovara promjeru tjemene kružnice zupčanika, odnosno 465,69 mm te nakon što je izbušen provrt za vratilo, priprema se obradak koji još nema ozubljenje na sebi na dodatno skidanje materijala. Standardnim glodalom promjera 30 mm oblikuje se prostor između vijenca i glavine na način da zupčanik ima 7 pravilno raspoređenih rebara koja će povezivati glavinu sa vijencem. Nakon glodanja obradak odlazi na izradu ozubljenja i daljnju toplinsku obradu. Gotovi zupčanik nakon obrade ima masu  $m_o = 59,154$  kg. Slika 32 prikazuje zupčanik olakšan obradom odvajanjem čestica napravljen u programu SolidWorks.



**Slika 32.** CAD model zupčanika olakšanog obradom odvajanjem čestica.

## 5.2. Naprezanja i pomaci dobiveni programskim paketom Ansys

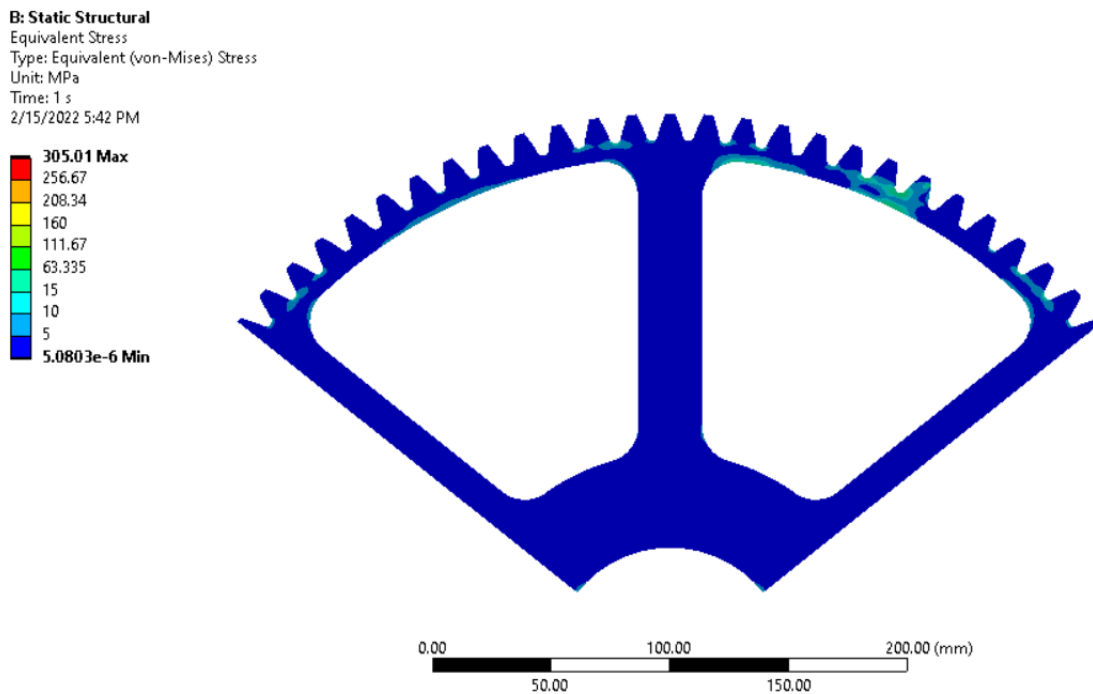
Analiza se kao i kod referentnog zupčanika radila sa 2D oblikom zupčanika. Mreža konačnih elemenata za analizu naprezanja ima slične postavke kao i mreža korištena za analizu naprezanja referentnog zupčanika međutim ovdje na par mjesta dolazi do neželjenog efekta transformacije pravokutnog izoparametrijskog elementa drugog reda u trokutni izoparametrijski element drugog reda. Ukupan broj elemenata iznosi 28327. Za razliku od analize naprezanja kod referentnog zupčanika kada se promatrala jedna sedmina zupčanika, ovdje su analizirane dvije sedmine jer se pretpostavlja da sila na zub sada ima utjecaja na veći dio zupčanika zbog velikog sektorskog otvora. Slika 33 prikazuje sva opterećenja i oslonce koji su isti onima postavljenima za analizu naprezanja referentnog zupčanika.



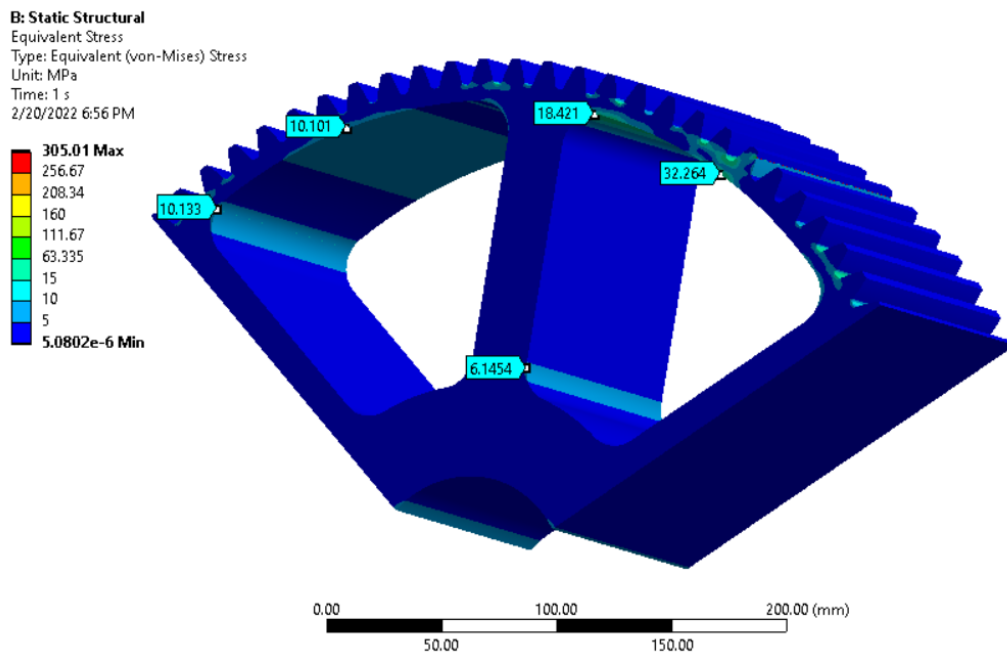
**Slika 33. Opterećenja i oslonci na promatrane dvije sedmine zupčanika olakšanog obradom odvajanjem čestica.**

Rezultati analize su prikazani na sljedećim slikama. Unatoč pretpostavci da sila koja djeluje na zub neće djelovati na krajnje dijelove sljedeće sedmine pokazalo se upravo suprotno. Iako se radi o malim naprezanjima, ona se pojavljuju tako da bi sigurno točnije bilo uzeti još jednu dodatnu sedminu, ali budući da se naprezanja javljaju odmah pored velikog rebra može se pretpostaviti sa dovoljnom točnošću kako je poprečni presjek rebra dovoljno velik da rebro svojom krutošću ne dozvoli daljnje širenje naprezanja [Slika 34]. Naprezanja koja se javljaju

kod glavine su izrazito mala, a vrijednosti nekih od važnijih napreznja su prikazane na slici 35.

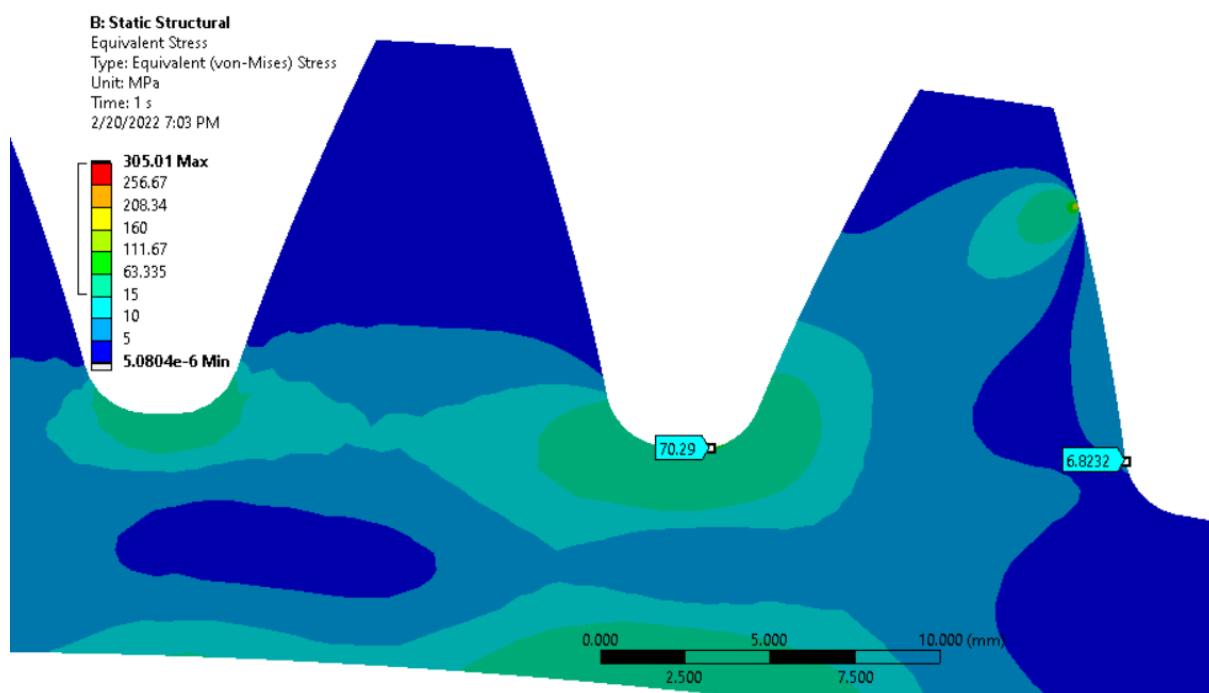


Slika 34. Napreznja na zupčaniku olakšanom obradom odvajanjem čestica.



Slika 35. Iznosi napreznja na odabranim mjestima zupčanika olakšanog obradom odvajanjem čestica.

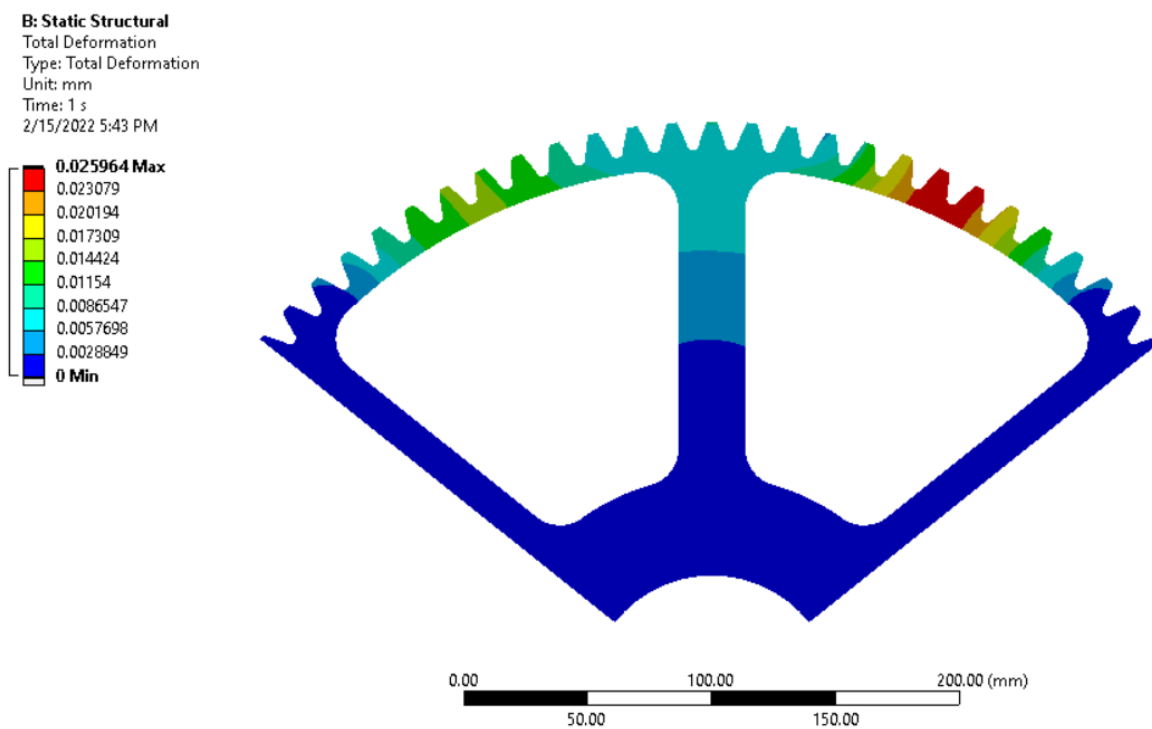
Naprezanje na vlačnoj strani korijena zuba je metodom konačnih elemenata ispalo mnogo manje nego naprezanje dobiveno preko (5.3). Uzrok tome je konzervativnost jednadžbe koja iako uzima u obzir utjecaj debljine tjemena ostavlja isti faktor ispravka naprezanja i manjim dijelom CAD model ozubljenja jer je radi jednostavnosti prijelaz sa boka zuba na podnožnu ravninu izveden kao kružni luk. Prema [23], analizirajući naprezanja u korijenu zuba vijenca zupčanika različitim metodama, mogu se također uočiti velika odstupanja u iznosima naprezanja između rezultata dobivenih standardom ISO 6336 i rezultata dobivenih metodom konačnih elemenata. Slične razlike u iznosima naprezanja dobivenih metodom konačnih elemenata i jednadžbom (4.24) pojavile su se i u radu gdje se analizirao ciklus naprezanja u korijenu zuba cilindričnog zupčanika s tankim vijencem [15]. Budući da je odabir konačnih elemenata opravdan kod analize naprezanja referentnog zupčanika, spomenuta razlika smatrat će se prihvatljivom. Uspoređujući dobiveno naprezanje na tlačnoj strani korijena zuba [Slika 36] sa dobivenim naprežanjem u korijenu zuba za referentni zupčanik [Slika 29], može se uočiti veliki skok naprezanja kao i veći utjecaj opterećenja na ostale zube.



**Slika 36.** Naprezanja kod opterećenog zuba zupčanika olakšanog obradom odvajanjem čestica.

Naprezanja na bokovima ispadnu nešto niža nego što je to bilo kod referentnog zupčanika, a kontrolom sigurnosti može se utvrditi kako zupčanik zadovoljava sigurnost na naprezanje u korijenu zuba (4.28) kao i na naprezanje na bokovima zubi (4.32). Osim velikog porasta

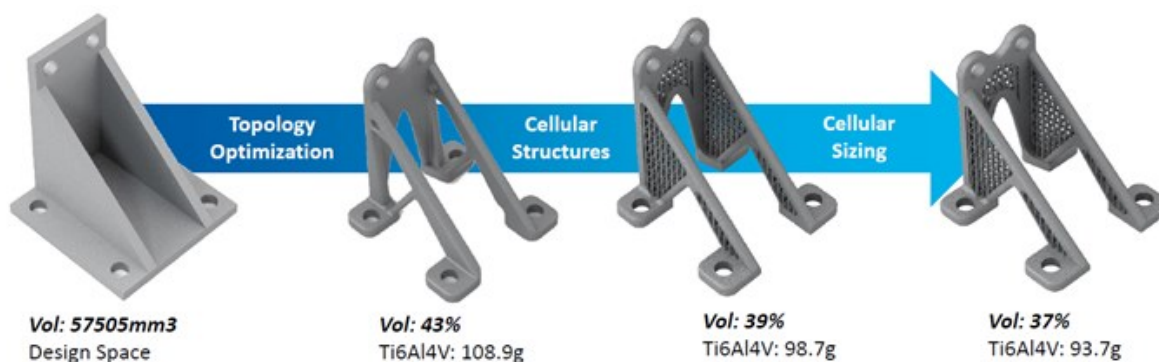
naprezanja na tlačnoj strani korijena zuba, veliki skok s obzirom na referentni zupčanik može se uočiti u ukupnim pomacima koji su se povećali za čak 13,66 puta te se može vidjeti kako se izrazito deformiraju i zubi na sektorskom otvoru gdje ne djeluje opterećenje unatoč debljini rebra od čak 27 mm.



Slika 37. Ukupni pomaci na zupčaniku olakšanom obradom odvajanjem čestica.

## 6. TOPOLOŠKA OPTIMIZACIJA

Razvojem računala i željom za optimizacijom nepotrebno teških i velikih predmeta, tim matematičara i inženjera počeo je krajem 80-ih godina 20. stoljeća razvijati program koji će moći uz zadane uvjete opterećenja i oslonaca, optimirati volumen predmeta na način da se postigne najveća krutost smanjujući masu predmeta tamo gdje ona nije potrebna. Godine 1994. napravljen je prvi programski paket za topološku optimizaciju nazvan Altair OptiStruct koji je iste godine proglašen tehnološkom inovacijom godine [16]. Danas se topološka optimizacija predmeta može provesti na brojnim programskim paketima koji omogućuju i razne opcije optimizacije te se predmeti optimirani topološkom optimizacijom koriste najviše u industrijama gdje smanjena masa predmeta uz visoku krutost igra vrlo bitnu ulogu. Slika 38 prikazuje jedan topološki optimiran kutni nosač za potrebe zrakoplovne industrije, a mnogi takvi slični dijelovi napravljeni su za vojnu, medicinsku, građevinsku i mnoge druge industrije.



Slika 38. Topološki optimiran kutni nosač za zrakoplovnu industriju [17].

### 6.1. Tehnologija

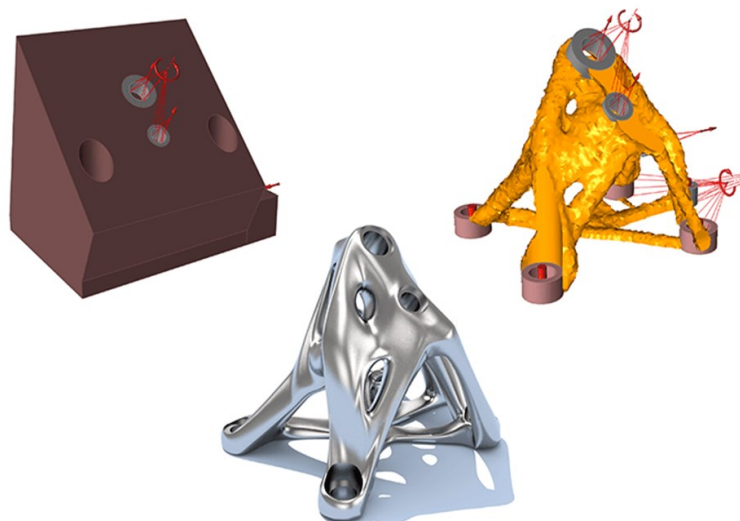
Topološka optimizacija radi na principu računalnog koda koji omogućuje minimiziranje ili maksimiziranje odabrane fizikalne vrijednosti na odabranom području predmeta za postavljene početne uvjete opterećenja i oslonaca. Metoda se uglavnom temelji na rezultatima analize naprezanja dobivene metodom konačnih elemenata pri čemu se tijekom optimizacije sa predmeta uklanjaju upravo konačni elementi za koje program smatra da više nisu potrebni predmetu. Najčešća fizikalna varijabla koja se minimizira je podatljivost čijim smanjenjem se maksimizira krutost predmeta za odabrani omjer volumena optimiranog i početnog oblika

predmeta. Moguće je također uz zadržavanje iste mase, optimirati predmet na način da se poveća krutost. U tom slučaju materijal će se rasporediti tako da će za iste uvjete opterećenja i istu masu krutost biti veća nego prije optimizacije. Kao što se može vidjeti na slici 38, volumen se topološkom optimizacijom smanjio za čak 63 % te je uz također smanjeno naprezanje ovom predmetu povećana krutost što je bio i cilj optimizacije. Predmet na slici 38 je iz jednog dijela isključivo moguće napraviti aditivnom proizvodnjom. Većina programskih paketa omogućuje u samom procesu topološke optimizacije uvođenje ograničenja koja su bitna za tradicionalne procese proizvodnje dijelova tako da je moguće optimirati neki predmet na način da on bude spreman za lijevanje, injekcijsko prešanje i ostale tradicionalne tehnologije proizvodnje. Slika 20 prikazuje zupčanik kojemu masa nije smanjena primjenom topološke optimizacije već isključivo transformacijom punog materijala u rešetkastu strukturu te je takav zupčanik moguće proizvesti isključivo aditivnom proizvodnjom. Brojne su mogućnosti topološke optimizacije, a jedna od njih je i upotreba optimizacije samo kao posrednog procesa između početnog oblika i optimiranog oblika gdje se optimirani oblik dizajnira prema raspodjeli materijala za koju je topološka optimizacija pokazala da je najbolja za odabrane uvjete analize. Upravo takva optimizacija predmeta, odnosno zupčanika bit će prikazana u ovome radu.

## 6.2. Najpoznatiji programi za topološku optimizaciju

### 6.2.1. Altair

Tvrtka koje je prva krenula optimirati dijelove topološkom optimizacijom nastavila je sa poboljšavanjem svog proizvoda te tako Altair danas omogućuje korisnicima upotrebu topološke optimizacije na dvije platforme, Altair Inspire i Altair OptiStruct. Altair Inspire, novija je platforma namijenjena korisnicima koji uz samu topološku optimizaciju imaju određene zahtjeve glede načina proizvodnje analiziranog predmeta gdje sustav sam postavlja i provjera konture predmeta kako bi predmet mogao biti napravljen sa manje materijala i sa manjim troškovima. Altair OptiStruct namijenjen je za složene analize naprezanja i deformacija industrijskih dijelova koji imaju razna ograničenja glede optimizacije. Predmetima je dodatno moguće smanjiti masu transformacijom punog materijala u rešetkastu strukturu. Slika 39 prikazuje nosač motora u automobilske industriji optimiran u programu Altair Inspire namijenjen isključivo za aditivnu proizvodnju.

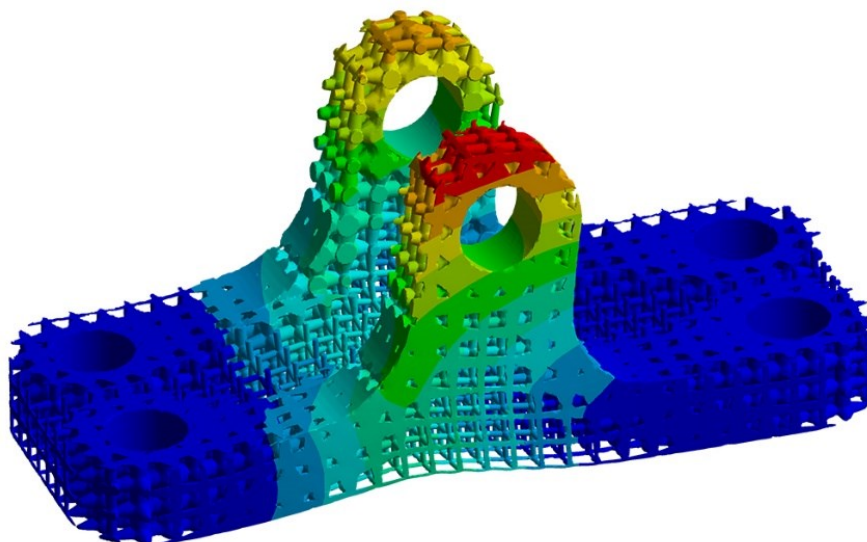


Slika 39. Nosač motora u automobilskoj industriji optimiran u programu Altair Inspire [16].

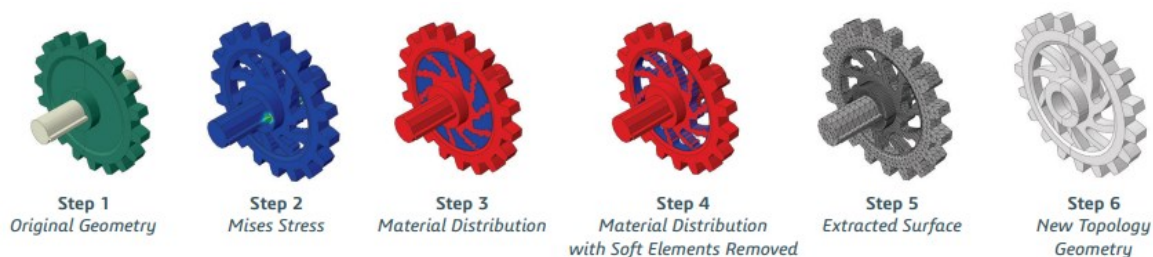
### 6.2.2. Ansys i Abaqus

Ansys i Abaqus dva su različita programa čija je primarna funkcija analiza naprezanja i deformacija metodom konačnih elemenata no oba programa također omogućuju i topološku optimizaciju sličnih mogućnosti. Ansys omogućuje topološku optimizaciju ubacivanjem posebne operacije u radni okvir analiziranog predmeta dok Abaqus ima instaliranu funkciju nazvanu ATOM koja se može pokrenuti odmah nakon analize naprezanja. Oba programa omogućuju optimizaciju predmeta na način da se proizvod prilagodi zahtjevima nekih od tradicionalnih tehnologija proizvodnje. Također, kao i Altair-a, oba programa uz topološko optimiranje strukture predmeta omogućuju i zamjenu punog materijala sa rešetkastom strukturom čime se dodatno masa samog predmeta smanjuje pri čemu se može birati veličina i oblik poprečnog presjeka rešetkaste strukture. Slika 40 prikazuje analizu naprezanja nosača kojemu je masa smanjena transformacijom punog materijala u rešetkastu strukturu u programu Ansys. Slika 41 prikazuje primjer topološke optimizacije zupčanika sa vratilom u programu Abaqus pri čemu je analiza napravljena za slučaj djelovanja sile na bok zuba uvijek s iste strane, odnosno za istosmjernu vrtnju vratila napravljen. Prije ugradnje takvog zupčanika trebalo bi provjeriti da se smjer vrtnje vratila poklapa sa smjerom vrtnje prema kojem je topološka optimizacija napravljena. Upravo zbog tog i mnogih drugih problema, postoje razne metode topološke optimizacije zupčanika.





**Slika 40.** Analiza napreznja nosača olakšanog transformacijom punog u rešetkasti materijal u programu Ansys [18].



**Slika 41.** Zupčanik optimiran topološkom optimizacijom u programu Abaqus [19].

### 6.2.3. nTopology

U usporedbi sa prethodno navedenima nTopology je najnoviji program na tržištu sa brojnim novim mogućnostima. Sami program funkcionira na jedan novi način upotrebljavajući fiksne i varijabilne blokove. To znači da je u istom dokumentu moguće neke operacije kao što su statička analiza, topološka optimizacija, zamjena punog materijala rešetkastim odvojiti i postaviti kao varijabilne operacije u koje je sada moguće ubaciti neki drugi CAD model tijela i dobiti tražene rezultate za novo tijelo, ali zadržavajući postavke operacije za početno tijelo. Sličnu međusobnu ovisnost moguće je dobiti u Ansys-u, ali ovaj program omogućuje i označavanje jedne postavke unutar neke operacije varijabilnom i zatim korištenje te varijabilne postavke za potpuno drugu analizu ili drugo tijelo. Moguće je odabrati postavke nekih

razdvojenih operacija koje su potrebne i zatim stvoriti novi izlazni blok koji će zadržavati sve potrebne postavke. Od tog izlaznog bloka je moguće napraviti potpuno novi dokument u koji se ubaci neko drugo tijelo i koje će se sada oblikovati po postavkama postavljenim za tijelo iz prethodnog dokumenta. Uz navedeno, program omogućuje najširi izbor što se tiče rešetkastog materijala te brojne opcije koje se koriste pri aditivnoj proizvodnji. Topološku optimizaciju je moguće istovremeno napraviti na više načina sa različitim opterećenjima te istovremeno uspoređivati rezultate, a obrada predmeta nakon optimizacije je brza i jednostavna. Iako je program relativno nov, mnoge industrije su pokazale veliko zanimanje za korištenje programa budući da mogućnosti koje pruža omogućuju brzu i kvalitetnu analizu i optimizaciju predmeta kakva sa ostalim tradicionalno korištenim programima nije moguća. Na slici 42 moguće je vidjeti svu raskoš rešetkaste strukture koju nTopology omogućuje na primjeru pedale kočnice.



**Slika 42. Pedala kočnice dizajnirana u programu nTopology [20].**

## 7. OPTIMIRANI ZUPČANIK – TOPOLOŠKA OPTIMIZACIJA

### 7.1. Metoda topološke optimizacije

Kao što je spomenuto ranije, postoje razne metode topološke optimizacije zupčanika. Slika 41 prikazuje topološku optimizaciju koja ima ograničenu primjenu budući da je optimizacija napravljena za jedan smjer vrtnje vratila. Kod gonjenog zupčanika u trenutku prijenosa snage, na više različitih mjesta dolazi do koncentracije naprezanja. Zub pogonskog zupčanika koji dođe u kontakt sa zubom gonjenog zupčanika uvjetuje pojavu naprezanja na samom mjestu dodira, ali i na korijenima zuba što se lijepo može vidjeti na primjeru referentnog zupčanika [Slika 29]. Zupčanici oblikom, odnosno ozubljenjem prenose snagu, ali se uz naprezanje na zubima, naprezanje javlja i kod glavine budući da se na tom mjestu moment prenosi sa zupčanika na vratilo. Slika 28 prikazuje raspodjelu naprezanja na referentnom zupčanicu za slučaj djelovanja normalne sile na bok zuba u točki B koja će uzrokovati najveća naprezanja u korijenu zuba. Slika 27 prikazuje deformirani oblik referentnog zupčanika u slučaju pojave najvećih naprezanja u korijenu zuba. Vidi se da se najveći pomaci javljaju na opterećenom zubu, ali se pomaci također javljaju i na susjedna dva zuba. Na području glavine se također pojavljuju određene deformacije te je topološku optimizaciju potrebno provesti jedino u blizini tih područjima te rezultat primijeniti na cijeli zupčanik. Budući da je između područja gdje se pojavljuju deformacije veliki prostor koji ima zanemarive deformacije, topološka optimizacija će se provesti na način da se prvo optimira zupčanik s obzirom na normalnu silu na bok zuba, a zatim će se uzeti u obzir samo moment koji se prenosi sa zupčanika na vratilo. Dva područja koja se neće topološki optimirati će biti vijenac, istog unutarnjeg promjera koji se koristio za analizu zupčanika olakšanog obradom odvajanjem čestica i glavina, ali za razliku od zupčanika olakšanog obradom odvajanjem čestica, sada će vanjski promjer glavine biti  $d_{gt} = 160$  mm. Zajednička masa glavine i vijenca u tom slučaju iznosi:

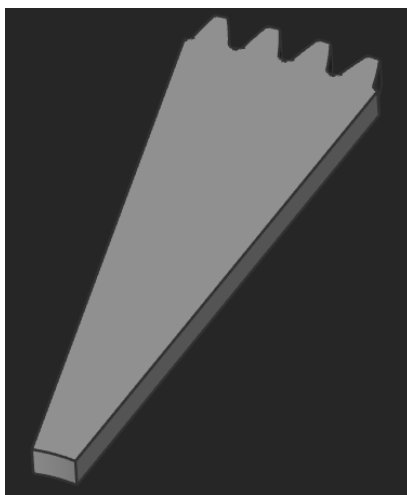
$$m_{vj} + m_{gt} = 17,68 + 11,98 = 29,66 \text{ kg.} \quad (7.1)$$

Budući da je prema (4.17) potrebna masa zupčanika  $m_z = 59,393$  kg, tijelo zupčanika mora imati masu od 29,733 kg što je 24,5 % od mase tijela referentnog zupčanika za iste dimenzije vijenca i glavine prema (7.1). Taj omjer će biti potreban za unošenje postavki u topološku optimizaciju. Ovom metodom, kao što je spomenuto ranije, topološki optimirani dijelovi

zupčanika neće se koristiti kao krajnji rezultat optimizacije već će poslužiti kao referenca koja prikazuje gdje je materijal ustvari potreban za visoku krutost zupčaniku ne mijenjajući vijenac i glavinu zupčanika. Topološka optimizacija će se provesti u programu nTopology zbog raznih mogućnosti koje program pruža no zbog optimizacije koja je moguća samo za 3D tijelo, optimiranim dijelovima zupčanika je debljina smanjena na 10 mm da se analiza što više približi 2D tijelu. Konačni oblik zupčanika bit će podijeljen na 7 jednakih dijelova tako da će se uvijek težiti dobivanju rezultata jedne sedmine zupčanika, a krajnja statička analiza će biti napravljena za dvije sedmine zupčanika radi veće točnosti rezultata.

## 7.2. Topološka optimizacija – sila na bok zuba

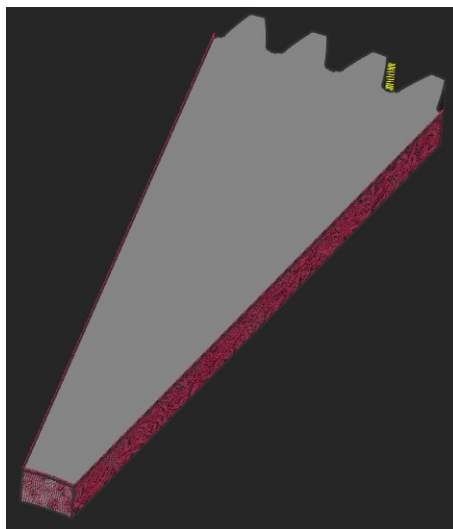
Slika 27 prikazuje na kojim zubima dolazi do značajnijih pomaka. Za analizu su uzeta četiri zuba, opterećeni zub, iduća dva u smjeru djelovanja sile i prvi prethodni zub. Analizirat će se cijeli taj sektorski dio, skupa sa dijelom glavine radi raspoređivanja mreže koja prati koncentraciju materijala što će biti objašnjeno kasnije. Slika 43 prikazuje odabrani sektor zupčanika na kojem će se pokrenuti topološka optimizacija debljine 10 mm.



Slika 43. Odabrani sektor zupčanika za topološku optimizaciju.

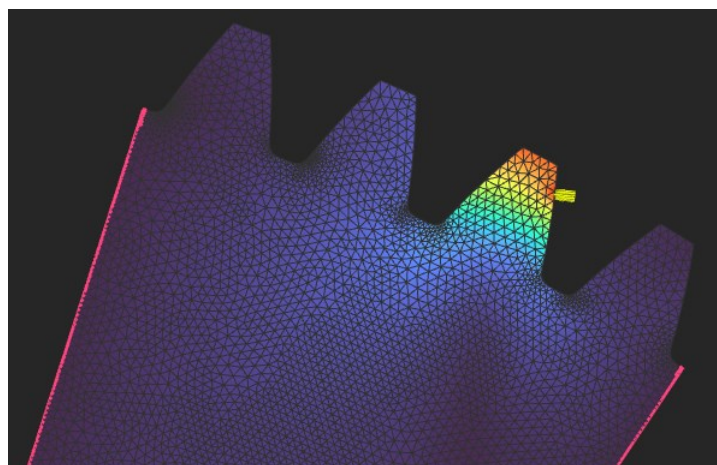
Mreža konačnih elemenata je za topološku optimizaciju drugačija od one koja se koristila za statičku analizu naprezanja referentnog i zupčanika olakšanog obradom odvajanja čestica. Sada se koriste tetraedarski konačni elementi koji su pogodni za brzu i automatiziranu diskretizaciju

3D oblika [21]. Mali sektorski dio prikazan na slici 43 ima 557 420 tetraedarskih konačnih elemenata. Nakon postavljanja mreže konačnih elemenata postavljena je sila na isto mjesto kao i na prethodnim analizama, a ostale bočne stranice su postavljene kao uklještenje jer se prema slici 27 vidi da na tim mjestima više nema značajnije deformacije. Moment će se analizirati drugom optimizacijom te je zato i na bridu glavine označeno uklještenje [Slika 44].



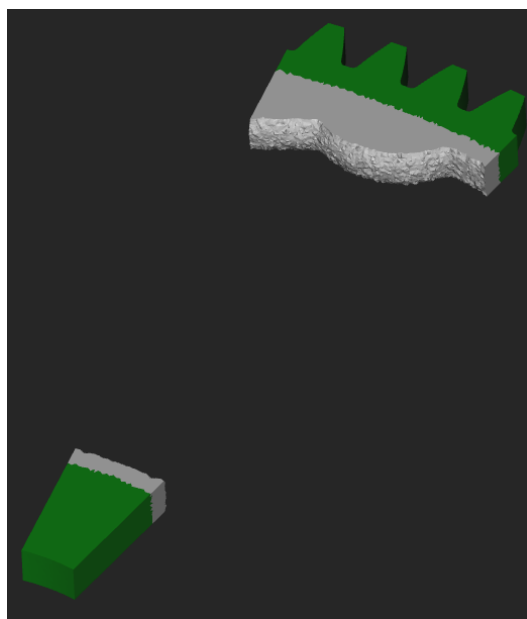
**Slika 44. Opterećenja i oslonci na promatranom sektoru zupčanika.**

Slika 45 prikazuje pomake na promatranom sektoru nakon pokretanja statičke analize. Raspored pomaka sličan je pomacima koji su dobiveni analizom referentnog zupčanika te se može zaključiti kako je opravdan odabir samo spomenuta 4 zuba.



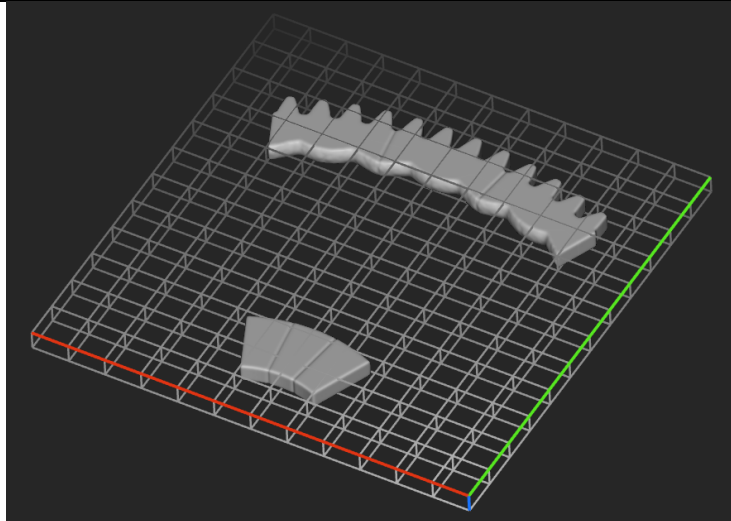
**Slika 45. Raspored ukupnih pomaka na promatranom sektoru zupčanika.**

Nakon dobivenih rezultata statičke analize pokrenuta je topološka optimizacija. Traženi zahtjev optimizacije je minimiziranje podatljivosti, odnosno maksimiziranje krutosti sa ciljem optimizacije da konačan oblik tijela predstavlja 24,5 % volumena početnog oblika uz zadržavanje vijenca i glavine. Slika 46 predstavlja rezultat topološke optimizacije nakon 20 iteracija gdje se mogu vidjeti zeleno označeni, dijelovi koji su ostali fiksni.



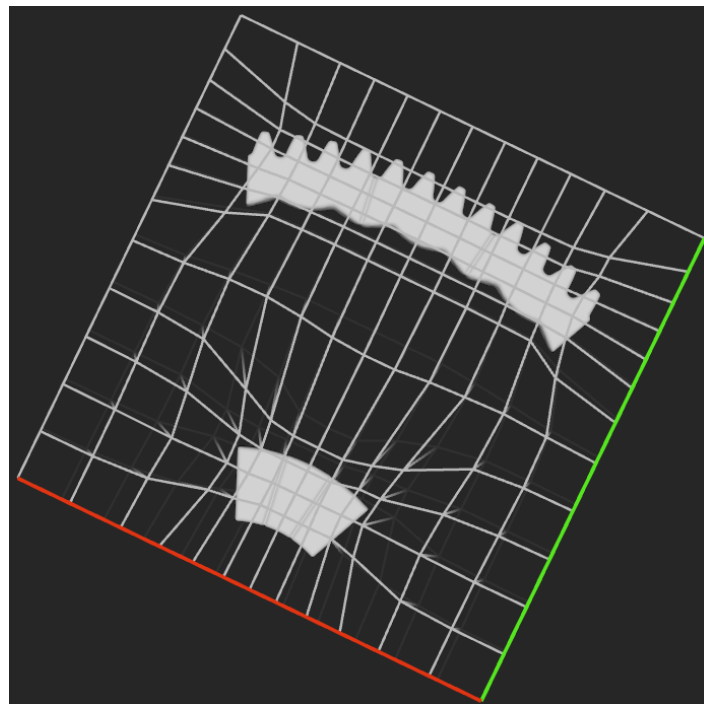
**Slika 46. Topološki optimiran sektor zupčanika.**

Budući da je ovo slučaj za djelovanje sile u jednom smjeru, potrebno je samo zrcaliti rezultat topološke optimizacije kako bi se dobila ista svojstva za simetrične uvjete opterećenja. Na taj način će volumen tijela preći preko 24,5 %, ali će se kasnije ubacivanjem rešetkaste strukture taj odnos ponovno izjednačiti sa traženom vrijednosti. Jedna sedmina referentnog zupčanika sadrži 12 punih zubi tako da je sada rezultat topološke optimizacije potrebno zrcaliti s obzirom na lijevi, odnosno desni brid kako bi se dobilo simetrično rješenje koje prikazuje konačno rješenje topološke optimizacije, odnosno gdje je najviše potrebno koncentrirati materijal kako bi zupčanik ostvario najbolju krutost. Rezultat topološke optimizacije će kao što je spomenuto ranije, služiti samo kao posredno sredstvo za dobivanje tražene koncentracije materijala. Da bi se ta koncentracija mogla ubaciti u SolidWorks te da se prema tome oblikuje nova struktura tijela, potrebno je imati neki prihvatljivi oblik koncentracije materijala prema kojem je moguće oblikovati zupčanik u SolidWorks-u. Sukladno tome, ubačena je mreža koja dovoljno prekriva cijelu topološki optimiranu sedminu zupčanika.



**Slika 47.** Topološki optimirana sedmina zupčanika sa ubačenom mrežom.

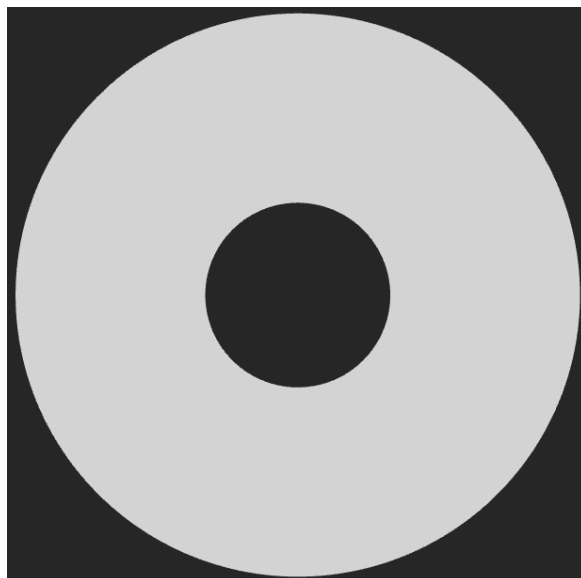
Vidljivi materijal na slici 47 kao svojstvo ima skalarno polje koje je poslužilo da se ubačena mreža oblikuje točno prema koncentraciji materijala, odnosno prema skalarnom polju materijala. Iako se ova prva topološka optimizacija koncentrirala na djelovanje sile na bok zuba, a ne na moment koji se prenosi između zupčanika i vratila, odlučeno je da se mreža oblikuje i prema postojećem dijelu glavine kako bi se dobila raspodjela mreže i na tom dijelu te kako bi se kasnije odabralo strukturno najprihvatljivije rješenje oblika zupčanika.



**Slika 48.** Topološki optimirana sedmina zupčanika sa preoblikovanom ubačenom mrežom.

### 7.3. Topološka optimizacija – moment

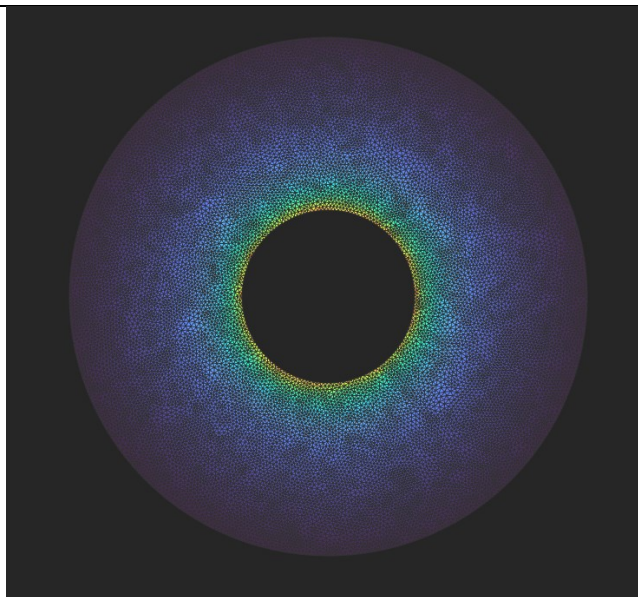
Iako se na glavini referentnog zupčanika ne pojavljuju značajnija naprezanja i deformacije što se može vidjeti i na primjeru optimiranog zupčanika obradom odvajanja čestica [Slika 35], u ovome radu ipak će se napraviti dodatna topološka optimizacija dijela tijela zupčanika kako bi se dobio uvid u to gdje je potrebna koncentracija mase. Slika 49 prikazuje glavinu sa tijelom zupčanika debljine 10 mm do promjera 300 mm nakon kojeg se pretpostavlja da utjecaj momenta više nema značajan utjecaj.



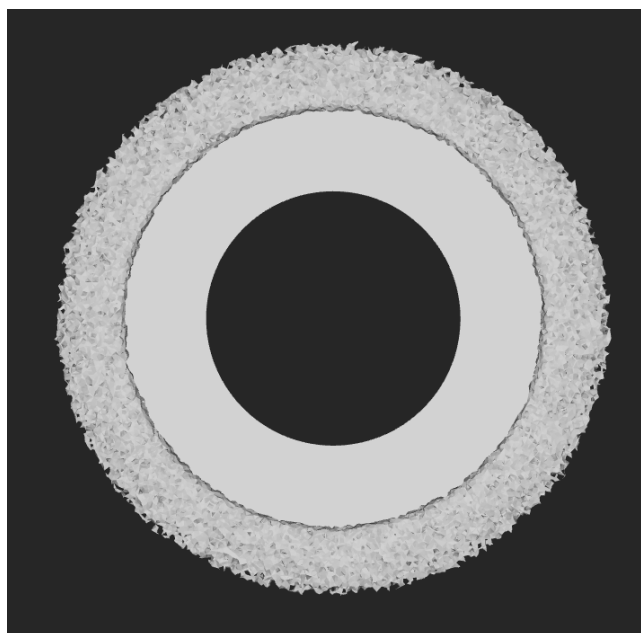
**Slika 49. Odabrani dio zupčanika za topološku optimizaciju s obzirom na moment.**

Predmetu su sada dodani tetraedarski konačni elementi, dvostruko veći nego kod prve topološke optimizacije te ih ima 590 667. Na promjer glavine postavljen je moment dok su dijelovi na promjeru 300 mm pretpostavljeni kao uklještenje. Slika 50 prikazuje statičku analizu dobivenu nakon postavljanja momenta. Nakon statičke analize pokrenuta je topološka optimizacija. Glavina, vanjskog promjera 160 mm, odabrana je kao područje koje se neće optimirati dok je za glavni zahtjev topološke optimizacije odabran konačni omjer volumena optimiranog dijela i volumena referentnog dijela 0,3. Omjer od 0,6 dao bi volumen koji odgovara traženim 24,5 % volumena ukupnog potrebnog tijela no međutim, budući da se dva dijela topološki optimiraju i da ta dva dijela kombinirano moraju dati taj postotak volumena, odabran je polovični iznos koji će se kasnije odabranom rešetkastom strukturom izjednačiti sa traženom vrijednosti volumena.





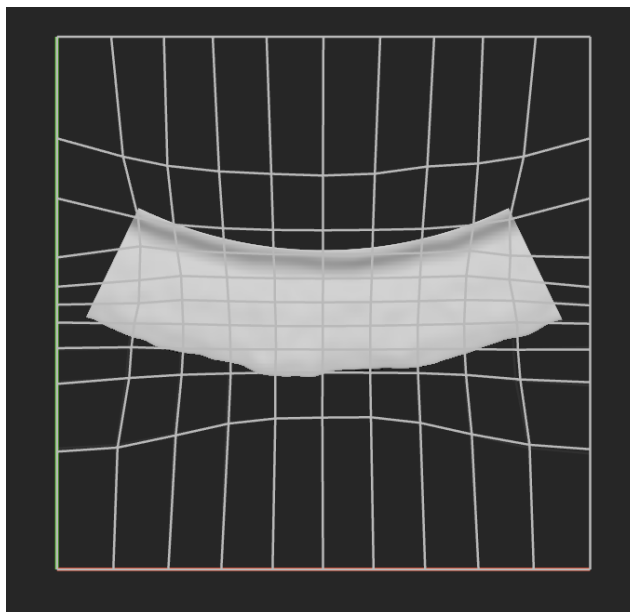
**Slika 50.** Raspored naprezanja promatranog predmeta dobiven statičkom analizom.



**Slika 51.** Topološki optimirano tijelo zupčanika.

Kao i na slici 46 tako se i na slici 51 mogu vidjeti preostali tetraedarski konačni elementi. Dobiveni konačni oblik topološke optimizacije prošao je zatim kroz naknadni proces ugladivanja površina te je sačuvan samo dio koji predstavlja potreban materijal jedne sedmine tijela zupčanika. Kao i kod prošle optimizacije, ubačena je mreža koja prekriva cijeli predmet i koja će se preoblikovati s obzirom na skalarno polje predmeta. Slika 52 prikazuje preostalo tijelo sa preoblikovanom mrežom. Kombinacija rezultata prve i druge topološke optimizacije

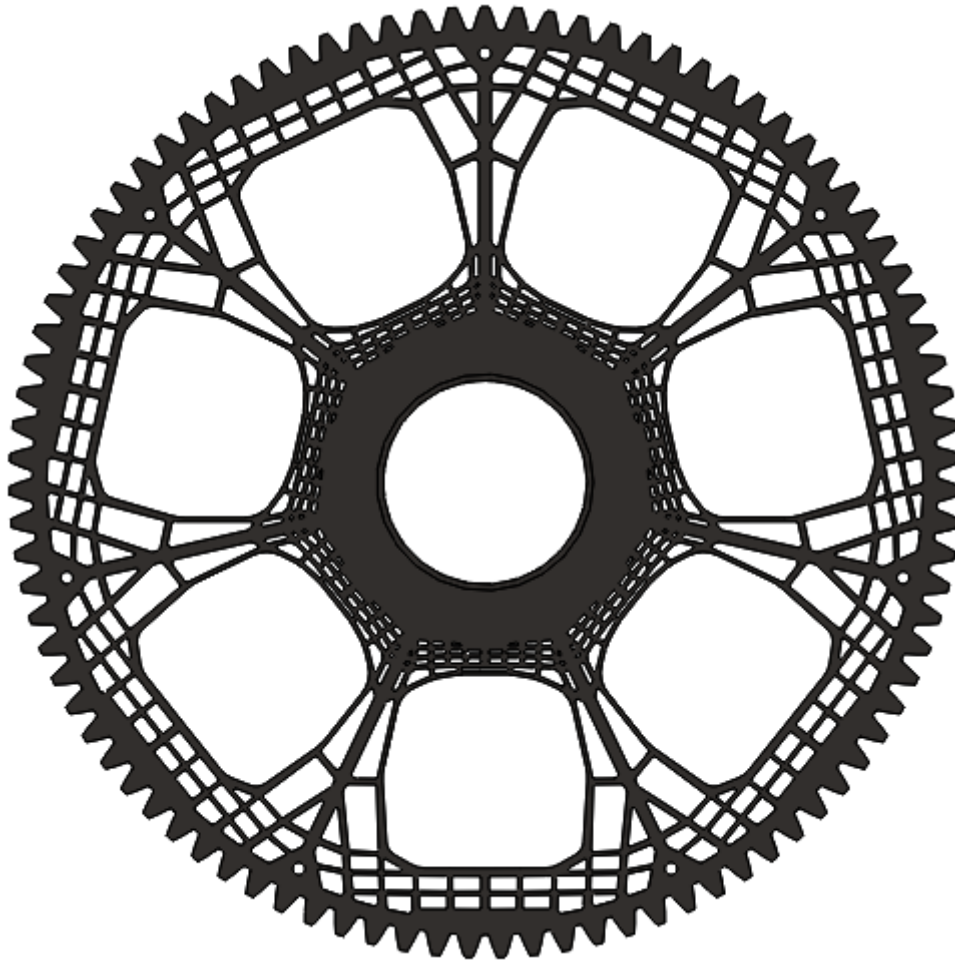
dala bi volumen jedne sedmine veći od 24,5 % početnog volumena tijela referentnog zupčanika, ali se sada u SolidWorks ne ubacuju topološki optimirani dijelovi, već samo mreže preoblikovane na način da prate koncentraciju masa tih optimiranih dijelova.



**Slika 52.** Topološki optimirano tijelo zupčanika sa preoblikovanom ubačenom mrežom.

#### **7.4. Konačan oblik optimiranog zupčanika**

Nakon provedene obje topološke optimizacije, u SolidWorks su ubačene mreže koje pokazuju gdje je potrebna koncentracija materijala da se zadovolje zahtjevi optimizacije. Na području pored vijenca koristila se isključivo mreža nastala prvom topološkom optimizacijom [Slika 48] dok se na području bliže glavini koristila kombinacija mreža dobivenih prvom i drugom topološkom optimizacijom iako je dominantna bila mreža druge topološke optimizacije [Slika 52]. Dodavanjem određene debljine liniji kombinirane mreže i oduzimanjem materijala preostalog između tih linija dobiven je konačni oblik optimiranog zupčanika uz zadržavanje rebra debljine 6 mm između dijelova, odnosno sedmina zupčanika [Slika 53]. Masa dobivenog zupčanika iznosi 60,25 kg što je malo iznad željenih 59,393 kg. Daljnji proces optimizacije dobivenog zupčanika moguć je na način da se mijenja debljina određenog dijela rešetkaste strukture i da se analizira koliko ta promjena utječe na naprezanja zupčanika. U ovome radu analizirat će se naprezanja i deformacije samo strukture prikazane na slici 53.

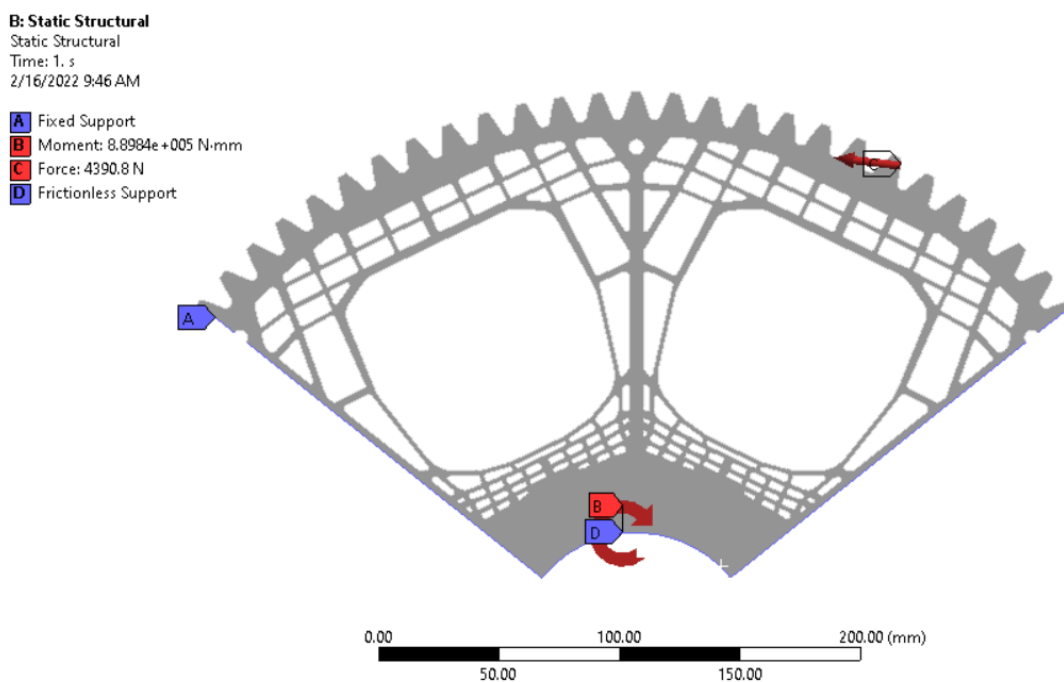


**Slika 53.** Konačni oblik zupčanika optimiranog primjenom topološke optimizacije.

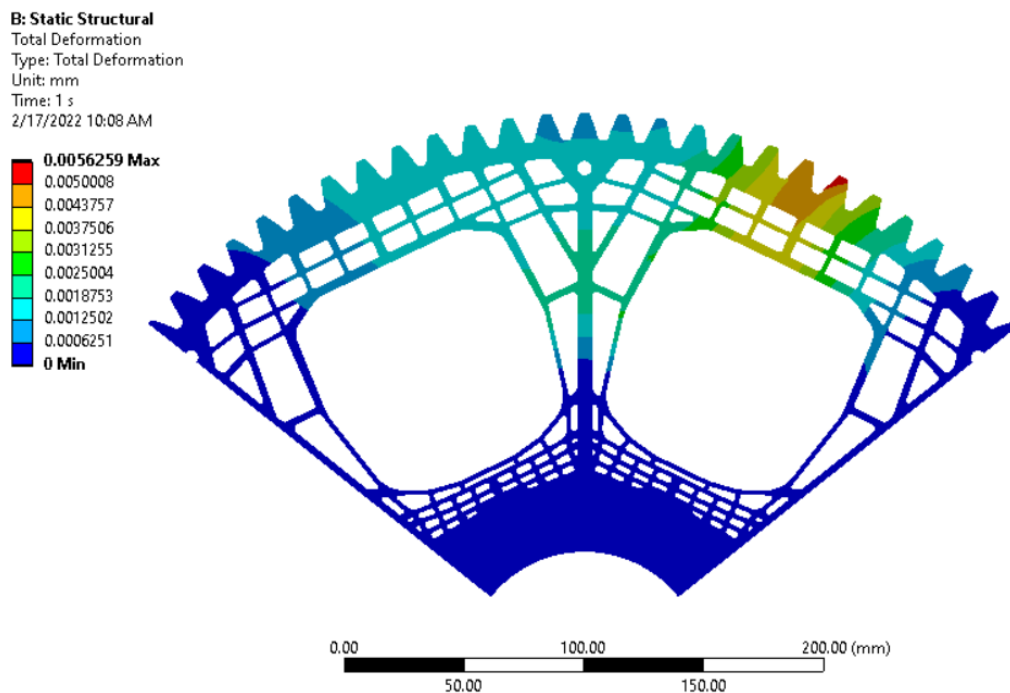
### **7.5. Naprezanja i pomaci dobiveni programskim paketom Ansys**

Analiza se kao i kod referentnog zupčanika radila sa 2D oblikom zupčanika. Korištene su slične postavke konačnih elemenata kao i pri analizi referentnog zupčanika te je ukupan broj elemenata konačnih elemenata 31037. Kao i kod zupčanika olakšanog obradom odvajanjem čestica korištene su za analizu dvije sedmine zupčanika jer se pretpostavlja da opterećenje na jednom zubu ipak ima veći utjecaj na ostale dijelove zupčanika nego što je to slučaj kod referentnog zupčanika. Slika 54 prikazuje sva opterećenja i oslonce koji su isti onima postavljenima za analizu referentnog zupčanika. Slika 55 prikazuje ukupne pomake promatranog zupčanika. Pomaci su 2,96 puta veći nego kod referentnog zupčanika što nije zanemarivi porast, ali kao što je već naglašeno, dodatna optimizacija glede povećanja debljine

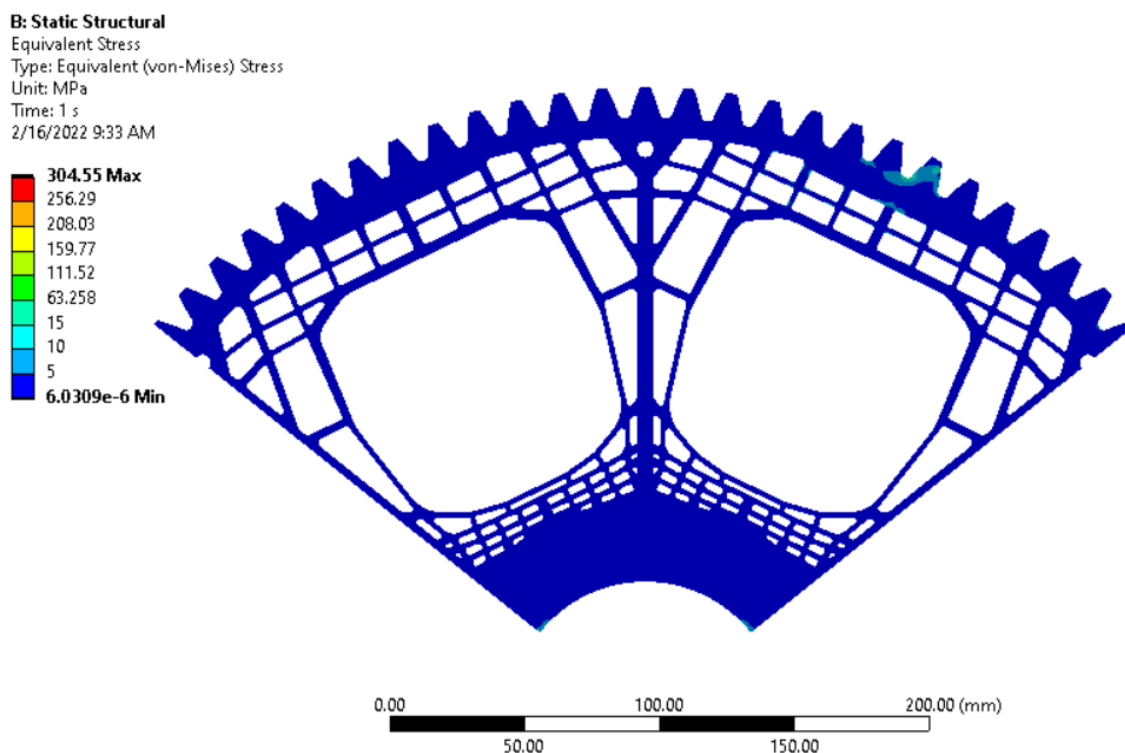
određenog dijela rešetkaste strukture može dodatno smanjiti pomake do željene vrijednosti bez značajnijeg porasta mase.



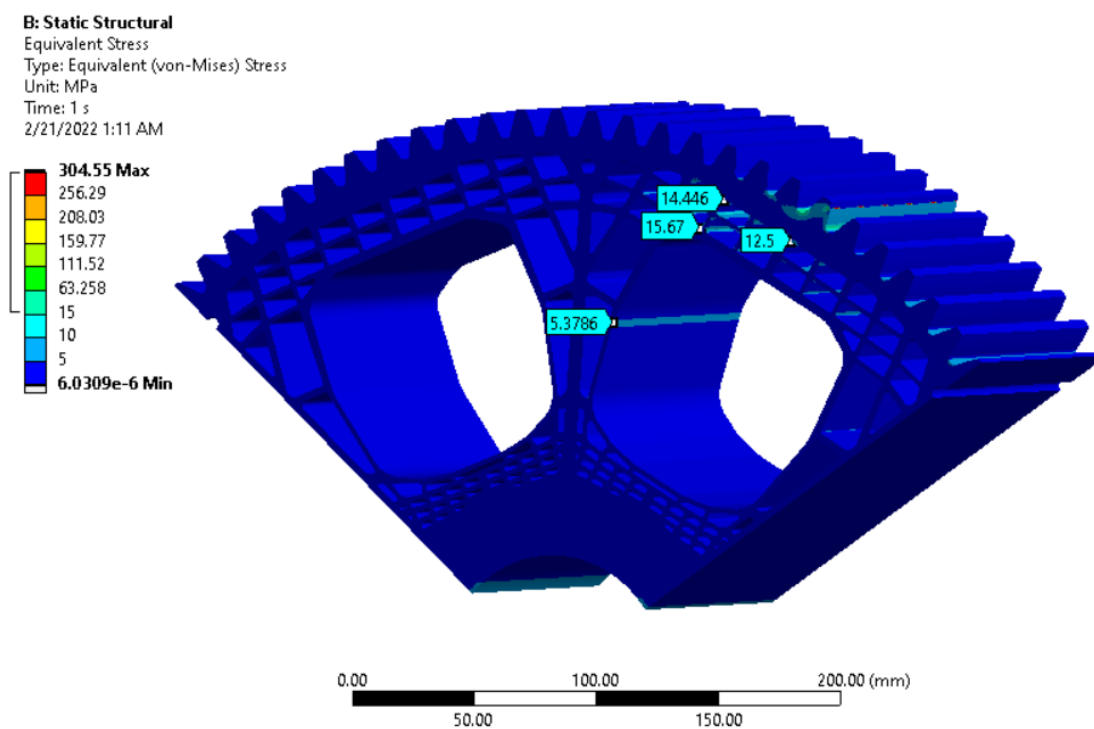
Slika 54. Opterećenja i oslonci na promatrane dvije sedmine zupčanika optimiranog topološkom optimizacijom.



Slika 55. Ukupni pomaci na zupčaniku optimiranom topološkom optimizacijom.

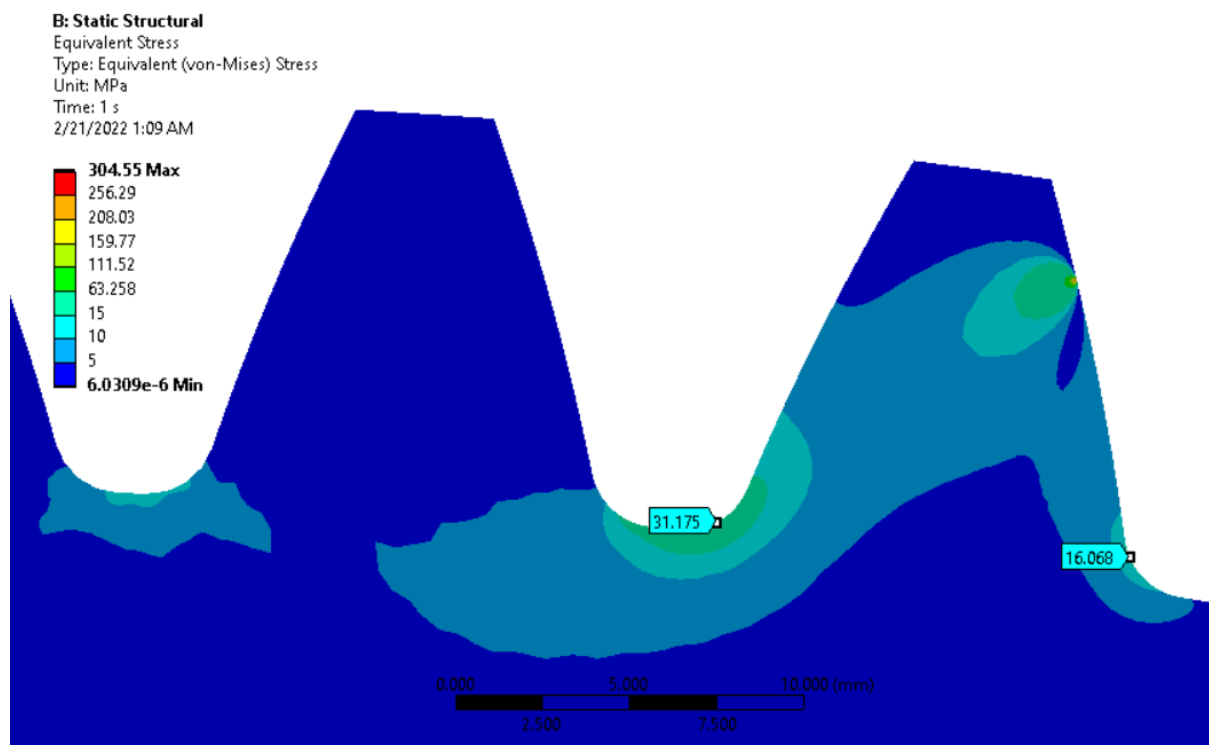


Slika 56. Naprezanja na zupčaniku optimiranom topološkom optimizacijom.



Slika 57. Iznosi naprezanja na odabranim mjestima zupčanika optimiranog topološkom optimizacijom.

Slika 56 prikazuje kako opterećenje koje djeluje na zub ima jako malen utjecaj na sljedeću sedminu zupčaniku na kojoj se ne pojavljuju značajnija naprezanja te kako na prijelazu glavine i rešetkaste strukture ne dolazi do značajnije koncentracije naprezanja. Slika 57 prikazuje neke značajnije iznose naprezanja koji mogu biti od velike važnosti ako se odluči na daljnju optimizaciju zupčanika te se tako potencijalno poboljšanje vidi u povećanju poprečnog presjeka dijela rešetke gdje je naprezanje 5,3786 MPa.



**Slika 58. Naprezanja kod opterećenog zuba zupčanika optimiranog topološkom optimizacijom.**

Naprezanje na tlačnoj strani korijena zuba je samo za 31,1 % veće od naprezanja u korijenu zuba referentnog zupčanika. Naprezanje na vlačnoj strani korijena zuba je za 17,1 % niže od naprezanja u korijenu zuba referentnog zupčanika. Naprezanja na bokovima zubi nešto su niža nego što su kod referentnog zupčanika. Obje kontrole naprezanja pokazuju da zupčanik zadovoljava te uzevši sve u obzir ova metoda topološke optimizacije se pokazala uspješnom. Ovakav zupčanik moguće je napraviti jedino kompaktiranjem ili sinteriranjem praha. Moguća je i prilagodna zupčanika za lijevanje no međutim tada bi se rešetkasta struktura na nekim mjestima morala promijeniti.

## 8. USPOREDBA REZULTATA

Za usporedbu rezultata koristit će se vrijednosti naprezanja i ukupnih pomaka dobivenih metodom konačnih elemenata u programu Ansys. Naprezanja u korijenu prikazat će se za tlačnu stranu budući da se tamo javljaju maksimalna naprezanja. Relativne razlike prikazat će se u odnosu na vrijednosti referentnog zupčanika.

**Tablica 6. Usporedba rezultata naprezanja i ukupnih pomaka.**

ZUPČANIK	Masa / kg	Razlika s obzirom na željenu masu / kg	Maksimalni ukupni pomak / mm	Ukupni pomak optimiranog / ukupni pomak referentnog
Referentni zupčanik	151,275	+ 91,882	0,0019014	-
Zupčanik olakšan obradom odvajanja čestica	59,154	- 0,239	0,025964	13,66
Zupčanik optimiran topološkom optimizacijom	60,25	+ 0,857	0,0056259	2,96
	Naprezanje na tlačnoj strani korijena zuba / MPa	Relativna razlika naprezanja u korijenu zuba	Naprezanje na bokovima zubi / MPa	Relativna razlika naprezanja na bokovima zubi
Referentni zupčanik	23,776	-	309,72	-
Zupčanik olakšan obradom odvajanja čestica	70,29	+ 195,6 %	305,1	- 1,49 %
Zupčanik optimiran topološkom optimizacijom	31,175	+ 31,1 %	304,55	- 1,67 %

## 9. ZAKLJUČAK

U ovom radu analizirao se utjecaj modula i prijenosnog omjera na zagonski moment gonjenog čeličnog zupčanika koji je u paru sa pogonskim zupčanikom određene debljine i broja zubi. Za točno odabrani prijenosni omjer i početne uvjete rada, jednadžba približnog modula pokazala se divergentnom te je prema prvom rješenju modula određeno koliko se mora smanjiti masa referentnog gonjenog zupčanika da se zadovolji jednadžba. Odabrane su dvije metode smanjenja mase zupčanika, obrada odvajanjem čestica te metoda topološke optimizacije. CAD model referentnog zupčanika napravljenog u programu SolidWorks služio je kao sredstvo postavljanja metode konačnih elemenata u programu Ansys uspoređujući rezultate dobivenih naprezanja sa naprezanjima dobivenima standardom ISO 6336. CAD model zupčanika olakšanog obradom odvajanjem čestica napravljen je isključivo koristeći program SolidWorks dok je zupčanik optimiran topološkom optimizacijom prvo bio podvrgnut optimizaciji u programu nTopology, a nakon toga je konačni CAD model napravljen također u programu SolidWorks. Optimirani zupčanici su zatim bili povrgnuti istim uvjetima opterećenja u programu Ansys te se prema provedenim analizama može zaključiti sljedeće:

1. Zagonski moment gonjenog zupčanika ovisi o četvrtoj potenciji prijenosnog omjera te o petoj potenciji modula pa se prema tome vrijednost sve više povećava odabirom svake sljedeće vrijednosti prijenosnog omjera, odnosno modula.
2. Odabrani 2D konačni elementi dovoljno točno opisuju raspodjelu i vrijednosti naprezanja koja se javljaju na zubu zupčanika za slučaj djelovanja sile koja uzorkuje pojavu najvećih naprezanja u korijenu zuba gonjenog zupčanika.
3. Zupčanik kojem je masa smanjena obradom odvajanjem čestica na način da se materijal sa zupčanika skine glodanjem sektorskih otvora između kojih će ostati rebra odgovarajuće širine, pokazuje veliki porast ukupnih pomaka i maksimalnih naprezanja u korijenu zuba u odnosu na referentni zupčanik. Debljina vijenca jako utječe na veličinu naprezanja koje se javlja u korijenu opterećenog zuba te je uočena velika razlika između iznosa naprezanja dobivenog metodom konačnih elemenata i iznosa naprezanja dobivenog preko jednadžbe koju prepisuje standard.
4. Odabrana metoda topološke optimizacije koja analizira jedan dio zupčanika pa rezultate primjenjuje za cijeli zupčanik, omogućuje izradu zupčanika prilagođenog svakom smjeru vrtnje vratila. Nadalje, metoda analizira i topološki optimira jedan dio zupčanika



na kojem je prethodno dokazano da se pojavljuju najveća naprezanja i pomaci sa aktivnom samo jednom silom za razliku od postojećih metoda koje postavljaju silu na svaki zub što se u stvarnosti nikada ne događa.

5. Zupčanik dobiven metodom topološke optimizacije pokazuje uz veliko smanjenje mase i smanjenje naprezanja koje se javlja na bokovima zubi te na vlačnoj strani korijena zuba. Naprezanja na tlačnoj strani korijena i ukupni pomaci veći su u usporedbi sa referentnim zupčanikom. Jednostavnim povećanjem debljine određenih dijelova rešetkaste strukture moguće je znatno smanjiti ukupne pomake i naprezanja u korijenu zuba tako da je moguća daljnja optimizacija dobivenog zupčanika.
6. Usporedivši sve parametre, naprezanja, pomake i cijenu izrade može se zaključiti kako će se smanjenje mase zupčanika provesti obradom odvajanjem čestica tamo gdje ne postoje strogo definirani zahtjevi za mirnoćom hoda zupčanika te u sustavima gdje mora postojati visoka sigurnost protiv loma zuba. Smanjenje mase zupčanika provest će se metodom topološke optimizacije kada se traže visokokvalitetni zupčanici sa malim odstupanjima naprezanja i pomaka kada će i sigurnost protiv loma zuba nekog sustava moći biti niža. Izrada takvog zupčanika je skupa no brojne su prednosti upotrebe takvog modela, a jedna od njih, kao što se dokazalo, mogućnost je velikog smanjenja mase zupčanika uz malo povećanje maksimalnih naprezanja i pomaka.

---

**LITERATURA**

- [1] <http://www.thomasnet.com>
- [2] Oberšmit, E., Ozubljenja i zupčanici, SNL Zagreb 1982.
- [3] [https://en.wikipedia.org/wiki/Mechanical\\_watch](https://en.wikipedia.org/wiki/Mechanical_watch)
- [4] Opalić, M., Prijenosnici snage i gibanja, Zagreb 1998.
- [5] Monkova, K., Monka, P., Tkac, J., Hricova, R., Mandulak, D., Effect of the Weight reduction of a Gear Wheel on Modal Characteristics, MTeM 2019.
- [6] Ligou, H., Yulong, L., Jianlong, H., Effects of lightweight gear blank on noise, vibration and harshness for electric drive system in electric vehicles, 2020.
- [7] Decker, K-H., Elementi strojeva, Golden marketing-Tehnička knjiga, Zagreb 2006.
- [8] <https://henanqiangxin.en.made-in-china.com>
- [9] <https://gearsolutions.com>
- [10] <https://gearmotions.com>
- [11] <http://www.rapidmade.com>
- [12] <http://www.3dsourced.com>
- [13] Opalić, M., Rakamarić, P., Reduktor, Zagreb 2001.
- [14] ISO 6336, "Calculation of load capacity of spur and helical gears", ISO, 2006.
- [15] Čular, I., Ciklus naprezanja u korijenu zuba cilindričnog zupčanika s tankim vijencem, Zagreb 2016.
- [16] <http://www.altair.com>
- [17] <http://www.materialise.com>
- [18] <http://www.ansys.com>
- [19] <http://www.3ds.com>
- [20] <https://ntopology.com>
- [21] Sorić, J., Metoda konačnih elemenata, Golden marketing-Tehnička knjiga, Zagreb 2004.
- [22] <http://www.engineersedge.com>
- [23] Gregov, G., Marunić, G., Glažar, V., Naprezanja u korijenu zuba zupčanika s ravnim zubima određena različitim metodama proračuna, Rijeka 2010.

---

**PRILOZI**

I. CD-R disc