

# Matematički model uređaja za žetvu vibracijske energije

---

**Banić, Pavao**

**Undergraduate thesis / Završni rad**

**2021**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:235:293842>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-01-05**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# ZAVRŠNI RAD

**Pavao Banić**

Zagreb, 2021.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# ZAVRŠNI RAD

Mentori:

Doc. dr. sc. Neven Alujević, dipl. ing.

Student:

Pavao Banić

Zagreb, 2021.

Izjavljujem da sam ovaj rad izradio samostalno koristeći znanja stečena tijekom studija i navedenu literaturu.

Zahvaljujem se svojem mentoru dr. sc. Nevenu Alujeviću na svojoj pruženoj pomoći tijekom izrade ovog završnog rada, a posebno mu se zahvaljujem na iskazanome strpljenju.

Zahvaljujem svim učiteljima i profesorima koji su me podučavali tokom mojeg obrazovnog puta.

Zahvaljujem svim svojim kolegama koji su mi olakšali studij tijekom svih onih mučnih razdoblja s nadom da ćemo diplomirati u isto vrijeme.

Zahvaljujem svim svojim prijateljima koji mi svakodnevni život čine ljepšim i sretnim, a posebno bih se zahvalio prijateljici Luciji koja je slušala te bila rame za plakanje i kada nije trebala.

Zahvaljujem i svojoj obitelji: bratu, sestri, mami i baki na konstantnoj podršci tokom svih ovih godina studiranja. Nadam se da ste me uspjeli istrpjeti. Posebno bih se zahvalio majci koja je moj najveći oslonac i koja me zna vratiti na pravi put.

Zahvaljujem HRT-u što mi je omogućio laganu zaradu na svojim kvizovima i omogućio da se ne brinem o financijama.

Za kraj poruka samome sebi. Neka ti ovo bude podsjetnik na to da možeš preskočiti sve prepreke koje se pojave pred tobom. Ustraj, te se nikada nemoj podcjenjivati.

Pavao Banić



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
**FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE**



Središnje povjerenstvo za završne i diplomske ispite  
 Povjerenstvo za završne ispite studija strojarstva za smjerove:  
 procesno-energetski, konstrukcijski, brodstrojarski i inženjersko modeliranje i računalne simulacije

Sveučilište u Zagrebu	
Fakultet strojarstva i brodogradnje	
Datum	Prilog
Klasa: 602 - 04 / 21 - 6 / 1	
Ur.broj: 15 - 1703 - 21 -	

## ZAVRŠNI ZADATAK

Student: **Pavao Banić** Mat. br.: 0035213965

Naslov rada na hrvatskom jeziku: **Matematički model uređaja za žetvu vibracijske energije**

Naslov rada na engleskom jeziku: **Mathematical model of a vibration energy harvester**

Opis zadatka:

U radu je potrebno razviti matematički model elektromehaničkog uređaja za žetvu vibracijske energije. Potrebno je pretpostaviti da se mehanički dio uređaja sastoji od primarne mase vezane za krutu podlogu jednim elastičnim i jednim prigušnim elementom. Nadalje, treba pretpostaviti dinamičku uzbuđu primarne mase silom koja se ponaša se kao bijeli Gaussov šum. Na primarnu masu ovješena je sekundarna masa također putem jednog elastičnog i jednog prigušnog elementa. Između primarne i sekundarne mase postavlja se elektrođinamički pretvornik koji se sastoji od magneta i zavojnice, gdje je zavojnica pričvršćena na primarnu masu a magnet na sekundarnu masu. Na električnim terminalima zavojnice potrebno je pretpostaviti otpornik na kojem se razvija korisna električna snaga. U radu je potrebno izvesti elektromehanički potpuno spregnuti linearni model za matematički opis uređaja. Potrebno je odrediti:

- 1) Mehaničku snagu disipiranu na prigušnom elementu primarne mase;
- 2) Mehaničku snagu disipiranu na prigušnom elementu u ovjesu sekundarne mase;
- 3) Električnu snagu disipiranu na otporu zavojnice elektrođinamičkog pretvornika;
- 4) Korisnu električnu snagu razvijenu na otporniku spojenom na terminalima zavojnice;
- 5) Ulaznu mehaničku snagu koju u sustav unosi uzbudna sila;
- 6) Korisnost uređaja kao omjer korisne električne snage i ulazne mehaničke snage.

Dobivene rezultate treba diskutirati na ilustrativnom primjeru. U radu navesti korištenu literaturu i eventualno dobivenu pomoć.

Zadatak zadan:

30. studenoga 2020.

Zadatak zadao:

Datum predaje rada:

**1. rok:** 18. veljače 2021.  
**2. rok (izvanredni):** 5. srpnja 2021.  
**3. rok:** 23. rujna 2021.

Predviđeni datumi obrane:

**1. rok:** 22.2. – 26.2.2021.  
**2. rok (izvanredni):** 9.7.2021.  
**3. rok:** 27.9. – 1.10.2021.

Predsjednik Povjerenstva:

Doc.dr.sc. Neven Alujević

Prof. dr. sc. Vladimir Soldo

## SADRŽAJ

SADRŽAJ .....	I
POPIS SLIKA .....	II
POPIS TABLICA.....	III
POPIS OZNAKA .....	IV
SAŽETAK.....	VI
SUMMARY .....	VII
1. UVOD.....	1
1.1. Dinamički prigušivači vibracija .....	1
1.2. O samome radu .....	1
2. MATEMATIČKI MODEL.....	3
2.1. Mehanički dio sustava jednadžbi .....	3
2.2. Elektrodinamički dio sustava jednadžbi.....	5
2.2.1. Prijenosne funkcije za sustav s dinamičkim prigušivačem vibracija .....	7
2.3. Snage na elementima sustava .....	9
3. ILUSTRATIVNI PRIMJER .....	11
3.1. Parametri sustava .....	11
3.2. Određivanje disipiranih snaga .....	12
3.2.1. Mehanička snaga disipirana na prigušnom elementu primarne mase $P_{c_1}$ .....	12
3.2.2. Mehanička snaga disipirana na prigušnom elementu u ovjesu sekundarne mase $P_{c_2}$ .....	13
3.2.3. Električna snaga disipirana na otporu zavojnice elektrodinamičkog pretvornika $P_R$ .....	14
3.2.4. Korisna električna snaga razvijena na otporniku spojenom na terminalima zavojnice $P_r$ .....	15
3.2.5. Ulazna mehanička snaga koju u sustav unosi uzbudna sila $P_{ulazno}$ .....	16
3.2.6. Korisnost uređaja kao omjer korisne električne snage i ulazne mehaničke snage $\eta$ .....	17
3.3. Prijenosne funkcije za različite vrijednosti otpora $r$ .....	18
3.3.1. Prijenosna funkcija između brzine primarne mase i uzbudne sile $H_{\dot{x}_1, f_1}$ .....	19
3.3.2. Prijenosna funkcija između brzine sekundarne mase i uzbudne sile $H_{\dot{x}_2, f_1}$ .....	20
3.3.3. Prijenosna funkcija između inducirane struje i uzbudne sile $H_{i, f_1}$ .....	22
3.4. Diskusija odabira optimalnih vrijednosti sustava.....	23
4. ZAKLJUČAK.....	25
LITERATURA.....	26

**POPIS SLIKA**

Slika 1. Fizikalni princip rada elektrodinamičkog pretvornika [3] .....	2
Slika 2. Skica matematičkog modela mehaničkog dijela sustava .....	3
Slika 3. Skica matematičkog modela sustava s dinamičkim prigušivačem vibracija .....	6
Slika 4. Grafički prikaz vrijednosti disipirane mehaničke snage na prigušnom elementu primarne mase u ovisnosti o parametrima $k_2$ i $r$ .....	12
Slika 5. Grafički prikaz vrijednosti disipirane mehaničke snage na prigušnom elementu u ovjesu sekundarne mase u ovisnosti o parametrima $k_2$ i $r$ .....	13
Slika 6. Grafički prikaz vrijednosti disipirane električne snage na otporu zavojnice elektrodinamičkog pretvornika u ovisnosti o parametrima $k_2$ i $r$ .....	14
Slika 7. Grafički prikaz vrijednosti korisne električne snaga razvijene na otporniku spojenom na terminalima zavojnice u ovisnosti o parametrima $k_2$ i $r$ .....	15
Slika 8. Graf iznosa snaga u ovisnosti o otporu $r$ ( $k_2 = 9554$ N/m) .....	17
Slika 9. Grafički prikaz vrijednosti korisnosti uređaja u ovisnosti o parametrima $k_2$ i $r$ .....	18
Slika 10. Grafički prikaz kvadrata apsolutne vrijednosti prijenosne funkcije $H_{\dot{x}_1, f_1}$ u ovisnosti o kružnoj frekvenciji za različite vrijednosti otpora $r$ .....	20
Slika 11. Grafički prikaz kvadrata apsolutne vrijednosti prijenosne funkcije u ovisnosti o kružnoj frekvenciji za različite vrijednosti otpora $r$ .....	21
Slika 12. Grafički prikaz kvadrata apsolutne vrijednosti razlike prijenosnih funkcija $H_{\dot{x}_2, f_1}$ i $H_{\dot{x}_1, f_1}$ u ovisnosti o kružnoj frekvenciji za različite vrijednosti otpora $r$ .....	22
Slika 13. Grafički prikaz kvadrata apsolutne vrijednosti prijenosne funkcije $H_{i, f_1}$ u ovisnosti o kružnoj frekvenciji za različite vrijednosti otpora $r$ .....	23
Slika 14. Grafički prikaz snage $P_r$ i snage $P_{c_1}$ u ovisnosti o otporu $r$ .....	24

---

**POPIS TABLICA**

Tablica 1. Parametri dinamičkog prigušnika vibracija [5] ..... 11



**POPIS OZNAKA**

Oznaka	Jedinica	Opis
$B$	[T]	gustoća magnetskog polja
$r$	[ $\Omega$ ]	otpor otpornika spojenog na terminalima zavojnice
$k_2$	[N m <sup>-1</sup> ]	krutost elastičnog elementa ovješena između primarne i sekundarne mase
$k_1$	[N m <sup>-1</sup> ]	krutost elastičnog elementa kojim je primarna masa vezana za krutu podlogu
$c_1$	[N s m <sup>-1</sup> ]	prigušenje prigušnog elementa kojim je primarna masa vezana za krutu podlogu
$c_2$	[N s m <sup>-1</sup> ]	prigušenje prigušnog ovješena između primarne i sekundarne mase
$f_1$	[N]	uzbudna sila
$x_1$	[m]	pomak primarne mase
$x_2$	[m]	pomak sekundarne mase
$\dot{x}_1$	[m s <sup>-1</sup> ]	brzina primarne mase
$\dot{x}_2$	[m s <sup>-1</sup> ]	brzina sekundarne mase
$\ddot{x}_1$	[m s <sup>-2</sup> ]	akceleracija primarne mase
$\ddot{x}_2$	[m s <sup>-2</sup> ]	akceleracija sekundarne mase
$m_1$	[kg]	primarna masa
$m_2$	[kg]	sekundarna masa
$\mathbf{M}$	[kg]	matrica masa
$\mathbf{C}$	[N s m <sup>-1</sup> ]	matrica prigušenja
$\mathbf{K}$	[N m <sup>-1</sup> ]	matrica krutosti
$\mathbf{x}(t)$	[m]	vektor pomaka
$\dot{\mathbf{x}}(t)$	[m s <sup>-1</sup> ]	vektor brzina
$\ddot{\mathbf{x}}(t)$	[m s <sup>-2</sup> ]	vektor akceleracija
$\mathbf{F}_1(t)$	[N]	vektor uzbudne sile
$\hat{X}$	[m]	amplituda pomaka
$\hat{F}_1$	[N]	amplituda uzbudne sile
$j$	[-]	imaginaran broj
$\omega$	[rad s <sup>-1</sup> ]	kružna frekvencija
$\mathbf{S}$	[kg s <sup>-2</sup> ]	matrica dinamičke krutosti sustava
$\mathbf{S}^{-1}$	[s <sup>2</sup> kg <sup>-1</sup> ]	inverz matrice dinamičke krutosti sustava
$\mathbf{Y}$	[s kg <sup>-1</sup> ]	matrica prijenosnih funkcija između brzine i sila
$s$	[-]	Laplaceova varijabla
$A_Y$	[kg <sup>2</sup> s <sup>-4</sup> ]	nazivnik matrice $\mathbf{Y}$
$Y_{ij}(s)$	[s kg <sup>-1</sup> ]	prijenosna funkcija sustava koja predstavlja brzinu mase $i$ uslijed djelovanja sile $F$ na masu $j$
$L$	[H]	induktivitet zavojnice

$R$	$[\Omega]$	ohmski otpor zavojnice
$e$	$[V]$	inducirani napon
$n$	$[-]$	broj namotaja zavojnice
$r$	$[m]$	radijus zavojnice
$T$	$[N A^{-1}]$	konstanta pretvornika
$i$	$[A]$	inducirana struja
$\hat{I}$	$[A]$	amplituda inducirane struje
$\hat{E}$	$[V]$	amplituda induciranog napona
$\dot{x}_{rel}$	$[m s^{-1}]$	relativna brzina gibanja između magneta i zavojnice
$f$	$[N]$	sila elektrodinamičkog pretvornika
$H_5(s)$	$[/]$	prijenosna funkcija
$B_{i,k}$	$[/]$	koeficijenti brojnika prijenosne funkcije gdje je $i = 0, 1, \dots, 4$ , a $k$ označava prijenosnu funkciju
$A_i$	$[/]$	koeficijenti nazivnika prijenosne funkcije gdje je $i = 0, 1, \dots, 5$
$H_{x_1, f_1}$	$[s^2 kg^{-1}]$	prijenosna funkcija između pomaka primarne mase i uzbudne sile
$H_{\dot{x}_1, f_1}$	$[s kg^{-1}]$	prijenosna funkcija između brzine primarne mase i uzbudne sile
$H_{x_2, f_1}$	$[s^2 kg^{-1}]$	prijenosna funkcija između pomaka sekundarne mase i uzbudne sile
$H_{\dot{x}_2, f_1}$	$[s kg^{-1}]$	prijenosna funkcija između brzine sekundarne mase i uzbudne sile
$H_{e, f_1}$	$[V N^{-1}]$	prijenosna funkcija između induciranog napona i uzbudne sile
$H_{f, f_1}$	$[-]$	prijenosna funkcija između sile elektrodinamičkog pretvornika i uzbudne sile
$H_{i, f_1}$	$[A N^{-1}]$	prijenosna funkcija između inducirane struje i uzbudne sile
$P_{c_1}$	$[W]$	mehanička snaga disipirana na prigušivaču $c_1$
$S_f$	$[N^2 s^{-1}]$	spektralna gustoća snage
$P_{c_2}$	$[W]$	mehanička snaga disipirana na prigušivaču $c_2$
$P_R$	$[W]$	električna snaga disipirana na otporu zavojnice
$P_r$	$[W]$	korisna električna snaga razvijena na otporniku $r$
$I_5$	$[/]$	integral prijenosne funkcije 5. reda
$P_{ulazno}$	$[W]$	ulazna mehanička snaga
$\eta$	$[-]$	korisnost uređaja

---

**SAŽETAK**

U radu je razvijen matematički model elektromehaničkog uređaja za žetvu vibracijske energije. Pretpostavljeno je da se mehanički dio uređaja sastoji od primarne mase vezane za krutu podlogu jednim elastičnim i jednim prigušnim elementom. Nadalje, pretpostavljena je dinamička uzbuda primarne mase silom koja se ponaša kao bijeli Gaussov šum. Na primarnu masu ovješena je sekundarna masa također putem jednog elastičnog i jednog prigušnog elementa. Između primarne i sekundarne mase postavlja se elektrodinamički pretvornik koji se sastoji od magneta i zavojnice, gdje je zavojnica pričvršćena na primarnu masu, a magnet na sekundarnu masu. Na električnim terminalima zavojnice potrebno je pretpostaviti otpornik na kojem se razvija korisna električna snaga. U radu je izveden elektromehanički potpuno spregnuti linearni model za matematički opis uređaja.

Određena je:

- 1) mehanička snaga disipirana na prigušnom elementu primarne mase;
- 2) mehanička snaga disipirana na prigušnom elementu u ovjesu sekundarne mase;
- 3) električna snaga disipirana na otporu zavojnice elektrodinamičkog pretvornika;
- 4) korisna električna snaga razvijena na otporniku spojenom na terminalima zavojnice;
- 5) ulazna mehanička snaga koju u sustav unosi uzbudna sila;
- 6) korisnost uređaja kao omjer korisne električne snage i ulazne mehaničke snage.

Ključne riječi: *vibracije, dinamički prigušivač vibracija, žetva energije, bijeli šum, elektrodinamički pretvornik*

---

**SUMMARY**

In this thesis a mathematical model of a vibration energy harvester is developed. It is assumed that the mechanical part of the device is made of a primary mass connected to a rigid base via one spring and one damper. A dynamic excitation of the primary mass is assumed, where the excitation force behaves like white Gaussian noise. A secondary mass is connected to the primary mass also via one spring and one damper. Between the primary and the secondary mass of the device, an electromechanical transducer is mounted which consists of a magnet attached to the secondary mass and a coil attached to the primary mass. The coil terminals are shunted with a resistor, which generates useful power. A fully coupled electromechanical linear model of the device is developed. The following has been calculated:

- 1) mechanical power dissipated in the damper attached to the primary mass;
- 2) mechanical power dissipated in the damper within the suspension of the secondary mass;
- 3) electrical power dissipated in the coil of vibration energy harvester;
- 4) useful power generated in the resistor coupled to coil terminals;
- 5) power input by the excitation force;
- 6) efficiency of the device given as a ratio of the useful electrical power and the power input.

Key words: *vibrations, dynamic vibration damper, energy harvest, Gaussian white noise, electrodynamic harvester*

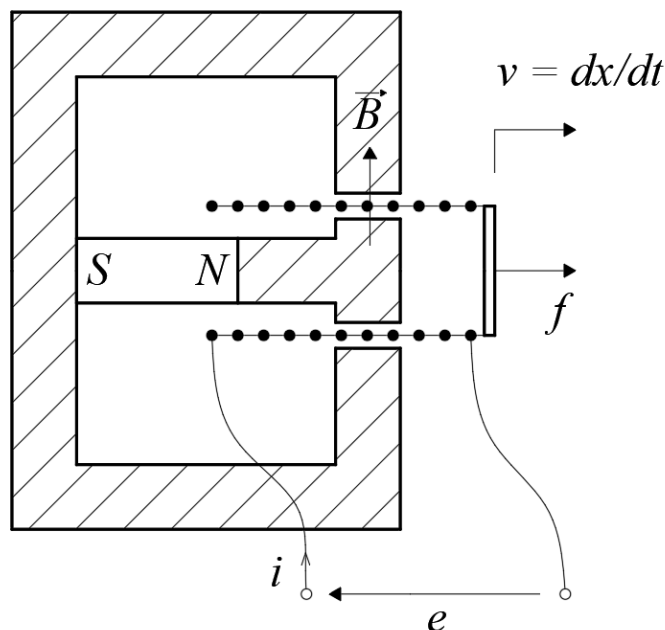
## 1. UVOD

### 1.1. Dinamički prigušivači vibracija

Dinamički prigušivači vibracija su uređaji s jednim stupnjem slobode koji se koriste za smanjenje vibracija neke primarne konstrukcije. Takvi uređaji elastično se ovjese na primarnu konstrukciju i obično imaju masu bitno manju od mase primarne konstrukcije. Prvi takvi uređaji patentirani su 1909. godine [1], a danas se nalaze u širokoj uporabi u strojarstvu, zrakoplovstvu i građevinarstvu u različitim ulogama. Jedna od mogućih primjena uređaja je da prigušuje vibracije na određenim frekvencijama u kojem je slučaju vlastita kružna frekvencija slobodnih vibracija uređaja podešena tako da odgovara frekvenciji uzbude. Taj slučaj nazivamo antirezonancijom, a uređaj u takvoj primjeni „neutralizatorom vibracija“. Smanjenjem prigušenja uređaja taj se efekt dodatno pojačava. U slučaju uporabe uređaja za smanjenje amplitude vibracija primarne konstrukcije kod širokopojasne uzbude, kakva je Gaussov bijeli šum, uređaj nazivamo jako prigušenim dinamičkim prigušivačem vibracija [2].

### 1.2. O samome radu

U radu se razmatra mogućnost postizanja prigušenja pomoću elektrodinamičkog pretvornika. Smanjenje vibracija koje se provodi dinamičkim prigušivačem vibracija svodi se na disipaciju snage dovedene na primarnu masu. Primarna i sekundarna masa imaju svoje prigušne elemente na kojima se snaga rasipa. Ta disipirana snaga postoji u vidu toplinskoga toka koji mi ne koristimo i predstavlja nam gubitak. Dio snage grana se prema dinamičkom prigušivaču vibracija koji se nalazi između primarne i sekundarne mase. Naš dinamički prigušivač vibracija izveden je kao elektromagnetski pretvornik. On pretvara mehaničku energiju u električnu, kao u ovom slučaju, a može raditi i obratno. Sastoji se od permanentnog magneta koji stvara jednoliku gustoću magnetskog polja  $B$  okomitu na prazninu i zavojnice koja se slobodno giba u aksijalnom smjeru duž praznine kao što je prikazano na slici 1 [3].



Slika 1. Fizikalni princip rada elektrodinamičkog pretvornika [3]

Određeni se udio disipirane snage u elektrodinamičkom pretvorniku disipira zbog otpora zavojnice, dio zbog strujanja zraka između zavojnice i magneta (postojanje graničnog sloja), mali dio zbog strukturnog prigušenja deformabilnih dijelova uređaja, a dio se može iskoristiti tako da na krajevima zavojnice postavimo otpornik otpora  $r$  na kojem će se razvijati korisna snaga.

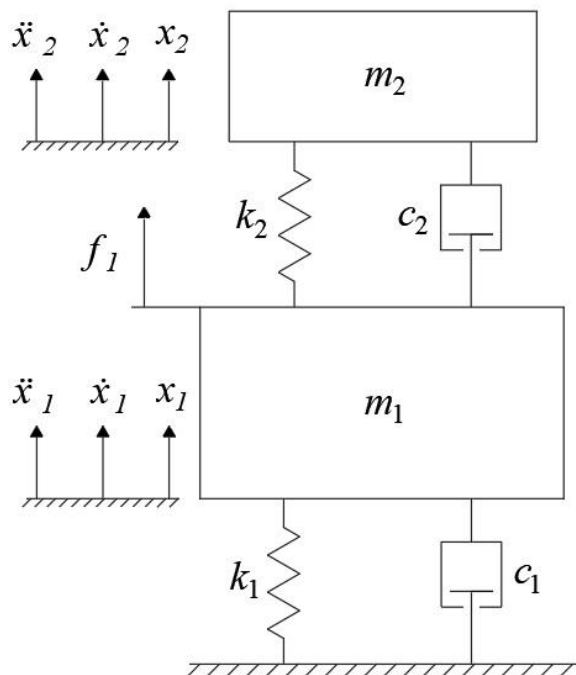
Pretpostavkom uzbudne sile na primarnu konstrukciju koja se ponaša kao bijeli Gaussov šum, problem svodimo na traženje optimalnih vrijednosti krutosti opruge  $k_2$  i otpora  $r$  na kojem se razvija korisna snaga. U radu će se odrediti disipirane snage na pojedinim elementima, razvijena korisna snaga, ulazna snaga i korisnost uređaja u ovisnosti o krutosti  $k_2$  i otporu  $r$ . Pokazat će se koje su optimalne vrijednosti tih dvaju parametara za slučaj maksimalne razvijene snage na otporniku  $r$  i za slučaj maksimalne disipacije snage na prigušnom elementu primarne mase, tj. slučaj najvećeg prigušenja gibanja primarne mase. Razmotrit će se i mogućnost istodobnog smanjenja vibracija primarne konstrukcije i žetve mehaničke energije vibracija na elektrodinamičkome pretvorniku.

Rad je strukturiran u četiri poglavlja. U drugom poglavlju je izveden potpuno spregnuti elektromehanički model sustava, dok je u trećem poglavlju taj model analiziran na jednome ilustrativnome primjeru. U posljednjemu poglavlju iznose se zaključci rada.

## 2. MATEMATIČKI MODEL

### 2.1. Mehanički dio sustava jednadžbi

Matematički model kojim ćemo opisati naš sustav možemo podijeliti na mehanički i elektrodinamički dio. Polazni dio sustava je mehanički dio prikazan na slici 2. Sastoji se od primarne mase koja je vezana za krutu podlogu oprugom krutosti  $k_1$  i prigušivačem prigušenja  $c_1$ . Na primarnu masu ovješena je sekundarna masa putem opruge krutosti  $k_2$  i prigušivača prigušenja  $c_2$ . Primarna masa pobuđena je silom  $f_1$  koja se ponaša kao bijeli Gaussov šum, što znači da ima normalnu distribuciju u vremenskoj domeni s prosječnom vrijednosti jednakoj nuli i jednaku snagu za sve frekvencije.  $x_1$  i  $x_2$  su pomaci,  $\dot{x}_1$  i  $\dot{x}_2$  brzine, te  $\ddot{x}_1$  i  $\ddot{x}_2$  akceleracije primarne i sekundarne mase.



Slika 2. Skica matematičkog modela mehaničkog dijela sustava

Za izvođenje mehaničkog dijela jednadžbi sustava pretpostavit će se da je  $x_2 > x_1$ ,  $\dot{x}_2 > \dot{x}_1$  i on glasi:

$$m_1 \ddot{x}_1 + (c_1 + c_2) \dot{x}_1 - c_2 \dot{x}_2 + (k_1 + k_2) x_1 - k_2 x_2 = f_1, \quad (1)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + c_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k_2 (x_2 - x_1) = 0. \quad (2)$$

Taj se sustav jednadžbi može zapisati u matričnom obliku:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{F}_1, \quad (3)$$

gdje je  $\mathbf{M}$  matrica masa,  $\mathbf{C}$  matrica prigušenja,  $\mathbf{K}$  matrica krutosti,  $\mathbf{x}(t)$ ,  $\dot{\mathbf{x}}(t)$ ,  $\ddot{\mathbf{x}}(t)$  vektori pomaka, brzine i ubrzanja i  $\mathbf{F}_1(t)$  je vektor uzbudne sile. Te su matrice dane sljedećim izrazima:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}, \quad (4)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix}, \quad (5)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}, \quad (6)$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_1 = \begin{bmatrix} F_1(t) \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (7, 8)$$

Pretpostavka je da su uzbuđa i funkcija pomaka harmonijskog oblika  $\mathbf{x} = \hat{X}e^{j\omega t}$ ,  $\mathbf{F}_1 = \hat{F}_1e^{j\omega t}$ , gdje je  $j = \sqrt{-1}$ . Posljedično se jednadžba (3) može zapisati kao:

$$\mathbf{S}(j\omega)\mathbf{x}(j\omega) = \mathbf{F}_1(j\omega), \quad (9)$$

gdje je  $\mathbf{S}(j\omega)$  matrica dinamičke krutosti oblika:

$$\mathbf{S}(j\omega) = -\omega^2\mathbf{M} + j\omega\mathbf{C} + \mathbf{K}. \quad (10)$$

Množenjem inverzom matrice  $\mathbf{S}$  sa lijeve strane dobije se rješenje jednadžbe (10):

$$\mathbf{x}(j\omega) = \mathbf{S}^{-1}(j\omega)\mathbf{F}_1(j\omega), \quad (11)$$

te derivacijom po vremenu izraz:

$$\dot{\mathbf{x}}(j\omega) = \mathbf{Y}(j\omega)\mathbf{F}_1(j\omega), \quad (12)$$

gdje je  $\dot{\mathbf{x}}(j\omega) = j\omega\mathbf{x}(j\omega)$  vektor brzine vibriranja, a  $\mathbf{Y}(j\omega) = j\omega\mathbf{S}^{-1}(j\omega)$  je matrica prijenosnih funkcija između brzine i sila. Daljni zapis izvodit će se u Laplaceovoj domeni pomoću supstitucije:

$$s = j\omega \quad (13)$$

Elementi matrice  $\mathbf{Y}(s)$  svi imaju isti nazivnik:

$$A_Y = s^4 m_1 m_2 + ((m_1 + m_2)c_2 + c_1 m_2)s^3 + (c_1 c_2 + (m_1 + m_2)k_2 + k_1 m_2)s^2 + (k_1 c_2 + c_1 k_2)s + k_1 k_2, \quad (14)$$

te su njihove jednadžbe sljedeće:

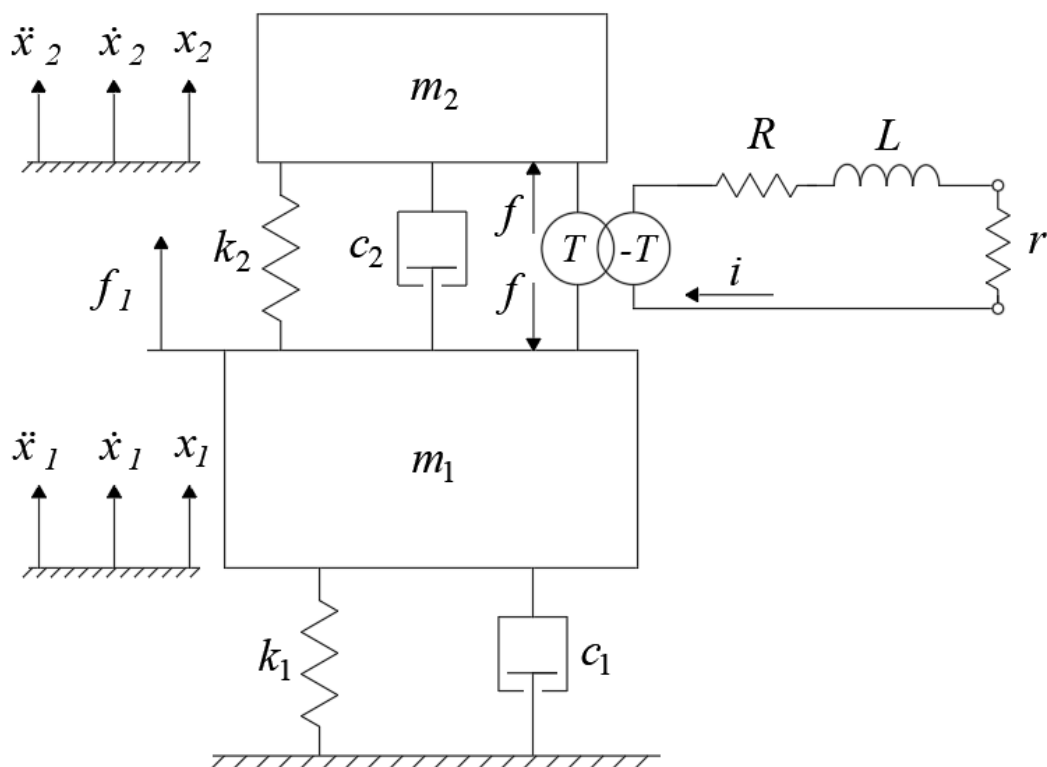


$$\begin{aligned}
 Y_{11}(s) &= \frac{s(s^2 m_2 + s c_2 + k_2)}{A_Y}, \\
 Y_{12}(s) = Y_{21}(s) &= \frac{s(s c_2 + k_2)}{A_Y}, \\
 Y_{22}(s) &= \frac{s(s^2 m_1 + s(c_1 + c_2) + k_1 + k_2)}{A_Y},
 \end{aligned} \tag{15a-c}$$

gdje je  $Y_{ij}(s) = \dot{x}_i / F_j$  prijenosna funkcija sustava koja predstavlja brzinu mase  $i$  uslijed djelovanja sile  $F$  na masu  $j$ .

## 2.2. Elektrodinamički dio sustava jednadžbi

Uvođenjem u mehanički sustav dinamičkog prigušivača vibracija, u mehanički dio sustava ukomponira se elektrodinamički dio (slika 3). To se ostvaruje tako da se između primarne i sekundarne mase postavlja elektrodinamički pretvornik koji se sastoji od magneta i zavojnice, gdje je zavojnica pričvršćena na primarnu masu, a magnet na sekundarnu masu. Zavojnica ima induktivitet  $L$  i otpor  $R$ . Na električnim terminalima zavojnice pretpostavljen je otpornik na kojem se razvija korisna električna snaga. Njime se zatvara strujni krug. Primarna masa pobuđena je silom  $f_1$  koja se ponaša kao bijeli Gaussov šum, a  $x_1$  i  $x_2$  su pomaci,  $\dot{x}_1$  i  $\dot{x}_2$  brzine, te  $\ddot{x}_1$  i  $\ddot{x}_2$  akceleracije primarne i sekundarne mase.



Slika 3. Skica matematičkog modela sustava s dinamičkim prigušivačem vibracija

Gibanjem zavojnice, inducira se napon koji je prema Drugom Faradayevom zakonu jednak:

$$e = 2\pi nrBv = Tv, \quad (16)$$

gdje je:

$$T = 2\pi nrB, \quad (17)$$

konstanta pretvornika jednaka umnošku duljine zavojnice izložene magnetskom toku  $2\pi nr$ , i gustoći magnetskog toka  $B$ . Konstanta pretvornika  $T$  nam prikazuje u kakvom su odnosu mehanička i električna energija. Ona pokazuje koliko se napona inducira na zavojnici pri relativnom gibanju zavojnice i magneta kada je ta brzina jednaka jednom metru u sekundi. Struja inducirana u zavojnici i napon na terminalima zavojnice također su harmonijske funkcije oblika  $i = \hat{I}e^{st}$ ,  $e = \hat{E}e^{st}$ . Pretpostavimo li na krajevima zavojnice otpornik na kojem se razvija neka korisna snaga, napon na tome otporniku biti će jednak:

$$e = -ri = T\dot{x}_{\text{rel}} + L\frac{di}{dt} + Ri, \quad (18)$$

gdje je  $\dot{x}_{\text{rel}}$  relativna brzina gibanja zavojnice u odnosu na magnet,  $L$  induktivitet zavojnice, a  $R$  otpor zavojnice. Jednadžbu možemo zapisati i u Laplaceovoj domeni. Tada glasi:

$$Ts(x_2 - x_1) + Ri + Lsi = e. \quad (19)$$

Druga konstitutivna jednačba sustava proizlazi iz Lorentzovog zakona prema kojem je vanjska sila  $f$  potrebna za održavanje ravnoteže zavojnice jednaka umnošku konstante pretvornika  $T$  i inducirane struje u zavojnici  $i$ :

$$f = -Ti. \quad (20)$$

Iz prethodne je jednačbe vidljivo da konstanta pretvornika pokazuje i kolika je jakost sile na zavojnicu kojom teče struja jačine jednog ampera. Jednačbe ravnoteže ovog sustava dane su sljedećim izrazima:

$$m_1\ddot{x}_1 + (c_1 + c_2)\dot{x}_1 - c_2\dot{x}_2 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2x_2 + f = f_1, \quad (21)$$

$$m_2\ddot{x}_1 + c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k_2(x_2 - x_1) - f = 0. \quad (22)$$

Uz pomoć jednačbi (15a-15c), brzine masa  $m_1$  i  $m_2$  možemo pisati ovako:

$$\dot{x}_1 = Y_{11} \cdot f_1 - Y_{11} \cdot f + Y_{12} \cdot f \quad (23)$$

$$\dot{x}_2 = Y_{21} \cdot f_1 - Y_{21} \cdot f + Y_{22} \cdot f \quad (24)$$

### 2.2.1. Prijenosne funkcije za sustav s dinamičkim prigušivačem vibracija

Rješavanjem sustava jednačbi (19-24) dobiju se rješenja za funkcije pomaka primarne i sekundarne mase  $x_1$  i  $x_2$ , napon  $e$  na otporniku  $r$ , induciranu struju  $i$ , te silu u elektrodinamičkom pretvorniku  $f$ . Dijeljenjem tih jednačbi sa amplitudom uzbudne sile  $f_1$ , dobiju se prijenosne funkcije između navedenih veličina i uzbudne sile  $f_1$ :

$$x_1 = \frac{f_1(Y_{11} \cdot r + Y_{11} \cdot R + Y_{11} \cdot Ls + T^2Y_{22} \cdot Y_{11} - T^2Y_{12}^2)}{(r + R + Ls - 2T^2Y_{12} + T^2Y_{22} + T^2Y_{11})s} \quad (25)$$

$$x_2 = \frac{f_1(Y_{12} \cdot r + Y_{12} \cdot R + Y_{12} \cdot Ls + T^2Y_{22} \cdot Y_{11} - T^2Y_{12}^2)}{(r + R + Ls - 2T^2Y_{12} + T^2Y_{22} + T^2Y_{11})s} \quad (26)$$

$$e = \frac{-rTf_1(Y_{11} - Y_{12})}{r + R + Ls - 2T^2Y_{12} + T^2Y_{22} + T^2Y_{11}} \quad (27)$$

$$i = \frac{Tf_1(Y_{11} - Y_{12})}{r + R + Ls - 2T^2Y_{12} + T^2Y_{22} + T^2Y_{11}} \quad (28)$$

$$r = \frac{T^2f_1(Y_{11} - Y_{12})}{r + R + Ls - 2T^2Y_{12} + T^2Y_{22} + T^2Y_{11}} \quad (29)$$

Prijenosne nam funkcije govore kako se taj odnos ponaša u ovisnosti o frekvenciji vibriranja sustava. Sve su one oblika:

$$H_5(s) = \frac{B_0 + B_1s + B_2s^2 + B_3s^3 + B_4s^4}{A_0 + A_1s + A_2s^2 + A_3s^3 + A_4s^4 + A_5s^5}, \quad (30)$$

i imaju isti nazivnik čiji su koeficijenti redom:

$$\begin{aligned} A_0 &= Rk_1k_2 + rk_1k_2 \\ A_1 &= k_1c_2R + k_1c_2r + k_2Lk_1 + k_2Rc_1 + k_2rc_1 + T^2k_1 \\ A_2 &= m_2k_1R + m_2k_1r + m_2Rk_2 + m_2rk_2 + c_2Lk_1 + \\ &\quad c_2Rc_1 + c_2rc_1 + k_2Lc_1 + k_2m_1R + k_2m_1r + T^2c_1 \\ A_3 &= m_2c_2R + m_2c_2r + m_2Rc_1 + m_2T^2 + m_2rc_1 + m_2Lk_2 + \\ &\quad m_2Lk_1 + c_2Lc_1 + c_2m_1R + c_2m_1r + m_1T^2 + m_1Lk_2 \\ A_4 &= m_2Lc_2 + m_2Lc_1 + m_2m_1R + m_2m_1r + Lm_1c_2 \\ A_5 &= Lm_1m_2. \end{aligned} \quad (31a-f)$$

Brojnik je različit za svaku pojedinu prijenosnu funkciju.

Za prijenosnu funkciju između pomaka primarne mase i uzbudne sile  $H_{x_1, f_1}$  koeficijenti brojnika su:

$$\begin{aligned} B_{4, x_1} &= 0 \\ B_{3, x_1} &= Lm_2 \\ B_{2, x_1} &= (r + R)m_2 + Lc_2 \\ B_{1, x_1} &= (r + R)c_2 + T^2 + Lk_2 \\ B_{0, x_1} &= k_2(r + R) \end{aligned} \quad (32a-e)$$

Za prijenosnu funkciju između brzine primarne mase i uzbudne sile  $H_{\dot{x}_1, f_1}$  koeficijenti brojnika su:

$$\begin{aligned} B_{4, \dot{x}_1} &= Lm_2 \\ B_{3, \dot{x}_1} &= (r + R)m_2 + Lc_2 \\ B_{2, \dot{x}_1} &= (r + R)c_2 + T^2 + Lk_2 \\ B_{1, \dot{x}_1} &= k_2(r + R) \\ B_{0, \dot{x}_1} &= 0 \end{aligned} \quad (33a-e)$$

Za prijenosnu funkciju između pomaka sekundarne mase i uzbudne sile  $H_{x_2, f_1}$  koeficijenti brojnika su:

$$\begin{aligned}
B_{4,x_2} &= B_{3,x_2} = 0 \\
B_{2,x_2} &= Lc_2 \\
B_{1,x_2} &= (r + R)c_2 + T^2 + Lk_2 \\
B_{0,x_2} &= k_2(r + R)
\end{aligned} \tag{34a-e}$$

Za prijenosnu funkciju između brzine sekundarne mase i uzbudne sile  $H_{\dot{x}_2, f_1}$  koeficijenti brojnika su:

$$\begin{aligned}
B_{4,\dot{x}_2} &= B_{0,\dot{x}_2} = 0 \\
B_{3,\dot{x}_2} &= Lc_2 \\
B_{2,\dot{x}_2} &= (r + R)c_2 + T^2 + Lk_2 \\
B_{1,\dot{x}_2} &= k_2(r + R)
\end{aligned} \tag{35a-e}$$

Za prijenosnu funkciju između inducirano napona i uzbudne sile  $H_{e, f_1}$  koeficijenti brojnika su:

$$\begin{aligned}
B_{0,e} &= B_{1,e} = B_{2,e} = B_{4,e} = 0 \\
B_{3,e} &= -m_2 T r
\end{aligned} \tag{36a-e}$$

Za prijenosnu funkciju između sile elektrodinamičkog pretvornika i uzbudne sile  $H_{f, f_1}$  koeficijenti brojnika su:

$$\begin{aligned}
B_{0,f} &= B_{1,f} = B_{2,f} = B_{4,f} = 0 \\
B_{3,f} &= m_2 T^2
\end{aligned} \tag{37a-e}$$

Za prijenosnu funkciju između inducirane struje i uzbudne sile  $H_{i, f_1}$  koeficijenti brojnika su:

$$\begin{aligned}
B_{0,i} &= B_{1,i} = B_{2,i} = B_{4,i} = 0 \\
B_{3,i} &= m_2 T
\end{aligned} \tag{38a-e}$$

### 2.3. Snage na elementima sustava

Uzbuđnom silom  $f_1$  u sustav se unosi snaga te se ona prenosi dalje u sustavu.

Na prigušivaču  $c_1$  disipira se snaga jednaka:

$$P_{c_1} = \frac{c_1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |H_{\dot{x}_1, f_1}(s)|^2 S_f ds, \tag{39}$$

gdje je  $S_f$  spektralna gustoća snage i ona je za bijeli Gaussov šum konstantna, a mi ćemo pretpostaviti da iznosi  $S_f = 1 \text{ N}^2/\text{s}$ .

Na prigušivaču  $c_2$  disipira se snaga jednaka:

$$P_{c_2} = \frac{c_2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |H_{\dot{x}_2, f_1}(s) - H_{\dot{x}_1, f_1}(s)|^2 S_f ds. \quad (40)$$

Na zavojnici se uslijed njenog otpora disipira snaga jednaka:

$$P_R = \frac{R}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |H_{i, f_1}(s)|^2 S_f ds. \quad (41)$$

Na otporniku  $r$  disipira se snaga iz sustava koju smatramo korisnom:

$$P_r = \frac{r}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |H_{i, f_1}(s)|^2 S_f ds. \quad (42)$$

Za računanje snaga (39-42) potrebno je izračunati integrale koji se nalaze u njihovim formulama. Oni se računaju pomoću formule [4]:

$$I_5 = \frac{\pi \left( \begin{aligned} &A_0 B_4^2 (A_0 A_3^2 + A_1^2 A_4 - A_0 A_1 A_5 - A_1 A_2 A_3) + \\ &+ A_0 A_5 (2B_2 B_4 - B_3^2) (A_1 A_2 - A_0 A_3) + \\ &+ A_0 A_5 (2B_0 B_4 - 2B_1 B_3 + B_2^2) (A_0 A_5 - A_1 A_4) + \\ &+ A_0 A_5 (2B_0 B_2 - B_1^2) (A_3 A_4 - A_2 A_5) + \\ &+ A_5 (B_0 (A_1 A_4^2 + A_2^2 A_5 - A_0 A_4 A_5 - A_2 A_3 A_4)) \end{aligned} \right)^2}{A_0 A_5 \left( \begin{aligned} &A_0^2 A_5^2 - 2A_0 A_1 A_4 A_5 - A_0 A_2 A_3 A_5 + \\ &+ A_1 A_2^2 A_5 + A_1^2 A_4^2 + A_0 A_3^2 A_4 - A_1 A_2 A_3 A_4 \end{aligned} \right)} \quad (43)$$

u koju je potrebno uvrstiti odgovarajuće koeficijente za odgovarajuće prijenosne funkcije.

Ukupna snaga koja je unesena u sustav, jednaka je zbroju svih gore navedenih snaga:

$$P_{ulazno} = P_r + P_R + P_{c_1} + P_{c_2}. \quad (44)$$

Iskoristivost sustava računat ćemo kao omjer korisne snage i unesene snage formulom:

$$\eta = \frac{P_r}{P_{ulazno}} \quad (45)$$

### 3. ILUSTRATIVNI PRIMJER

#### 3.1. Parametri sustava

U ovome poglavlju prethodno izvedeni matematički model analiziramo na primjeru jednoga realnoga sustava koji se sastoji od primarne konstrukcije i na nju montiranoga dinamičkog prigušivača vibracija. Model u sebi sadrži više varijabli o čijim će vrijednostima ovisiti njegovo ponašanje: mase  $m_1$  i  $m_2$ , krutost opruga  $k_1$  i  $k_2$ , prigušenja  $c_1$  i  $c_2$ , konstanta pretvornika  $T$ , induktivitet  $L$  i otpor  $R$  zavojnice, te vrijednost otpornika  $r$  spojenog na terminalima zavojnice. Neke od tih veličina su nam polazne te prema njima određujemo kakav ćemo uređaj za žetvu vibracijske energije koristiti. Mi ćemo za svoj realan sustav koristiti parametre elektrodinamičkog pretvornika kojeg imamo na raspolaganju u laboratoriju, a to je CVC40HF – 6.5. U našem dinamičkom prigušivaču vibracija nalaze se dva ovakva pretvornika spojena u seriju. Za takav serijski spoj podaci su navedeni u tablici 1.

**Tablica 1. Parametri dinamičkog prigušnika vibracija [5]**

Parametri dinamičkog prigušnika vibracija	Mjerna jedinica	Iznos
masa, $m_2$	kg	0,666
prigušenje $c_2$	Ns/m	13,5
induktivitet zavojnice, $L$	H	0,01104
otpor zavojnice pri 25°C, $R$	$\Omega$	32,06
konstanta pretvornika, $T$	N/A	51,56

Za parametre primarne konstrukcije odabrane su sljedeće vrijednosti:

$$m_1 = 6,66 \text{ kg,}$$

$$c_1 = 6,75 \text{ Ns/m,}$$

$$k_1 = 105\,240 \text{ N/m.}$$

Masa dinamičkog prigušivača mora biti znatno manja od mase primarne konstrukcije te je iz toga razloga za njenu vrijednost uzeta deseterostruko manja vrijednost od one za masu primarne konstrukcije  $m_1$ . Nepoznati parametri su krutost dinamičkog prigušivača  $k_2$  i otpor  $r$  na terminalima zavojnice te će se u ovome poglavlju tražiti njihove optimalne vrijednosti za

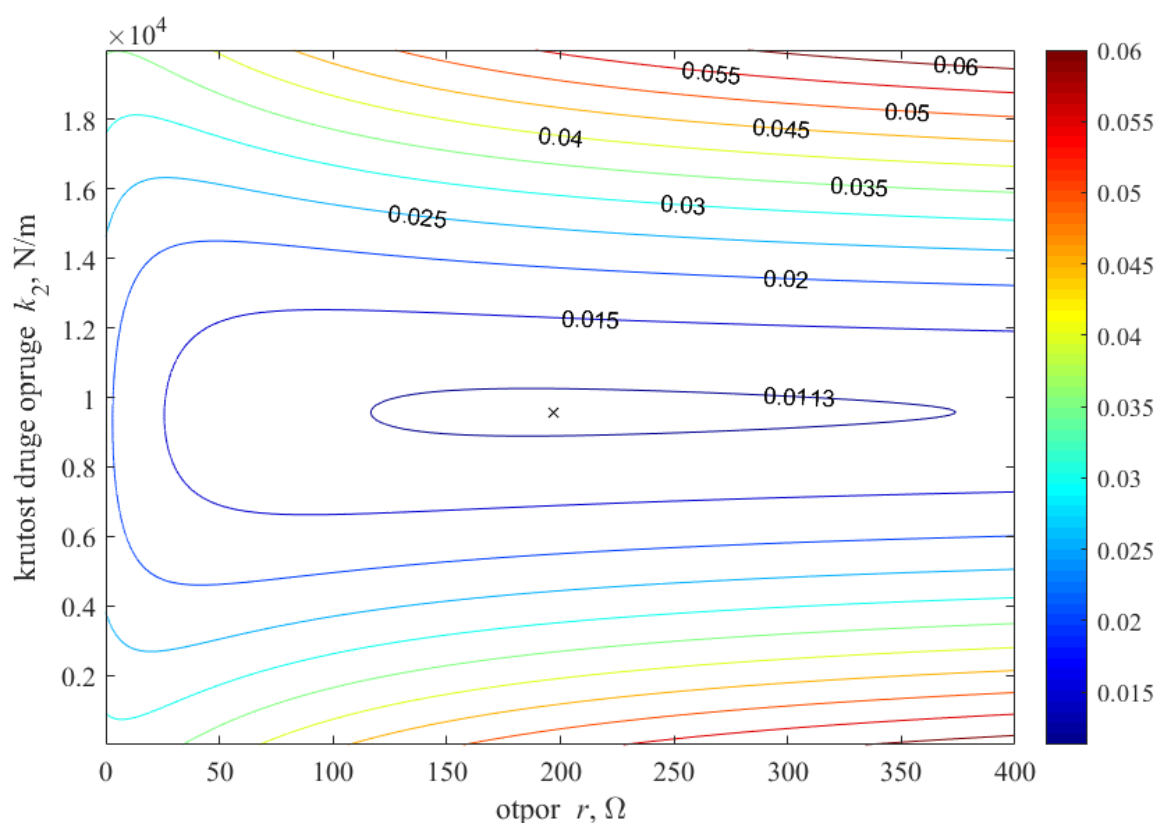
ovakav sustav za dva slučaja: slučaj maksimalne razvijene korisne snage na otporniku  $r$  i za slučaj minimalne snage disipirane na prigušivaču  $c_1$ . Primjećuje se da potonji slučaj odgovara minimalnoj kinetičkoj energiji vibracija primarne konstrukcije.

### 3.2. Određivanje disipiranih snaga

Gore navedeni parametri uvrštavaju se u jednadžbe (31-38) te se ubacuju u jednadžbe za izračun snaga (39-42). Disipirane snage izračunate su u ovisnosti o vrijednostima parametara  $k_2$  i  $r$  u računalnome programu MATLAB, te su u istome i prikazane grafički konturnim prikazom.

#### 3.2.1. Mehanička snaga disipirana na prigušnom elementu primarne mase $P_{c_1}$

Mehanička snaga disipirana na prigušnom elementu primarne mase izračunata je uvrštavanjem parametara u jednadžbu (39) i prikazana je na slici 4.



**Slika 4. Grafički prikaz vrijednosti disipirane mehaničke snage na prigušnom elementu primarne mase u ovisnosti o parametrima  $k_2$  i  $r$**



Na grafu je oznakom „x“ označen minimum disipirane snage. On se postiže za vrijednosti parametara:

$$r = 197 \Omega$$

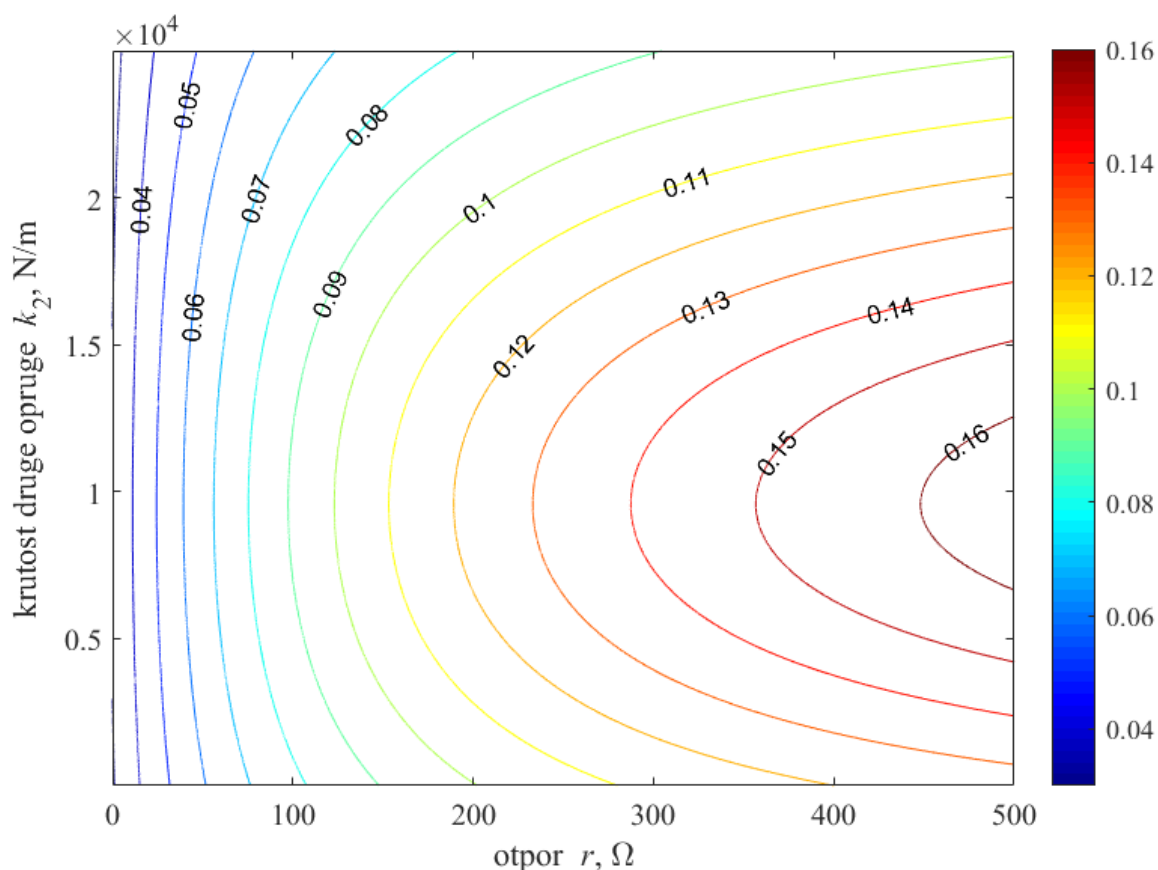
$$k_2 = 9571 \text{ N/m}$$

i iznosi  $P_{c_1} = 0,011 \text{ W}$ , uz već navedenu pretpostavku  $S_f = 1 \text{ N}^2/\text{s}$ .

Budući da je disipirana snaga na ovome prigušnome elementu proporcionalna brzini gibanja primarne mase, to su nam optimalne vrijednosti sustava ako nam je cilj smanjiti prosječnu kinetičku energiju vibracija primarne konstrukcije.

### 3.2.2. Mehanička snaga disipirana na prigušnom elementu u ovjesu sekundarne mase $P_{c_2}$

Mehanička snaga disipirana na prigušnom elementu u ovjesu sekundarne mase izračunata je uvrštavanjem parametara u jednadžbu (40) i prikazana je na slici 5.

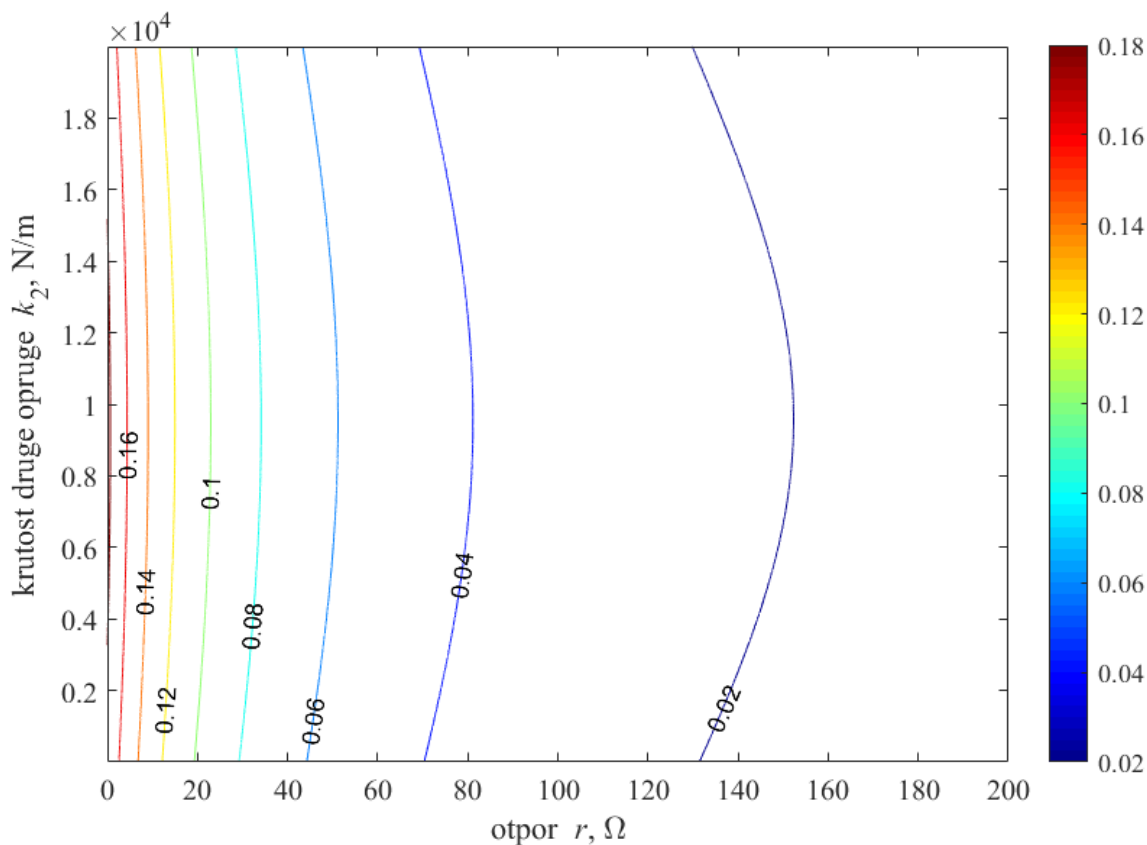


Slika 5. Grafički prikaz vrijednosti disipirane mehaničke snage na prigušnom elementu u ovjesu sekundarne mase u ovisnosti o parametrima  $k_2$  i  $r$

Iz grafa je vidljivo da se porastom vrijednosti otpora  $r$  (približavanje situaciji s otvorenim terminalima zavojnice) povećava snaga disipirana na ovome prigušnome elementu. Zbog smanjenja vrijednosti elektrodinamičke sile (20), smanjuje se njen utjecaj i raste relativna brzina gibanja između sekundarne i primarne mase te posljedično i vrijednost disipirane snage koja je proporcionalna relativnoj brzini. Iz grafa je vidljivo kako je porast vrijednosti disipirane snage značajno manji s porastom krutosti  $k_2$  jer s njenim porastom sustav postaje sve krutiji i smanjuje se relativna brzina gibanja između sekundarne i primarne mase.

### 3.2.3. Električna snaga disipirana na otporu zavojnice elektrodinamičkog pretvornika $P_R$

Električna snaga disipirana na otporu zavojnice elektrodinamičkog pretvornika izračunata je uvrštavanjem parametara u jednadžbu (41) i prikazana je na slici 6.

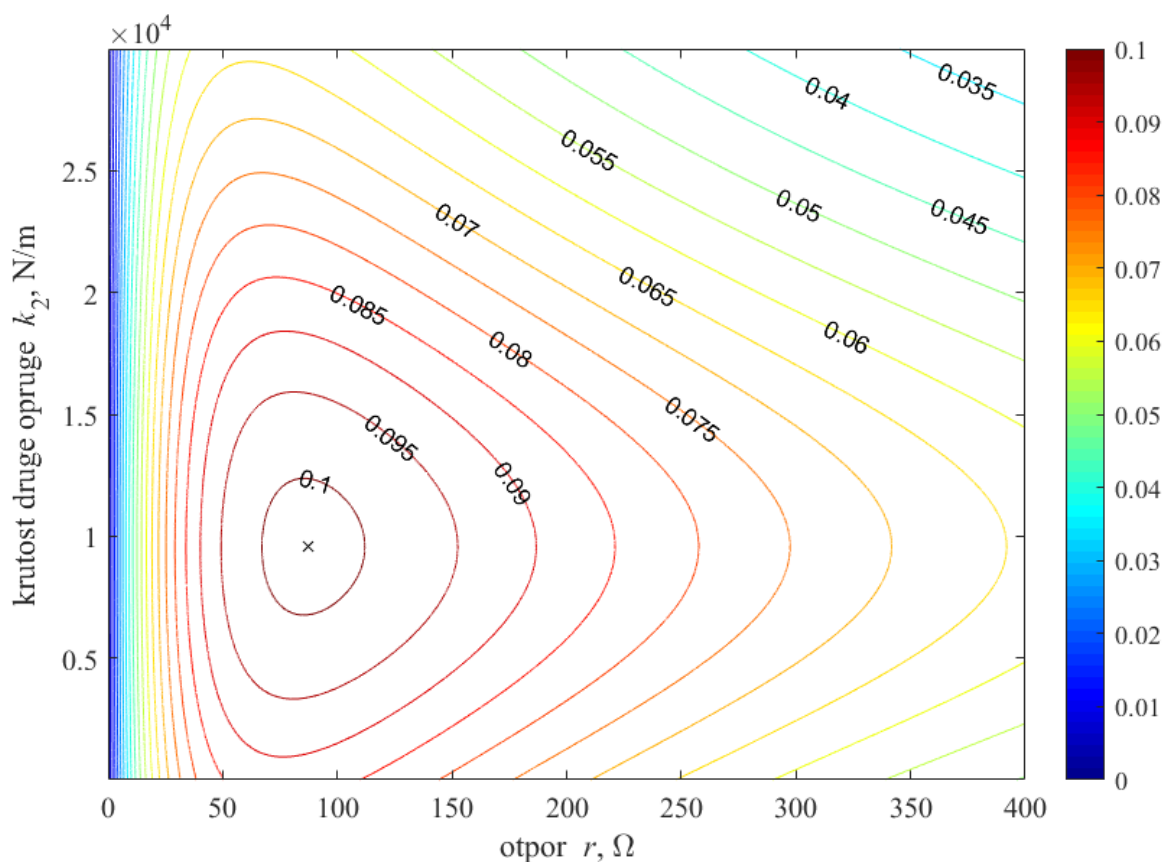


Slika 6. Grafički prikaz vrijednosti disipirane električne snage na otporu zavojnice elektrodinamičkog pretvornika u ovisnosti o parametrima  $k_2$  i  $r$

Iznos disipirane snage na otporu zavojnice proporcionalan je vrijednosti struje koja teče strujnim krugom, a njena vrijednost pada s porastom otpora  $r$ . Sam iznos disipirane snage na otporu zavojnice ne mijenja se značajno s porastom parametra  $k_2$ .

### 3.2.4. Korisna električna snaga razvijena na otporniku spojenom na terminalima zavojnice $P_r$

Korisna električna snaga razvijena na otporniku spojenom na terminalima zavojnice izračunata je uvrštavanjem parametara u jednadžbu (42) i prikazana je na slici 7.



Slika 7. Grafički prikaz vrijednosti korisne električne snaga razvijene na otporniku spojenom na terminalima zavojnice u ovisnosti o parametrima  $k_2$  i  $r$

Na grafu je oznakom „x“ označen maksimum razvijene korisne snage. On se postiže za vrijednosti parametara:

$$r = 87 \Omega$$

$$k_2 = 9554 \text{ N/m}$$

i iznosi  $P_r = 0,1013$  W.

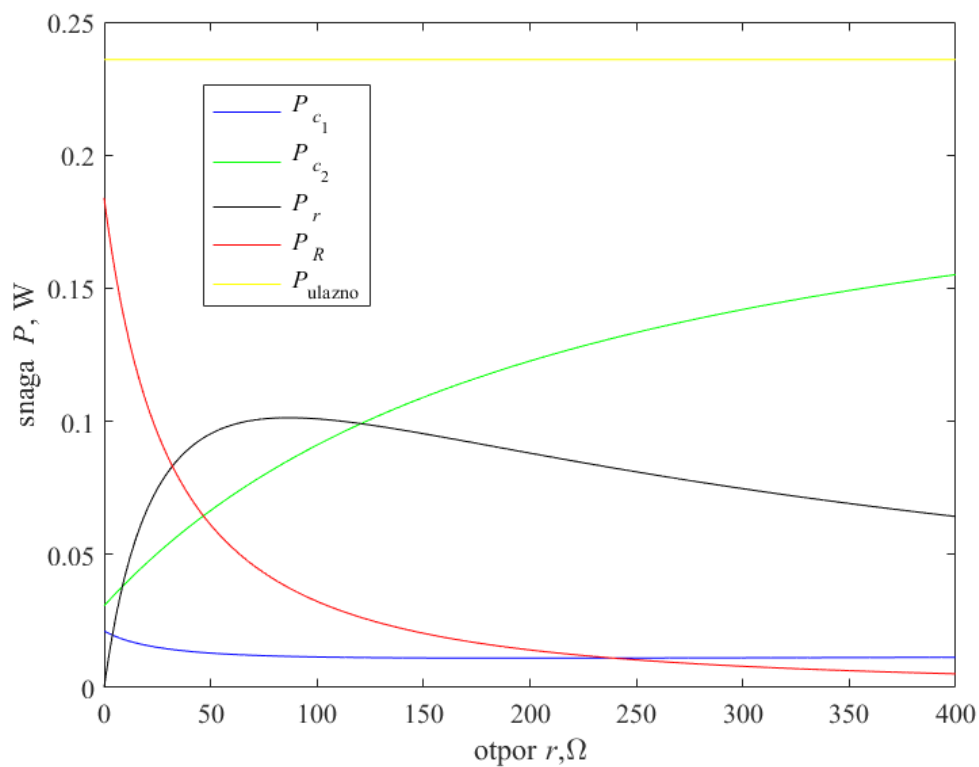
Ako nam je cilj razviti čim više korisne snage, ovo su nam ujedno i optimalni parametri sustava. Za iste vrijednosti parametara  $r$  i  $k_2$  snaga dispirana na prigušnome elementu primarne mase  $P_{c_1}$  iznosi  $P_{c_1} = 0,0117$  W, što je za 6,36% veći iznos od optimalnog. Za vrijednosti parametara  $r$  i  $k_2$  koje odgovaraju optimalnim vrijednostima za slučaj smanjivanja prosječne kinetičke energije vibracija ( $r = 197 \Omega$  i  $k_2 = 9571$  N/m) razvijena korisna električna snaga na otporniku  $P_r$  iznosi  $P_r = 0,0885$  W, što je za 12,64% manji iznos od optimalnog. Iz navedenog je vidljivo kako se za optimiziranje razvijene korisne snage istovremeno postiže gotovo optimalno smanjenje prosječne kinetičke energije vibracija, dok se za slučaj optimiziranja smanjenja prosječne kinetičke energije vibracija razvija znatno manje korisne snage. Stoga se zaključuje da je bolje težiti uređaju koji će razvijati što više korisne snage jer će se istovremeno zadovoljiti oba postojeća slučaja.

### 3.2.5. *Ulazna mehanička snaga koju u sustav unosi uzbudna sila $P_{ulazno}$*

Ulazna mehanička snaga koju u sustav unosi uzbudna sila izračunata je uvrštavanjem parametara u jednadžbu (44). Ona je za sve parove parametara  $r$  i  $k_2$  jednaka te iznosi  $P_{ulazno} = 0,2359$  W. Zbrajanjem pribrojnika u jednadžbi (44) i sređivanjem dobivenog razlomka dobije se sljedeći iznenađujuće jednostavan izraz za ulaznu snagu:

$$P_{ulazno} = \frac{\pi}{2m_1} S_f, \quad (46)$$

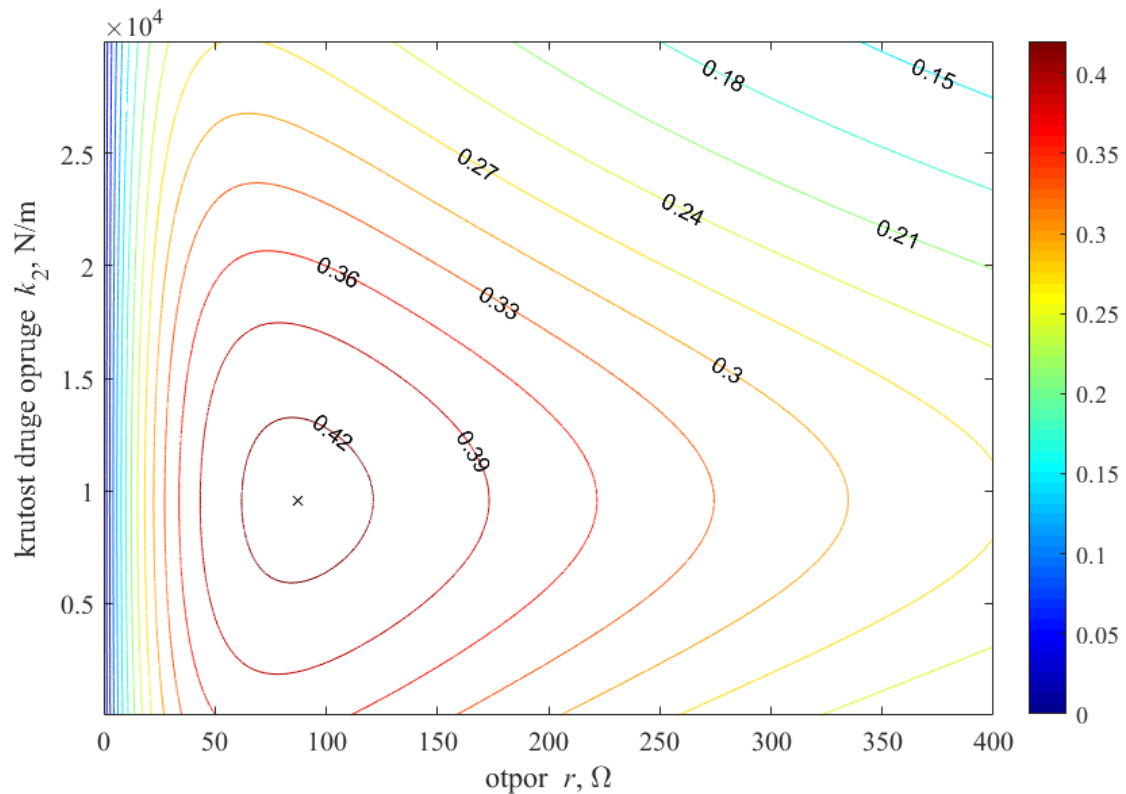
iz kojeg se može zaključiti da njen iznos ovisi isključivo o masi primarne konstrukcije. Na slici 8. grafički je potvrđena jednadžba (44) i pokazano kako je ulazna snaga neovisna o otporu  $r$ .



Slika 8. Graf iznosa snaga u ovisnosti o otporu  $r$  ( $k_2 = 9554$  N/m)

### 3.2.6. Korisnost uređaja kao omjer korisne električne snage i ulazne mehaničke snage $\eta$

Korisnost uređaja izračunata je uvrštavanjem parametara u jednadžbu (45) i prikazana je na slici 9.



Slika 9. Grafički prikaz vrijednosti korisnosti uređaja u ovisnosti o parametrima  $k_2$  i  $r$

Graf korisnosti uređaja i razvijene korisne snage poklapaju se, što je i logično budući da je korisnost računata kao iznos razvijene snage  $P_r$  podijeljen sa vrijednošću ulazne snage  $P_{ulazno}$  koja je konstantna. Maksimum korisnosti postiže se, kao i za maksimum razvijene korisne snage, za vrijednosti parametara:

$$r = 87 \Omega$$

$$k_2 = 9554 \text{ N/m}$$

i iznosi  $\eta = 0,4297$  ili 42,97%. Optimiziramo li sustav za smanjenje prosječne kinetičke energije, korisnost u tome slučaju opada na  $\eta = 0,3752$  ili 37,52%.

### 3.3. Prijenosne funkcije za različite vrijednosti otpora $r$

Iz formula za iznose disipiranih snaga u sustavu (39-42) vidljivo je kako snage računamo tako da prvo izračunamo nepravu integral kvadrata apsolutne vrijednosti potrebne prijenosne funkcije i njegov iznos pomnožimo parom koeficijenata ( $c$ ,  $r$  ili  $R$ ). Iznos nepravog integrala, koji u našim slučajevima konvergira, jednak je površini ispod grafa u kojem se na ordinati nalazi

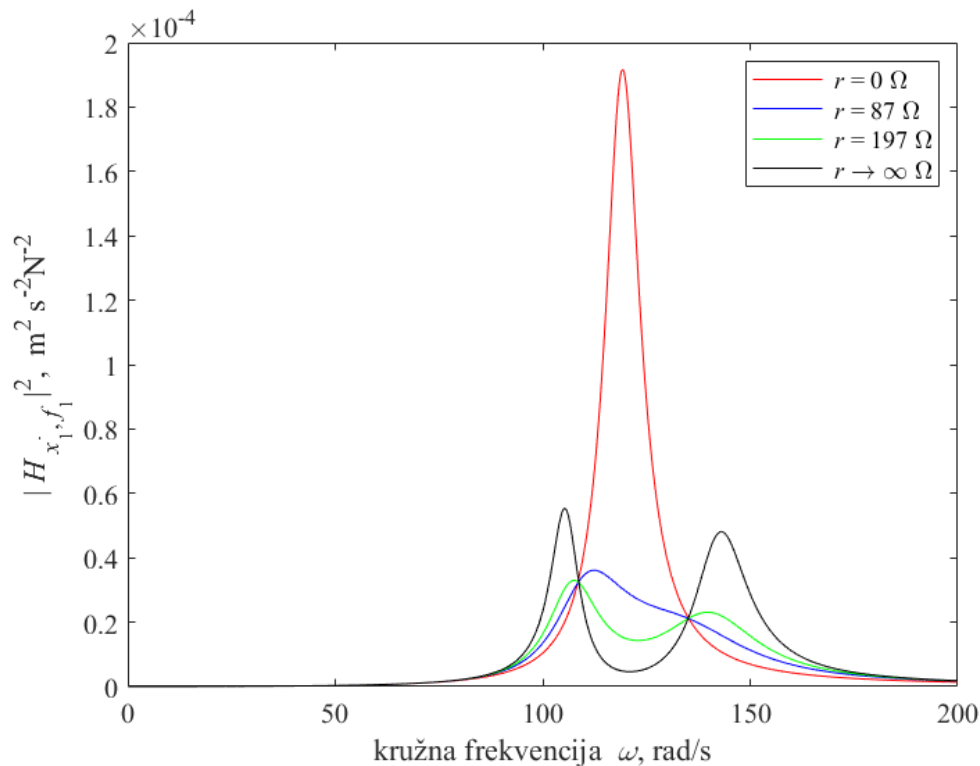
kvadrat apsolutne vrijednosti prijenosne funkcije, a na apscisi kružna frekvencija. Ponašanje kvadrata apsolutne vrijednosti prijenosnih funkcija u ovisnosti o kružnoj frekvenciji promatrat ćemo za četiri različite vrijednosti otpora  $r$ :

1.  $r = 0 \Omega$ , što predstavlja slučaj kratko spojenoga strujnoga kruga,
2.  $r = 87 \Omega$ , za slučaj optimizacije razvijene korisne snage  $P_r$  na otporniku  $r$ ,
3.  $r = 197 \Omega$ , za slučaj optimizacije smanjenja prosječne kinetičke energije vibracija primarne konstrukcije i
4.  $r \rightarrow \infty \Omega$ , što predstavlja slučaj otvorenih terminala zavojnice (nezatvorenog strujnog kruga).

Za vrijednost ostalih parametara uzete su vrijednosti iz tablice 1, dok je za vrijednost krutosti opruge  $k_2$  uzeta optimalna vrijednost za maksimalnu razvijenu korisnu snagu  $k_2 = 9554 \text{ N/m}$ .

### 3.3.1. Prijenosna funkcija između brzine primarne mase i uzbudne sile $H_{\dot{x}_1, f_1}$

Iznos kvadrata apsolutne vrijednosti prijenosne funkcije između brzine primarne mase i uzbudne sile  $H_{\dot{x}_1, f_1}$ , potreban za računanje snage  $P_{c_1}$ , izračunat je uvrštavanjem vrijednosti parametara u jednadžbe (31a-f) i (33a-e) te kvadriranjem njene apsolutne vrijednosti. Grafovi kvadrata apsolutne vrijednosti prijenosne funkcije  $H_{\dot{x}_1, f_1}$  u ovisnosti o kružnoj frekvenciji za različite vrijednosti otpora  $r$  prikazani su na slici 10.



**Slika 10. Grafički prikaz kvadrata apsolutne vrijednosti prijenosne funkcije  $H_{x_1, f_1}$  u ovisnosti o kružnoj frekvenciji za različite vrijednosti otpora  $r$**

Iz grafa je vidljivo da je najmanja površina ispod grafa za  $r = 197 \Omega$ , što odgovara minimumu disipirane snage  $P_{c_1}$ . Također se nameće zaključak da porastom vrijednosti otpora  $r$  dolazi do povećanja dispacije snage, no ne drastičnog, dok se smanjenjem otpora značajno povećava disipacija energije, odnosno primarna masa jače vibrira. Struja kratkoga spoja stvara toliko jako prigušenje da se sustav s dva stupnja slobode počne ponašati kao sustav s jednim stupnjem slobode (krivulja za  $r = 0$ ). Ta krivulja svoj maksimum postiže za rezonantnu frekvenciju koja

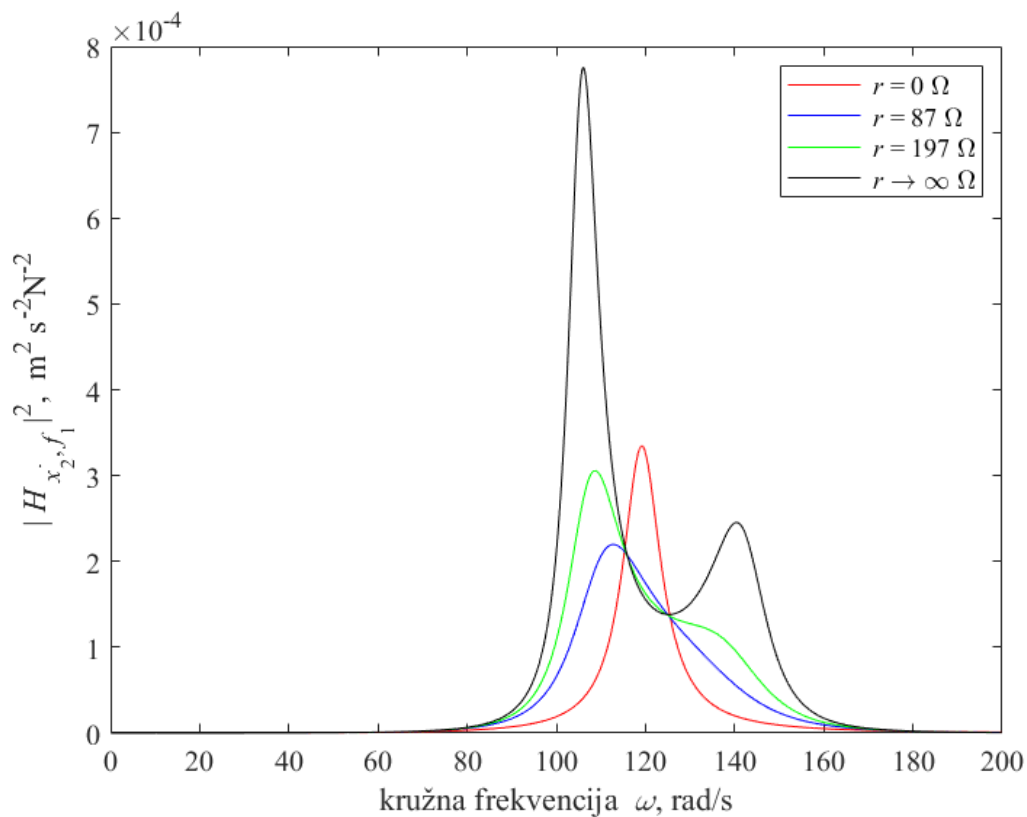
$$\text{iznosi } \omega = \sqrt{\frac{k_1}{m_1 + m_2}} = 119,86 \text{ rad/s.}$$

### 3.3.2. Prijenosna funkcija između brzine sekundarne mase i uzbudne sile $H_{\dot{x}_2, f_1}$

Iznos kvadrata apsolutne vrijednosti prijenosne funkcije između brzine sekundarne mase i uzbudne sile  $H_{\dot{x}_2, f_1}$ , izračunat je uvrštavanjem vrijednosti parametara u jednadžbe (31a-f) i (35a-e) te kvadriranjem njene apsolutne vrijednosti. Grafovi kvadrata apsolutne vrijednosti



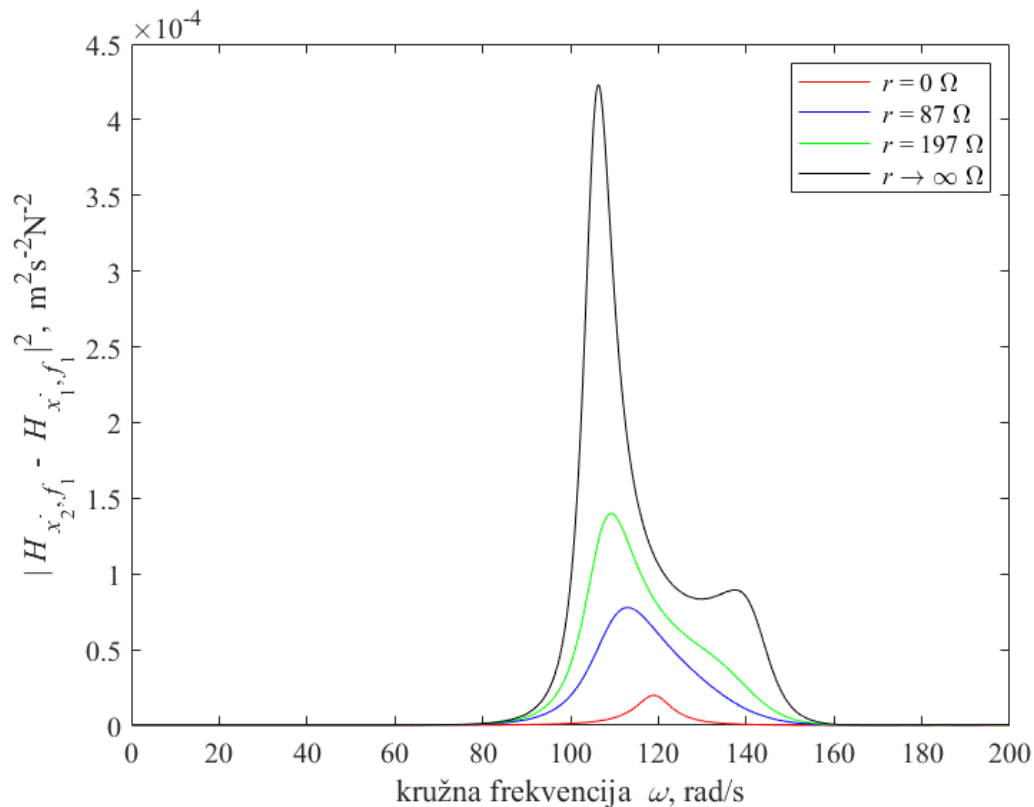
prijenosne funkcije  $H_{\dot{x}_2, f_1}$  u ovisnosti o kružnoj frekvenciji za različite vrijednosti otpora  $r$  prikazani su na slici 11.



**Slika 11.** Grafički prikaz kvadrata apsolutne vrijednosti prijenosne funkcije  $H_{\dot{x}_2, f_1}$  u ovisnosti o kružnoj frekvenciji za različite vrijednosti otpora  $r$

Iz grafa je vidljivo kako površina ispod grafa raste s porastom vrijednosti otpora  $r$ , što znači da sekundarnoj masi jačaju vibracije s porastom otpora  $r$ .

Za izračun snage  $P_{c_2}$ , potrebna nam je razlika prijenosnih funkcija  $H_{\dot{x}_2, f_1}$  i  $H_{\dot{x}_1, f_1}$ . Grafovi kvadrata razlike ovih dviju prijenosnih funkcija u ovisnosti o kružnoj frekvenciji za različite vrijednosti otpora  $r$  prikazani su na slici 12.

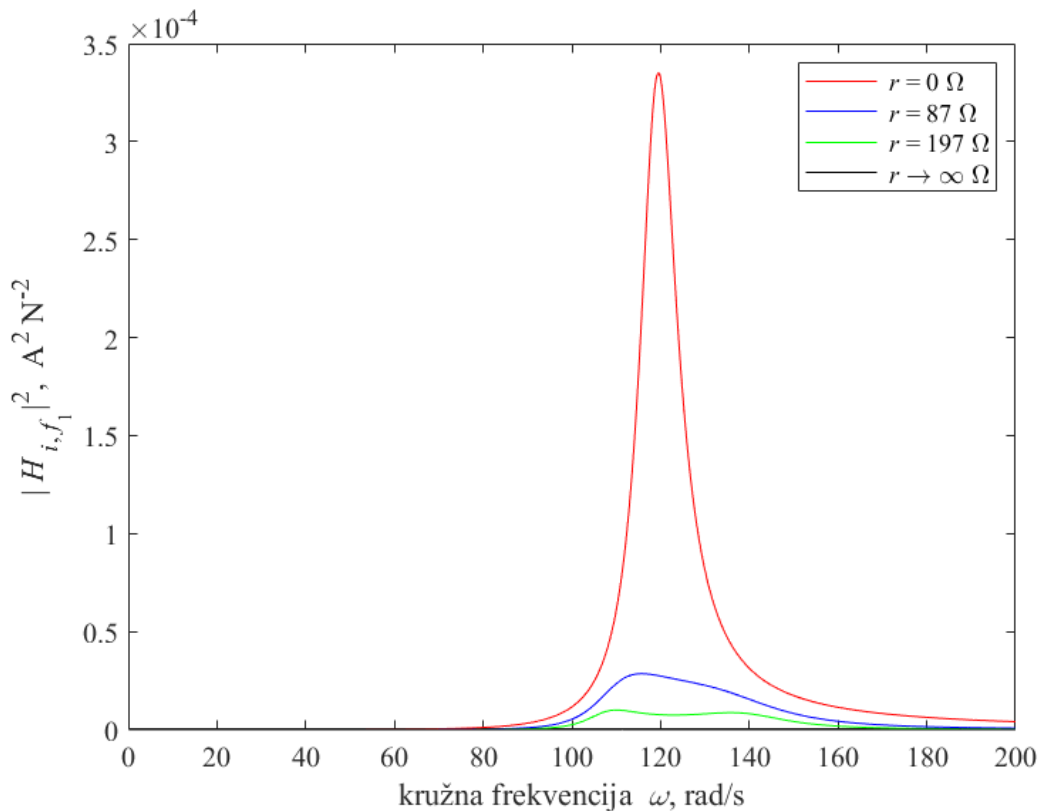


**Slika 12.** Grafički prikaz kvadrata apsolutne vrijednosti razlike prijenosnih funkcija  $H_{\dot{x}_2, f_1}$  i  $H_{\dot{x}_1, f_1}$  u ovisnosti o kružnoj frekvenciji za različite vrijednosti otpora  $r$

Zaključuje se da disipirana snaga  $P_{C_2}$  kontinuirano raste s porastom vrijednosti otpora  $r$  jer raste i površina ispod grafova.

### 3.3.3. Prijenosna funkcija između inducirane struje i uzbudne sile $H_{i, f_1}$

Iznos kvadrata apsolutne vrijednosti prijenosne funkcije između inducirane struje i uzbudne sile  $H_{i, f_1}$ , izračunat je uvrštavanjem vrijednosti parametara u jednadžbe (31a-f) i (38a-e) te kvadriranjem njene apsolutne vrijednosti. Grafovi kvadrata apsolutne vrijednosti prijenosne funkcije  $H_{i, f_1}$  u ovisnosti o kružnoj frekvenciji za različite vrijednosti otpora  $r$  prikazani su na slici 13.

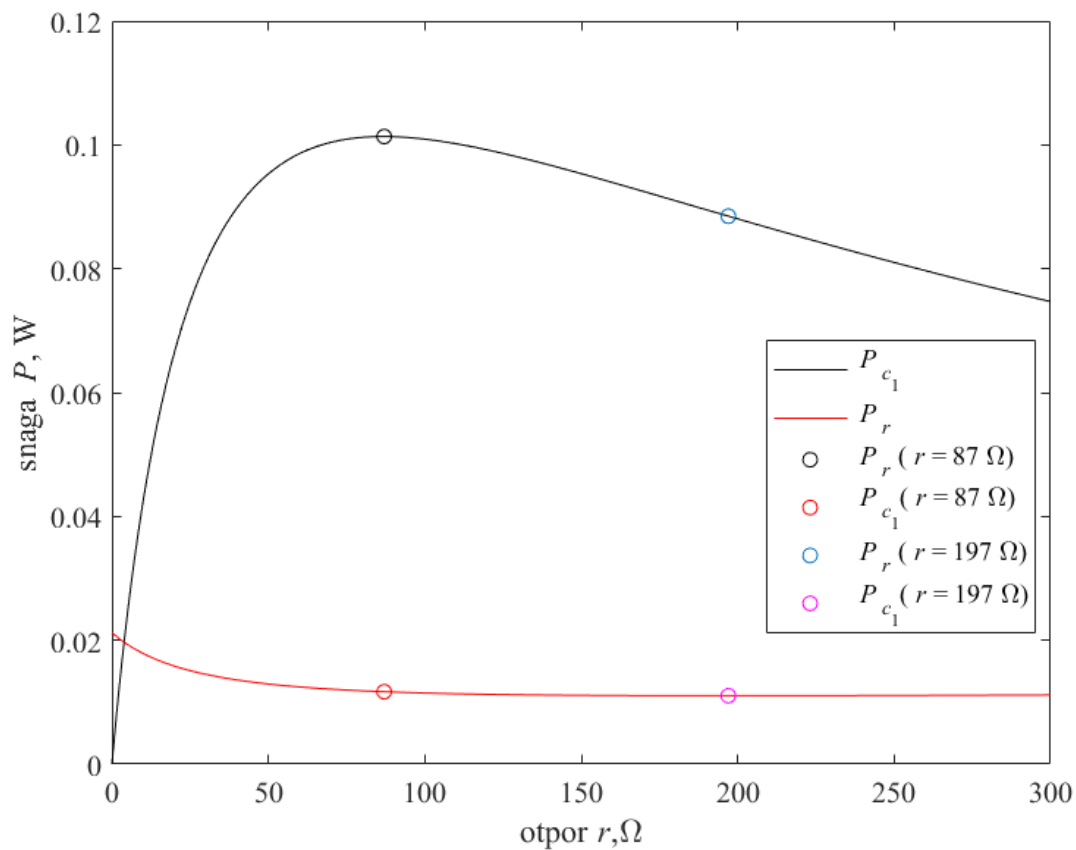


**Slika 13. Grafički prikaz kvadrata apsolutne vrijednosti prijenosne funkcije  $H_{i,f_1}$  u ovisnosti o kružnoj frekvenciji za različite vrijednosti otpora  $r$**

Iz grafa se može zaključiti kako površina ispod grafa najveća za kratko spojeni krug, no budući da je tada otpor  $r$  jednak  $0 \Omega$  ne razvija se korisna snaga na otporniku  $r$  i ona nam nije toliko zanimljiva. Vidljivo je da je površina ispod grafa  $r = 87 \Omega$  veća od površine ispod grafa  $r = 197 \Omega$ .

### 3.4. Diskusija odabira optimalnih vrijednosti sustava

Već je ranije pokazano kako se optimizacijom sustava za razvijanje korisne snage dobije veća korisnost uređaja, više razvijene korisne snage i malo više disipirane snage na prigušnome elementu  $c_1$ , nego optimizacijom sustava za smanjenje prosječne kinetičke energije vibracija primarne mase. Tu će se sada to prikazati i grafički na slici 14. Za vrijednost krutosti  $k_2$  uzeta je  $k_2 = 9554 \text{ N/m}$  radi preglednosti jer su se grafovi za  $k_2 = 9554 \text{ N/m}$  i za  $k_2 = 9571 \text{ N/m}$  gotovo savršeno preklapali.



**Slika 14.** Grafički prikaz snage  $P_r$  i snage  $P_{c_1}$  u ovisnosti o otporu  $r$

Iz sljedećih grafova vidljivo je da 6,36% veća disipirana snaga  $P_{c_1}$  za  $r = 87 \Omega$  u odnosu za  $r = 197 \Omega$ , ne predstavlja neku uočljivu razliku. S druge strane jasno je vidljiva razlika u smanjenju razvijene korisne snage od 12,64% za  $r = 197 \Omega$ . Zaključak koji se nameće jest da je isplativije sustav optimizirati za maksimizaciju razvijene korisne snage jer se istovremeno zadovoljavaju oba cilja: što više razvijene korisne snage  $P_r$  i što veće smanjenje prosječne kinetičke energije vibracija.

---

## 4. ZAKLJUČAK

U radu je pokazano da ulazna mehanička snaga ovisi samo o primarnoj masi  $m_1$ . Za jedan ilustrativni primjer pronađene su optimalne vrijednosti parametara otpora  $r$  i krutosti  $k_2$  za slučaj maksimalne razvijene snage na otporniku  $r$  i za slučaj maksimalne disipacije snage na prigušnom elementu primarne mase, tj. slučaj najvećeg prigušenja gibanja primarne mase. Ispitana je mogućnost istodobnog smanjenja vibracija primarne konstrukcije i žetve mehaničke energije vibracija na elektrodinamičkome pretvorniku. Zaključeno je kako se optimizacijom sustava za žetvu mehaničke energije vibracija postiže i zadovoljavajuće smanjenje vibracija primarne konstrukcije, ne značajno manje smanjenje od optimalnog, dok se optimizacijom sustava za smanjenje vibracija primarne konstrukcije razvija značajno manje korisne snage na otporniku  $r$ .

---

**LITERATURA**

- [1] Frahm H. Device for damping vibrations of bodies. US989958A; 1909.
- [2] Zilletti M, Elliott SJ, Rustighi E. Optimisation of dynamic vibration absorbers to minimise kinetic energy and maximise internal power dissipation. *Journal of sound and vibration*. 2012 Aug 27;331(18):4093-100.
- [3] Preumont A. *Vibration control of active structures: an introduction*. Springer Science & Business Media; 2012. p. 41-45.
- [4] D.E. Newland, *An Introduction to Random Vibrations, Spectral & Wavelet Analysis*, third ed., Dover Publications Inc, New York, 2005.
- [5] <https://www.linearpositioningsystems.com/pdf/pba/cvc-catalog-2016.pdf> (preuzeto 14. travnja 2021.)