Decentralizirano upravljanje elastično povezanim elektromehaničkim sustavima kolica na klackalici

Mihaljevski Boltek, Tin

Master's thesis / Diplomski rad

2021

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:235:839490

Rights / Prava: In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2024-03-29**

Repository / Repozitorij:

Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

DIPLOMSKI RAD

Tin Mihaljevski Boltek

Zagreb, 2021. godina.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

DIPLOMSKI RAD

Mentor: Student:

Doc. dr. sc. Vladimir Milić Tin Mihaljevski Boltek

Zagreb, 2021. godina.

Izjavljujem da sam ovaj rad izradio samostalno koristeći znanja stečena tijekom studija i navedenu literaturu.

Zahvaljujem se svojoj obitelji i djevojci na podršci i strpljenju tijekom razdoblja pisanja ovoga rada. Isto tako zahvaljujem se svojem mentoru Dr. sc. Vladimir Milić, mag. ing. na danom znanju i uloženom vremenu.

Tin Mihaljevski Boltek

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE
Središnje povjerenstvo za završne i diplomske ispite
Povjerenstvo za diplomske radove studija strojarstva za smjerove:
proizvodno inženjerstvo, računalno inženjerstvo, industrijsko inženjerstvo i menadžment,
inženjerstvo materijala te mehatronika i robotika

Sveučilište u Zagrebu Fakultet strojarstva i brodogradnje	
Datum:	Prilog:
Klasa: 602-04/21-6/1	
Ur. broj: 15-1703-21	

DIPLOMSKI ZADATAK

Student: **TIN MIHALJEVSKI BOLTEK** Mat. br.: 0035200549

Naslov rada na hrvatskom jeziku: **Decentralizirano upravljanje elastično povezanim elektromehaničkim sustavima kolica na klackalici**

Naslov rada na engleskom jeziku: **Decentralized control of elastically interconnected electromechanical seesaw-cart systems**

Opis zadatka:

Posljednjih nekoliko godina u području upravljanja sustavima značajni istraživački napori usmjereni su na analizu i sintezu upravljačkih zakona međusobno povezanih dinamičkih sustava. U okviru projekta „Upravljanje prostorno distribuiranim dinamičkim sustavima" (projekt HRZZ-UIP-2013-11-9354) razvijen je eksperimentalni postav koji se sastoji od tri podsustava kolica na klackalici. Svaki je podsustav fizički povezan sa susjednim elastičnom vezom tvoreći tako složeni nelinearni dinamički sustav na kojem je moguće ispitivanje različitih koncepata decentraliziranog i distribuiranog upravljanja.

U radu je potrebno:

1. Provesti teorijska razmatranja u svrhu sinteze decentraliziranog zakona upravljanja prema H∞ kriteriju optimalnosti međusobno povezanih elektromehaničkih sustava. Pri tome je potrebno koristiti formalizam robusnog optimalnog upravljanja primjenom linearnih matričnih nejednadžbi.

2. Izvesti matematički model tri elektromehanička podsustava kolica na klackalici spregnuta elastičnom vezom u obliku prostora stanja prikladnom za sintezu decentraliziranog zakona upravljanja.

3. Simulacijama na računalu analizirati ponašanje zatvorenog sustava upravljanja.

4. Provesti eksperimentalnu provjeru dobivenih rezultata analize i sinteze što podrazumijeva implementaciju algoritma decentraliziranog upravljanja u mikrokontroleru TMS320F2837xD Dual-Core Delfino.

5. Napisati zaključak.

U radu je potrebno navesti korištenu literaturu i eventualno dobivenu pomoć.

Zadatak zadan:	Rok predaje rada:	Predviđeni datum obrane:
6. svibnja 2021.	8. srpnja 2021.	12. srpnja do 16. srpnja 2021.

Zadatak zadao:

doc. dr. sc. Vladimir Milić

Predsjednica Povjerenstva:

prof. dr. sc. Biserka Runje

SADRŽAJ

SADRŽAJ I
POPIS SLIKA II
POPIS TABLICA IV
POPIS OZNAKA V
SAŽETAK VII
SUMMARY VIII
1. UVOD 1
2. ELASTIČNO POVEZANI ELEKTROMEHANIČKI SUSTAV KOLICA NA KLACKALICI 3
2.1. Opis eksperimentalnog postava 3
2.2. Matematičko modeliranje 8
2.2.1. Izračun kinetičke energije 9
2.2.2. Izračun potencijale energije 10
2.2.3. Funkcija gubitaka 12
2.2.4. Elektromotor i prijenos 12
2.2.5. Dinamika 13
2.3. Prostor stanja 14
2.4. Linearizacija 15
3. DECENTRALIZIRANO UPRAVLJANJE MEĐUSOBNO POVEZANIM SUSTAVIMA KOLICA NA KLACKALICI 17
3.1. Formulacija upravljačkog problema 18
3.2. Teorijska razmatranja 20
3.2.1. Statički regulator stanja s observerom, podešen po H∞ kriterij 24
3.2.2. Dinamički regulator 25
3.2.3. Regulator reduciranog reda 26
3.3. Sinteza zakona upravljanja 29
4. SIMULACIJSKI I EKSPERIMENTALNI REZULTATI 36
4.1. Simulacijski rezultati 36
4.2. Eksperimentalni rezultati 67
5. ZAKLJUČAK 74
LITERATURA 76
DODATAK 77

POPIS SLIKA

Slika 1 Eksperimentalni postav ... 3
Slika 2 Klackalica s kolicima ... 4
Slika 3 Elastične veze, desna strana ... 4
Slika 4. CCS Editor ... 5
Slika 5 Generalne postavke ... 6
Slika 6 Postavka za odabir uređaja na koji se spajamo ... 6
Slika 7 Matrice observera ... 7
Slika 8 Definiranje varijabli za matrice i njihovih dimenzija ... 7
Slika 9 Implementacija zakona upravljanja ... 7
Slika 10 Prikupljanje podataka ... 7
Slika 11 Shema podustava u zakretu ... 9
Slika 12 Vektorski prikaz elastičnih veza (desna strana sustava) ... 11
Slika 13 Elektromotor i prijenos ... 12
Slika 14 Shema decentralizirane strukture ... 18
Slika 15 Dijagram toka ... 33
Slika 16 Definiranje optimizacijskih varijabli ... 34
Slika 17 Parametri optimizacije ... 34
Slika 18 YALMIP, definiranje problema ... 34
Slika 19 YALMIP poruka nakon uspješne optimizacije ... 34
Slika 20 Mosek poruka nakon završetka algoritma ... 35
Slika 21 Rekonstrukcija pojačanja ... 35
Slika 22 Poremećaj 0,5 Nm, trajanje 0,5s ... 36
Slika 23 Kut zakreta, slučaj 1 ... 37
Slika 24 Pomak kolica, slučaj 1 ... 38
Slika 25 Upravljačke varijable, slučaj 1 ... 39
Slika 26 Greška observera, slučaj 1 ... 39
Slika 27 Kut zakreta, slučaj 2 ... 40
Slika 28 Pomak kolica, slučaj 2 ... 41
Slika 29 Upravljačke varijable, slučaj 2 ... 42
Slika 30 Greška observera, slučaj 2 ... 42
Slika 31 Kut zakreta, slučaj 3 ... 43
Slika 32 Pomak kolica, slučaj 3 ... 44
Slika 33 Upravljačka varijabla, slučaj 3 ... 45
Slika 34 Greška observera, slučaj 3 ... 45
Slika 35 Kut zakreta, slučaj 4 ... 46
Slika 36 Pomak kolica, slučaj 4 ... 47
Slika 37 Upravljačka varijabla, slučaj 4 ... 48
Slika 38 Greška observera, slučaj 4 ... 48
Slika 39 Kut zakreta, slučaj 4b ... 49
Slika 40 Pomak kolica, slučaj 4b ... 49
Slika 41 Upravljačke varijable, slučaj 4b ... 50
Slika 42 Greška observera, slučaj 4b ... 50
Slika 43 Kut zakreta, slučaj 5 ... 51
Slika 44 Pomak kolica, slučaj 5 ... 52
Slika 45 Upravljačke varijable, slučaj 5 ... 52
Slika 46 Greška observera, slučaj 5 ... 52
Slika 47 Kut zakreta, slučaj 6 ... 54
Slika 48 Pomak kolica, slučaj 6 ... 54

Slika 49 Upravljačke varijable, slučaj 6 ... 55
Slika 50 Greška observera, slučaj 6 ... 55
Slika 51 Kut zakreta, $\kappa = 0.0\ \mathrm{Nms/rad}$ ... 56
Slika 52 Pomak kolica, $\kappa = 0.0\ \mathrm{Nms/rad}$ ... 56
Slika 53 Kut zakreta, $\kappa = 0.2\ \mathrm{Nms/rad}$ ... 57
Slika 54 Pomak kolica, $\kappa = 0.2\ \mathrm{Nms/rad}$ ... 57
Slika 55 Upravljačka varijabla, $\kappa = 0.2\mathrm{Nms/rad}$ ... 58
Slika 56 Kut zakreta, *k*=3N/m ... 58
Slika 57 Pomak kolica, *k*=3N/m ... 59
Slika 58 Upravljačke varijable, *k*=3N/m ... 60
Slika 59 Kut zakreta, *k*=8N/m ... 61
Slika 60 Pomak kolica, *k*=8N/m ... 61
Slika 61 Kut zakreta, granica stabilnosti ... 62
Slika 62 Kut zakreta, $\kappa = 0.4\mathrm{Nmsrad}, \mathrm{k} = 15\mathrm{N/m}$ ... 62
Slika 63 Pomak kolica, $\kappa = 0.4\mathrm{Nmsrad}, \mathrm{k} = 15\mathrm{N/m}$ ... 63
Slika 64 Kut zakreta, s1(0)=0,1 ... 63
Slika 65 Pomak kolica, $s_1(0)=0,1$ ... 64
Slika 66 Upravljačke varijable, $s_1(0)=0,1$ ... 64
Slika 67 Poremećaj A ... 65
Slika 68 Upravljačke varijable, poremećaj A ... 65
Slika 69 Zakret kuta, poremećaj A ... 66
Slika 70 Pomak kolica, poremećaj A ... 66
Slika 71 Kut zakreta, eksperiment 1 ... 68
Slika 72 Pomak kolica, eksperiment 1 ... 69
Slika 73 Upravljačke varijable, eksperiment 1 ... 69
Slika 74 Greška observera, eksperiment 1 ... 70
Slika 75 Kut zakreta, eksperiment 2 ... 71
Slika 76 Pomak kolica, eksperiment 2 ... 71
Slika 77 Upravljačke varijable, eksperiment 2 ... 72
Slika 78 Greška observera, eksperiment 2 ... 72

POPIS TABLICA

Tablica 1. Parametri sustava 8
Tablica 2 Parametri za slučaj 1 37
Tablica 3 Optimalne varijable za slučaj 1 37
Tablica 4 Parametri za slučaj 2 39
Tablica 5 Optimalne varijable za slučaj 2 40
Tablica 6 Parametri za slučaj 3 42
Tablica 7 Optimalne varijable za slučaj 3 43
Tablica 8 Parametri za slučaj 4 45
Tablica 9 Optimalne varijable za slučaj 4 46
Tablica 10 Parametri za slučaj 5 50
Tablica 11 Optimalne varijable za slučaj 5 51
Tablica 12 Parametri za slučaj 6 53
Tablica 13 Optimalne varijable za slučaj 6 53
Tablica 14 Diskretizirne matrice observera 67

POPIS OZNAKA

Oznaka	Jedinica	Opis
$\mathbf{A}$		Matrica koeficijenata globalnog sustava
$\widetilde{\boldsymbol{A}}$		Matrica koeficijenata proširenog sustava
A_i		Matrica koeficijenata i-tog podsustava
$\boldsymbol{B_1}$		Matrica upravljačkih ulaza globalnog sustava
B_{1i}		Matrica upravljačkih ulaza i-tog podsustava
$\boldsymbol{B_2}$		Matrica vanjskih ulaza globalnog sustava
B_{2i}		Matrica vanjskih ulaza i-tog podsustava
$\boldsymbol{C}$		Matrica centrifugalnih i Coriolisovih sila
$\boldsymbol{D}$		Matrica prijenosa globalnog sustava
D_i		Matrica prijenosa i-tog podsustava
$\boldsymbol{d}$		Vektor vanjskih poremećaja
E	J	Kinetička energija sustava
E_i^K	J	Kinetička energija i-tog podsustava
e	V	Elektromotorna sila
$\boldsymbol{e}$		Greška globalnog observera
e_i		Greška i-tog observera
F_{Mi}	N	Sila i-tih kolica
$\boldsymbol{H}$		Matrica sprega sustava
$\widetilde{\boldsymbol{H}}$		Matrica sprega proširenog sustava
H		Prijenosna funkcija sustava
I_a	A	Struja armature
J_i	kgm^2	Moment tromosti i-te klackalice
$\boldsymbol{K}$		Matrica pojačanja regulatora
K_i		Matrica pojačanja i-tog regulatora
k	N/m	Konstanta opruge
K_e	vs/rad	Konstanta motora
K_t	Nm/A	Konstanta motora
$\boldsymbol{L}$		Matrica pojačanja observera
l	m	Duljina opruge
m^A	kg	Masa klackalice
m^c	kg	Masa kolica
N		Broj podsustava
n		Red sustava
P		Lyapunovljeva matrica
p		Prijenosni omjer
Q		Matrica težinskih faktora za grešku
$\boldsymbol{q}$		Vektora generaliziranih koordinata

q_i		Generalizirana koordinata
R		Matrica težinskih faktora na stanja
R_a	Ω	Otpor armature
r_i^c		Vektora koordinata kolica i-tog podsustava
r		Radijus
$\boldsymbol{S}$		Matrica izlaza iz sustava, globalni sustav
S_i		Matrica izlaza iz sustava, i-ti podsustav
s	m	Pomak kolica
$\boldsymbol{T}$		Globalna matrica gubitaka
U	J	Potencijalna energija sustava
$\boldsymbol{u}$		Vektor upravljačkih veličina
U_a	V	Napon armature
U_i^C	J	Potencijalna energija i-tih kolica
U_i^K	J	Potencijalna energija i-te klackalice
U^L	J	Potencijalna energija lijevih opruga
U^R	J	Potencijalna energija desnih opruga
V		Lyapunovljeva funkcija
$\boldsymbol{y}$		Vektor izlaza iz sustava
y_i		Vektorizlaza it i-tog podsustava
$\boldsymbol{x}$		Vektor stanja sustava
$\hat{\boldsymbol{x}}$		Vektor stanja observera
$\mathbf{Z}$		Matrica sprega sustava
α		Parametar sprega
β		Realan broj
γ		Parametar na $\mathbf{H}\infty$ normu
κ	Nms/rad	Faktor trenja u zglobu
$\boldsymbol{\xi}$		Matrica vanjskih poremećaja na prošireni sustav
ρ		Modificirani parametar sprega
τ_{in}	Nm	Moment motora
τ_M	Nm	Moment kolica
φ	rad	Kut

SAŽETAK

Ovaj rad bavi se implementacijom decentraliziranog robusnog zakona upravljanja koji postiže **H**∞ performanse na nelinearni mehanički sustav sastavljen od tri nelinearno spregnute klackalice s pomičnom masom. Izveden je matematički model sustava Euler-Lagranegeovom metodom i prikazan je u obliku prostora stanja. Provedena je sinteza regulatora, koja je zajedno s modelom implementirana u Matlab, gdje su izračunata optimalna pojačanja regulatora i observera i simulacijama prikazani odzivi sustava. Odabrana pojačanja implementirana su u eksperimentalni postav, za koji je dorađen već postojeći C++ kod. Također prikazani su i eksperimentalni rezultati.

Ključne riječi: međusobno spregnuti mehanički sustavi, decentralizirano upravljanje, H∞ sinteza, linearne matrične nejednadžbe

SUMMARY

This thesis is concerned witht the impementation of a decentralized robust cntrol law that achieves **H**∞ performances for nonlinear mechanical system composed of three nonlineary interconnected seesaw-cart systems. A mathematical model of the system is derived by the Euler-Lagrages method and then is transferred in the formo of a state space. Controll law is synthesised and implemented into Matlab together with a mathematical model of a system. Optimal solutions are calculated and optimal controller and observer gains are used to simulate system the response of the seesaw-cart system with proposed control strategy. Selected gains are implemented into existing C++ code and on an experimental system. Experimental results are given and discussed.

Key words:interconnected mechanical systems, decentralized control, H∞ syntesis, LMI

1. UVOD

U novijoj povijesti vidimo povećanje velikih, složenih sustava, koji su sastavljeni od jednostavnijih, međusobno povezanih podsustava. Veza između podsustava može biti mehanička, energetska ili informacijska. Velikim sustavima bismo mogli nazvati sustave koji imaju sljedeća svojstava [1]:

- Veliki sustavi su često upravljani s više upravljačkih jedinica, decentralizirana struktura upravljanja,
- Upravljačke jedinice imaju različite, ali slične ulazne podatke, a ponekad ih i dijele,
- Podsustavi mogu biti lokalno upravljani na jednoj razini dok njima upravlja viša razina u hijerarhiji,
- Podsustavi mogu raditi u timu ili „sukobljeni“, kako bi ostvarili jedan ili više ciljeva,
- Veliki sustav može biti upravljan suboptimalnim ili blizu optimalnim zakonom upravljanja ako isti zadovoljava očekivana svojstva.

Takvi veliki sustavi su elektro energetske mreže [1], [2], mobilni roboti u formacijama [3], internet [4] i drugi.

Pojavom velikih sustava pojavila se i potreba za upravljanjem istima. Kako je cijena elektronike drastično padala tokom posljednjeg desetljeća popularnost decentraliziranog upravljanja je rasla. Decentralizirana struktura upravljanja veliki sustav cjepa na podsustave koji su lokalno upravljani, upravljačka jedinica ima samo lokalne ulazne signale s okolnih senzora. Decentralizirano upravljanje je robusnije od centraliziranog, budući da sustavom upravlja više upravljačkih jedinica, a takva struktura omogućuje jednostavniju sintezu većeg broja (za svaki podsustav) upravljačkih algoritama. Sama aktualnost i važnost takvih sustava te mogućnost rada na spregnutom sustavu bila je motivacija za ovaj diplomski rad.

Sustav razmatran u ovom radu sastoji se od tri nelinearno spregnute klackalice s pomičnom masom [5]. Ovaj mehanički sustav ima nelinearne dinamike, te dva stupnja slobode od kojih je samo jedan upravljiv. Sustav sam po sebi ima beskonačno ravnotežnih stanja, ali velika većina tih stanja nije stabilna. Ovaj sustav možemo s svrstati u „pendulum-like“ sustave [6], [7], [8] i očekivati slične probleme. Eksperimentalni postav je razvijem u okviru projekta „Upravljanje prostorno distribuiranim dinamičkim sustavom“ (projekt HRZZ-UIP-2013-11-9354).

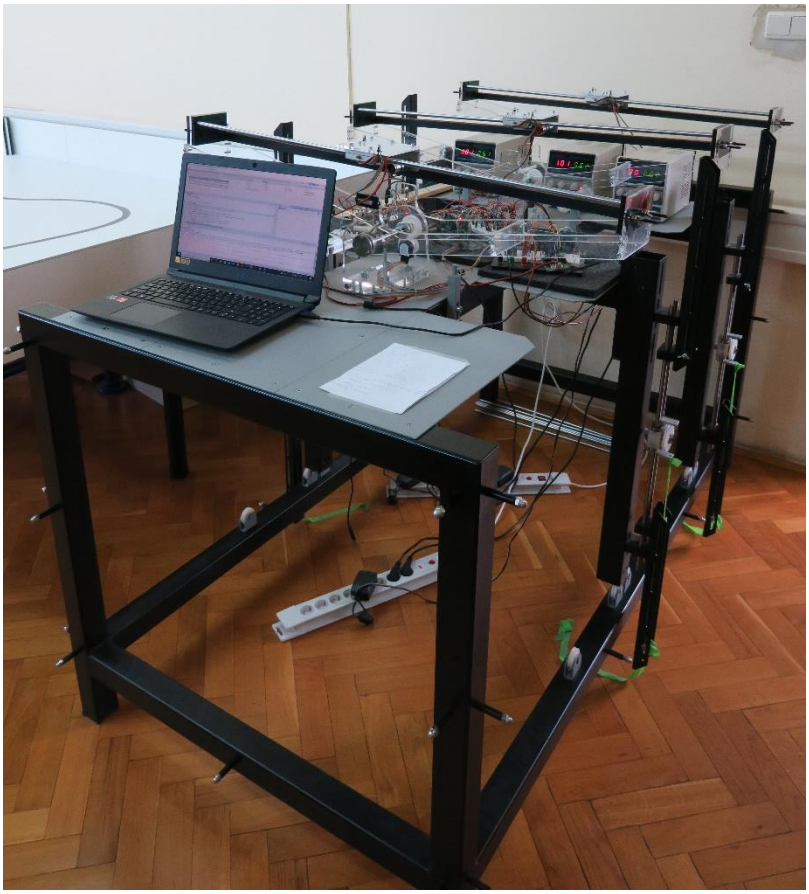
U ovom radu korištena je prije navedena literature [6], [8], na temu nelinearnih sustava. Kao uvod u temu decentraliziranog upravljanja velikim sustavima korištena je [9] i [10]. Zakon upravljanja za eksperimentalni sustav bazira se na [11], [12], a literatura korištena za upoznavanje i shvaćanje matematičkih alata potrebnih za rješavanje optimizacijskih problema i dovođenja problema u formu pogodnu za rješavanje [13], [14].

Cilj ovoga rada je eksperimentalni postav prikazati u matematičkom obliku prikladnome za analizu i sintezu zakona upravljanja, prostor stanja. Zatim za zadani sustav provesti sintezu decentraliziranog upravljanja prema $H\infty$ kriteriju optimalnost. Optimalni zakon upravljanja treba biti robustan i u obliku linearnih matričnih nejednadžbi (LMI). Kako bi se ovaj cilj postigao potrebno je razmotriti teorijska rješenja sličnih problema. Nadalje, simulacijama na računalu analizirati ponašanje zatvorenog sustava upravljanja, te ukoliko simulacije pokažu zadovoljavajuće rezultate, upravljački zakon primijeniti na eksperimentalnom postavu i provjeriti uspješnost dobivenih rezultata.

Rad se sastoji od pet poglavlja, od kojih je jedno uvod. U drugom poglavlju je detaljno opisan eksperimentalni postav, elastično povezani elektromehanički sustav kolica na klackalici, te je izveden matematički model pomoću Euler-Lagranegeove metode i prikazan u obliku prostora stanja. Treće poglavlje je dio rada u kojem je predstavljen problem decentraliziranog optimalnog upravljanja, teorijska razrada, te sinteza regulatora za navedeni problem. U četvrtom poglavlju prikazani su simulacijski rezultati, a isto tako i eksperimentalni. Peto i posljednje poglavlje je zaključak istraživanja.

2. ELASTIČNO POVEZANI ELEKTROMEHANIČKI SUSTAV KOLICA NA KLACKALICI

Sustav na kojem će se raditi eksperimentalni je postav, koji se nalazi u Laboratoriju za automatiku i robotiku, Fakulteta strojarstva i brodogradnje, Sveučilišta u Zagrebu. Eksperimentalni postav je razvijem u okviru projekta „Upravljanje prostorno distribuiranim dinamičkim sustavom“ (projekt HRZZ-UIP-2013-11-9354), s ciljem ispitivanja naprednih metoda upravljanja koje se razvijaju na fakultetu i za rad sa studentima. U ovom poglavlju opisat ćemo strukturu postava, njegove komponente, međusobne veze te razmotriti dinamiku cijelog sustava i izvesti matematički model.

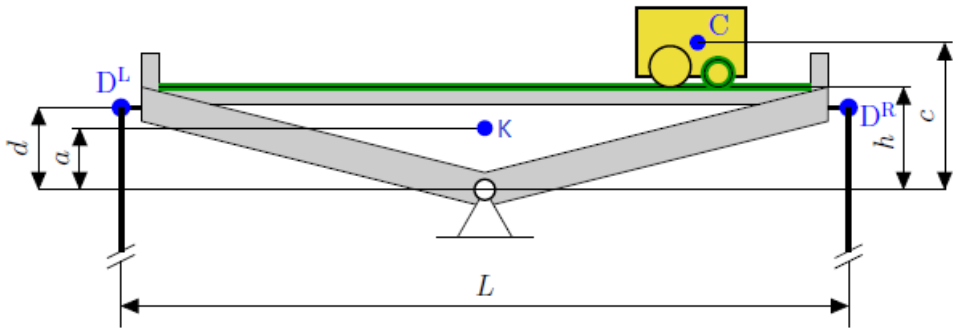


Slika 1 Eksperimentalni postav

2.1. Opis eksperimentalnog postava

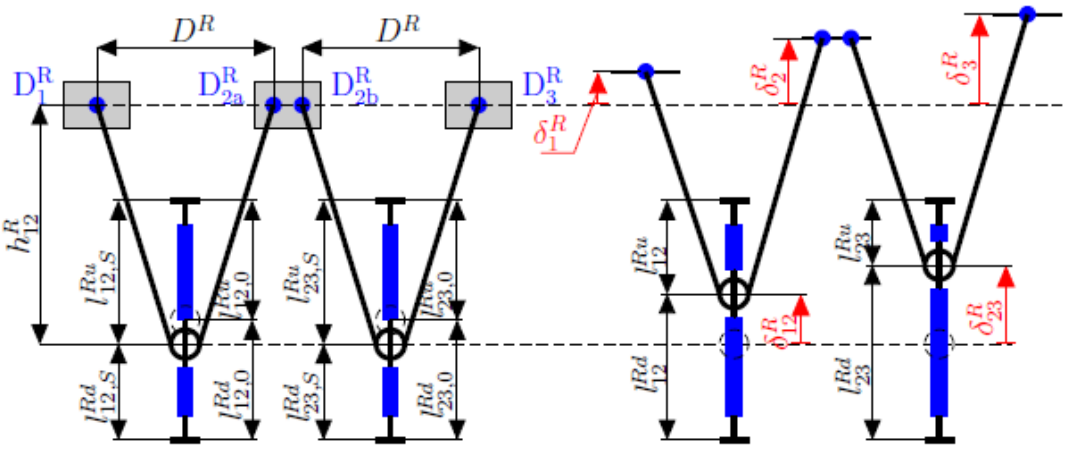
Na Slika 1 se vidi sami eksperimentalni postav, sastavljen je od 3 identična podsustava, klackalica s kolicima. Slika 2 pokazuje jedan podsustav, klackalica s kolicima (kolica na sebi nose motor), a na gornjoj strani svake klackalice nalazi se vodilica i nazubljena letva (zeleno) koja služi da se kolica mase m^c mogu pomicati po gornjoj strani klackalice. Pomak kolica

omogućuje istosmjerni (DC) motor i zupčanik (zeleno) koji se giba po nazubljenoj letvi. Isto tako na donjem djelu slike vidi se točka oko koje se klackalica može slobodno rotirati.



Slika 2 Klackalica s kolicima

Na gornjoj slici [Slika 1] možemo vidjeti način na koji su klackalice međusobno povezane, kako s desne tako i s lijeve strane. Donja slika [Slika 3] daje zorniji prikaz desne strane postava, odnosno elastičnih veza između klackalica. Klackalice su povezane neelastičnim užetom, tako da je jedan kraj zavezan za prvu klackalicu (D_1^R) preko koloture povezane s dvjema oprugama (plavi elementi na skici), a drugi kraj zavezan za drugu klackalicu(D_{2a}^R), gdje gornji indeks ^{R} označuje da se radi o desnoj strani sustava. Isto tako povezan je drugi par, druga i treća klackalica. Na isti način klackalice su povezane i na lijevoj strani. Desna skica na Slika 3 prikazuje sustav u neravnotežnom položaju, gdje je s δ prikazan otklon klackalice od ravnotežnog položaja.



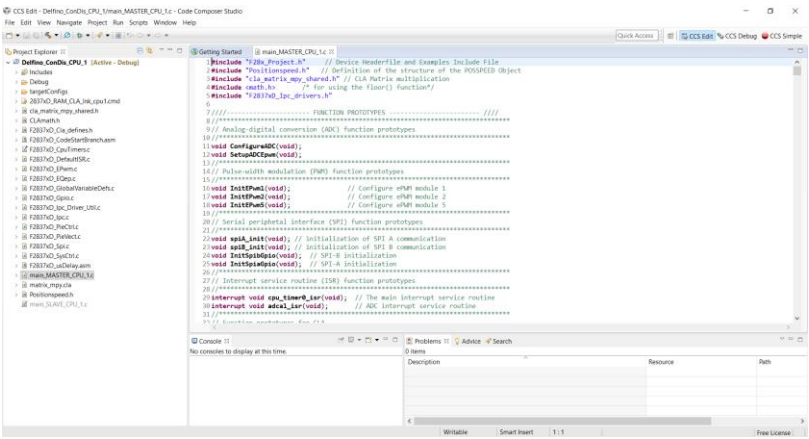
Slika 3 Elastične veze, desna strana

Električni dio postava sastoji se od istosmjernog motora proizvođača Faulhaber (coreles DC motor 2338S006). Svaki motor je upravljan od strane svog mikrokontrolera (MC). Svi mikrokontroleri su (Delfino TMS320F28377D) koji je dio eksperimentalnog paketa opreme

proizvođača Texas Instruments, na mrežnim stranicama proizvođača[1] može se pronaći dokumentacija. Između svakog motora i mikrokontrolera nalazi se upravljački sklop motora (DRV8833 Dual H-Bridge motor driver) marke Teksas Instruments, koji upravljački signal s MC obrađuje i pogoni motor. Između mikrokontrolera i upravljačkog sklopa motora nalazi se optički sprežnik (HCPL2631 dual-chanel) tvrtke Fairchild Semiconductor koji služi da pretvori puls width modulation (PWM) signal, iz MC, u signal prikladan za upravljački sklop motora. Optički sprežnik također služi za galvansku izolaciju, visokonaponski dio (motor) i MC. Senzori kuta zakreta, optical shaft encoder (S1-4096-236-IE-N-D) tvrtke US Digital, mjere kut zakreta u rezoluciji od 4096 cycles per revolution (CPR). Signal sa senzora koristimo za izračuna kutne brzine zakreta.

Napajanje cijelog sustava je izvedeno s dva laboratorijska napajanja DF 17132 SB-3A LED tvrtke Goobay. Jedno napajanje se koristi za napajanje svih motora i upravljačkog sklopa motora, dok se drugo napajanje koristi za napajanje mikrokontrolera i senzora (enkodera).

Algoritam upravljanja ovim sustavom pisan je u Code Composer Studiu v.6, koji se piše na računalu, a potom se upisuje u MC preko USB kabla. Code Composer Studio (CCS) je integrirano razvojno okruženje koje podržava Texas Instruments MC-ove i Embeded procesore. CCS je skup alata koji se koriste za razvoj i uklanjanje grešaka u softweru za ugrađena računala eng. debuging embeded application, uključuje optimizacijski compiler za C/C++, sorce code editor, debugger…CCS 6.1.0 ima besplatnu, punu licencu za F28377D Delfio Experimenter Kit. Ovaj Kit ima XDS100v2 emulator za koji je CCS besplatan.

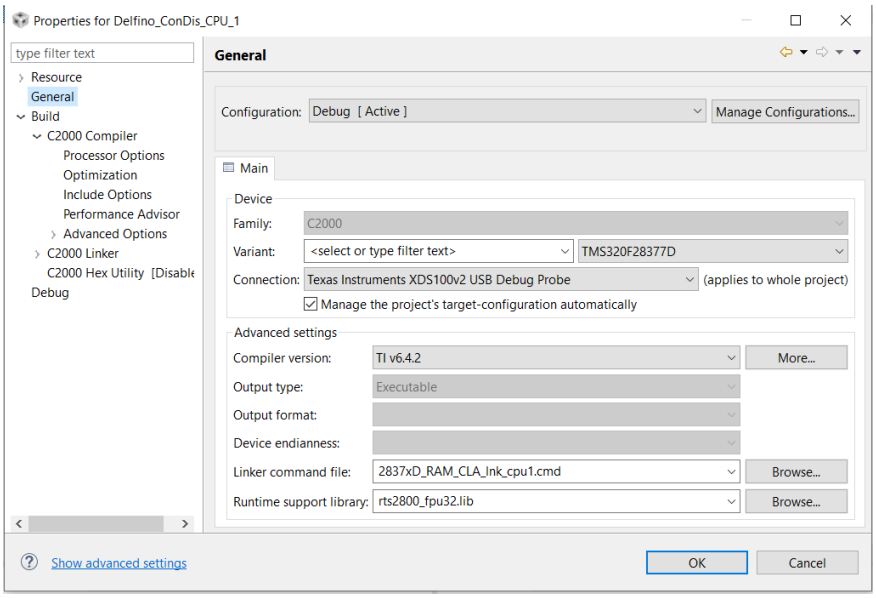


Slika 4. CCS Editor

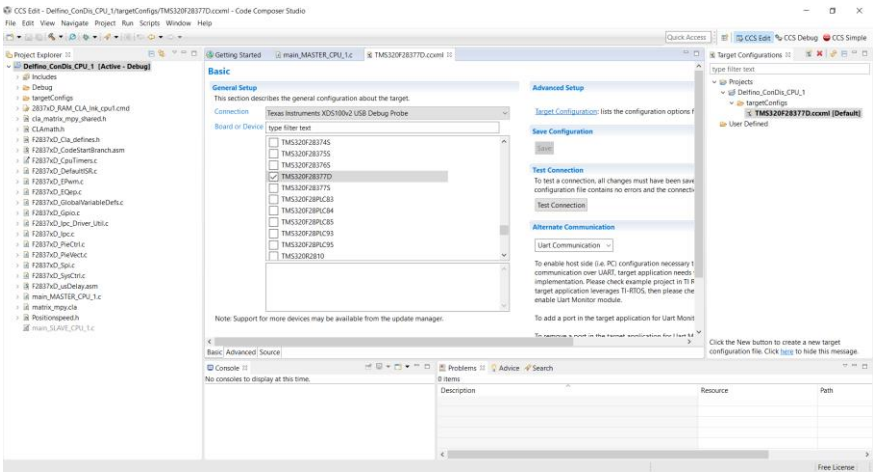
Gornja slika [Slika 4] pokazuje CCS Editor, sučelje za uređivanje koda. Na lijevoj strani je stablo projekta. Ovisno o MC koji se koristi u projektu potrebno je prilagoditi postavke CCS-

[1] https://www.ti.com

a. Odnosno odabrati o kojem MC-u se radi, prikazano na slici ispod [Slika 5], kako bi program prilagodio compiler…Isto tako odabire se način na koji se računalo spaja s MC-om (postavka „Connection“). U podprozoru „Tagret Configurations“ potrebno je odabrati model MC-a na koji se spajamo, kao što je prikazano na slici ispod[Slika 6].



Slika 5 Generalne postavke



Slika 6 Postavka za odabir uređaja na koji se spajamo

U ovome radu neće biti prikazan cijeli kod, zato što je posuđen već samo neki bitni dijelovi.

```
float32 A[N][N]={

        {0.9611,0.0258,0.001,0.0},
        {-0.0073,0.9979,0.0,0.001},
        {-0.1298,0.0843,0.9998,-0.0013},
        {-0.0018,-0.0021,0.0,0.9910}
};
```

```
float32 B[N][M]={

        {0.0,0.0389,-0.0258},
        {0.0,0.0073,0.0021},
        {0.0004,0.1379,-0.0930},
        {0.0024,-0.0065,0.0005}
};
```

```
float32 C[K][N]={
        {1.000000,0.000000,0.000000,0.000000},
        {0.000000,1.000000,0.000000,0.000000},
        {0.000000,0.000000,1.000000,0.000000},
        {0.000000,0.000000,0.000000,1.000000}
};
```

```
float32 D[K][M]={
        {0.000000,0.000000,0.000000},
        {0.000000,0.000000,0.000000},
        {0.000000,0.000000,0.000000},
        {0.000000,0.000000,0.000000}
};
```

Slika 7 Matrice observera

Na gornjoj slici [Slika 7] je prikazano kako su unesene matrice observera, inače su na tome mjestu bile matrice dinamičkog regulatora, ali po strukturi su isti pa su samo matrice i dimenzije matrica zamijenjene, dimenzioniranje matrica u C++ kodu je prikazano na donjoj slici [Slika 8].

```
#define N 4
#define M 3
#define K 4
extern float A[N][N]; //NxN matrix A
extern float B[N][M]; //NxM matrix B
extern float C[K][N]; //KxN matrix C
extern float D[K][M]; //KxM matrix D
extern float x[N], u[M], y[K], dx[N];
```

Slika 8 Definiranje varijabli za matrice i njihovih dimenzija

```
V_motor = -(-2*234.4329*y[0] + 2*171.8127*y[1] - 0.5*74.5005*y[2] + 0.5*19.6836*y[3]);
```

Slika 9 Implementacija zakona upravljanja

Gornja slika [Slika 9] pokazuje kako je implementiran zakon upravljanja u kodu.

```
#define dim 720
float odziv1[dim];
float odziv2[dim];
float odziv3[dim];
float odziv4[dim];
float odziv5[dim];
int pocetakMjerenja = 0;
int brojac1=0;
int prescaler=20;
int i;
```

```
//Data acquisition
    if (CpuTimer0.InterruptCount>=6000){
        pocetakMjerenja = 1;
        i++;
    }

    if (pocetakMjerenja == 1 && brojac1 < dim){
            if (i==prescaler)
            {
                odziv1[brojac1]=y[0];  //theta iz obz
                odziv2[brojac1]=y[1];   // s iz obz
                odziv3[brojac1]=theta;
                odziv4[brojac1]=s;     // U ovom sluèaju
                odziv5[brojac1]=V_motor;
                i=0;
                brojac1++;
            }
    }
```

Slika 10 Prikupljanje podataka

Na gornjoj slici [Slika 10] prikazano je kao su definirane varijable u koje se spremaju odzivi i što se u njih sprema, *y[i]* su varijable iz observera.

Kada se program upiše u MC i kada se izvrši regulacija potrebno je izvaditi određena mjerenja, koja će biti prikazana u pretposljednjem poglavlju. To radimo iz CCS Debug prozora,

odabirom na podprozor „Memory Browser“, te save, gdje biramo gdje će se spremiti podaci, pod kojim imenom, u kojem obliku i još je potrebno odabrati početnu adresu varijable koju želimo izvaditi.

2.2. Matematičko modeliranje

Matematički model nam je neophodan pri analizi sustava i sintezi regulatora. Matematički model je preslika stvarnog sustava u skup diferencijalnih jednadžbi koje vjerno opisuju realni (stvarni) sustav. Matematički model se nerijetko pojednostavljuje nekim pretpostavkama koje ne narušavaju vjernost modela, a mogu nam olakšati pri sintezi regulatora, isto tako pojednostavljenja radi, često se model pojednostavljuje linearizacijom oko neke radne točke. Dinamika sustava će se izvesti pomoću Euler-Lagrangeove metode [15].

Tablica 1. Parametri sustava

Parametar	Vrijednost	Mjerna jedinica	Parametar	Vrijednost	Mjerna jedinica
L	1	m	$k_{12}^{Rd} = k_{12}^{Ru}$	5	N/m
$a_1=a_2=a_3$	0,116	m	$k_{23}^{Rd} = k_{23}^{Ru}$	5	N/m
$d_1=d_2=d_3$	0,095	m	$k_{12}^{Ld} = k_{12}^{Lu}$	5	N/m
$c_1=c_2=c_3$	0,180	m	$k_{23}^{Ld} = k_{23}^{Lu}$	5	N/m
$m_1^A = m_2^A = m_3^A$	4,48	kg	$l_{12,0}^{Ld} = l_{12,0}^{Lu}$	0,1	m
$m_1^C = m_2^C = m_3^C$	1	kg	$l_{23,0}^{Ld} = l_{23,0}^{Lu}$	0,1	m
$J_1 = J_2 = J_3$	0,68	kg m^2	$l_{12,0}^{Rd} = l_{12,0}^{Ru}$	0,1	m
g	9,81	m/s^2	$l_{23,0}^{Rd} = l_{23,0}^{Ru}$	0,1	m
K_e	0,077	Vs/rad	$l_{12,S}^{Ld} = l_{12,S}^{Lu}$	0,25	m
K_t	0,077	Nm/A	$l_{23,S}^{Ld} = l_{23,S}^{Lu}$	0,25	m
R_a	2,6	Ω	$l_{12,S}^{Rd} = l_{12,S}^{Ru}$	0,25	m
p	1/3,74		$l_{23,S}^{Rd} = l_{23,S}^{Ru}$	0,25	m
r	$7{,}7\cdot10^{-3}$	m	$h_{12}^R = h_{23}^R = h_{12}^L = h_{23}^L$	0,4	m

D	0,7	m	$l_{12}^R = l_{23}^R = l_{12}^L = l_{23}^L$	1,06	m

Matematički model ćemo napraviti u pet koraka, izračun kinetičke energije, izračun potencijalne energije, određivanje funkcije gubitaka, određivanje dinamike istosmjernog motora i prijenosa, razvoj matematičkom modela pomoću Euler-Lagrangeovih jednadžbi. Svaki od nabrojanih koraka bit će opisani svaki u svojem odlomku. Kako bismo mogli izvesti model potrebne su nam vrijednosti fizikalnih veličina koje opisuju ustav, dane su u Tablica 1.

2.2.1. Izračun kinetičke energije

Kinetička energija cijelog sustava može se izraziti kao zbroj kinetičke energije svih podsustava, koji se pak sastoje od kinetičke energije klackalice i kolica na klackalici.

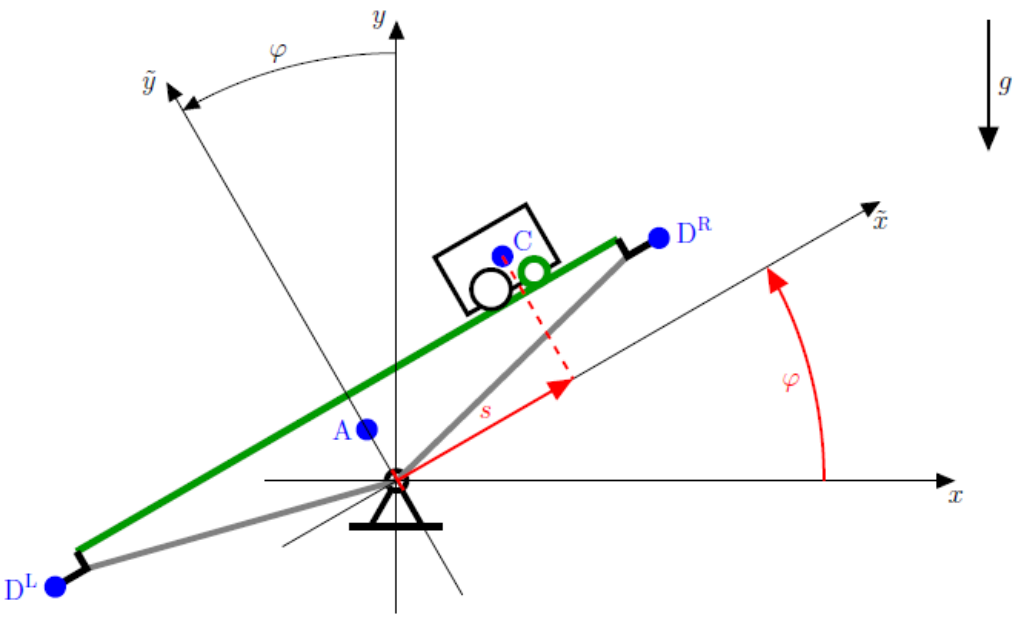
Kinetička energija i-te klackalice je

$$E_i^K = \frac{1}{2} J_i \dot{\varphi}_i^2, \tag{1}$$

a kinetička energija pojedinih kolica je

$$E_i^C = \frac{1}{2} m_i^C \left\| \dot{r}_i^C \right\|^2, \tag{2}$$

gdje je r_i^C vektor pozicije centra mase pojedinih kolica u koordinatnom sustavu (*x*,*y*).



Slika 11 Shema podustava u zakretu

U rotirajućem koordinatnom sustavu $(\tilde{x}, \tilde{y})$, prikazanom na Slika 11, koordinate točke C su:

$$\tilde{\boldsymbol{r}}_i^C = \begin{bmatrix} s_i \\ c_i \end{bmatrix} \tag{3}$$

Gdje je c_i konstantan tako da za zadani položaj s_i i φ_i pomoću matrice rotacija dobijemo

$$\boldsymbol{r}_i^C := \begin{bmatrix} x_i^C \\ y_i^C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos(\varphi_i) & -\sin(\varphi_i) \\ \sin(\varphi_i) & \cos(\varphi_i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_i \\ c_i \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Nadalje možemo prikazati brzinu kolica kao

$$\dot{\boldsymbol{r}}_i^C := \begin{bmatrix} \dot{x}_i^C \\ y_i^C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{s}_i cos(\varphi_i) - s_i \dot{\varphi}_i \sin(\varphi_i) - c_i \dot{\varphi}_i \cos(\varphi_i) \\ \dot{s}_i \sin(\varphi_i) + s_i \dot{\varphi}_i \cos(\varphi_i) - c_i \dot{\varphi}_i \sin(\varphi_i) \end{bmatrix}. \tag{5}$$

Sada možemo (5) vratiti u (2), pa dobijemo izraz za kinetičku energiju i-tih kolica

$$E_i^C = \frac{1}{2} m_i^C \left((c_i^2 + s_i^2) \dot{\varphi}_i^2 - 2 c_i \dot{\varphi}_i \dot{s}_i + \dot{s}_i^2 \right), \tag{6}$$

sada možemo zapisati kinetičku energiju cijelog sustava kao

$$E = \sum_{i=1}^{3} (E_i^K + E_i^C). \tag{7}$$

2.2.2. Izračun potencijale energije

Potencijalna energija i-te klackalice je

$$U_i^K = a_i m_i^A g cos(\varphi_i), \tag{8}$$

dok je potencijalna energija i-tih kolica

$$U_i^C = m_i^C g \left(s_i \sin(\varphi_i) + c_i cos(\varphi_i) \right). \tag{9}$$

Kako su podsustavi povezani preko opruga, moramo izraziti i potencijalnu energiju elastičnih veza, za desnu (R) i lijevu (L) stranu sustava.

$$\begin{aligned} U^R = \frac{1}{2} k_{12}^{Ru} \left(l_{12}^{Ru} - l_{12,0}^{Ru} \right)^2 + \frac{1}{2} k_{12}^{Rd} \left(l_{12}^{Rd} - l_{12,0}^{Rd} \right)^2 + \frac{1}{2} k_{23}^{Ru} \left(l_{23}^{Ru} - l_{23,0}^{Ru} \right)^2 \\ + \frac{1}{2} k_{23}^{Rd} \left(l_{23}^{Rd} - l_{23,0}^{Rd} \right)^2, \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned} U^L = \frac{1}{2} k_{12}^{Lu} \left(l_{12}^{Lu} - l_{12,0}^{Lu} \right)^2 + \frac{1}{2} k_{12}^{Ld} \left(l_{12}^{Ld} - l_{12,0}^{Ld} \right)^2 + \frac{1}{2} k_{23}^{Lu} \left(l_{23}^{Lu} - l_{23,0}^{Lu} \right)^2 \\ + \frac{1}{2} k_{23}^{Ld} \left(l_{23}^{Ld} - l_{23,0}^{Ld} \right)^2. \end{aligned} \tag{11}$$

Indeks 0 u jednadžbama (10) i (11) označava duljinu neopterećene opruge. Pretpostavka je da su sve konstante opruge jednake tako da su $k_{12}^{Ru} = k_{12}^{Rd} = k_{23}^{Ru} = k_{23}^{Rd} = k_{12}^{Lu} = k_{12}^{Ld} = k_{23}^{Lu} = k_{23}^{Ld} = k \left[{}^{N}/_{m} \right]$.

Na slici [Slika 3] možemo vidjeti vezu između duljine opruge i pomaka koloture.

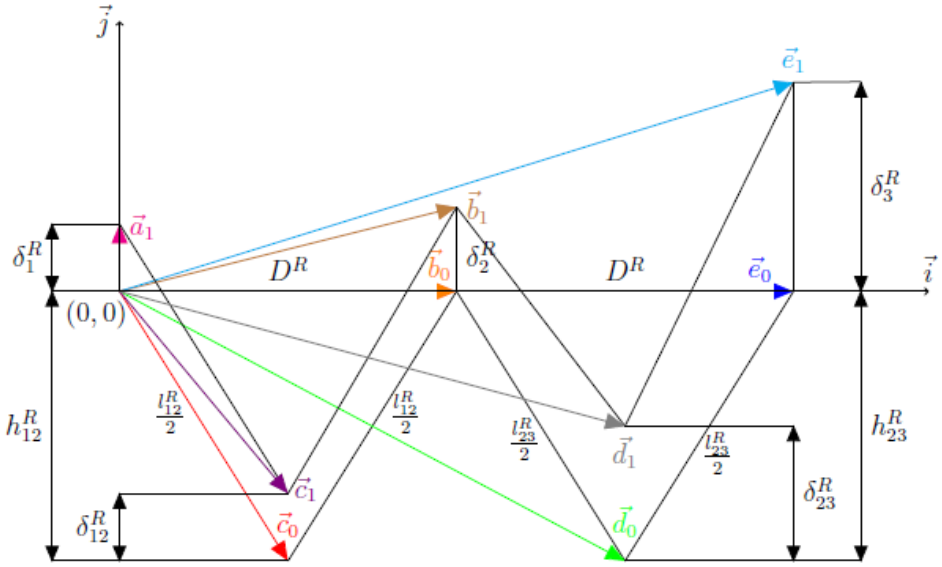
$$l_{12}^{Ru} = l_{12,S}^{Ru} - \delta_{12}^{R}, l_{12}^{Rd} = l_{12,S}^{Rd} + \delta_{12}^{R}, l_{23}^{Ru} = l_{23,S}^{Ru} - \delta_{23}^{R}, l_{23}^{Rd} = l_{23,S}^{Rd} + \delta_{23}^{R},$$

$$l_{12}^{Lu} = l_{12,S}^{Lu} - \delta_{12}^{L}, l_{12}^{Ld} = l_{12,S}^{ld} + \delta_{12}^{L} l_{23}^{Lu} = l_{23,S}^{Lu} - \delta_{23}^{L}, l_{23}^{Ld} = l_{23,S}^{Ld} - \delta_{23}^{L}$$

Duljina s indeksom S označava duljinu prednapregnute opruge.

Ako desnu shemu sa gornje slike [Slika 3] promotrimo i prikažemo u vektorskoj formi dobijemo prikaz sa donje slike [Slika 12] i:

$$\|\overrightarrow{a_1} - \overrightarrow{c_1}\| + \|\overrightarrow{b_1} - \overrightarrow{c_1}\| = \frac{D^R}{2}, \|\overrightarrow{b_1} - \overrightarrow{d_1}\| + \|\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{d_1}\| = \frac{D^R}{2}, \tag{12}$$



Slika 12 Vektorski prikaz elastičnih veza (desna strana sustava)

Ako napravimo linearnu aproksimaciju (12) oko nule dobijemo izraz za pomak kolotura na lijevoj i desnoj strani, aproksimacija je točnija za manji kut zakreta klackalice

$$\delta_{12}^R = \frac{1}{2}(\delta_1^R + \delta_2^R), \delta_{23}^R = \frac{1}{2}(\delta_2^R + \delta_3^R), \tag{13}$$

$$\delta_{12}^L = \frac{1}{2}(\delta_1^L + \delta_2^L), \delta_{23}^L = \frac{1}{2}\left(\delta_2^L + \delta_3^{R}{}_L\right). \tag{14}$$

Iz Slika 11 vidimo izraze za vertikalni pomak krajeva klackalica

$$\delta_i^R = \frac{L}{2}\sin(\varphi_i) + d_i\cos(\varphi_i) - d_i, \delta_i^L = -\delta_i^R. \tag{15}$$

Sada možemo napisati izraz za potencijalnu energiju cijelog sustava

$$U = U^R + U^L + \sum_{i=1}^{3}(U_i^K + U^C). \tag{16}$$

2.2.3. Funkcija gubitaka

Funkcija gubitaka je posljedica trenje u rotacijskome zglobu i-te klackalice, a izražena je kao

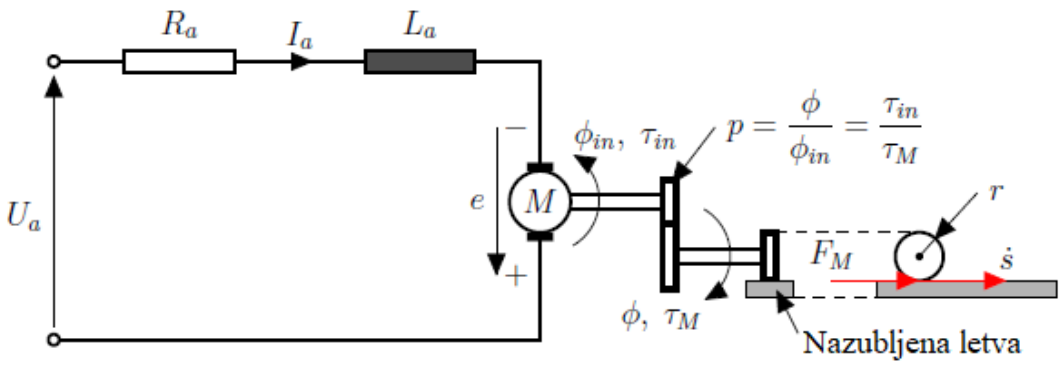
$$\Phi_i = \frac{1}{2}\kappa_i \dot{\varphi}_i^2, \tag{17}$$

gdje je κ [Nms/rad] koeficijent viskoznog trenja u zglobu. Uz pretpostavku da je koeficijent viskoznog trenja jednak u sva tri podsustava

$$\Phi = \frac{1}{2}\kappa \sum_{i=1}^{3} \dot{\varphi}_i^2. \tag{18}$$

Trenje između nazubljene letve i zupčanika je zanemarivo.

2.2.4. Elektromotor i prijenos



Slika 13 Elektromotor i prijenos

Sustav koristi tri identična elektromotora koji razvijaju silu F_M za pokretanje kolica. Sila, odnosno moment koji motor isporučuje ovisi o naponu armature U_a [V], a sila F_M i o prijenosnom omjeru. Kako se vidi na gornjoj slici [Slika 13] motor je vratilom vezan za reduktor, a reduktor je povezan sa zupčanikom koji s nazubljenom letvom čini još jedan par prijenosnika, odnosno još jedan stupanj redukcije. R_a [Ω] je električni otpor armature, I_a [A] je struja armature, L_a [H] je induktivitet armature, e [V] elektromotorana sila inducirana u navojima armature, τ_{in} [Nm] je moment motora, τ_M [Nm] je moment kojim djelujemo na nazubljenu letvu, ϕ_{in} [rad] i ϕ [rad] kut zakreta, a p je prijenosni omjer reduktora.

Drugi Kirchhoff-ov zakon možemo primijeniti na shemu sa gornje slike [Slika 13], uz $L_a \ll R_a$ dobijemo dinamiku

$$F_{Mi} = \frac{K_i}{R_a p r} U_{ai} - \frac{K_e K_t}{R_a p^2 r^2} \dot{s}_i, \tag{19}$$

gdje je K_t [Nm/A] konstanta motora, K_e [Vs/rad] je elektromotorna konstanta, a r [m] efektivni radius zupčanika koji je u dodiru s nazubljenom letvom.

2.2.5. Dinamika

Kako je prije navedeno za izvod jednadžbi dinamike koristit ćemo Euler-Lagrangeovu metodu. Prije svega definirat ćemo vektor generaliziranih koordinata $\boldsymbol{q}^T=[q_1\ q_2\ \dots\ q_6]$, gdje su $q_1=\varphi_1$, $q_2=s_1$, $q_3=\varphi_2$, $q_4=s_2$ $q_5=\varphi_3$, $q_6=s_3$, kutovi zakreta klackalica i pomaci kolica.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial E}{\partial q_j}+\frac{\partial U}{\partial q_j}+\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_j}=\tau_{Di}, \qquad j=1,3,5, \tag{20}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial E}{\partial q_j}+\frac{\partial U}{\partial q_j}+\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_j}=F_{Mi}, \qquad j=2,4,6, \tag{21}$$

gdje su E ukupna kinetička energija definirana s (7), U je ukupna potencijalna energija definirana s (16), Φ su gubici prikazani s (18), τ_{Di} poremećaj (moment) u zglobu i-te klackalice i F_M je sila kojom kolica djeluju na nazubljenu letvu. Kako je u poglavlju 2.3. napomenuto, trenje između kolica i klackalice se zanemaruje pa je izraz $\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_j}$ iz (21) jednak 0, za j = 2, 4 i 6.

Jednadžbe (20) i (21) možemo zapisati u matričnom obliku kao

$$\boldsymbol{M}_i(\boldsymbol{q}_i)\ddot{\boldsymbol{q}}_i+\boldsymbol{C}_i(\boldsymbol{q}_i,\dot{\boldsymbol{q}}_i)\dot{\boldsymbol{q}}_i+\boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{q}_i)+\boldsymbol{Z}_i(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})+\boldsymbol{\Phi}_i\dot{\boldsymbol{q}}_i=\frac{e_2K_t}{R_apr}U_{ai}+e_1\tau_{Di}, \qquad i=1,2,3. \tag{22}$$

gdje su e_1 i e_2 vektori u kojima indeks označava poziciju s vrijednošću 1 dok je ostalo 0, a vektor $\boldsymbol{q}_i$ je vektor generaliziranih koordinata $\boldsymbol{q}_i=[q_{2i-1}\ q_{2i}]^T$, nadalje $\boldsymbol{M}_i(\boldsymbol{q}_i)$ matrica inercija

$$\boldsymbol{M}_i(\boldsymbol{q}_i)=\begin{bmatrix} m_i^C c_i^2 m_i^C q_{2i}^2+J_i & -m_i^C c_i \\ -m_i^C c_i & m_i^C \end{bmatrix}, \tag{23}$$

$\boldsymbol{C}_i(\boldsymbol{q}_i,\dot{\boldsymbol{q}}_i)$, matrica centrifugalnih i Coriolis-ovih sila (momenata)

$$\boldsymbol{C}_i(\boldsymbol{q}_i,\dot{\boldsymbol{q}}_i)=\begin{bmatrix} m_i^C q_{2i}\dot{q}_{2i} & m_i^C q_{2i}\dot{q}_{2i-1} \\ -m_i^C q_{2i}\dot{q}_{2i-1} & \dfrac{K_tK_e}{R_apr^2} \end{bmatrix}, \tag{24}$$

g_i je vektor gravitacijskih sila (momenata)

$$g_i=\begin{bmatrix} -ga_im_i^A\sin(q_{2i-1})+gm_i^C(q_{2i}\cos(q_{2i-1}-c_i\sin(q_{2i-1}))) \\ m_i^C qsin(q_{2i-1}) \end{bmatrix}, \tag{25}$$

$\boldsymbol{\Phi}_i$ je matrica gubitaka (viskoznog trenja) u rotacijskim zglobovima, $\boldsymbol{\Phi}_i=diag(\kappa,0)$.

Izraz $\boldsymbol{Z}_i(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ pokazuje spregu u sustavu, odnosno spregu između i-te klackalice i ostatka sustava, $\boldsymbol{Z}_i(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})=[z_i \quad 0]^{\boldsymbol{T}}$, gdje su

$$z_1=\frac{k}{4}\zeta_{1,1}\left(\zeta_{1,2}+l_{12,S}^{Ld}+l_{12,0}^{Lu}+l_{12,S}^{Rd}+l_{12,0}^{Ru}-l_{12,0}^{Rd}-l_{12,S}^{Ru}-l_{12,0}^{Ld}-l_{12,S}^{Lu}\right), \tag{26}$$

Uz:

$$\begin{aligned}\zeta_{1,1} &= Lcos(q_1) - 2d_1\sin(q_1),\\ \zeta_{1,2} &= 2d_1\cos(q_1) - 2d_1 + 2d_2\cos(q_3) - 2d_2 + Lsin(q_1) + Lsin(q_3),\end{aligned} \tag{27}$$

$$\begin{aligned}z_2 = \frac{k}{4}\Big[&4d_2Lcos^2(q_3)\\ &+ Lcos(q_3)\Big(-2d_1 - 4d_2 - 2d_3 - l_{12,0}^{Ld} + l_{12,0}^{Lu} + l_{12,S}^{Ld}\\ &- l_{12,S}^{Lu} - l_{23,0}^{Ld} + l_{23,0}^{Lu} + l_{23,S}^{Ld} - l_{23,S}^{Lu} - l_{12,0}^{Rd} + l_{12,0}^{Ru} + l_{12,S}^{Rd}\\ &- l_{12,S}^{Ru} - l_{23,0}^{Rd} + l_{23,0}^{Ru} + l_{23,S}^{Rd} - l_{23,S}^{Ru} + 2d_1coa(q_1)\\ &+ 2\,d_{3\cos}(q_5) + Lsin(q_1) + Lsin(q_5)\Big)\\ &- 2\sin(q_3)(-2d_1d_2 - 4d_2^2 - 2d_2d_3 - d_2l_{12,0}^{Ld} + d_2l_{12,0}^{Lu}\\ &+ d_2l_{12,S}^{Ld} - d_2l_{12,S}^{Lu} - d_2l_{23,0}^{Ld} + d_2l_{23,0}^{Lu} + d_2l_{23,S}^{Ld} - d_2l_{23,S}^{Lu}\\ &- d_2l_{12,0}^{Rd} + d_2l_{23,0}^{Ru} + d_2l_{12,S}^{Rd} - d_2l_{12,S}^{Ru} - d_2l_{23,0}^{Rd} + d_2l_{23,0}^{Ru}\\ &+ d_2l_{23,S}^{Rd} - d_2l_{23,S}^{Ru} + 2d_1d_2\cos(q_1) + (4d_2^2 - L^2)\cos(q_3)\\ &+ 2d_2d_3\cos(q_5) + d_2Lsin(q_1) + 2d_2L\sin(q_3)\\ &+ d_2L\sin(q_5))\Big],\end{aligned} \tag{28}$$

i na posljetku

$$z_3 = \frac{k}{4}\zeta_{3,1}\left(\zeta_{3,2} + l_{23,0}^{Lu} + l_{23,S}^{Rd} + l_{23,0}^{Ru} - l_{23,0}^{Rd} - l_{23,S}^{Ru} - l_{23,S}^{Lu}\right), \tag{29}$$

uz

$$\begin{aligned}\zeta_{3,1} &= Lcos(q_5) - 2d_3\sin(q_5),\\ \zeta_{3,2} &= 2d_3\cos(q_5) - 2d_3 + 2d_2\cos(q_3) - 2d_2 + Lsin(q_5) + Lsin(q_3),\end{aligned} \tag{30}$$

Sprega podsustava se vidi se u izrazima (26)-(30), gdje se u izrazima pojavljuju generalizirane koordinate svih podsustava.

2.3. Prostor stanja

Prostor stanja engl. “state space“ često se koristi u teoriji upravljanja, to je način prikaza dinamike u obliku diferencijalnih jednadžbi prvog reda i možemo ih zapisati matrično.

Sustav (22) možemo zapisati u globalnome obliku

$$\boldsymbol{\mathcal{M}}(\boldsymbol{Q})\ddot{\boldsymbol{Q}} + \boldsymbol{\mathcal{C}}(\boldsymbol{Q},\dot{\boldsymbol{Q}})\dot{\boldsymbol{Q}} + \boldsymbol{G}(\boldsymbol{Q}) + \boldsymbol{T}\dot{\boldsymbol{Q}} + \boldsymbol{\mathcal{Z}}(\mathbf{Q},\dot{\mathbf{Q}}) = \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{M}}\boldsymbol{\mathcal{U}}_a + \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{D}}, \tag{31}$$

gdje su:

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{q}_1\\ \boldsymbol{q}_2\\ \boldsymbol{q}_3\end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{\mathcal{U}}_a = \begin{bmatrix}U_{a1}\\ U_{a2}\\ U_{a3}\end{bmatrix} = \boldsymbol{u}, \qquad \boldsymbol{\tau}_{\mathrm{D}} = \begin{bmatrix}\tau_{D1}\\ \tau_{D2}\\ \tau_{D3}\end{bmatrix} = \boldsymbol{d},$$
$$\boldsymbol{\mathcal{Z}}(\mathbf{Q},\dot{\mathbf{Q}}) = \begin{bmatrix}\boldsymbol{Z}_1(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\\ \boldsymbol{Z}_2(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\\ \boldsymbol{Z}_3(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\end{bmatrix}, \tag{32}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{M}} = \begin{bmatrix} \frac{e_2 K_t}{R_a pr} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{e_2 K_t}{R_a pr} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{e_2 K_t}{R_a pr} \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{D}} = \begin{bmatrix} e1 & 0 & 0 \\ 0 & e1 & 0 \\ 0 & 0 & e1 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\mathcal{M}}(\boldsymbol{Q}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{M}_1(\boldsymbol{q}_1) & 0 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{M}_2(\boldsymbol{q}_2) & 0 \\ 0 & 0 & \boldsymbol{M}_3(\boldsymbol{q}_3) \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\Phi}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \boldsymbol{\Phi}_3 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\mathcal{C}}(\boldsymbol{Q}, \dot{\boldsymbol{Q}}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{C}_1(\boldsymbol{q}_1, \dot{\boldsymbol{q}}_1) & 0 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{C}_2(\boldsymbol{q}_2, \dot{\boldsymbol{q}}_2) & 0 \\ 0 & 0 & \boldsymbol{C}_3(\boldsymbol{q}_3, \dot{\boldsymbol{q}}_3) \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{G}(\boldsymbol{Q}) = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{bmatrix}.$$

Uvodimo vektor stanja

$$\boldsymbol{x} = [q_1\ q_2 \dots q_6\ \dot{q}_1 \dots \dot{q}_6]^T = \left[\boldsymbol{Q}\ \dot{\boldsymbol{Q}}\right]^T, \tag{33}$$

pomoću kojega sustav (31) možemo zapisati u standardni nelinearni afin prostor stanja

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{d}) = \boldsymbol{ff}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{B_1}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u} + \boldsymbol{B_2}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{d} +, \tag{34}$$

gdje je

$$\begin{gathered} \boldsymbol{ff}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{Q}} \\ -\boldsymbol{\mathcal{M}}^{-1}(\boldsymbol{Q})(\boldsymbol{\mathcal{C}}(\boldsymbol{Q}, \dot{\boldsymbol{Q}}) + \boldsymbol{G}(\boldsymbol{Q}) + \boldsymbol{T}\dot{\boldsymbol{Q}} + \boldsymbol{\mathcal{Z}}(\mathrm{Q}, \dot{\mathrm{Q}}) \end{bmatrix}, \\ \boldsymbol{B_1}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{\mathcal{M}}^{-1}(\boldsymbol{Q})\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{M}} \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{B_2}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{\mathcal{M}}^{-1}(\boldsymbol{Q})\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{D}} \end{bmatrix}, \end{gathered} \tag{35}$$

2.4. Linearizacija

Za primjenu odabranog algoritma upravljanja koji će biti detaljno opisan potrebno je napraviti linearizirani model podsustava u sljedećem obliku [11]:

$$\begin{gathered} \dot{x}_\iota(t) = (A_i + \Delta A_i)x_i(t) + (B_i + \Delta B_i)u_i(t) + h_i\big(t, x(t)\big) + \xi_i(t), \\ y_i = \mathrm{S}_i x_i(t), i = 1, \dots, N, \end{gathered} \tag{36}$$

gdje je $x_i(t) \in \mathbb{R}^n$ stanje sustava, $u_i(t) \in \mathbb{R}^m$ vektor ulaza i $y_i(t) \in \mathbb{R}^p$ vektor izlaza. Nadalje $\xi_i(t)$ su vanjski poremećaji, a $h_i\big(t, x(t)\big)$ vektor sprega između i-tog podsustava i ostatka sustava. Kako znamo iz prijašnjih radova na istom postavu da linearizacijom oko ravnotežnog položaja dobivamo vjerni prikaz realnog sustava, u sintezi regulatora zanemarit će se članovi s $\Delta\cdot$ koji opisuju nesigurnosti/nepoznanice sustava.

Najprije ćemo izraz (36) promatrati bez člana koji opisuje nelinearne veze između podsustava. Tako dobijemo matematičku reprezentaciju sustava 3 klackalice s kolicima koje nisu spregnute.

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{B_1}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u} + \boldsymbol{B_2}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{d}, \tag{37}$$

$$\begin{gathered} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{Q}} \\ -\boldsymbol{\mathcal{M}}^{-1}(\boldsymbol{Q})(\boldsymbol{\mathcal{C}}(\boldsymbol{Q},\dot{\boldsymbol{Q}}) + \boldsymbol{G}(\boldsymbol{Q}) + \boldsymbol{T}\dot{\boldsymbol{Q}}) \end{bmatrix}, \\ \boldsymbol{B_1}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{\mathcal{M}}^{-1}(\boldsymbol{Q})\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{M}} \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{B_2}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{\mathcal{M}}^{-1}(\boldsymbol{Q})\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{D}} \end{bmatrix}. \end{gathered} \tag{38}$$

Linearizacija je uobičajen postupak kojim nelinearni sustav pojednostavimo i bavimo se njime kao da je linearni. Napravit ćemo Jacobian-ovu linearizaciju sustava oko ravnotežnog položaja. Takav linearizirani model vjerno predstavlja originalni, ali samo oko odabrane radne točke. Što se više udaljavamo od točke linearizacije, to će linearizirani sustav lošije predstavljati originalni, nelinearni sustav.

Linearizirati ćemo sustav (37), tako da postavimo **u** i **d** na neku vrijednost, $\mathbf{u_e}$ i $\mathbf{d_e}$ koje nazivamo ravnotežnim ulazima. Tada je neki $\mathbf{x_e}$ ravnotežno stanje sustava ako je $\mathbf{h(x_e,u_e,d_e)=0}$. Ako definiramo ravnotežne ulaze kao $\mathbf{u_e}$ =0 i $\mathbf{d_e}$ = 0, tada je ravnotežni položaj našeg sustava $\mathbf{x_e}$=0.

$$\boldsymbol{\Delta}\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B_1}\boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{B_2}\boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{d}, \tag{39}$$

gdje su izrazi $\boldsymbol{\Delta x} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_e}, \boldsymbol{\Delta u} = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u_e}$ *i* $\boldsymbol{\Delta d} = \boldsymbol{d} - \boldsymbol{d_e}$ predstavljaju varijaciju **x, u** i **d** oko ravnotežnog položaja. Izraz (39) nazivamo Jacobijevom linearizacijom nelinearnog sustava (**37**) oko ravnotežnog položaja.

$$\begin{gathered} \boldsymbol{A} = \frac{\partial \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{d})}{\partial \boldsymbol{x}}, za\ \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x_e}, \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u_e}, \boldsymbol{d} = \boldsymbol{d_e}, \\ \boldsymbol{B_1} = \frac{\partial \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{d})}{\partial \boldsymbol{u}}, za\ \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x_e}, \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u_e}, \boldsymbol{d} = \boldsymbol{d_e}, \\ \boldsymbol{B_2} = \frac{\partial \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{d})}{\partial \boldsymbol{d}}, za\ \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x_e}, \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u_e}, \boldsymbol{d} = \boldsymbol{d_e}. \end{gathered} \tag{40}$$

Sada je potrebno vratiti član koji opisuje spreg sutava pa dobijemo sljedeće:

$$\begin{gathered} \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B_1}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{B_2}\boldsymbol{d} + \widehat{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{x}), \\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{S}\boldsymbol{x}, \end{gathered} \tag{41}$$

gdje je

$$\widehat{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ -\boldsymbol{\mathcal{M}}^{-1}(\boldsymbol{Q})\boldsymbol{\mathcal{Z}}(\mathrm{Q},\dot{\mathrm{Q}}) \end{bmatrix}, \tag{42}$$

Izlazni vektor možemo odabrati prema potrebi, u praksi su rijetko sva stanja sustava mjerljiva. Ovdje je odabrano ***S=[s 0],*** a ***s*** je jedinična matrica dimenzije šest.

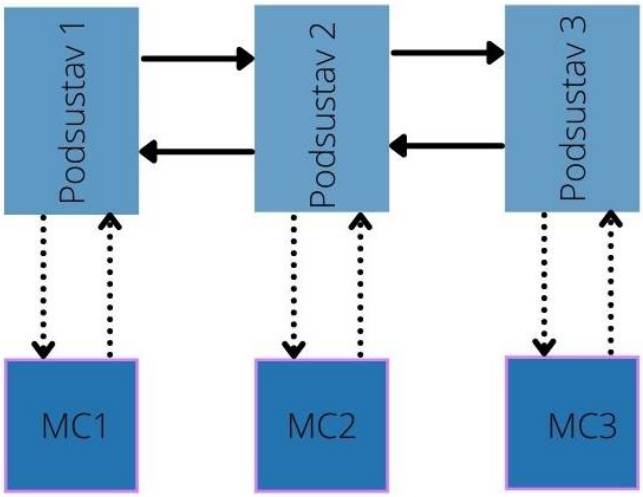
3. DECENTRALIZIRANO UPRAVLJANJE MEĐUSOBNO POVEZANIM SUSTAVIMA KOLICA NA KLACKALICI

Cilj upravljanja je da imamo sposobnost stabilizirati sustav ako on po svojoj prirodi nije stabilan te imati mogućnost dovesti sustav u neko željeno stanje. Postoje različiti koncepti upravljanja kao što su centralizirano, distribuirano i decentralizirano, u ovom radu fokusirati ćemo se na decentralizirano.

Centralizirano upravljanje, samo ime nam govori o čemu se radi, to je koncept kod kojega se sve informacije prikupljaju na jedno mjesto (centar) gdje se obrađuju i šalju dalje. Što bi za naš primjer eksperimentalnog postava značilo da bi koristili jedan MC koji bi služio za čitanje podataka sa senzora sva tri podsustava, obradu podataka (algoritam upravljanje) i gonio bi sva tri motora. Ovaj koncept upravljanja je uobičajen, jednostavan je, ali ima mana. Jedna od njih je opterećenost MC, jedan MC ima poprilično puno zadataka. To znači da bismo morali nabaviti dovoljno moćan MC koji sve to može obaviti, skupo. Nekada, ako se upravlja velikim sustavima gdje su podsustavi fizički jako udaljeni jedni od drugih nailazimo na probleme sa spajanja MC i podsustava. Još jedna značajna mana je ne robusnost takvog sustava, dođe li do kvara MC sustav vrlo vjerojatno prestaje raditi.

Distribuirano upravljanje je po svojoj strukturi kompleksnije, koristi više MC za isti sustav. Uzmimo primjer iz ovog rada, 3 podsustav, 3 MC, zajednički upravljaju sustavom tako da konstantno surađuju. Pod surađuju smatramo da međusobno dijele informacije, ta činjenica čini ovakav koncept složenijim od prethodno navedenog, i dalje se očitavaju senzori, vrte algoritmi upravljanja, šalju podaci na drivere motora, ali sada MC-ovi komuniciraju. Ovakav koncept sustav čini robusnijim i manje opterećenim (više MC za „isti posao“), ali je ovakav sustav kompliciraniji za sastaviti i sintetizirati upravljački(e) algoritam(e).

Decentralizirano upravljanje je slično prethodnome, svaki podsustav ima svoj MC, ali oni međusobno ne komuniciraju. To čini decentralizirano upravljanje jednostavnijim za implementaciju od distribuiranog. Ovaj koncept je robustan i koristan za upravljanje velikim sustavima, kao što su elektro energetske mreže. Struktura ovakvog koncepta upravljanja prikazana je na Slika 14.



Slika 14 Shema decentralizirane strukture

Ovo poglavlje se većinom bazira na razmatranjima iz [11]. Neki dijelovi su pojednostavljeni, u ovom radu smatra se da su parametri lineariziranog sustava potpuno poznati (u prošlim radovima na ovom sustavu pokazano je da linearizacija modela oko ravnotežnog položaja vjerno opisuje nelinearni sustav) tako da se ne primjenjuje dio iz [11] koji se bavi nesigurnostima sustava.

3.1. Formulacija upravljačkog problema

Razmatra se nelinearni spregnuti sustav , koji se sastoji od nekoliko podsustava na koje djeluju poremećaji nalik na sustav (41). Svaki od podsustava može se prikazati zasebno ili kao jedan sustav u kojemu su sve matrice blok dijagonalne.

$$\begin{gathered}\dot{x}_i(t) = A_i x_i(t) + B_{1i} u_i(t) + h_i\big(x(t)\big) + B_{2i} d, \\ y_i = \mathrm{S}_i x_i(t), i = 1, \dots, N,\end{gathered} \tag{43}$$

gdje su $A_i \in \mathbb{R}_i^{n_i \times n_i}$, $B_{1i} \in \mathbb{R}_i^{n_i \times m_i}$, $B_{2i} \in \mathbb{R}_i^{n_i \times md_i}$, $S_i \in \mathbb{R}_i^{n_i \times p_i}$ redom matrica stanja, upravljačka matrica, matrica poremećaja te izlazna matrica sustava, prikazane u prostoru stanja, a h_i član koji opisuje djelovanje sprega na *i-ti* podsustav.

Taj član se može ograničiti tako da zadovoljava sljedeći uvjet:

$$\left\| h_i\big(t, x(t)\big) \right\| < \alpha_i \| x_i(t) \| , \tag{44}$$

gdje je $\alpha_i > 0, i = 1, \dots, N$, parametar sprega koji će se maksimizirati, a $\|\cdot\|$ Euklidska norma. Ovaj način ograničavanja nelinearnih članova je često korišten u rješavanju problema upravljanja. Parametar α može biti poznat ili kao u ovom slučaju traži se maksimalna vrijednost tog parametra.

Globalni sustav koji se sastoji od n podsustava prikazan je slično kao u (41):

$$\begin{gathered}\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B_1}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{B_2}\boldsymbol{d} + \boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}),\\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{S}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u},\end{gathered} \tag{45}$$

gdje su sada $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}_i^{n\,\mathrm{x}\,n}$, $\boldsymbol{B_1} \in \mathbb{R}_i^{\mathrm{n}\,\mathrm{x}\,m}$, $\boldsymbol{B_2} \in \mathbb{R}_i^{n\,\mathrm{x}\,md}$, $\boldsymbol{S} \in \mathbb{R}_i^{p\,\mathrm{x}\,n}$, $\boldsymbol{D} \in \mathbb{R}^{pxm}$ redom blok dijagonalne matrice, stanja diag(A_i), upravljačka matrica diag($_{B1i}$), matrica poremećaja diag(B_{2i}), te izlazna matrica sustava diag(C_i), $\boldsymbol{u^T} = [u_1^T, \dots, u_m^T]^{\boldsymbol{T}}$, $\boldsymbol{d^T} = [d_1^T, \dots, d_{md}^T]^{\boldsymbol{T}}$, $\boldsymbol{D}$ je nul matrica i $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}) = \left[h_1^T, \dots, h_N^T\right]^T$ član koji opisuje djelovanje sprega. $\boldsymbol{x}$ je definiran kao u (33), ali općenito za sustav n-tog reda,

$$\boldsymbol{x} = [q_1\ q_2 \dots q_n\ \dot{q}_1 \dots \dot{q}_N]^T. \tag{46}$$

Kako nisu poznata sva stanja sustava koristi se Luenbergov observer stanja. U nastavku je prikazana struktura observera za i-ti podsustav koja ovisi samo o ulazima i izlazima i-tog podsustava:

$$\begin{gathered}\dot{\hat{x}}_i(t) = A_i\hat{x}_i(t) + B_{1i}u_i(t) + L_i(y_i(t) - \hat{y}_i(t),\\ \hat{y}_i = \mathrm{S}_i\hat{x}_i(t), i = 1, \dots, N,\end{gathered} \tag{47}$$

gdje je $L_i \in \mathbb{R}_i^{n_i\,\mathrm{x}\,p_i}$.

Observer stanja cijelog sustava možemo prikazati u globalnom obliku za sustav s N podustava:

$$\begin{gathered}\dot{\hat{\boldsymbol{x}}} = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{B_1}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u} + \boldsymbol{L}(\boldsymbol{y}(t) - \hat{\boldsymbol{y}}(t),\\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{S}\boldsymbol{x},\end{gathered} \tag{48}$$

gdje je $\hat{\boldsymbol{x}} = [\hat{x}_1^T, \hat{x}_2^T, \dots, \hat{x}_N^T]^T$ i $\boldsymbol{L}$ je blok dijagonalna matrica, diag(L_i).

Blok dijagonalna matrica globalnog observera $\boldsymbol{L}$ ukazuje na to da je observer decentraliziran u potpunosti, što znači da podsustavi ne razmjenjuju informacije.

Zakon upravljanja za i-ti podsustav (43) je:

$$u_i = -K_i\hat{x}_i\ , \tag{49}$$

gdje je K_i matrica pojačanja regulatora.

Globalni zakon upravljanja sustava (45) je:

$$\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{K}\hat{\boldsymbol{x}}\ , \tag{50}$$

gdje je $\boldsymbol{K}$ blok dijagonalna matrica, diag(B_i).

Greška observera, odnosno razlika između stanja sustava i stanja observera dana je za svaki podsustav s:

$$e_i = x_i - \hat{x}_i., \tag{51}$$

Tako da se može razviti dinamika pogreške observera i-tog podsustava kao sljedeća diferencijalna jednadžba, (43) i (47):

$$\dot{e}_i = (A_i - L_i S_i)e_i + h_i + B_{2i}d_i \tag{52}$$

Za cijeli sustav možemo zapisati dinamiku pogreške globalnog observera, slično kao i prethodno, (45) i (48):

$$\dot{\boldsymbol{e}} = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{LS})\boldsymbol{e} + \boldsymbol{H} + \boldsymbol{B_2 d}. \tag{53}$$

Uvrštavajući zakon upravljanja (50) u jednadžbu sustava (45), te potom spojimo s globalnim observerom (48) dobijemo dinamiku proširenog sustava:

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}} = \tilde{\boldsymbol{A}}\tilde{\boldsymbol{x}} + \tilde{\boldsymbol{\xi}} + \tilde{\boldsymbol{H}}, \tag{54}$$

gdje je:

$$\tilde{\boldsymbol{A}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} - \boldsymbol{LS} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{B_1 K} & \boldsymbol{A} - \boldsymbol{B_1 K} \end{bmatrix}, \tilde{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{e} \\ \boldsymbol{x} \end{bmatrix}, \tilde{\boldsymbol{H}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{H} \\ \boldsymbol{H} \end{bmatrix}, \tilde{\boldsymbol{\xi}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{B_2 d} \\ \boldsymbol{B_2 d} \end{bmatrix} \tag{55}$$

Problem se svodi na određivanje pojačanja upravljačke matrice $\boldsymbol{K}$=diag(K_i) i matrice observera $\boldsymbol{L}$=diag(L_i), kojima bi se cijeli sustav (54) odnosno (45), robusno stabilizirao i postigao $H\infty$ performanse unatoč spregnutim podsustavima i vanjskim poremećajima.

3.2. Teorijska razmatranja

Linearne matrične nejednadžbe (LMI) imaju formu [13]:

$$F(x) \triangleq F_0 + \sum_{i=1}^{m} x_i F_i > 0, \tag{56}$$

gdje je $x \in \boldsymbol{R}^m$ varijabla, a $F_i = F_i^T \in \boldsymbol{R}^{nxn}, i = 0, \dots, m,$ su zadane simetrične matrice. Znak nejednakosti označava pozitivnu definitost. Također može biti i semi-definitno (≥,≤). LMI, gore definirani, koristimo u procesu optimiranja, a takvo konveksno ograničenje nam daje konveksni skup $\{x|F(x) > 0\}$ što je pogodno zato što postoje alati koji efikasno rješavaju probleme konveksnog programiranja. Bitno je naglasiti da se brojna ograničenja koja se koristi u teoriji upravljanja, kao što je Lyapunovljeva nejednakost, mogu prikazati u obliku LMI (56). Također sustav više LMI-ja se može prikazati kao jedan LMI, koji je block dijagonalan oblika $\mathrm{diag}\left(F^{(1)}(x), \dots, F^{(p)}(x)\right) > 0$. Ako su matrice F_i dijagonalne, LMI (56) je set linearnih nejednadžbi. Schour komplement jedan je od važnijih alata koje znamo, koristimo ga kako bismo nelinearne nejednakosti preoblikovali u LMI, ideja je sljedeća:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x}) & \boldsymbol{S}(\boldsymbol{x}) \\ \boldsymbol{S}(\boldsymbol{x})^{\boldsymbol{T}} & \boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}) \end{bmatrix} > 0, \tag{57}$$

gdje su ***Q(x), R(x)*** simetrične matrice i ***S(x)*** afino ovisi o $\boldsymbol{x}$ jednako je:

$$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}) > 0, \qquad \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{S}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x})^{\boldsymbol{T}} > \boldsymbol{0}. \tag{58}$$

U literaturi koja je navedena nalaze se i neki primjeri, također još načina na koje neki problem možemo dovesti u željeni oblik, LMI. U idućim poglavljima neke od metoda će biti spomenute (eliminacija varijabli, zamjena varijabli). Također koristimo metode da sva ograničenja dovedemo u strikno definitnu formu.

LMIP, odnosno LMI „Problem“ nazivamo problem traženja (varijable) $\boldsymbol{x}$ koji zadovoljava ograničenja oblika LMI ili dokazivanje da takvo rješenje ne postoji.

Sustav oblika (43), zanemarimo li članove koji opisuju poremećaj i spregu podsustava, je linearni vremenski neovisni (LTI),

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_1 u, \\ y &= Sx, \end{aligned} \tag{59}$$

je stabilan, ukoliko zadovoljava nužne i dovoljne uvjete:

$$P > 0, \qquad A^T P + PA < 0. \tag{60}$$

Gore navedeni uvjet naziva se Lyapunov uvjet stabilnosti, gdje *P>0* proizlazi iz definicije Lyapunovljeve funkcije koja treba biti pozitivno efinitna:

$$V(x) = x^T P x. \tag{61}$$

U knjizi je prikazana sljedeća forma, zvana „*the bounded-real lemm*“:

$$P > 0, \qquad \begin{bmatrix} A^T P + PA + S^T S & PB + S^T D \\ B_1^T P + D^T S & D^T D - I \end{bmatrix} < 0, \tag{62}$$

gdje su *A, B, S i D,* matrice linearnog sustava, a $P=P^T$ je varijabla. Ovaj LMI ima rješenja, samo ako je njegov sustav engl. *„nonexpansive“* odnosno:

$$\int_0^T y(t)^T y(t) dt \leq \int_0^T u(t)^T u(t) dt. \tag{63}$$

Ovaj uvjet može se povezati s prijenosnom matricom sustava *H,* koja je definirana kao:

$$H = \mathrm{S}(sI - A)^{-1} B_1. \tag{64}$$

Uvjet (63) može se zapisati kao:

$$H(s) * H(s) \leq I, za\ sve\ \boldsymbol{Re}\ s < 0. \tag{65}$$

Isto se nerijetko prikazuje kao $\|H\|_\infty \leq 1$,

gdje je $\|H\|_\infty \triangleq \sup\{\|H(s)\| | \boldsymbol{Re}\ s > 0\}$, $\mathbf{H}_\infty$ *norma* prijenosne matrice *H.*

$\mathbf{L}_2$ pojačanje, može se naći u spomenutoj knjizi u poglavlju ulazno-izlazna svojstva, definirano je kao:

$$\sup_{||u||_2 \neq 0} \frac{||y||_2}{||u||_2}, \tag{66}$$

za LDI (engl. „*linear differential inclusion*“) oblika (43), sa zanemarenim članom koji opisuje sprega ubiti dobijemo LTI (engl. „*linear time-invariant systems*“), gdje je $\mathbf{L}_2$ norma od u jednaka $||u||_2^2 = \int_0^\infty u^T u \, dt$, a supremum se uzima nad svim ne negativnim trajektorijama počevši od $x(0) = 0$. Ako je $\mathbf{L}_2$ pojačanje manje od jedan kažemo da je taj LDI neekspanzivni sustav engl. „*nonexpansive*“.

U knjizi je pokazano da $\mathbf{L}_2$ je pojačanje manje od skalara γ ako zadovoljava iduće uvijete, prikazano u obliku LMI:

$$P > 0, \qquad \begin{bmatrix} A^T P + PA + S^T S & PB \\ B^T P & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0. \tag{67}$$

Minimiziranjem γ uz uvijete (67), to je EVP („*eigenvalue problem*“), dolazimo do najmanje gornje granice na $\mathbf{L}_2$ pojačanje. Uz pretpostavku da je *(A,B,S)* minimalan rješavanje gornjeg problema daje vrijednost $\mathbf{L}_2$ koja je jednaka $\mathbf{H}_\infty$ *normi* prijenosne matrice *H* istog sustava.

Upravljanje velikim sustavima nije toliko različito od upravljanja manjima. Kako je prije spomenuto u ovom radu, ako je sustav prikazan u pogodnome obliku i ukoliko više sustava „spojimo“ u jedan veliki to ne čini veliku razliku, radimo s velikim block-dijagonalnim matricama.

Prije sinteze regulatora potrebno je provjeriti upravljivost sustava, a ako se koristi i observer treba provjeriti i osmotrivost:

$$\text{rank}[A^{n-1}B_1 \;\; A^{n-2}B_1 \ldots A^2 B_1 \;\; AB_1 \;\; B_1] = n, \tag{68}$$

$$r\text{ank}[S^T \;\; A^T S^T \;\; (A^T)^2 S^T \ldots (A^T)^{n-1} S^T] = n. \tag{69}$$

Statički kontroler stanja za LTI ima oblik $u = Kx$, gjde je K matrica pojačanja kontrolera, a x vektor stanja sustava , uvrštavanjem u sustav (59) dobijemo dinamiku zatvorenog kruga:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (A + B_1)x + B_2 d, \\ y &= Sx. \end{aligned} \tag{70}$$

Kako je prije navedeno u ovome radu, tako i autori naglašavaju, da je moguće na neke nelinearne sustave primijeniti linearni statički kontroler stanja. Linearni sustav je stabilan ukoliko postoji matrica pojačanja *K* takva da zatvoreni krug (70), stabilan (60), samo što je sada matrica $A=(A+B_1)$ pa dobijemo uvjet stabilnosti:

$$P > 0, \qquad (A + B_1 K)^T P + P(A + B_1 K) < 0, \tag{71}$$

ili slično, ako postoji $Q>0$ tako da dobijemo:

$$Q(A+B_1K)^T+(A+B_1K)Q<0. \tag{72}$$

Kako su ovi uvjeti bilinearani, traži se K i P koristi se zamjena varijabli kako bi se dobio LMI. Definiramo $Y=KQ$, pa imamo $K=YQ^{-1}$ te uvrstimo u gornji uvjet pa dobijemo:

$$AQ+QA^T+B_1Y+Y^TB_1^T<0, \tag{73}$$

koji je LMI po Q i Y. Ovakva zamjena varijabli često se koristi da bi postigli LMI oblik. LTI je stabilan ako i samo ako postoji $Q>0$ i Y takav da zadovoljavaju uvjet (73). Čitatelja se upućuje na literaturu gdje je pokazano da se jednak uvjet stabilnosti može pronaći koristeći metodu eliminacije varijabli, također opisane u knjizi. Nadalje osim što želimo učiniti sustav stabilnim, često želimo postići i druge ciljeve. Tako da možemo promatrati utjecaj ulaza na stanje sustava engl. „*input-to-state*“, utjecaj stanja na izlaz sustava engl. „*state-to-output*“ ili ulazno-izlazna svojstva engl. „*input-to-output*“ svojstva, koja opisuju kako ulaz utječe na izlaz iz sustava, u knjizi su detaljno opisana sva, a u ovome radi naglasak je na zadnje navedenom. Cilj je odrediti pojačanja statičkog kontrolera K tako da se postignu odgovarajuća svojstva sustava. Kako je zadano, u radu je potrebno pronaći K takav da je zadovoljena $\mathbf{H}_\infty$ *norma* odnosno da je $\mathbf{L}_2$ pojačanje zatvorenog kruga sustava:

$$\sup_{||d||_2=1}||y||_2=\sup_{||d||_2\neq 0}\frac{||y||_2}{||d||_2}<\gamma, \tag{74}$$

Za LTI, $\mathbf{L}_2$ pojačanje sustava, odnosno $\mathbf{H}_\infty$ *norma* prijenosne funkcije je manje od γ, ako postoji matrica pojačanja statičkog kontrolera K i $Q>0$ koji zadovoljava:

$$\begin{bmatrix}(A+B_1K)Q+Q(A+B_1K)^T+B_2B_2^T & QS^T\\ SQ & -\gamma^2I\end{bmatrix}\leq 0. \tag{75}$$

Uvođenjem $Y=KQ$ slično kao (73), gornji uvjet se može zapisati kao:

$$\begin{bmatrix}AQ+QA^T+B_1Y+Y^TB_1^T+B_2B_2^T & QS^T\\ SQ & -\gamma^2I\end{bmatrix}\leq 0. \tag{76}$$

Ovo je nužan i dovoljan uvjet za LTI sustave, uz dodatne pretpostavke ovaj LMI se može zapisati u obliku Riccatijeve nejednadžbe, za više pogledati literaturu.

„LTI sustav se može stabilizirati dinamičkim kontrolerom stanja ako i samo ako se može stabilizirati statičkim kontrolerom stanja“ [13].

Za sustav koji je tema rada mogao bi se sagledati u obliku (34), odnosno u lineariziranom obliku, tako bismo dobili LTI, u čijim matricama bi bili i članovi koji opisu spreg sustava. U prijašnjim radovima na ovom sustavu pokazano je da takva linearizacija

pokazuje dobre rezultate pa bismo za takav sustav jednostavno mogli napraviti sintezu regulatora kako je prikazano u ovom poglavlju.

3.2.1. Statički regulator stanja s observerom, podešen po H∞ kriterij

Odabrano je da će se u ovome radu nelinearni član koji opisuje spreg podsustava ostaviti nelineariziran, te će se tražiti optimalan kontroler koji će stabilizirati sustav, ostvariti zadane kriterije i maksimizirati parametar kojim je spreg ograničen (44). U [11] autori se bave sustavom oblika (54) gdje su matrice sustava:

$$\widetilde{\boldsymbol{A}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} - \boldsymbol{LS} + \Delta\boldsymbol{BK} & \Delta\boldsymbol{A} - \Delta\boldsymbol{BK} \\ \boldsymbol{BK} + \Delta\boldsymbol{BK} & \boldsymbol{A} - \boldsymbol{BK} + \Delta\boldsymbol{A} - \Delta\boldsymbol{BK} \end{bmatrix}, \widetilde{\boldsymbol{H}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{H} \\ \boldsymbol{H} \end{bmatrix}, \widetilde{\boldsymbol{\xi}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{B_2 d} \\ \boldsymbol{B_2 d} \end{bmatrix}, \tag{77}$$

a , $\widetilde{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{e} \\ \boldsymbol{x} \end{bmatrix}$ vektor stanja sustava.

Odabrani **H**∞ kriterij glasi:

$$\frac{\sum_{i=1}^{N} \int_0^{\tau} e_i^T Q_i e_i dt + \sum_{i=1}^{N} \int_0^{\tau} x_i^T R_i x_i dt}{\int_0^{\tau} \widetilde{\boldsymbol{\xi}}^{\boldsymbol{T}} \widetilde{\boldsymbol{\xi}}\, dt} \leq \gamma. \tag{78}$$

Isti se može generalizirati u oblik:

$$\int_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{\tau}} \boldsymbol{e^T Q e\, dt} + \int_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{\tau}} \boldsymbol{x^T R x\, dt} = \int_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{\tau}} \widetilde{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{T}} \widetilde{\boldsymbol{Q}} \widetilde{\boldsymbol{x}}\, \boldsymbol{dt} \leq \boldsymbol{\gamma} \int_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{\tau}} \widetilde{\boldsymbol{\xi}}^{\boldsymbol{T}} \widetilde{\boldsymbol{\xi}} \boldsymbol{dt}, \tag{79}$$

gdje je τ vrijeme upravljanja, γ odabrani faktor, Q_i i R_i su simetrične pozitivno definitne matrice, težinske, kojima određujemo koliko nam je određeni parametar „bitan“, $\boldsymbol{Q}$ i $\boldsymbol{R}$ su simetrične pozitivno definitne matrice oblika $\boldsymbol{Q} = diag(Q_i)$, $\boldsymbol{R} = diag(R_i)$, a $\tilde{Q}$ je globalna matrica težinskih faktora oblika:

$$\widetilde{\boldsymbol{Q}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{Q} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{R} \end{bmatrix}. \tag{80}$$

U citiranome radu definirana je Lyapunovljeva matrica $\boldsymbol{P}$ kao blok dijagonalna matrica s Lyapunovljevim matricama obzervera i sustava na dijagonali. Postupkom koji će biti detaljnije opisan u idućem poglavlju dolazi se do sljedećeg oblika **H**∞ kriterija:

$$\begin{aligned} \int_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{\tau}} \widetilde{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{T}} \widetilde{\boldsymbol{Q}} \widetilde{\boldsymbol{x}}\, dt \leq\ & \widetilde{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{0}) \boldsymbol{P} \widetilde{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{0}) \\ & + \int_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{\tau}} \left\{ \begin{bmatrix} \widetilde{\boldsymbol{x}} \\ \widetilde{\boldsymbol{\xi}} \end{bmatrix}^{\boldsymbol{T}} \begin{bmatrix} \widetilde{\boldsymbol{A}}^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{P} + \boldsymbol{P} \widetilde{\boldsymbol{A}} + \boldsymbol{PP} + \boldsymbol{M} + \widetilde{\boldsymbol{Q}} & \boldsymbol{P} \\ \boldsymbol{P} & -\gamma \boldsymbol{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{\boldsymbol{x}} \\ \widetilde{\boldsymbol{\xi}} \end{bmatrix} \right. \\ & \left. + \boldsymbol{\rho}^{\boldsymbol{2}} \widetilde{\boldsymbol{\xi}}^{\boldsymbol{T}} \widetilde{\boldsymbol{\xi}} \right\} dt, \end{aligned} \tag{81}$$

gdje je:

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2\sum_{i=1}^{N} \alpha_i^2 I \end{bmatrix}. \tag{82}$$

Od kuda slijedi da je globalni sustav (77) stabilan u smislu Lyapunova, te postiže $\mathbf{H}_\infty$ performanse određene parametrom γ, ukoliko postoji rješenje $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^T$ koje zadovoljava nejednadžbu:

$$\begin{bmatrix} \widetilde{\boldsymbol{A}}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}\widetilde{\boldsymbol{A}} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{M} + \widetilde{\boldsymbol{Q}} & \boldsymbol{P} \\ \boldsymbol{P} & -\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{I} \end{bmatrix} \leq 0. \tag{83}$$

Uvrštavanjem (54), (80) i (82) u (83) dobivamo bilinearnu nejednadžbu (BMI) koju je potrebno dovesti u LMI. Autori su dobili minimizacijski problem, rješenjima tog problema mogu se rekonstruirati matrice pojačanja regulatora i matrica pojačanja observera. Ovim postupkom maksimiziraju se parametri koji ograničavaju spreg ustava, a minimizira se parametar ρ kako bi se postigle bolje performanse. Ovakvim postupkom u jednom koraku se dobiju svi parametri. Autori navode kako je to prednost u odnosu na prijašnje radove gdje se BMI rješava u više koraka, a algoritmi jako ovise o parametrima dobivenim u svakom koraku, pa su rješenja lošija.

U idućem poglavlju, 3.3, sinteza po gornjem principu biti će prikazana za sustav (55) koji nema članove koji opisuju nesigurnosti sustava

3.2.2. Dinamički regulator

Autor u [13] se dotaknuo teme dinamičkog kontrolera, slijedi kratko izlaganje na tu temu. Razmitrimo li opet sustav oblika (59), dobimo klasični LTI. $\mathbf{L}_2$ pojačanje odnosno H_∞norma je prikazana jednadžbom (76), ako postoje rješenja $P>0$ i Y, $\mathbf{L}_2$ norma neće preći γ. Eliminacijom varijable Y iz (76), više o toj metodi ima u istoj literaturi, dobije se ekvivalentni LMI po varijablama Q>0 i skalaru σ:

$$AQ + QA^T + B_2B_2^T + \frac{QS^TSQ}{\gamma^2} \leq \sigma B_1B_1^T. \tag{84}$$

Dinamički kontroler stanja ima oblik:

$$\dot{x}_c = A_cx_c + B_cx, \qquad u = S_cx_c + D_cx, \qquad x_c(0) = 0. \tag{85}$$

Autor je pokazao da postoje matrice $A_c, B_c, S_c\ i\ D_c$ takve da $\mathbf{L}_2$ pojačanje (70) sustava ne prelazi razinu γ ako i samo ako je nejednakost (84) zadovoljena.
Dinamika zatvorenog kruga sustava s dinamičkim kontrolerom stanja glasi:

$$\dot{x}_{cl} = A_{cl}x_{cl} + B_{cl}u, \qquad z = S_{cl}x_{cl}, \qquad x_{cl}(0) = 0, \tag{86}$$

gdje je: $x_{cl} = [x^T\ x_c^T]^T$ vektor stanja sustava s kontrolerom, a $A_{cl} = A_{big} + B_{big}K_{big}$,

$$A_{big} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B_{big} = \begin{bmatrix} 0 & B_1 \\ I & 0 \end{bmatrix}, K_{big} = \begin{bmatrix} B_c & A_c \\ D_c & S_c \end{bmatrix}, B_{cl} = \begin{bmatrix} B_2 \\ 0 \end{bmatrix}, S_{cl} = [S \quad 0].$$

Sada možemo zapisati uvjet (76) za sustav s dinamičkim regulatorom:

$$\begin{bmatrix} A_{big}^TP_{big} + P_{big}A_{big} + P_{big}B_{big}K_{big} + K_{big}^TB_{big}^TP_{big} + S_{cl}^TS_{cl} & PB_{cl} \\ B_{cl}^TP & -\gamma^2I \end{bmatrix} \leq 0. \tag{87}$$

Eliminacijom K_{big} iz gornjeg BMI-a dobiju se dva ekvivalentna LMI-a s varijablama $P_{big} > 0$ i skalarom τ. Pokazano je da zamjenom varijabli možemo doći do oblika (**84**). Što

znači da bi se rješavanjem gornjeg BMI (ili prebacivanjem u LMI) moglo doći do parametra dinamičkog kontrolera.

3.2.3. Regulator reduciranog reda

Teme regulatora reduciranog reda, odnosno reda manjeg od samog sustava dotaknuli su se autori [16]. U tome radu regulator je uobičajeni regulator stanja, veoma sličan onome opisanom u gornjem djelu ovog rada, ali se bazira na observeru koji je smanjenog reda. Pošto smo upoznati sa svojstvom separabilnosti [9], sinteza regulatora ne utječe na sintezu observera, autori su pokazali da to svojstvo vrijedi za njihov sustav

$$\dot{x}_i^R = A_i x_i^R + B_i u_i + G_i h_i(x^R), \qquad y_i^R = C_i^R x_i^R. \tag{88}$$

Kao i u prijašnjim poglavljima s x je definiran vektor stanja podsustava gornji indeks ^{R} označava da se radi o sustavu gdje se primjenjuje koncept kontrolera baziranog na observeru reduciranog reda, matrice A_i, B_i i C_i opisuju sustav, a član $G_i h_i(x^R)$ opisuje međupovezanost podsustava. Sustav se može zapisati u globalnome obliku kao i prije iz (43) u (45).

Odabrana Lyapunovljeva funkcija:

$$V = x^T P_c x + e^T P_o e, \tag{89}$$

gdje je: x vektor stanja sustava, P_c i P_o pozitivno definitne simetrične matrice i e greška observera.

Odabirom takve Lyapunovljeve funkcije te deriviranjem iste može se doći do sljedećeg izraza:

$$\dot{V} = \dot{V}_c + \dot{V}_o, \tag{90}$$

Regulatorom moramo osigurati da je $\dot{V}_c < 0$ kako bi se osigurala stabilnost sustava i postigle performanse defeinirane normom, pokazali su da je je $\dot{V}_o < 0$, što uz (90) pokazuje da sustav posjeduje gore navedeno svojstvo separabilnosti.

U ovom radu biti će prikazani njihovi rezultati vezani uz sintezu observera, za detaljniji pregled i daljnje reference pogledati navedeni izvor. Odabrani observer je reduciranog reda dizajniran prema [17].

Za i-ti sustav je definirana matrica:

$$M_i = G_i (C_i G_i)^{\mathfrak{w}}, \tag{91}$$

gdje je $(C_i G_i)^{\mathfrak{w}}$ Moore-Penrose pseudo inverz $C_i G_i$. Iz $rank C_i G_i = rank(G_i) = m_{i2}$ slijedida je $(C_i G_i)^{\mathfrak{w}} C_i G_i = I_{m_{i2}}$ pa dobijemo:

$$\left(\mathrm{I}_{\mathrm{n_i}} - M_i C_i\right) G_i = 0, \tag{92}$$

$$\aleph_i = \left(\mathrm{I}_{\mathrm{n_i}} - M_i C_i\right), \tag{93}$$

(93) je odabrana zbog smanjenja notacije. Dinamika odabranog observera je:

$$\hat{x}_i^R = q_i + M_i y_i^R, \tag{94}$$

$$\dot{q}_i = \aleph_i(A_i q_i + A_i M_i y_i^R + B_i u_i + L_i C_i(q_i + M_I y_i^R - x_i^R), \tag{95}$$

gdje je L_i matrica pojačanja observera i-tog podustava koja će se odrediti kasnije kao i početni uvjeti $q_i(t_0)$.

Pogreška observera i-tog podstava defnirama je s:

$$e_i^R = \hat{x}_i^R - x_i^R, \tag{96}$$

te nakon uvrštavanja (88), (92) i (95) dobi se dinamika pogreške observera i-tog podustava:

$$\begin{aligned} \dot{e}_i^R = \dot{\hat{x}}_i^R - \dot{x}_i^R = \dot{q}_i - \aleph_i \dot{x}_i = \aleph_i(A_i + L_i C_i)(q_i + M_i C_i x_i^R - x_i^R \\ = \aleph_i(A_i + L_i C_i) e_i^R. \end{aligned} \tag{97}$$

Iz (91) slijedi da je $\aleph_i = \aleph_i^2$, pa je $\aleph_i$ projekcijska matrica, pa postoji invertibilna matrica T_i, takva da vrijedi:

$$T_i^{-1} \aleph_i T_i = \begin{bmatrix} I_{n_i - m_{i2}} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{98}$$

Za dokaz gornje tvrdnje i upute za konstruiranje T_i pogledati reference u [16].

Primjenom matrice T_i za transformaciju vektora pogreške i dinamiku pogreške dobije se:

$$\tilde{e}_i^R = T_i^{-1} e_i^R, \tag{99}$$

$$\dot{\tilde{e}}_i^R = T_i^{-1} \aleph_i T_i T_i^{-1} (A_i + L_i C_i) T_i \tilde{e}_i^R = T_i^{-1} \aleph_i T_i \left(\widetilde{A}_\iota + \widetilde{L}_\iota \widetilde{C}_\iota\right) \tilde{e}_i^R, \tag{100}$$

gdje su :

$$\tilde{A}_i = T_i^{-1} A_i T_i = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{i11} & \tilde{A}_{i12} \\ \tilde{A}_{i21} & \tilde{A}_{i22} \end{bmatrix}, \tag{101}$$

$$\tilde{L}_i = T_i^{-1} L_i = \begin{bmatrix} \tilde{L}_{i1} \\ \tilde{L}_{i2} \end{bmatrix}, \tag{102}$$

$$\tilde{C}_i = C_i T_i = [\tilde{C}_{i1} \quad \tilde{C}_{i2}], \tag{103}$$

s $\tilde{A}_{i11} \in \mathbb{R}^{(n_i - m_{i2})\mathrm{x}(n_i - m_{i2})}, \tilde{L}_{i1} \in \mathbb{R}^{(n_i - m_{i2})\mathrm{x}p_i}, \tilde{C}_{i1} \in \mathbb{R}^{p_i \mathrm{x}(n_i - m_{i2})}$.

Nadalje, transformirani vektor pogreške može biti zapisan u obliku:

$$\tilde{e}_i^R = [\tilde{e}_{i1}^T \quad \tilde{e}_{i2}^T]^T, \tag{104}$$

gdje je $\tilde{e}_{i1}^T \in \mathbb{R}^{n_i - m_{i2}}, \tilde{e}_{i2}^T \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{m_{i2}}}$. Sada se transformirana dinamika pogreške observera (100) može zapisati u obliku :

$$\begin{bmatrix}\dot{\tilde{e}}_{i1}\\ \dot{\tilde{e}}_{i2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\tilde{A}_{i11}+\tilde{L}_{i1}\tilde{C}_{i1} & \tilde{A}_{i1}+\tilde{L}_{i1}\tilde{C}_{i2}\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{e}_{i1}\\ \tilde{e}_{i2}\end{bmatrix}. \tag{105}$$

Pokazan je da ako se odabere:

$$q_i(t_0)=\aleph_i\upsilon_i, \tag{106}$$

za proizvoljan υ_i tada je $\tilde{e}_{i2}=0\ za\ sve\ t\geq t_0$. Tada je dinamika pogreške obzervera $\dot{\tilde{\boldsymbol{e}}}_{\boldsymbol{i}}$ potpuno određena s dinamikom $\dot{\tilde{e}}_{i1}$, dakle:

$$\dot{\tilde{e}}_{i1}=\left(\tilde{A}_{i11}+\tilde{L}_{i1}\tilde{C}_{i1}\right)\tilde{e}_{i1}. \tag{107}$$

Ako je sustav osmotriv, tada se može odabrati $\tilde{L}_{i1}$, takav da je $\tilde{A}_{i11}+\tilde{L}_{i1}\tilde{C}_{i1}$ stabilno prema Hurwitzu, što garantira $\tilde{e}_{i1}(t)\to 0\ kako\ t\to\infty$. Pa ako odaberemo (107) i

$$L_i=T_i\begin{bmatrix}\tilde{L}_{i1}\\ 0\end{bmatrix}, \tag{108}$$

tada estimirana stanja $\hat{x}_i^R$, definirana s observera punog reda (94) i (95), asimptotski konvergiraju k stanjima sustava $\hat{x}_i^R\to x_i^R\ kako\ t\to\infty$. Ovime je pokazano da je dinamika pogreške observera potpuno određena s dinamikom (107) koja je dimenzije (n_i-m_{i2}). Što bi značilo da je moguće rekonstruirati puni observer sa samo (n_i-m_{i2}) stanja.

Ako sada tranformiramo dinamiku punog observera (95) na način kao u (99) dobije se:

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{q}}_i&=T_i^{-1}\aleph_iT_iT_i^{-1}(A_iT_iq_i+A_iM_iy_i^R+B_iu_i+L_i(C_iT_i\tilde{q}_i+C_iM_iy_i^R-y_i^R)) \qquad (109)\\ &=T_i^{-1}\aleph_iT_i(T_i^{-1}A_iT_i+T_i^{-1}L_iC_iT_i)\tilde{q}_i+T_i^{-1}\aleph_iT_iT_i^{-1}(A_iM_i\\ &-L_i+L_iC_iM_i)y_i^R+T_i^{-1}\aleph_iT_iT_i^{-1}B_iu_i.\end{aligned}$$

Uz notaciju iz (101), (102) i (103) gornji izraz se može kompaktnije zapisati:

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{q}}_i&=T_i^{-1}\aleph_iT_i\left(\tilde{A}_i+\tilde{L}_i\tilde{C}_i\right)\tilde{q}_i \qquad (110)\\ &+T_i^{-1}\aleph_iT_iT_i^{-1}\left[B_iu_i+\left(A_iM_i-T_i\tilde{L}_i\left(I_{pi}-C_iM_i\right)\right)y_i^R\right].\end{aligned}$$

Sada se može, slično kao i ranije u ovom odlomku odabere $\tilde{q}_i=[\tilde{q}_{i1}^T\ \tilde{q}_{i2}^T]^T$, gdje je $\tilde{q}_{i1}^T\in\mathbb{R}^{n_i-m_{i2}}, \tilde{q}_{i2}^T\in\mathbb{R}^{\boldsymbol{m_{i2}}}$. Iz (97) i (110) slijedi da je $\dot{\tilde{q}}_{i2}(t)=0$, što znači da ako odaberemo $\tilde{q}_{i2}(t_0)=0$, garantiramo $\tilde{q}_{i2}(t)=0$ za $t\geq t_0$. Što u biti znači da možemo izbaciti m_{i2} stanja iz dinamike observera (110).

Observer reduciranog reda za i-ti sustav sada glasi:

$$\hat{x}_i^R=T_i\lambda_iq_i+M_iy_i^R, \tag{111}$$

$$\dot{\tilde{q}}_i=\left(\tilde{\mathrm{A}}_\mathrm{i}+\tilde{\mathrm{L}}_\mathrm{i}\tilde{\mathrm{C}}_\mathrm{i}\right)\tilde{\mathrm{q}}_\mathrm{i}+\lambda_i^TT_i^{-1}\left(\tilde{G}_iy_i^R+B_iu_i\right), \tag{112}$$

gdje je:

$$\tilde{q}_{i1}(t_0)=\lambda_i^TT_i^{-1}q_i(t_0), \tag{113}$$

$$\tilde{G}_i = A_i M_i - T_i \tilde{L}_i \left(I_{pi} - C_I M_i\right), \lambda_i = \begin{bmatrix} I_{n_i - m_{i2}} & 0 \end{bmatrix}^T. \tag{114}$$

Dakle dobiveni observer treba $(n_i - m_{i2})$ ulaza kako bi estimirao n_i stanja. Na svom primjeru autori su pokazali djelotvornost ovakvog observera, postigli su da estimira vektor stanja gotovo savršeno, za većinu stanja estimat je jednak stvarnoj veličini unutar jedne sekunde.

3.3. Sinteza zakona upravljanja

Cilj rada je napraviti kontroler koji će stabilizirati prošireni sustav (54) i postići performanse zadane H∞ kriterijem. Kao što je već ranije napomenuto, sinteza se bazira na rezultatima rada [11].

Autori su odabrali (78) kao **H**∞ kriterij, ako se razmotre i početni uvjeti nejednakost (79) se može zapisati kao:

$$\int_0^\tau \tilde{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{T}} \tilde{\boldsymbol{Q}} \tilde{\boldsymbol{x}}\, dt \leq \tilde{\boldsymbol{x}}^T(0) \boldsymbol{P} \tilde{\boldsymbol{x}}(0) + \gamma^2 \int_0^\tau \tilde{\boldsymbol{\xi}}^{\boldsymbol{T}} \tilde{\boldsymbol{\xi}} dt, \tag{115}$$

gdje je P pozitivno definitna Lyapunovljeva matrica oblika:

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} P_o & 0 \\ 0 & P_c \end{bmatrix}, \tag{116}$$

a $P_o = \mathrm{diag}(P_{oi})$ i $P_c = \mathrm{diag}(P_{ci})$ pozitivno definitne simetrične Lyapunovljeve matrice obzervera i regulatora.

Razvojem nejednadžbe (115) s obzirom na dinamiku sustava (54) dobije se:

$$\begin{aligned} \int_0^\tau \tilde{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{T}} \tilde{\boldsymbol{Q}} \tilde{\boldsymbol{x}}\, dt &= \tilde{\boldsymbol{x}}^T(0) \boldsymbol{P} \tilde{\boldsymbol{x}}(0) - \tilde{\boldsymbol{x}}^T(\tau) \boldsymbol{P} \tilde{\boldsymbol{x}}(\tau) \\ &+ \int_0^\tau \left\{ \frac{\tilde{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{T}} \tilde{\boldsymbol{Q}} \tilde{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{d}[\tilde{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{P} \tilde{\boldsymbol{x}}(t)]}{dt} \right\} dt \\ &\leq \tilde{\boldsymbol{x}}^T(0) \boldsymbol{P} \tilde{\boldsymbol{x}}(0) + \int_0^\tau \left\{ \tilde{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{T}} \tilde{\boldsymbol{Q}} \tilde{\boldsymbol{x}} + \dot{\tilde{\boldsymbol{x}}}^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{P} \tilde{\boldsymbol{x}} + \tilde{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{P} \dot{\tilde{\boldsymbol{x}}} \right\} dt. \end{aligned} \tag{117}$$

Kako bi se došlo do uvjeta stabilnosti potrebno je razviti izraz $\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}}^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{P} \tilde{\boldsymbol{x}} + \tilde{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{P} \dot{\tilde{\boldsymbol{x}}}$**.** Odabirom Lyapunovljeve funkcije oblika:

$$\boldsymbol{V} = \tilde{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{P} \tilde{\boldsymbol{x}}. \tag{118}$$

Sustav (**54**) je stabilan ako je derivacija Lyapunovljeve funkcije negativno definitna:

$$\dot{\boldsymbol{V}} = \dot{\tilde{\boldsymbol{x}}}^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{P} \tilde{\boldsymbol{x}} + \tilde{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{P} \dot{\tilde{\boldsymbol{x}}} < 0. \tag{119}$$

Razvojem jednadžbe (**119**) postiže se:

$$\dot{\boldsymbol{V}} = \tilde{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{T}} \left[\dot{\tilde{\boldsymbol{A}}} \boldsymbol{P} + \boldsymbol{P} \tilde{\boldsymbol{A}} \right] \tilde{\boldsymbol{x}} + \tilde{\boldsymbol{H}}^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{P} \tilde{\boldsymbol{x}} + \tilde{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{P} \tilde{\boldsymbol{H}} + \tilde{\boldsymbol{\xi}}^T \boldsymbol{P} \tilde{\boldsymbol{x}} + \tilde{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{P} \tilde{\boldsymbol{\xi}}. \tag{120}$$

Kako bi se došlo do kvadratne forme (119), koristi se sljedeća Lema, pogledati izvor za dodatne reference:

Lema 1. *Za neke matrice X, Y* i $\Gamma = \Gamma^T > 0$ *prikladnih dimenzija i za pozitivnu konstantu* ρ, *imamo:*

$$X^T Y + Y^T X \leq X^T \Gamma X + Y^T \Gamma^{-1} Y, \tag{121}$$

$$X^T Y + Y^T X \leq \rho X^T X + \rho^{-1} Y^T Y. \tag{122}$$

Od kuda slijedi:

$$\widetilde{\boldsymbol{H}}^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{P} \widetilde{\boldsymbol{x}} + \widetilde{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{P} \widetilde{\boldsymbol{H}} \leq \widetilde{\boldsymbol{H}}^{\boldsymbol{T}} \widetilde{\boldsymbol{H}} + \widetilde{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{P} \boldsymbol{P} \widetilde{\boldsymbol{x}} \leq \widetilde{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{T}} [\boldsymbol{M} + \boldsymbol{P} \boldsymbol{P}] \widetilde{\boldsymbol{x}}, \tag{123}$$

gdje je

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2\sum_{i=1}^{N} \alpha_i^2 I \end{bmatrix}. \tag{124}$$

Tako da sada uvjet stabilnosti glasi:

$$\widetilde{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{T}} \left[\widetilde{\boldsymbol{A}}^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{P} + \boldsymbol{P} \widetilde{\boldsymbol{A}} + \boldsymbol{M} + \boldsymbol{P} \boldsymbol{P} \right] \tilde{x} + \tilde{\boldsymbol{\xi}}^T \boldsymbol{P} \widetilde{\boldsymbol{x}} + \widetilde{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{P} \tilde{\boldsymbol{\xi}} < 0. \tag{125}$$

Također **H**∞ kriterij (117) se može prikazati u formi:

$$\int_0^\tau \widetilde{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{T}} \widetilde{\boldsymbol{Q}} \widetilde{\boldsymbol{x}} \, dt \leq \widetilde{\boldsymbol{x}}^T(0) \boldsymbol{P} \widetilde{\boldsymbol{x}}(0) + \int_0^\tau \left\{ \widetilde{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{T}} \widetilde{\boldsymbol{Q}} \widetilde{\boldsymbol{x}} + \dot{\widetilde{\boldsymbol{x}}}^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{P} \widetilde{\boldsymbol{x}} + \widetilde{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{P} \dot{\widetilde{\boldsymbol{x}}} + \gamma^2 \tilde{\boldsymbol{\xi}}^T \tilde{\boldsymbol{\xi}} - \gamma^2 \tilde{\boldsymbol{\xi}}^T \tilde{\boldsymbol{\xi}} \right\} dt. \tag{126}$$

Sada se iskoristi rezultat (125) kako bi se **H**∞ kriterij prikazao u sljedećem obliku:

$$\int_0^\tau \widetilde{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{T}} \widetilde{\boldsymbol{Q}} \widetilde{\boldsymbol{x}} \, dt \leq \widetilde{\boldsymbol{x}}^T(0) \boldsymbol{P} \widetilde{\boldsymbol{x}}(0) + \int_0^\tau \left\{ \begin{bmatrix} \widetilde{\boldsymbol{x}} \\ \tilde{\boldsymbol{\xi}} \end{bmatrix}^{\boldsymbol{T}} \begin{bmatrix} \widetilde{\boldsymbol{A}}^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{P} + \boldsymbol{P} \widetilde{\boldsymbol{A}} + \boldsymbol{M} + \boldsymbol{P} \boldsymbol{P} + \widetilde{\boldsymbol{Q}} & \boldsymbol{P} \\ \boldsymbol{P} & -\gamma \boldsymbol{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{\boldsymbol{x}} \\ \tilde{\boldsymbol{\xi}} \end{bmatrix} \right\} dt. \tag{127}$$

Sada imamo, ako je $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}^{\boldsymbol{T}} > \boldsymbol{0}$ rješenje matrične nejednadžbe:

$$\begin{bmatrix} \widetilde{\boldsymbol{A}}^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{P} + \boldsymbol{P} \widetilde{\boldsymbol{A}} + \boldsymbol{M} + \boldsymbol{P} \boldsymbol{P} + \widetilde{\boldsymbol{Q}} & \boldsymbol{P} \\ \boldsymbol{P} & -\gamma \boldsymbol{I} \end{bmatrix} < 0, \tag{128}$$

Tada je sustav (**54**) stabilan i postiže **H**∞ performanse određene s parametrom γ.

Razvojem nejedndžbe (128) s obzirom na (54), (80), (116) i (124) dobije se:

$$\begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & P_o & 0 \\ X_{12}^T & X_{22} & 0 & P_c \\ P_o & 0 & -\gamma I & 0 \\ 0 & P_c & 0 & -\gamma I \end{bmatrix} < 0, \tag{129}$$

gdje je: $X_{11} = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{LS})^{\boldsymbol{T}} P_o + P_o(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{LS}) + P_o P_o + \boldsymbol{Q}, X_{12} = \boldsymbol{K^T B_1^T} P_c$ i $X_{22} = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B_1 K})^{\boldsymbol{T}} P_c + P_c(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B_1 K}) + P_c P_c + R + 2\sum_{i=1}^{N} \alpha^2 I$.

Važno je napomenuti da je nejednadžba (129) bilinearna matrična nejednadžba (BMI) što se vidi iz nekoliko članova koji sadrže po dva parametra P_o, P_c, L, K i α .

Da bismo došli do željenog oblika, LMI, potrebno je nejednadžbu (129) presložiti tako da napravimo transformaciju kongruencije s matricom punog reda oblika:

$$\begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}. \tag{130}$$

Time se dobije:

$$\begin{bmatrix} X_{11} & P_o & X_{12} & 0 \\ P_o & -\gamma^2 I & 0 & 0 \\ X_{12}^T & 0 & X_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma I \end{bmatrix} < 0. \tag{131}$$

Sada s ciljem smanjenja nelinearnih članova potrebno je nejednadžbu (130) pomnožiti s lijeve i desne strane s $\mathrm{diag}(W, W, W, I)$ gdje je $W = P_c^{-1}$ i zamjenom varijabli $Y = KW$ i $Z = P_o L$. Pa se dobije nejednadžba:

$$\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & Y^T B_1^T & 0 \\ T_{21} & T_{22} & 0 & 0 \\ BY & 0 & [\boldsymbol{T}_2] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma I \end{bmatrix} < 0, \tag{132}$$

gdje je:

$$[\boldsymbol{T}_1] = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W & 0 \\ 0 & W \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Lambda} & P_o \\ P_o & -\gamma I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W & 0 \\ 0 & W \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\Lambda} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}} P_o P_o \boldsymbol{A} - \boldsymbol{S}^T Z^T - Z\boldsymbol{S} + P_o P_o + \boldsymbol{Q},$$

$$[\boldsymbol{T}_2] = W\boldsymbol{A}^T + \boldsymbol{A}W - Y^T \boldsymbol{B}_1^T - \boldsymbol{B}\, Y + I + W\boldsymbol{R}W + 2\sum_{i=1}^{N} \alpha_i^2 WW.$$

Sada se može vidjeti da su nelinearni članovi u blok dijagonalnim matricama $[T_1]$ i $[T_2]$. Potrebno je te blok dijagonalne matrice pretvoriti u LMI kako bi i nejednadžba (132) bila LMI. U tu svrhu koristi se sljedeća Lema:

Lema 2. *Neka je matrica ϕ negativno definitna i matrica X prikladnih veličina tako da je $X^T \phi X \leq 0$. Tada, $\exists \beta \in \mathbb{R}$ takav da je iduća nejednakost zadovoljena:*

$$X^T \phi X \leq -\beta(X^T + X) - \beta^2 \phi^{-1}. \tag{133}$$

Od kuda slijedi:

$$[T_1] \leq -2\beta \begin{bmatrix} W & 0 \\ 0 & W \end{bmatrix} - \beta^2 \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Lambda} & P_o \\ P_o & -\gamma I \end{bmatrix}^{-1}. \tag{134}$$

Sada se nejednakost (134) može transformirati u sljedeći oblik primjenom Schurovog komplementa:

$$[T_1] \leq \begin{bmatrix} -2\beta W & 0 & \beta I & 0 \\ 0 & -2\beta W & 0 & \beta I \\ \beta I & 0 & \boldsymbol{\Lambda} & P_o \\ 0 & \beta I & P_o & -\gamma I \end{bmatrix}. \tag{135}$$

Kako bi se došlo do LMI-a potrebno je presložiti nejednakost (135) primjenom Schurovog komplementa kako bi se dobilo:

$$CC_{11} \leq \begin{bmatrix} -2\beta W & 0 & \beta I & 0 \\ 0 & -2\beta W & 0 & \beta I \\ \beta I & 0 & \boldsymbol{\Lambda_1} & P_o \\ 0 & \beta I & P_o & -\gamma I \end{bmatrix}, \tag{136}$$

gdje je $\boldsymbol{\Lambda_1} = P_o\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^T P_o - S^T Z^T - ZS + \boldsymbol{Q}$.

Slično kao i u prethodnome koraku da bi se $[\boldsymbol{T}_2]$ transformirao u LMI koristi se Schurov komplement, pa dobijemo:

$$CC_{22} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Lambda_2} & W & W & W & W & I \\ W & -\boldsymbol{R^{-1}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ W & 0 & -0{,}5\rho_1 \mathrm{I} & 0 & 0 & 0 \\ W & 0 & 0 & -0{,}5\rho_2 \mathrm{I} & 0 & 0 \\ W & 0 & 0 & 0 & -0{,}5\rho_3 \mathrm{I} & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma I \end{bmatrix} < 0, \tag{137}$$

gdje je $\boldsymbol{\Lambda_2} = W\boldsymbol{A^T} + \boldsymbol{A}W - Y^T\boldsymbol{B_1^T} - \boldsymbol{B_1}Y + I$ i $\rho_i = \frac{1}{\alpha_i^2}, i = 1, \dots, N$.

Ovako se dobije LMI oblika:

$$\begin{bmatrix} CC_{11} & CC_{12} \\ CC_{12}^T & CC_{22} \end{bmatrix} < 0, \tag{138}$$

gdje su CC_{11} i CC_{22} definirane s (136) i (137), a CC_{12} ima oblik:

$$CC_2 = \begin{bmatrix} Y^T\boldsymbol{B}_1^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} < 0. \tag{139}$$

Gornji LMI (138) je ekvivalentan nejednadžbi (132).

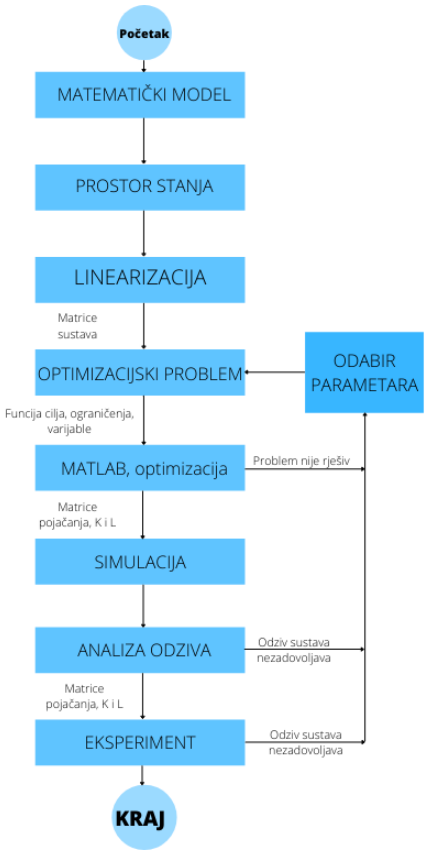
Matrice pojačanja regulatora i observera rekonstruiraju se iz rezultata dobivenih rješavanjem (138), $\boldsymbol{K} = YW^{-1}$ i $\boldsymbol{L} = P_o^{-1}Z$.

Gore definirani ρ_i služi kako bi minimizacijom njega u biti maksimizirali parametar α_i koji je ograničenje na spreg podsustava, a da je pritom sustav stabilan. Također minimizacijom

γ osiguravamo bolje performanse. Sada sintezu robusnog decentraliziranog zakona upravljanja i observera možemo opisati kao minimizacijski problem:

$$\left\{ \begin{array}{c} \min \gamma + \sum_{i=1}^{N} \rho_i \,. \\ st.\ P_o = P_o^T > 0, W = W^T, (\mathbf{138}) \end{array} \right\}. \tag{140}$$

Na donjoj slici [Slika 15] je prikazan dijagram toka, neki njegovi dijelovi su objašnjeni u prijašnjim poglavljima, a u ovom poglavlju ukratko je opisan dio „OPTIMIZACIJSKI PROBLEM“ i „MATLAB, optimizacija“.



Slika 15 Dijagram toka

Optimizacijski problema (140), rješavan je u Matlabu uz pomoć YALMIP toolboxa za optimizaciju. YALMIP služi kako bismo lako definirali varijable, ograničenja, funkciju cilja, toolbox pripremi problem za neki od rješavača koji mu je dostupan. U ovom radu korišten je MOSEK.

```
W = sdpvar(n,n);        %optimizacijske varijablr (Yalmip)
Y = sdpvar(3,n, 'full');
Z = sdpvar(12,6, 'full');
% W = inv(Pc);
ro = sdpvar(1);
Po = sdpvar(n,n);

gama1 = sdpvar(1);
gama2 = sdpvar(1);
gama3 = sdpvar(1);
```

Slika 16 Definiranje optimizacijskih varijabli

Gornja slika [Slika 16] prikazuje dio Matlab koda u kojemu su definirane optimizacijske varijable oblika sdpvar, YALMIP varijable. U matlab kodu varijable *gamma#* opisuju parametre ρ_i, a parametar

```
Q =  100*diag([1 1 1 1 100 100 1 1 1 1 1 1]);
R =  100*diag([50 30 50 30 100 80 1 1 1 1 1 1])^-1;
beta = 20;      %neki realni
```

Slika 17 Parametri optimizacije

Gornja slika [Slika 17] prikazuje implementaciju parametara optimizacije u kod, parametri Q i R često na se nazivaju težinski faktori.

```
ogr = [CC<=0, W>=0, Po>=0];
fcilja = ro+gama1+gama2+gama3;
options = sdpsettings('solver','mosek');
diagnostica = optimize(ogr,fcilja,options)
```

Slika 18 YALMIP, definiranje problema

Gornja slika [Slika 18] prikazuje kako su zadana ograničenja, funkcija cilja, postavke optimizacijskog proces (odabran je Mosek kao rješavač) te je pokrenut sam proces optimizacije, odnosno traženja rješenja.

Na idućim slikama prikazane su poruke koje se mogu vidjeti u Matlabu tokom i nakon traženja optimuma. Donja slika [Slika 19] prikazuje poruku predprocesora, YALMIP-a, nakon uspješne optimizacije, da algoritam nije mogao naći rješenja javio bi grešku „Infeasible problem“.

```
yalmipversion: '20200930'
matlabversion: '8.5.0.197613 (R2015a)'
   yalmiptime: 1.4914
   solvertime: 0.9606
         info: 'Successfully solved (MOSEK)'
      problem: 0
```

Slika 19 YALMIP poruka nakon uspješne optimizacije

Donja slika [Slika 20] prikazuje poruku rješavača, vidi se kakvo je pronađeno rješenje te koji algoritam koristio, u ovom slučaju Interior-point.

```
Interior-point solution summary
  Problem status  : PRIMAL_AND_DUAL_FEASIBLE
  Solution status : OPTIMAL
  Primal.  obj: -7.4038798752e+02   nrm: 8e+02    Viol.  con: 2e-07    barvar: 0e+00
  Dual.    obj: -7.4038798450e+02   nrm: 1e+04    Viol.  con: 0e+00    barvar: 1e-10
Optimizer summary
  Optimizer                 -                        time: 0.80
    Interior-point          - iterations : 21        time: 0.75
      Basis identification  -                        time: 0.00
        Primal              - iterations : 0         time: 0.00
        Dual                - iterations : 0         time: 0.00
        Clean primal        - iterations : 0         time: 0.00
        Clean dual          - iterations : 0         time: 0.00
    Simplex                 -                        time: 0.00
      Primal simplex        - iterations : 0         time: 0.00
      Dual simplex          - iterations : 0         time: 0.00
    Mixed integer           - relaxations: 0         time: 0.00
```

Slika 20 Mosek poruka nakon završetka algoritma

Na kraju je još potrebno rekonstruirati matrice pojačanja observera i regulatora, kako je objašnjeno prije u poglavlju. Donja slika [Slika 21] prikazuje kako je to učinjeno u Matlabu, rješenja optimizacije *Y, W, P* i *Z,* potrebno je pretvoriti u format double.

```
K = double(Y)*inv(double(W))
Lo = inv(double(Po))*double(Z)
```

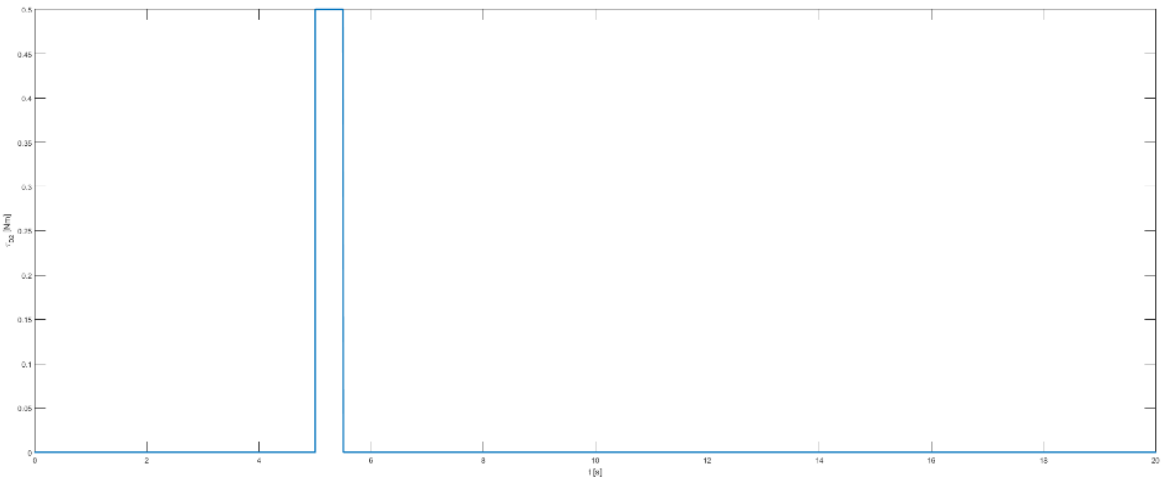
Slika 21 Rekonstrukcija pojačanja

4. SIMULACIJSKI I EKSPERIMENTALNI REZULTATI

U ovome poglavlju biti će prikazani simulacijski i eksperimentalni rezultati, svaki u svojem pod poglavlju. Razlog tomu je što je teško, gotovo nemoguće, odrediti koliki je bio poremećaj kada ga radimo ručno.

4.1. Simulacijski rezultati

Simulacije odziva sustava provodile su se u Matlabu, pogledati kod u dodatku. Prikazane simulacije su rađene na nelinearnom modelu (ODEseesaw.m). Trajanje simulacija je 20 sekundi, to je više nego dovoljno vremena da se sustav stabilizira s nultim početnim uvjetima i poremećajem i s početnim uvjetima ($\neq 0$) i poremećajem. Prije grafičkih rezultata svake simulacije biti će prikazani odabrani slobodni parametri, za taj slučaj, β, Q i R, te optimalne varijable $\rho_1, \rho_1, \rho_1, \gamma,$ pojačanja K i L u tablicama.



Slika 22 Poremećaj 0,5 Nm, trajanje 0,5s

U prvome dijelu ovog poglavlja na sustav s nultim početnim uvjetima će djelovati poremećaj prikazana na gornjoj slici [Slika 22], na podsustav 2 (srednji). Namještanjem slobodnih parametara cilj je postići povoljan odziv (bez oscilacija, dovoljno brz, itd.), upravljačke veličine realnih vrijednosti (napon motora < 6 V). Odabiru se parametri koji postižu zadovoljavajući odziv, te se daljnje simulacije provode za taj skup parametara. Nakon toga slijede simulacije koje će pokazati utjecaj nekih parametara sustava (*koeficijent trenja u zglobu* i *konstanta opruge)* na odziv. Posljednji set simulacija pokazuje kako sustav reagira na različite početne uvijete i vanjske poremećaje.

Slučaj 1

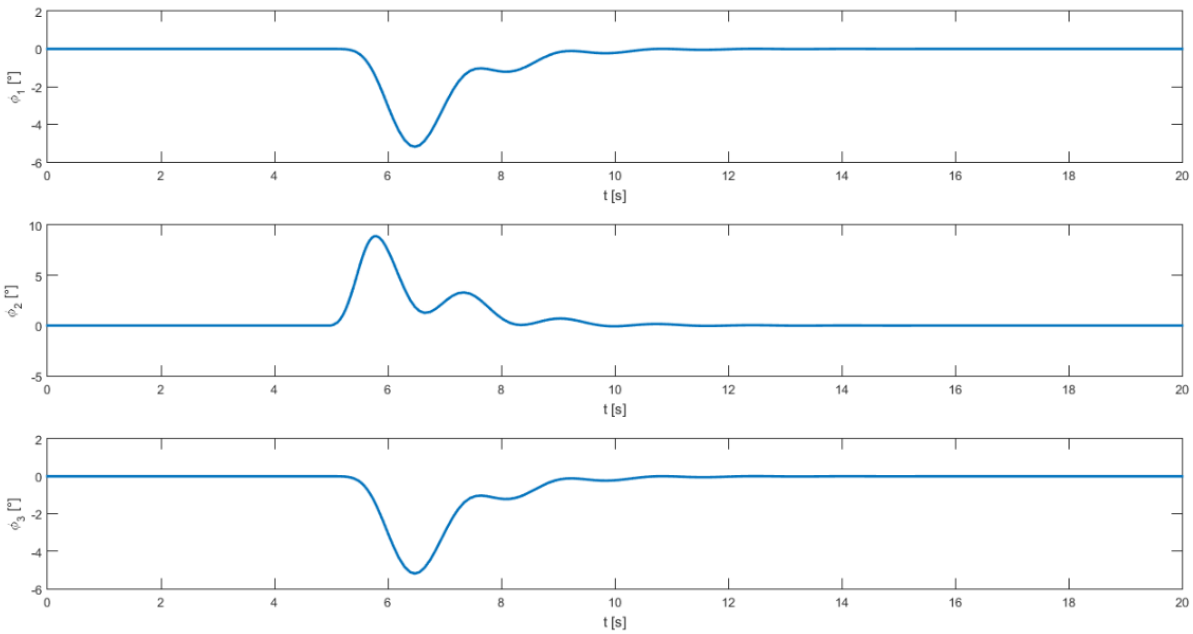
Tablica 2 Parametri za slučaj 1

$\boldsymbol{Q} = 100 \cdot \mathrm{diag}([1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1])$
$\boldsymbol{R} = 100 \cdot \mathrm{diag}([1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1)]$
$\beta = 20$

[Tablica 2] prikazuje odabrane parametre za slučaj 1, dok su u tablici ispod [Tablica 3] pokazuje rezultate optimizacije. Dobivena pojačanja koriste se za simuliranje odziva.

Tablica 3 Optimalne varijable za slučaj 1

$\gamma = 174{,}6693$	$\rho_1 = 76{,}5800$	$\rho_2 = 76{,}5800$	$\rho_3 = 76{,}5800$
$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} -385{,}96 & 282{,}24 & 0 & 0 & 0 & 0 & -123{,}26 & 32{,}63 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -385{,}96 & 282{,}24 & 0 & 0 & 0 & 0 & -123{,}26 & 32{,}63 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -85{,}96 & 282{,}24 & 0 & 0 & 0 & 0 & -123{,}26 & 32{,}63 \end{bmatrix}$			
$\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} 13{,}76 & -18{,}91 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8{,}97 & 4{,}45 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 13{,}76 & -18{,}91 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8{,}97 & 4{,}45 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 13{,}76 & -18{,}91 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8{,}97 & 4{,}45 \\ 54{,}52 & -55{,}28 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -7{,}86 & -0{,}03 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 54{,}52 & -55{,}28 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7{,}86 & -0{,}03 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 54{,}52 & -55{,}28 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -7{,}86 & -0{,}03 \end{bmatrix}$			



Slika 23 Kut zakreta, slučaj 1

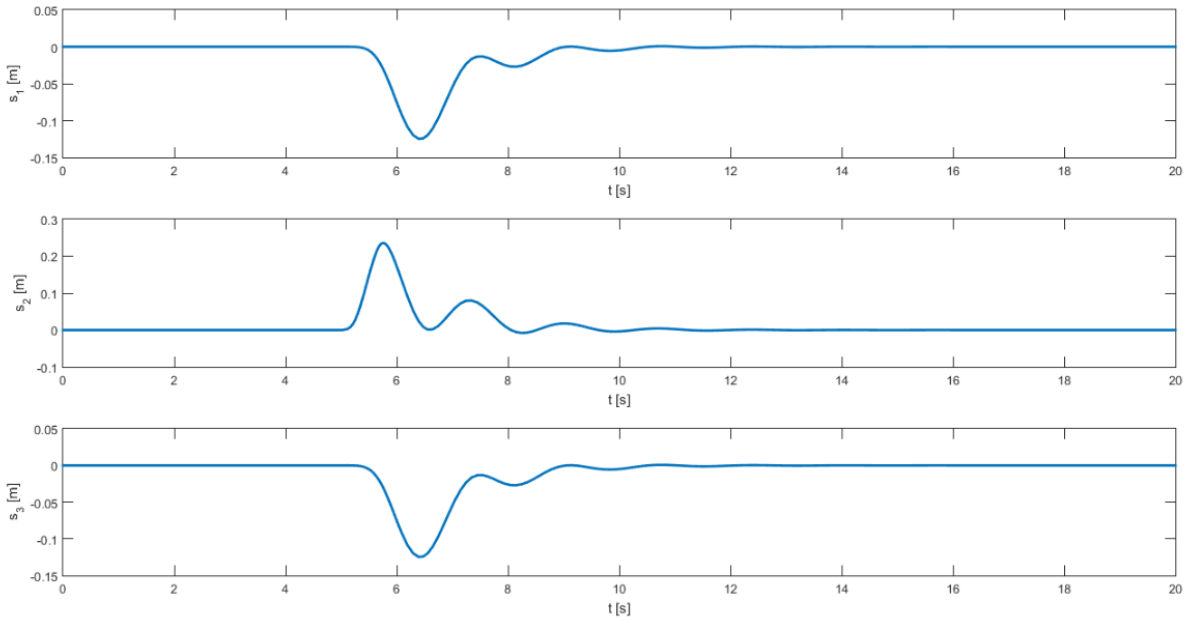
[Slika 23] prikazuje kut zakreta svakog podsustava, može se vidjeti da zbog inercije sustava, podsustavi 1 i 3 budu pobuđeni kada poremećaj na podsustavu 2 prestane djelovati.

Zbog toga je za očekivati da će u svim grafovima biti vidljivo to kašnjenje. Otklon podsustava 2 je razmjerno velik, linearizacija oko ravnotežnog položaja vrijedi za male pomake oko ravnotežnog položaja, no kako su podsustavi spregnuti, klackalica brzo dolazi do okoline radne točke. Sustav se stabilizirao unutar pet sekundi uz veoma mali, gotovo zanemariv prebačaj (naginjanja u drugom smjeru).

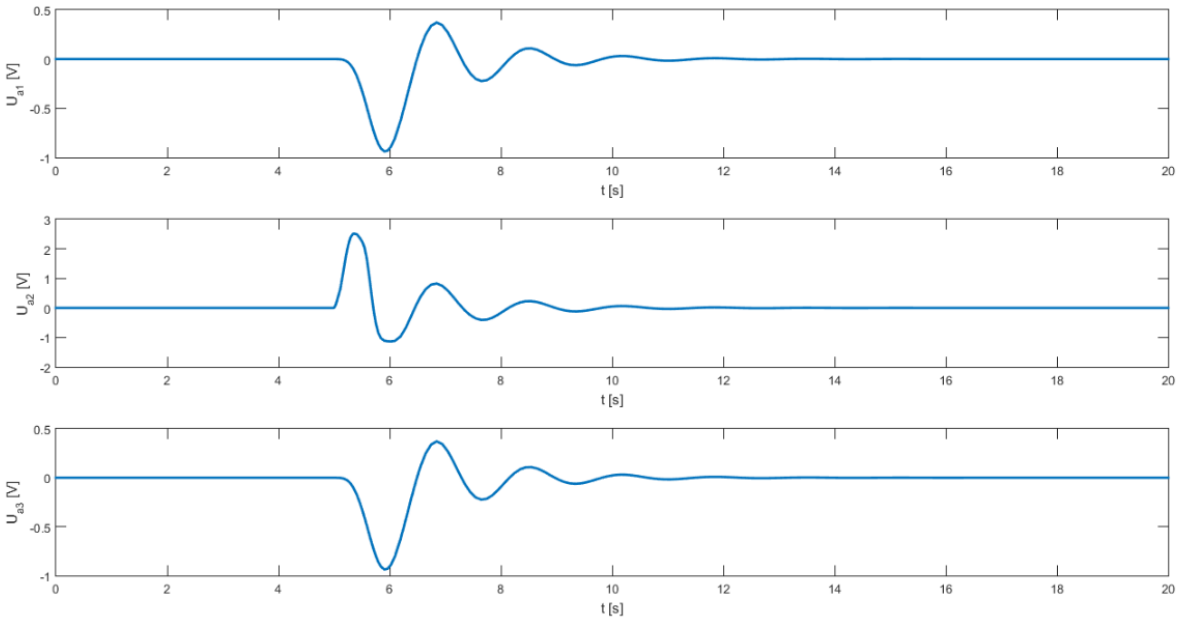
[Slika 24] pokazuje pomak kolica svakog podsustava, očekivano podsustav 2 ima najveću amplitudu. Oscilacije nisu velik ni dugotrajne. Pomaci kolica su u dozvoljenom rasponu.

[Slika 25] prikazuje upravljačke varijable svih podsustava, sve su unutar dozvoljenog raspona što bi značilo da bi se pojačanja regulatora mogla povećati kako bi se dobio brži odziv. Frekvencija nije velika, niti nema velikih amplituda što je povoljno u pogledu implementacije na stvarnom sustavu.

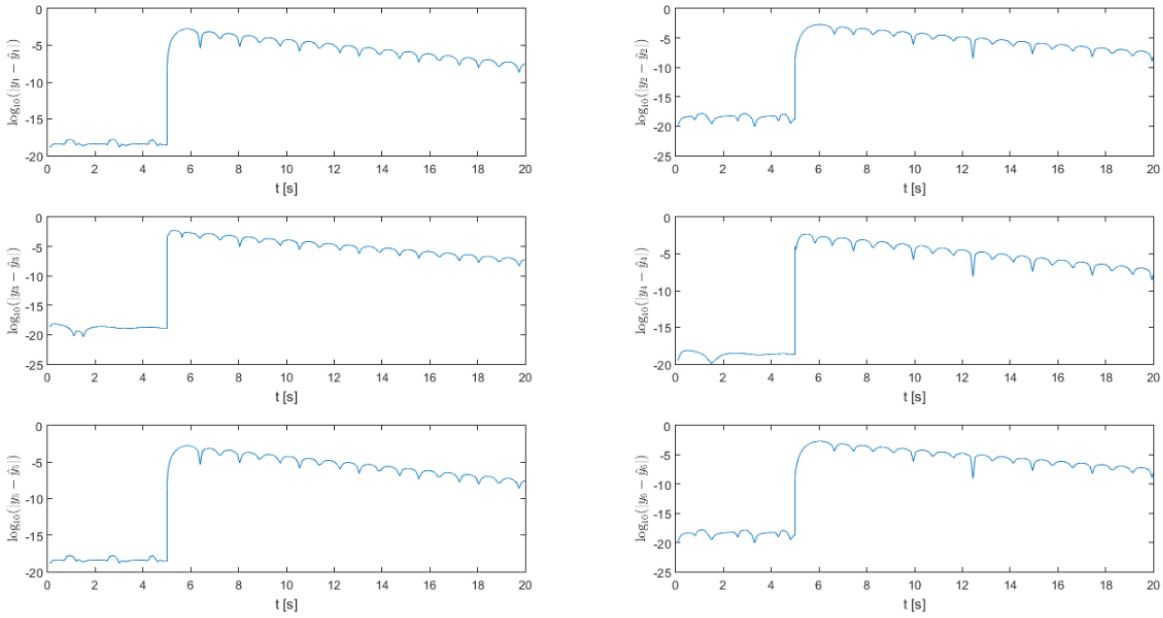
[Slika 26] prikazuje grešku observera u logaritamskom mjerilu, najveća greška je reda 10^{-2} što je prihvatljivo, ali moglo bi se poboljšati povećanjem težinskih faktora u Q. Očekivano je najveća greška na podsustavu gdje se desio poremećaj.



Slika 24 Pomak kolica, slučaj 1



Slika 25 Upravljačke varijable, slučaj 1



Slika 26 Greška observera, slučaj 1

Slučaj 2

Tablica 4 Parametri za slučaj 2

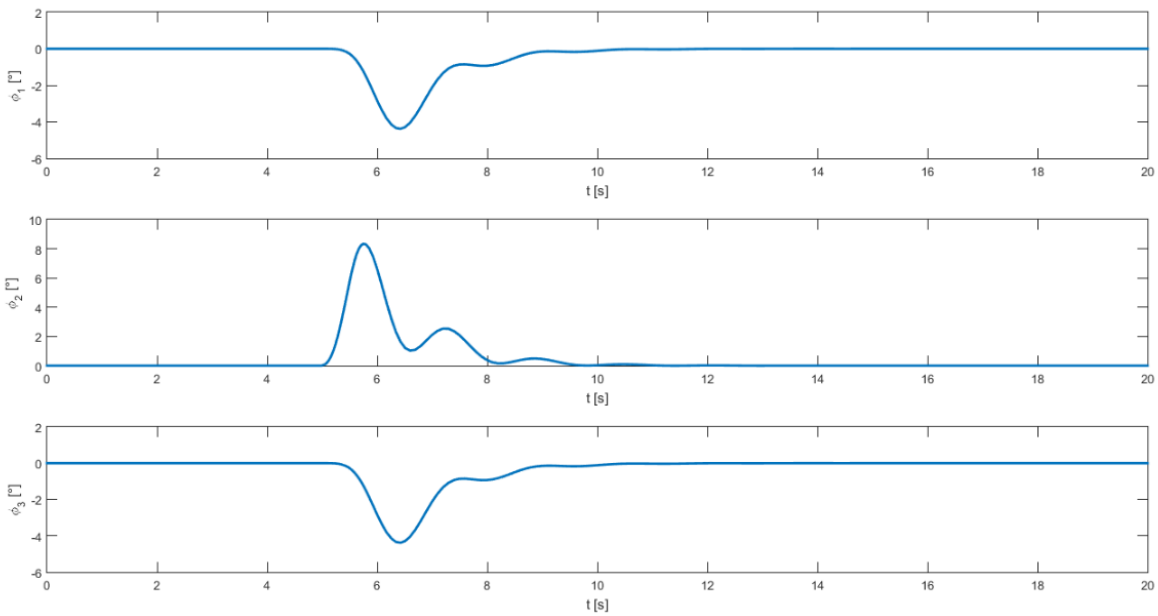
$\boldsymbol{Q} = 100 \cdot \mathrm{diag}([1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1])$
$\boldsymbol{R} = 100 \cdot \mathrm{diag}([1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1)]$
$\beta = 10$

[Tablica 4] prikazuje odabrane parametre za slučaj 2, razlika u odnosu na slučaj 1 je u parametru β. [Tablica 5] pokazuje rezultate optimizacije. Dobivena pojačanja koriste se za simuliranje odziva.

Tablica 5 Optimalne varijable za slučaj 2

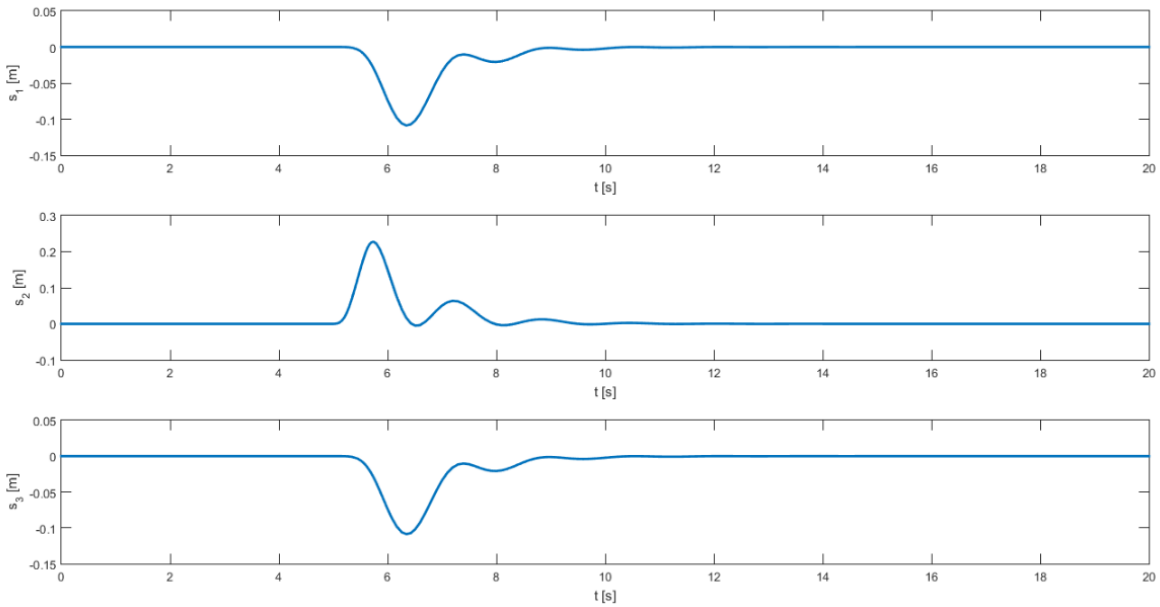
$\gamma = 145{,}1334$	$\rho_1 = 103{,}0349$	$\rho_2 = 103{,}0349$	$\rho_3 = 103{,}0349$
$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} -192{,}11 & 141{,}74 & 0 & 0 & 0 & 0 & -61{,}18 & 17{,}06 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -192{,}11 & 141{,}74 & 0 & 0 & 0 & 0 & -61{,}18 & 17{,}06 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -192{,}11 & 141{,}74 & 0 & 0 & 0 & 0 & -61{,}18 & 17{,}06 \end{bmatrix}$			
$\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} 46{,}99 & -33{,}11 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 9{,}80 & 2{,}09 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 46{,}99 & -33{,}11 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9{,}80 & 2{,}09 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 46{,}99 & -33{,}11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9{,}80 & 2{,}09 \\ 221{,}74 & -153{,}46 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -7{,}71 & 0{,}42 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 221{,}74 & -153{,}46 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7{,}71 & 0{,}42 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 221{,}74 & -153{,}46 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -7{,}71 & 0{,}42 \end{bmatrix}$			

Usporedbom tablica [Tablica 3] i [Tablica 5] može se vidjeti da parametar β ima velik utjecaj na pojačanja sustava, pojačanja regulatora gotovo su se dvostruko smanjila, dok se pojačanje observera višestruko povećalo. Kako je ne modelirana dinamika „izbačena“ iz sinteze, u suštini su svi podsustavi jednaki pa su tako i pojačanja podsustava međusobno jednaka.



Slika 27 Kut zakreta, slučaj 2

[Slika 27] prikazuje kutove zakreta svih podsustava, nema gotovo nikakve razlike u odnosu na prethodni slučaj. U ovom slučaju se jasno vidi da podsustav 2 (srednji) nema prebačaja, razlog tomu je što su pojačanja u ovom slučaju manje nego u prethodnome.

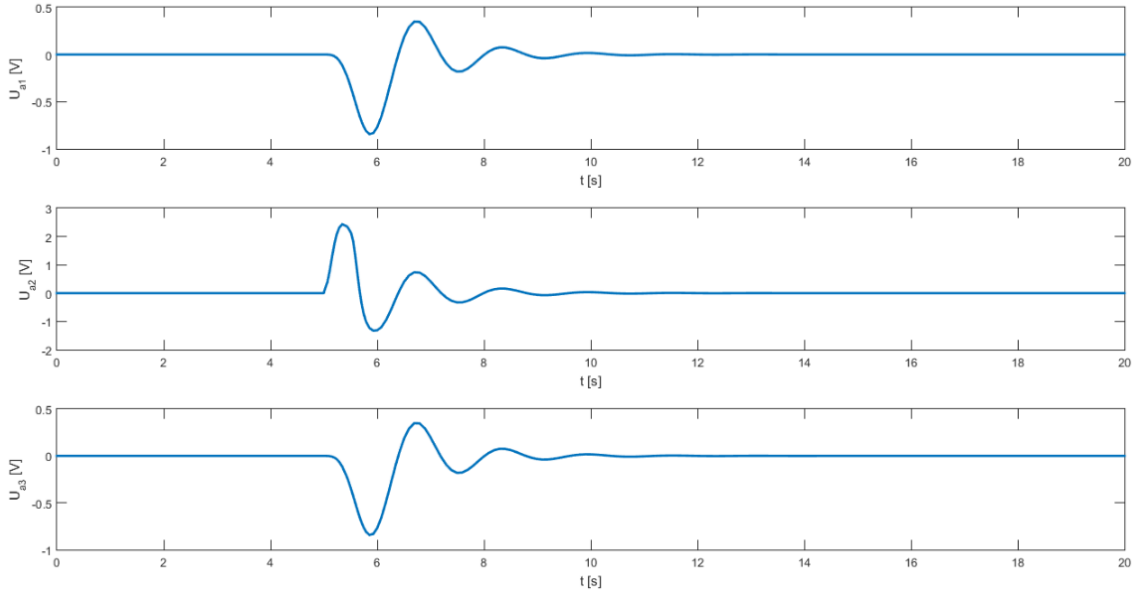


Slika 28 Pomak kolica, slučaj 2

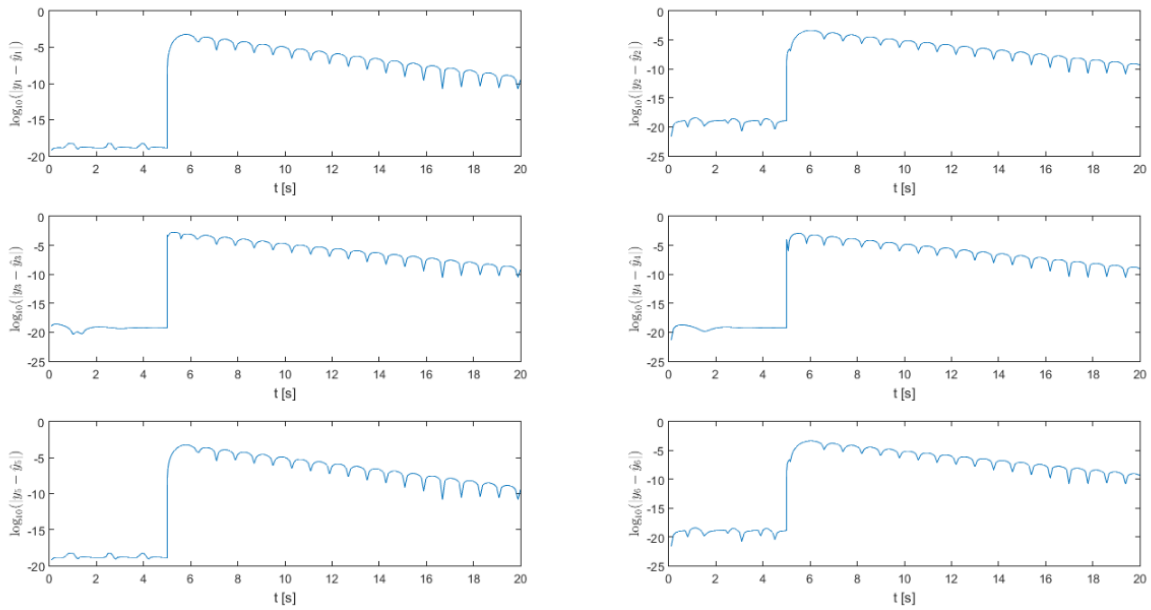
[Slika 28] pokazuje pomake kolica, nema velikih razlika u odnosu na prethodni slučaj. Sustav se zanemarivo brže stabilizira i manje oscilira oko ravnotežnog položaja. Amplitude se nešto manje, razlog je smanjenje pojačanja, što bi se trebalo bolje vidjeti na idućoj slici. Zanimljivo da iako su pojačanja manja, u ovom slučaju sustav se stabilizira jednu sekundu prije iz razloga što zbog manjih pojačanje nema oscilacija oko ravnotežne točke.

Očekivano na donjoj slici [Slika 29] vide se manje amplitude i nešto manja frekvencija, zbog manjih pojačanja regulatora.

[Slika 30] pokazuje grešku observera, očekivano se vidi bolje praćenje stvarnoga stanja (nema skokova kao u prošlom slučaju). Do te razlike je došlo zbog promjene parametra β, povećala su se pojačanja observera.



Slika 29 Upravljačke varijable, slučaj 2



Slika 30 Greška observera, slučaj 2

Slučaj 3

Tablica 6 Parametri za slučaj 3

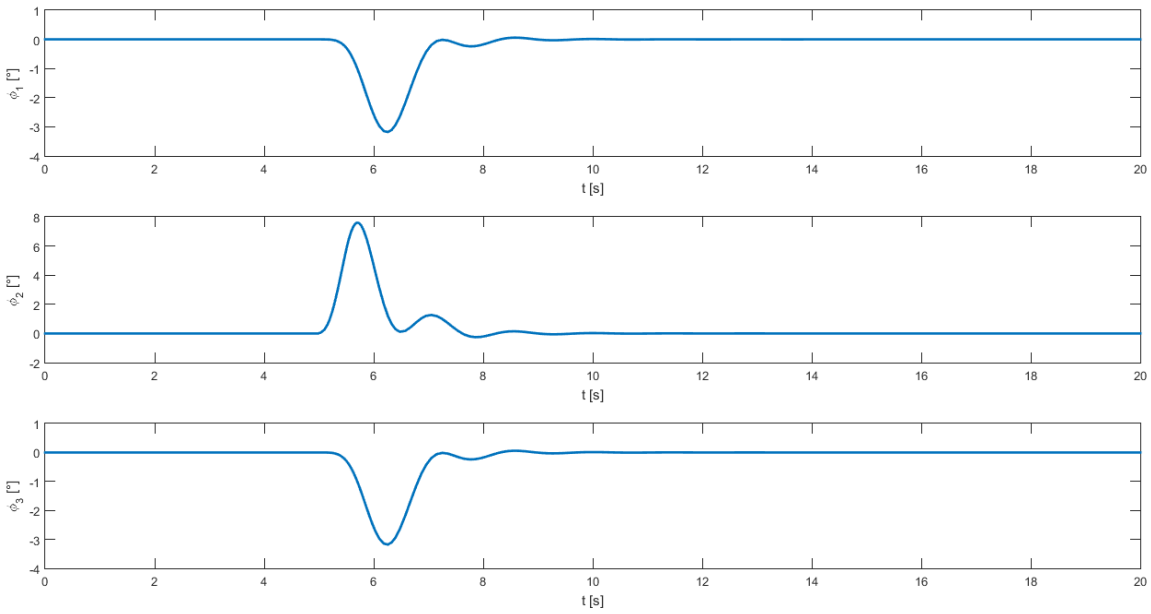
$\boldsymbol{Q} = 100 \cdot \mathrm{diag}([1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1])$
$\boldsymbol{R} = 100 \cdot \mathrm{diag}([100\ 1\ 100\ 1\ 100\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1)]$
$\boldsymbol{\beta} = 20$

][Tablica 6] prikazuje odabrane parametre za slučaj 3, dok donja tablica [Tablica 7] pokazuje rezultate optimizacije. Dobivena pojačanja koriste se za simuliranje odziva.

Tablica 7 Optimalne varijable za slučaj 3

$\gamma = 241{,}8400$	$\rho_1 = 150{,}2456$	$\rho_2 = 150{,}2456$	$\rho_3 = 150{,}2456$
$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} -671{,}96 & 384{,}35 & 0 & 0 & 0 & 0 & -199{,}45 & 45{,}37 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -671{,}96 & 384{,}35 & 0 & 0 & 0 & 0 & -199{,}45 & 45{,}37 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -671{,}96 & 384{,}35 & 0 & 0 & 0 & 0 & -199{,}45 & 45{,}37 \end{bmatrix}$			
$\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} 12{,}92 & -17{,}85 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7{,}66 & 4{,}36 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12{,}92 & -17{,}85 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7{,}66 & 4{,}36 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12{,}92 & -17{,}85 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7{,}66 & 4{,}36 \\ 45{,}71 & -45{,}81 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -8{,}04 & -0{,}02 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 45{,}71 & -45{,}81 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8{,}04 & -0{,}02 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 45{,}71 & -45{,}81 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -8{,}04 & -0{,}02 \end{bmatrix}$			

Usporedbom tablica [Tablica 7] [Tablica 3] može se zamijetiti značajno povećanje pojačanja regulatora vezanih uz varijable kojima su povećane težine, promjena parametra R. Pojačanja observera se nisu značajno promijenila. ρ se poveća, a želimo ga što više smanjiti, što znači da α iz (44) manji čime sustav postaje manje robustan na utjecaj sprega, što je naravno loše.

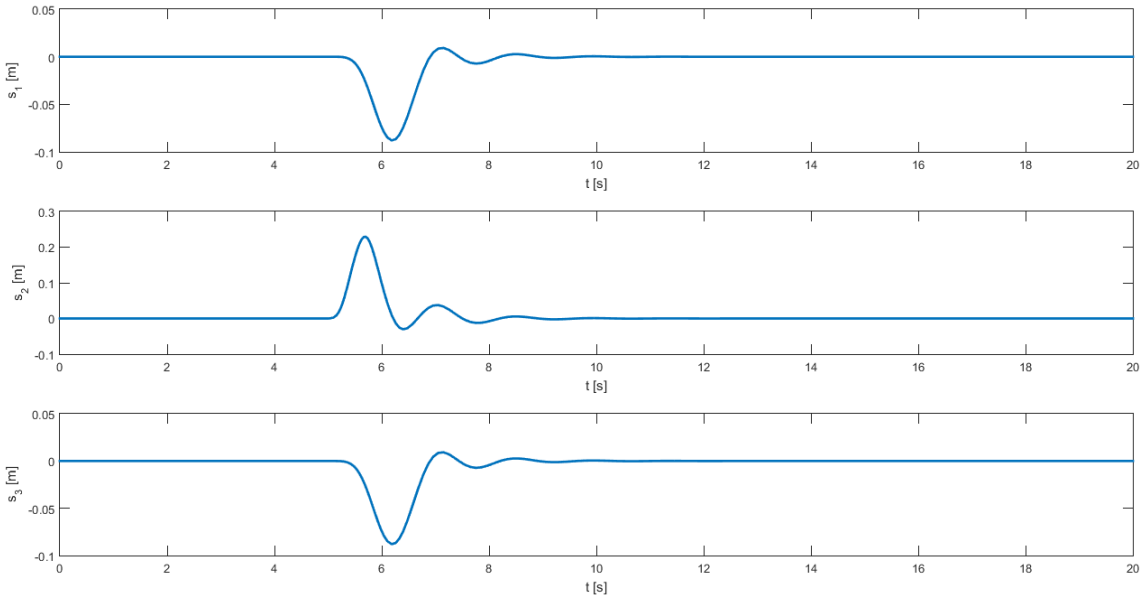


Slika 31 Kut zakreta, slučaj 3

[Slika 31] prikazuje kutove zakreta svake klackalice, usporedbom sa slikom [Slika 23] iz slučaja 1, vidi se da je oblik krivulje veoma sličan, ali je razlika u amplitudi vidljiva, gotovo 1° za svaki podsustav. Sustav se stabilizira oko devete sekunde što je zamjetno brže nego u prvom slučaju. Razlog tome su veći težinski faktori vezani uz kutove zakreta. Kutovi zakreta

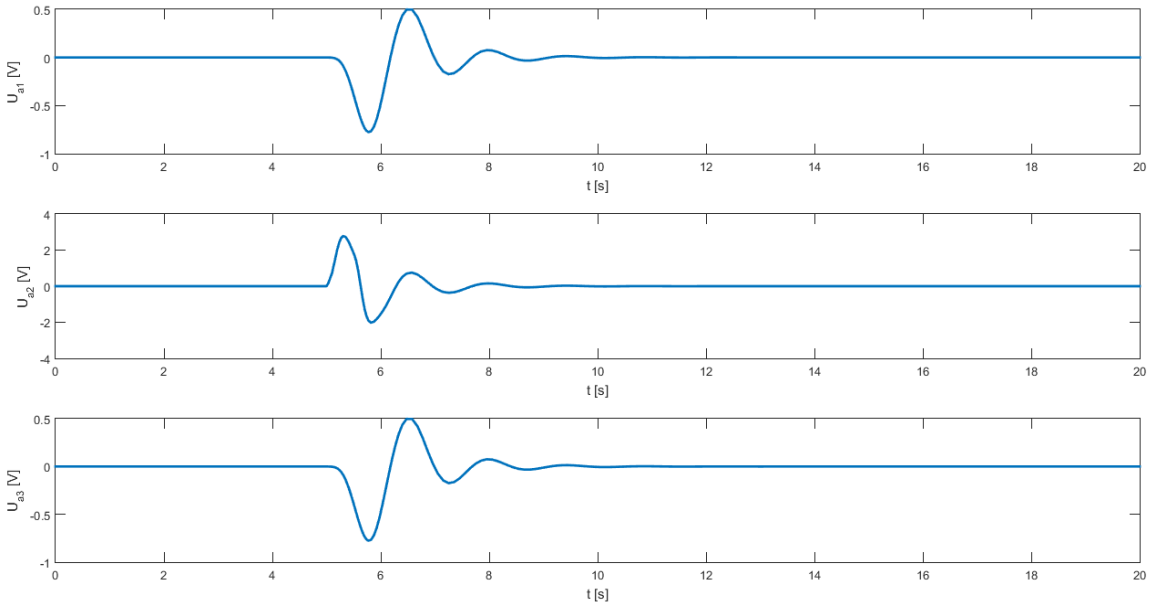
su u ovom slučaju „vrjednija“ varijabla, pa ih regulator pokušava što prije dovesti u ravnotežni položaj. Zanimljivo je da je u ovom slučaju poremećaj manje zakrenuo srednji podsustav, na koji djeluje, zato što je zbog većeg pojačanja regulatora, sustav brže reagirao na poremećaj.

[Slika 32] prikazuje pomake kolica, usporedbom s prijašnjim slučajevima može se zamijetit da se kolica više gibaju, u pozitivnom i u negativnom smjeru kako bi se kut klackalice što prije vratio u početni položaj. Pomaci kolica su manje amplitude, ali veće frekvencije.



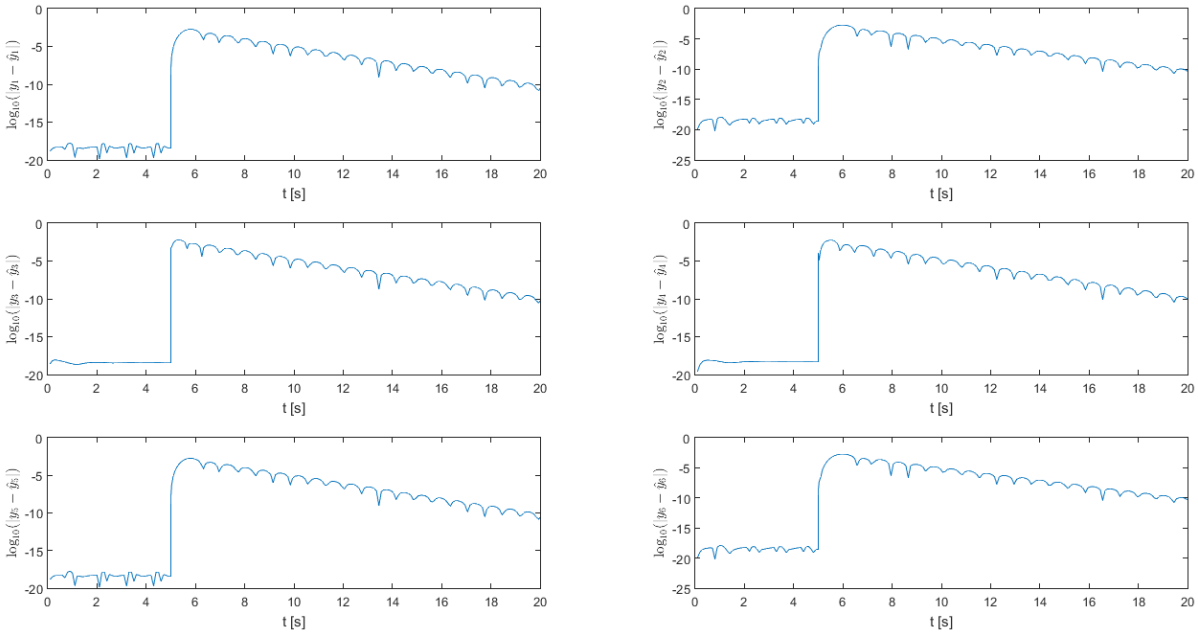
Slika 32 Pomak kolica, slučaj 3

Na donjoj slici [Slika 33] prikazane su upravljačke varijable, očekivano je njihova amplituda veća direktni razlog većih vrijednosti pojačanja regulatora. Kao što je to vidljivo na grafu koji pokazuje pomak kolica, nema oscilacija oko ravnotežnog položaja, razlog tome su veća pojačanja vezana uz derivacije kuta zakreta i pomaka kolica.



Slika 33 Upravljačka varijabla, slučaj 3

[Slika 34] pokazuje grešku observera za slučaj 3, očekivano nema razlika u odnou na prošle slučajeve. Greška je reda veličina 10^{-2} i manja, što je dovoljno dobro.



Slika 34 Greška observera, slučaj 3

Slučaj 4

Tablica 8 Parametri za slučaj 4

$\boldsymbol{Q} = 100 \cdot \mathrm{diag}([1\ 1\ 10\ 10\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1])$
$\boldsymbol{R} = 100 \cdot \mathrm{diag}([1\ 100\ 1\ 100\ 1\ 100\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1)]$

$\boldsymbol{\beta} = 20$

[Tablica 8] prikazuje odabrane parametre za slučaj 4, dok donja tablica [Tablica 9] pokazuje rezultate optimizacije. Dobivena pojačanja koriste se za simuliranje odziva.

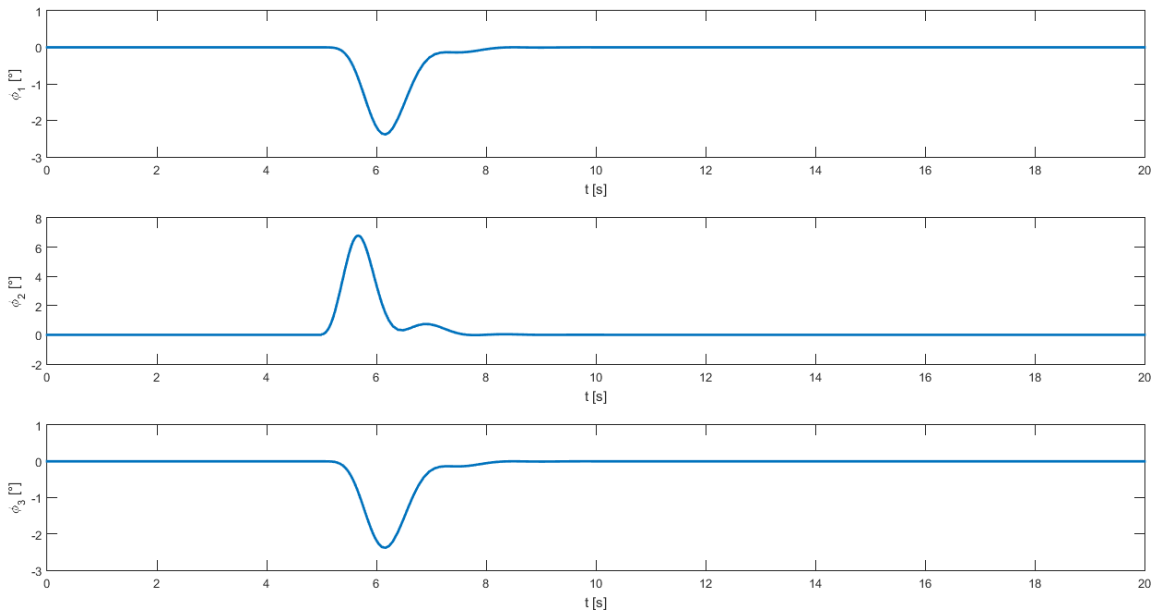
Tablica 9 Optimalne varijable za slučaj 4

$\gamma = 327{,}7272$	$\rho_1 = 288{,}2262$	$\rho_2 = 288{,}2262$	$\rho_3 = 288{,}2262$

$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} -898{,}90 & 464{,}46 & 0 & 0 & 0 & 0 & -285{,}62 & 59{,}43 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -898{,}90 & 464{,}46 & 0 & 0 & 0 & 0 & -285{,}62 & 59{,}43 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -898{,}90 & 464{,}46 & 0 & 0 & 0 & 0 & -285{,}62 & 59{,}43 \end{bmatrix}$$

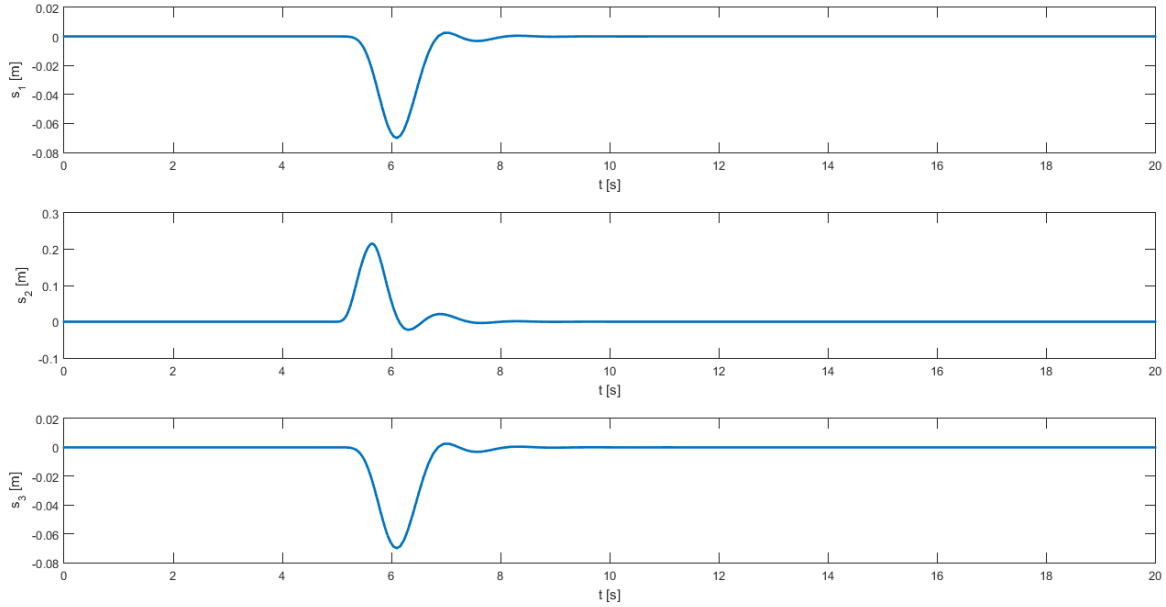
$$\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} 14{,}36 & -17{,}92 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7{,}77 & 4{,}61 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 15{,}71 & -17{,}85 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7{,}68 & 5{,}33 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 14{,}36 & -17{,}92 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7{,}77 & 4{,}61 \\ 52{,}16 & -50{,}86 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -8{,}49 & 0{,}17 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 55{,}40 & -50{,}27 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8{,}38 & 0{,}06 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 52{,}16 & -50{,}86 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -8{,}49 & 0{,}17 \end{bmatrix}$$

Kao i u prošlom slučaju, u gornjoj tablici Tablica 9 vidimo velike optimalne varijable, koje želimo minimizirati, ovaj odabir slobodnih parametar nije dobar, sustav gubi na robusnosti. Ovo će biti pokazano na grafovima prije slučaja 5, u novoj simulaciji koeficijent opruge *k* biti će povećan četiri puta. Svi dijagonalni blokovi u matrici ***L*** više nisu jednaki što je posljedica ovako odabranog parametra ***Q***.



Slika 35 Kut zakreta, slučaj 4

[Slika 35] prikazuje kut zakreta svakog podsustava, može se vidjeti gotovo asimptotski odziv, male oscilacije i zamjetno bržu stabilizaciju sustava u odnosu na prethodne slučajeve.

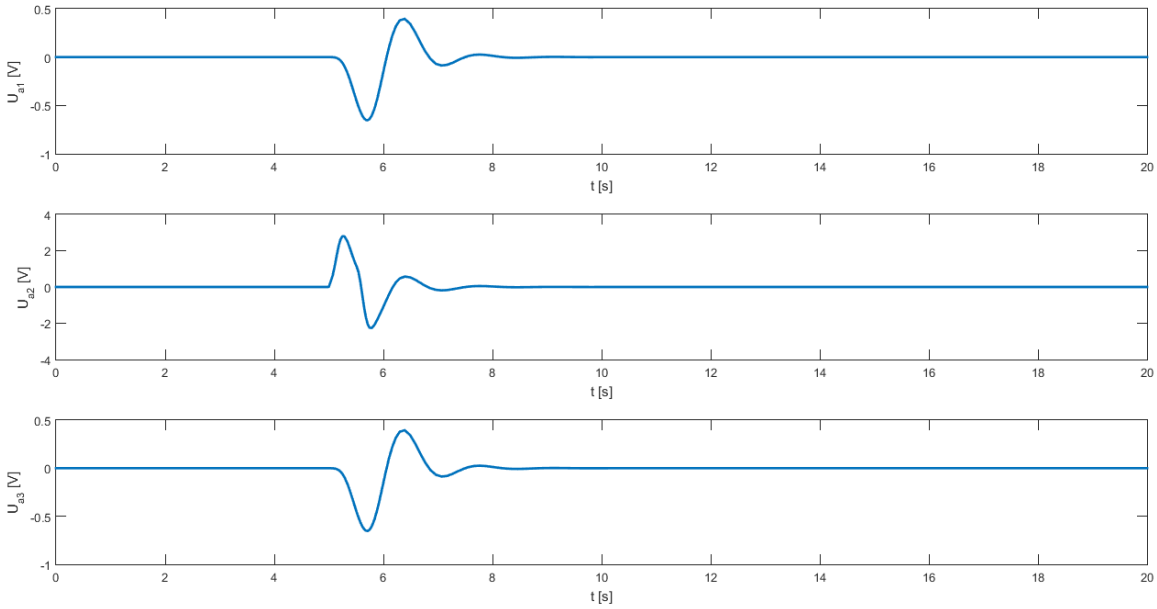


Slika 36 Pomak kolica, slučaj 4

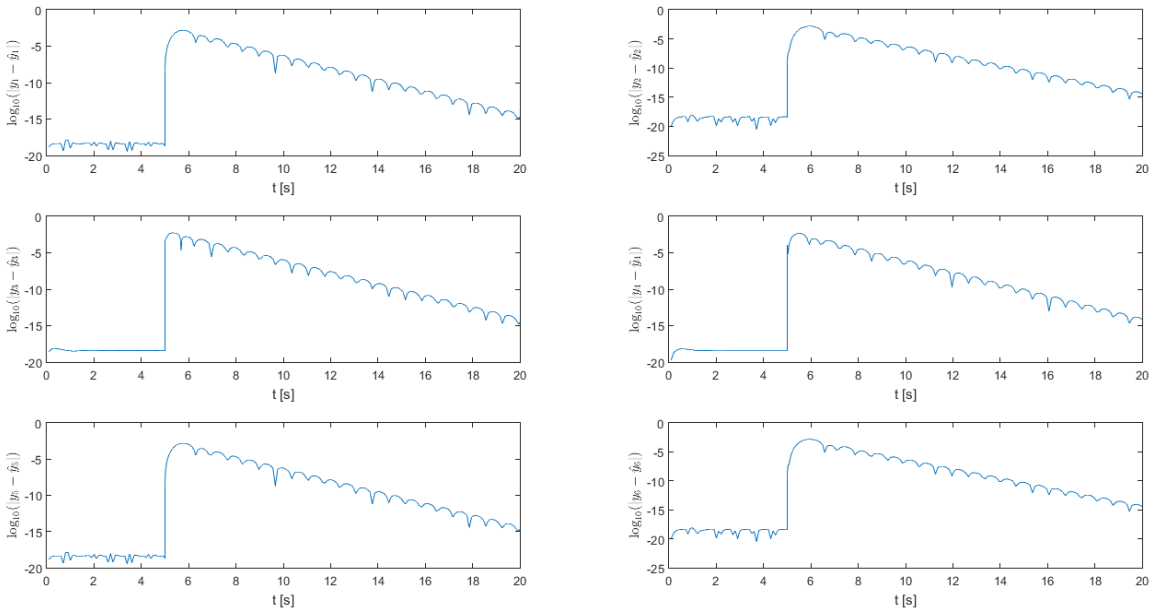
[Slika 36] prikazuje pomak kolica svakog podsustava, očekivano vidimo brzu stabilizaciju i kratko osciliranje oko ravnotežnog položaja s iznimno malom amplitudom. Odzivi ovog sustava su jako dobri.

[Slika 37] prikazuje upravljačke veličine, slične kao i u prethodnome slučaju uz još manje oscilacija.

[Slika 38] pokazuje grešku observera, greška je reda manjeg od 10^{-2} i smanjuje se brže nego u prethodnim slučajevima.



Slika 37 Upravljačka varijabla, slučaj 4

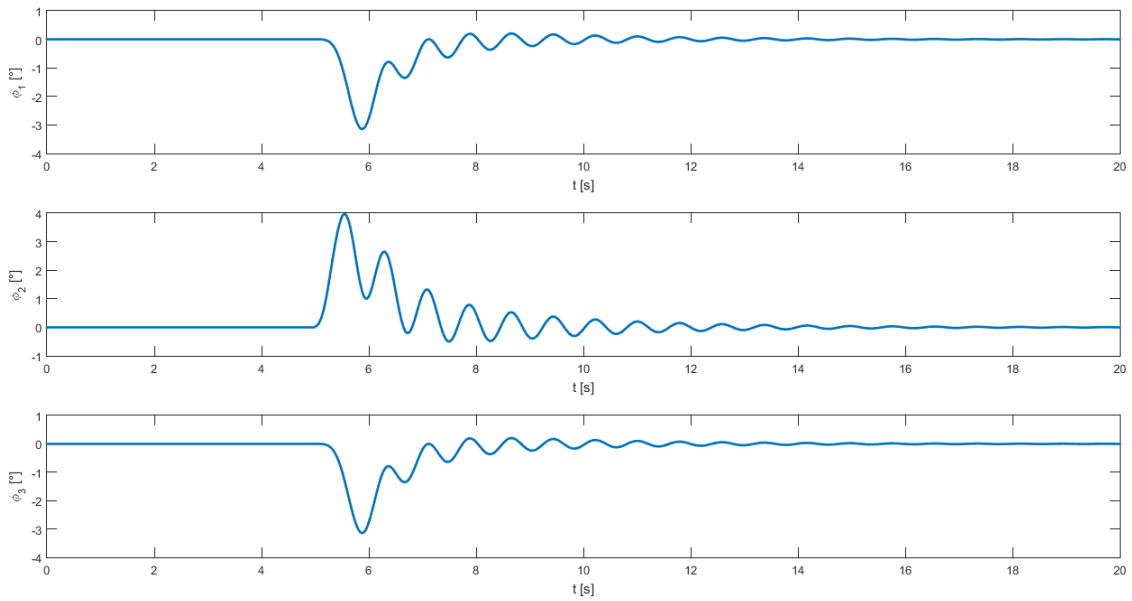


Slika 38 Greška observera, slučaj 4

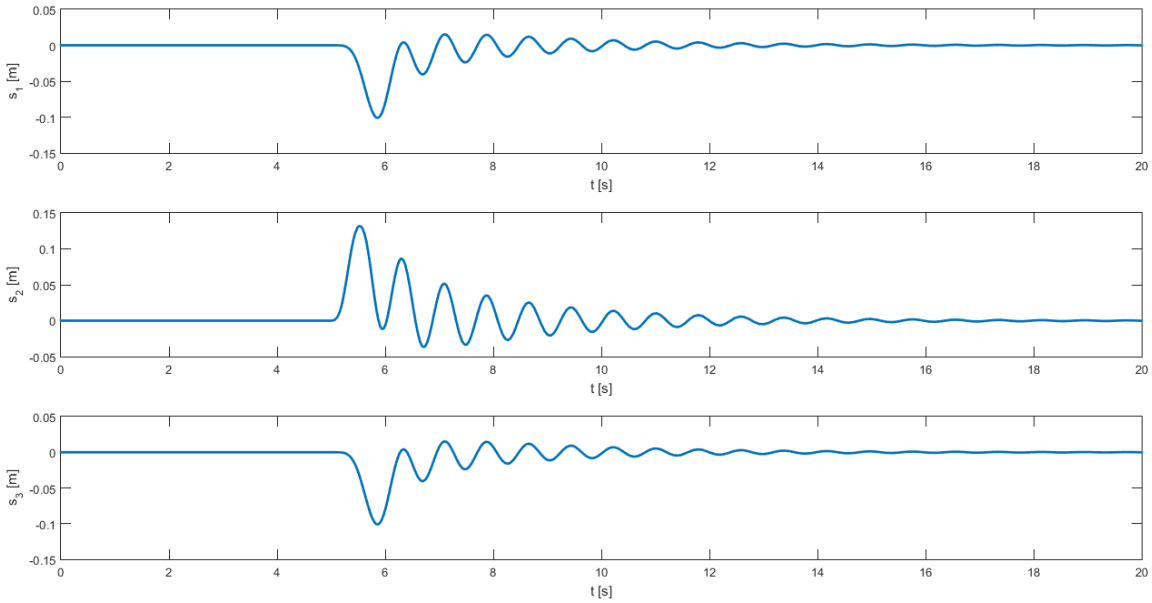
Slijedi prikaz odziva na sustavu kojemu je koeficijent opruge povećan, za optimalni regulator iz gornje tablice [Tablica 9].

[Slika 39] i [Slika 40] prikazuje odziv sustava, vidi se jako oscilatorno ponašanje. Sustav se stabilizira, ali mu treba dugo i to nije povoljno ponašanje. Sustav bi bio jako opterećen, motor bi se vjerojatno brzo uništio to vidimo na dijagramu upravljačkih varijabli [Slika 41], oscilacije velike frekvencije.

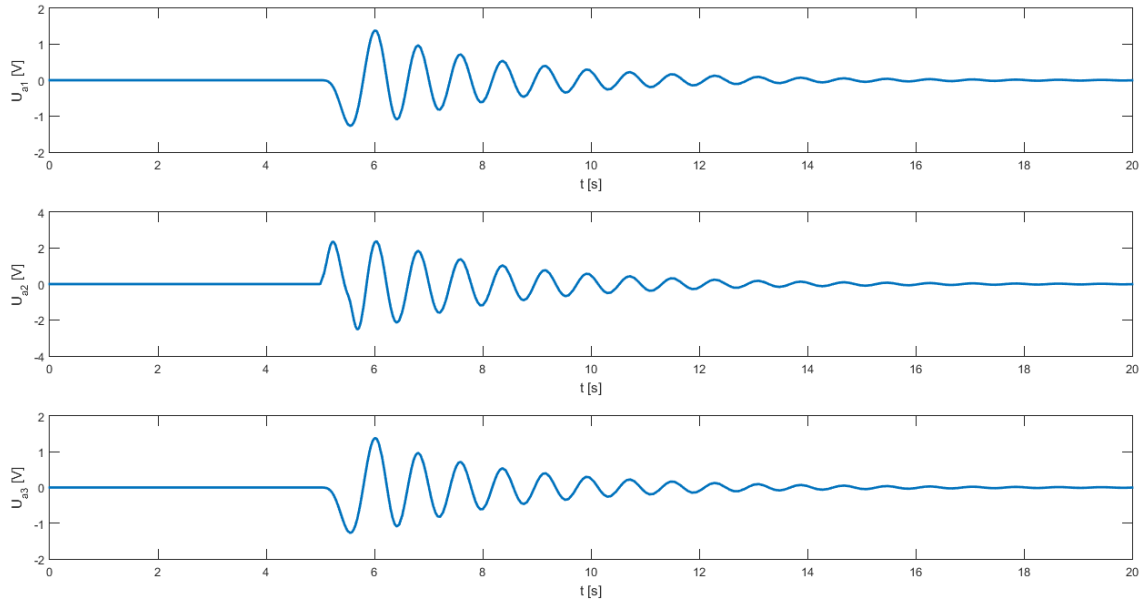
[Slika 42] prikazuje grešku observera, vidimo da je greška kao i u prethodnim slučajevima u prihvatljivim granicama, ali je konstantna i ne teži ka nuli.



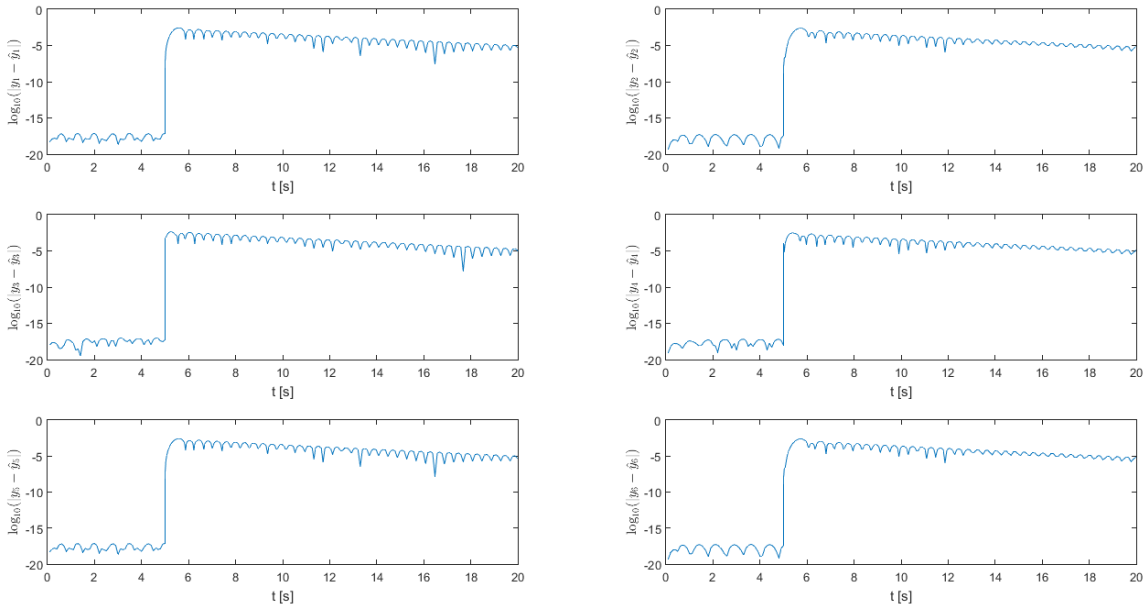
Slika 39 Kut zakreta, slučaj 4b



Slika 40 Pomak kolica, slučaj 4b



Slika 41 Upravljačke varijable, slučaj 4b



Slika 42 Greška observera, slučaj 4b

Slučaj 5

Tablica 10 Parametri za slučaj 5

$\boldsymbol{Q} = 100 \cdot \mathrm{diag}([1\ 1\ 1\ 1\ 100\ 100\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1])$
$\boldsymbol{Q} = 100 \cdot \mathrm{diag}([50\ 30\ 50\ 30\ 100\ 80\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1)]$
$\boldsymbol{\beta} = 20$

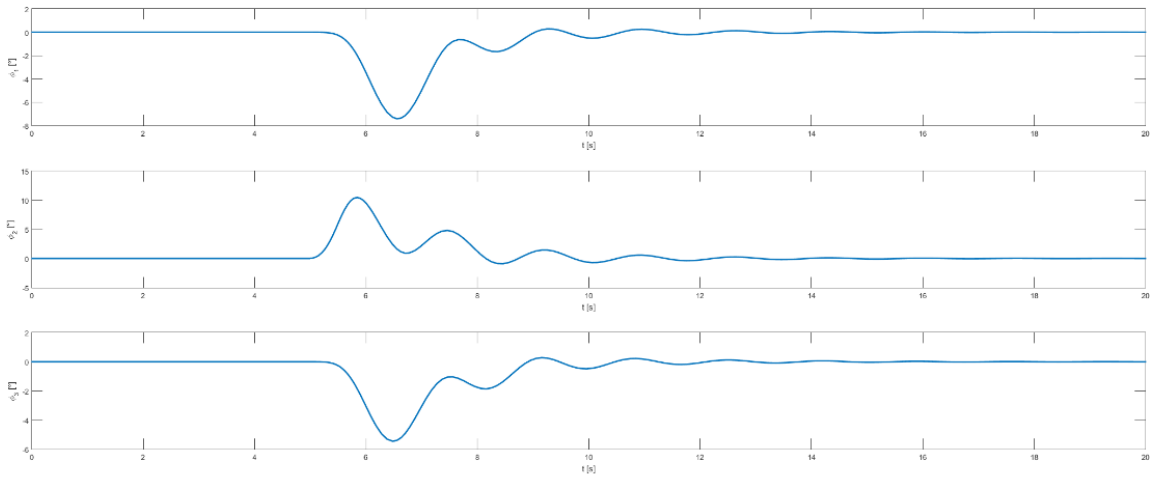
[Tablica 10] prikazuje odabrane parametre za slučaj 3, dok donja tablica [Tablica 11] pokazuje rezultate optimizacije. Dobivena pojačanja koriste se za simuliranje odziva.

Tablica 11 Optimalne varijable za slučaj 5

$\gamma = 192.6635$	$\rho_1 = 91{,}3056$	$\rho_2 = 91{,}3056$	$\rho_3 = 91{,}3056$
$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} -219{,}40 & 160{,}96 & 0 & 0 & 0 & 0 & -69{,}54 & 18{,}33 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -219{,}40 & 160{,}96 & 0 & 0 & 0 & 0 & -69{,}54 & 18{,}33 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -458{,}79 & 312{,}56 & 0 & 0 & 0 & 0 & -145{,}16 & 36{,}31 \end{bmatrix}$			
$\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} 8{,}2735 & -15{,}3818 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7{,}9874 & 4{,}4475 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8{,}2734 & -15{,}3820 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7{,}9875 & 4{,}4475 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 72{,}6977 & -22{,}5549 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7{,}2489 & 27{,}8645 \\ 28{,}8023 & -32{,}0583 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -7{,}8191 & 0{,}1467 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 28{,}8023 & -32{,}0586 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7{,}8191 & 0{,}1467 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 194{,}5139 & -40{,}0066 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -7{,}8934 & -1{,}5675 \end{bmatrix}$			

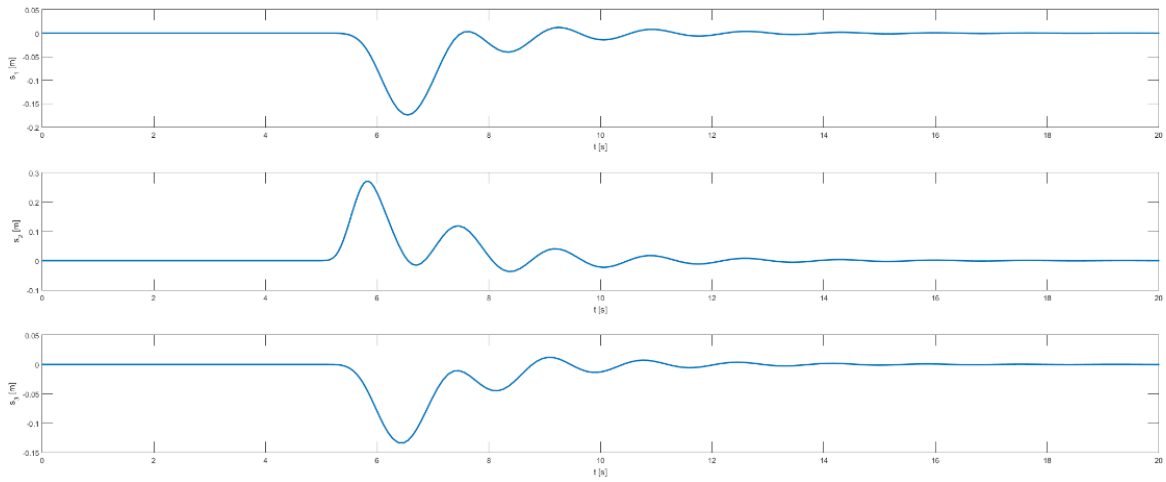
Iz gornje tablice [Tablica 11] vidi se da je s ovakvim odabranim parametrima, sustav značajno stabilniji na utjecaj sprega podsustava, ρ je značajno manji nego u prijašnjim slučajevima.

[Slika 43] prikazuje kutove zakreta sustava, može se primijetiti oscilatorni odziv i dugo vrijeme smirivanja sustava. Kutovi zakreta su veći u usporedbi s prošlim slučajevima, treba prilagoditi parametre kako bi se to smanjilo.



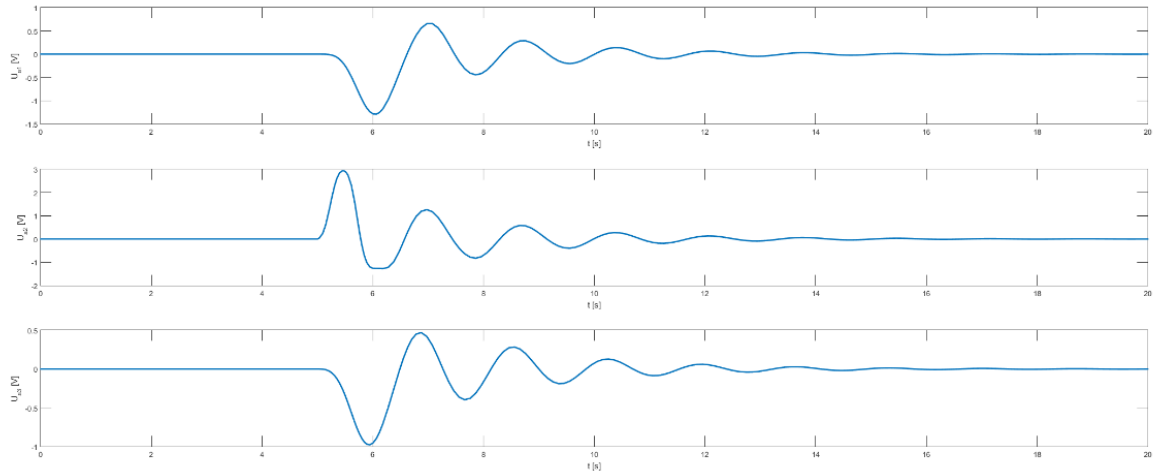
Slika 43 Kut zakreta, slučaj 5

[Slika 44] pokazuje pomake kolica, značajno su veći u usporedbi s prethodnim slučajem. Oscilacije oko ravnotežnog položaja nisu velike, ali sustavu treba dugo da se stabilizira.

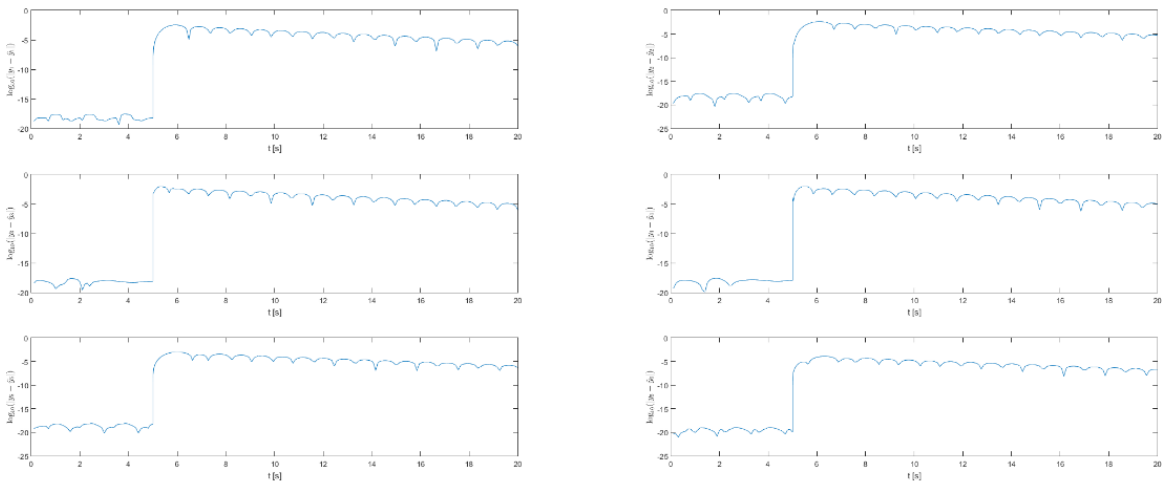


Slika 44 Pomak kolica, slučaj 5

[Slika 45] prikazuje upravljačke varijable, napon je unutar dopuštenog područja što znači da bi se mogla povećati pojačanja kako bi regulator bio agresivniji i prije stabilizirao sustav. I tu je vidljivo oscilatorno ponašanje.



Slika 45 Upravljačke varijable, slučaj 5



Slika 46 Greška observera, slučaj 5

[Slika 46] prikazuje grešku observera za slučaj 5, greška je opet manja od 10^{-2}, ali sporo konvergira ka nuli.

Slučaj 6

Tablica 12 Parametri za slučaj 6

$\boldsymbol{Q} = 1000 \cdot \mathrm{diag}([1\ 1\ 1\ 1\ 10\ 10\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1])$
$\boldsymbol{R} = 100 \cdot \mathrm{diag}([1\ 1\ 1\ 1\ 10\ 10\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1)]$
$\beta = 50$

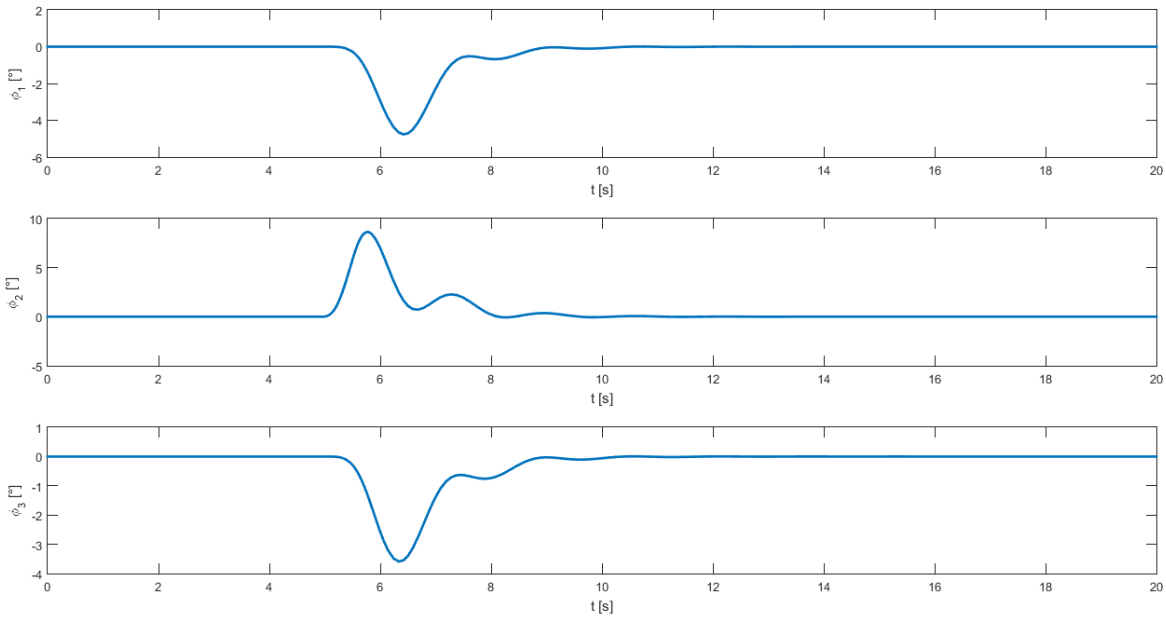
[Tablica 12] prikazuje odabrane parametre za slučaj 6. [Tablica 13] pokazuje rezultate optimizacije. Dobivena pojačanja koriste se za simuliranje odziva.

Tablica 13 Optimalne varijable za slučaj 6

$\gamma = 1134{,}2$	$\rho_1 = 90$	$\rho_2 = 90$	$\rho_3 = 90$
$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} -277{,}65 & 203{,}80 & 0 & 0 & 0 & 0 & -88{,}35 & 23{,}59 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -277{,}65 & 203{,}80 & 0 & 0 & 0 & 0 & -88{,}35 & 23{,}59 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -982{,}37 & 669{,}85 & 0 & 0 & 0 & 0 & -311{,}78 & 79{,}91 \end{bmatrix}$			
$\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} 22{,}13 & -14{,}09 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5{,}84 & 2{,}54 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 22{,}13 & -14{,}09 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5{,}84 & 2{,}54 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 61{,}18 & -18{,}78 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6{,}83 & 5{,}70 \\ 87{,}57 & -56{,}93 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -7{,}42 & 0{,}21 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 87{,}57 & -56{,}93 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7{,}42 & 0{,}21 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 314{,}35 & -99{,}36 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -7{,}58 & 0{,}11 \end{bmatrix}$			

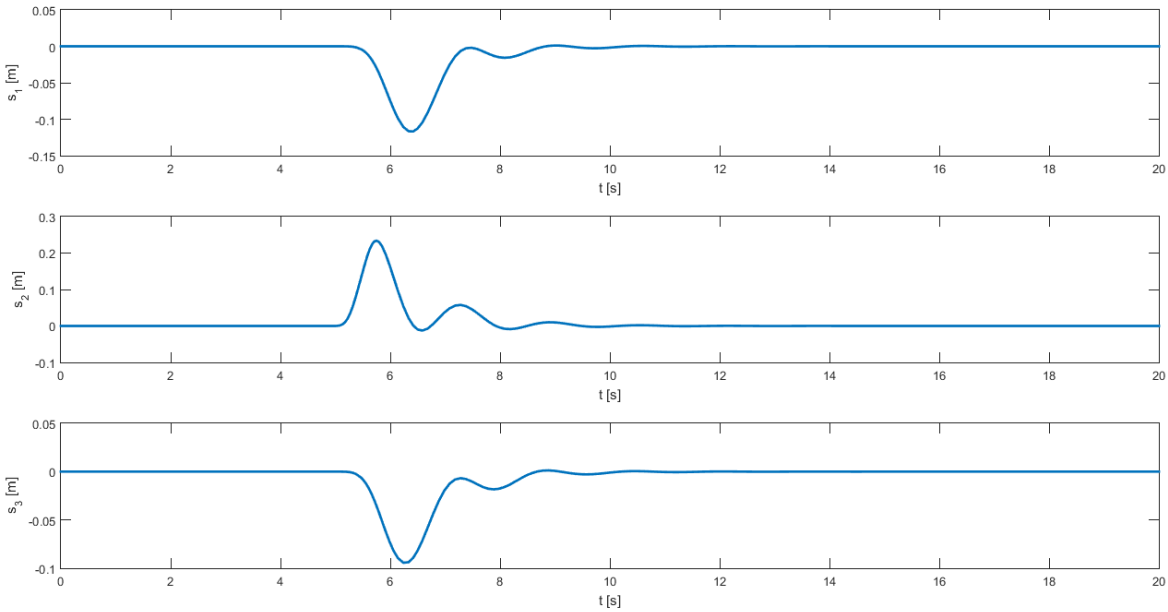
Postigli smo značajno smanjenje parametra ρ u odnosu na prethodne slučajeve, što znači da bi sustav trebao biti robusniji na poremećaje.

Na slici [Slika 47] se vidi jako povoljan odziv sustava, stabilizacija unutar četiri sekunde, bez oscilacija i gotovo nikakvih prebačaja. Kut zakreta srednjeg sustava je velik zbog djelovanja poremećaja, ali ga sustav zbog inercije i regulatora brzo smanjuje u razumne vrijednosti. To je bitno zato što je linearni regulator baziran na lineariziranom modelu koji je točan oko točke linearizacije (mali kutovi).



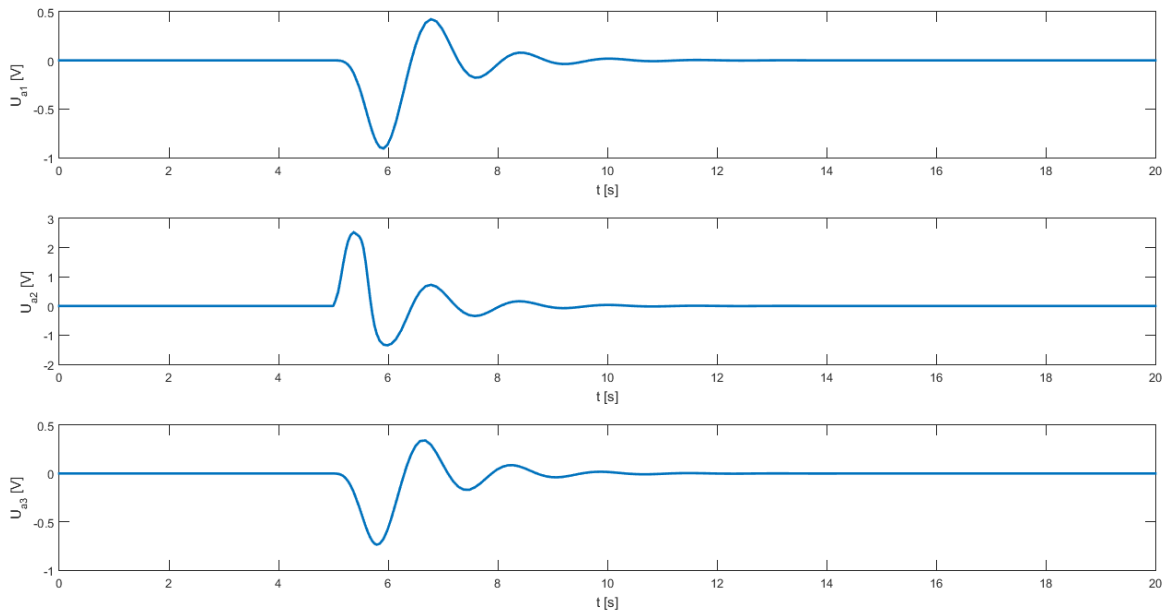
Slika 47 Kut zakreta, slučaj 6

[Slika 48**]** prikazuje pomake kolica svakog podsustava, nema oscilacija, pomaci su u dopuštenim granicama.



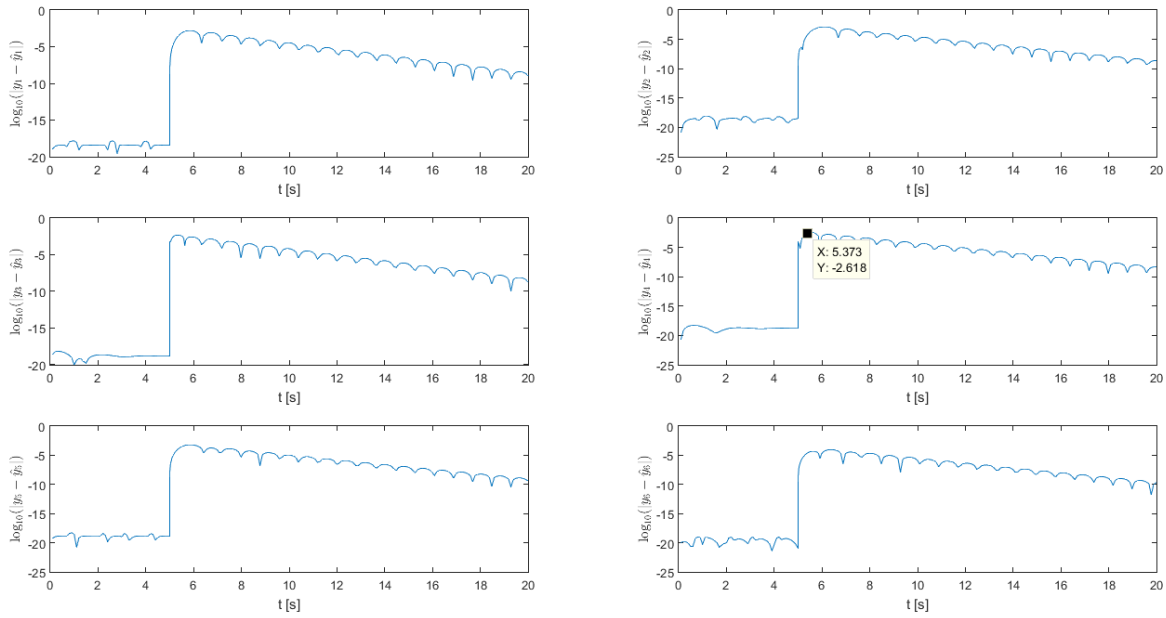
Slika 48 Pomak kolica, slučaj 6

Upravljačke varijable prikazane na donjoj slici [Slika 49] su unutar dopuštenih granica. Nema velikih i brzih promjena što je povoljno za korištenje u praksi.



Slika 49 Upravljačke varijable, slučaj 6

Na donjoj slici [Slika 50] je prikazana greška regulatora. Kao i u prethodnim slučajevima najveća greška je manja od 10^{-2}, a u ovom slučaju brzo konvergira ka nuli.

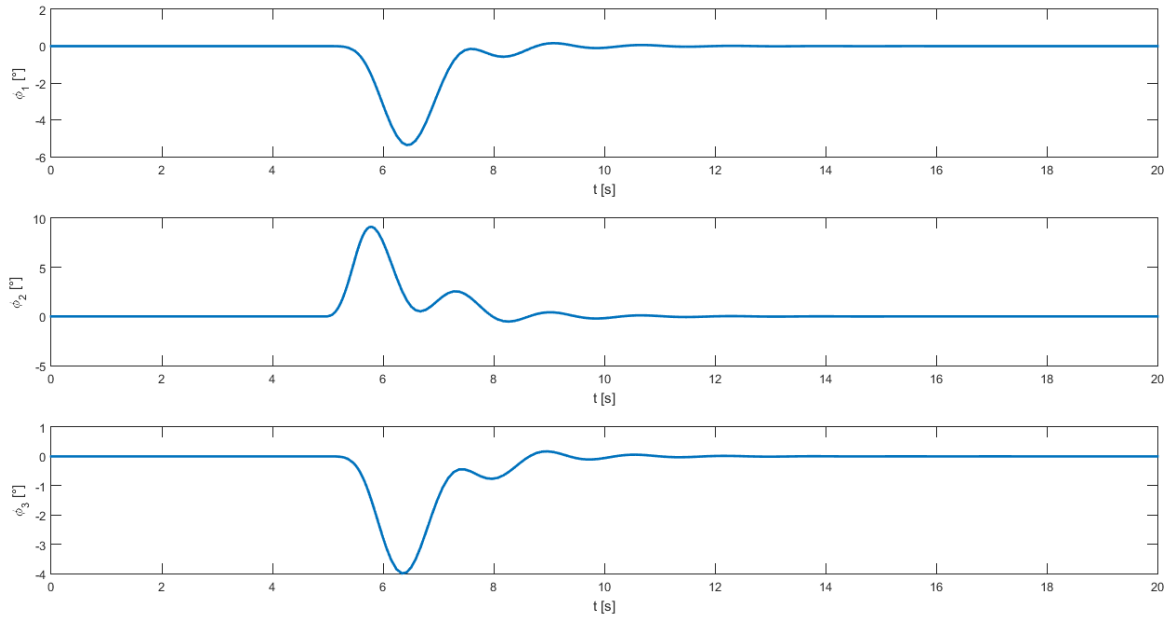


Slika 50 Greška observera, slučaj 6

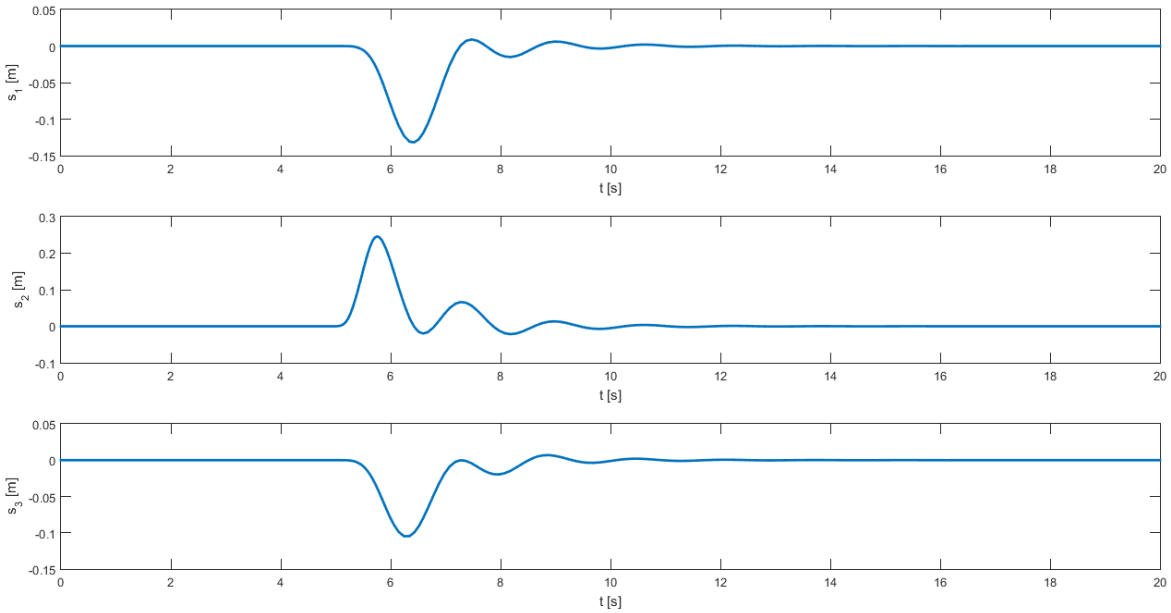
S obzirom na sve gore navedeno za slučaj 6, ovaj regulator je odabran za daljnje ispitivanje i potencijalno primjenu na eksperimentalnom postavu. Dakle danja izlaganja su vezana za regulator i observer s pojačanjima danim u gornjoj tablici [Tablica 13].

Prvo se ispituje utjecaj trenja u rotacijskom zglobu klackalice, u sintezi je bio korišten $\kappa = 0.1$ Nms/rad.

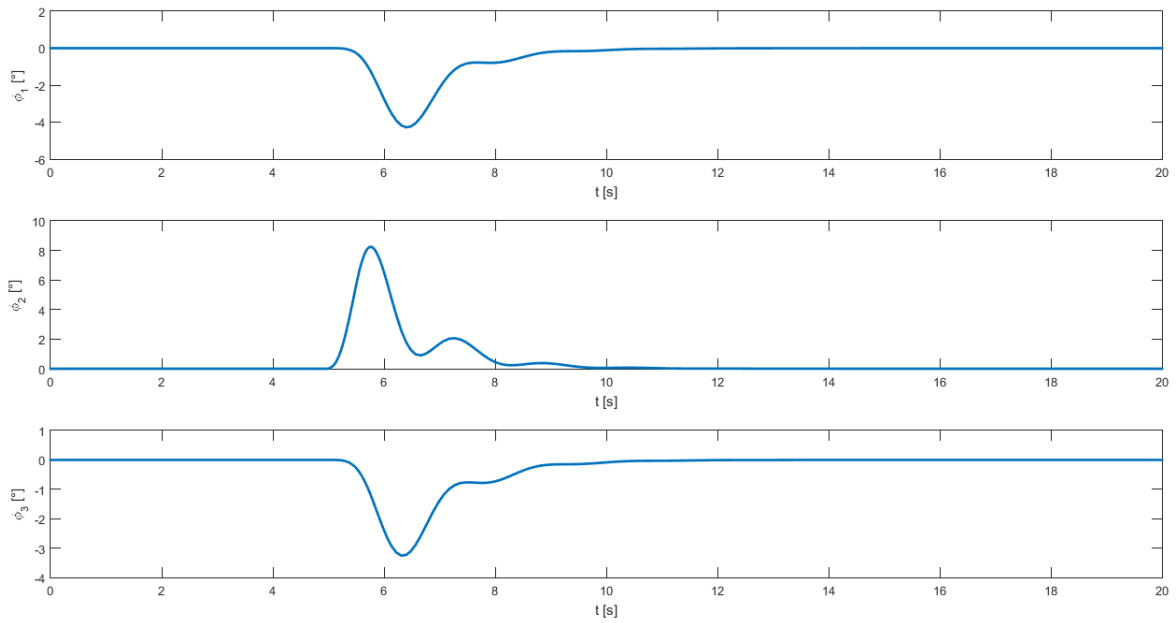
Iz donjih slika [Slika 51] [Slika 52] vidi se povećanje oscilacija u sustavu, razlog tome je što u slučaju kada je $\kappa = 0.0\ \mathrm{Nms/rad}$ sustav nema prirodno prigušenje (engl. „damping“). Upravljačka varijabla je također počela oscilirati u ovom slučaju. To je situacija koja je u stvarnosti nemoguća zato što je poznato da uvijek imamo trenja pa i gubitaka. Greška observera je nepromjenjena.



Slika 51 Kut zakreta, $\kappa = 0.0\ \mathrm{Nms/rad}$

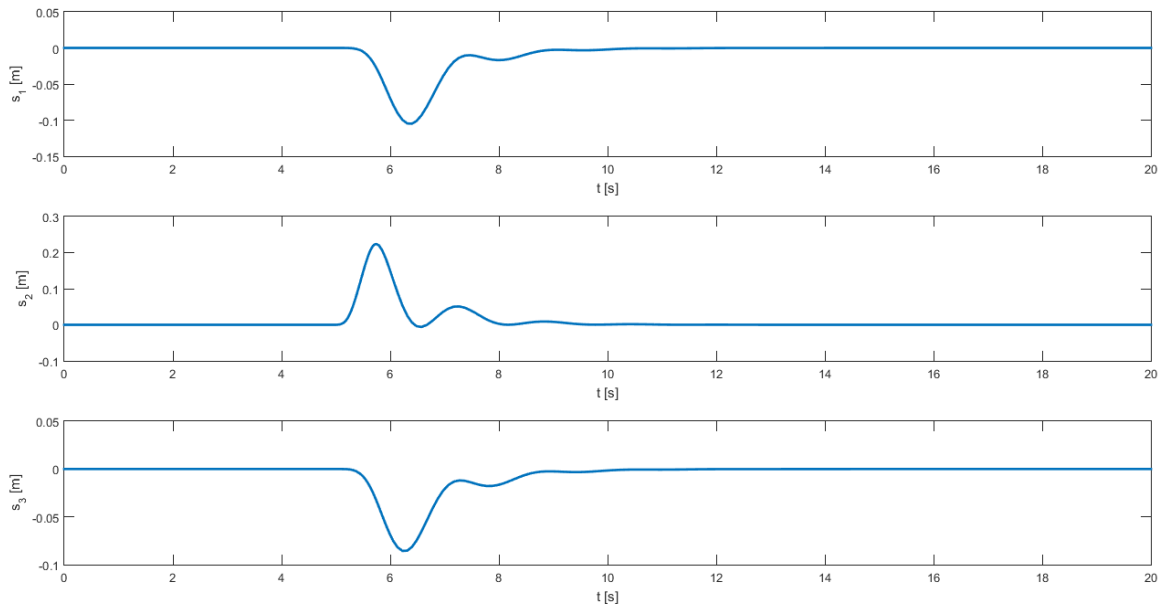


Slika 52 Pomak kolica, $\kappa = 0.0\ \mathrm{Nms/rad}$



Slika 53 Kut zakreta, $\kappa = 0.2$ Nms/rad

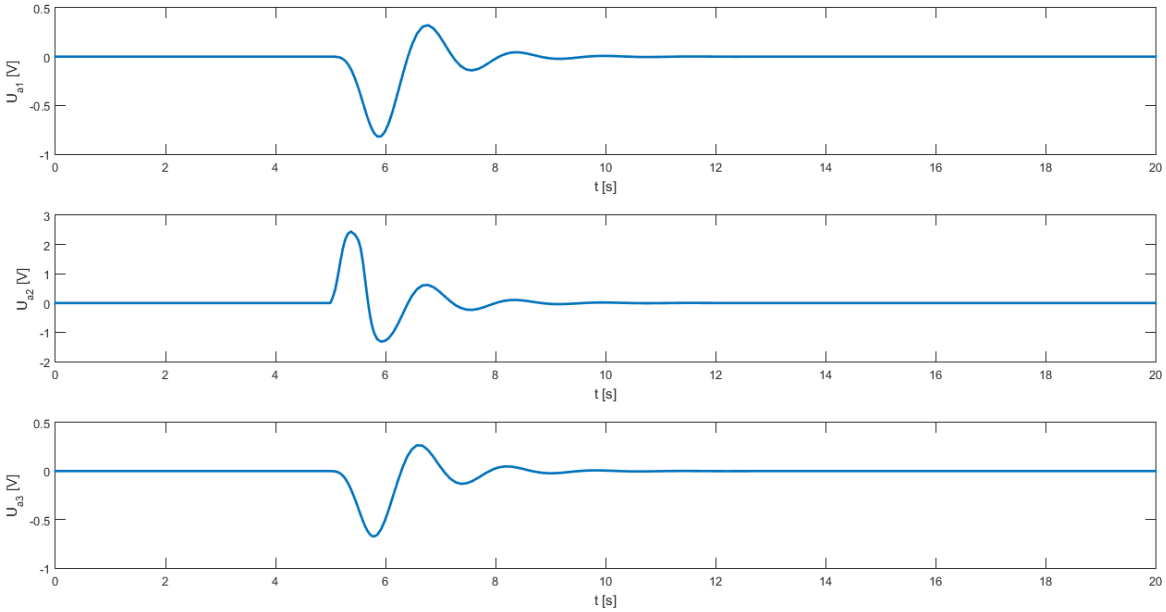
Donje slike [Slika 53] [Slika 54] prikazuju odziv sustava za $\kappa = 0.2$ Nms/rad. Očekivano mogu se vidjeti smanjene oscilacije u sustavu. Može se zamijetiti i manji zakret podsustava 2 pod djelovanjem vanjskog poremećaja.



Slika 54 Pomak kolica, $\kappa = 0.2$ Nms/rad

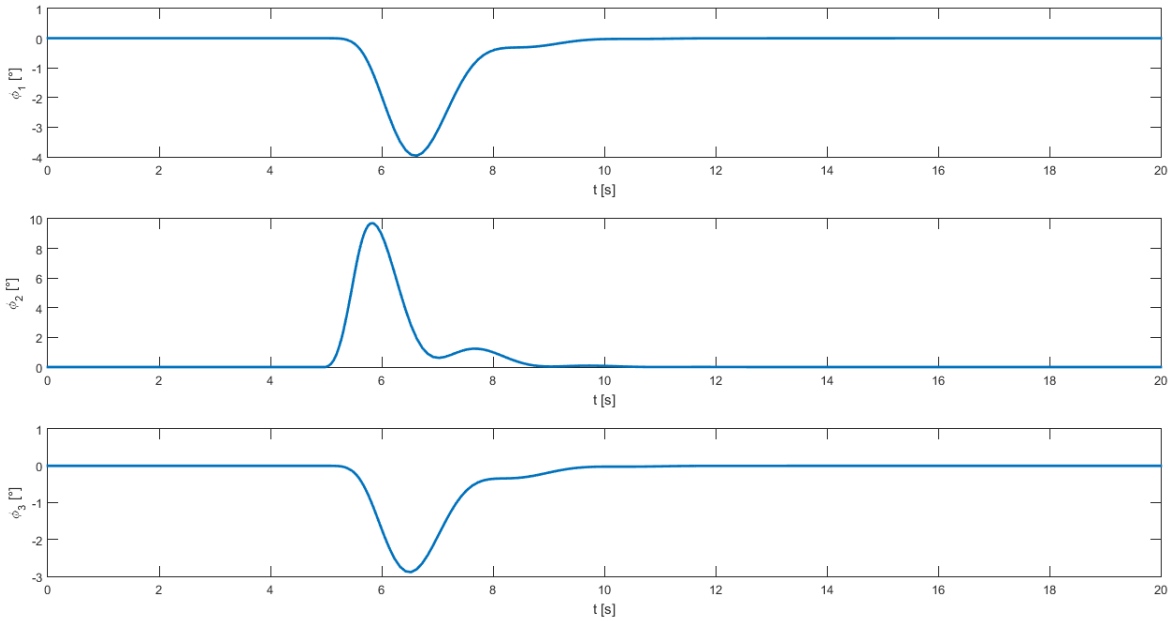
[Slika 55] prikazuje upravljačku varijablu, kako ga sustav postaje sporiji, povećanjem κ za očekivati je da će biti potrebno manje truda da se sustav stabilizira. Na dijagramu je teško uočiti tu razliku. Može se zaključiti da povećanjem trenja u zglobu sustav postaje tromiji, pa tako i otporniji na poremećaje. Upravljače varijable bi se trebale sporije mijenjati, što znači

manje opterećenje na sami sustav. Kada bi bilo potrebno takav sustav dovesti u neko željeno stanje povećanje trenja bi imalo negativan učinak pošto bi bilo potrebno više energije da se sustav giba.



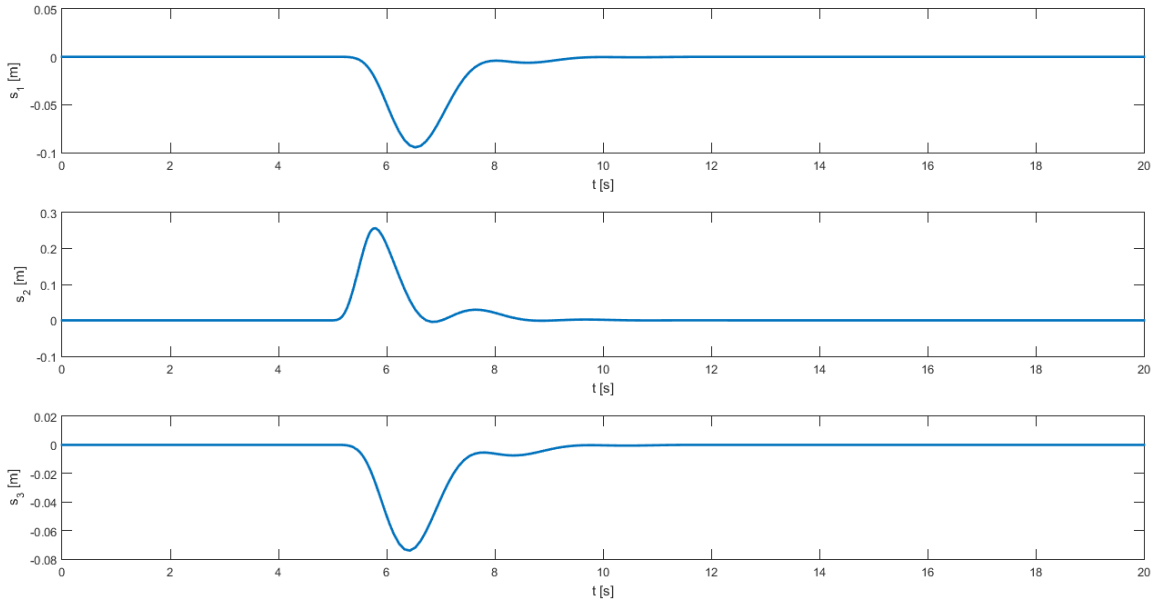
Slika 55 Upravljačka varijabla, $\kappa = 0.2\text{Nms/rad}$

Sada ćemo ispitati otpornost sustava na različite konstante opruge, $\kappa = 0.1\text{Nms/rad}$ dok će konstanta opruge biti od 3-15 N/m. Konstanta opruge ne utječe na sintezu regulatora zato što je dio ne modelirane dinamike koja je ograničena parametrom α. U slučaj 6 konstanta opruge je bila 5 N/m.

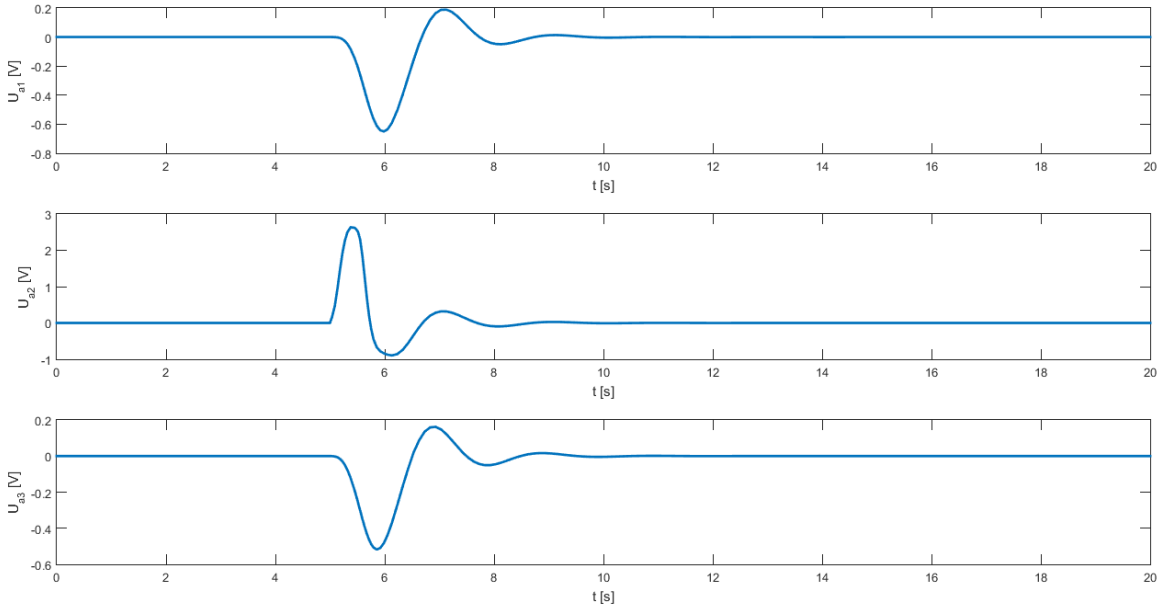


Slika 56 Kut zakreta, *k*=3N/m

[Slika 56] prikazuje kut zakreta za slučaj kada je *k*=3N/m može se vidjeti da je zbog manje konstante opruge sustav slabije spregnut, pa tako poremećaj manje djeluje na susjedne podsustave, ali zato za sustav na kojem djeluje poremećaj vidimo veći zakret. Zbog slabijih veza među podsustavima ima manje oscilacija, podsustavi na koje ne djeluje poremećaj ni nemaju oscilacije. Isto se može zaključiti i iz prikaza sa donje slike [Slika 57]. Za očekivati je da upravljačke varijable na srednjem podsustavu (gdje djeluje poremećaj) biti veće zato što sada susjedni podsustavi ne preuzimaju toliko energije poremećaja, a susjedni podsustavi će imati manje upravljačke napore, to je vidljivo na slici na idućoj stranici [Slika 58].

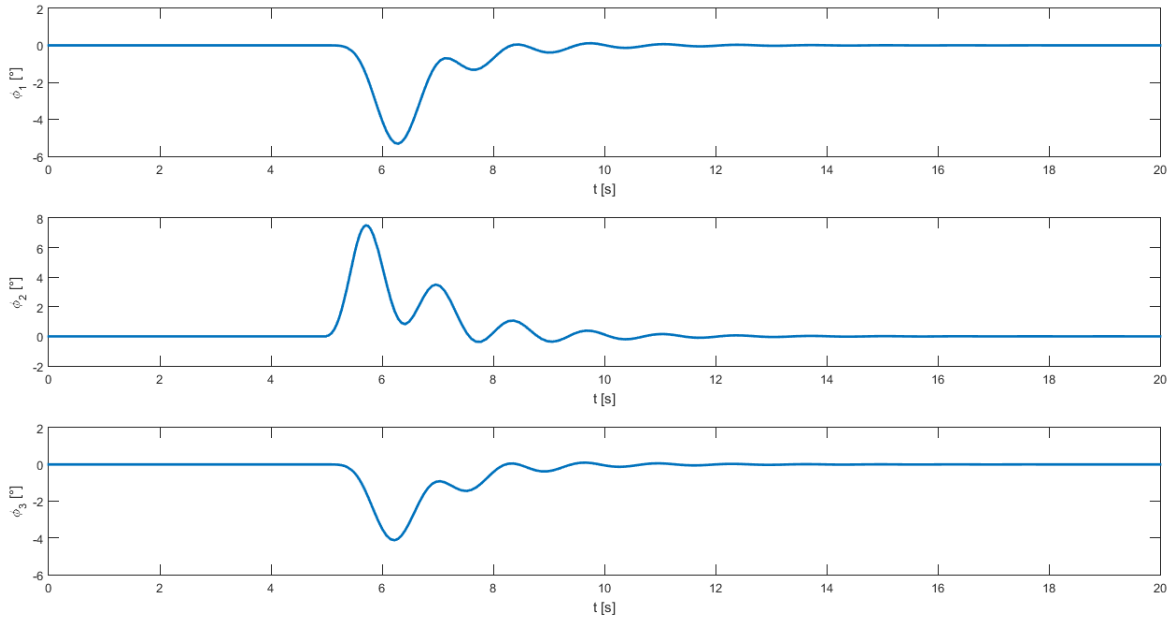


Slika 57 Pomak kolica, *k*=3N/m

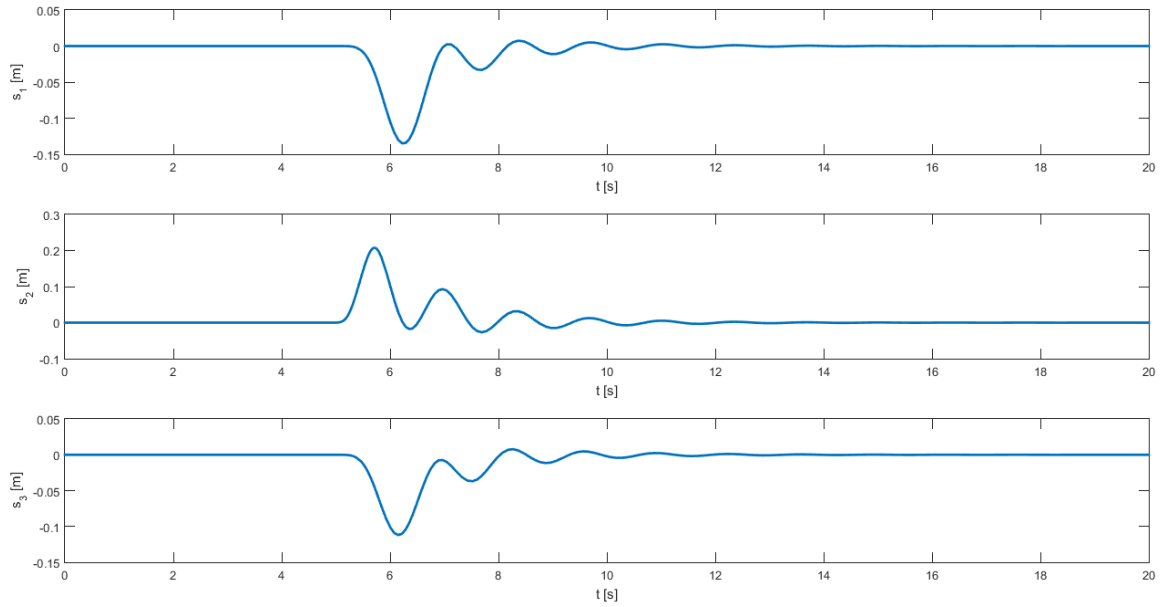


Slika 58 Upravljačke varijable, *k*=3N/m

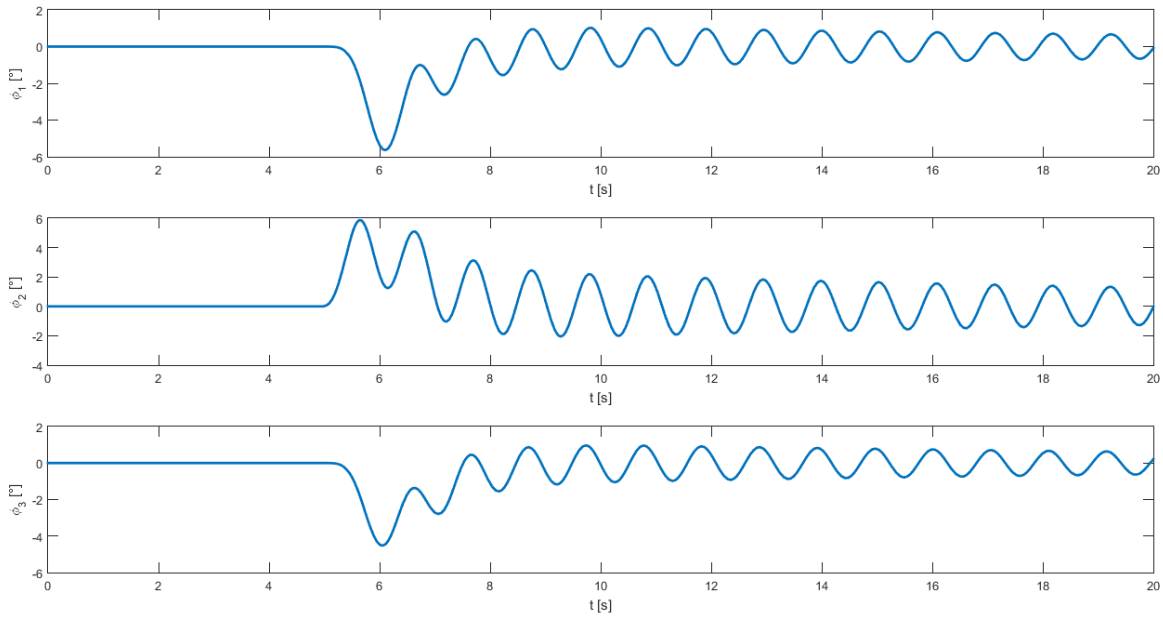
Sada će biti prikazani rezultati simulacije kada je *k*=8N/m. Pošto je povećanjem konstante opruge, veza između podsustav kruća može se očekivati da će poremećaj jače djelovati na susjedne podsustave, te će se pojaviti oscilatorno gibanje. Cilj ovog dijela rada je ispitati do koje granice na *k* je sustav stabilan. Donje slike [Slika 59] [Slika 60] pokazuju odziv sustava, vide se oscilacije u sustavu, ali regulator može stabilizirati sustav u realnom vremenu. Danjim povećanjem koeficijenta opruge sustav postaje nestabilan, kada je *k*=15 N/m sustav je na granici stabilnosti prikazano na što je vidljivo s donje slike [Slika 61].



Slika 59 Kut zakreta, *k*=8N/m

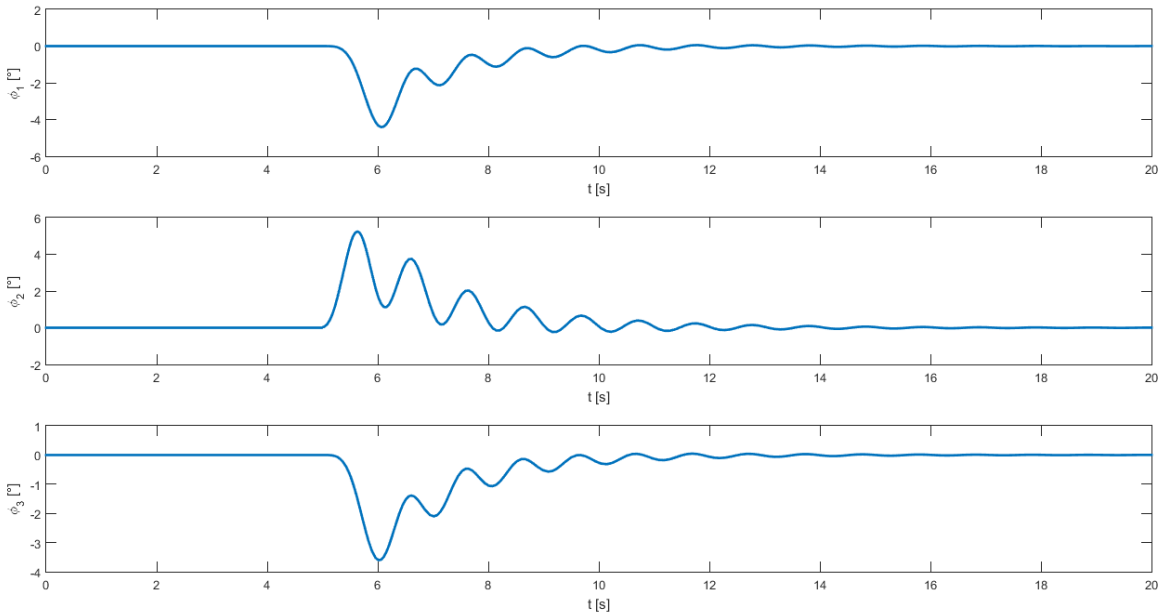


Slika 60 Pomak kolica, *k*=8N/m

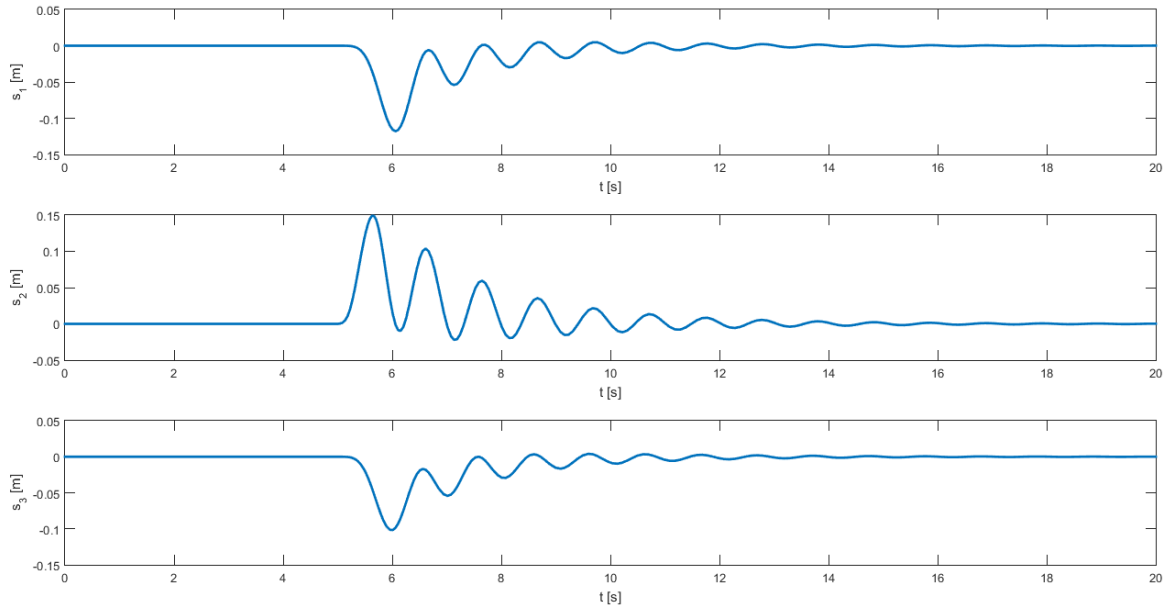


Slika 61 Kut zakreta, granica stabilnosti

Povećanjem parametra trenja u zglobu moguće je nestabilni sustav iz prethodnog primjera stabilizirati to je prikazano na donjim slikama [Slika 62] [Slika 63].

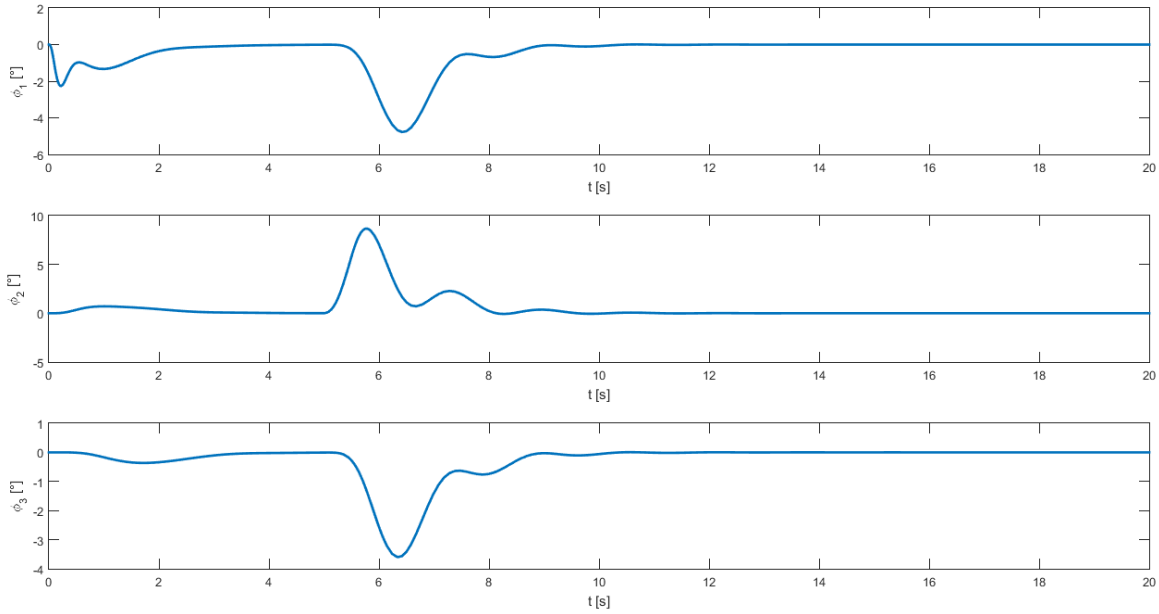


Slika 62 Kut zakreta, $\kappa = 0.4\frac{\mathrm{Nms}}{\mathrm{rad}}, \mathrm{k} = 15\mathrm{N/m}$



Slika 63 Pomak kolica, $\kappa = 0.4\frac{\mathrm{Nms}}{\mathrm{rad}}, \mathrm{k} = 15\mathrm{N/m}$

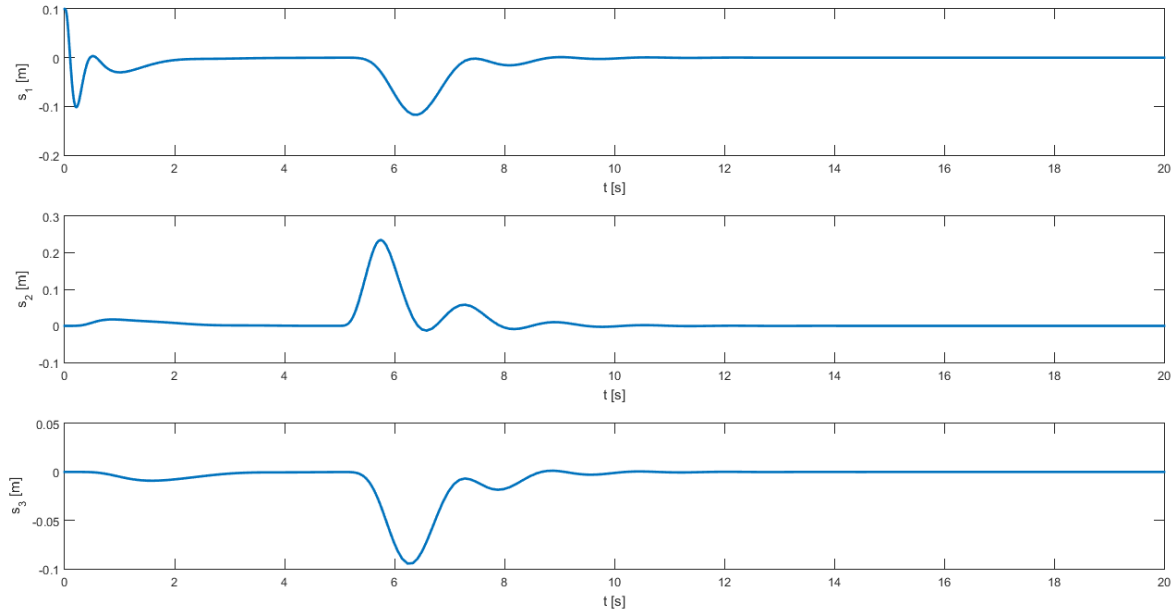
Za kraj još preostaje pokazati kako sustav djeluje pod utjecajem nekih ne nultih početnih uvjeta (malih vrijednosti) i različitih poremećaja.



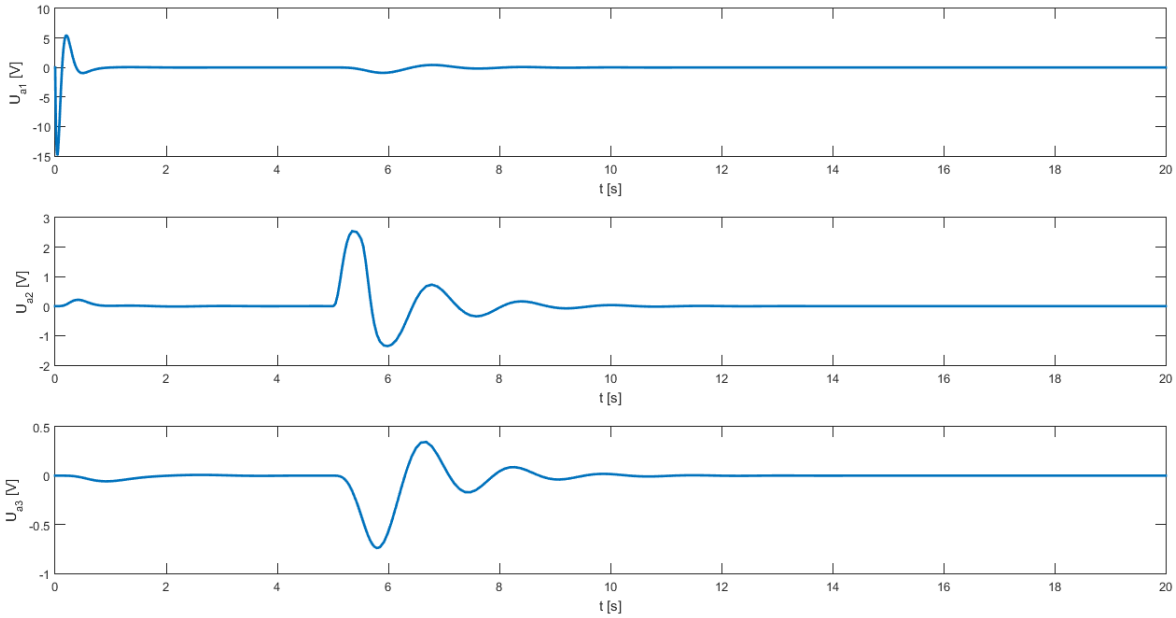
Slika 64 Kut zakreta, s1(0)=0,1

Slike [Slika 64] [Slika 65] pokazuju odzive sustava dok su kolica prvog podsustava van ravnotežnog položaja na početku, sustav se stabilizira za dvije sekunde, takvi početni uvjeti nemaju velik utjecaj na druge podsustave. [Slika 66] pokazuje upravljačke varijable i vidljivo je da bi upravljačka varijabla prvog sustava, gdje su ne nulti početni uvjeti, ušla u zasićenje i na realnom sustavu se ne bi postigli ovakvi odzivi, motor ne bi mogao postići traženo. Ovaj

problem je težak za riješiti ako bi se uključio u sintezi regulatora, bila bi potrebna dodatna ograničenja koja bi otežala pronalaženje rješenja. Postavljanje ograničenja na upravljačke varijable je veoma kompleksno i nije tema ovoga rada, već bi mogla biti tema sama za sebe. U eksperimentalnom postavu, odnosno u kodu napravljen je saturator kojim je ograničena upravljačka varijabla.

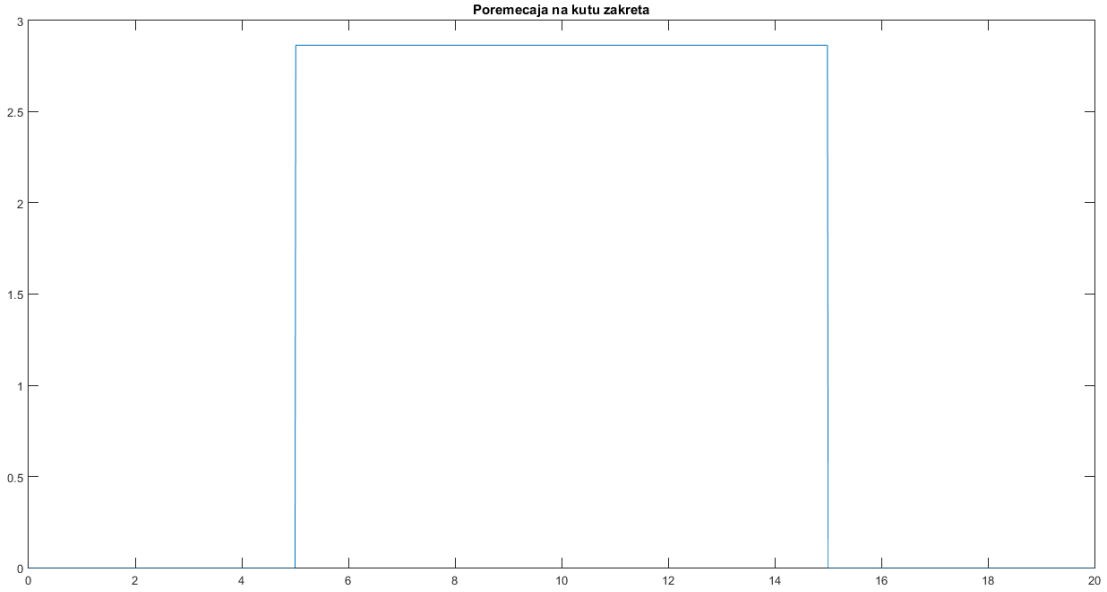


Slika 65 Pomak kolica, $s_1(0)=0,1$

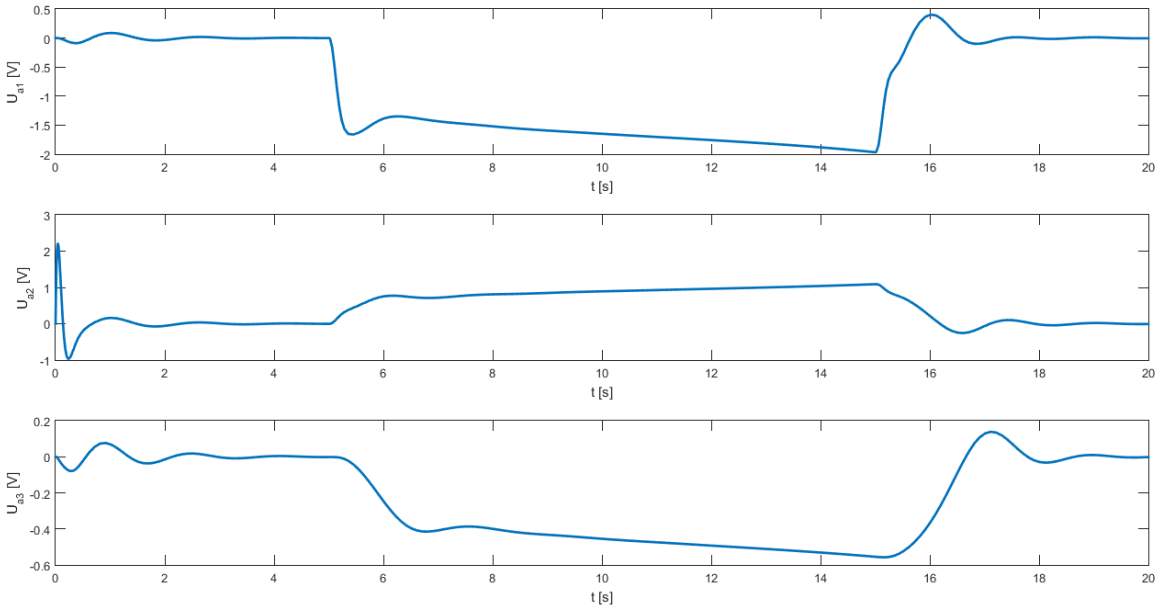


Slika 66 Upravljačke varijable, $s_1(0)=0,1$

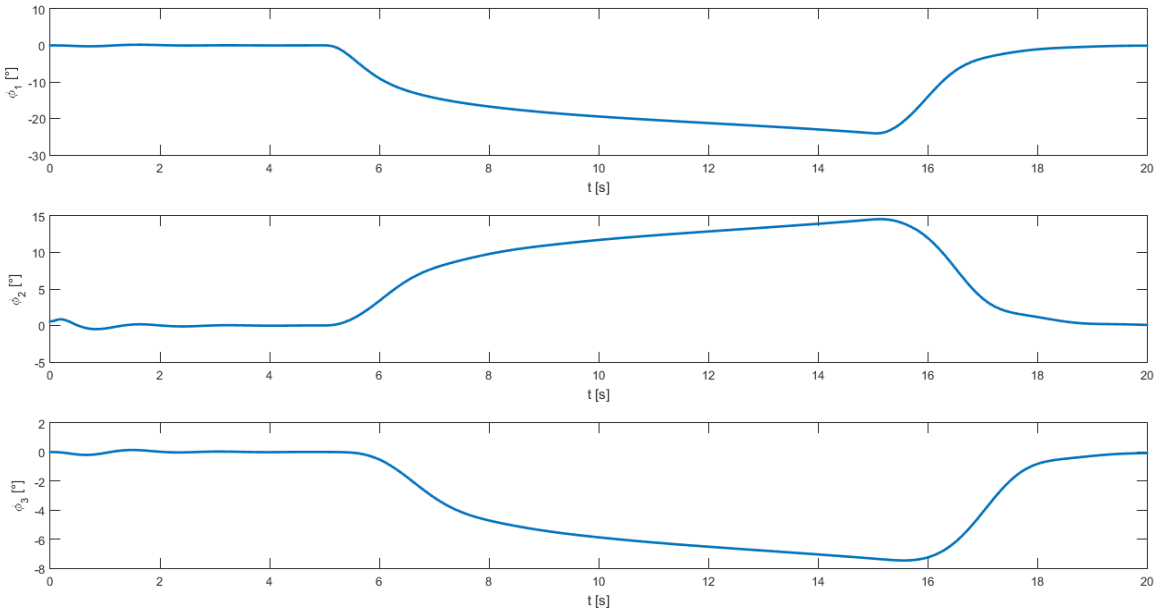
Sada je simuliran poremećaj oblika prikazanog na slici ispod [Slika 67]. Takav poremećaj je odabran zato što će se u eksperimentu programski simulirati isti takav. Poremećaj je modeliran kao referenca na kut zakreta podsustava 2.



Slika 67 Poremećaj A

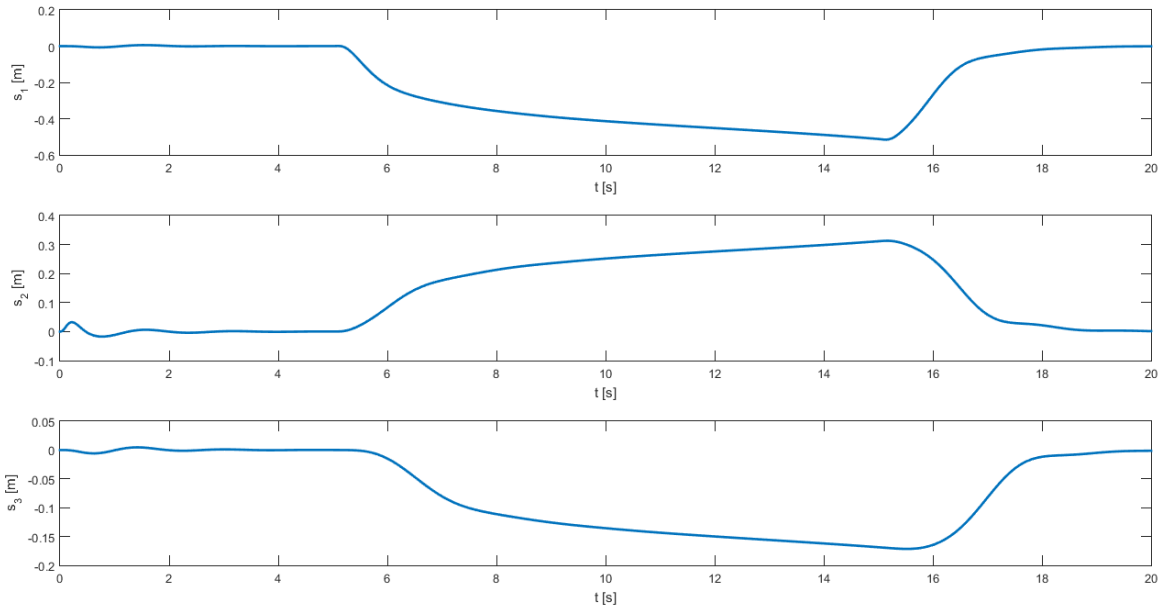


Slika 68 Upravljačke varijable, poremećaj A



Slika 69 Zakret kuta, poremećaj A

Prije svega potrebno je naglasiti da uz poremećaj ovdje je i zadano $\phi_2(0) = 0.01$ rad, taj početni uvjet nema značaj utjecaj na sustav, regulator ne traži previše od motora, prikazano na gornjoj slici [Slika 68]. Sa slika [Slika 69][Slika 70] jasno je vidljivo djelovanje sprega između podsustava, sve se klackalice zakreću. Dvije sekunde nakon prestanka djelovanja poremećaja sustav se stabilizira bez oscilacija.



Slika 70 Pomak kolica, poremećaj A

Sustav dobro reagira na ne nulte početne uvjete, očekivano traže se veliki upravljački napori kada kolica nisu u ravnotežnom položaju kako bi se dovela u njega. Regulator brzo anulira takve početne uvjete da je njihov utjecaj na susjedne podsustave gotovo zanemariv.

4.2. Eksperimentalni rezultati

Za primjenu odabranog regulatora na eksperimentalnom sustavu potrebno je provesti diskretizaciju. Jednostavno rečeno sustav se promatrao u kontinuiranom vremenu, a kada ga želimo implementirati u neki stvarni sustav odnosno u računalo moramo ga diskretizirati zato što računalo radi s diskretnim vremenom, odnosno s u taktovima. Diskretizacija se provodi u matlabovom funkcijom c2d s korakom diskretizacije od 0,001.

Za implementaciju je odabran regulator iz prethodnog poglavlja definiran tablicom [Tablica 13]. Diskretizacijom dobijemo sljedeća pojačanja regulatora:

$$K = \begin{bmatrix} -278{,}11 & 204{,}17 & 0 & 0 & 0 & 0 & -88{,}49 & 23{,}65 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -278{,}11 & 204{,}17 & 0 & 0 & 0 & 0 & -88{,}49 & 23{,}65 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -983{,}99 & 671{,}16 & 0 & 0 & 0 & 0 & -312{,}26 & 80{,}10 \end{bmatrix},$$

te matrice observera, dane u donjoj tablici [Tablica 14], potrebne za implementaciju u MC, matrica A_o i B_o potrebno je diskretizirati dok jedinične matrice ostaju kakve jesu.

Tablica 14 Diskretizirne matrice observera

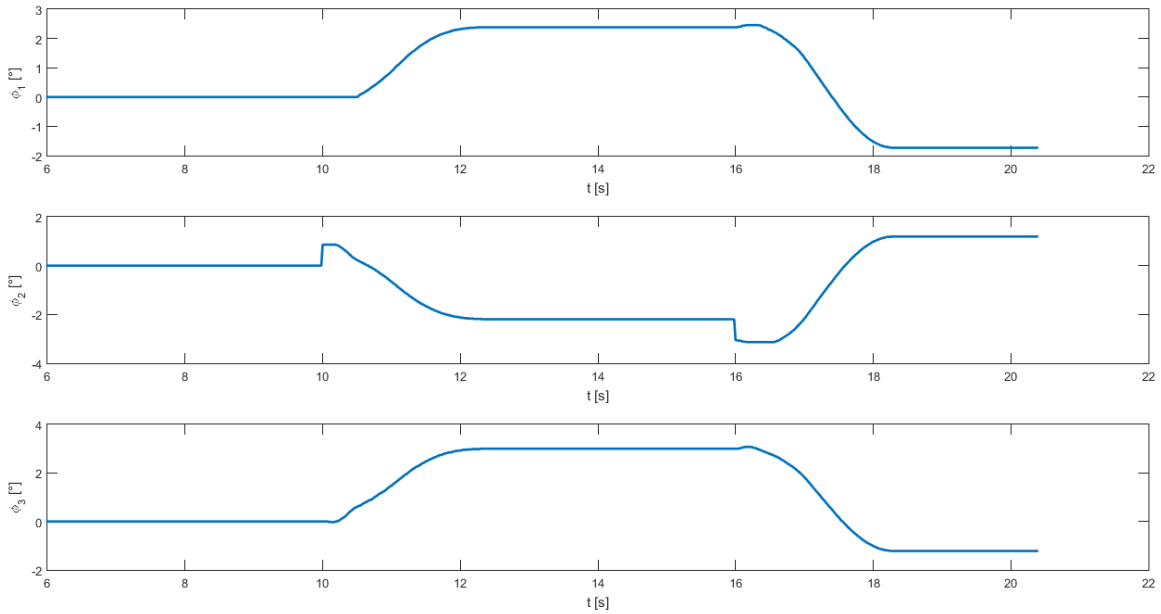
$$A_c = \begin{bmatrix} 0{,}9780 & 0{,}0139 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}001 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0{,}0058 & 0{,}9974 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}001 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}9780 & 0{,}0139 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}001 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0{,}0058 & 0{,}9974 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}001 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}9404 & 0{,}0182 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}001 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0{,}0066 & 0{,}9943 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}001 \\ -0{,}0787 & 0{,}0477 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}9998 & -0{,}0014 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0{,}0009 & -0{,}0018 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}9910 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0{,}0787 & 0{,}0477 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}9998 & -0{,}0014 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0{,}0009 & -0{,}0018 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}9910 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0{,}2973 & 0{,}0876 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}9997 & -0{,}0013 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0{,}0007 & -0{,}0017 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}9910 \end{bmatrix},$$

$$B_o = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0{,}0220 & -0{,}0140 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}0058 & 0{,}0026 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}0220 & -0{,}0140 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}0058 & 0{,}0026 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}0596 & -0{,}0182 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}0066 & 0{,}0057 \\ 0{,}0004 & 0 & 0 & 0{,}0868 & -0{,}0563 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}0024 & 0 & 0 & -0{,}0074 & 0{,}0002 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}0004 & 0 & 0 & 0 & 0{,}0868 & -0{,}0563 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}0024 & 0 & 0 & 0 & -0{,}0074 & 0{,}0002 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}0004 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}3054 & -0{,}0963 \\ 0 & 0 & 0{,}0024 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0{,}0076 & 0{,}0001 \end{bmatrix}.$$

Tokom eksperimenta pojačanja regulator su promijenjena kako se postigao brži odziv, pojačanja povezana s kutom zakreta i pomakom kolica su povećana dva i pol puta, P djelovanje. Sustav ne posjeduje svojstvo separabilnosti, pa s ovakvom promjenom parametri regulatora

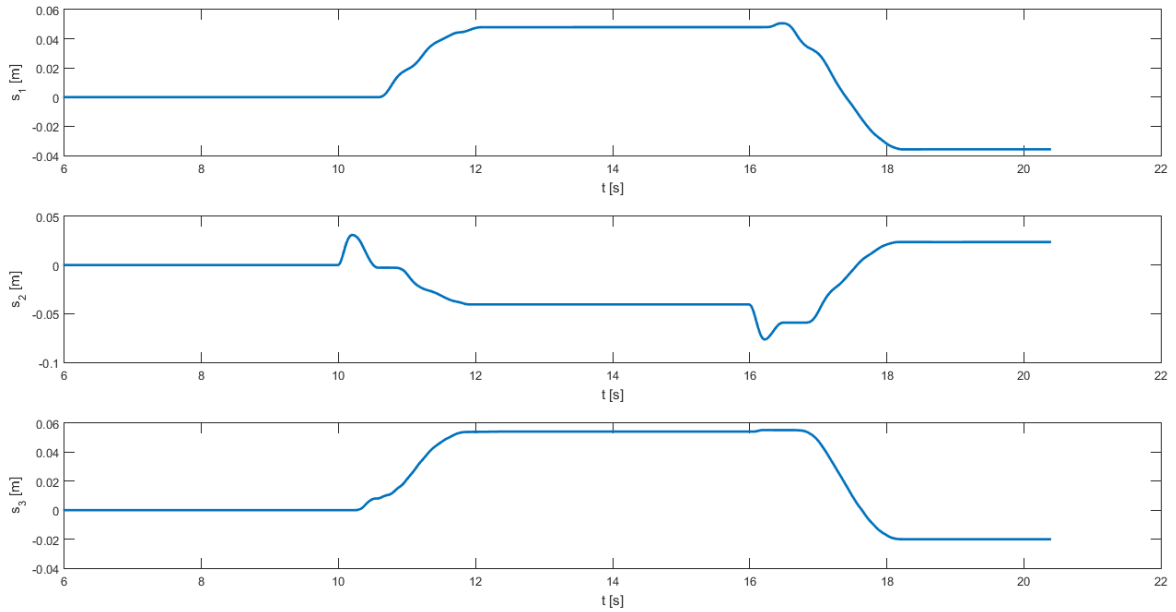
sigurno nisu optimalni, niti je dinamika observera kakva bi trebala biti, no promjena nije velika pa se očekuju dobri rezultati.

Prikazani su odzivi i upravljačke varijable sustava za slučaj u kojemu je poremećaj oblika prikazanog na slici [Slika 67].



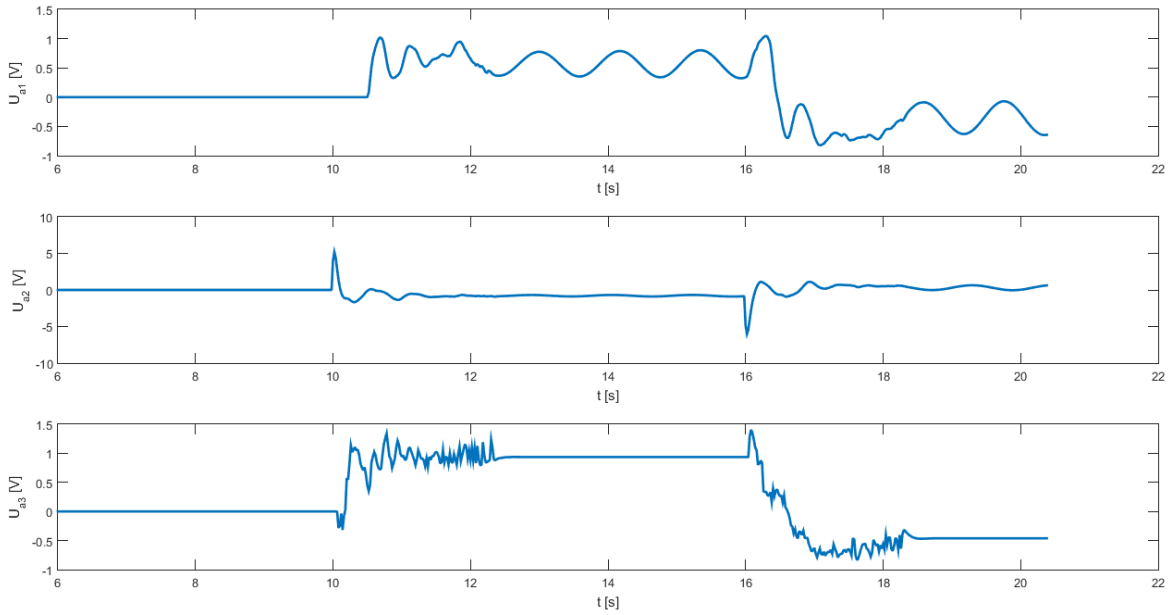
Slika 71 Kut zakreta, eksperiment 1

[Slika 71] prikazuje mjereni kut zakreta pojedinog sustava, podsustavi 1 i 3 očekivano reagiraju na poremećaj pod utjecajem sprega podsustav 2 ih povlači. Poremećaj na ovom sustavu nije bio vanjski, već je u kodu simuliran kao zadana referenca na kut zakreta, s ciljem da se eksperimentalni rezultati mogu usporediti sa simulacijskim. Zato se na gornjoj slici vidi pomak podsustava 2 u suprotnome smjeru, to je posljedica trzaja motora, kako bi sustav došao u referentno stanje.



Slika 72 Pomak kolica, eksperiment 1

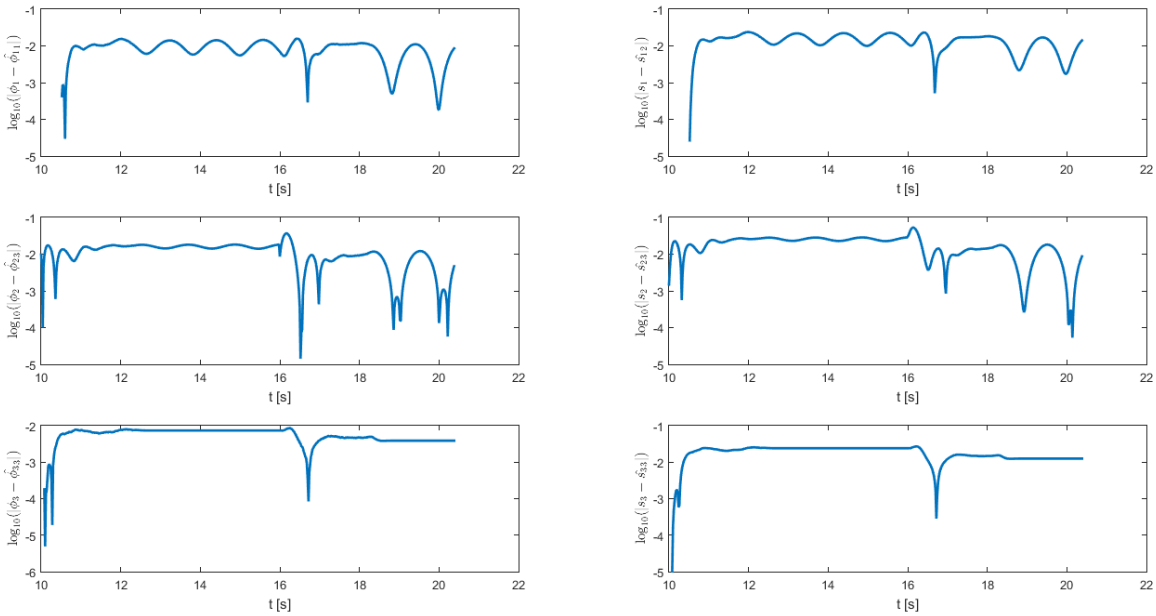
[Slika 72] prikazuje mjerene pomake kolica, vidi se pomak kolica podsustava 2, koja izazivaju poremećaj u sustavu. Kolica ostalih podsustava očekivano idu na stranu klackalice koja se podigla (pozitivan kut zakreta →pozitivan pomak kolica).



Slika 73 Upravljačke varijable, eksperiment 1

[Slika 73] prikazuje upravljačke varijable, na podsustavu 3 vide se oscilacije visokih frekvencija i male amplitude, razlog tomu su velika pojačanje regulatora tog podsustava, trebalo

bi smanjiti pojačanja. Na podsustavu 1 vide se oscilacije oko ravnotežnog položaja, razlog tomu je vidljiv na slici [Slika 74], greška observera prvog susta oscilira oko male vrijednost, što direktno utječe na upravljačku varijablu, trebalo bi smanjiti pojačanja regulatora i/ili povećati pojačanja observera. Na podsustavu 2 na kojemu djeluje poremećaj (referenca) vide se vrhovi, koji dovode do reference i po kraju djelovanja poremećaja nazad u ravnotežno stanje.

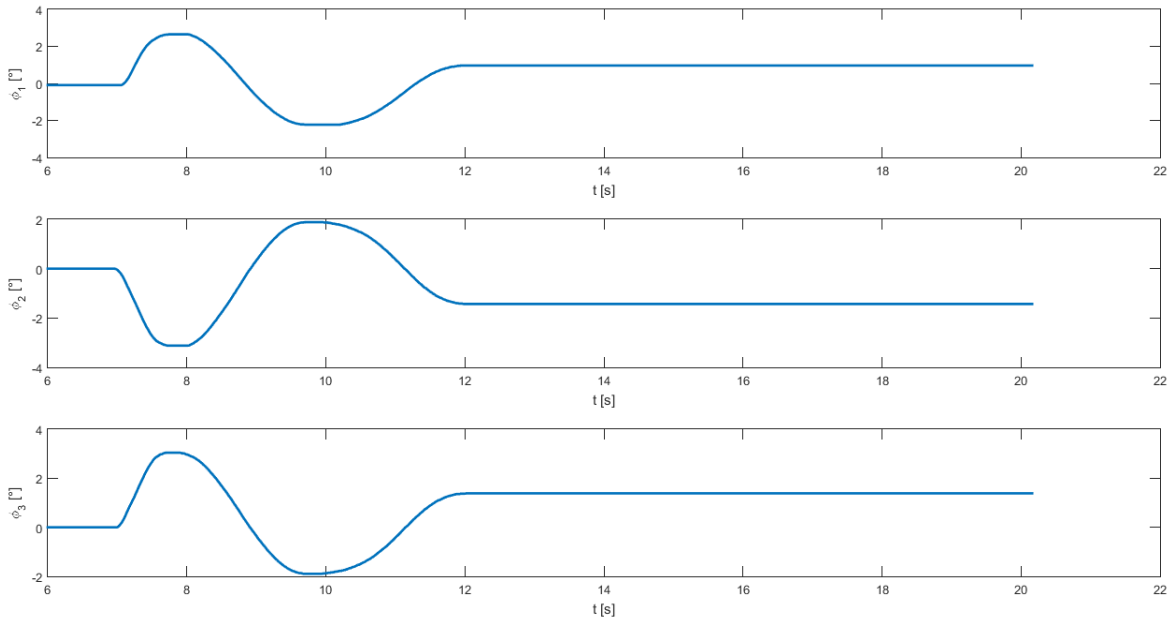


Slika 74 Greška observera, eksperiment 1

[Slika 74] prikazuje grešku observera, nisu postignute očekivane performanse da greška bude manja od10^{-2}, greška nije dovoljno mada da nema učinak na upravljaču varijablu. Postoji više mogućih razloga zašto su performanse observera lošije nego dobivene simulacijama. Sustav ne posjeduje svojstvo separabilnosti, a tokom eksperimenta smo mijenjali pojačanja regulatora kako bismo poboljšali odziv, tako da observer koji je korišten ne odgovara regulatoru. Drugi razlog bi mogao biti da je ne modelirana dinamika sprega, pogrešno ograničena ili treće utjecaj trenja na vodilicama koloture. Često se tokom eksperimenta desilo da se kolotura ne može gibati, pa kao da nema djelovanja sprega s obje strane sustava.

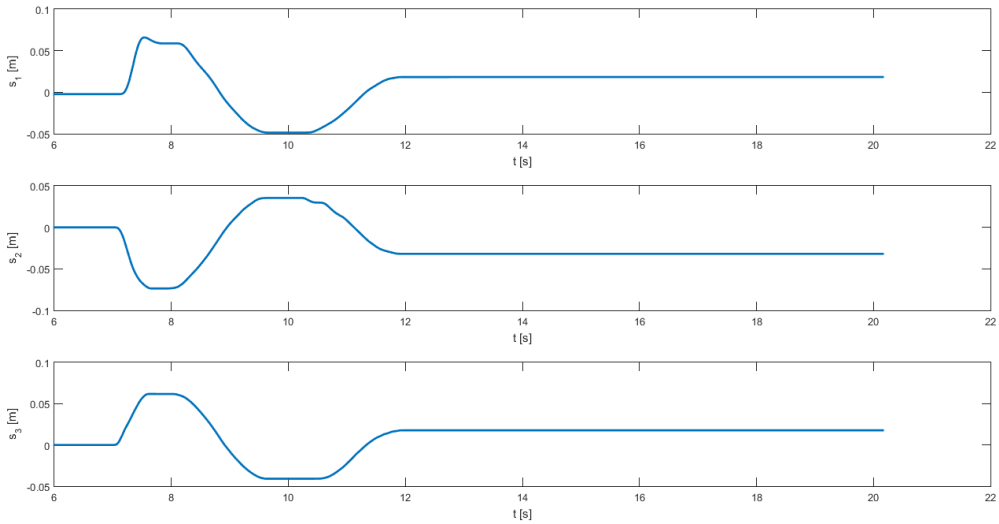
Eksperiment je pokazao zadovoljavajuće rezultate, nije bilo vidljivih oscilacija, visokofrekventne upravljačke varijable nisu dovele do naprezanja motora.

Sada će biti prikazani eksperimentalni rezultati kada se na sustav djeluje proizvoljnim poremećajem. Podsustav 2 je rukom lagano uzdrman oko sedme sekunde, približno jednu sekundu nakon početka mjerenja, MC je ograničene memorije stoga nisu spremljena sva mjerenja u eksperimentu.



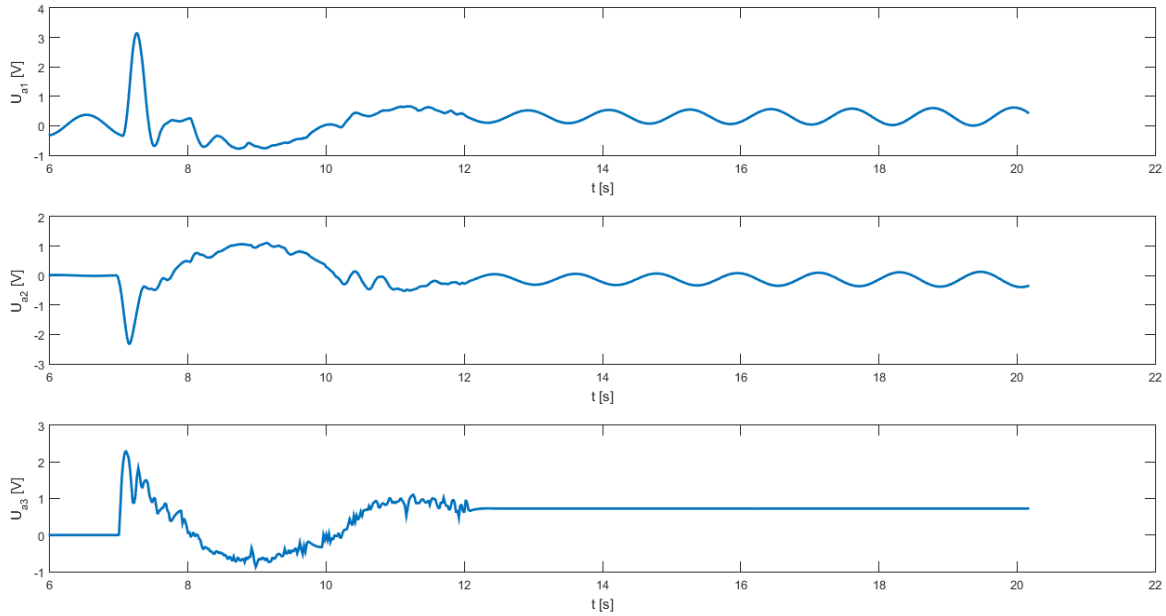
Slika 75 Kut zakreta, eksperiment 2

[Slika 75] prikazuje kutove zakreta sustava. Podsustavi nemaju velik zakret, do 3º, a sustav se stabilizira unutar pet sekundi. Sustav se ne vrača u početno stanje, vidi se trajno regulacijsko odstupanje, u sustav bi trebalo dodati integracijsko djelovanje.



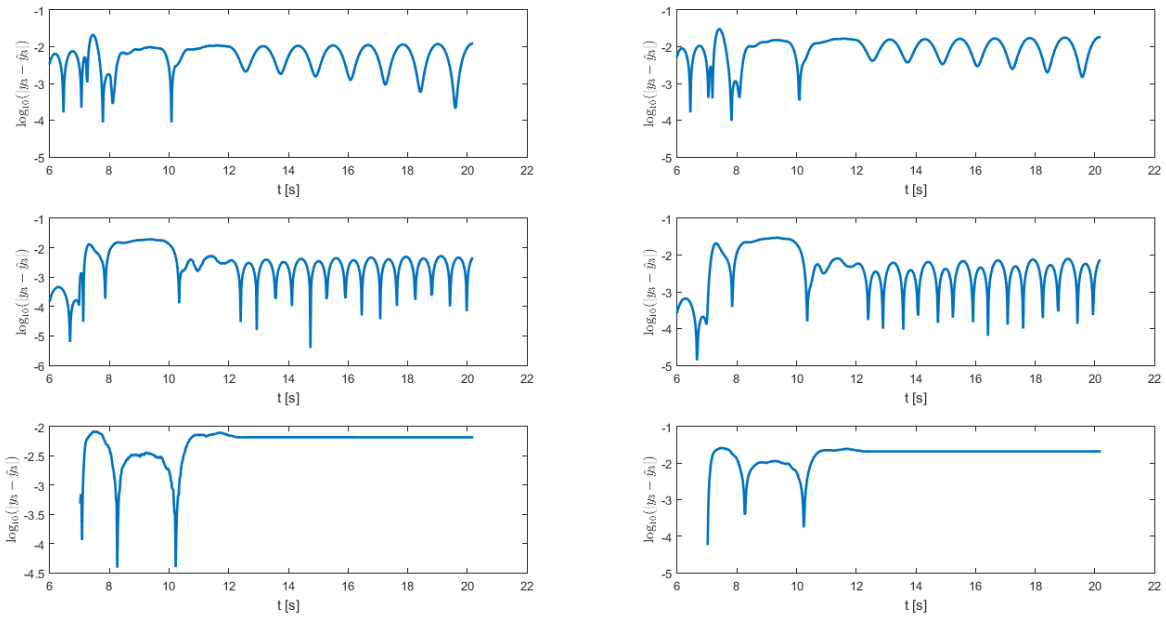
Slika 76 Pomak kolica, eksperiment 2

[Slika 76] prikazuje pomak kolica, može se vidjeti da amplitude pomaka nisu velike, pa je zato sustav spor, povećanjem pojačanja P člana regulatora mogli bismo ubrzati sustav. Isto će se vidjeti na dijagramu upravljačkih varijabli.



Slika 77 Upravljačke varijable, eksperiment 2

Na upravljačkim varijablama prikazanim na gornjoj slici [Slika 77], vidimo skokove u naponu, unutar dopuštenog područja, mogli bismo povećati pojačanja bez da dođe do saturacije. Visokofrekventna komponenta napona trećeg motora nije bila vidljiva u eksperimentu, a posljedica je velikog pojačanja regulatora tog podsustava. Oscilacije upravljačke varijable podsustava 1 i 2 su opet posljedica oscilacija u observeru, vidljivih u dijagramu pogreške observera, prikazanom na donjoj slici [Slika 78].



Slika 78 Greška observera, eksperiment 2

Tokom provođenja eksperimenta bilo je potrebno inicijalizirati sustav u nultim početnim uvjetima što se pokazalo izrazito teško. Najbolji rezultati su se dobili kada je sustav inicijaliziran u nekom ravnotežnom položaju, koji nije nužno nulti i kada je regulacija počela iz istog tog položaja. Sustav je u nekim trenucima kada je početno stanje bilo loše postavljeno pokazao nestabilno ponašanje.

5. ZAKLJUČAK

Matematičko modeliranje eksperimentalnog sustava provedeno je Euler-Lagrangeovom metodom, gdje se pravilnim odabirom vektora generaliziranih, odnosno još važnije, vektorom koordinata, dinamika podsustava može zapisati u kompaktnom matričnom obliku. Tako opisani podsustavi lako se opišu u globalnome obliku, svi skupa kao jedan sustav, za proizvoljan broj podsustava. Globalni sustav je opisan blok dijagonalnim matricama. Uvođenjem pravilno odabranog vektora stanja, sustav se jednostavno zapiše u obliku prostora stanja koji je povoljan za analizu i sintezu regulatora. Linearizacijom sustava oko ravnotežnog položaja dobije se linearni model, na temelju kojega se provodi sinteza regulatora. Linearizacija se često koristi u teoriji upravljanja zato što se kompleksni nelinearni sustavi prikažu kao mnogo jednostavniji. Linearni model nelinearnog sustava je točan samo oko točke linearizacije. Stoga ako je nelinearnim sustavom potrebno upravljati i u drugim točkama, potrebno je koristiti neke kompleksnije metode upravljanja nelinearnim sustavima.

Ukratko su uspoređene strukture upravljanja te se uspostavilo kako centralizirano upravljanje često pokazuje najbolje rezultate, ali je teško izvedivo za velike sustave i potreban je snažan hardware koji stigne provesti sve algoritme u dovoljno kratkom vremenu. Distribuirano upravljanje rasterećuje sustav, ali veze između podsustava otežavaju sintezu i primjenu takve strukture u praksi. Decentralizirano upravljanje očekivano daje lošije rezultate zato što podsustav ne dobiva informacije iz cijelog sustava, ali je zato sinteza i primjena ovakve strukture jednostavnija.

Linearne matrične nejednadžbe su čest alat u teoriji upravljanja, možda bi se moglo reći da su i standard. Mnogobrojni uvjeti i ograničenja se mogu zapisati u obliku linearne matrične nejednadžbe, a više linearnih matričnih nejednadžbi se opet mogu zapisati kao jedna linearna matrična nejednadžba, s dijagonalnom strukturom. Takvu strukturu možemo povezati s prije opisanom strukturom globalnog sustava koja je također blok dijagonalna. Često je moguće i drugačija ograničenja (BMI, itd.) prikazati u obliku linearne matrične nejednadžbe, u koju svrhu se koriste Schourov komplement, eliminacija varijabli, itd.. Linearne matrične nejednadžbe za rješenje imaju konveksni skup što ih čini povoljnima za korištenje u procesu optimiranja. Problemi optimiranja se više ne dijele na linearne i nelinearne, već na konveksne i nekonveksne. Zato što nelinearna ograničenja mogu biti konveksna. Bitno je naglasiti da postoje razvijene, moćne i efikasne metode za rješavanje konveksnih optimizacijskih problema, pa tako i probleme opisane linearnim matričnim nejednadžbama.

U ovome radu se koristio Matlab i pred procesor za rješavanje optimizacijskih problema, YALMIP. Jednostavan je za korištenje i postoje mnogi primjeri za pomoć pri zadavanju optimizacijskog problema. YALMIP je za rješavanje koristio rješavač Mosek, kojim se zadani problem veoma brzo riješio, koristeći algoritam traženja rješenja , Interior-point.

Ukratko su izložena razmatranja o dinamičkom regulatoru, regulator reduciranog reda i regulatoru stanja baziranom na observeru stanja. Postojala je želja da se u radu koristi observer stanja zato što je čest u primjeni pošto su u praksi rijetko sva stanja sustava mjerljiva. Odabir se sveo na sintezu s observerom punog reda ili reduciranog reda. Kako je sinteza samog regulatora stanja veoma slična u oba razmatrana dizajna, razlika je u dizajnu observera i načinu na koji je povezan sa stavom. Dizajn s reduciran observerom naizgled je kompliciraniji i posjeduje svojstvo separabilnosti, dok odabrani ne posjeduje to svojstvo.

Regulator stanja baziran na observeru stanja, dizajniran po **H**∞ kriteriju je odabran iako ne posjeduje svojstvo separabilnosti zato što se ovim dizajnom pojačanja observera i regulatora izračunavaju u jednom koraku. Originalna metoda je bila nešto kompleksnija, gdje su autori ograničili i nesigurnost parametara. U ovom radu nesigurnost parametara nije uzeta u obzir zato što su svi parametri sustava mjerljivi pa se pretpostavilo da su točni.

H∞ sinteza regulatora je moćan alat za upravljanje složenim sustavima, minimiziranjem takve norme možemo postići visok stupanj robusnosti sustava na vanjske poremećaje pošto ona predstavlja normu na prijenosnu funkciju sustava, koja opisuje utjecaj ulaza na izlaz sustava.

Eksperimentima se sustav pokazao stabilnim ako je inicijalizacija sustava dobro napravljena. Pokazalo se da sustav jako ovisi o inicijalizaciji i početnim uvjetima što je uobičajeno za nelinearne sustave. Nedostatak integracijskog djelovanja i robusnost regulatora uzrokuju primjetnu regulacijsku pogrešku. Sustav ne posjeduje svojstvo separabilnosti, a teško je postići željene odzive bez ručnog namještanja pojačanja za koje je onda potrebno tražiti odgovarajuća pojačanja observera, što dovodi do povećanja greške u sustavu.

Daljnja istraživanja na ovome postavu bi se mogla baviti drugačijim dizajnom decentraliziranog upravljanja, koja bi se zatim mogla usporediti s rezultatima dobivenim u ovome radu. Također mogao bi se sagledati utjecaj metode diskretizacije čak i sa istim regulatorom. Zanimljivo bi bilo ispitati ograničenje na spreg koje je u ovom radu linearno, pa da bi se modeliralo kao polinom *n-tog* reda. Još jedno istraživanje bi se moglo provesti na sustavu, a to je modeliranje trenja u sustavu. U eksperimentu se trenje vodilice koloture pokazalo kao jako problematično.

LITERATURA

[1] Y. Guo, D. J. Hill i Y. Wang, »Nonlinear Decentralized Control of Large-Scale Power System,« *Automatica,* svez. 36, br. 2000, pp. 1275-1289.

[2] J. Ekanayake, K. Liyanage, J. Wu, A. Yokoyama i N. Jenkins, Smart Grid: Technology and applications, Willey, 2012.

[3] F. Bullo, J. Cortés i S. i Martinez, Distributed Control of Robotic Networks: A Mathematical Approach to Motion Coordination Algorithms, Princeton University Press, 2009.

[4] R. Srikant, Mathematics of internet congestion control, 1st, Ur., Birkhauser, 2012.

[5] M. Lobrović, A. Jokić, V. Milić, M. Žilić, J. Kasać, Z. Domitran i M. Crneković, »A Case Study in Distributed Control: Elastically Interconnected Seesaw-cart Systems,« u *Mediterranean Conference on Control and Automation*, Valletta, 2017.

[6] K. H. Khalil, Nonlinear Systems, 3rd ur., Upper Saddle River, New Jersey: Prentice Hall, 2002.

[7] H. J. Marquez, Nonlinear Control Systems, New Jersey: Wiley-Interscience, 2003.

[8] A. Choukchou-Braham, B. Cherki, M. Djemai i K. Busawon, Analysis and Control of Underactuated Mechanical Systems, Springer, 2014.

[9] D. D. Šiljak, Decentralized Control of Complex Systems, San Diego: Academic Press, 1991.

[10] M. S. Mahmoud, Decentralized Systems with Design Constraints, London: Springer, 2011.

[11] A. S. Tlili i N. B. Braiek, »H∞ optimization-based decentralized control of linear interconnected systems with nonlinearinterconections,« *Journal of the Franklin Institute,* svez. 351, br. 6, pp. 3286-3304, 2014.

[12] Y. Tang, M. Tomizuka, G. Guerrero i G. Montemayor, »Decentralized Robust Control of Mechanical Systems,« *IEEE Transactions on Automatic Control,* svez. 45, br. 4, pp. 771-776, 2000.

[13] S. Boyd i L. Ghaoui, Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory, Philadelphia: Siam, 1994.

[14] R. J. Caverly i J. R. Forbes, LMI Properties and Applications in System Stability, and Control Theory, 2019.

[15] S. H. Zak, Systems and Control, New York: OXFOR UNIVERCITY PRESS, 2003.

[16] J. Lian, K. Kalsi i S. H. Žak, »Reduced-Order Observer Based Decentralized Controller Design: The LMI Approach,« u *17th Mediterranean Conference on Control & Automation*, Thessaloniki, 2009.

[17] K. Kalsi, J. Lian i S. H. Žak, »Decentralized control useing reduced-order unknown input obzervers,« u *47th IEEE Conference on Decision and Control*, Cancun, 2008.

DODATAK

Matlab kod:

Glavni kod, modeliranje i sinteza

```
clear all
close all
clc

global K Cn Ap B1p Lo

%%Simbolicke variable
%generalizirane koordinate:
syms q1 q2 q3 q4 q5 q6 dq1 dq2 dq3 dq4 dq5 dq6

%variable stanja:
syms x1 x2 x3 x4 x5 x6 x7 x8 x9 x10 x11 x12

% izlazne variable i poremecaji:
syms u1 u2 u3 tD1 tD2 tD3 dd1 dd2 dd3 tM1 tM2 tM3

%nelinearne veze:
syms zeta11 zeta12 zeta31 zeta32

%%Parametri sustava
parameters_values;


%%Matricni oblik Euler-Lagrangeovih jednadzbi

Q = [q1;q2;q3;q4;q5;q6];
dQ = [dq1;dq2;dq3;dq4;dq5;dq6];
x = [x1;x2;x3;x4;x5;x6;x7;x8;x9;x10;x11;x12];
UM = [u1;u2;u3];
TD = [dd1;dd2;dd3];


%Matrica inercija
M111 = mC1*c1^2 + mC1*q2^2 + J1;
M112 = -mC1*c1;
M121 = M112;
M122 = mC1;
M1 = [M111 M112;M121 M122];

M211 = mC2*c2^2 + mC2*q4^2 + J2;
M212 = -mC2*c2;
M221 = M212;
M222 = mC2;
M2 = [M211 M212;M221 M222];
```

```
M311 = mC3*c3^2 + mC3*q6^2 + J3;
M312 = -mC3*c3;
M321 = M312;
M322 = mC3;
M3 = [M311 M312;M321 M322];

%Vektor Corriolisovih sila
C11 = 2*mC1*q2*dq2*dq1;
C12 = -mC1*q2*dq1^2 + (Kt*Ke/Ra/(p^2)/(r^2))*dq2;
C1 = [C11;C12];

C21 = 2*mC2*q4*dq4*dq3;
C22 = -mC2*q4*dq3^2 + (Kt*Ke/Ra/(p^2)/(r^2))*dq4;
C2 = [C21;C22];

C31 = 2*mC3*q6*dq6*dq5;
C32 = -mC3*q6*dq5^2 + (Kt*Ke/Ra/(p^2)/(r^2))*dq6;
C3 = [C31;C32];

%Vektor gravitacijskog djelovanja
g11 = -g*a1*mA1*sin(q1) + g*mC1*(q2*cos(q1) - c1*sin(q1));
g12 = mC1*g*sin(q1);
g1 = [g11;g12];

g21 = -g*a2*mA2*sin(q3) + g*mC2*(q4*cos(q3) - c2*sin(q3));
g22 = mC2*g*sin(q3);
g2 = [g21;g22];

g31 = -g*a3*mA3*sin(q5) + g*mC3*(q6*cos(q5) - c3*sin(q5));
g32 = mC3*g*sin(q5);
g3 = [g31;g32];

%Trenje (gubici)
Phi1 = [kappa*dq1;0];
Phi2 = [kappa*dq3;0];
Phi3 = [kappa*dq5;0];

%Nelinearne veze
zeta11 = L*cos(q1) - 2*d1*sin(q1);
zeta12 = 2*d1*cos(q1) - 2*d1 + 2*d2*cos(q3) - 2*d2 + L*sin(q1)
+ L*sin(q3);
z1 = k*zeta11*(zeta12 + LL12sd + LL120u + LR12sd + LR120u -...
    LL120d - LL12su - LR120d - LR12su)/4;

z2 = k*(4*d2*L*cos(q3)^2 + L*cos(q3)*...
    (-2*d1 - 4*d2 - 2*d3 -...
    LL120d + LL120u + LL12sd - LL12su -...
    LL230d + LL230u + LL23sd - LL23su -...
    LR120d + LR120u + LR12sd - LR12su -...
    LR230d + LR230u + LR23sd - LR23su +...
    2*d1*cos(q1) + 2*d3*cos(q5) +...
```

```
    L*sin(q1) + L*sin(q5)) -...
    2*sin(q3)*(-2*d1*d2 - 4*d2^2 - 2*d2*d3 + d2*...
    (-LL120d + LL120u + LL12sd - LL12su -...
    LL230d + LL230u + LL23sd - LL23su -...
    LR120d + LR120u + LR12sd - LR12su -...
    LR230d + LR230u + LR23sd - LR23su) +...
    2*d1*d2*cos(q1) + (4*d2^2 - L^2)*cos(q3) + ...
    2*d2*d3*cos(q5) + d2*L*sin(q1) + ...
    2*d2*L*sin(q3) + d2*L*sin(q5)))/4;

zeta31 = L*cos(q5) - 2*d3*sin(q5);
zeta32 = 2*d3*cos(q5) - 2*d3 + 2*d2*cos(q3) - 2*d2 +...
    L*sin(q5) + L*sin(q3);

z3 = k*zeta31*(zeta32 + LL23sd + LL230u + LR23sd + LR230u -...
    LL230d - LL23su - LR230d - LR23su)/4;

Z1 = [z1;0];
Z2 = [z2;0];
Z3 = [z3;0];


%Matrice cijelog sustava, spregnuti
M = blkdiag(M1,M2,M3);
C = [C1;C2;C3];
G = [g1;g2;g3];
F = [Phi1;Phi2;Phi3];
Z = [Z1;Z2;Z3];

Cn = [1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
      0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
      0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
      0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0;
      0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0;
      0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0];

cff = Kt/Ra/p/r;
e1 = [1;0]; e2 = [0;1]*cff;

EM = blkdiag(e2, e2, e2);
ED = blkdiag(e1, e1, e1);

fx = [x(7:12);(-M^-1)*(C + G + F + Z)];
Bx1 = [zeros(6,3);(M^-1)*EM];
Bx2 = [zeros(6,3);(M^-1)*ED];
hx = fx + Bx1*UM + Bx2*TD;

hx = subs(hx,{q1, q2, q3, q4, q5, q6, dq1, dq2, dq3, dq4, dq5,
dq6},...
    {x1, x2, x3, x4, x5, x6, x7, x8, x9, x10, x11, x12});
```

```
%Nelinearna jednadžba sustava
%hxn = eval(hx);
hxn = vpa(hx,4);

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Sustav 3 klackalice s kolicima, bez sprega

fxp = [x(7:12);(-M^-1)*(C + G + F)];
%ostalo kao gore
hxp = fxp + Bx1*UM + Bx2*TD;

hxp = subs(hxp,{q1, q2, q3, q4, q5, q6, dq1, dq2, dq3, dq4,
dq5, dq6},...
    {x1, x2, x3, x4, x5, x6, x7, x8, x9, x10, x11, x12});


%Nelinearna jednadžba sustava

%hxnp = eval(hx);
hxnp = vpa(hxp,4);

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%==============================

%Linearizacija

n = 12; %red sustava
m = 3;  %broj aktuatora
md = 3; %broj poremecaja

%sustav: dx=Ap*x+B1p*u+B2p*w
[Ap, B1p, B2p] = linearizacija(n,m,md,x,UM,TD,hxp, Cn, u1, u2,
u3, dd1, dd2, dd3);

%%regulator, optimizacija
W = sdpvar(n,n);
Y = sdpvar(3,n, 'full');
Z = sdpvar(12,6, 'full');
% W = inv(Pc);
ro = sdpvar(1);
Po = sdpvar(n,n);

gama1 = sdpvar(1);
gama2 = sdpvar(1);
gama3 = sdpvar(1);

Q =  1000*diag([1 1 1 1 10 10 1 1 1 1 1 1]);
R =  100*diag([1 1 1 1 10 10 1 1 1 1 1 1])^-1;
beta = 50;
```

```
I = eye(n);
O = zeros(n);

A1 = Po*Ap + Ap'*Po - Cn'*Z' - Z*Cn + Q;

CC11 = [-2*beta*W O beta*I O;
        O -2*beta*W O beta*I;
        beta*I O A1 Po;
        O beta*I Po -ro*I];

A2 = W*Ap' + Ap*W - Y'*B1p' - B1p*Y + I;
CC22 =  [A2 W W W W I;
        W -R O O O O ;
        W O -0.5*gama1*I O O O;
        W O O -0.5*gama2*I O O;
        W O O O -0.5*gama3*I O ;
        I O O O O -ro*I];

CC12 = [Y'*B1p' O O O O O;
       O O O O O O;
       O O O O O O;
       O O O O O O];

CC = [CC11 CC12;
      CC12' CC22];

ogr = [CC<=0, W>=0, Po>=0];
fcilja = ro+gama1+gama2+gama3;
options = sdpsettings('solver','mosek');
diagnostica = optimize(ogr,fcilja,options)

check(ogr)

K = double(Y)*inv(double(W))
Lo = inv(double(Po))*double(Z)
eig(Ap-B1p*K)
eig(Ap-Lo*Cn)
double([ro gama1 gama2 gama3])
eig(double(W))
eig(double(Po))
```

Funkcija za linearizaciju

```
function [An,B1n,B2n] = linearizacija(n,m,md,x,UM,TD,hx, Cn,
u1, u2, u3, dd1, dd2, dd3)
% JACOBIAN LINEARISATION nonlin_dynamic_seesaw

%%global An B1n B2n

% n = 12; % number of states
% m = 3; % number of control inputs
```

```
% md = 3; % number of disturbance inputs

%x = [x1;x2;x3;x4;x5;x6;x7;x8;x9;x10;x11;x12];

for i = 1:n
    for j = 1:n
        A(i,j) = diff(hx(i), x(j));
    end
end

for i = 1:n
    for j = 1:m
        B1(i,j) = diff(hx(i), UM(j));
    end
end

for i = 1:n
    for j = 1:md
        B2(i,j) = diff(hx(i), TD(j));
    end
end

% EQUILIBRIUM

A = subs(A, {x(1), x(2), x(3), x(4), x(5), x(6), x(7), x(8),
x(9), x(10), x(11), x(12),...
    u1, u2, u3, dd1, dd2, dd3}, {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0,...
    0, 0, 0, 0, 0, 0});

B1 = subs(B1, {x(1), x(2), x(3), x(4), x(5), x(6), x(7), x(8),
x(9), x(10), x(11), x(12)}, {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0});

B2 = subs(B2, {x(1), x(2), x(3), x(4), x(5), x(6), x(7), x(8),
x(9), x(10), x(11), x(12)}, {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0});

An = eval(A)
B1n = eval(B1)
B2n = eval(B2)

% CONTROLLABILITY
E = ctrb(An, B1n);
rank(E)

H = obsv(An, Cn);
rank(H)
```

Nelinearni model

```
function dx = ODEseesaw(t, x)

global K Cn Ap B1p Lo

parameters_values

unitstep5 = zeros(size(t));
unitstep5(t>=5) = 1;

unitstep35 = zeros(size(t));
unitstep35(t>=15) = 1;

x1r = 0.05*(unitstep5 - unitstep35);

q1=x(1)-x1r;
q2=x(2); q3=x(3); q4=x(4); q5=x(5); q6=x(6);
dq1=x(7); dq2=x(8); dq3=x(9); dq4=x(10); dq5=x(11); dq6=x(12);

% INERTIA MATRIX
M111 = mC1*c1^2 + mC1*q2^2 + J1;
M112 = -mC1*c1;
M121 = M112;
M122 = mC1;
M1 = [M111 M112;M121 M122];

M211 = mC2*c2^2 + mC2*q4^2 + J2;
M212 = -mC2*c2;
M221 = M212;
M222 = mC2;
M2 = [M211 M212;M221 M222];

M311 = mC3*c3^2 + mC3*q6^2 + J3;
M312 = -mC3*c3;
M321 = M312;
M322 = mC3;
M3 = [M311 M312;M321 M322];

% CORIOLIS VECTOR
C11 = 2*mC1*q2*dq2*dq1;
C12 = -mC1*q2*dq1^2 + (Kt*Ke/Ra/(p^2)/(r^2))*dq2;
C1 = [C11;C12];

C21 = 2*mC2*q4*dq4*dq3;
C22 = -mC2*q4*dq3^2 + (Kt*Ke/Ra/(p^2)/(r^2))*dq4;
C2 = [C21;C22];

C31 = 2*mC3*q6*dq6*dq5;
C32 = -mC3*q6*dq5^2 + (Kt*Ke/Ra/(p^2)/(r^2))*dq6;
C3 = [C31;C32];
```

```
% GRAVITATIONAL VECTOR
g11 = -g*a1*mA1*sin(q1) + g*mC1*(q2*cos(q1) - c1*sin(q1));
g12 = mC1*g*sin(q1);
g1 = [g11;g12];

g21 = -g*a2*mA2*sin(q3) + g*mC2*(q4*cos(q3) - c2*sin(q3));
g22 = mC2*g*sin(q3);
g2 = [g21;g22];

g31 = -g*a3*mA3*sin(q5) + g*mC3*(q6*cos(q5) - c3*sin(q5));
g32 = mC3*g*sin(q5);
g3 = [g31;g32];

% VISCOUS DAMPING
Phi1 = [kappa*dq1;0];
Phi2 = [kappa*dq3;0];
Phi3 = [kappa*dq5;0];

% INTERCONNECTION
zeta11 = L*cos(q1) - 2*d1*sin(q1);
zeta12 = 2*d1*cos(q1) - 2*d1 + 2*d2*cos(q3) - 2*d2 + L*sin(q1)
+ L*sin(q3);
z1 = k*zeta11*(zeta12 + LL12sd + LL120u + LR12sd + LR120u -...
    LL120d - LL12su - LR120d - LR12su)/4;

z2 = k*(4*d2*L*cos(q3)^2 + L*cos(q3)*...
    (-2*d1 - 4*d2 - 2*d3 -...
    LL120d + LL120u + LL12sd - LL12su -...
    LL230d + LL230u + LL23sd - LL23su -...
    LR120d + LR120u + LR12sd - LR12su -...
    LR230d + LR230u + LR23sd - LR23su +...
    2*d1*cos(q1) + 2*d3*cos(q5) +...
    L*sin(q1) + L*sin(q5)) -...
    2*sin(q3)*(-2*d1*d2 - 4*d2^2 - 2*d2*d3 + d2*...
    (-LL120d + LL120u + LL12sd - LL12su -...
    LL230d + LL230u + LL23sd - LL23su -...
    LR120d + LR120u + LR12sd - LR12su -...
    LR230d + LR230u + LR23sd - LR23su) +...
    2*d1*d2*cos(q1) + (4*d2^2 - L^2)*cos(q3) + ...
    2*d2*d3*cos(q5) + d2*L*sin(q1) + ...
    2*d2*L*sin(q3) + d2*L*sin(q5)))/4;

zeta31 = L*cos(q5) - 2*d3*sin(q5);
zeta32 = 2*d3*cos(q5) - 2*d3 + 2*d2*cos(q3) - 2*d2 +...
    L*sin(q5) + L*sin(q3);

z3 = k*zeta31*(zeta32 + LL23sd + LL230u + LR23sd + LR230u -...
    LL230d - LL23su - LR230d - LR23su)/4;

Z1 = [z1;0];
```

```
Z2 = [z2;0];
Z3 = [z3;0];

% NONLINEAR STATE SPACE
M = blkdiag(M1,M2,M3);
C = [C1;C2;C3];
G = [g1;g2;g3];
F = [Phi1;Phi2;Phi3];
Z = [Z1;Z2;Z3];



cff = Kt/Ra/p/r;
e1 = [1;0]; e2 = [0;1]*cff;

EM = blkdiag(e2, e2, e2);
ED = blkdiag(e1, e1, e1);


fx = [x(7:12);(-M^-1)*(C + G + F + Z)];
Bx1 = [zeros(6,3);(M^-1)*EM];
Bx2 = [zeros(6,3);(M^-1)*ED];

UM = -K*x(13:end);

% unitstep2 = zeros(size(t));
% unitstep2(t>=5) = 1; % shifted heaviside function.
%
% unitstep25 = zeros(size(t));
% unitstep25(t>=5.5) = 1; % shifted heaviside functio.

tD1 = 0.0;%*(unitstep2 - unitstep25);
tD2 = 0.0;%*(unitstep2 - unitstep25);
tD3 = 0.0;%*(unitstep2 - unitstep25);


TD = [tD1;tD2;tD3];

hx = fx + Bx1*UM + Bx2*TD;

y_sys = Cn*x(1:12);
y_obs = Cn*x(13:end);

dx_sys = hx;

dx_obs = Ap*x(13:end) + B1p*UM + Lo*(y_sys-y_obs);

dx = [dx_sys;dx_obs];
```

Diskretizacija

```
modeli3

%% Controller discretization
Acl = Ap-B1p*K;
D1p = zeros(6,3);

Ts = 1e-3;

disc_sys = c2d(ss(Ap, B1p, Cn, D1p), Ts, 'zoh');
Ap_d = disc_sys.a

disc_cl_sys = c2d(ss(Acl, B1p, Cn, D1p), Ts, 'zoh');
Acl_d = disc_cl_sys.a
B1p_d = disc_cl_sys.b

% disc. controller gains reconstruct.
rank(B1p_d)==size(B1p_d,2) % cond. for reconstruct.
K_d = B1p_d\(Ap_d - Acl_d)

% cont. controller gains
K


%% Observer discretization

Aobsv = Ap-Lo*Cn;
Bobsv = [B1p Lo];
Cobsv = eye(size(Aobsv));
Dobsv = zeros(size(Cobsv,1),size(Bobsv,2));

disc_obsv = c2d(ss(Aobsv, Bobsv, Cobsv, Dobsv), Ts, 'zoh');
Aobsv_d = disc_obsv.a
Bobsv_d = disc_obsv.b
```