

# **Modeli i algoritmi računalnog projektiranja indukcijskog kaljenja**

---

**Landek, Darko**

**Doctoral thesis / Disertacija**

**2005**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:235:305808>

*Rights / Prava:* [In copyright/Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-04-26**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of Faculty of Mechanical Engineering  
and Naval Architecture University of Zagreb](#)





**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU**  
**FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE**

**MODEL I ALGORITMI RAČUNALNOG  
PROJEKTIRANJA INDUKCIJSKOG KALJENJA**

**DOKTORSKI RAD**

**Mentor:**

Prof. dr. sc. FRANJO CAJNER

mr. sc. DARKO LANDEK, dipl. ing.

**Zagreb, 2005.**

## **PODACI ZA BIBLIOGRAFSKU KARTICU:**

**UDK:** 621.78.012.5

**Ključne riječi:** površinsko otvrđnjavanje induksijskim kaljenjem, gašenje prskanjem, induksijska radna ćelija, računalna simulacija, metoda rubnih elemenata, metoda konačnih elemenata

**Znanstveno područje:** TEHNIČKE ZNANOSTI

**Znanstveno polje:** STROJARSTVO

**Institucija u kojoj je rad izraden:** SVEUČILIŠTE U ZAGREBU,  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

**Mentor rada:** Prof. dr. sc. Franjo Cajner

**Broj stranica:** 246

**Broj slika:** 82

**Broj tablica:** 14

**Broj korištenih bibliografskih jedinica:** 110

**Datum obrane:**

**Povjerenstvo:** dr. sc. Tomislav Filetin, red. prof.

dr. sc. Franjo Cajner, red. prof.

dr. sc. Antun Galović, red. prof.

dr. sc. Mario Essert, izv. prof.

dr. sc. Božo Smoljan, red. prof

**Institucija u kojoj je rad pohranjen:** FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE  
SVEUČILIŠTA U ZAGREBU

---

## **ZAHVALE**

*Zahvaljujem se mentoru Prof. dr. sc. Franji Cajneru na podršci, pomoći i korisnim diskusijama tijekom izrade doktorskog rada.*

*Zahvaljujem se članovima Povjerenstva Prof. dr. sc. Tomislavu Filetinu, Prof. dr. sc. Boži Smoljanu, Prof. dr. sc. Mariu Essert i Prof. dr. sc. Antunu Galoviću na pomoći i podršci tijekom izrade doktorskog rada.*

*Zahvaljujem se Akademiku Božidaru Lišiću, Dr. Thomasu Lübbenu, Dr. Friedhelmu Frerichsu i mr. sc. Josipu Grilecu na korisnim savjetima kojima su pridonijeli mojem boljem sagledavanju problematike induktivskog kaljenja, računalnih simulacija i matematičkih modeliranja.*

*Zahvaljujem se na financiranju projektu Ministarstva znanosti, obrazovanja i športa R. Hrvatske 120032 “Razvoj materijala i procesa računalnim modeliranjem”.*

*Posebno se zahvaljujem Ivani i Filipu na podršci i velikoj strpljivosti pri izradi ovog rada.*



## SADRŽAJ

<i>PREDGOVOR</i> .....	VIII
<i>SAŽETAK RADA</i> .....	IX
<i>SUMMARY</i> .....	X
<i>KLJUČNE RIJEČI</i> .....	XI
<i>POPIS OZNAKA</i> .....	XII
<i>POPIS SLIKA</i> .....	XXVI
<i>POPIS TABLICA</i> .....	XXXII
<b>1.0    <i>UVOD</i> .....</b>	<b>1</b>
1.1    Uvod .....	1
1.2    Hipoteza rada .....	2
1.3    Metodologija rada .....	3
<b>2.0    <i>PRIPREMA I PROVEDBA POSTUPKA INDUKCIJSKOG KALJENJA</i> .....</b>	<b>5</b>
2.1    Opis postupka induktijskog kaljenja .....	5
2.1.1    Indukcijsko ugrijavanje .....	6
2.1.2    Gašenje .....	9
2.2    Priprema postupka induktijskog kaljenja .....	14
2.2.1    Faze pripreme .....	14
2.2.2    Konstrukcija induktora .....	17
2.2.3    Mjerne i regulacijske veličine u postupku induktijskog kaljenja ..	20
<b>3.0    <i>DOSADAŠNJE SPOZNAJE O RAČUNALNOM PROJEKTIRANJU INDUKCIJSKOG KALJENJA</i> .....</b>	<b>21</b>
3.1    Računalne simulacije elektromagnetskih i toplinskih procesa .....	21
3.2    Metode rješavanja problema elektromagnetskih i toplinskih polja u simulaciji induktijskog kaljenja .....	23
3.2.1    Metoda konačnih elemenata .....	25
3.2.2    Metoda rubnih elemenata .....	30
3.3    Računalne simulacije mikrostruktturnih faznih pretvorbi .....	36
3.4    Kriteriji i metode optimizacije induktora .....	41
3.5    Računalni sustavi za simulaciju induktijskog kaljenja .....	47

<b>4.0 RAZRADA SIMULACIJSKOG ALGORITMA INDUKCIJSKOG KALJENJA</b>	<b>51</b>
<b>4.1 Određivanje simuliranih fizikalnih fenomena i numeričkih metoda ....</b>	<b>51</b>
4.1.1 Fizikalni fenomeni obuhvaćeni simulacijom inducijskog kaljenja .....	51
4.1.2 Numeričke metoda primijenjene u simulaciji inducijskog kaljenja .....	54
<b>4.2 Definicija geometrijskih domena simulacijskog modela .....</b>	<b>56</b>
4.2.1 Područja geometrijskih domena induktora i obratka .....	56
4.2.2 Delaunay triangularizacija geometrijskih domena .....	59
<b>4.3 Izvod jednadžbe energetske bilance sustava induktor – obradak .....</b>	<b>62</b>
4.3.1 Fazorski dijagram sustava induktor – obradak .....	62
4.3.2 Jednadžba energetske bilance sustava induktor – obradak .....	68
<b>4.4 Definicija simulacijskog algoritma inducijskog kaljenja .....</b>	<b>70</b>
4.4.1 Opće pretpostavke računalne simulacije inducijskog kaljenja .....	70
4.4.2 Glavni simulacijski algoritam postupka inducijskog kaljenja .....	71
<b>5.0 MATEMATIČKO MODELIRANJE ELEKTROMAGNETSKOG POLJA U SUSTAVU INDUKTOR – OBRADAK .....</b>	<b>75</b>
<b>5.1 Definicija jednadžbi elektromagnetskog polja .....</b>	<b>75</b>
<b>5.2 Zadavanje električnih i magnetskih svojstva materijala .....</b>	<b>83</b>
<b>5.3 Rješenje jednadžbi elektromagnetskog polja kombinacijom metoda konačnih i rubnih elemenata .....</b>	<b>86</b>
5.3.1 Definicija funkcije oblika magnetskog vektorskog potencijala na trokutnim konačnom elementu .....	86
5.3.2 Formulacija jednadžbi elektromagnetskog polja na konačnom elementu .....	88
5.3.3 Formulacija jednadžbi elektromagnetskog polja na rubnom elementu ..	96
5.3.4 Rješenje globalnog sustava jednadžbi konačnog i rubnog elementa ....	106
<b>6.0 MATEMATIČKO MODELIRANJE PRIJENOSA TOPLINE U SUSTAVU INDUKTOR – OBRADAK – PRSKALICA .....</b>	<b>109</b>
<b>6.1 Definicija jednadžbe provođenja topline u obratku .....</b>	<b>109</b>
<b>6.2 Određivanje koeficijenta toplinskog zračenja s površine obratka .....</b>	<b>117</b>
<b>6.3 Određivanje koeficijenta prijelaza topline gašenjem .....</b>	<b>119</b>
<b>6.4 Zadavanje toplinskih svojstava materijala .....</b>	<b>126</b>
<b>6.5 Rješenje jednadžbe temperaturnog polja metodom konačnih elemenata .....</b>	<b>133</b>

<b>7.0</b>	<b>MATEMATIČKO MODELIRANJE FAZNIH PRETVORBI U OBRATKU</b>	<b>143</b>
7.1	Definicija kinetičkog dijagrama i jednadžbe za brzinu fazne pretvorbe .....	143
7.2.	Razrada kinetičkog modela faznih pretvorbi .....	148
7.2.1	Model faznih pretvorbi pri austenitizaciji .....	148
7.2.2	Model faznih pretvorbi pri gašenju .....	153
<b>8.0</b>	<b>OPTIMIZACIJA INDUKTORA .....</b>	<b>161</b>
8.1	Optimizacija induktora analitičkom metodom za postizanje najvećeg stupnja djelovanja .....	161
8.2	Optimizacija induktora računalnom simulacijom za postizanje zadane raspodijele inducirane struje .....	165
8.3	Primjer optimizacije viševojnog induktora .....	170
8.3.1	Opis problema optimizacije .....	170
8.3.2	Numeričko rješenje problema optimizacije .....	174
8.4	Projektiranje računalnog programa za simulaciju induktijskog kaljenja i optimizaciju induktora .....	178
8.4.1	Projektiranje vlastite baze podataka za simulaciju induktijskog kaljenja .....	178
8.4.2	Projektiranje vlastitog računalno-simulacijskog programa .....	180
<b>9.0</b>	<b>EKSPEKMENTALNA PROVJERA RAČUNALNE SIMULACIJE INDUKCIJSKOG KALJENJA .....</b>	<b>184</b>
9.1	Izbor ispitnog uzorka .....	184
9.2	Priprema računalne simulacije i pokusa induktijskog kaljenja .....	186
9.3	Rezultati i analiza rezultata računalne simulacije induktijskog kaljenja .....	193
9.4	Rezultati i analiza rezultata eksperimentalnih ispitivanja induktijskog kaljenja .....	197
<b>10.0</b>	<b>ZAKLJUČAK .....</b>	<b>203</b>
<b>11.0</b>	<b>LITERATURA .....</b>	<b>205</b>
	<b>ZIVOTOPIS .....</b>	<b>212</b>
	<b>CURRICULUM VITAE .....</b>	<b>213</b>

## **PREDGOVOR**

Površinsko otvrdnjavanje induksijskim kaljenjem je perspektivan postupak prikladan za povećanje otpornosti na trošenje, otpornosti na kontaktne pritiske i dinamičke izdržljivosti dijelova od čelika i željeznih lijevova. Zbog višestruko utjecajnih čimbenika na kvalitetu kaljenog sloja suvremena priprema induksijskog kaljenja je računalom podržana i obuhvaća simulaciju procesa kaljenja, a po potrebi i optimizaciju induktora.

Korištenjem računalnih simulacija može se značajno skratiti faza uvodenja u proizvodnju novih induksijskih kaljenih dijelova u trajanju od nekoliko tjedana na svega nekoliko dana ili sati, što je jedan od ubičajenih poticaja stalnog razvoja metoda i algoritama simulacije ovog postupka. Međutim problem postavljanja i provedbe računalne simulacije induksijskog kaljenja još nije u potpunosti riješen zbog složenih i međusobno povezanih elektromagnetskih, toplinskih i mikrostrukturnih procesa utjecajnih na svojstva zakaljenog sloja. Stoga je primarni poticaj za izradu ovog rada bio u mogućem doprinisu rješenju aktualnog problema primjene računalnih simulacija u pripremi induksijskog kaljenja. Drugi poticaj za izradu rada bilo je potreba za sustavnim proučavanjem i opisom perspektivne tehnike induksijskog kaljenja još uvijek premalo zastupljene u domaćoj proizvodnji.

Doktorski rad pod naslovom " Modeli i algoritmi računalnog projektiranja induksijskog kaljenja" podijeljen je na jedanaest poglavlja. Njegovom izradom opisani su i numerički riješeni matematički modeli elektromagnetskih, toplinskih i mikrostrukturnih procesa pri induksijskom kaljenju te je razvijen i eksperimentalno ispitana vlastita algoritam i računalni program za simulaciju induksijskog kaljenja i optimizaciju induktora.

U uvodnom dijelu rada opisani su cilj, svrha i metodologija računalne simulacije induksijskog kaljenja i optimizacije induktora. U drugom poglavlju rada opisani su osnovni fizikalni procesi u induksijskoj radnoj čeliji, njihove povezanosti i glavne faze u pripremi postupka induksijskoga kaljenja. U trećem poglavlju rada naveden je prikaz stanja i razvoja računalnih simulacija induksijskog kaljenja i metoda optimizacije induktora na temelju čega je su u četvrtom poglavlju definirani glavni procesi, jednadžba energijske bilance, prikladne numeričke metode i vlastiti algoritam simulacije induksijskog kaljenja.

U petom i šestom poglavlju rada razrađuju se matematički modeli elektromagnetskih i toplinskih procesa u obratku tijekom induksijskog kaljenja. Modeliranje elektromagnetskih procesa izvedeno je polazeći od temeljne jednadžbe elektromagnetskog potencijala u sustavu induktor - obradak do njenog rješenja hibridnom metodom konačnih i rubnih elemenata. Nestacionarni toplinski procesi ugrijavanja i hlađenja obratka matematički su modelirani metodom konačnih elemenata. Također su matematički modelirane nelinearne promjene električnih, magnetskih i toplinskih svojstava čelika ovisno o temperaturi.

U sedmom poglavlju razrađen je vlastiti matematički model za predviđanje mikrostrukturnih faznih pretvorbi pri induksijskom kaljenju temeljen na Leblond-Devauxovom kinetičkom modelu faznih pretvorbi.

U osmom poglavlju doktorskog rada razrađena je analitička i numerička metoda optimizacije induktora te su uspješno primjenjene za optimizaciju višezavojnog induktora.

U devetom poglavlju rada opisana je eksperimentalna provjera razvijenog simulacijskog programa na primjeru induksijskog kaljenja čeličnog valjka 42CrMo4 i analizirani su dobiveni rezultati simulacije i pokusa.

Desetim poglavljem rada zaključuje se o razvijenim matematičkim modelima induksijskog kaljenja, provedenoj računalnoj simulaciji i predloženom simulacijskom programu, te se daju prijedlozi budućih istraživanja. Korištena literatura navedena je u jedanaestom poglavlju.

## **SAŽETAK**

U radu je opisan postupak površinskog otvrdnjavanja induktijskim kaljenjem. Za precizno definiranje radnih parametara preporučena je primjena njegove računalne simulacije postupka induktijskog kaljenja i po potrebi računalna optimizacija induktora. U radu su analizirani glavni fizikalni procesi koji određuju površinsku tvrdoću, dubinu kaljenja, oblik zakaljene zone i njenu otpornost na trošenje. Opisane su analitičke i numeričke metode za rješavanje matematičkih modela simulacije induktijskog kaljenja. Postavljena je energijska bilanca procesa i razrađeni su matematički modeli elektromagnetskih, termodinamičkih i mikrostrukturnih procesa u obratku tijekom induktijskog kaljenja. Navedeni matematički modeli povezani su simulacijskim algoritmom i riješeni vlastito razvijenim računalnim programom pomoću hibridne metode konačnih i rubnih elemenata (za matematički model elektromagnetskih procesa) i metode konačnih elemenata (za matematički model nestacionarnih termodinamičkih procesa). Uz simulacijski program razvijena je i baza podataka sa svojstvima induktijski kaljenih materijala: toplinskim, električnim i magnetskim, ovisnim o temperaturi. Predloženi program provjeren je na primjerima induktijskog kaljenja valjaka dimenzija  $\varnothing 20 \times 95$  mm od čelika 42CrMo4. Izmjerene vrijednosti površinske tvrdoće i dubine kaljenja valjaka uspoređene su sa zadanim iznosima prema kojima je provedena računalna simulacija, te je ustanovljena dobra podudarnost simulacijskih i postignutih rezultata. Zaključuje se da su nužne daljnje provjere i usavršavanje simulacijskog programa i ispitivanje mogućnosti optimizacije induktora za kaljenje obradaka oblika složenijih od dugačkih ravnih i rotaciono simetričnih obradaka.

## **MODELS AND ALGORITHMS FOR COMPUTER – AIDED PLANNING OF INDUCTION HARDENING PROCESS**

### **SUMMARY**

The induction surface hardening process has been described at this work. For the exact definition of working parameters for this process, computer simulation is recommended. The main physical processes that determined surface hardness, depth of hardening and shape of hardened zone have been analysed. The analytical and numerical methods for solving mathematical models for the induction hardening simulation have been described. The energy balance of the induction hardening process has been set, and the mathematical models for the electromagnetic, thermodynamic and microstructural process within workpiece was proposed. These mathematical models were related by simulation algorithm and solved with own developed computer program by boundary element method (for electromagnetic process) and finite element method (for thermodynamic process). Besides the simulation program the database was developed with following properties of induction hardening materials: thermal, electric and magnetic properties depend of temperature. Proposed computer program has been tested on the cases of induction surface hardening of the cylinders dimensions Ø20x95 mm made of 42 CrMo4 steel grade. Measured values of the surface hardness and hardening depth was compared with the specified values, indicating good correspondence between the simulated and obtained values. It is concluded that further investigation and testing is necessary and they will be directed to enhancement possibilities of optimization program and to the simulation program for the more complex parts than axially symmetric or simply long parts.

## ***KLJUČNE RIJEČI***

Površinsko otvrdnjavanje induksijskim kaljenjem

Gašenje prskanjem

Indukcijska radna ćelija

Računalna simulacija

Računalna optimizacija induktora

Metoda rubnih elemenata

Metoda konačnih elementa

## ***KEY WORDS***

Induction surface hardening

Spray quenching

Induction work cell

Process simulation

Inductor optimization

Boundary element method

Finite element method

## ***POPIS OZNAKA I KRATICA***

<u>Oznaka</u>	<u>Mjerna jedinica</u>	<u>Naziv</u>
$\underline{\vec{A}}_2$	Wb/m	- fazor magnetskog vektorskog potencijala na strani induktora
$\underline{\vec{A}}_4$	Wb/m	- fazor magnetskog vektorskog potencijala na strani zraka
$\underline{\vec{A}}_1$	Wb/m	- fazor magnetskog vektorskog potencijala na strani obratka
$A_R$	Wb/m	- realni dio fazora magnetskog vektorskog potencijala
$A_I$	Wb/m	- imaginarni dio fazora magnetskog vektorskog potencijala
$A_{R,j}$	Wb/m	- aproksimacijska funkcija realnog dijela fazora magnetskog vektorskog potencijala u j-tom čvoru mreže
$A_{I,j}$	Wb/m	- aproksimacijska funkcija imaginarnog dijela fazora magnetskog vektorskog potencijala u j-tom čvoru mreže
$\{A_j^e\}$	Wb/m	- vektor aproksimacijskih funkcija magnetskog vektorskog potencijala u j-čvorova mreže
$\bar{A}_R^{\Gamma e}$	-	- aproksimacijska funkcija realnog dijela fazora magnetskog vektorskog potencijala na rubnom elementu
$\bar{A}_I^{\Gamma e}$	-	- aproksimacijska funkcija imaginarnog dijela fazora magnetskog vektorskog potencijala na rubnom elementu
$A_1^o$	°C	- temperatura početka ravnotežnog stvaranja austenita
$A_1$	°C	- temperatura početka stvaranja austenita prema TTS dijagramu
$A_3^o$	°C	- temperatura završetka ravnotežnog stvaranja austenita
$A_3$	°C	- temperatura završetka stvaranja austenita prema TTS dijagramu
$A_{ch}$	°C	- temperatura završetka homogenizacije austenita
$a_0$	m <sup>2</sup> /s	- koeficijent toplinske difuznosti sredstva za gašenje
$a_b, b_i$	m <sup>-1</sup>	- optimizacijski koeficijenti regresijske jednadžbe za optimizaciju induktora
$\underline{\vec{B}}$	T	- fazor magnetske indukcije
$B_0$	T	- modul fazora magnetske indukcije
$\underline{B}_{0x}, \underline{B}_{0y}$	T	- komponente fazora magnetske indukcije u smjeru osi x i y
$\underline{B}_{0r}, \underline{B}_{0z}$	T	- komponente fazora magnetske indukcije u smjeru osi r i z

<u>Oznaka</u>	<u>Mjerna jedinica</u>	<u>Naziv</u>
$B_{s(T)}$	T	- magnetska indukcija zasićenja na temperaturi T (K)
$B_{s(293K)}$	T	- magnetska indukcija zasićenja materijala na temperaturi 293K
$B_s$	T	- temperatuta početka bainitne pretvorbe
$b$		- zadana gustoća djelovanja izvora ili ponora u polju $\psi$
$b_0$	s <sup>-1</sup>	- empirička konstanta u Avramijevoj jednadžbi za brzinu fazne pretvorbe
$b_A$	s <sup>-1</sup>	- Avramijev koeficijent
$C_C$	5,67 1/(100 <sup>4</sup> K <sup>4</sup> )	- konstanta toplinskog zračenja crnog tijela
$C_{12}$	(W/m <sup>2</sup> K <sup>4</sup> )	- koeficijent toplinskog zračenja
$C_B$	1	- konstanta Weiss-Currieve jednadžbe
$C_{\beta ij}$	1	- koeficijent prostornog kuta između točaka polja P i izvora polja Q
$[C^e]$		- globalna matrica toplinske kapacitivnosti u FEM formulaciji jednadžbe temperturnog polja
$[D^e]$		- globalna matrica vodljivosti topline u FEM formulaciji jednadžbe temperturnog polja
$c$	J/(kgK)	- specifični toplinski kapacitet
$[c_i]_{\beta_i}^{\beta_2}$	J/(kgK)	- srednji specifični toplinski kapacitet i-te mikrostrukturne faze nad zadanim temperturnim intervalom
$\cos \varphi$	1	- faktor snage u krugovima izmjenične struje
$E(p)$	1	- eliptički integral druge vrste
$E_0$	V/m	- jakost električnog polja induktora
$F_\psi$		- izvor ili ponor polja
$F$	J	- Helmholtzova slobodna energija
$\Delta F$	J	- promjena slobodne energije nastankom nove faze
$\Delta F_\gamma$	J	- slobodna energija stvaranja nove površine faza
$\Delta F_\sigma$	J	- slobodna energija polja naprezanja oko nove faze
$\Delta F_{\alpha\beta}$	J	- razlika slobodnih energija faza $\alpha$ i $\beta$ na temperaturi $T$

<u>Oznaka</u>	<u>Mjerna jedinica</u>	<u>Naziv</u>
$f$	Hz	- frekvencija
$f(y)$	1	- funkcija udjela nove faze
$\{F\}$		- globalni vektor djelovanja toplinskog toka u FEM formulaciji jednadžbe temperaturnog polja
$G$	1	- Greenova funkcija slobodnog prostora
$[G^r]$		- globalna matrica u BEM formulaciji jednadžbe elektromagnetskog polja
$[G_{ij}^e]$		- pomoćna matrica u BEM formulaciji jednadžbe elektromagnetskog polja
$\mathbf{g}$		- karakteristična rubna vrijednost veličine polja
$g_1$		- funkcija utjecaja brzine ugrijavanja na faznu pretvorbu
$g(\frac{\partial \vartheta}{\partial t})$		- funkcija brzine zagrijavanja ili ohlađivanja
$H$	A/m	- jakost magnetskog polja
$H_0$	A/m	- jakost magnetskog polja induktora
$H_{12}$	m	- razmak između induktora i obratka
$[H^r]$		- globalna matrica u BEM formulaciji jednadžbe elektromagnetskog polja
$[H_{ij}^e]$		- pomoćna matrica u BEM formulaciji jednadžbe elektromagnetskog polja
$\{H_{0ij}^r\}$		- globalni vektor rubnih uvjeta u BEM formulaciji jednadžbe elektromagnetskog polja
$h$	J/kg	- specifična entalpija
$h_2$	m	- visina cijelog induktora
$h_{2i}$	m	- visina i-tog vodiča induktora
$I_0$	A	- fazor struje induktora
$I_0$	A	- jakost struje induktora
$I_A$	A	- jakost struje kroz anodu vakuumskog trioda generatora
$\underline{\underline{J}}_0$	A/m <sup>2</sup>	- fazor gustoće struje induktora
$J_{0R}$	A/m <sup>2</sup>	- realni dio fazora gustoće struje induktora

<u>Oznaka</u>	<u>Mjerna jedinica</u>	<u>Naziv</u>
$J_{0i}$	A/m <sup>2</sup>	- imaginarni dio fazora gustoće struje induktora
$J_{0i}$	A/mm <sup>2</sup>	- gustoća induciranih vrtložnih struja na površni obratka
$j = \sqrt{-1} I$		- imaginarna jedinica
$K(p)$	1	- eliptički integral prve vrste
$K_R$	1	- faktor otpora obratka
$K_r$	1	- faktor otpora induktora
$[K_k]$		- pomoćna globalna matrica u FEM formulaciji jednadžbe temperaturnog polja
$[K]^\Omega$		- pomoćna globalna matrica u FEM formulaciji jednadžbe elektromagnetskog polja
$k_{g1}, k_{g0}$	°C <sup>-1</sup> , 1	- koeficijenti aproksimacijske jednadžbe za proračun funkcije $g_1$
$k_t$	1	- vremenski inkrement (korak) simulacije toplinskih procesa
$k$	1	- vremenski korak simulacije mikrostrukturnih procesa
$k_s$	1	- broj čvorova na granici diskretizirane domene
$kr_g$	1	- argument funkcije F(krg)
$\mathbf{L}$		- linearni operator (preslikavanje) u matematičkom prostoru
$\mathbf{L}_b$		- linearni operator rubnih uvjeta u matematičkom prostoru
$L^e$	$\mathbf{m}$	- duljina rubne stranice trokutnog konačnog elementa
$L_o$	H	- induktivitet okoline i zračnog raspora
$L_2$	H	- induktivitet vodiča induktora
$L_{ij}^{\alpha\gamma}$	J/m <sup>3</sup>	- volumna latentna toplina fazne pretvorbe i-te faze u j-tu fazu
$L_{mag}$	J/m <sup>3</sup>	- volumna latentna toplina promjene magnetskih svojstava materijala
$L_{ij}$	J/kg	- specifična latentna toplina fazne pretvorbe
$l_{2N}$	m	- duljina vodiča induktora
$l_g$	m	- duljina grijanja obratka ( $l_g \approx l_2 - 0,002$ )
$M, N$		- broj geometrijskih čvorova

<u>Oznaka</u>	<u>Mjerna jedinica</u>	<u>Naziv</u>
$M_s$	°C	- temperatura početka izlučivanja martenzita iz austenita
$M_f$	°C	- temperatura završetka izlučivanja martenzita iz austenita
$m_0$	kg/(m <sup>2</sup> min)	- specifična gustoća prskanja
$N_1 \ N_2 \ N_3$		- Lagrangeovi interpolacijski polinomi prvog stupnja
$N_j$		- funkcije oblika nad konačnim elementom
$N_1^\Gamma, \ N_2^\Gamma$		- funkcije oblika nad rubnom stranicom trokutnog elementa
$N_t$		- vremenska interpolacijska funkcija
$Nu$	1	- Nusseltova bezdimenzijska značajka
$N_z$	-	- broj zavoja induktora
$n$	1	- normala na površinu $S=S_1 + S_2$
$n_x \ n_y$		- komponente normale na površinu usmjerenе iz obratka u smjeru osi x i osi y
$n_r, n_z$		- komponente normale na površinu usmjerenе iz obratka u smjeru osi r i osi z
$n_i$		- vektor normale usmjeren iz površine domene
$n_A$		- Avramijev koeficijent vrste pretvorbe
$o_2$	m	- opseg poprečnog presjeka induktora
$P_\delta, P_{\delta 1}, P_{\delta 2}$	W	- radna snaga vrtložnih struja u rubnom sloju, (1... obratka), (2... induktora)
$P_J, P_{J1}, P_{J2}$	VAr	- induktivna snaga vrtložnih struja u rubnom sloju, (1... obratka), (2... induktora)
$P_A$	W	- radna snaga izmjerena na anodi vakuumske triode generatora
$P_{\delta 0}$	W	- snaga vrtložnih struja na površini materijala
$P_{jQ}$	W/m <sup>3</sup>	- volumna snaga Jouelovih gubitaka
$P_{HB}$	W/m <sup>3</sup>	- volumna snaga gubitaka magnetiziranja
$p$	1	- parametar eliptičkih integrala
$\delta Q_l$	J	- sveukupni pretičak topline unesen u elementarni volumen dV
$\delta Q_v$	J	- sveukupna topline unutrašnjih izvora i ponora u elementarnom volumenu dV

<u>Oznaka</u>	<u>Mjerna jedinica</u>	<u>Naziv</u>
$q_s$	$\text{W/m}^2$	- ukupna gustoća toplinskog toka kroz površinu obratka
$q_G$	$\text{W/m}^2$	- gustoća toplinskog toka gašenja
$q_k$	$\text{W/m}^2$	- gustoća toplinskog toka konvekcije s obratka na okolišni zrak
$q_{zr}$	$\text{W/m}^2$	- gustoća toplinskog toka zračenja s obratka na okoliš
$R_a$	$\mu\text{m}$	- hrapavost površine
<b>R</b>		- rezidual
$R_1$	$\Omega$	- omski (radni) otpor obratka
$R_2$	$\Omega$	- omski otpor vodiča induktora
$r_P, z_P$	m	- koordinate točke polja (P)
$r_Q, z_Q$	m	- koordinate točke izvora potencijala polja (Q)
$r_{PQ}$	m	- udaljenost točke opažanja polja P od točke izvora polja Q
$r_2$	m	- unutrašnji polumjer zavoja induktora
$r_1$	m	- vanjski polumjer rotaciono simetričnog obratka
$r_c$	m	- središte osnosimetričnog konačnog elementa
$\vec{r} = \vec{r}(x, y, z)$	m	- vektor položaja promatrane točke
$S$	$\text{J/K}$	- entropija
$S_1$	$\text{m}^2$	- ploština oplošja obratka
$S_{23}$	$\text{m}^2$	- ploština površine obratka između induktora i prskalice
$S_2$	$\text{m}^2$	- ploština unutrašnje površine induktora
$S_{01}$	$\text{m}^2$	- ploština površine obratka u zoni ugrijavanja ispod induktora
$S_0$	$\text{m}^2$	- umjetno postavljena površina umjesto osi rotacijske simetrije
$S_\infty$	$\text{m}^2$	- površina vanjske granice modeliranog područja prema daljoj (ne modeliranoj) okolini
$S_{23}$	$\text{m}^2$	- ploština površine obratka između induktora i prskalice
$\vartheta_{\text{Currie}}$	$^\circ\text{C}$	- temperatura Curie: materijal mijenja feromagnetska svojstva u paramagnetska

<u>Oznaka</u>	<u>Mjerna jedinica</u>	<u>Naziv</u>
$T$	K	- termodinamička temperatura
$[T^r]$		- pomoćna globalna matrica u FEM formulaciji jednadžbe elektromagnetskog polja
$t$	s	- vrijeme
$t_a$	s	- vrijeme austenitizacije
$t_g$	s	- vrijeme gašenja
$\Theta$	1	- parametar stabilnosti numeričkog rješenja FEM jednadžbi temperaturnog polja
$t_{8/5}$	s	- vrijeme ohlađivanja od 800 do 500 °C
$t_2$	m	- debljina stjenke vodiča induktora
$U$	J	- unutrašnja energija
$U_m$	V	- amplituda napona na priključcima induktora
$\underline{U}_I$	V	- fazor napona induciranih u obratku
$U_R$	V	- realni dio fazora napona
$U_I$	V	- imaginarni dio fazora napona
$U_A$	V	- napon na anodi vakuumskog trioda generatora
$\underline{V}$	V	- električni potencijal induktora
$V_{0m}$	V	- amplituda električnog potencijala
$v_a$	°C/s	- srednja brzina ugrijavanja
$v_{hl}$	°C/s, K/s	- srednja brzina ohlađivanja
$\bar{v}_{8/5}$	°C/s	- srednja brzina ohlađivanja od 800 do 500 °C
$v_{kd}$	°C/s	- donja kritična brzina gašenja
$v_{kg}$	°C/s	- gornja kritična brzina gašenja
$v_0$	m/s	- brzina mlaza sredstva za gašenje uz površinu obratka
$w_i$	1	- maseni udio i-te mikrostrukturne faze
$X_1$	Ω	- induktivni otpor obratka
$X_2$	Ω	- induktivni otpor induktora

<u>Oznaka</u>	<u>Mjerna jedinica</u>	<u>Naziv</u>
$X_o$	$\Omega$	- induktivni otpor zračnog raspora
[X]		- pomoćna globalna matrica u traženju FEM – BEM rješenja jednadžbi elektromagnetskog polja
$Y_{eq}$	$\text{mm}^3/\text{mm}^3, 1$	- najveći postizivi udjel faze na zadanoj temperaturi izotermičkog držanja
$Y_{m,i}$	$\text{mm}^3/\text{mm}^3, 1$	- najveći mogući udjel $i$ -te faze pri ohlađivanju određenom krivuljom hlađenja prema TTT dijagramu kontinuiranog ohlađivanja
$Y_i$	$\text{mm}^3/\text{mm}^3, 1$	- postizivi udjel $i$ -faze pri ohlađivanju određenom krivuljom u TTT dijagramu kontinuiranog ohlađivanja
$Y_1$	$\text{mm}^3/\text{mm}^3, 1$	- ravnotežni volumni udjel austenita
$Y_2$	$\text{mm}^3/\text{mm}^3, 1$	- ravnotežni volumni udjel martenzita
$Y_3$	$\text{mm}^3/\text{mm}^3, 1$	- ravnotežni volumni udjel bainita
$Y_4$	$\text{mm}^3/\text{mm}^3, 1$	- ravnotežni volumni udjel perlita
$Y_5$	$\text{mm}^3/\text{mm}^3, 1$	- ravnotežni volumni udjel ferita
$y$	$\text{mm}^3/\text{mm}^3, 1$	- volumni udjel nove faze
$y_0$	$\text{mm}^3/\text{mm}^3, 1$	- volumni udjel polazne mikrostrukture
$y_1$	$\text{mm}^3/\text{mm}^3, 1$	- volumni udjel austenita
$y_2$	$\text{mm}^3/\text{mm}^3, 1$	- volumni udjel martenzita
$y_3$	$\text{mm}^3/\text{mm}^3, 1$	- volumni udjel bainita
$y_4$	$\text{mm}^3/\text{mm}^3, 1$	- volumni udjel perlita
$y_5$	$\text{mm}^3/\text{mm}^3, 1$	- volumni udjel ferita
$y_i$	$\text{mm}^3/\text{mm}^3, 1$	- volumni udjel $i$ -te mikrostrukturne faze
$y_j$	$\text{mm}^3/\text{mm}^3, 1$	- volumni udjel $j$ -te faze koji u promatranom intervalu $dt$ prolazi faznu pretvorbu $i/j$
$dy/dt$	$\text{s}^{-1}$	- brzina fazne pretvorbe
$[W_i]$	1	- vektor težinskih funkcija za Galerkinovu formulaciju jednadžbe konačnih elemenata
$w, w_j$	1	- težinska funkcija za minimizaciju reziduala nad $j$ -tim čvorom mreže (tzv. test funkcija konačnog elementa)
$Z_0$	$\Omega$	- impedancija strujnog kruga induktor-obradak

<u>Oznaka</u>	<u>Mjerna jedinica</u>	<u>Naziv</u>
$z_h$	m	- duljina obratka iza prskalice
$\psi$		- potencijalno skalarno ili vektorsko polje
$\overline{\psi}_i$		- aproksimacija polja $\psi$ na i-tom čvoru mreže
$\psi^*$		- fundamentalno rješenje jednadžbe rubnih elemenata
$\overline{\Psi}^e$		- aproksimacijska funkcija trokutnog elementa za proračun magnetskog vektorskog potencijala
$\underline{\Psi}(\vec{r})$		- fazorska (kompleksna) funkcija
$\Psi_m(\vec{r})$		- amplituda vremenski harmonične veličine
$\psi(\vec{r}, \omega t)$		- trenutna vrijednost (skalarne ili vektorske) veličine elektromagnetskog polja
$\Psi_m$		- amplituda harmonično promjenljive veličine elektromagnetskog polja
$\{\mathcal{Q}_i^r\}$		- pomoći vektor toplinskog toka kroz površinu tijela u FEM formulaciji jednadžbe temperaturnog polja obratka
$\Phi_L$	W/m <sup>3</sup>	- volumna latentna toplina fazne pretvorbe u obratku
$\tilde{\Phi}_{1,2}$	Wb	- glavni magnetski tok
$\tilde{\Phi}_0$	Wb	- rasipni magnetski tok
$\{\Phi_i^e\}$		- pomoći vektor toplinskih izvora ili ponora u FEM formulaciji jednadžbe temperaturnog polja
$\Pi$		- pomoćna kompleksna funkcija za izvod jednadžbi konačnog osnosimetričnog elementa elektromagnetskog polja
$\Gamma$		- krivulja u ravnini x-y ili r-z koja omeđuje poprečni presjek obratka
$\alpha_0$	W/(m <sup>2</sup> K)	- koeficijent prijelaza topline konvekcijom
$\alpha_{zr}$	W/(m <sup>2</sup> K)	- ekvivalentni koeficijent prijelaza topline zračenjem
$\alpha_G$	W/(m <sup>2</sup> K)	- koeficijent prijelaza topline gašenjem
$\alpha_{G,f}$	W/(m <sup>2</sup> K)	- koeficijent prijelaza topline gašenjem u području filmskog isparivanja
$\alpha_{G,max}$	W/(m <sup>2</sup> K)	- koeficijent prijelaza topline gašenjem u području najintenzivnijeg mjeđurastog isparivanja

<u>Oznaka</u>	<u>Mjerna jedinica</u>	<u>Naziv</u>
$\beta$	1	- kut između dva susjedna dvodimenzija rubna elementa
$\delta$	m	- efektivna dubina prodiranja struje
$\delta_1$	m	- efektivna dubina prodiranja struje u obradak
$\delta_2$	m	- efektivna dubina prodiranja struje u induktor
$\delta_{PQ}$		- Diracova delta funkcija
$\varepsilon_1$	1	- emisioni faktor sveukupnog toplinskog zračenja s površine obratka
$\varepsilon_2$	1	- emisioni faktor sveukupnog toplinskog zračenja s površine induktora
$\varepsilon_\psi$	1	- prosječno relativno odstupanje fizikalnog svojstva ili veličine
$\varepsilon_A$	1	- relativno odstupanje računskih vrijednosti vektora $\{A^e\}$ iz dva uzastopna iteracijska koraka
$\varepsilon_{dA/dn}$	1	- relativno odstupanje računskih vrijednosti vektora $\{\partial A^{Te}/\partial n\}$ iz dva uzastopna iteracijska koraka
$\gamma$		- relaksacijski faktor
$\kappa$	S/m	- električna vodljivost materijala
$\kappa_1$	S/m	- električna vodljivost materijala obratka
$\kappa_2$	S/m	- električna vodljivost vodiča induktora
$\underline{\kappa}$	S/m	- kompleksna električna vodljivost materijala
$\lambda$	W/(mK)	- koeficijent vodljivosti topline
$\lambda_i$	W/(mK)	- koeficijent vodljivosti topline i-te mikrostruktурne faze
$\lambda_s$	W/(mK)	- koeficijent vodljivosti topline površine obratka
$\eta$	1	- stupanj djelovanja induktora
$\xi$	m	- dubina rubnog sloja
$\varphi_i$		- interpolacijska funkcija raspodijele polja $\psi$ oko i-tog čvora mreže (tzv. oblikovna funkcija konačnog elementa)
$\varphi(\vec{r})$		- fazni pomak vremenski harmonične veličine prema određenoj referentnoj veličini (rad)

<u>Oznaka</u>	<u>Mjerna jedinica</u>	<u>Naziv</u>
$\psi_{\text{fRAČ}}$		- vrijednost fizikalnog svojstva u i-tom geometrijskom čvoru određena interpolacijom funkcijске ovisnosti $\psi=f(9)$
$\psi_{\text{II}}$		- vrijednost fizikalnog svojstva u i-tom geometrijskom čvoru iz prethodnog iteracijskog koraka
$\psi_{\text{II}}$		- nova (relaksacijska) vrijednost fizikalnog svojstva i-tom geometrijskom čvoru
$\mu_0$	$4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$	- magnetska permeabilnost vakuuma
$\underline{\mu}$	$\text{H/m}$	- kompleksna magnetska permeabilnost
$\mu_r$	1	- relativna magnetska permeabilnost materijala
$\mu_{rs(T)}$	1	- relativna magnetska permeabilnost ovisna o temperaturi
$\mu_l$	$\text{H/m}$	- magnetska permeabilnost obratka
$\mu_2$	$\text{H/m}$	- magnetska permeabilnost koncentratora toka
$\rho_i$	$\text{kg/m}^3$	- gustoća $i$ -te mikrostrukturne faze
$\rho$	$\text{kg/m}^3$	- srednja gustoća materijala
$\vartheta$	$^\circ\text{C}$	- Celzijeva temperatura
$\vartheta_0$	$^\circ\text{C}$	- Celzijeva temperatura okoliša
$\{\vartheta_j^e\}$	$^\circ\text{C}$	- vektor aproksimacijskih funkcija temperature u j-čvorova mreže
$\vartheta_{\text{Currie}}$	$^\circ\text{C}$	- Celzijeva temperatura Curie
$\vartheta_s$	$^\circ\text{C}$	- Celzijeva temperatura površine obratka
$\vartheta''$	$^\circ\text{C}$	- Celzijeva temperatura zasićenja kapljevine
$\Delta\vartheta_G$	$^\circ\text{C}$	- nadtemperatura površine obratka prema temperaturi zasićenja sredstva za gašenje
$\vartheta_k$	$^\circ\text{C}$	- Celzijeva temperatura početka isparivanja slobodnom konvekcijom
$\vartheta_{\text{DNB}}$	$^\circ\text{C}$	- Celzijeva temperatura najintenzivnijeg mjeđurastog isparivanja
$\vartheta_{\text{Le}}$	$^\circ\text{C}$	- Leidenfrostova temperatura
$\vartheta_a$	$^\circ\text{C}$	- temperatura austenitizacije

<u>Oznaka</u>	<u>Mjerna jedinica</u>	<u>Naziv</u>
$\vartheta_{IT}$	°C	- temperatura izotermičkog držanja
$\vartheta_{s,i}$	°C	- temperatura početka fazne pretvorbe
$\bar{\vartheta}^e$	°C	- aproksimacijska funkcija temperature raspodijeljene po konačnom elementu u FEM formulaciji jednadžbe temperturnog polja
$\vartheta_{f,i}$	°C	- temperatura završetka fazne pretvorbe
$\vartheta_{s,3}$	°C	- temperatura početka izlučivanja bainita iz austenita
$\vartheta_{f,3}$	°C	- temperatura završetka izlučivanja bainita iz austenita
$\vartheta_{s,4}$	°C	- temperatura početka izlučivanja perlita iz austenita
$\vartheta_{f,4}$	°C	- temperatura završetka izlučivanja perlita iz austenita
$\vartheta_{s,5}$	°C	- temperatura početka izlučivanja ferita iz austenita
$\vartheta_{f,5}$	°C	- temperatura završetka izlučivanja ferita iz austenita
$\tau_1$	s/°C	- funkcija vremenskog kašnjenja austenitne pretvorbe
$\tau_{13}$	s/°C	- funkcija vremenskog kašnjenja austenitno bainitne pretvorbe
$\tau_{14}$	s/°C	- funkcija vremenskog kašnjenja austenitno perlitne pretvorbe
$\tau_{15}$	s/°C	- funkcija vremenskog kašnjenja austenito feritne pretvorbe
$\pi(\vartheta)$		- funkcija vremenskog kašnjenja pretvorbe
$\omega$	rad <sup>-1</sup>	- kružna frekvencija
$\omega_s$		- geometrijski (vidni) faktor
$\nabla$		- diferencijalni operator gradijenta skalarnog polja
$\nabla^2()$		- diferencijalni operator (Laplacean)

Kratica	Značenje
TTS	- dijagram otapanja faza pri brzom ugrijavanju: "Time Temperature Solubility" diagram prema engl. navodima
ZTA	- dijagram otapanja faza pri brzom ugrijavanju: "Zeit Temperatur Austenisierung" prema njemačkim navodima
TTT	- dijagrami za kontinuirano ohlađivanje: "Time-Temperature-Transformation" diagram
PAG	- poli-alkilen glikol (polimerno sredstvo za gašenje)
FEM	- metoda konačnih elemenata "Finite Element Method"
BEM	- metoda rubnih elemenata, "Boundary Element Method"
1D	- jednodimenzijski model
2D	- dvodimenzijski model
3D	- trodimenijski model
P	- točka opažanja polja
Q	- točka izvora polja
JMAK model	-Johnson – Mehl - Avrami – Kolmogorov model za predviđanje brzine fazne pretvorbe

## POPIS SLIKA

### Poglavlje 2. PRIPREMA I PROVEDBA POSTUPKA INDUKCIJSKOG KALJENJA

<u>Broj slike:</u>	<u>Stranica</u>
2.1. Shematski prikaz metoda induktijskog kaljenja valjka: a) rotaciona metoda, b) rotaciono-posmična metoda	6
2.2. a) Induciranje vrtložnih struja u obratku umetnutom u induktor b) Relativno smanjenje gustoće induciranih struja ( $J_s/J_\infty$ ) i elektromagnetske snage ( $P_s/P_\infty$ ) od površine k jezgri obratka, mjereno relativnom udaljenošću od površine ( $\xi/\delta$ ).	7
2.3. Dijagram TTS za kontinuirano ugrijavanje niskolegiranog čelika 42CrMo4 [10]	8
2.4. Rotaciono-posmično induktijsko kaljenje osovine uz gašenje prskanjem	9
2.5. Ovisnost koeficijenta prijelaza topline $\alpha_G$ pri različitim fazama gašenja o razlici temperatura $\Delta\theta_G$ površine obratka i temperaturi zasićenja sredstva za gašenje podložnog Leidenfrostovom fenomenu [15].	10
2.6. Shematski prikaz nastanka površine para/kapljevina tijekom hlađenja obratka vodenom otopinom polimera [22]: a) Faza filmskog isparivanja s netopivim slojem polimernih molekula na filmu pare. b) Faza mjeđurastog isparivanja s kvašenjem površine obratka molekulama vode i polimera	11
2.7. Određivanje gornje kritične brzine gašenja ( $v_{kg}$ ) iz TTTdijagrama za kontinuirano ohlađivanje podeutektiodnog ugljičnog čelika [24]	13
2.8. Primjeri izvedbi induktora <u>bez</u> koncentratora magnetskog toka [8]: a) Induktor za kaljenje zuba zupčanika, b) Induktor u obliku spirale, c) Induktor integriran s prskalicom	19
2.9. Primjeri izvedbi induktora <u>s</u> koncentratorom magnetskog toka a) Induktor za kaljenje zuba zupčanika, b) Induktor za kaljenje rukavca osovine s i bez koncentratora magnetskog toka	19

### Poglavlje 3. DOSADAŠNJE SPOZNAJE O RAČUNALNOM PROJEKTIRANJU INDUKCIJSKOG KALJENJA

<u>Broj slike:</u>	<u>Stranica</u>
3.1. Osnovne vrste konačnih elemenata uobičajeno korištene pri simulacijama induktijskog kaljenja [91]	25
3.2. Shematski prikaz položaja induktora i prskalice prema obratku i adaptivne mreže konačnih elemenata na obratku i induktoru. [60]	26
3.3. Prikaz osnovnih vrsta (1D, 2D) i tipova rubnih elemenata (konstantni, linearni, kvadratni) na primjeru diskretizacije vanjske površine osnosimetričnog tijela	30

<u>Broj slike:</u>	<u>Stranica</u>
3.4 Označavanje geometrijskog područja problema, rubnih površina, rubnih uvjeta, točke opažanja polja (P) i točke izvora polja (Q) [97]	34
3.5. a) Shematski prikaz kontinuiranog ugrijavanja u izotermičkom TTS dijagramu kao sume niza elementarnih izotermičkih procesa [63] b) Shematski prikaz krivulje ohlađivanja aproksimirane stepeničastom promjenom temperature (elementarnim izotermičkim pretvorbama) u izotermičkom TTT dijagramu čelika Ck45 [61]	38
3.6 Utjecaj dimenzija na stupanj djelovanja viševojnog induktora pri induksijskom ugrijavanju dugačkih valjaka (stupanj djelovanja induktora određen za temperaturu austenitizacije 1000 °C) [5]	43
3.7. Optimizacija osnosimetričnog induktora prema kriteriju postizanja jednolične gustoće površinske struje po duljini obratka [41]: a) Položaj rubnih elemenata obratka i promjene konture poprečnog presjeka induktora. b) Konačni oblik induktora nakon niza iteracija i postizanja zadovoljavajuće jednoličnosti induciranih vrtložnih struja	45
3.8 Glavni moduli vlastito razvijenog računalnog programa (“Ind2D”) za simulaciju induksijskog kaljenja	49

#### **Poglavlje 4. RAZRADA SIMULACIJSKOG ALGORITMA INDUKCIJSKOG KALJENJA**

<u>Broj slike:</u>	<u>Stranica</u>
4.1 Osnovni fizikalni procesi tijekom induksijskog kaljenja i promjene nastale na obratku	53
4.2 Područje matematičkog modeliranja induksijskog kaljenja u odnosu na osnovne komponente visokofrekventnog induksijskog generatora [4]:	56
4.3 Karakteristična područja geometrijske domene $\Omega$ matematički modeliranog sustava obradak-induktor-prskalica pri rotaciono-posmičnom induksijskom kaljenju	58
4.4. Osnovni trokutni element s čvorovima numeriranim za izvođenje funkcije oblika: a) dvodimenzijijski trokutni element, b) osnosimetrični trokutni element	60
4.5 a) Zadani skup čvorova u ravnini i njihov Voronoi dijagram [140] b) Delaunay dijagram konstruiran na temelju Voronoi dijagrama [140]	61
4.6 Zamjena električnog sustava induktor-obradak –okolina ekvivalentnim strujnim krugom sa svitkom i željeznom jezgrom	62
4.7. Fazorski dijagram nadomjesnog strujnog kruga induktor-obradak	63
4.8 Prijenos i pretvorbe električne energije u toplinsku pri rotaciono posmičnom induksijskom kaljenju	69
4.9 Simulacijski algoritam induksijskog kaljenja	74

**Poglavlje 5. MATEMATIČKO MODELIRANJE ELEKTROMAGNETSKOG POLJA U SUSTAVU INDUKTOR - OBRADAK**

<b>Broj slike:</b>	<b>Stranica</b>
5.1 Promjena električne vodljivosti tehnički čistog željeza i ugljičnog čelika s 1 % C (podaci izračunati prema [82])	83
5.2 Petlja magnetiziranja i njoj pripadne krivulje magnetske permeabilnosti [80]	84
5.3. Primjeri aproksimacije krivulja magnetiziranja i promjene magnetske permeabilnosti iz vlastito razvijenog računalnog programa "Ind2D": a) Aproksimacija krivulje magnetiziranja $B = B(H, \vartheta)$ ugljičnog čelika s 0,45 %C b) Aproksimacija magnetske permeabilnosti $\mu_r = \mu_r(H, \vartheta)$ ugljičnog čelika s 0,45 %C	85
5.4. a) Primjer diskretizacije geometrijskih domena osnosimetričnog obratka i induktora mrežom trokutnih konačnih elemenata (iz vlastitog računalnog programa "Ind2D") b) Detaljniji izgled strukturirane mreže uz kaljenu površinu obratka	86
5.5 Aproksimacijske funkcije magnetskog vektorskog potencijala u čvorovima linear nog trokutnog elementa	86
5.6 Zamjena vrijednosti raspodijeljenog magnetskog vektorskog potencijala na graničnoj površini FEM geometrijske domene vrijednostima koncentriranim u čvorovima trokutnog elementa	93
5.7 Geometrijska domena okolišnog zraka nad kojom se postavlja formulacija rubnih elemenata magnetskog vektorskog potencijala	96
5.8 Diskretizacija konture polovice uzdužnog presjeka valjka ravnim i konstantnim rubnim elementima	98
5.9 Shematski prikaz tijeka aproksimacijskih funkcija magnetskog vektorskog potencijala na stranici trokutnog elementa koja je ujedno i rubni element	98
5.10 Shematski prikaz položaja točke polja P prema izvoru potencijala u točki Q na konstantnim ravnim rubnim elementima	100
5.11 Kontura integracije oko singularne točke na krivulji $\Gamma$ ruba geometrijske domene	103

**Poglavlje 6. MATEMATIČKO MODELIRANJE PRIJENOSA TOPLINE U SUSTAVU INDUKTOR – OBRADAK - PRSKALICA**

<b>Broj slike:</b>	<b>Stranica</b>
6.1. a) Promjena specifične entalpije tehnički čistog željeza ovisna o temperaturi b) Promjena specifičnog toplinskog kapaciteta tehnički čistog željeza s promjenom temperature izračunata iz krivulje na slici 6.1.a jedn. $c(\vartheta) = dh(\vartheta)/d\vartheta$ [91].	111
6.2 Karakteristične zone na površini induksijski kaljenog valjka za postavljanje rubnih uvjeta.	115

<u>Broj slike:</u>	<u>Stranica</u>
6.3. Karakteristične konfiguracije obratka i induktora s oznakama mjera za određivanje vidnog faktora konfiguracije: a) model zračenja između dvije bliske stjenke, b) model zračenja obuhvaćenog tijela, c) model zračenja između paralelnih kružnih diskova	117
6.4 Koeficijent prijelaza topline ( $\alpha_G$ ) kod ohlađivanja ravne površine prskanjem vodom (upadni kut mlaza $90^\circ$ ) [97]: a) utjecaj gustoće mlaza i površinske temperature uzorka od nikla na $\alpha_G$ , b) utjecaj vrste ohlađivanog metala i površinske temperature na $\alpha_G$	120
6.5 Model linearno-kvadratne aproksimacije promjene koeficijenta prijelaza topline ovisno o površinskoj temperaturi obratka.	121
6.6 Mehanizmi prijenosa topline kod filmskog isparivanja pri gašenju prskanjem	122
6.7. a) Leidenfrostova temperatura ( $\vartheta_{Le}$ ), temperatura najintenzivnijeg mjeđuhastog isparivanja ( $\vartheta_{DNB}$ ) i maksimalni koeficijent prijelaza topline čiste vode ovisni o gustoći prskanja pri hlađenju različitih metala [14, 97] b) Utjecaj vrste ohlađivanog metala ili nemetala (izraženog preko koeficijenta prodiranja topline) na vrijednost Leidenfrostove temperature $\vartheta_{Le}$ čiste vode [16]	123
6.8. Promjena koeficijenta vodljivosti topline s temperaturom tipičnih skupina čelika [17]	127
6.9. Promjena srednje vrijednosti koeficijenta vodljivosti tijekom ugrijavanja i ohlađivanja čelika pri induktijskom kaljenju interpolirana karakterističnim krivuljama [42]	128
6.10 Promjena specifičnog toplinskog kapaciteta ovisnog o temperaturi $c(\vartheta) = \partial h / \partial \vartheta$ pri ugrijavanju ugljičnih i niskolegiranih čelika [82]	129
6.11 Vlastiti model promjene specifičnog toplinskog kapaciteta tijekom ugrijavanja i ohlađivanja čelika pri induktijskom kaljenju	131
6.12 Funkcije oblika $N_1, N_2, N_3$ nad osnosimetričnim trokutnim elementom i aproksimacija raspodjele temperature $\bar{\vartheta}^e$ po elementu	133
6.13 Toplinski tok na graničnoj površini: a) dvodimenzijskog elementa [89] b) osnosimetričnog trokutnog elementa [40]	139
6.14 Linearna interpolacijska funkcija na vremenskom elementu [80]	140

## **Poglavlje 7. MATEMATIČKO MODELIRANJE FAZNIH PRETVORBI U MATERIJALU OBRATKA**

<u>Broj slike:</u>	<u>Stranica</u>
7.1 Vremenski ciklus induktijskog kaljenja i udjeli mikrostrukturnih faza	143
7.2 Shematski prikaz kinetike stvaranja austenita kontinuiranim ugrijavanjem ( $\partial\vartheta/\partial t > 0$ ) i izotermičkim držanjem ( $\partial\vartheta/\partial t \approx 0$ ) podeutektoidnog čelika.	145

<u>Broj slike:</u>	<u>Stranica</u>
7.3 Tijek i izgled funkcije $Y_1(\vartheta)$ pri austenitnoj pretvorbi kontinuiranim ugrijavanjem podeutektoidnog čelika	149
7.4 Shematski prikaz funkcije vremenskog kašnjenja austenitne pretvorbe ( $\tau_1(\vartheta)$ ) u kontinuiranim zagrijavanju podeutektoidnog čelika	151
7.5 TTT dijagram za kontinuirano ohlađivanje čelika 42CrMo4 [13]	155
7.6 Shematski prikaz karakterističnih temperatura za određivanje vremenske funkcije kašnjenja austenitno-perlitne pretvorbe	158

#### **Poglavlje 8. OPTIMIZACIJA INDUKTORA**

<u>Broj slike:</u>	<u>Stranica</u>
8.1 Karakteristične dimenzije viševojnog induktora zavojnice za ugrijavanje dugačkog ravnog valjka [1]	162
8.2. a) Grafički prikaz funkcije $F(kr_g)$ ; b) Grafički prikaz funkcije $F(K_R)$ [1]	164
8.3 Optimizacija induktora promjenama dimenzija i oblika u smjeru osi r	165
8.4 Shematski prikaz vakuumske komore (razvijene u Institutu IWT Universität Bremen) za ispitivanje prokaljivosti čelika u struji plinova (ispitna epruveta $\varnothing 20 \times 100$ mm) [108]	171
8.5. Ugrijavanje ispitne epruvete ( $\varnothing 20 \times 100$ mm) od čelika 42CrMo4: a) Prikaz krivulje ugrijavanja izmjerene na dubini 1,5 mm ispod površine [108] b) Raspored temperature po visini epruvete izmjerena na dubini 1,5 mm ispod površine nakon induktijskog ugrijavanja ( $f=100$ kHz, $U=600$ V) od 15 min	172
8.6. a) Oblik i dimenzije epruvete za ispitivanje prokaljivosti gašenjem u plinu nastrujavanjem s čela b) Računalnom simulacijom određena raspodjela gustoće induciranih vrtložnih struja po polovici poprečnog presjeka epruvete od čelika 42CrMo4 nakon induktijskog ugrijavanja ( $f=110$ kHz, $I_o = 600$ A)	173
8.7 Razmještaj deset zavoja induktora izrađenog od bakrene cijevi promjera $\varnothing 6$ mm nakon računalne optimizacije	176
8.8 Razmještaj deset zavoja induktora izrađenog od bakrenog profila 5x5mm nakon računalne optimizacije	176
8.9 Polazna dijaloška forma baze podataka o svojstvima induktijski kaljenih čelika	178
8.10 Polazna forma vlastito razvijenog računalnog programa za simulaciju induktijskog kaljenja i optimizaciju induktora.	179

<u>Broj slike:</u>		<u>Stranica</u>
8.11	Korisnička forma vlastito razvijenog računalnog programa za zadavanje geometrijskih elemenata konture obratka i induktora.	180
8.12	Korisnička forma vlastitog računalnog programa za izbor tipa induktora	181
8.13	Korisnička forma za zadavanje parametra postupka induksijskog kaljenja u vlastito razvijenom računalnom programu Ind2D	182

**Poglavlje 9. EKSPERIMENTALNA PROVJERA RAČUNALNE SIMULACIJE INDUKCIJSKOG KALJENJA**

<u>Broj slike:</u>		<u>Stranica</u>
9.1	Ispitni uzorak od čelika 42CrMo4 (sa zadanim zahtjevom) na kojem je provedena računalna simulacija i pokusi induksijskog kaljenja	184
9.2	Ovisnost snage induktora o snazi generatora određena eksperimentalno ugrijavanjem valjaka $\phi 20 \times 95$ mm od čelika 42CrMo4 dimenzija u induktoru s jednim zavojkom unutrašnjeg promjera $\phi 22$ mm s poprečnim presjekom $5 \times 5$ mm	186
9.3	Pozicioniranje induktora i prskalice prema ispitnom valjku na početku ciklusa rotaciono-posmičnog kaljenja	188
9.4	Aproksimacija promjene magnetske permeabilnosti čelika 42CrMo4 ovisno o temperaturi (između $50^{\circ}\text{C}$ i $750^{\circ}\text{C}$ ) jakosti magnetskog polja	188
9.5	Zadavanje iznosa specifičnog toplinskog kapaciteta ovisno o temperaturi i mikrostrukturnom stanju čelika 42CrMo4 u računalnom programu "Ind2D" (F/P – feritno-perlitna mikrostruktura, A- austenitna mikrostruktura)	189
9.6	Zadavanje iznosa vodljivosti topline ovisno o temperaturi i mikrostrukturnom stanju čelika 42CrMo4 u računalnom programu "Ind2D" (F/P – feritno-perlitna mikrostruktura, A- austenitna mikrostruktura)	189
9.7	S Simulacijom dobiveno temperaturno polje i udjel austenita po presjeku valjka $\varnothing 20 \times 95$ mm na početku posmičnog gibanja uz brzinu 4 mm/s i ugrijavanje snagom generatora 30 kW uz računski određenu snagu induktora 9,818 kVA ( $f = 415$ kHz)	193
9.8	Simulacijom dobiveno temperaturno polje i udjel austenita po presjeku valjka $\varnothing 20 \times 95$ mm na početku posmičnog gibanja uz brzinu 4 mm/s i ugrijavanje snagom generatora 45 kW uz računski određenu snagu induktora 12,647 kVA ( $f = 415$ kHz)	193
9.9	Vremenska promjena napona (krivulja A) i struje induktora (krivulja C), pri induksijskom kaljenju snagom generatora 30 kW (izmjereni napon anode 8,0 kV i struja anode 3,6 A). Prijenosni omjer mjernog naponskog, odnosno strujnog transformatora i sonde osciloskopa iznose 100:1, odnosno 1000:1	197
9.10	Vremenska promjena napona i struje induktora, pri induksijskom kaljenju snagom generatora 30 kW (izmjereni napon anode 8,0 kV i struja anode 3,6 A) aproksimirani krivuljama najmanjih kvadrata odstupanja	198

<u>Broj slike:</u>	<u>Stranica</u>
9.11 Raspored tvrdoće po poprečnom presjeku induksijski kaljenih valjaka $\varnothing 20 \times 95$ mm od čelika 42CrMo4 uz zadanu snagu generatora 30kW ( $f = 415$ kHz) i posmičnu brzinu 4mm/s i 10 mm/s	201
9.12 Raspored tvrdoće po poprečnom presjeku induksijski kaljenih valjaka $\varnothing 20 \times 95$ mm od čelika 42CrMo4 uz zadanu snagu generatora 45kW ( $f = 415$ kHz) i posmičnu brzinu 4mm/s i 10 mm/s	200
9.13. Mikrostruktura induksijski zakaljenog ispitnog valjaka od čelika 42CrMo4 uz snagu generatora 30 kW ( $f = 415$ kHz) i posmičnu brzinu 4mm/s. a) Mikrostruktura po poprečnom presjeku (povećanje 50x nagriženo 3 %-tnim NITAL-om) b) Mikrostruktura rubnog sloja (povećanje 500x. nagriženo 3 %-tnim NITAL-om)	201

## **POPIS TABLICA**

### **Poglavlje 2. PRIPREMA I PROVEDBA POSTUPKA INDUKCIJSKOG KALJENJA**

<b><u>Broj tablice:</u></b>		<b><u>Stranica</u></b>
<b>II.1</b>	Sistematisacije izvora i vrste utjecajnih čimbenika na svojstva zakaljene zone	14
<b>II.2</b>	Faze pripreme i parametri postupka induktijskog kaljenja [1-6,9,18,19].	15
<b>II.3</b>	Izgled i glavne karakteristike induktora prema načinu prijenosa energije na obradak [8]	18
<b>II.4</b>	Regulacijske i mjerne veličine procesa induktijskog kaljenja	20

### **Poglavlje 4. RAZRADA SIMULACIJSKOG ALGORITMA INDUKCIJSKOG KALJENJA**

<b><u>Broj tablice:</u></b>		<b><u>Stranica</u></b>
<b>IV.1</b>	Primjeri pojednostavljenja 3D geometrijskih domena sa 1D ili 2D domenama pri računalnim simulacijama induktijskog kaljenja	57

### **Poglavlje 6. MATEMATIČKO MODELIRANJE PRIJENOSA TOPLINE U SUSTAVU INDUKTOR – OBRADAK - PRSKALICA**

<b><u>Broj tablice:</u></b>		<b><u>Stranica</u></b>
<b>VI.1</b>	Regresijski koeficijenti aproksimacijske funkcije koeficijenta vodljivosti topline za različite temperature od 20 do 700 °C [100]	129

### **Poglavlje 8. OPTIMIZACIJA INDUKTORA**

<b><u>Broj tablice:</u></b>		<b><u>Stranica</u></b>
<b>VIII.1</b>	Pretpostavke i radni parametri modela za optimizaciju viševojnog induktora	174
<b>VIII.2</b>	Rezultati optimizacije induktora s deset zavoja unutrašnjeg promjera $\varnothing 32$ mm i visine 90 mm za ugrijavanje epruvete dimenzija $\varnothing 20 \times 100$ mm	175

**Poglavlje 9. EKSPERIMENTALNA PROVJERA RAČUNALNE SIMULACIJE  
INDUKCIJSKOG KALJENJA**

<b><u>Broj tablice:</u></b>	<b><u>Stranica</u></b>
<b>IX.1</b> Kemijski sastav ispitivanog čelika 42CrMo4.	184
<b>IX.2</b> Pretpostavke i radni parametri računalne simulacije rotaciono posmičnog induktijskog kaljenja valjaka	190
<b>IX.3</b> Plan pokusa induktijskog kaljenja valjaka $\varnothing 20 \times 95$ mm od čelika 42CrMo4	191
<b>IX.4</b> Računski određene vrijednosti napona $U_0$ i snage $P_0$ induktora prema simulaciji induktijskog kaljenja valjaka $\varnothing 20 \times 95$ mm od čelika 42CrMo4	192
<b>IX.5</b> Izmjerene vrijednosti jakosti struje ( $I_A$ ) i napona ( $U_A$ ) i snage ( $P_A$ ) generatora	196
<b>IX.6</b> Vrijednosti struje i napona te faznog kuta induktora tijekom induktijskog kaljenja uz zadanu snagu generatora 30 i 45 kW i posmičnu brzinu obratka 4 i 10 mm/s	199

## **1.1 UVOD**

Indukcijskim se kaljenjem na strojnim dijelovima od željeznih materijala povećava otpornost na trošenje, otpornost na kontaktne pritiske i dinamička izdržljivost. Postupak se sastoji od lokalnog kratkotrajnog ugrijavanja površinskog sloja i naglog ohlađivanja pri čemu se sloj modificira stvaranjem martenzita, a jezgra dijela ostaje nepromijenjene mikrostrukture. Indukcijsko kaljenje primjenjuje se kod dijelova izrađenih prvenstveno od čelika za poboljšavanje, ali i kod onih izrađenih od niskolegiranih čelika za kotrljajuće ležajeve, prethodno pougljičenih čelika za cementiranje, ugljičnih alatnih čelika (rjeđe), te sivog, nodularnog i čeličnog ljeva. Zbog kratkotrajnosti postupka nema opasnosti od oksidacije i razugljičenja površine, pa nije potrebna zaštitna atmosfera. Kratkotrajnost postupka, mogućnost automatizacije unatoč značajnim investicijskim troškovima induksijskog uređaja čine induksijsko kaljenje prikladnim za suvremenu serijsku i velikoserijsku industrijsku proizvodnju.

Za suvremenu izvedbu induksijskog kaljenja nužna je njegova kvalitetna priprema, računalno vođenje procesa i dijagnostika stanja induksijske radne čelije, prije i tijekom obradbe. Tijekom pripreme postupka induksijskog kaljenja kritične su faze: projektiranje induktora i definiranje radnih parametara, jer o njima ovisi ostvarenje propisanog oblika zakaljenog sloja, dubina kaljenja, površinska tvrdoća i deformacije zakaljenog dijela. Za definiranje radnih parametara induksijskog kaljenja te ispitivanje utjecaja oblika i dimenzija induktora i prskalice na svojstva površinski zakaljenog obratka preporučljivo je provesti računalnu simulaciju.

Računalna simulacija treba obuhvatiti fazu ugrijavanja i fazu ohlađivanja obratka nizom matematičkih modela poput modela prijenosa elektromagnetske energije s induktora na obradak, modela termodinamičkih procesa ugrijavanja i ohlađivanja obratka te modela mikrostrukturnih pretvorbi u materijalu. Zbog složenosti fizikalnih procesa u obratku tijekom induksijskog kaljenja i raznovrsnosti oblika obradaka za sada nije dostupan jedinstveni računalni program, već se primjenjuju simulacijski programi prikladni za pojedine oblike obradaka i pojedine faze induksijskog kaljenja. Stoga se ukazuje potreba za razvojem algoritma i računalnog programa koji će simulacijom obuhvatiti najvažnije fizikalne procese u postupku induksijskog kaljenja željeznih materijala i omogućiti optimizaciju induktora.

## **1.2 Hipoteza rada**

Analiza znanstveno stručne literature [1-15] pokazala je mogućnost postavljanja zadovoljavajućih matematičkih modela za opis pojedinih procesa i fizikalnih fenomena u postupku induksijskog kaljenja. Također je i razvoj numeričkih metoda i računala dostigao zadovoljavajuću razinu primjenljivosti u rješavaju složenih jednadžbi (nelinearni i nestacionarnih) elektromagnetskog i temperaturnog polja u dvodimenzijskim i trodimenijskim zadaćama. Pri analizi različitih pristupa i algoritama kojima se povezuju u prvom redu elektromagnetski, toplinski i mikrostrukturni procesi uočena je njihova orijentacija specifičnim oblicima obradaka ili specifičnim slučajevima simulacija.

Orijentacija specifičnim obratcima (npr. valjci, tračnice, limovi) karakteristična je za uglavnom industrijska istraživanja radnih parametara postupka induksijskog kaljenja kod kojih se primjenom općih računalno simulacijskih programa i povezivanjem njihovih različitih modula rješava specifičan problem. Orijentacija specifičnim slučajevima simulacija usmjerena je uglavnom metodičkom rješavanju jednostavnijih slučajeva pri čemu nije u prvom planu primjenljivost rezultata za konkretne dijelove i varijante postupka induksijskog kaljenja, već se istražuju karakteristike numeričkih metoda i različiti pristupi formulacijama međusobno utjecajnih procesa (npr. elektromagnetskih i toplinskih). Između ova dva pristupa uočljiva je praznina u postavljanju i rješavanju simulacijskog algoritma postupka induksijskog kaljenja koji će s jedne strane imati svoje temelje u egzaktnim jednadžbama za opis elektromagnetskih, toplinskih i mikrostrukturnih procesa. S druge strane numeričkom implementacijom ovako razvijenog simulacijskog algoritma u računalni sustav omogućit će korisniku postupka induksijskog kaljenja određivanje radnih parametara i optimiranje različitih induktora za širok raspon dijelova i željeznih materijala. Smatra se da je moguće odgovarajućim matematičkim modelima prijenosa elektromagnetske energije s induktora na obradak, modelima toplinskih procesa ugrijavanja i hlađenja obratka i modelima mikrostrukturnih promjena u materijalu dovoljno točno i precizno računalno simulirati postupak induksijskog kaljenja, te se na temelju ovih razmatranja postavlja slijedeća hipoteza rada:

**Glavne probleme u suvremenoj pripremi postupka induksijskog kaljenja: pronalaženje optimalnog oblika i dimenzija induktora i odabir radnih parametara (kojima će se ostvariti propisana svojstva zakaljenog sloja), moguće je uspješno riješiti primjenom simulacijskog algoritma koji povezuje matematičke modele elektromagnetskih, toplinskih i mikrostrukturnih procesa u računalni sustav za projektiranje induktora i simulaciju induksijskog kaljenja.**

### **1.3 Metodologija rada**

Za rješavanje problema simulacije induksijskog kaljenja nužno je postaviti matematičke modele elektromagnetskih, termodinamičkih i mikrostruktturnih procesa u obratku uz odgovarajuće rubne i početne uvjete. Ove modele treba razraditi polazeći od temeljnih jednadžbi pojedinog fizikalnog procesa: Maxwellovih jednadžbi za elektromagnetske procese, prvog glavnog stavka i jednadžbe provođenja topline za toplinske procese i kinetičkih jednadžbi za mikrostrukturmne procese. Nakon izvoda pojedine jednadžbe procesa iste treba riješiti prikladnim numeričkim metodama i postupcima.

Pregled faza pripreme postupka induksijskog kaljenja i konstruiranja induktora kao i usporedba i ograničenja najvažnijih analitičkih i numeričkih rješenja opisati će se u uvodnom dijelu rada (drugo i treće poglavlje). U svrhu postavljanja simulacijskog algoritma analizirat će se dostupna literatura i dosadašnje spoznaje o matematičkom modeliranju pojedinih faza induksijskog kaljenja (indukcijsko ugrijavanje, gašenje prskanjem), te uobičajeno korištenim analitičkim i numeričkim metodama i metodama optimizacije induktora. Za postavljanje matematičkih modela induksijskog kaljenja pretpostavlja se da je moguće računalno simulirati elektromagnetske, termodinamičke i mikrostrukturu procese s točnošću i preciznošću, koji će dati dubinu kaljenja, površinsku tvrdoću i oblik zakaljene zone unutar dozvoljenih granica odstupanja propisanih zahtjevom naručitelja i normama.

Na temelju provedene analize u četvrtom poglavlju predložit će se i razraditi vlastiti simulacijski algoritam koji će biti temelj za projektiranje i razvoj vlastitog računalnog simulacijskog programa. Također će se definirati geometrijske domene za rješavanje problema i postavit će se energijska bilanca induksijskog kaljenja. U petom, šestom i sedmom poglavlju razradit će se i numerički riješiti matematički modeli elektromagnetskih, toplinskih i mikrostruktturnih procesa u postupku induksijskog kaljenja.

Za numeričko rješavanje jednadžbi elektromagnetskog polja primijenit će se hibridna metoda konačnih elemenata za određivanje veličina polja u obratku i metoda rubnih elemenata za određivanje veličina polja na površinama obratka i induktora. Za njihovo povezivanje predložit će se i primijeniti iteracijski postupak kojim se ne narušava simetričnost glavnih matrica pri rješavanju algebarskog sustava jednadžbi. Primjenom ove hibridne metode značajno se smanjuje broj geometrijskih čvorova sustava induktor-obradak i omogućuje se brže dobivanje rješenja jednadžbi elektromagnetskog polja, što je posebno bitno zbog potrebe za iteracijskim usklajivanjem rješenja jednadžbi s nelinearno promjenljivim električnim i magnetskim svojstvima materijala. Za obuhvaćanje promjena nelinearno

ovisne magnetske permeabilnosti čelika o jakosti magnetskog polja i temperaturi predložit će se vlastiti aproksimacijski model u petom poglavlju.

Za modeliranje toplinskih procesa u obratku koristiti će se metoda konačnih elemenata s Galerkinovom formulacijom zbog dobre aproksimacije geometrije obratka i fizikalnog smisla formulacije (koja predstavlja proširenji zapis zakona očuvanja energije u integralnom obliku). Rubni uvjeti u termodinamičkom modelu koji obuhvaćaju prijelaz topline s obratka na sredstvo za ohlađivanje modelirat će se empiričkim jednadžbama prema [14, 15] i vlastito razvijenim modelom. Također će se u šestom poglavlju predložiti i razraditi vlastiti model za opis nelinearno promjenljivog specifičnog toplinskog kapaciteta materijala ovisnog o temperaturi.

Mikrostrukturalni procesi modelirat će se na temelju temperaturnog ciklusa ugrijavanja i ohlađivanja pojedinog konačnog elementa primjenom kinetičkih jednadžbi za predviđanje brzine faznih pretvorbi. Polazeći od opće kinetičke jednadžbe fazne pretvorbe, kinetičkog modela Leblond-Devaux i podataka iz dijagrama otapanja mikrostrukturnih faza brzim ugrijavanjem obradivog čelika (TTS dijagrami) [10] i TTT dijagrama za kontinuirano ohlađivanje [12, 13] predložit će se regresijski model za predviđanje udjela mikrostrukturnih faza nastalih difuzijskim pretvorbama (austenita, bainita, perlita i ferita). Nastanak martenzita modelirat će se poznatim Koistinen-Marburgovim modelom. Raspored tvrdoće zakaljenog sloja modelirati će se korištenjem dijagrama ovisnosti tvrdoće o temperaturi austenitizacije i TTT dijagrama za kontinuirano ohlađivanje konkretnog čelika.

U osmom poglavlju predložit će se i numerički primijeniti model optimizacije induktora temeljen na primjeni prethodno izvedenih i diskretiziranih jednadžbi elektromagnetskog polja. U prvom dijelu osmog poglavlja razrađena je metoda optimizacije viševojnog induktora i demonstrirana je na specifičnom primjeru. U drugom dijelu osmog poglavlja opisat će se izvedba vlastitog programskog sustava za računalnu simulaciju induktijskog kaljenja i optimizaciju induktora.

Predloženi vlastiti simulacijski program eksperimentalno će se provjeriti na primjeru rotaciono posmičnog induktijskog kaljenja valjaka dimenzija  $\varnothing 20 \times 95$  mm od čelika 42CrMo4 sa kombinacijom dvije vrijednosti snage generatora i posmaka obratka (dobivene simulacijom). Nakon provedene simulacije i pokusa induktijskog kaljenja usporediti će se dobiveni rezultati (površinska tvrdoća, dubina kaljenja). Potom će se izvesti zaključci o primjenljivosti vlastitog simulacijskog programa i dati prijedlozi budućih istraživanja simulacije induktijskog kaljenja.

## **2.0 PRIPREMA I PROVEDBA POSTUPKA INDUKCIJSKOG KALJENJA**

Površinskim otvrdnjavanjem postupkom induksijskog kaljenja povisuje se primarno otpornost na trošenje a sekundarno otpornost kontaktnim pritiscima i dinamička izdržljivost čelika. Dubine površinski zakaljene zone uobičajeno iznose između 0,25 do 12 mm. Za čelike namijenjene induksijskom kaljenju preporučuje se sadržaj ugljika između 0,35 do 0,7 %, sadržaj sumpora i fosfora manji od 0,035 %, visok stupanj čistoće, manja sklonost stvaranju zaostalog austenita i polazna mikrostruktura u kaljenom i popuštenom ili normalizacijski žarenom stanju [1, 5, 6, 18].

Norma DIN EN 17212 navodi popis od dvadesetak čelika za površinsko kaljenje. To su nelegirani čelici: Cf35, Ck45, Cf45, Cf53 i Cf70 i niskolegirani čelici: 45Cr2, 38Cr4, 42Cr4, 41CrMo4, 49CrMo4. Uz njih se induksijsko kaljenje može uspješno primijeniti i na niskolegirane čelike za poboljšavanje (46Cr2, 34CrV4, 42CrMo4, 50CrV4) i na neke čelike za automate (35S20, 60S20).

Željezni ljevovi prikladni za induksijsko kaljenje trebaju sadržavati minimalno 0,5 % vezanog ugljika, a u mikrostrukturi treba prevladavati perlit. Prema normi SEW-835 za induksijsko kaljenje se preporučuju slijedeći željezni ljevovi: G35Mn5, G46Mn4, G42CrMo4, G50CrMo, G50CrV4; GJL-400, GJS-600-3, GJS-7000-2; GJMB-450-6, GJMB-550-4, GJMB-650-2.

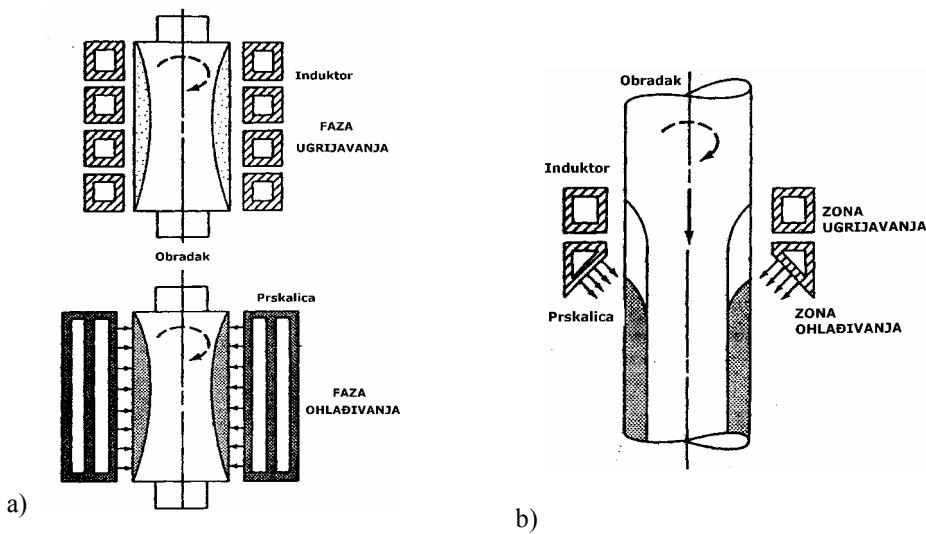
### **2.1. Opis postupka induksijskog kaljenja**

Fizikalni procesi u obratku i oko njega tijekom postupka induksijskog kaljenja kvalitativno su opisani u nizu knjiga i radova [1-9]. Indukcijsko kaljenje površinskog sloja sastoji se iz dviju faza:

- a) ugrijavanja sloja elektromagnetskom indukcijom na temperaturu austenitizacije,
- b) hlađenja ugrijanog sloja (gašenja) koje će dati martenzitnu pretvorbu.

Kod rotacionog i stacionarnog induksijskog kaljenja faze ugrijavanja i gašenja su vremenski odvojene (**slika 2.1.a**). Obradak se prvo površinski ugrije elektromagnetskom indukcijom, a potom hlađi određenim sredstvom za gašenje. Metode rotacionog i stacionarnog induksijskog kaljenja pogodne su za površinsko kaljenje manjih obradaka. Kod posmičnog i rotaciono-posmičnog induksijskog kaljenja (**slika 2.1.b**) ugrijavanje i ohlađivanje se odvijaju istodobno na susjednim dijelovima površine (tzv. zonama). Obradak prolazi kroz induktor i prskalicu zadanom posmičnom brzinom  $v_s$  i u slučaju rotaciono-posmične metode dodatno se okreće oko osi simetrije brzinom  $n_0$  radi jednoličnog kaljenja

po cijelom opsegu. Metode posmičnog i rotaciono-posmičnog induksijskog kaljenja pogodne su za površinsko kaljenje obradaka većih površina (npr. dugačkih osovina).



**Slika 2.1** Shematski prikaz metoda induksijskog kaljenja valjka [8]

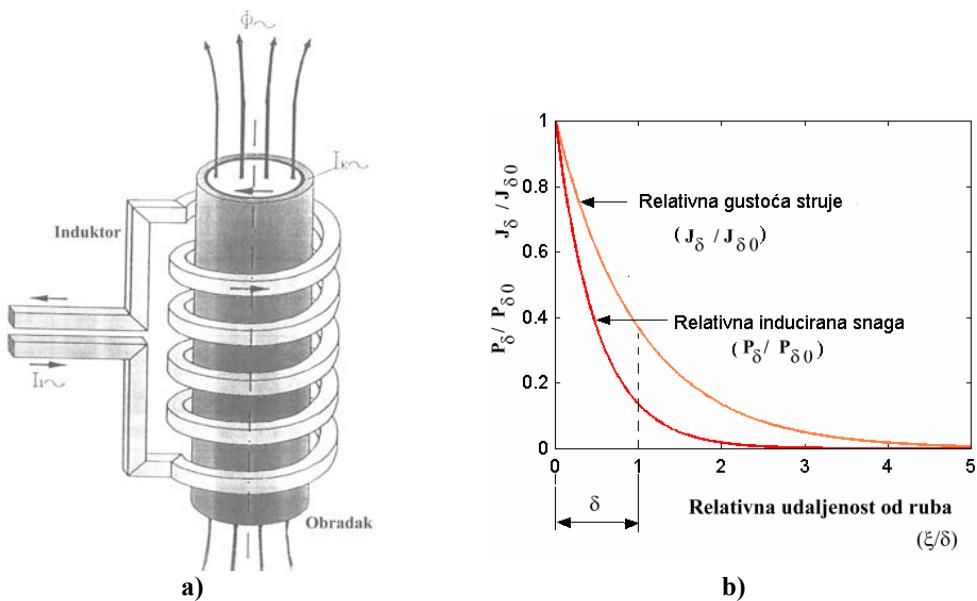
a) rotaciona metoda,      b) rotaciono posmična metoda

### 2.1.1 Indukcijsko ugrijavanje

**Ugrijavanje površinskog sloja pri induksijskom kaljenju** određeno je uglavnom elektromagnetskom indukcijom, provođenjem topline i toplinskim gubicima s površine obratka. Elektromagnetska indukcija nastaje zbog prolaska izmjenične struje kroz induktor, a manifestira se pojavom vrtložnih struja u svim električki vodljivim predmetima postavljenim u blizini induktora. Inducirane vrtložne struje u obratku (**slika 2.2.a**) raspodjeljuju se u tankom površinskom sloju djelovanjem nekoliko elektromagnetskih efekata, od kojih je najutjecajniji "površinski efekt" ("skin efekt") zbog kojeg dolazi do potiskivanja visokofrekventne struje prema površini električki vodljivog materijala (**slika 2.2.b**). Dubina površinskog sloja vodljivog materijala kroz koji prolazi 63,212 % induciranih vrtložnih struja naziva se "efektivna dubina prodiranja struje"  $\delta$  (mm), a računa se jednadžbom (2.1) [1-9]:

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu_0 \mu_r \kappa}} \approx 503 \cdot \frac{1}{\sqrt{f \cdot \kappa \cdot \mu_r}} \quad (2.1)$$

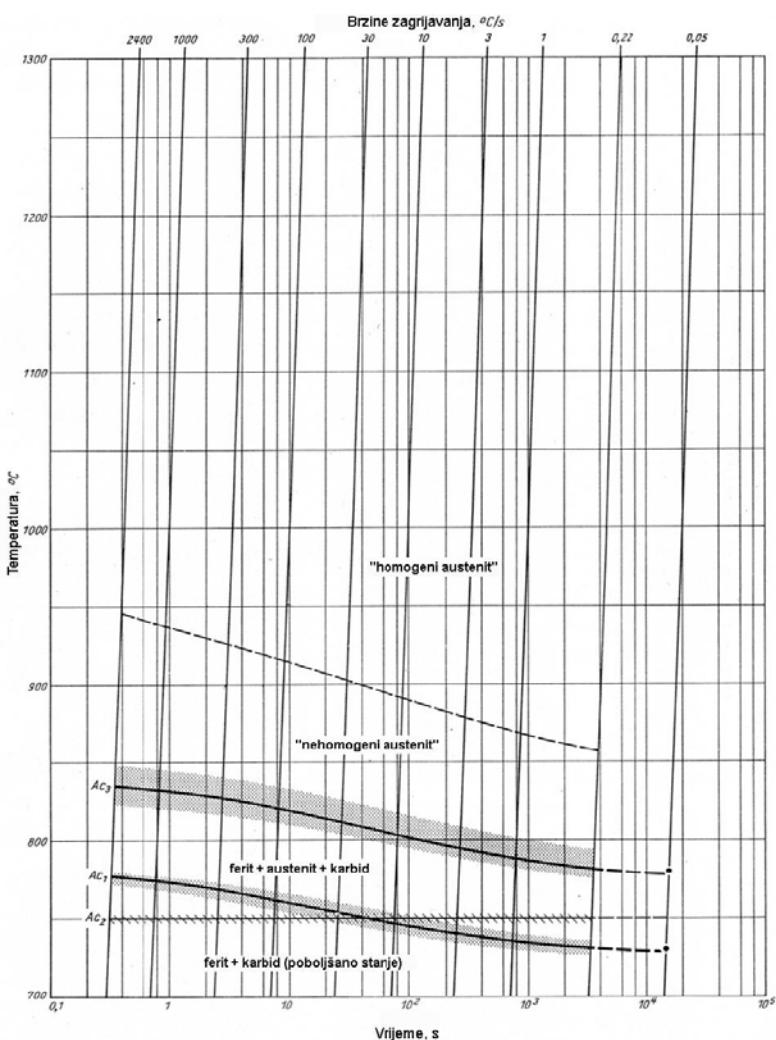
Jednadžba (2.1) pokazuje i najutjecajnije čimbenike na iznos efektivne dubine prodiranja  $\delta$  od kojih je jedino moguće odabratи radnu frekvenciju induksijskog generatora  $f$  dok su relativna magnetska permeabilnost  $\mu_r$  i električna vodljivost  $\kappa$  svojstveni kaljenom materijalu. Efektivna dubina prodiranja struje  $\delta$  mjerodavna je i za proračun snage ugrijavanja obratka. U sloju debljine  $\delta$  u toplinu ugrijavanja pretvara se 86,467 % električne energije induciranih vrtložnih struja prema Jouleovom efektu. Ako je ugrijavani materijal homogen, linearan i izotropan, električna energija vrtložnih struja  $P_\delta$  raspodjeljuje se po eksponencijalnom zakonu po dubini ugrijavanog sloja. (slika 2.3.b). Dodatni izvori topline u obratku su gubici magnetiziranja u iznosima od 1 do 10% ukupne topline ugrijavanja na temperaturama nižim od temperature Curie (na kojoj materijal postaje paramagnetičan) [9].



Slika 2.2 a) Induciranje vrtložnih struja u obratku umetnutom u induktor

- b) Relativno smanjenje gustoće induciranih struja ( $J_\delta / J_{\delta 0}$ ) i elektromagnetske snage ( $P_\delta / P_{\delta 0}$ ) od površine k jezgri obratka, mjereno relativnom udaljenošću od površine ( $\xi/\delta$ ).

**Mikrostrukturne fazne pretvorbe pri induktijskom ugrijavanju** mogu se relativno jednostavno pratiti pomoću dijagrama otapanja faza pri brzom zagrijavanju (dijagrami TTS: "Time Temperature Solubility", odnosno dijagrami ZTA: "Zeit Temperatur Austenitisierung" dijagrami) (**slika 2.3**). Ovi dijagrami vrijede za čelik određenog kemijskog sastava i polazne mikrostrukture [10]. Iz njih se vidi temperaturno-vremenski karakter austenitizacije i moguće je odrediti približan iznos temperature austenitizacije induktijski kaljenog čelika. Nastajanje austenita pri ugrijavanju je heterogena difuzijska mikrostrukturna reakcija koja kod većine čelika započinje na temperaturama nešto višim od onih iz ravnotežnog dijagrama stanja kad se u mikrostrukturi akumulira dovoljna energija za početak i tijek pretvorbe.



**Slika 2.3** Dijagram TTS za kontinuirano ugrijavanje niskolegiranog čelika 42CrMo4 [10]

**Optimalni parametri austenitizacije** pri induksijskom grijanju (trajanje grijanja, brzina grijanja i temperatura austenitizacije) trebaju omogućiti:

- potpunu pretvorbu perlita i ferita u sitnozrnati austenit
- dovoljno otapanje karbida (neotopljeni karbidi sprječavaju rast austenitnog zrna)
- potreban udio ugljika u austenitu za maksimalnu zakaljivost
- izjednačavanje udjela ugljika i legirajućih elemenata po dubini zagrijane zone.

Ovo nije jednostavno postići jer je induksijsko kaljenje brz postupak s kratkim trajanjem i temperaturom austenitizacije ovisnom o brzini ugrijavanja. Stoga je ispunjenje ranije navedenih zahtjeva na kemijski sastav i polaznu mikrostrukturu nužan preduvjet za uspješnu provedbu induksijskog kaljenja.

## 2.1.2 Gašenje

Elektromagnetskom indukcijom ugrijani sloj obratka treba ohladiti određenim sredstvom za gašenje na jedan od slijedećih načina:

- a) gašenjem u prskalici koja svojim oblikom prati oblik obratka (**slika 2.4**)
- b) gašenjem uranjanjem u bazen (prikladno jedino za legirane čelike i manje obratke).

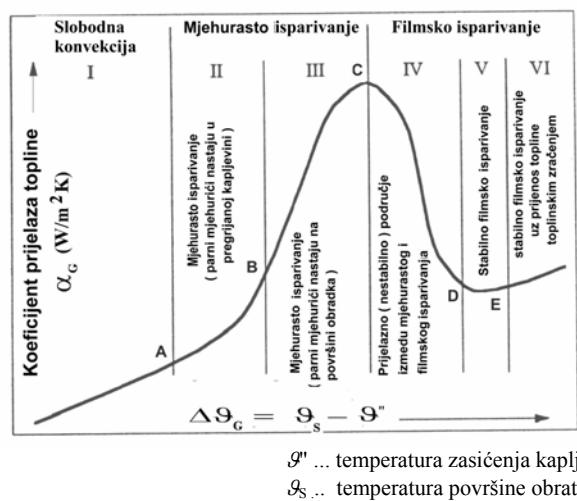
Gašenje prskanjem vodenim otopinama polimera ili čistom vodom uobičajeno se primjenjuje kod svih metoda induksijskog kaljenja. Stoga je vlastito razvijenim simulacijskim programom predviđen proračun koeficijenta prijelaza topline pri gašenju prskanjem. Za određivanje sredstva za gašenje i potrebne gornje kritične brzine gašenja (koja će dati potpunu martenzitnu pretvorbu) koriste se TTT dijagrami za kontinuirano ohlađivanje [12, 13].



**Slika 2.4** Rotaciono-posmično induksijsko kaljenje osovine uz gašenje prskanjem

**Gašenje čistom vodom ili vodenim otopinama polimera** (isparljive kapljevine) provodi se isparivanjem ovih kapljevina na austenitiziranoj površini obratka. Pri tome se pojavljuju tri faze isparivanja karakteristične za sredstva podložna Leidenfrostovom fenomenu (**slika 2.5**): filmsko, mjeherasto i isparivanje konvekcijom. Vodene otopine polimera pokazuju dodatno i fenomen inverzne topivosti (**slika 2.6**).

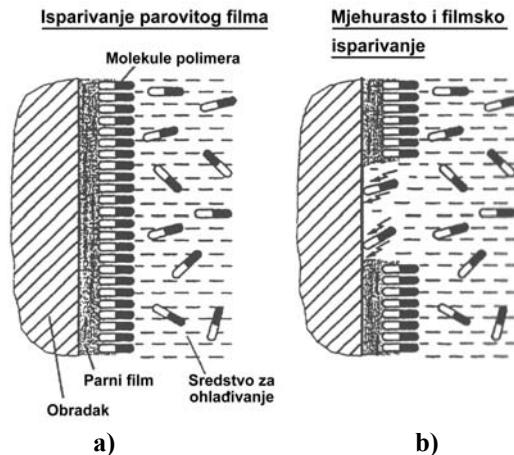
**Leidenfrostov fenomen.** Na početku gašenja razlika  $\Delta\vartheta_G$  između temperature ugrijane površine obratka i temperature zasićenja sredstva za gašenje iznosi nekoliko stotina °C uslijed čega se stvara paroviti film (područje V i VI na **slici 2.5**). Koeficijent prijelaza topline filma pare za red veličine manji je od najvećeg mogućeg koeficijenta mjeherastog isparivanja. Sniženjem temperaturne razlike  $\Delta\vartheta_G$  do iznosa temperature početka kvašenja površine obratka (tzv. "Leidenfrost-ove temperature") počinje kidanje parovitog filma (pojava tzv. nestabilnog filmskog isparivanja – dio krivulje oko točke "D"). Dalnjim sniženjem temperaturne razlike  $\Delta\vartheta_G$  kapljice sredstva sve više dolaze u neposredan dodir sa površinom obratka gdje isparuju. To je stadij mjeherastog isparivanja (područja krivulje oko III i IV na **slici 2.5**) za koji su karakteristične najveće moguće vrijednosti koeficijenta prijelaza topline  $\alpha_G$  i najveća gustoća odvedenog toplinskog toka  $q_{max}$  koji se mogu ostvariti sa korištenim radnim parametrima i sredstvom za gašenje. Kad vrijednosti temperaturne razlike  $\Delta\vartheta_G$  postanu nekoliko °C prestaje izdvajanje mjeherića pare i nastupa prijelaz topline slobodnom konvekcijom (područje I na **slici 2.5**) [14, 15].



$\vartheta^*$  ... temperatura zasićenja kapljevine, °C  
 $\vartheta_s$  ... temperatura površine obratka, °C

**Slika 2.5** Ovisnost koeficijenta prijelaza topline  $\alpha_G$  pri različitim fazama gašenja o razlici temperatura  $\Delta\vartheta_G$  površine obratka i temperaturi zasićenja sredstva za gašenje podložnog Leidenfrostovom fenomenu [15].

**Fenomen inverzne topivosti polimera u vodi** tipična je pojava kod gašenja vodenim otopinama poli-alkilen glikola (PAG) u koncentracijama od 0% do 30 %. PAG je u vodi potpuno otopljen na temperaturama od 63 do 85 °C, a na višim temperaturama dolazi do njegovog izlučivanja u netopljivi film. Zbog toga se prijelaz topline s površine obratka u fazi filmskog isparivanja odvija kroz paroviti film i netopljivi viskozni sloj PAG-a (**slika 2.6.a**). Polimerni sloj stabilizira paroviti film do temperature inverzne topivosti i tako regulira veličinu odvedenog toplinskog toka  $q_G$  u rasponu od temperature austenitizacije do temperature inverzne topivosti. Na temperaturi inverzne topivosti nastupa raspad polimernog sloja i mjeđurasto isparivanje uz vrlo burnu reakciju u kojoj dio polimernog filma ispari, a dio se “zapeče” na obradak (**slika 2.6.b**). Interval vrijednosti temperature inverzne topivosti ovisi o vrsti i koncentraciji polimera otopljenog u vodi te temperaturi i brzini strujanja otopine [15].



**Slika 2.6** Shematski prikaz nastanka površine para/kapljevine tijekom hlađenja obratka vodenom otopinom polimera [16]:

- a) Faza filmskog isparivanja s netopivim slojem polimernih molekula na filmu pare
- b) Faza mjeđurastog isparivanja s kvašenjem površine obratka molekulama vode i polimera.

Kod gašenja u prskalici konstrukcijom prskalice i izborom pritiska i protoka kapljevine sprječava se stvaranje parnog omotača oko obratka karakterističnog za filmsko isparivanje pa se odvođenje topline iz rubnog sloja uglavnom provodi mjeđurastim isparivanjem i konvekcijom. Pri tome na koeficijent prijelaza topline gašenja utječe niz čimbenika od kojih su najutjecajniji vrsta i sastav sredstva za

gašenje, kinematička viskoznost, temperatura zasićenja sredstva, gustoća prskanja  $m_0$ ,  $\text{kg}/(\text{m}^2\text{s})$ , oblik i dimenzije segmenta kaljene površine, toplinska svojstva i oksidacija površine metala, temperatura, pritisak, brzina strujanja i protok sredstva, konstrukcija i položaj prskalice prema obratku (promjer, oblik, razmještaj i skošenje rupica prema obratku), relativno gibanje obratka prema mlazu kapljica [5, 6, 14, 15, 16].

**Sustav za gašenje** čine, osim prskalice, spremnik sredstva za gašenje, dobavna i odsisna pumpa, cjevovod i mjerno-upravljački podsustav. Mjerne veličine u sustavu za gašenje su temperatura sredstava za gašenje, radni tlak, protok, koncentracija otopine polimera, kinematička viskoznost i količina sredstva za gašenje u spremniku. Upravljačke veličine u sustavu za gašenje su temperatura sredstva za gašenje, radni tlak sredstva te početak i završetak ciklusa gašenja (kod rotacionog induktijskog kaljenja), odnosno posmak obratka (kod posmičnog induktijskog kaljenja) [9, 14, 15].

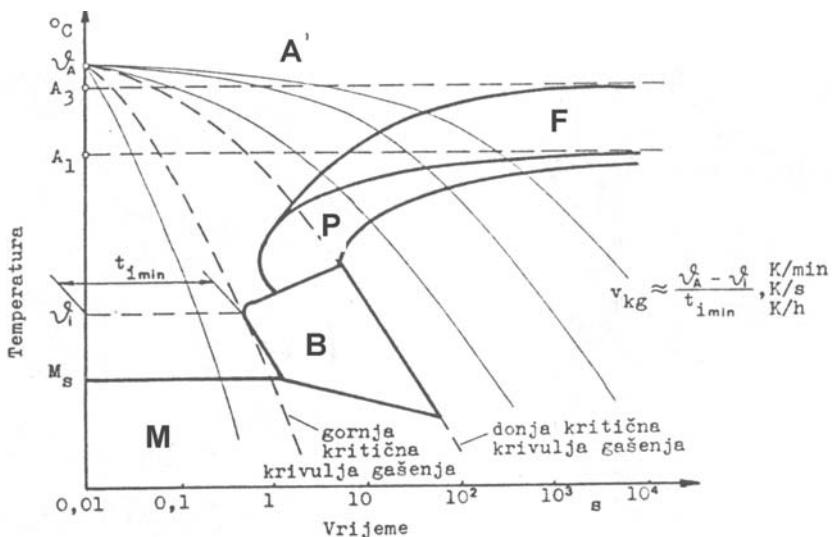
**Mikrostrukturne fazne pretvorbe pri ohlađivanju austenita** započinju uz temperaturnu histerezu u odnosu na austenitnu pretvorbu pri zagrijavanju. Budući da se snižavanjem temperature snižava i pokretljivost atoma ugljika, željeza i legirajućih elemenata, to će se i mikrostrukturne faze nastale pretvorbom austenita razlikovati po obliku, veličini i rasporedu [11]. Pri brzinama ohlađivanja većim od gornje kritične brzine gašenja ili uz neko kritično pothlađenje potpuno će izostati difuzija svih atoma, pa će uslijediti tzv. preklopna (bezdifuzijska) pretvorba austenita u martenzit. Praćenje i predviđanje redoslijeda mikrostrukturnih faznih pretvorbi konkretnog čelika pri kontinuiranom ohlađivanju austenita provodi se pomoću TTT dijagrama za kontinuirano ohlađivanje (**slika 2.7**).

Treba napomenuti da su TTT dijagrami za kontinuirano ohlađivanje (kao i TTS dijagrami) snimljeni (uglavnom dilatometrijskim metodama) za konkretni čelik iz određene šarže, poznatog kemijskog sastava, austenitiziran u propisanom vremenu na optimalnoj temperaturi i hlađen različitim brzinama ohlađivanja. Za istu vrstu čelika tolerantno različitog kemijskog sastava, različitih parametara austenitizacije ili načina hlađenja ovi dijagrami smiju se primijeniti samo orijentacijski [10, 11, 12].

Najznačajnija mikrostrukturna pretvorba pri induktijskom kaljenju (tzv. "potpuno kaljenje") jest nastanak martenzita od pothlađenog austenita bezdifuzijskim mikrostrukturnim procesima. Koncentracija ugljika u martenzitu jednaka je koncentraciji ugljika u primarnom (i pothlađenom) austenitu. Glavni utjecajni čimbenici koji određuju mehanička svojstva martenzita (tvrdiću, čvrstoću itd.), zaostala naprezanja, promjenu oblika i dimenzija obratka jesu udio ugljika i legirajućih elementa otopljenih u austenitu, veličina austenitnog zrna, temperature početka  $M_s$  i završetka  $M_f$  martenzitne

pretvorbe, gornja kritična brzina gašenja  $v_{kg}$ , morfologija i kristalografske značajke martenzitnog zrna i količina zaostalog austenita u martenzitnoj matrici.

Martenzit nastaje zbog ohlađivanja austenitiziranog čelika brzinama većim od tzv. "gornje kritične brzine gašenja"  $v_{kg}$ . Ako su brzine ohlađivanja međukritične ( $v_{kd} < v_{hl} < v_{kg}$ ) prije fazne pretvorbe pothlađenog austenita u martenzit dogodit će se difuzijske pretvorbe austenita u perlit i/ili bainit (tzv. "nepotpuno kaljenje"). Iznosi donje  $v_{kd}$  i gornje kritične brzine gašenja  $v_{kg}$  određuju se iz TTT za kontinuirano ohlađivanje konkretnog kaljenog čelika (**slika 2.7**).



Oznake mikrostrukurnih faza:

**A** ... austenit

**F** ... ferit

**P** ... perlit

**B** ... bainit

**M** ... martenzit

**Slika 2.7** Određivanje gornje kritične brzine gašenja  $v_{kg}$  iz TTT dijagrama za kontinuirano ohlađivanje podeutektiodnog ugljičnog čelika [17].

## 2.2 Priprema postupka induktijskog kaljenja

### 2.2.1 Faze pripreme

Iz prethodnog opisa postupka induktijskog kaljenja i najznačajnijih fizikalnih procesa u njemu mogu se nabrojiti utjecajni čimbenici vezani za obradak, induktor, prskalicu i parametre postupka koji utječu na dubinu kaljenja, površinsku tvrdću i oblik zakaljene zone (**tablica II.1**).

**Tablica II.1** Sistematisacija izvora i vrste utjecajnih čimbenika na svojstva zakaljene zone

<b>Izvor utjecajnog čimbenika</b>	<b>Utjecajni čimbenici na svojstva zakaljene zone</b>
<b>OBRADAK</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Oblik, dimenzije obratka i njihovo odstupanje unutar serije</li> <li>- Omjer ploštine kaljene površine prema volumenu obratka</li> <li>- Kemijski sastav materijala (posebno %C, %S, %P)</li> <li>- Fizikalna svojstva (električna, magnetska, toplinska), metalurška svojstva (temperatura austenitizacije, gornja kritična brzina gašenja, temperature <math>M_S</math> i <math>M_f</math>, sklonost stvaranju zaostalog austenita) i tehnološka svojstva (zakaljivost, prokaljivost)</li> <li>- Prethodna toplinska obrada i polazna mikrostruktura</li> </ul>
<b>INDUKTOR</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Oblik i dimenzije induktora</li> <li>- Veličina zračnosti između induktora i obratka</li> <li>- Primjena koncentratora magnetskog toka</li> <li>- Oblik i dimenzije koncentratora magnetskog toka</li> </ul>
<b>PRSKALICA</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Način strujanja sredstva za gašenje preko obratka.</li> <li>- Oblik i dimenzije prskalice</li> <li>- Konstrukcija rupica za stvaranje mlaza (promjer, raspored i broj, skošenje).</li> <li>- Orientacija i preklapanje mlazova</li> </ul>
<b>POSTUPAK INDUKCIJSKOG KALJENJA</b> (metoda induktijskog kaljenja, radni parametri, sredstvo za gašenje)	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Metoda induktijskog kaljenja</li> <li>- Frekvencija generatora (jednofrekvenčni ili dvofrekvenčni generator s konstantnom ili promjenljivom frekvencijom)</li> <li>- Električna snaga, napon, struja i faktor snage induktora</li> <li>- Trajanje ugrijavanja ili posmak obratka</li> <li>- Ostvarena brzina ugrijavanja na temperaturama iznad <math>A_1</math> temperature</li> <li>- Način gašenja (prskanje, uranjanje)</li> <li>- Vrsta i sastav sredstva za gašenje</li> <li>- Hidrodinamička i toplinska svojstva sredstva za gašenje (kinematička viskoznost, temperatura zasićenja, toplinska svojstva)</li> <li>- Položaj i točnost pozicioniranja obratka prema induktoru i prskalici</li> <li>- Relativno gibanje obratka prema mlazu iz prskalice</li> <li>- Brzina i smjer strujanja sredstva za gašenje</li> <li>- Radna temperatura, pritisak i protok sredstva za gašenje.</li> <li>- Trajanje progrijavanja između završetka ugrijavanja i početka gašenja</li> <li>- Trajanje gašenja.</li> </ul>

Većinu čimbenika navedenih u **tablici II.1** može se izmjeriti (svojstva materijala), propisati crtežom (konstrukcija obratka, induktora i prskalice) pa i automatski regulirati unutar glavnih podsustava

indukcijske radne ćelije (radni parametri postupka). Međutim složeno je i često puta nepotrebno utvrditi utjecaj svih navedenih čimbenika na površinsku tvrdoču, oblik i dubinu zakaljene zone.

Tijekom pripreme postupka simulacijskim programima i eksperimentalnim ispitivanjima uobičajeno se provjeravaju i optimiraju oblik i dimenzije induktora, potrebna električna snaga, brzina posmaka (trajanje ugrijavanja), temperatura austenitizacije i sredstvo za gašenje. Jedino se u slučaju usvajanja induksijskog kaljenja za potpuno novi obradak u velikoserijskoj proizvodnji priprema postupka sastoji (u svojem najširem obliku) od deset faza navedenih u **tablici II.2**.

**Tablica II.2** Faze pripreme i parametri postupka induksijskog kaljenja [1-6,9,18, 19].

Rb.	Naziv faze pripreme	Zadaće i svrha pojedinih faza pripreme
I.	Analiza prikladnosti obratka i materijala za induksijsko kaljenje	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Analiza prikladnosti materijala za induksijsko kaljenje</li> <li>- Analiza prethodne strojne i toplinske obrade</li> <li>- Analiza zahtijevane površinske tvrdoče, efektivne dubine kaljenja, položaja i oblika zakaljene zone</li> <li>- Analiza dopuštenih odstupanja iznosa zahtijevane površinske tvrdoče i efektivne dubine kaljenja</li> <li>- Određivanje dijela obratka pogodnog za prihvrat te načina postavljanja i skidanja obratka iz prihvata</li> </ul>
II.	Izbor osnovnih parametra postupka:	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Frekvencija i tip induksijskog generatora,</li> <li>- Temperatura austenitizacije,</li> <li>- Brzina gašenja (<math>V_{hl} \geq V_{kg}</math>),</li> <li>- Temperatura završetka gašenja,</li> <li>- Metoda ugrijavanja i način gašenja.</li> </ul>
III.	Izbor polaznog oblika induktora  (koncipiranje induktora)	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Koncipiranje polaznog oblika induktora (sa ili bez primjene koncentratora magnetskog toka).</li> <li>- Definiranje prihvata obratka i položaja induktora prema obratku.</li> <li>- 1D računalna simulacija pojednostavljenog modela induksijskog ugrijavanja ili analitički proračun orientacijskih vrijednosti vremena (ili posmaka) ugrijavanja i potrebne snage generatora</li> <li>- Analiza ekonomičnosti induktora (konstrukcija, izrada, održavanje)</li> </ul>
IV.	Optimizacija induktora i parametara ugrijavanja  (razrada tehničkih karakteristika induktora)	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Određivanje optimalnog broja, koraka zavoja i visine induktora</li> <li>- Optimizacija oblika i dimenzija induktora 2D ili 3D računalnom simulacijom radi određivanja teoretski najpovoljnijeg poprečnog presjeka induktora, optimalne zračnosti induktor - obradak i izbjegavanja lokalnog pregrijavanja obratka</li> <li>- Optimizacija parametara induksijskog ugrijavanja s optimalnim induktorom 2D ili 3D računalnom simulacijom radi određivanja optimalne kombinacije vremena (posmaka) i snage ugrijavanja.</li> </ul>
V.	Izbor sredstva za gašenje, prskalice i parametar gašenja  (razrada tehničkih karakteristika gašenja)	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Izbor sredstva i metode gašenja</li> <li>- Određivanje položaja prskalice prema obratku i induktoru</li> <li>- Prilagodavanje oblika i dimenzija prskalice mjerama i obliku obratka</li> <li>- Određivanje minimalne zračnosti između prskalice i obratka radi postizanja ujednačenog hlađenja i odvođenja sredstva za gašenje</li> <li>- Određivanje mjera, rasporeda i broja rupica na prskalicu</li> <li>- Proračun protoka, brzine istjecanja i gustoće prskanja</li> <li>- Određivanje vremena progrijavanja i gašenja računalnom simulacijom.</li> </ul>

**Tablica II.2** Faze pripreme i parametri postupka induksijskog kaljenja (nastavak)

Rb.	Naziv faze pripreme	Zadaće i svrha pojedinih faza pripreme
VI.	Projektiranje induktora i priprema za njegovu izradu	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Definiranje konačnog oblika i dimenzija induktora sa svim konstrukcijskim detaljima (priključne spojnice na generator, montaža koncentratora magnetskog toka, itd.)</li> <li>- Detaljno propisivanje vrste i kvalitete materijala induktora i eventualno njegove toplinske obrade.</li> <li>- Proračun protoka vode za hlađenje induktora.</li> <li>- Računalna simulacija ugrijavanja i ohladivanja induktora s ciljem uklanjanja potencijalnih mesta za pregrijavanje induktora (što je posebno važno ako je induktor s koncentratorom magnetskog toka).</li> <li>- Izbor i dimenzioniranje električne i toplinske izolacije induktora.</li> <li>- Proračun elektromagnetskih sila u induktoru i između induktora i obratka (kod dugačkih viševojnih induktora).</li> <li>- Projektiranje tehnološkog procesa izrade induktora sa svim potrebnim obradama i postupcima spajanja (lemljenje, lijepljenje).</li> <li>- Analiza troškova izrade i održavanja induktora.</li> <li>- Izrada crteža induktora i ostale radioničke dokumentacije vezane uz njegovu izradu.</li> </ul>
VII.	Projektiranje prskalice i priprema za njenu izradu	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Definiranje konačnog oblika prskalice sa svim potrebnim konstrukcijskim detaljima (priključci za dovod sredstva za gašenje, oblik i mjere ulazne i izlazne komore prskalice, promjer i skošenje rupica na izlaznoj komori itd.).</li> <li>- Izbor materijala prskalice (električki nevodljivi materijal).</li> <li>- Projektiranje tehnološkog procesa izrade prskalice sa svim potrebnim strojnim obradama.</li> <li>- Analiza troškova izrade i održavanja prskalice.</li> <li>- Izrada crteža prskalice i ostale radioničke dokumentacije vezane uz njenu izradu.</li> </ul>
VIII.	Izrada induktora i prskalice	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Primjena postupaka deformiranja, strojnih obrada rezanjem, postupaka spajanja lemljenjem ili lijepljenjem (čija kvaliteta provedbe presudno utječe na eksploatacijski vijek induktora).</li> <li>- Primjena koncentratora magnetskog toka zahtijeva posebne obradne postupke kojima se dobiva zahtijevani oblik koncentratora.</li> </ul>
IX	Ispitivanje tehničkih karakteristika induktora i prskalice uz metalografsku analizu zakaljenog sloja	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Provedba tzv. nulte serije induksijskog kaljenja pokusnih uzoraka.</li> <li>- Metalografska analiza pokusnih uzoraka.</li> <li>- Završno podešavanje i prilagodavanje zavoja, odnosno koncentratora magnetskog toka (deformiranje vodiča induktora, završne strojne obrade koncentratora magnetskog toka).</li> <li>- Snimanje tehničkih karakteristika induktora (napon, struja, faktor snage) i površinske temperature obratka.</li> <li>- Trajno pričvršćivanje koncentratora magnetskog toka (po dobivanju zahtijevanih rezultata induksijskog kaljenja) lemljenjem, lijepljenjem ili uprešavanjem.</li> </ul>
X	Definiranje mjerno-regulacijskih veličina i utvrđivanje dozvoljenog raspona odstupanja	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Podešavanje ili programiranje regulatora (snage, brzine posmaka, vremena ugrijavanja i gašenja, dobave sredstva za gašenje) i graničnika pomaka.</li> <li>- Postavljanje i kalibracija pirometara zračenja za mjerjenje površinske temperature obratka.</li> <li>- Postavljanje i kalibracija sustava za ispitivanje dubine zakaljenog sloja vrtložnim strujama (u cilju osiguranja 100%-tne kontrole kvalitete).</li> <li>- Programiranje dijagnostičkog sustava induksijske radne ćelije</li> </ul>

## 2.2.2 Konstrukcija induktora

**Zahtjevi na konstrukciji induktora.** Konstrukcija i izrada induktora spadaju među najvažnije faze u pripremi postupka induksijskog kaljenja. Induktor prenosi energiju s generatora na obradak i na njega se postavljaju sljedeći zahtjevi [1-6, 8, 17]:

- a) Oblikom i dimenzijama induktor treba osigurati traženi oblik i dubinu zagrijavane zone (odgovarajućom temperaturom i mikrostrukturom) u raspoloživom vremenu sa zadanim tipom induksijskog generatora
- b) Visok stupanj djelovanja induktora u prijenosu energije na obradak
- c) Posjedovanje odgovarajućih elektrotehničkih karakteristika važnih za dobar prijenos energije na obradak (visok faktor snage, odgovarajuća impedancija)
- d) Mala osjetljivost na točnost pozicioniranja i dozvoljena odstupanja mjera obratka
- e) Induktor treba biti čvrst da se ne bi deformirao tijekom upotrebe
- f) Dugotrajnost u eksploataciji
- g) Prikladnost za brzu i jednostavnu montažu i demontažu
- h) Ispunjavanje specifičnih zahtjeva poput integriranosti s prskalicom, konstrukcije prilagođene ulazu i izlazu obratka na automatskoj proizvodnoj liniji i dr.

Induktor se konstruira, odnosno prilagođava obratku ili skupini sličnih obradaka, pa se u tom smislu može smatrati specifičnim alatom za provedbu induksijskog kaljenja. Na vrstu, oblik, dimenzijske i materijalne utjecaje uglavnom sljedeći čimbenici:

- dimenzijske i oblike obratka, odnosno površine koju treba zakaliti
- veličina serije
- temperatura austenitizacije
- oblik i dubina zagrijavane zone
- metoda induksijskog kaljenja
- energija koja će se prenosi s generatora na obradak
- frekvencija generatora
- integriranost s prskalicom.

**Osnovne podjele induktora** prema načinu prijenosa električne snage s generatora na obradak, prema frekvenciji generatora i izvedbi induktora jesu:

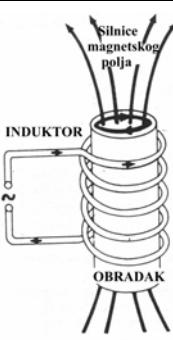
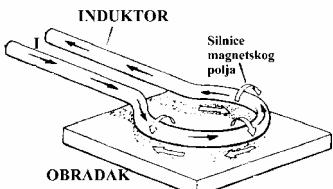
a) **Induktori prema načinu prijenosa energije na obradak (tablica II.3):**

- induktori s uzdužnim magnetskim poljem (tzv. "longitudinalni induktori"),
- induktori s poprečnim magnetskim poljem (tzv. "transverzalni induktori").

b) **Induktori prema frekvenciji generatora** dijele se na sljedeće tri grupe:

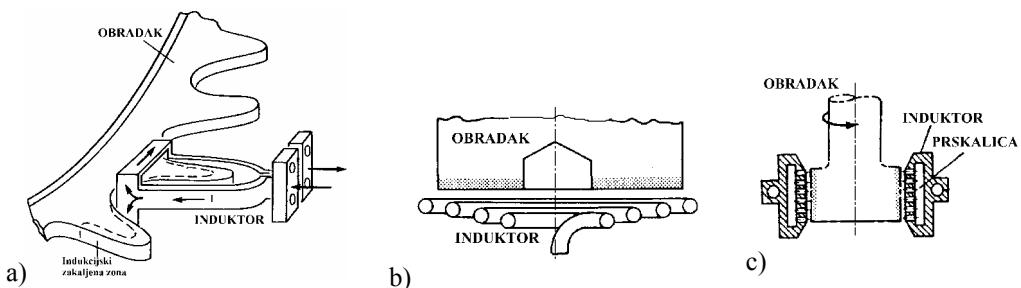
- niskofrekventni induktori ( $f < 1 \text{ kHz}$ ) – za predgrijavanje ili prokaljivanje
- srednjefrekventni induktori ( $f = 1 \dots 50 \text{ kHz}$ ) – za površinsko kaljenje
- visokofrekventni induktori ( $f = 50 \dots 500 \text{ kHz}$ ) – za površinsko kaljenje.

**Tablica II.3.** Izgled i glavne karakteristike induktora prema načinu prijenosa energije na obradak [8]

Induktor s uzdužnim magnetskim poljem	Induktor s poprečnim magnetskim poljem
 <p><b>Glavne karakteristike:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Silnice magnetskog polja u smjeru posmaka, paralelne s osi simetrije obratka</li> <li>- Induktor obuhvaća dio obratka</li> <li>- Promjer ili širina obratka trebaju biti veći od četverostrukе efektivne dubine prodiranja struje da ne bi došlo do medusobnog poništavanja induciranih vrtložnih struja s jedne strane presjeka na drugi</li> <li>- Moguće je postići visoke stupnjeve djelovanja induktora uz optimalnu konstrukciju i postavljanje prema obratku</li> </ul>	 <p><b>Glavne karakteristike:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Silnice magnetskog polja su okomite na smjer posmaka, odnosno osi simetrije obratka</li> <li>- Induktor se primiče obratku</li> <li>- Zbog velikog rasipanja magnetskog polja i ugrijavanja praktički samo jednom stranom induktora bez primjene koncentratora magnetskog toka postižu se relativno niski stupnjevi djelovanja induktora</li> </ul>

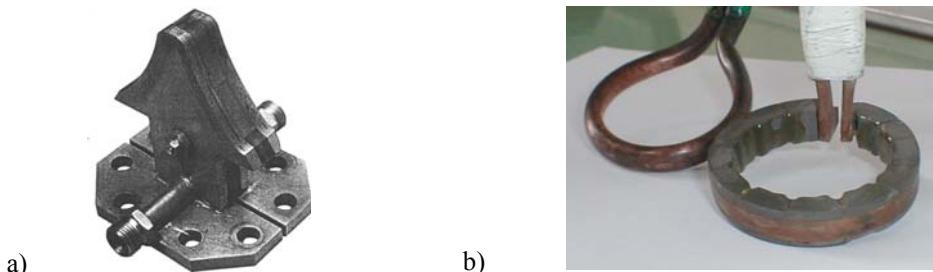
Prema izvedbi od važnosti za daljnje proučavanje su induktori za površinsko kaljenje:

- jednovojni ili viševojni induktori (**slika 2.1, slika 2.2a**),
- induktori za kaljenje zuba ili uzubine (zupčanika, lančanika) (**slika 2.8.a**)
- induktori u obliku spirale (**slika 2.8.b**)
- induktori integrirani s prskalicom (**slika 2.8.c**),
- induktori s posebno profiliranim koncentratorom magnetskog toka (**slika 2.9**),
- induktori za dvofrekvencijsko induksijsko kaljenje,
- induktori specijalnih izvedbi za velikoserijsko kaljenje npr. rukavaca koljenastih osovina, površina ekscentra, zubi pila za metal, valjaka valjnih ležaja i sl.



Slika 2.8. Primjeri izvedbi induktora bez koncentratora magnetskog toka [8]:

- Induktor za kaljenje zuba zupčanika,
- Induktor u obliku spirale,
- Induktor integriran s prskalicom.



Slika 2.9. Primjeri izvedbi induktora s koncentratorem magnetskog toka

- Induktor za kaljenje zuba zupčanika,
- Induktor za kaljenje rukavca osovine sa i bez koncentratora magnetskog toka.

**Primjena koncentratora magnetskog toka (slika 2.9)** može unaprijediti postupak induciranskog kaljenja na više načina posebno kod induktora složenog oblika i onih s niskim stupnjem djelovanja (induktori za kaljenje ravnih površina ili prvrta) [8, 9, 20, 21]:

- povišenjem stupnja djelovanja induktora  $\eta$  i faktora snage  $\cos\varphi$
- zaštitom susjednih dijelova obratka od ugrijavanja usmjeravanjem magnetskog polja
- boljom koncentracijom i raspodjelom vrtložnih struja samo na dijelu površine obratka.

Danas su u primjeni sljedeće **vrste koncentratora magnetskog toka** [8, 20, 21]:

- 1) *Koncentratori toka od izoliranih tankih limova* čelika legiranog silicijem, koji su primjenljivi za frekvencije ispod 10 kHz i manje gustoće prenesene električne snage,
- 2) *Feritni koncentratori toka*: keramički materijali osjetljivi na povišene temperature (jer postaju nemagnetični), koji su teško obradivi nakon sinteriranja,

- 3) *Magnetodielektrički koncentratori* toka dobiveni skrućivanjem u kalupu i toplinskom obrad bom feromagnetskog praha povezanog dielektričnim vezivom. Ovaj predoblik dobro se obrađuje skidanjem strugotine te mekim lemljenjem, lijepljenjem ili uprešavanjem na bakrene vodiče. Proizvode za određene frekvencije struje. U radu podnose temperature do 300°C.

### 2.2.3 Mjerne i regulacijske veličine u postupku induksijskog kaljenja

Suvremenu induksijsku radnu ćeliju čine sljedeći glavni podsustavi:

- izvor energije (indukcijski generator) sa sklopom za regulaciju izlazne snage i induktorm
- pristroj za manipulaciju obratkom
- hidraulička instalacija s bazenom za gašenje i prskalicom
- mjerne-regulacijski sustav za vođenje procesa.

Rad mikroprocesorski upravljlane suvremene induksijske radne ćelije temelji se na mjerenu regulacijskih veličina i usporedbi s referentnim veličinama optimalno izvedenog procesa. Čim jedna od praćenih veličina (brzina posmaka ili trajanje ugrijavanja obratka, struja i napon induktora, faktor snage, površinska temperatura obratka, dubina kaljenja) izade iz tolerancijskog polja, regulator signalizira stanje procesa i zahtijeva njegovo prilagođavanje referentnim veličinama. Unutar tolerancijskog polja regulator sam prilagođava parametre procesa. U većini suvremenih induksijskih radnih ćelija upravlja se s dvije do tri veličine i to brzinom posmaka, trajanjem ugrijavanja i izlaznom snagom generatora, ovisno o površinskoj temperaturi obratka, naponu, struji i faktoru snage induktora ili dubini induksijskog kaljenja. Ostale moguće upravljačke veličine izvedene su nepromjenjivima. Osnovne regulacijske i mjerne veličine za vođenje postupka induksijskog kaljenja prikazane su **tablicom II.4.**

**Tablica II.4.** Regulacijske i mjerne veličine procesa induksijskog kaljenja

	REGULACIJSKE VELIČINE INDUKCIJSKE RADNE ĆELIJE	Generator i induktor	Prihvatno/ posmični uredaj	Sustav za gašenje	OBRADAK
Mjerne i regulirane veličine u	Pozicija obratka unutar induktora		X		
Mjern e veliči	Radna snaga generatora	X			
	Vrijeme ugrijavanja obratka	X			
	Brzina posmaka obratka		X		
	Vrsta i sastav sredstva za gašenje			X	
	Protok i tlak sredstva za gašenje			X	
	Temperatura sredstva za gašenje			X	
	Površinska temperatura obratka				X
	Dubina kaljenja obratka				X
	Struja, napon i faktor snage induktora	X			

## **3.0 DOSADAŠNJE SPOZNAJE O RAČUNALNOM PROJEKTIRANJU INDUKCIJSKOG KALJENJA**

### **3.1 Računalne simulacije elektromagnetskih i toplinskih procesa**

Razvoj numeričkih metoda i računalne tehnike u posljednja tri desetljeća omogućili su širu primjenu računalnih simulacija za klasične postupke toplinske obradbe (kaljenje, popuštanje, žarenje, pougljičavanje) [22]. Računalne simulacije induksijskog kaljenja (indukcijsko ugrijavanje i gašenje prskanjem) pojavljuju se nešto kasnije (unazad posljednja dva desetljeća) zbog vrlo složenih fizikalnih procesa u rubnom sloju obratka (elektromagnetski, termodinamički, mikrostrukturni i mehanički) (poglavlja 2.1.1 , 2.1.2) koje treba na odgovarajući način djelomično ili u cijelosti obuhvatiti računalnom simulacijom. Ovi su procesi tijekom induksijskog kaljenja nelinearni, nestacionarni i međusobno uvjetovani, a na njihovo odvijanje utječu čimbenici porijeklom od samog obratka (oblik i dimenzije, kemijski sastav, fizikalna svojstva i polazna mikrostruktura), metode induksijskog kaljenja, induktora, prskalice i radnih parametara postupka.

Složenu prirodu međusobno ovisnih elektromagnetskih, toplinskih, mikrostrukturnih i mehaničkih procesa pri induksijskom kaljenju i njihov utjecaj na dobivena svojstva induksijski zakaljenog sloja (dubinu kaljenja, površinsku tvrdoću, oblik zakaljene zone) nije moguće dovoljno točno i precizno opisati bez postavljanja i rješavanja matematičkih modela. Složenost matematičkih modela fizikalnih procesa pri induksijskom kaljenju dugo vremena je onemogućavala simulaciju procesa čak i za jednodimenzionske probleme. Postavljanjem i rješavanjem matematičkih modela spomenutih procesa i analizom rješenja moguće je brzo i uz relativno niske troškove pronaći optimalne parametre postupka i optimalni oblik induktora za konkretan materijal i za zadani obradak.

Računalne simulacije induksijskog ugrijavanja i/ili kaljenja čelika pojavljuju se u literaturi od početka 80-tih god. prošlog stoljeća kao numerička rješenja problema induksijskog ugrijavanja (elektromagnetski i termodinamički 1D ili 2D problem) primjenom metoda konačnih diferencija [23], konačnih elemenata [24, 25] ili rubnih elementa [26]. Jedan od prvih primjera razrade algoritma i računalne simulacije međusobno povezanih elektromagnetskih, toplinskih i mehaničkih procesa pri induksijskom kaljenju dugačkog čeličnog valjka opisan je u radu [27] iz 1985. god. Do početka 90-tih god. prošlog stoljeća pojavljuje se jedan od prvih komercijalnih programa koji u sebi sadrži i dio za simulaciju induksijskog ugrijavanja (“Flux 2D”) s posebno prilagođenim generatorom mreže

konačnih elemenata (lokalno usitnjeni konačni elementi u induksijski zagrijavanom sloju) koji iterativno rješava prvo elektromagnetski, a potom termodinamički problem ugrijavanja (uzimajući u obzir nestacionarnosti procesa i nelinearnosti svojstava materijala) [28].

Do sredine 1990-tih god. pojavljuje se nekoliko pristupa numeričkom rješavanju uglavnom elektromagnetsko-termodinamičkog problema induktivskog ugrijavanja od kojih se ističu sljedeći:

- Primjena metode konačnih elemenata s posebnom formulacijom osnovne matrice konačnog elementa koja se sastoji od varijabli iz jednadžbi elektromagnetskog i toplinskog polja [29].
- Primjena metode konačnih elemenata s posebnim formulacijama elektromagnetskih rubnih uvjeta (beskonačni elementi, asimptotski rubni elementi, “ballooning” elementi, ...) [30].
- Primjena modificiranih oblika metode rubnih elemenata za računalnu simulaciju visokofrekventnog induktivskog ugrijavanja poput aproksimacijske metode rubnih elemenata [31, 32], metode s površinskim impedancijama [33].
- Primjena hibridnih metoda sastavljenih od metode konačnih elemenata s različitim formulacijama metode rubnih elemenata (tzv. metode FEM/BEM) [34, 35].

### **3.2 Metode rješavanja problema elektromagnetskih i toplinskih polja u simulaciji induksijskog kaljenja**

**Razine matematičkog modeliranja.** Za precizno definiranje radnih parametara postupka i predviđanje raspodjele mikrotvrdće u zakaljenom sloju potrebno je određenim algoritmom povezati matematičke modele svih relevantnih procesa u obratku (elektromagnetske, toplinske, mikrostrukturne). Ovisno o složenosti problema, veličini serije, raspoloživom vremenu i troškovima pripreme prilazi se rješavanju na nekoj od tri razine matematičkog modeliranja [36]:

- I. Na prvoj razini rješavaju se jednodimenzijski matematički modeli elektromagnetskih procesa i provođenja topline u obradak (analitičkim ili numeričkim metodama).
- II. Na drugoj razini rješavaju se dvodimenzijski matematički modeli elektromagnetskih, termodinamičkih i mikrostrukturnih procesa u dugačkim ili aksijalno simetričnim obratcima uglavnom numeričkim metodama.
- III. Na trećoj razini provodi se računalna simulacija svih spomenutih fizikalnih procesa trodimenijskim matematičkim modelima jer se priprema induksijsko kaljenje obratka složenog oblika. Uobičajeno se koriste metoda konačnih i/ili rubnih elemenata.

**Analitičke metode** korisne su pri simulacijama jednodimenzijske raspodjele kvazistacionarnog magnetskog polja i vrtložnih struja, za proračune “ekvivalentnog strujnog kruga” induktor-obradak [4, 5, 7] i rješavanje jednodimenzijske jednadžbe nestacionarnog provođenja topline [7]. Time se obuhvaćaju samo problemi induksijskog ugrijavanja (npr. ravnih dugačkih osovina ili ravnih ploča s viševojnim induktoriom na temperaturama iznad Curieove temperature). Svojstva materijala pri tome se prepostavlju nepromjenjivim, homogenim i izotropnim. Za proračun električne snage ugrijavanja obratka i određivanje optimalnog broja zavoja dugačkog viševojnog induktora često puta se koristi model “ekvivalentnog strujnog kruga” induktor-obradak poznat iz elektrotehnike [5, 7]. U tom (“koncentriranom”) modelu induktor i obradak zamjenjuju se omskim (radnim) i induktivnim (jalovim) otporima. Omski otpori predstavljaju “gubitke” električne snage pretvorbom u toplinu ugrijavanja obratka (Joulovi gubici), a induktivni otpori predstavljaju samoindukciju i elektromagnetsku vezu induktora i obratka. Specifična snaga Joulovih gubitaka uz površinu obratka ulazi u matematički model provođenja topline u obliku volumnih toplinskih izvora raspoređenih po sloju debljine jednake efektivnoj dubini prodiranja struje  $\delta$ . Ovaj model primijenjen je i u ovom radu za postavljanje energijske bilance induksijskog kaljenja.

Jednodimenzionsko matematičko modeliranje unatoč pojednostavljenom prikazu daje kvalitativni uvid u raspored električne snage i temperature u površinskom sloju ovisno o radnoj frekvenciji, jakosti struje, naponu induktora i posmaku (trajanju ugrijavanja) obratka, što može poslužiti za procjenu stvarnih uvjeta kod složenijih dvodimenzionskih modela, a ranije je služilo za izradu tehnoloških dijagrama korištenih u pripremi inducijskog kaljenja. Primjena ovakvih podloga ograničena je na slučajeve za koje su konstruirani i ispitani.

**Numeričke metode** karakteristične su za suvremenu pripremu inducijskog kaljenja i primjenjuju se čak i u slučajevima kad je diferencijalna jednadžba difuzije elektromagnetskog polja ili provođenja topline analitički rješiva, ali nije moguće eksplicitno zadati rubne uvjete ili su svojstva materijala funkcija rješenja diferencijalne jednadžbe (nelinearni matematički model). Od numeričkih metoda za modeliranje inducijskog kaljenja najviše su zastupljene metode konačnih i rubnih elemenata s nizom svojim podvrsta i kombinacija (poglavlja 3.2.1 , 3.2.2).

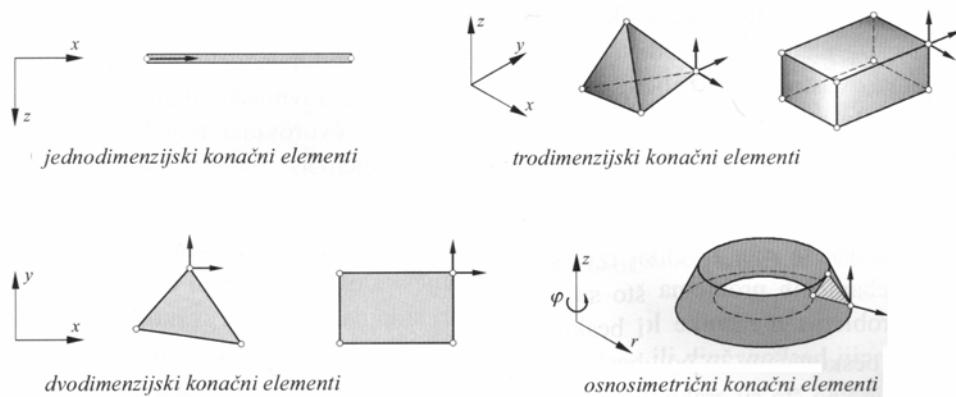
**Metoda konačnih diferencija** koja je zbog svoje jednostavnosti bila prva primijenjena za numeričko rješavanje diferencijalne jednadžbe provođenja topline i diferencijalnih jednadžbi elektromagnetskog polja na jednostavnim geometrijskim domenama (valjci, predmeti kvadratnog i pravokutnog poprečnog presjeka) [21, 88, 89, 90] danas se rjeđe koristi u znanstveno istraživačkom modeliranju inducijskog kaljenja. Poteškoća pri njenoj primjeni za obratke složenijeg oblika je u pojavi nepodudaranja mreže ortogonalnih čvorova sa zakrivljenim oblikom površine obradaka ili induktora, kao i u potrebi vrlo gустe diskretizacije kaljenog rubnog sloja s malim prostornim koracima ( $\Delta r_i$  i  $\Delta z_j$ ). Za rješavanje matematičkih modela fizikalnih procesa kod inducijskog kaljenja prostorni koraci u površinskom sloju trebaju biti manji od efektivne dubine prodiranja struje  $\delta$ , što zahtijeva vrlo gусту mrežu čvorova i dugotrajno izvođenje simulacije. Dodatno prevelikim smanjivanjem prostornih koraka lako se može doći u područje u kojem greška zaokruživanja računala postaje većom od promjene fizikalne veličine. Značajnija primjena metode konačnih diferencija u današnjem modeliranju inducijskog kaljenja zadržana je uglavnom pri rješavanju nestacionarnih diferencijalnih jednadžbi (npr. provođenja topline) za diskretizaciju jednadžbi u vremenskoj domeni. Pri tome treba napomenuti da je vremenski korak rješenja termodinamičkog problema  $\Delta t$  povezan s diskretizacijom prostorne domene  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  kriterijem stabilnosti numeričkog rješenja [9].

### 3.2.1 Metoda konačnih elemenata

Metoda konačnih elemenata je numerička metoda temeljena na diskretizaciji kontinuma s određenim brojem elemenata i geometrijskih čvorova na elementu. Diskretizacijom se kontinuum s beskonačno stupnjeva slobode gibanja zamjenjuje diskretnim modelom međusobno povezanih elemenata s ograničenim brojem stupnjeva slobode. Oblik elementa i broj čvorova na njemu ovisi o dimenziji problema, obliku predmeta, modeliranom procesu, zahtijevanoj točnosti rješenja i brzini računanja na računalu.

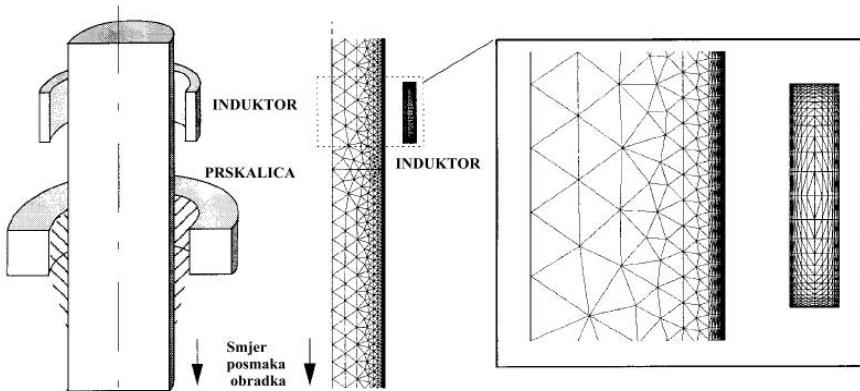
**Osnovni konačni elementi za analizu fizikalnih procesa pri inducijskom kaljenju** shematski su prikazani na **slici 3.1**. Zbog složenog matematičkog opisa fizikalnih procesa pri inducijskom kaljenju u literaturi se u najvećem broju radova nalaze računalne simulacije inducijskog kaljenja s dvodimenzijskim i osnosimetričnim konačnim elementima trokutnog ili četverokutnog poprečnog presjeka. Ako su vanjske površine geometrijskih domena nepravilnog oblika i zakrivljene onda se uobičajeno koriste trokutni konačni elementi umjesto četverokutnih.

Broj i razmještaj elemenata određuje se prema iskustvu. Općenito je pravilo da je za postizanje točnijeg rješenja nužna finija mreža (veći broj manjih konačnih elemenata) na mjestima gdje se očekuje značajnija promjena promatrane fizikalne veličine, poput površinskog sloja inducijski grijanog obratka (**slika 3.2**). Pri zadavanju gусте mreže treba izbjegći greške zaokruživanja računala.



**Slika 3.1** Osnovne vrste konačnih elemenata uobičajeno korištene pri simulacijama inducijskog kaljenja [37]

Na **slici 3.2** također je uočljivo da zrak oko obratka i induktora nije diskretiziran mrežom konačnih elemenata jer se prijenos elektromagnetskog polja s induktora na obradak računa metodom rubnih elemenata koja zahtijeva samo diskretizaciju površine obratka i induktora. U vlastito razvijenom simulacijskom programu u ovom radu koriste se linearni trokutni elementi za diskretizaciju dvodimenzionalnih i osnosimetričnih geometrijskih domena.



**Slika 3.2** Shematski prikaz položaja induktora i prskalice prema obratku i adaptivne mreže konačnih elemenata na obratku i induktoru [38]

**Formulacije konačnog elementa.** Stanje u svakom elementu (elektromagnetsko polje, temperatura, itd.) opisuje se pomoću interpolacijskih funkcija koje moraju zadovoljavati rubne i dodatne uvjete modela. Uz ispravnu formulaciju jednadžbe konačnog elementa, približavanje točnom rješenju raste s povećanjem broja elemenata. Za izvođenje (lokalne) jednadžbe konačnog elemenata pri simulacijama inducijskog kaljenja primjenjuju se uobičajeno sljedeće dvije formulacije:

- I) **Varijacijska formulacija konačnog elementa**, primjenljiva kad se za razmatrani problem može naći funkcional (integralni oblik poznat iz funkcionalne analize koji opisuje stanje u konačnom elementu zajedno s rubnim uvjetima) i nepoznata funkcija koja zadovoljava uvjet postizanja ekstrema funkcionala. Formulacija problema diferencijalnom jednadžbom i varijacijska formulacija su ekvivalentne jer iste funkcije zadovoljavaju obje formulacije i pridružene uvjete jednoznačnosti. U odnosu na diferencijalnu formulaciju varijacijska formulacija ima niži red derivacije u

podintegralnoj funkciji funkcionala, pa tražena funkcija mora imati derivacije nižeg reda od onog koji je potreban u diferencijalnoj formulaciji. Za približno rješavanje ove formulacije uobičajeno se koristi Rayleigh-Ritzova metoda [34, 35, 37, 39].

- II) **Metoda težinskog reziduala** primjenljiva kad ne postoji funkcional ili je varijacijska formulacija promatranog problema presložena. Metoda težinskog reziduala temelji se na rješavanju diferencijalne jednadžbe simulacijskog modela općeg oblika (3.1.a) uz rubne uvjete (3.1.b) s unaprijed prepostavljenim interpolacijskim funkcijama  $\varphi_i$  (s nepoznatim parametrima u čvorovima konačnog elementa).

$$\mathbf{L} \psi = \mathbf{F}; \quad L = L\left(\psi, \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{X}_i}, \frac{\partial^2 \psi}{\partial \mathbf{X}_i^2}, t\right) \quad (3.1.a)$$

$$\mathbf{L}_b \psi = \mathbf{g}; \quad (3.1.b)$$

$$\bar{\psi} = \sum_{i=1}^n \bar{\psi}_i \varphi_i \quad (3.2)$$

$\mathbf{L}$  ... linearni operator (preslikavanje) u matematičkom prostoru

$\mathbf{L}_b$  ... linearni operator rubnih uvjeta u matematičkom prostoru

$\psi$  ... potencijalno skalarno ili vektorsko polje  $\psi=f(X_i, t)$   $i = 1, 2, 3$

$\mathbf{F}$  ... izvor ili ponor polja  $F=f(X_i, t)$   $i = 1, 2, 3$

$\mathbf{g}$  ... karakteristična rubna vrijednost veličine polja

$\bar{\psi}_i$  ... aproksimacija polja  $\psi$  na  $i$ -tom čvoru mreže

$\varphi_i$  ... interpolacijska funkcija raspodjele polja  $\psi$  oko  $i$ -og čvora mreže  
(tzv. oblikovna funkcija konačnog elementa)

Prepostavljeno približno rješenje  $\bar{\psi}$  (3.2) uvrštava se u diferencijalnu jednadžbu promatranog problema (3.1.a-b) pri čemu se u općem slučaju javlja rezidual  $\mathbf{R}$  u odnosu na točno rješenje [37, 39, 40, 41].

$$\mathbf{R} = \Psi - \bar{\psi} = \Psi - \sum_{i=1}^n \bar{\psi}_i \varphi_i \quad (3.3)$$

Postavljanjem i minimizacijom težinskog integrala mogu se izračunati vrijednosti aproksimacijskih funkcija  $\bar{\psi}_i$  kojima se postiže minimalno odstupanje od stvarnih vrijednosti fizikalne veličine  $\Psi$  u svih  $n$  geometrijskih čvorova mreže.

$$\iiint_V R w dV = \iiint_V (\bar{\psi} - \sum_{i=1}^n \bar{\psi}_i \varphi_i) w_j dV = 0 \quad (3.4)$$

$w_j$  ...težinska funkcija za minimizaciju reziduala nad j-tim čvorom mreže (tzv. test funkcija konačnog elementa)

Minimizacijom reziduala (Galerkinovom metodom, koalokacijom ili metodom najmanjih kvadrata odstupanja) dobiva se sustav algebarskih jednadžbi konačnog elementa čije su nepoznanice parametri interpolacijskih funkcija  $\varphi_i$  u čvorovima elementa. Parametri algebarskih jednadžbi svih konačnih elemenata u modelu uvrštavaju se u globalnu matricu konačnih elemenata (globalni sustav jednadžbi), koja se rješava direktnim ili iteracijskim metodama matričnog računa [37, 39, 41].

**Naziv konačnog elementa** uobičajeno se određuje prema redu funkcije oblika  $\varphi_i$  (linearni, kvadratni, kubni, spline). Funkcije oblika  $\varphi_i$  moraju zadovoljavati rubne uvjete duž rubova elementa, kao i dodatne uvjete nužne za konvergenciju rješenja. Unutar pojedinog elementa svojstva materijala i izvori polja ( $F^e$ ) uzimaju se konstantnim, ali se mogu mijenjati od elementa do elementa [39]. Ovo se nužno primjenjuje kod simulacijskog modela induktijskog kaljenja jer geometrijska domena modela sadrži tri, po svojstvima, bitno različita područja: obradak, induktor i prostor između njih (najčešće zrak), a svojstva materijala se mijenjaju od elementa do elementa ovisno o temperaturi i/ili jakosti magnetskog polja.

**Točnost, stabilnost i konvergencija MKE rješenja.** Vrijednosti fizičkih veličina dobivene metodom konačnih elemenata (MKE) predstavljaju približenje stvarnih vrijednosti s određenom točnošću, odnosno rezidualom  $R = \psi - \bar{\psi}_i$ . Točnost, stabilnost i konvergencija rješenja ovisne su o broju konačnih elemenata, a kod iteracijskih rješenja (nelinearnih ili nestacionarnih problema) i o broju iteracija. Konvergentna rješenja u pravilu su stabilna te se s povećanjem broja konačnih elemenata ili broja iteracija smanjuje rezidual  $R$ . Kod divergentnih rješenja rezidual  $R$  se povećava ili počinje oscilirati s povećanjem broja konačnih elemenata ili s povećanjem broja iteracija.

Veličina greške proračuna osim spomenutih čimbenika ovisi i o položaju granice modeliranog područja prema dalnjem okolišu. Kontrola greške pri diskretizaciji geometrijske domene simulacijskog modela može se provesti na tri načina [37, 41]:

- a) *h-postupak*, pri kojem se automatski mijenja veličina konačnih elementa na mjestima s nedozvoljeno velikim pogreškama,
- b) *p-metoda*, pri kojoj se povećava stupanj polinoma interpolacijske funkcije, a veličine elemenata ostaju nepromijenjene,
- c) *h/p-metoda*, koja je kombinacija prethodno spomenutih postupaka.

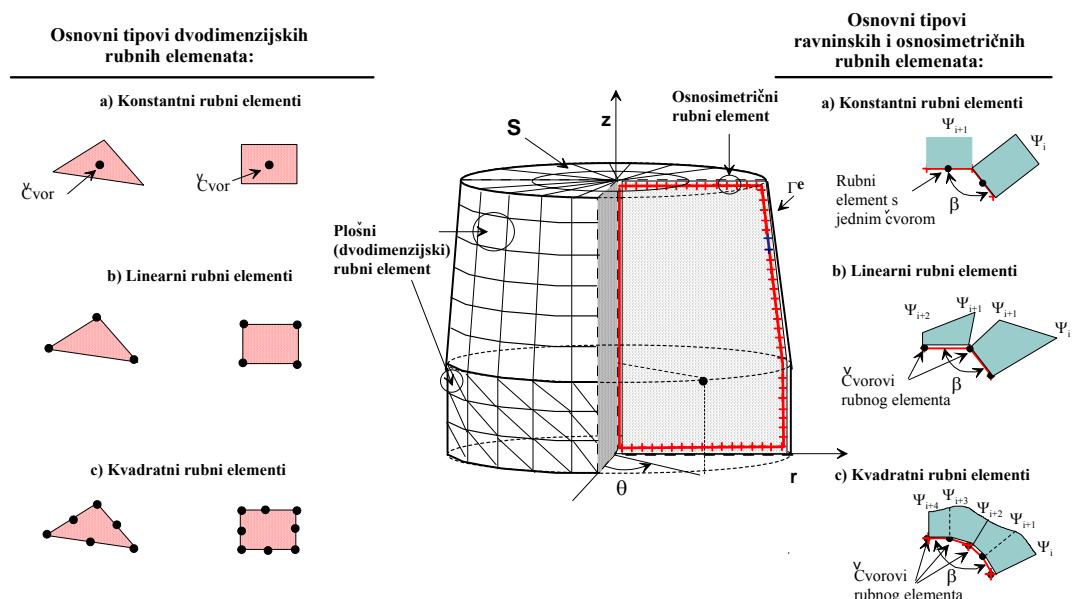
**Primjena metode konačnih elemenata (MKE) za simulaciju induksijskog kaljenja** opisana je u brojnim radovima [23-25, 29, 42, 43, 44] uglavnom vezano za analizu prijenosa elektromagnetskog polja i topline u obratku. Zbog već spomenute potrebe za vrlo gustom mrežom geometrijskih čvorova uz površinu obratka, primjena metode konačnih elemenata preporučljiva je kod simulacije nisko frekventnog ( $f < 1$  kHz) i srednje frekventnog ( $f < 50$  kHz) induksijskog ugrijavanja. Za visoko frekventno induksijsko ugrijavanje ( $f > 50$  kHz) često se koristi spoj metode rubnih elemenata (za izračunavanje približne raspodjele elektromagnetskog polja po površini obratka) sa metodom konačnih elemenata (kojom se računa elektromagnetsko polje u induktoru, inducirano elektromagnetsko polje u obratku i provođenje topline u obratku). Time se izbjegava diskretizacija okoliša konačnim elementima, dobivaju se manji globalni sustavi algebarskih jednadžbi i izbjegava se definiranje granice matematički modeliranog područja prema dalnjem okolišu (iza koje se ne osjeća značajno djelovanje elektromagnetskog polja). Na ovoj granici trebali bi se definirati odgovarajući rubni uvjeti ili postaviti posebno formulirani konačni elementi (prostorno transformirani elementi, beskonačni elementi, hibridni FEM/BEM elementi, asimptotski elementi) [30, 41].

U vlastito razvijenom simulacijskom programu korištena je metoda konačnih elemenata za istovremeno rješavanje diferencijalnih jednadžbi elektromagnetskog polja i provođenja topline u obratku. Primjenjeni su trokutni konačni elementi s formulacijom težinskog reziduala i Galerkinovim postupkom minimizacije reziduala (tzv. "nejaka formulacija konačnog elementa"). Time se osim matematičkog približenja nepoznatih veličina elektromagnetskog potencijala i temperature na svakom elementu ostvaruje i podudarnost jednadžbe konačnog elementa sa zakonom očuvanja energije.

### 3.2.2 Metoda rubnih elemenata

Metoda rubnih elemenata temelji se na zadavanju rubnih uvjeta, diskretizaciji površine modeliranog područja rubnim elementima, postavljanju i numeričkom rješavanju integralne jednadžbe problema. Integralna jednadžba problema postavlja se s tzv. "temeljnim funkcijama" koje egzaktno zadovoljavaju diferencijalnu jednadžbu (njeno su osnovno rješenje) i rubne uvjete problema. U fizikalnom smislu temeljne funkcije predstavljaju djelovanje točkastih izvora ili ponora polja promatrane fizikalne veličine na površini modeliranog područja. Integralna jednadžba problema numerički se rješava direktnim ili indirektnim postupkom [45, 46].

**Osnovni rubni elementi za analizu elektromagnetskog polja pri induktijskom kaljenju.** Diskretizacijom površine matematički modeliranog područja snižava se red promatranog problema za jednu dimenziju (3D problemi se rješavaju kao 2D problemi, a 2D kao 1D problemi) što pojednostavljuje izvode integralnih jednadžbi i programiranje numeričkog rješenja. Kod trodimenijskih geometrijskih domena rubni elementi su u općem slučaju prostorno orijentirani dijelovi površine (2D rubni elementi) (**slika 3.3**).



**Slika 3.3** Prikaz osnovnih vrsta (1D, 2D) i tipova rubnih elemenata (konstantni, linearni, kvadratni) na primjeru diskretizacije vanjske površine osnosimetričnog tijela

Kod osnosimetričnih i dvodimenzionalnih geometrijskih domena rubni elementi leže na krivulji koja omeđuje domenu. Pri tome se vanjska površina domene  $S$  diskretizira s ravnim ili zakrivljenim 1D rubnim elementima s dva ili više čvorova (**slika 3.3**). Promjena fizikalne veličine  $\psi$  po rubnom elementu aproksimira se lokalnim funkcijama oblika (konstante, linearne ili kvadratne funkcije). Kod osnosimetričnih rubnih elemenata postoji promjena promatrane fizikalne veličine  $\psi$  samo po duljini elementa smještenog u ravnini r-z cilindričnog koordinatnog sustava.

U ovome radu su korišteni ravni rubni elementi (konstantni, linearni). Konstantni ravni elementi najjednostavniji su za programiranje i omogućuju jednostavno izbjegavanje singulariteta u integralnim jednadžbama korištenjem samo prvih članova razvoja podintegralnih funkcija u red. Ako se površina obratka podijeli na dovoljno gustu mrežu konstantnih rubnih elemenata, može se postići slična točnost kao sa linearnim ili kvadratnim rubnim elementima (uz manji broj kvadratnih rubnih elemenata nego što je konstantnih rubnih elemenata).

**Formulacija rubnog elementa.** Matematički modeli problema raspodjele potencijalnog skalarnog ili vektorskog polja poput difuzije elektromagnetskog polja i provođenja topline opisuju se jednadžbama oblika (3.5) u kojima je  $\psi$  nepoznata funkcija potencijalnog polja, a  $b$  poznata gustoća djelovanja u polju.

$$\nabla^2 \psi = b \quad (3.5)$$

$\nabla^2(\cdot)$  ... Diferencijalni operator (Laplacean)

$\psi$  ... Potencijalna funkcija

$b$  ... Zadana gustoća djelovanja izvora ili ponora u polju  $\psi$

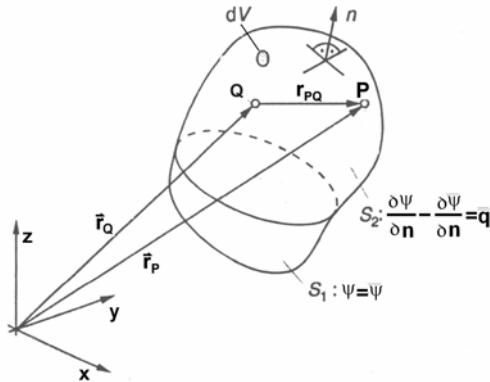
Funkcija polja  $\psi$  općenito ne mora biti točno poznata na dijelovima rubne površine  $S_1$  i  $S_2$ , (**slika 3.4**) već se može izraziti aproksimacijskim funkcijama (rubnim uvjetima) [45]:

$$\psi - \bar{\psi} \neq 0 \quad \text{na granici } S_1 \quad (3.6.a)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} - \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial n} \neq 0 \quad \text{na granici } S_2 \quad (3.6.b)$$

Postavljanjem težinskog integrala povezuje se jednadžba (3.5) s rubnim uvjetima ravnoteže i kontinuiteta polja  $\psi$  (3.6.a-b) u prvi oblik jednadžbe rubnih elemenata navedene prema [45]:

$$\iiint_V (\nabla^2 \psi) w dV - \iiint_V b w dV = \int_{S_2} \left( \frac{\partial \psi}{\partial n} - \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial n} \right) w dS - \int_{S_1} (\psi - \bar{\psi}) \frac{\partial w}{\partial n} dS \quad (3.7)$$



**Slika 3.4.** Označavanje geometrijskog područja problema, rubnih površina, rubnih uvjeta, točke opažanja polja "P" i točke izvora polja "Q" [45].

Primjenom Greenovog teorema na prvi član jednadžbe (3.7) i uređivanjem nastalog izraza slijedi drugi oblik polazne jednadžbe rubnih elemenata [45]:

$$\iiint_V (\nabla^2 w) \psi dV - \iiint_V b w dV = - \int_{S_2} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial n} w dS - \int_{S_1} \frac{\partial \psi}{\partial n} w dS + \int_{S_2} \psi \frac{\partial w}{\partial n} dS + \int_{S_1} \bar{\psi} \frac{\partial w}{\partial n} dS \quad (3.8)$$

Rješavanje integrala (3.7), odnosno (3.8) može se provesti izborom odgovarajuće težinske funkcije  $w$  takve da je  $\nabla^2 w = 0$  ili primjenom fundamentalnog rješenja  $\psi^*$  takvog da je  $\nabla^2 \psi^* = \delta r_{PQ}$  (gdje je  $\delta r_{PQ}$  Diracova delta funkcija) u direktnoj ili indirektnoj formulaciji rubnog elementa.

- I. **U direktnoj formulaciji integrala rubnog elementa** određuju se vrijednosti potencijala  $\psi$  i njegovog gradijenta  $\partial \psi / \partial n$  na dijelovima površine modeliranog područja gdje nisu zadani rubnim uvjetima. Pri tome se pretpostavlja da je težinska funkcija  $w$  u jednadžbi (3.8) sastavljena od serije fundamentalnih rješenja (Greenovih funkcija)  $\psi^*$  ili da je aproksimacijska funkcija  $\bar{\psi}$  u jednadžbi (3.7) kombinacija fundamentalnih rješenja.

Formulacija integrala rubnog elementa s Greenovom funkcijom kao fundamentalnim rješenjem jednadžbe elektromagnetskog polja u zraku koristit će se u vlastitom simulacijskom modelu induksijskog kaljenja zbog jednostavne primjene zajedno s formulacijom konačnog elementa.

II. **U indirektnoj formulaciji integrala rubnog elementa** područje problema uobičajeno se proširuje u beskonačnost, a onda se uvode fiktivna djelovanja (izvori ili ponori polja) raspodijeljena po liniji ili površini (umjesto koncentracije u nekoj točki) koja će na zatvorenoj površini modeliranog područja proizvesti učinak jednak rubnim uvjetima.

Fundamentalno rješenje  $\psi^*$  u fizikalnom smislu predstavlja polje opaženo u točki P zbog djelovanja jediničnog impulsa izvora polja u točki Q (**slika 3.4**). Impuls jediničnog potencijala matematički je predstavljen Diracovom delta funkcijom  $\delta_{PQ}$ . Fundamentalno rješenje  $\psi^*$  ovisi o udaljenosti  $r_{PQ}$  između točke izvora Q i točke polja P. Fundamentalno rješenje jednadžbe (3.5) za elektromagnetsko polje u slobodnom (nevodljivom) prostoru uz ( $b = 0$ ) zadovoljava uvjet (3.9):

$$\nabla^2 \psi^* + \delta_{PQ} = 0 \quad (3.9)$$

Za elektromagnetsko polje u slobodnom (nevodljivom) prostoru fundamentalno rješenje jednadžbe (3.9) je Greenova funkcija slobodnog prostora ( $\psi^* = G$ ) koja poprima oblik (3.10.a) za dvodimenzionske probleme, odnosno (3.10.b) za osnosimetrične i trodimenzionske probleme [46]:

$$G = \frac{1}{2\pi} \ln \left( \frac{1}{r_{PQ}} \right) = \frac{1}{2\pi} \ln \left( \frac{1}{\sqrt{(x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q)^2}} \right) \quad (3.10.a)$$

$$G = \frac{1}{4\pi r_{PQ}} = \frac{1}{4\pi \sqrt{r_p^2 + r_q^2 + (z_p - z_q)^2 - 2r_p r_q (\cos \theta_p \cos \theta_q + \sin \theta_p \sin \theta_q)}} \quad (3.10.b)$$

Pojedine varijable u jednadžbama (3.10.a-b) prikazane su i definirane na **slici 3.4**. Ako se za težinsku funkciju  $w$  u integralnoj jednadžbi (3.8) izabere fundamentalno rješenje  $\psi^* = G$  te ako su poznate gustoća izvora (ponora) polja  $b$  u volumenu  $V$ , gustoće toka  $\partial \bar{\psi} / \partial n$  i raspodjela potencijala  $\bar{\psi}$  na dijelovima površine S, tada se direktnom formulacijom iz jednadžbe (3.8) dobiva jednadžba potencijalne funkcije  $\psi_i$  u svakoj  $i$ -toj točki područja  $\Omega$  (tj. točci P):

$$\iiint_V (\nabla^2 G) \psi dV - \iiint_V b G dV + \int_{S_2} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial n} G dS + \int_{S_1} \frac{\partial \psi}{\partial n} G dS = \int_{S_2} \psi \frac{\partial G}{\partial n} dS + \int_{S_1} \bar{\psi} \frac{\partial G}{\partial n} dS \quad (3.11)$$

Vrijednost prvog člana na lijevoj strani jednadžbe (3.11) uz izbor  $\psi = G$  daje jednadžbu (3.12)

$$\iiint_V (\nabla^2 G) \psi dV = - \iiint_V \delta_i \psi dV = -\psi_i \quad (3.12)$$

Kod primjene direktnе formulacije integrala rubnih elemenata točku "i" treba s unutrašnje strane volumena V pomicati do točke "j" na rubnoj površini S. Kad se izjednače točke "i" i "j" svi integrali u jednadžbi (3.11) imaju singularnosti koje treba aproksimirati. Za "matematički" glatku površinu S i fundamentalno rješenje (3.9) singularna vrijednost člana na desnoj strani jednadžbe (3.11) prema [45, 46] jednaka je:

$$\lim_{P \rightarrow Q} \left( \int_{S_2} \psi \frac{\partial G}{\partial n} dS \right) = -\frac{1}{2} \psi_i \quad (3.13)$$

Uz pomoć jednadžbi (3.12) i (3.13) uklanja se singularnost članova s izrazom  $\partial G / \partial n$  iz integralne jednadžbe i-tog rubnog elementa (3.11). Za rješavanje ostaje još singularnost članova s funkcijom G koji se rješavaju ovisno o obliku ove funkcije. Uvođenjem koeficijenta prostornog kuta  $C_{\beta ij} = 1/2$  pod kojim se iz točke P vidi točka Q na matematički glatkoj površini S i rubnih uvjeta problema (3.6.a-b) integralna jednadžba (3.11) može se zapisati u svom uobičajenom obliku (3.14) prema [46].

$$C_{\beta ij} \bar{\psi}_i + \iiint_V b G dV + \iint_{S=S_1+S_2} \bar{\psi} \frac{\partial G}{\partial n} dS = \iint_{S=S_1+S_2} G \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial n} dS \quad (3.14)$$

Za matematički glatke površine S diskretizirane ravnim rubnim elementima postavljenim pod nekim kutom  $\beta$  (**slika 3.3**) koeficijent prostornog kuta iznosi  $C_{\beta ij} = \beta/2\pi$  [45].

**Primjena metode rubnih elemenata (BEM) za simulaciju induktijskog kaljenja.** Metoda rubnih elemenata posebno je prikladna za rješavanje problema s geometrijskim domenama otvorenim prema okolišu (npr. zračenje elektromagnetskih valova s induktora proizvoljnog oblika u okoliš) i analizu polja na graničnim površinama domena različitih fizikalnih svojstva (npr. induciranje vrtložnih struja u električki vodljivom materijalu). Druga povoljna karakteristika metode rubnih elemenata proizlazi iz

sličnog rješavanja jednadžbi ove metode i metode konačnih elemenata, što je čini pogodnom za postavljanje tzv. hibridnih FEM/BEM modela posebno prikladnih za simulacije srednje i visokofrekventnog induksijskog ugrijavanja [31, 33-35, 47].

Za simulaciju induksijskog ugrijavanja od primarne je važnosti raspodjela jakosti magnetskog polja i gustoće inducirane struje u površinskom sloju obratka, ali ne i u njihovom okolišu. Također je poznata činjenica da je potencijal visoko frekventnog elektromagnetskog polja jednak nuli u unutrašnjosti električki i magnetski vodljivog tijela i vrlo daleko od tijela (obratka). Stoga je u vlastitom simulacijskom modelu za rješavanje problema raspodjele elektromagnetskog polja na površini (S) obratka primijenjena metoda rubnih elemenata, a za određivanje elektromagnetskog polja induktora i raspodjele induciranih vrtložnih struja u rubnom sloju obratka metoda konačnih elemenata (zbog nelinearnih promjena svojstva materijala). Za formulaciju rubnog elementa na površini obratka u radu je primijenjena direktna metoda s usklađivanjem u točkama elemenata (nešto brža za računanje od Galerkinove metode). Njom se postiže točno rješenje u unaprijed određenim geometrijskim čvorovima površine obratka (S) koji se poklapaju s čvorovima konačnih elemenata.

**Točnost, stabilnost i konvergencija BEM rješenja** integralnih jednadžbi difuzije osnosimetričnog elektromagnetskog polja ovisi o nizu čimbenika od kojih su najznačajniji [26, 31, 32, 45, 46].

- a) veličina rubnih elemenata treba biti manja od efektivne dubine prodiranja struje  $\delta$
- b) vrsta rubnih elemenata (konstantni, linearni, kvadratni)
- c) točnost numeričke integracije članova jednadžbe (3.31) sa singularitetima oblika:
  - $\lim_{r_{PQ} \rightarrow 0} \left( \ln \frac{1}{r_{PQ}} \right)$ , kod dvodimenzijskih problema u pravokutnim koordinatama
  - $\lim_{r_{PQ} \rightarrow 0} \left( \frac{1}{r_{PQ}} \right)$ ,  $\lim_{r_{PQ} \rightarrow 0} \left( \frac{1}{r_{PQ}^2} \right)$ , kod osnosimetričnih i trodimenzijskih problema
- d) aproksimacija potencijalne funkcije  $\psi$  u blizini oštrih rubova (gdje površina nije "glatka" u matematičkom smislu)

### 3.3 Računalne simulacije mikrostrukturnih faznih pretvorbi

Računalne simulacije mikrostrukturnih procesa u postupcima toplinskih obradbi predstavljaju znanstveno područje vrlo intenzivnog razvoja s nizom predloženih matematičkih modela od kojih se nekoliko njih uspješno primijenilo pri simulaciji induktijskog kaljenja. Analizom literature [48-61] uočavaju se tri uobičajena pristupa matematičkom modeliranju mikrostrukturnih promjena:

- I. Neposredna primjena TTS ili TTT dijagrama
- II. Opis kinetike faznih pretvorbi empiričkim jednadžbama
- III. Opis kinetike faznih pretvorbi termokinetičkim jednadžbama

**Neposredna primjena TTS ili TTT dijagrama,** regresijskih jednadžbi analize ovih dijagrama ili matematičkih modela s neuronskim mrežama za predviđanje karakterističnih temperatura pretvorbe ( $A_1$ ,  $A_3$ ,  $M_s$ ,  $B_s$ ), brzine ohlađivanja, vremena inkubacije, udjela faza i tvrdoće čelika nakon faznih pretvorbi. Obično se snimljene ili izračunate krivulje  $\vartheta=f(t)$  preslikavaju u dijagram ili se iz njih računaju srednje brzine i uvrštavaju u regresijske modele (npr. jednadžbe Creusot-Loire) [54, 55]

**Opis kinetike faznih pretvorbi empiričkim jednadžbama.** Kinetika heterogenih reakcija, poput fazne pretvorbe  $\alpha/\gamma$ , odnosno  $\gamma/\alpha$  kod željeznih materijala, previše je kompleksna da bi se obuhvatila egzaktnom analitičkom jednadžbom. Stoga se postavljaju empiričke jednadžbe oblika (3.15) kojima se predviđa brzina pretvorbe  $dy/dt$  i udio nove faze  $y$  [48, 52, 49-52, 56-58]:

$$\frac{dy}{dt} = f(y)\tau(\vartheta, t)g\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial t}\right) \quad (3.15)$$

$f(y)$  ... Funkcija udjela nove faze

$\tau(\vartheta, t)$  ... Vremenska funkcija pretvorbe

$g\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial t}\right)$  ... Funkcija brzine ugrijavanja ili ohlađivanja

Brzinu pretvorbe  $dy/dt$  izraženu jednadžbom oblika (3.15) treba razlučiti od brzine nukleacije i brzine rasta zrna nove faze. Uobičajeni pristup modeliranju faznih pretvorbi je izvod ili pretpostavka funkcionske ovisnosti brzine pretvorbe o brzini nukleacije i brzini rasta zrna nove faze. Brzina rasta zrna promatrane faze može se mjeriti metalografski i povezati s brzinom pretvorbe, a iz razlika ovih

brzina slijedi brzina nukleacije nove faze. Točnost dobivenih rezultata ovisi o točnosti pretpostavljene jednadžbe pretvorbe (3.15) [48, 52].

Brzina fazne pretvorbe  $dy/dt$  može se odrediti izravno (dugotrajnim i zahtjevnim ispitivanjima) izotermičkih pretvorbi kvantitativnom metalografijom i rendgenografijom ili indirektnim ispitivanjima temeljenim na mjerenu nekog svojstva ovisnog o udjelu jedne od faza. Uobičajeno se mjeri promjena linearnih dimenzija ili volumena ispitnog uzorka, promjena električnog otpora ili magnetske permeabilnosti tijekom izotermičke pretvorbe ali i tijekom pretvorbi kontinuiranog tipa. Iz mnogobrojnih istraživanja faznih pretvorbi potvrđeno je da empiričke jednadžbe oblika (3.16) zadovoljavajuće opisuju kinetiku velikog broja izotermičkih pretvorbi u metalima [22, 48, 52, 57].

$$\frac{dy}{dt} = b_o^{n_A} \cdot t^{n_A-1} \cdot (1-y) \quad (3.16)$$

$n_A$  ... Avramijev koeficijent vrste pretvorbe

$b_o$  ... empirička konstanta,  $s^{-1}$

$t$  ... vrijeme, s

$y$  ... udio nastale nove faze, kg/kg

Iz jednadžbe (3.16) slijedi da je brzina pretvorbe  $dy/dt$  na početku mala, zatim se povećava do maksimuma i potom smanjuje na nulu učinkom sudaranja zrna što je izraženo faktorom  $(1-y)$ . Ako se pretpostavi da su  $b_o$  i  $n_A$  konstante nezavisne od udjela nove faze  $y$  i vremena pretvorbe  $t$  na konstantnoj temperaturi, tada se jednadžba (3.16) smije integrirati, pa slijedi:

$$\ln \frac{1}{1-y} = \frac{1}{n_A} \cdot (b_o \cdot t)^{n_A} \quad (3.17)$$

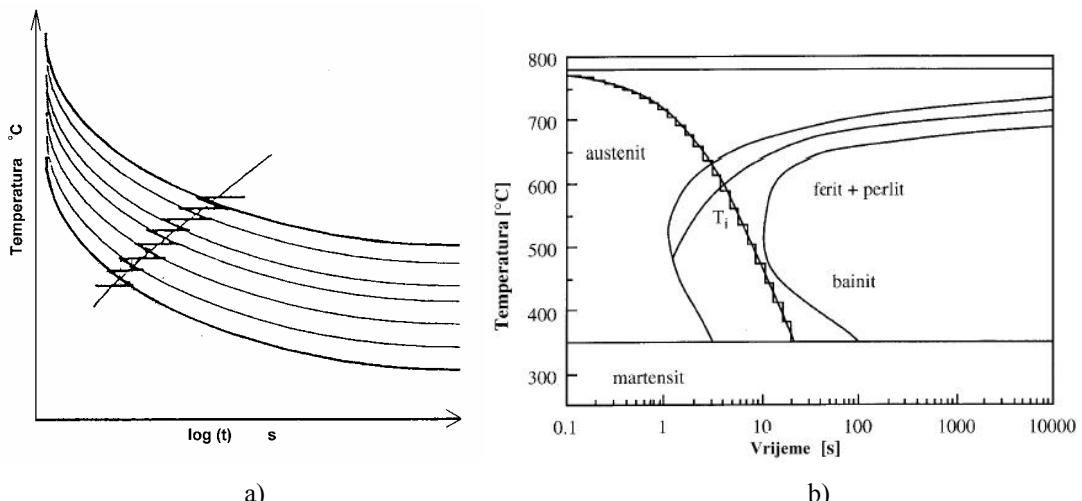
Ako se član  $1/n_A$  uključi u novu konstantu zajedno s konstantom  $b_o^{n_A}$  jednadžba (3.17) dobiva oblik poznate Johnson-Mehl-Avramijeve jednadžbe [49-52]:

$$y = 1 - \exp(-b_A t^{n_A}) \quad (3.18)$$

$b_A$  ... Avramijev koeficijent,  $s^{-1}$

Avramijevi koeficijenti  $b_A$  i  $n_A$  u jednadžbe (3.18) uobičajeno se određuju iz izotermičkog TTT dijagrama. Poopćenje ove jednadžbe za pretvorbe u višefaznom materijalu daje "Johnson – Mehl -

"Avrami – Kolmogorov" model (skraćeno "JMAK" model). Za simulacije mikrostrukturnih pretvorbi pri induktijskom kaljenju temeljenih na JMAK jednadžbama nužna je primjena iteracijskih modela (npr. model "LSG2M Nancy" [59]) u kojima se krivulja kontinuiranog ugrijavanja (ili ohlađivanja) aproksimira krivuljom s nizom izotermičkih držanja (**slika 3.5**). Za svako zadržavanje na konstantnoj temperaturi određuje se udio mikrostrukturne faze JMAK modelom kao rezultat djelomične izotermičke pretvorbe. Pri tome se pretpostavlja da je volumni udio mikrostrukturne faze, nastao nakon vremena  $t$ , od početka pretvorbe jednak sumi volumnih udjela ove faze nastalih tijekom prethodnih djelomičnih izotermičkih pretvorbi tzv. Scheilovo adicijsko pravilo prema [64].



**Slika 3.5** a) Shematski prikaz kontinuiranog ugrijavanja u izotermičkom TTS dijagramu zamijenjenog nizom kratkotrajnih držanja na konstantnoj temperaturi [63]  
 b) Shematski prikaz krivulje ohlađivanja aproksimirane stepeničastom promjenom temperature (elementarnim izotermičkim pretvorbama) u izotermičkom TTT dijagramu čelika Ck45 [61]

Za primjenu iteracijskih JMAK modela faznih pretvorbi karakteristične su dvije poteškoće: izbor odgovarajućeg vremenskog intervala elementarne izotermičke pretvorbe i određivanje odgovarajućeg oblika regresijskih funkcija Avramijevih koeficijenta ( $b_{A,i}=f(\vartheta)$ ,  $n_A=f(\vartheta)$ ). Uobičajeni iznosi vremenskog intervala djelomične izotermičke pretvorbe trebaju biti za 5 do 10 puta manji od vremenskog intervala  $\Delta t_j$  korištenog za proračun temperaturnog polja [47]. Mali iznos intervala  $\Delta t_k$

može biti izvorom grešaka zaokruživanja računala ako je zbog nelinearnosti problema nužan i mali interval  $\Delta t$ . Stoga će se u radu za matematičko modeliranje faznih pretvorbi u induksijski kaljenom sloju primijeniti dva modela iz skupine empirijskih modela:

- a) model Leblond-Devaux prema [60] za predviđanje difuzijskih faznih pretvorbi i
- b) model Koistinen – Marburger prema[62] za predviđanje martenzitne (bezdifuzijske) pretvorbe.

**Model Leblond-Devaux** predstavlja novi i drugačiji pristup empiričkom opisu fazne kinetike u višefaznom materijalu od iteracijskih modela JMAK. U njemu se brzina mikrostrukturne fazne pretvorbe računa istovremeno ovisnom od temperature i prethodno nastalog udjela nove faze za razliku od iteracijskog JMAK modela koji ove utjecaje obuhvaća pojedinačno preko tri funkcije različitih argumenata  $f(y)$ ,  $\tau(\vartheta)$ ,  $g(d\vartheta/dt)$ . Detaljan opis i daljnja razrada Leblond-Devaux modela navedeni su u poglavlju 7.

**Model Koistinen-Marburger** za predviđanje martenzitne pretvorbe polazi od eksperimentalno određene jednadžbe za relativni volumni udio martenzita ( $y_2$ , 1) nastao nadkritičnim ohlađivanjem pothlađenog austenita ispod temperature  $M_s$ .

$$y_2 = 1 - \exp[-0,011(M_s - \vartheta)] \quad (3.19)$$

$y_2$  ...Relativni udio nastalog martenzita nakon gašenja, 1

$\vartheta$ ... Temperatura sredstva za gašenje, °C

Jednadžba (3.25) određena je nakon eksperimentalnih istraživanja gašenja nelegiranih čelika s 0,37 do 1,1 %C a relativni volumni udio martenzita  $y_2$  određen je rendgenskom difrakcijom [62]. Iz jednadžbe (3.25) uočljiv je atermički karakter martenzitne pretvorbe zbog kojeg vrijeme gašenja između temperatura  $M_s$  i  $M_f$  ne utječe na rezultat pretvorbe, ako nije jako dugo (takvo da izazove stabilizaciju pothlađenog austenita).

**Opis kinetike faznih pretvorbi termokinetičkim jednadžbama** temelji se na modelima izvedenim iz jednadžbe promjene slobodne energije  $\Delta F$  s temperaturom [48, 52, 63]:

$$F = U - T \cdot S \quad (3.20.a)$$

$$\Delta F = -\Delta F_{\alpha\beta} + \Delta F_\gamma + \Delta F_\sigma \quad (3.20.b)$$

$F$	...	Helmholtzova slobodna energija, J
$U$	...	Unutrašnja energija, J
$S$	...	Entropija, J/K
$T$	...	Termodinamička temperatura, K
$\Delta F$	...	Promjena slobodne energije nastankom nove faze ovisna o temperaturi pretvorbe, J
$\Delta F_{\alpha\beta}$	...	Razlika slobodnih energija faza $\alpha$ i $\beta$ na temp. T, J
$\Delta F_\gamma$		Slobodna energija stvaranja nove površine faza, J
$\Delta F_\sigma$	...	Slobodna energija polja naprezanja oko nove faze, J

Termokinetički pristup faznim pretvorbama često se koristi za opis martenzitne pretvorbe [13, 14], ali nije još običajan kod postavljanja računalnih simulacija induksijskog kaljenja. Termokinetičkim jednadžbama dobiva se dobar uvid u mehanizme nukleacije i rasta faze pri faznim pretvorbama, posebno kod čistih metala i binarnih legura. Međutim ove jednadžbe postaju vrlo složene i često neprimjenljive kod višestruko legiranih metala. Drugi problem u njihovoј primjeni su još uvijek nedovoljno istražena termodinamička i mehanička svojstva metala i legura pri faznim pretvorbama (npr. aktivacijske energije za pokretanje pojedinog tipa nukleacije, aktivacijske energije rasta zrna, površinska slobodna energija granice zrna nove faze, koeficijenti difuzije po granicama zrna, itd.).

### 3.4. Kriteriji i metode optimizacije induktora

**Razlozi optimizacije induktora.** Projektiranje induktora jedna je od najvažnijih faza u pripremi postupka inducijskog kaljenja. Induktor se može smatrati specifičnim alatom za provedbu inducijskog kaljenja za čije se oblikovanje postavlja niz zahtjeva (poglavlje 2.2.2), a sljedeća dva su uobičajeni predmet optimizacije:

- I. Ostvarenje prijenosa energije s generatora na obradak elektromagnetskom indukcijom uz što bolji "stupanj djelovanja induktora", pri čemu je

$$\eta = \frac{\text{energija zagrijavanja obratka}}{\text{energija dovedena induktoru}},$$

odnosno što veću inducirana struju ili radnu snagu u obratku.

- II. Osiguravanje traženog oblika i dubine zagrijavane zone s odgovarajućom raspodjelom gustoće inducirane struje ili temperaturom austenitizacije ili mikrostrukturom u kaijenom sloju u raspoloživom vremenu sa zadanim inducijskim generatorom.

Optimizaciji induktora pristupa se nakon izbora vrste i polaznog oblika induktora uobičajeno temeljenog na konkretnim zahtjevima, opće poznatim preporukama za oblikovanje (poglavlje 2.2.2), primjerima iz literature i iskustvu tehnologa. Pri tome je u većini slučajeva optimizacija induktora iterativno povezana s optimizacijom radnih parametara postupka (uobičajeno samo faze inducijskog ugrijavanja). Radni parametri inducijskog ugrijavanja služe kao ograničenja pri optimizaciji induktora i obrnuto. Oblik i dimenzije induktora ograničavaju optimizaciju postupka inducijskog kaljenja.

**Optimizacija** je postupak traženja najpovoljnijih rješenja za zadana ograničenja i početne uvjete i iz skupa mogućih rješenja. Pri tome se u prvom koraku polazi od matematičkog modela utjecajnih fizikalnih procesa, kriterija za optimizaciju i funkcija ograničenja. U drugom koraku traži se kombinacija utjecajnih varijabli procesa iz područja mogućih rješenja, kako bi odgovarajuća funkcija cilja dobila ekstremnu vrijednost (minimum ili maksimum). U trećem koraku metodama optimizacije rješava se funkcija cilja uz zadane funkcije ograničenja [65]. Optimizacija induktora u smislu ovog opisa pojavljuje se tek nedavno u radovima od prije nekoliko godina do danas [66-68]. U starijim radovima (prije 1990. god.) navode se algoritmi za proračun električnog otpora induktora, gubitaka snage u induktoru, stupnja djelovanja induktora i sl. Pri tome se ne spominje matematička optimizacija induktora, već njegovo projektiranje na temelju iskustva, pokušaja i pogrešaka.

**Matematički modeli** koji se uobičajeno koriste za optimizaciju induktora jesu:

- I. Analitički modeli ekvivalentnog strujnog kruga "induktor-obradak" za optimizaciju induktora kružnog, kvadratnog ili pravokutnog poprečnog presjeka bez koncentratora magnetskog toka namijenjenog induktijskom kaljenju obradaka jednostavnog oblika (šipke, valjci, diskovi, ploče, kvadri ili kuglasti dijelovi) [1, 2, 6, 7].
- II. 2D ili 3D numerički modeli elektromagnetskog polja induktora i obratka za optimizaciju induktora složenijeg (profiliranog) presjeka sa ili bez koncentratora magnetskog toka [31].
- III. 2D ili 3D numerički modeli elektromagnetskog i temperaturnog polja u obratku za optimizaciju induktora profiliranog presjeka s ili bez koncentratora magnetskog toka [67].
- IV. 2D ili 3D numerički modeli elektromagnetskog polja, temperaturnog polja i raspodjele volumognog udjela austenita uz površinu obratka po završetku induktijskog ugrijavanja [66].

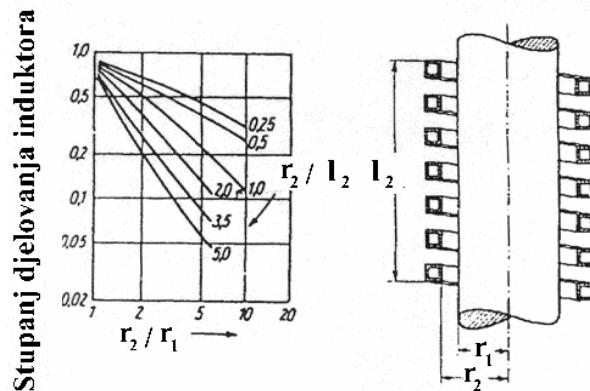
**Kriteriji, ograničenja i funkcije cilja za optimizaciju induktora** proizlaze iz gore navedenih zahtjeva za oblikovanjem induktora. U dostupnoj literaturi pronađena su ukupno tri tipa kriterija za optimizaciju induktora. U prva dva tipa optimizacije induktora nije eksplisitno razrađena metodologija već se iz pristupa problemu konstrukcije induktora i metoda rješavanja može zaključiti o mogućoj funkciji cilja i funkcijama ograničenja.

- a) **Kriterij maksimalnog stupnja djelovanja induktora  $\eta$**  (bez koncentratora magnetskog toka) ili **maksimalne ukupne energije unijete u površinski sloj obratka**. Ograničenja optimizacije nametnuta su dimenzijama kaljenog segmenta površine (promjer, duljina), fizikalnim svojstvima obratka (magnetska permeabilnost, električna vodljivost), zahtijevanom minimalnom zračnošću između induktora i obratka, frekvencijom i snagom induktijskog generatora [2, 5].

Funkcija cilja u ovom slučaju može se analitički izvesti iz jednadžbi ekvivalentnog strujnog kruga "induktor-obradak" ili iz analitičkog rješenja jednodimenzionalnih jednadžbi elektromagnetskog polja. U tako izvedenoj jednadžbi funkcije cilja izražava se ovisnost stupanja djelovanja induktora  $\eta$  ili snage inducirane u rubnom sloju obratka  $P_\delta$  o veličinama poput dimenzija i broja zavoja induktora, frekvencije, električne vodljivosti, magnetske permeabilnosti, zračnosti između obratka i induktora, omjeru efektivne dubine prodiranja struje prema karakterističnoj dimenziji obratka i dr. Između ovih utjecajnih čimbenika na stupanj djelovanja induktora (bez koncentratora magnetskog toka) posebno se ističu veličina zračnog raspora između induktora i obratka i omjer

promjera prema duljini induktora. Što su zračni raspor i duljina induktora veći veće je rasipanje silnica magnetskog polja, pa je stupanj djelovanja induktora niži (**slika 3.6**).

Funkcije ograničenja u ovom slučaju uobičajeno su jednostavne (konstante ili jednadžbe polinoma I. stupnja). One obuhvaćaju najveće i najmanje vrijednosti mjera induktora između kojih se traže optimalne vrijednosti uz zadane mjere i fizikalna svojstva obratka.



**Slika 3.6** Utjecaj dimenzija na stupanj djelovanja viševojnog induktora pri induksijskom ugrijavanju dugačkih valjaka (stupanj djelovanja induktora određen je za temperaturu austenitizacije 1000 °C) [5]

Frekvencija induksijskog generatora može se zadati fiksnom ili promjenljivom ovisno o generatoru. Međutim izbor frekvencije ne može kompenzirati utjecaj fizikalnih svojstava obratka ili loše konstrukcije induktora. Uobičajeno ograničenje pri izboru frekvencije induksijskog generatora proizlazi iz uvjeta izbjegavanja poništenja induciranih vrtložnih struja na jednoj strani poprečnog presjeka strujama sa suprotne strane presjeka. Kod induksijskog ugrijavanja valjaka polumjera  $r_1$  ovaj uvjet je ostvaren uz omjer  $r_1/\delta_l \geq 4$ .

- b) **Kriterij minimalnog vremena induksijskog ugrijavanja** s istim ograničenjima optimizacije, kao u prethodnom slučaju (a) uz dodatno ograničenje postignute minimalne temperature austenitizacije [7].

U ovom slučaju optimizacije funkcija cilja izražava ovisnost vremena ugrijavanja o dimenzijsama induktora i ostalim utjecajnim čimbenicima, a može se postaviti na četiri načina ovisno o složenosti oblika obratka i induktora:

- Izvodom iz jednadžbi nadomjesnog strujnog kruga "induktor-obradak" (ako se radi o induktoru jednostavnog oblika prstena, diska ili zavojnice bez koncentratora magnetskog toka i obratku poput valjka, konusa, diska ili kugle)
- Izvodom iz analitičkih rješenja jednadžbi elektromagnetskog i temperaturnog polja za jednodimenzijske i jednostavne dvodimenzijske probleme induksijskog kaljenja s induktorom bez koncentratora magnetskog toka, uz konstantne srednje vrijednosti električnih, magnetskih i toplinskih svojstava induktora i obratka.
- Definiranjem u obliku jednadžbe dobivene obradom rezultata faktorskog plana numeričkih simulacija elektromagnetskog i temperaturnog polja u obratku provedenih uz nekoliko kombinacija karakterističnih dimenzija induktora
- Jednadžbom dobivenom regresijskom analizom tehnoloških dijagrama i iskustvenih podloga za pripremu postupka induksijskog kaljenja. Ovi dijagrami i podloge izrađeni su za pojedine specifične slučajeve induksijskog kaljenja, a između ostalih veličina putem karakterističnih koeficijenata obuhvaćaju i dimenzije induktora (jednostavnog poprečnog presjeka poput kružnog ili pravokutnog), broj navoja induktora, omjer promjera prema duljini induktora i sl.

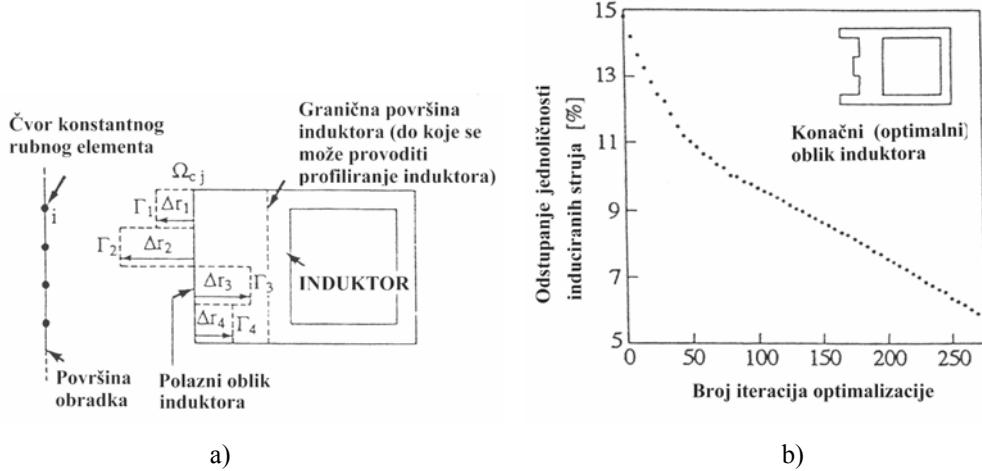
Funkcije ograničenja u ovom slučaju su složenije nego u prethodnom slučaju i mogu osim konstanti i polinoma prvog stupnja imati i diferencijalne članove koji se odnose na rubne uvjete elektromagnetskog i termodinamičkog problema.

- c) **Kriterij postizanja zadane raspodijele gustoće induciranih vrtložnih struja ili snage Jouelovih gubitaka po površinskom sloju obratka.** Ograničenja optimizacije u ovom slučaju su dimenzije kaljene površine, električna i magnetska svojstva induktora i obratka, metalurška svojstva obratka, polazna kontura induktora, minimalna zračnost između induktora i obratka, frekvencija generatora, napon na induktoru i broj rubnih ili konačnih elemenata obuhvaćen optimizacijom [31, 66-68].

Funkcija cilja sadrži razliku u gustoći inducirane struje ili snage na rubnom elementu obratka nastalu kao posljedica promjene položaja rubnog elementa induktora (**slika 3.7**). Gustoća inducirane struje ili električne snage na rubnom elementu obratka računa se numeričkim rješavanjem jednadžbi elektromagnetskog polja. Numerički određene

vrijednosti razlike u gustoći inducirane struje ili snage obratka u funkciji cilja minimiziraju se do postizanja traženog odstupanja od zadane raspodjele (ili zadane vrijednosti) na određenim mjestima kaljene površine.

Funkcije ograničenja u ovom slučaju uobičajeno sadrže broj diskretiziranih elemenata induktora koji sudjeluju u optimizaciji, promjenu električnog potencijala po poprečnom presjeku induktora, granične dimenzije induktora do kojih se može provoditi profiliranje poprečnog presjeka.



**Slika 3.7** Optimizacija osnosimetričnog induktora prema kriteriju postizanja jednolične gustoće površinske struje po duljini obratka [31].

- Položaj rubnih elemenata obratka i promjene konture poprečnog presjeka induktora.
- Konačni oblik induktora nakon niza iteracija i postizanja zadovoljavajuće jednoličnosti induciranih vrtložnih struja

**Metode optimizacije induktora.** Matematički model inducijskog ugrijavanja i primijenjena metoda optimizacije u velikoj mjeri određuju rezultate optimizacije induktora. Razvoj računala i njihovo korištenje u konstrukciji proizvoda i pripremi proizvodnje programa pogodovala je razvoju modernih metoda optimizacije koje sve više zamjenjuju klasične analitičke metode. Postoji veliki broj razvijenih

metoda optimizacije koje se mogu svrstati u pet osnovnih grupa: metode matematičkog programiranja (npr. linearno, nelinearno, dinamičko), analitičke metode (npr. metode klasične matematičke analize, varijacijska metoda, metode matematičke simulacije), statističke metode (npr. regresijska metoda, faktorska analiza), adaptivne metode, metode genetičkog programiranja [65]. Od ovih metoda za optimizaciju induktora uobičajeno se primjenjuju sljedeće tri skupine metoda, od kojih će se prve dvije primijeniti i u vlastitom simulacijskom modelu:

- a) **metode klasične matematičke analize** (pri optimizaciji prema kriterijima najvećeg stupnja djelovanja, najveće snage unesene u obradak ili minimalnog vremena ugrijavanja),
- b) **metode matematičke simulacije** poput metoda rubnih i/ili konačnih elemenata uz minimizaciju sume kvadrata odstupanja promatrane fizikalne veličine iz dvije uzastopne iteracije [32],
- c) **varijacijske metode** (pri optimizaciji prema kriteriju minimalnog odstupanja od zadane raspodjele temperature na određenim mjestima u zagrijavanom sloju obratka) [67].

### **3.5. Računalni sustavi za simulaciju induksijskog kaljenja**

Do kraja 2004. god. razvijeno je nekoliko komercijalnih računalnih programa koji u sebi sadrže i dio za računalnu simulaciju induksijskog ugrijavanja i/ili kaljenja ("SYSWELD" [69, 70], "INC-PHARTRAN" [43], "Quick Field", "Oersted", "DEFORM-HT" [71], "HEARTS" [72]). Također su razvijena dva veća komercijalna računalna programa specijalizirana za simulaciju induksijskog kaljenja ("Flux 2D" [36] i "CalcoMAG" [44]). Većini ovih programa zajedničko je postojanje devet modula uobičajeno korištenih pri računalnim simulacijama induksijskog kaljenja:

- 1) CAD modul za crtanje karakterističnog dvodimenziskog presjeka obratka i induktora
- 2) Modul za unos podataka o materijalu obratka, rubnim uvjetima, djelovanju izvora električnog polja, izvora/ponora temperaturnog polja, brzini posmaka i parametrima matematičke simulacije
- 3) Modul za stvaranje strukturirane anizotropne ili adaptivne mreže konačnih elemenata
- 4) Modul metode konačnih elemenata za iteracijsko rješavanje nelinearnog elektromagnetsko - termodinamičkog problema induksijskog ugrijavanja
- 5) Modul metode konačnih elemenata za rješavanje nelinearnog termodinamičkog problema gašenja ugrijanog sloja
- 6) Modul metode konačnih elemenata za proračun mehaničkih naprezanja i deformacija
- 7) Modul za proračun udjela faza i brzine faznih pretvorbi pri grijanju i gašenju
- 8) Baza podataka o svojstvima materijala s mogućnošću zadavanja nelinearnih anizotropnih i temperaturno ovisnih svojstava.
- 9) Modul metode konačnih elemenata za inverzno jednodimenzisko ili dvodimenzisko matematičko modeliranje rubnih uvjeta ( npr. za proračun koeficijenta prijelaza topline)
- 10) Modul za prikaz i analizu rezultata računalne simulacije

Povezivanje ovih modula u uobičajenoj verziji programa provodi se izradom tzv. "skripata", programskih procedura u specifičnom interno korištenom programskom jeziku koje sadrže sve potrebne naredbe za pokretanje, zaustavljanje i odvijanje tijeka računalne simulacije.

---

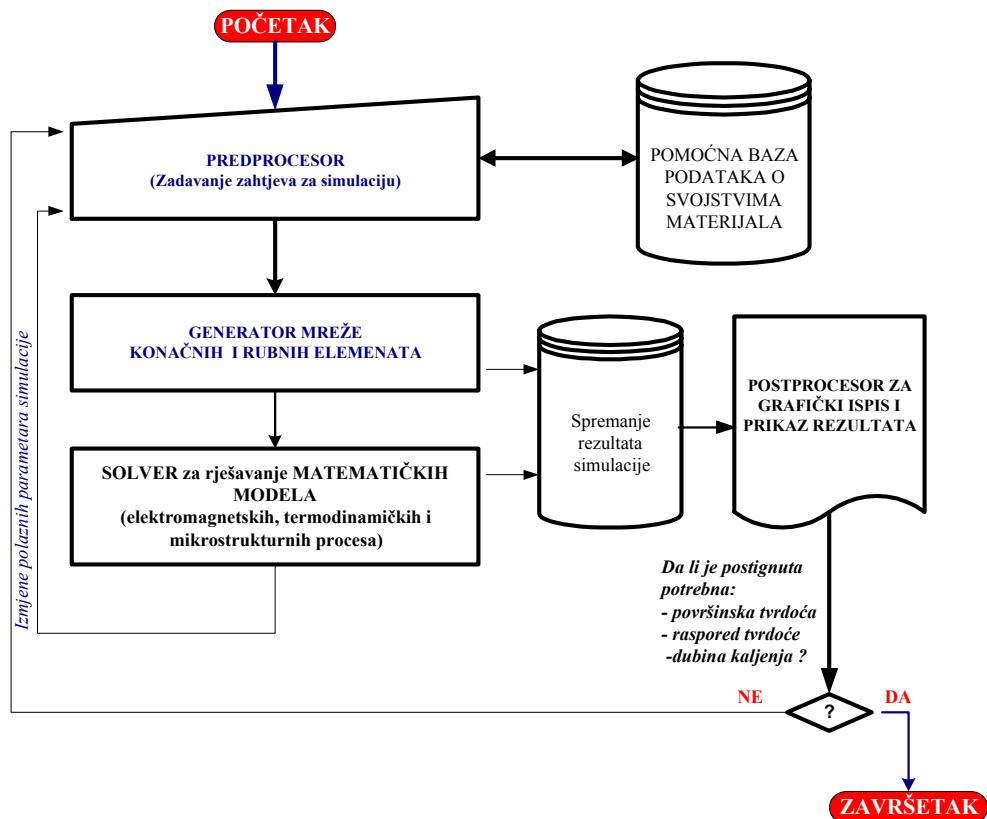
Ovako malu ponudu specijaliziranih računalnih programa može se objasniti znatnom složenošću prisutnih fizikalnih procesa pri induktijskom kaljenju, raznovrsnošću obradaka i izvedbi induktora (koja može zahtijevati dodatnu izradu programske funkcije na već razvijenom programu) kao i još uvjek manjim udjelom ovog postupka toplinske obrade na tržištu u odnosu na ostale postupke i proizvodne tehnologije (što dovodi u pitanje isplativost ulaganja u razvoj i ispitivanja koja opet zahtijevaju relativno visoku cijenu licence kad se program jednom pojavi na tržištu ) [83].

Osim spomenutih računalnih programa postoji oko stotinjak (uglavnom komercijalnih) općih programa za rješavanje 2D i 3D problema u termodinamici, elektromagnetizmu, analizi naprezanja i deformacija. Većina od općih programa koristi metodu konačnih elemenata, a samo nekolicina metodu konačnih diferencija ili rubnih elemenata. Za pripremu induktijskog kaljenja moguće je simulirati samo proces ugrijavanja korištenjem modula za izračunavanje induciranih vrtložnih struja (tzv. “Eddy Current Block”) i modula za rješavanje diferencijalne jednadžbe provođenja topline (“Thermal Block”). U većini slučajeva univerzalne simulacijske programe treba prilagoditi matematičkim modelima konkretnog postupka induktijskog kaljenja vlastitim programskim funkcijama, dodavanjem baze podataka o svojstvima materijala, razvojem vlastitog simulacijskog algoritma i povezivanjem s drugim programskim sustavima. Za ovakav pristup potrebno je praktično iskustvo s induktijskim kaljenjem i dobro znanje numeričkih metoda i programiranja, što uglavnom zahtijeva stvaranje specijalističkog tima stručnjaka.

Primjena specijaliziranih simulacijskih programa nipošto ne isključuje iskustvo tehnologa toplinske obradbe koji mora intervenirati u kritičnim programskim koracima (postavljanje problema, definiranje svojstava materijala, postavljanje rubnih ili početnih uvjeta, te pojedini izbori nakon računalom potpomognute analize) kako bi postigao optimalno temperaturno polje u točno zadanim rubnim sloju obratka u najkraćem vremenu, uz najmanju potrebnu snagu induktora. Osim toga, koliko god komercijalni programi bili ispitivani i verificirani nikada nije moguće otkriti sve pogreške u zadavanju ili izvođenju programa, te su stoga iskustvo i intuicija tehnologa nužno potrebni radi prepoznavanja mogućih grešaka simulacije.

U radovima [19, 47, 73] po prvi put su u našoj zemlji razrađeni matematički modeli i simulacijski algoritam visokofrekventnog induktijskog kaljenja. Stanje razvoja i ponuda programskih paketa za simulaciju induktijskog kaljenja bili su poticaj za izradu vlastitog simulacijskog programa čijom su provjerom na primjerima induktijskog kaljenja čeličnih valjaka stvorene pretpostavke za bržu i ekonomičniju pripremu ovog postupka.

Polazna verzija vlastitog računalnog programa razvijena je u programskom sustavu "Matlab" s mogućim budućim razvojem u samostojeći izvršni program nazvan "Ind2D". Simulacijski algoritam ovog programa prikazan je na **slici 3.8**. U njemu su objedinjene metoda rubnih elemenata za modeliranje raspodjele elektromagnetskog polja i inducirane električne snage u površinskom sloju, metoda konačnih elemenata za rješavanje diferencijalne jednadžbe provođenja topline i empiričke jednadžbe za proračun koeficijenta prijelaza topline kod gašenja prskanjem.



**Slika 3.8.** Glavni moduli vlastito razvijenog računalnog programa ("Ind2D") za simulaciju induksijskog kaljenja

Pomoću relaksacijske metode u nizu iteracija računaju se vrijednosti fizikalnih svojstava čelika nelinearno ovisne o temperaturi (električna, magnetska, toplinska). Magnetska svojstva aproksimiraju se ovisno o temperaturi i jakosti magnetskog polja. Također se, odvojeno od analize elektromagnetskih i termodinamičkih procesa, provodi analiza nastanka austenita brzim ugrijavanjem na temelju dijagrama otapanja faza pri brzom ugrijavanju (TTS dijagram) a regresijskim jednadžbama se procjenjuje tvrdoća martenzita po poprečnom presjeku obratka nakon gašenja [73].

U dalnjim istraživanjima i razradama vezanim za izradu ovog rada spomenuti program usavršen je i proširen dodatnim mogućnostima koje ga čine još prikladnijim za svakodnevnu primjenu u pripremi postupka induktijskog kaljenja .

## **4.0 RAZRADA SIMULACIJSKOG ALGORITMA INDUKCIJSKOG KALJENJA**

### **4.1 Određivanje simuliranih fizikalnih fenomena i numeričkih metoda**

#### **4.1.1 Fizikalni fenomeni obuhvaćeni simulacijom induksijskoga kaljenja**

Računalna simulacija induksijskog kaljenja je značajna faza u konstrukciji i primjeni izradaka koji se ovim postupkom površinski otvrđuju. Tijekom konstrukcije ovih izradaka računalnim simulacijama nastoji se predvidjeti raspored tvrdoće u rubnom sloju, mesta koncentracije naprezanja, deformacije i očekivana zaostala naprezanja nakon induksijskog kaljenja. Tijekom pripreme postupka induksijskog kaljenja računalnim simulacijama nastoji se projektirati optimalni induktor i pronaći odgovarajući radni parametri kojima će se ostvariti potrebna mikrostruktura, oblik, dubina i mehanička svojstva zakaljenog sloja uz minimalne deformacije. Osim navedenog dodatni poticaji sve uobičajenijoj primjeni računalnih simulacija u pripremi induksijskog kaljenja jesu povećanje proizvodnosti i ekonomičnosti postupka i sniženje cijene proizvoda [36]. Ovakva raznovrsnost ciljeva primjene računalnih simulacija induksijskog kaljenja određuje i najmanji skup matematički modeliranih fizikalnih procesa koje nužno treba obuhvatiti algoritmom simulacije.

Za računalnu simulaciju u cilju što uspješnije pripreme induksijskog kaljenja (na koju je usmjerena ovaj rad) uz predviđanje mikrostrukturnih faza i rasporeda tvrdoće u zakaljenom sloju nužno je matematičkim modelima obuhvatiti elektromagnetske, toplinske i mikrostrukturne procese u obratku uz odgovarajuće početne i rubne uvjete. Ovi procesi su neposredno povezani i direktno djeluju jedan na drugi. Stoga jednadžbe njihovih matematičkih modela nužno treba rješavati zajedno, prikladnim iteracijskim algoritmom [29, 36, 44, 74].

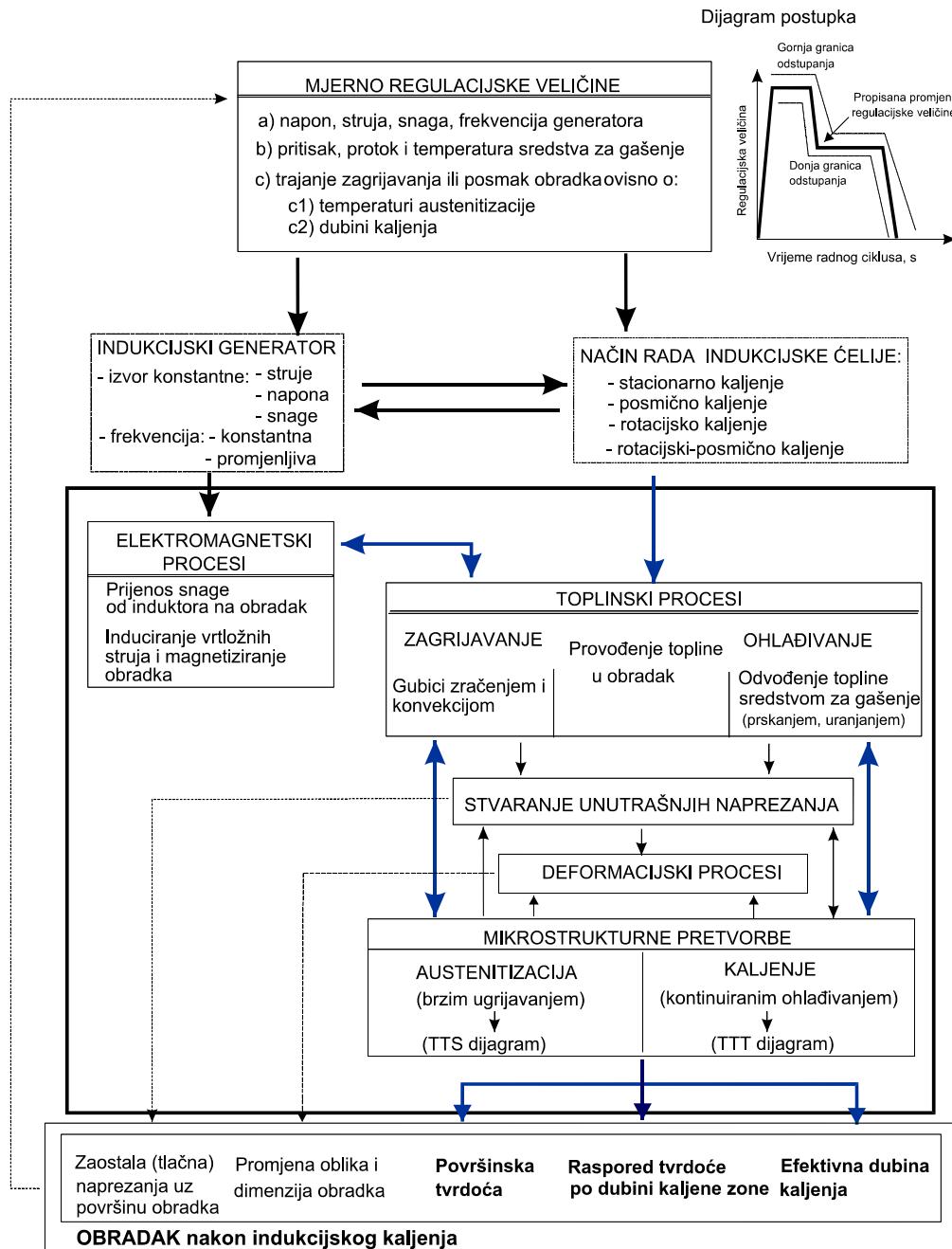
Stvaranje unutrašnjih naprezanja i deformacijski procesi u obratku posljedice su promjene temperaturnog polja i mikrostrukturnih procesa, a njihov "povratni" utjecaj na toplinske i dijelom mikrostrukturne procese može se u većini slučajeva zanemariti uz prihvatljivu pogrešku simulacije (manju od 5%). U tom slučaju vrijedi "jednosmjerana povezanost" deformacija i zaostalih naprezanja s toplinskim i mikrostrukturnim procesima, pa se jednadžbe matematičkog modela naprezanja i deformacija smiju rješavati odvojeno od iteracijskog algoritma simulacije ostalih fizikalnih procesa (elektromagnetskih, toplinskih i mikrostrukturnih). Računalna simulacija naprezanja i deformacije obratka zbog svoje složenosti još uvjek nije uobičajena faza u praksi svakodnevne pripreme

indukcijskog kaljenja, već se preporučuje kod pripreme inducijskog kaljenja konstrukcijski kritičnih dijelova poput dvofrekvencijski kaljenih zupčanika, koljenastih osovina i sl. [36].

Postavljanje i rješavanje simulacijskog algoritma svih spomenutih fizikalnih procesa (elektromagnetskih, toplinskih, mikrostruktturnih, naprezanja, deformacija) vrlo je složen i numerički zahtjevan zadatak (**slika 4.1**). Složenost rješavanja posebno je prisutna zbog nelinearnih promjena fizikalnih svojstava materijala i nestacionarnosti fizikalnih procesa. Stoga će se računalna simulacija razrađena i opisana u ovom radu ograničiti samo na postavljanje energijske bilance procesa, rješavanje matematičkih modela elektromagnetskih i temperaturnih polja i predviđanje mikrostruktturnih faznih pretvorbi u inducijskom kaljenju rubnog sloja rotaciono simetričnih ili dugačkih ravnih obradaka.

Energijska bilanca postavlja se za termodinamički sustav sastavljen od induktora, obratka, prskalice i zraka neposredno uz obradak (poglavlje 4.3). Polazne diferencijalne jednadžbe elektromagnetskog i temperaturnog polja postavljaju se nad elementarnim materijalnim volumenom u svom trodimenzijskom obliku, pojednostavljaju se i potom numerički rješavaju u dvodimenzijskom obliku za rotaciono simetrične ili dugačke ravne obratke (poglavlja 5 i 6). Jednadžbe elektromagnetskog polja postavljaju se za cijelu geometrijsku domenu  $\Omega$ , a jednadžba provođenja topline samo za obradak.

U slučaju posmičnog inducijskog kaljenja matematički se modelira sustav u kojem je očuvana relativnost gibanja obratka prema induktoru, tj. obradak se smatra nepomičnim a induktor i prskalica uz njega prolaze zadanom posmičnom brzinom. Obzirom na male posmične brzine mogu se praktički zanemariti struje inducirane relativnim gibanjem induktora prema obratku u odnosu na vrtložne struje inducirane izmjeničnom strujom induktora. Stoga se iz jednadžbi matematičkog modela elektromagnetskog polja može izostaviti tzv. "konvekcijski član" (tj. član diferencijalnih jednadžbi ovisan o posmičnoj brzini) i dalje računati samo s difuzijskim članovima. Proračun temperaturnog polja obratka ovim je također pojednostavljen jer se izvodi na fiksnoj ili lokalno adaptiranoj mreži konačnih elemenata, bez potrebe ponovnog generiranja mreže u svakom novom vremenskom intervalu simulacije. Međutim za svaki novi "vremenski korak" simulacije treba iznova proračunati vrijednosti rubnih uvjeta na površini obratka (nestacionarnih i prostorno raspoređenih) [74, 75].



Slika 4.1 Osnovni fizički procesi tijekom indukcijskog kaljenja i promjene nastale na obratku

#### **4.1.2 Numeričke metoda primijenjene u simulaciji induksijskog kaljenja**

Diferencijalne jednadžbe elektromagnetskog polja (poglavlje 5) i provođenja topline (poglavlje 6) međusobno su zavisne i višestruko povezane pa se ubičajeno nazivaju jednadžbama "elektromagnetsko-termodinamičkog problema" induksijskog kaljenja. One zajedno sa uvjetima jednoznačnosti čine sustav nelinearnih i nestacionarnih diferencijalnih jednadžbi vrlo zahtjevan za numeričko rješavanje, ali još uvjek atraktivan za primjenu različitih varijanti numeričkih metoda.

**Izbor metoda za rješavanje "elektromagnetsko-termodinamičkog problema" induksijskog kaljenja.** Od prikladnih numeričkih metoda (poglavlje 3.3) u vlastitom simulacijskom modelu induksijskog kaljenja za rješavanje "elektromagnetsko-termodinamičkog problema" izabrana je hibridna metoda s konačnim i rubnim elementima (FEM/BEM metoda). Jednadžbe metode FEM riješene su minimizacijom težinskog reziduala s Galerkinovim rješavanjem karakterističnih jednadžbi konačnog elementa. Jednadžbe metode BEM riješene su direktnim postupkom traženjem fundamentalnog rješenja i usklađivanjem težinskog integrala po čvorovima rubnog elementa. Razlozi ovom izboru su višestruki:

- Vrlo točna diskretizacija geometrijskih domena problema (obradak, induktor) po volumenu i površini sa znatno manje konačnih elemenata nego u slučaju kad bi se primijenila samo metoda konačnih elemenata koja zahtijeva i diskretizaciju okoliša [35, 41, 45, 46].
- Manje članova u globalnoj matrici sustava, jer se promatrano područje  $\Omega$  diskretizira s manje konačnih i rubnih elemenata. Manja globalna matrica može se brže rješiti, pa je simulacija provediva i na slabijim računalima [41, 46].
- Prilagođenost metode rješavanja karakteristikama modeliranog područja. Diferencijalne jednadžbe "elektromagnetsko-termodinamičkog problema" u nelinearnom području obratka rješavaju se metodom konačnih elemenata s "po elementima" linearnim svojstvima, dok je za područje zraka primijenjena metoda rubnih elemenata s relativno jednostavnom Greenovom funkcijom slobodnog prostora. Na površini obratka i induktora uspostavljaju se odgovarajući rubni uvjeti kontinuiteta elektromagnetskog polja specifični za hibridno FEM/BEM rješenje [9, 30, 34, 35].
- U radu su pri rješavanju BEM jednadžbi primjenjeni ravni i konstantni rubni elementi. U odnosu na ostale tipove rubnih elemenata oni su najjednostavniji za rješavanje i omogućuju jednostavno izbjegavanje singulariteta u integralnim jednadžbama korištenjem samo prvih članova u razvoju podintegralnih funkcija u redove. Ako se primjeni dovoljno gusta podjela površine obratka na konstantne rubne elemente, može se postići točnost slična linearnim ili kvadratnim rubnim elementima [31, 32, 45, 46].

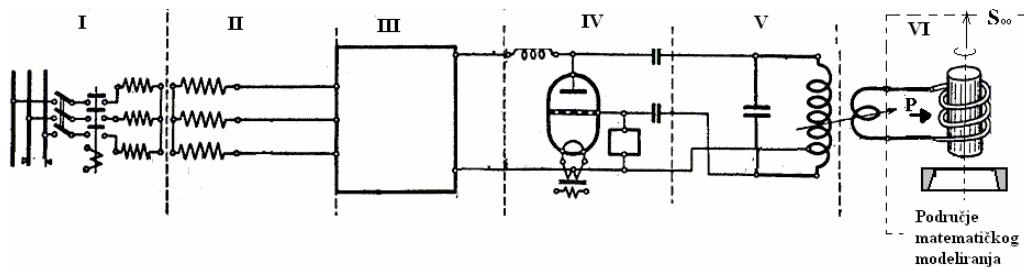
- Nestacionarnost provođenja topline u obratku i prijelaza topline na sredstvo za gašenje i okoliš, problem simulacije induksijskog kaljenja svrstavaju u tzv. "marševske zadaće". Kod njih se polazeći od početnog rješenja (razdiobe temperature) u konačnom broju iteracija (vremenskih inkremenata  $\Delta t$ ) dolazi do konačnog rješenja (razdiobe temperature tijekom induksijskog kaljenja). Promjena temperaturnog polja izrazito je nestacionarna, s velikim gradijentima po dubini zagrijavane zone i nelinearna. Međutim, usprkos tome gore navedenom formulacijom konačnog elementa postiže se dobra stabilnost iteracijskog rješenja provođenja topline u vremenskoj domeni [24, 25, 76].
- Formulacija težinskog reziduala nad konačnim elementom (tzv. "nejaka formulacija konačnog elementa") podudara se sa formulacijom zakona očuvanja energije [76, 77].
- Metoda FEM/BEM prikladna je za numeričko rješavanje "elektromagnetsko-termodinamičkog problema" od nisko frekventnog induksijskog kaljenja cijelog presjeka do visoko frekventnog kaljenja tankog površinskog sloja bez veće opasnosti od "presitnih" konačnih elemenata koji bi uzrokovali velike greške zaokruživanja računala [31, 32, 34].
- Ostale numeričke metode (metoda konačnih diferencija, metoda kontrolnih volumena, metode površinske impedancije i dr.), premda su matematički jednostavnije od hibridne metode FEM/BEM imaju veće greške diskretizacije složenijih oblika obradaka ili su ograničeno primjenljive za rješavanje izrazito nelinearnih diferencijalnih jednadžbi. Također je ograničena samostalna primjena metoda FEM ili BEM, a njihovom kombinacijom iskorištavaju se dobre karakteristike obje metode [9, 41, 46].

**Izbor vrste induksijski kaljenih obradaka.** Za razradu rješenja simulacijskog modela i dokaz polazne hipoteze rada izabrani su dvodimenzionalni i osnosimetrični "elektromagnetsko-termodinamički problemi" induksijskog kaljenja. Prvi razlog ovom izboru je veliki assortiman dugačkih ravnih ili rotaciono simetričnih obradaka koji se uobičajeno površinski otvrđuju induksijskim kaljenjem. Drugi razlog su proširene mogućnosti računalnog programa u osnovi razvijenog za simulaciju posmičnog i rotaciono-posmičnog induksijskog kaljenja dugačkih ravnih ili rotaciono simetričnih obradaka. Razvijeni vlastiti matematički model i simulacijski računalni program može se dodatno primijeniti i za simulaciju stacionarnog ili rotacijskog induksijskog kaljenja (zadaje se posmična brzina jednaka nuli), uz pretpostavku zadane struje ili napona na induktoru. Osim toga može se simulirati induksijsko kaljenje vanjskih površina valjaka i unutrašnjih površina cilindara.

## 4.2 Definicija geometrijskih domena simulacijskog modela

### 4.2.1 Područja geometrijskih domena induktora i obratka

Indukcijsko kaljenje je postupak lokalnog površinskog otvrdnjavanja, pa je za njegovu računalnu simulaciju dovoljno matematički modelirati fizikalne procese u dijelu obratka koji se nalazi u induktoru i prskalici i u manjem prostoru oko njih (**slika 4.2**). Položaj granice  $S_\infty$  matematički modeliranog prostora prema okolišu (neobuhvaćenom simulacijom) određuje se iskustveno ovisno o postavljenim rubnim uvjetima. Matematički modeli elektromagnetskih, toplinskih i mikrostrukturnih procesa pri induksijskom kaljenju definirani su u pravokutnom ili cilindričnom koordinatnom sustavu ovisno o rotacijskoj ili translacijskoj simetričnosti obratka.



**Slika 4.2** Područje matematičkog modeliranja induksijskog kaljenja u odnosu na osnovne komponente visokofrekventnog induksijskog generatora [4]:

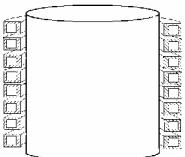
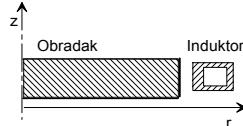
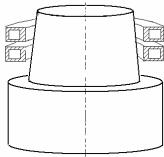
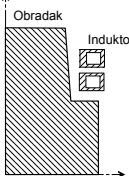
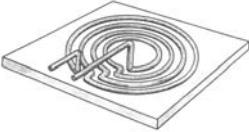
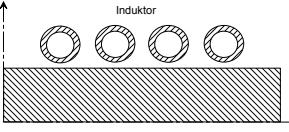
- I. Priključak na niskonaponsku mrežu (50 Hz)
- II. Viskonaponski transformator
- III. Sklop visokonaponskih ispravljaca
- IV. Visokofrekventni oscilator (s elektronskom cijevi)
- V. Sklop za ugadanje izlaznog otpora i sniženje napona anode na vrijednost radnog napona induktora (uz odgovarajuće povećanje struje induktora u odnosu na struju anode elektronske cijevi)
- VI. Induktor s obratkom (*područje matematičkog modeliranja*)

Simulacijski modeli razrađeni u radu obuhvaćaju jednodimenzijske (1D) i dvodimenzijske (2D) domene koje fizikalno točno predstavljaju konkretnе simetrične obratke kakvi se u najvećem broju slučajeva induksijski kale. Računalna simulacija trodimenijskih (3D) matematičkih modela zahtijeva složenije i duže programiranje, duže računalno rješavanje i visokokapacitetna računala, a u slučajevima simetričnih obradaka često puta daje slične rezultate kao simulacija 2D modela. Stoga je zamjena 3D matematičkog modela s 2D ili ako je moguće 1D modelom poželjna kad god je to

moguće jer donosi značajne uštede na vremenu simulacije [1]. Nekoliko tipičnih primjera moguće zamijene 3D slučajeva induksijskog kaljenja s 1D ili 2D matematičkim modelima prikazano je u **tablici IV.1**. U svim slučajevima matematičkih modela geometrijska domena  $\Omega$  (**slika 4.3**) sastavljena je od četiri područja različitih svojstava:

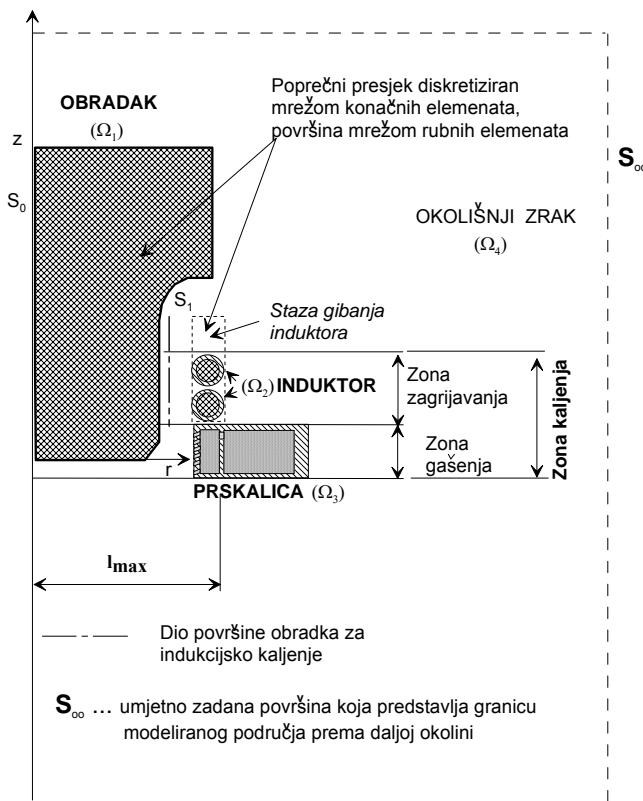
- Obradak (područje označe  $\Omega_1$ ),
- Induktor (područje označe  $\Omega_2$ ) sa ili bez koncentratora magnetskog toka,
- Prskalica ili bazen za gašenje (područje označe  $\Omega_3$ ),
- Zrak (područje označe  $\Omega_4$ ).

**Tablica IV.1.** Primjeri pojednostavljenja 3D geometrijskih domena sa 1D ili 2D domenama pri računalnim simulacijama induksijskog kaljenja

Trodimenzijski oblik obratka i induktora	Geometrijska domena za simulacijski model
	 Jednodimenzijski (1D) osnosimetrični segment "beskonačno dugačkog" valjka
	 Dvodimenzijski (2D) osnosimetrični presjek obratka i induktora
	 Dvodimenzijski (2D) osnosimetrični presjek obratka i induktora

Kod označavanja karakterističnih površina u 2D ili 1D prikazu geometrijskih domena u vlastitim matematičkim modelima površina obratka uvijek je označena sa  $S_1$ , a površina induktora sa  $S_2$ . Uz os

simetrije postavljena je umjetno definirana površina  $S_0$  nužna za zadavanje rubnih uvjeta simetrije. Granica modeliranog područja prema okolišu  $S_\infty$  (iza koje se ne osjeća značajno djelovanje elektromagnetskog polja) prikazana je na **slici 4.3** samo zbog potpunosti prikaza. Njen položaj nije od bitnog značaja za simulaciju u ovom radu jer se koristi metoda rubnih elemenata za rješavanje jednadžbi elektromagnetskog polja u zraku koja zahtijeva samo diskretizaciju površine obratka i induktora. Unutrašnjost obratka  $\Omega_1$  i induktora  $\Omega_2$  diskretiziraju se mrežom konačnih elemenata, a njihove stranice na površinama  $S_1$  i  $S_2$  su ujedno i rubni elementi. Kombinacijom metoda rubnih i konačnih elemenata izbjegнута je potreba za diskretizacijom zraka mrežom konačnih elemenata, čime su značajno smanjene matrice u numeričkom rješenju problema elektromagnetskog polja.



**Slika 4.3** Karakteristična područja geometrijske domene  $\Omega$  matematički modeliranog sustava obradak-induktor-prskalica pri rotaciono-posmičnom induksijskom kaljenju

Kod računalne simulacije stacionarnog ili rotacijskog inducijskog kaljenja obradak miruje u odnosu na induktor i prskalicu. Stoga se prvo rješava problem ugrijavanja, a potom gašenja na istim konačnim i rubnim elementima domene  $\Omega_1$ . Kod računalne simulacije posmičnog i rotacijsko-posmičnog inducijskog kaljenja obradak istodobno prolazi zonu kaljenja sastavljenu od zone ugrijavanja (u području induktora) i zone gašenja (u području prskalice) (**slika 4.3**). Promjena relativnog položaja induktora i prskalice prema obratku uobičajeno zahtijeva ponovno stvaranje mreže konačnih i rubnih elemenata induktora za svaki novi vremenski inkrement simulacije uz prenošenje vrijednosti fizikalnih veličina sa "starih" na "nove" čvorove mreže. Ove računske operacije usporavaju simulaciju i nepotrebno zauzimaju memoriju računala pa se različitim metodama nastoje izbjegći. U vlastito razvijenom simulacijskom programu kod računalne simulacije posmičnog ili rotacijsko posmičnog inducijskog kaljenja primijenjena je metoda zamjene gibanja obratka (relativnim) gibanjem induktora i prskalice po poznatoj stazi gibanja (**slika 4.3**) [103].

Tijekom simulacije posmičnog ili rotacijsko posmičnog inducijskog kaljenja induktor i prskalica translacijski se pomiču po poznatoj stazi gibanja svakim novim vremenskim korakom za udaljenost manju ili jednaku efektivnoj dubini prodiranja struje u vodiču induktora. Relativno pomicanje induktora računalno je riješeno proračunom novih prostornih koordinata čvorova konačnih i rubnih elemenata induktora bez promjene njihovog broja ili međusobnog razmještaja. Svakim novim relativnim pomakom induktora i prskalice u odnosu na obradak iznova se računaju rubni uvjeti (elektromagnetski i toplinski) na površini obratka. Opisanim postupkom izbjegava se stvaranje mreže za novi vremenski korak simulacije, a prvo bitno zadana mreža može se po potrebi lokalno adaptirati diobom elemenata i interpolacijom svojstava polaznog elementa na nove elemente u njegovoj unutrašnjosti.

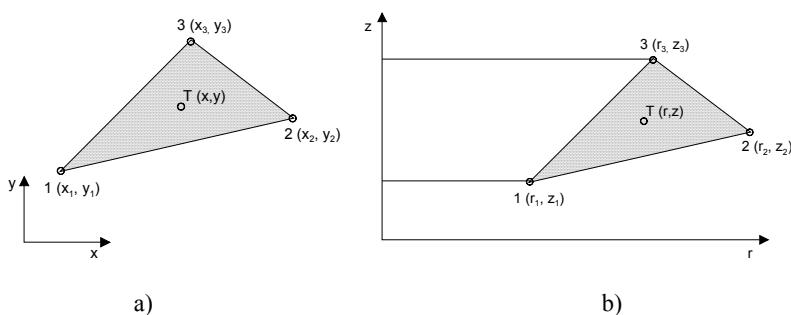
#### **4.2.2 Delaunay triangulacija geometrijskih domena**

Za rješavanje diferencijalnih jednadžbi elektromagnetsko-termodinamičkog problema inducijskog kaljenja geometrijska područja obratka  $\Omega_1$  i induktora  $\Omega_2$  diskretiziraju se mrežom konačnih elemenata, pri čemu su stranice elemenata na površinama  $S_1$ ,  $S_2$  ovih područja ujedno rubni elementi. Oblik rubnih i konačnih elemenata i broj njihovih čvorova općenito ovise o dimenzionalnosti problema, obliku geometrijske domene, matematički modeliranim fizikalnim procesima, zahtijevanoj točnosti rješenja i raspoloživoj brzini računanja na računalu.

**Izbor tipa konačnih elemenata.** Podjelu geometrijskih domena  $\Omega_1, \Omega_2$  na konačne elemente  $\Omega_1^e, \Omega_2^e$  treba provesti tako da po dva različita elementa imaju zajedničke točke samo na zajedničkoj granici, bez preklapanja ili praznina između njih. Za zakriviljene i nepravilne oblike površine diskretiziranog geometrijskog područja prikladniji su trokutni od četverokutnih konačnih elemenata. Zbog osiguranja bolje točnosti rješenja mreža konačnih elemenata zgasnuta je uz induksijski kaljeni dio površine obratka kao i uz vanjsku površinu induktora [9].

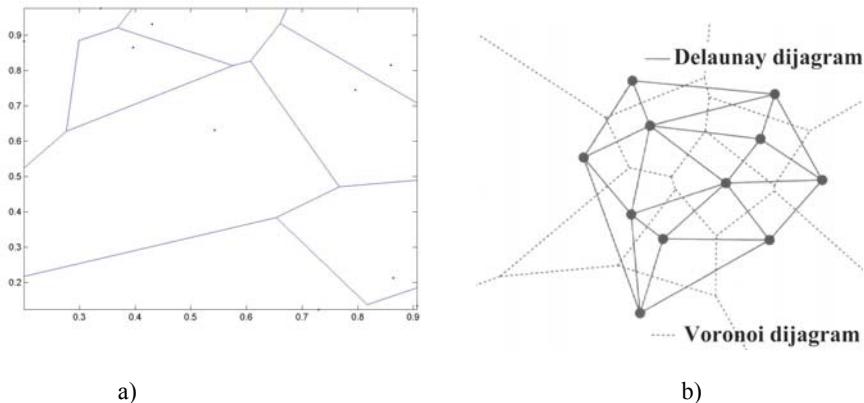
U vlastito razvijenom simulacijskom programu koriste se osnovni (linearni) dvodimenzionalni (**slika 4.4.a**) i prstenasti trokutni elementi (**slika 4.4.b**). Navedeni tipovi trokutnih elemenata izabrani su zbog jednostavnog programiranja i dobre prilagodljivosti različitim oblicima geometrijskih domena induktora i obratka. Pri diskretizaciji je posebna pažnja posvećena kutovima između stranica trokutnog elementa koji trebaju biti između  $45^\circ$  i  $90^\circ$ , zbog osiguravanja dobre konvergencije numeričkog rješenja [40].

**Delaunay triangularizacija.** U vlastito razvijenom simulacijskom programu za dobivanje lokalno adaptirane mreže trokutnih elemenata primijenjena je diskretizacija metodom Delaunay triangularizacije. Delaunay triangularizacija provodi se na temelju konstrukcije Voronoi dijagrama i omogućava postizanje mreže s ujednačenim (sličnim) trokutnim elementima najvećih mogućih kutova između stranica elementa [40, 78]. Voronoi dijagram konstruira se za zadani skup točaka ravnine (npr. čvorova mreže) pri čemu se ravnina dijeli na onoliko čelija koliko ima zadanih točaka (**slika 4.5.a**).



**Slika 4.4** Osnovni trokutni element s čvorovima numeriranim za izvođenje funkcije oblika: a) dvodimenzionalni trokutni element, b) osnosimetrični trokutni element

Pravilo za konstrukciju Voronoi dijagrama sastoji se u sljedećem: udaljenost između svih točaka u čeliji od čvora čelije mora biti manja od udaljenosti tih točaka prema čvorovima susjednih čelija (tj. sve točke u čeliji "gravitiraju" čvoru čelije). Delaunay triangularizacijom spajaju se točke diskretiziranog (čvorovi) geometrijskog područja tako da su stranice trokutnih elemenata uglavnom okomite na Voronoi dijagram područja (**slika 4.5.b**) [78].



**Slika 4.5.** a) Zadani skup čvorova u ravnini i njihov Voronoi dijagram [78]

b) Delaunay dijagram konstruiran na temelju Voronoi dijagrama [78]

Uz pomoć teorema računalne geometrije može se odrediti broj trokutnih elemenata  $BTE$  i njihovih stranica  $BSE$  nakon Delaunay triangularizacije nad  $N$  točaka u ravnini, od kojih njih  $M$  leži na rubu diskretiziranog područja. Za ovu triangularizaciju treba  $N \log N$  računskih jedinica vremena i  $n$  jedinica memorije računala [78].

$$BTE = 2N - 2 - M \quad (4.1.a)$$

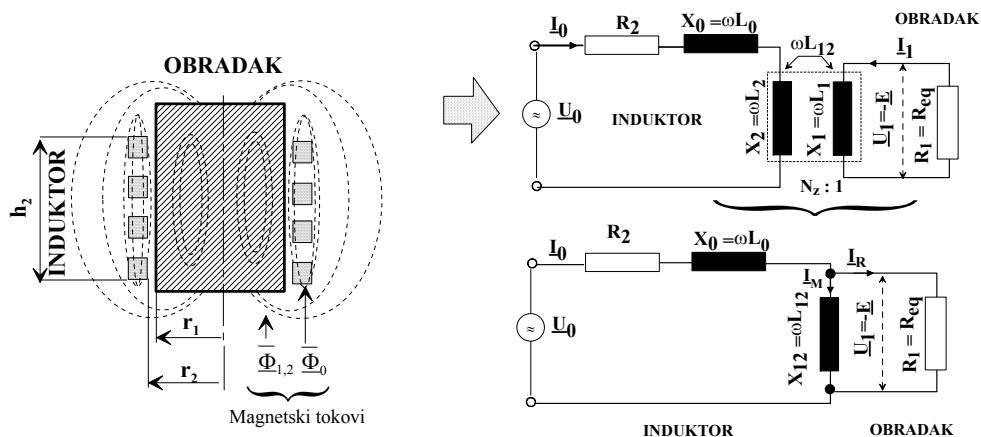
$$BSE = 3N - 3 - M \quad (4.1.b)$$

$N$	...	zadani broj čvorova u diskretiziranoj domeni
$M$	...	broj čvorova na granici diskretizirane domene
$BTE$	...	broj trokutnih elemenata nakon triangularizacije
$BSE$	...	broj stranica trokutnih elemenata

## 4.3. Izvod jednadžbe energijske bilance sustava induktor – obradak

### 4.3.1 Fazorski dijagram sustava induktor - obradak

Za postavljanje energijske bilance strujni krug induktor-okolina-obradak zamjenjuje se nadomjesnim strujnim krugom u kojem je svitak sa željeznom jezgrom spojen na izvor sinusoidalnog napona (**slika 4.6**) [1, 2, 5-7, 86]. Nadomjesni strujni krug sa svitkom i željeznom jezgrom sastavljen je od radnih i induktivnih otpora. Radni otpori predstavljaju mjesto nepovratne pretvorbe električne energije u toplinu prema Jouelov zakonu (Jouelovi gubici u induktoru i obratku). Induktivni otpori predstavljaju mesta stvaranja elektromagnetskog polja samoindukcijom i međuindukcijom induktora i obratka prema. Za opis nadomjesnog strujnog kruga induktor-okolina-obradak koristi se fazorski dijagram (**slika 4.7**). Fazorski dijagram strujnog kruga uobičajen je prikaz odnosa amplituda ili efektivnih vrijednosti harmonično promjenljivih električnih i magnetskih veličina u kojem su ove veličine izražene kao vektori u kompleksnoj ravnini.



**Slika 4.6** Zamjena električkog sustava induktor – obradak - okolina nadomjesnim strujnim krugom sa svitkom i željeznom jezgrom

Veza između zapisa vremenski harmonično promjenljive veličine elektromagnetskog polja  $\psi(\vec{r}, \omega t)$  u vremenskoj domeni i njenog zapisa u kompleksnoj domeni kao fazora  $\Psi(\vec{r})$  ostvaruje se jednadžbama (4.2.a-c) prema [79, 80]:

$$\begin{aligned}\psi(\vec{r}, \omega t) &= \Psi_m(\vec{r}) \cos(\omega t + \varphi(\vec{r})) \\ \psi(\vec{r}, \omega t) &= \operatorname{Re}\{\Psi_m(\vec{r}) e^{j\varphi} e^{j\omega t}\} \\ \psi(\vec{r}, \omega t) &= \operatorname{Re}\{\underline{\Psi}_m e^{j\omega t}\}\end{aligned}\quad (4.2.a-c)$$

$\psi(\vec{r}, \omega t)$  ... Trenutna vrijednost veličine polja

$\vec{r} = \vec{r}(x, y, z)$  ... Vektor položaja promatrane točke (m)

$\omega$  ... Kružna frekvencija (rad/s),

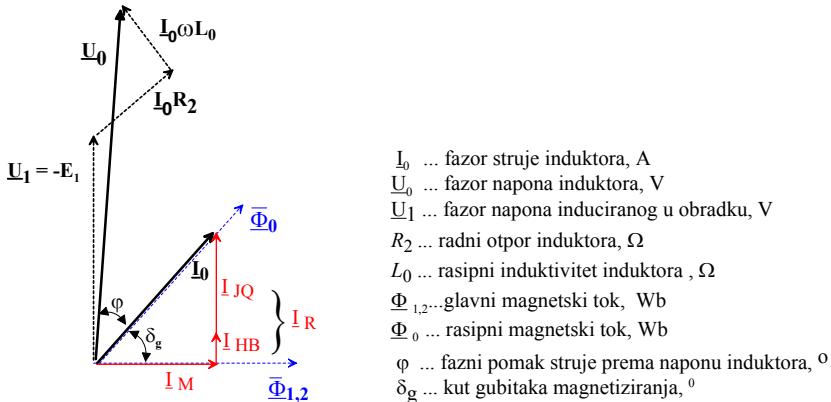
$\Psi_m(\vec{r})$  ... Amplituda vremenski harmonične veličine

$\varphi(\vec{r})$  ... Fazni pomak vremenski harmonične veličine prema određenoj referentnoj veličini (rad)

$\operatorname{Re}\{\dots\}$  ... Realni dio kompleksne funkcije

$j = \sqrt{-1}$  ... Imaginarna jedinica

$\underline{\Psi}(\vec{r})$  ... Fazorska (kompleksna) funkcija



$I_0$  ... fazor struje induktora, A

$U_0$  ... fazor napona induktora, V

$U_1$  ... fazor napona inducirano u obradku, V

$R_2$  ... radni otpor induktora,  $\Omega$

$L_0$  ... rasipni induktivitet induktora,  $\Omega$

$\Phi_0$  ... glavni magnetski tok, Wb

$\Phi_{1,2}$  ... rasipni magnetski tok, Wb

$\varphi$  ... fazni pomak struje prema naponu induktora,  $^0$

$\delta_g$  ... kut gubitaka magnetiziranja,  $^0$

Slika 4.7 Fazorski dijagram nadomjesnog strujnog kruga induktor -obradak

Fazorski dijagram na **slici 4.7** konstruiran je s efektivnim vrijednostima struje, napona i magnetskog toka. Efektivna vrijednost npr. izmjenične struje  $i(t)$  jednaka je vrijednosti konstantne istosmjerne struje  $I$  koja na otporu  $R$  tijekom vremena  $t$  razvija istu količinu topline kao i promatrana izmjenična struja  $i(t)$  na istom otporu u jednakom trajanju  $t$ . Efektivna vrijednost sinusno promjenljive veličine za 70,7% je manja od njene amplitude.

Nadomjesni strujni krug induktor-obradak-okolina pri magnetiziranju izmjeničnom strujom ima nelinearno promjenljiv induktivitet zbog nelinearne promjene magnetske permeabilnosti zavisne od jakosti magnetskog polja i temperature. Prema II Kirchoffovom zakonu ulazni napon induktora ( $U_0$ )

treba savladati pad napona na radnom otporu induktora ( $I_0 \cdot R_2$ ) (razvijena toplina u zavojcima induktora koju treba odvesti vodom za hlađenje), pad napona zbog stvaranja rasipnog magnetskog toka u zračnom rasporu ( $I_0 \cdot X_0$ ) i inducirani napon samoindukcije ( $\underline{E} = -\underline{U}_1$ ). Zbog nelinearne promjene magnetske permeabilnosti ovisno o jakosti magnetskog polja struja induktora neće se mijenjati sinusno iako se napon induktora mijenja sinusno. Stoga se nesinusoidalna struja aproksimira ekvivalentnim sinusnim strujama prema jednadžbama za Fourierov red harmoničnih funkcija. Za pojednostavljeni proračun strujno-naponskih odnosa u nadomjesnom strujnom krugu (**slika 4.6**) i konstrukciju fazorskog dijagrama (**slika 4.7**) dovoljan je samo osnovni sinusoidni član ekvivalentne struje induktora  $i_{1,0} = I_{1,0m} \sin(\omega t + \phi_1)$  (tzv. prvi harmonik Fourierovog reda funkcija).

U slučaju induktora s zanemarivo malim radnim otporom  $R_2$  bez obratka struja induktora bila bi čisto induktivna, tj. u odnosu na napon induktora fazno pomaknuta za kut  $90^\circ$ . U realnom strujnom krugu induktor-obradak-okolina pojavljuje nepovratna pretvorba električne energije u toplinu na radnom otporu induktora i u željeznoj jezgri (obratku) uslijed ugrijavanja magnetiziranjem i vrtložnim strujama, pa je fazni pomak  $\phi$  između napona i (ekvivalentne) struje induktora manji od  $90^\circ$ . Stoga se u fazorskom dijagramu (**slika 4.7**) struja induktora ( $I_0$ ) prikazuje kao vektorski zbroj dviju komponenata: induktivne struje ( $I_M = I_0 \cdot \sin \phi$ ) koja stvara i održava glavni magnetski tok  $\tilde{\Phi}_{12}$  (s njim je u fazi) i radne struje ( $I_R = I_{JQ} + I_{HB} = I_0 \cdot \cos \phi$ ) prouzročene pretvorbom električne energije u toplinu radom vrtložnih struja i magnetiziranjem željezne jezgre. Osim glavnog magnetskog toka  $\tilde{\Phi}_{12}$  postoji i rasipni magnetski tok  $\tilde{\Phi}_0$  zatvoren u zraku oko induktora koji je u fazi s ukupnom strujom induktora  $I_0$ . Iz fazorskog dijagrama (**slika 4.7**) nadomjesnog strujnog kruga induktor-obradak-okolina slijede jednadžbe [86]:

$$\underline{U}_0 = \underline{U}_1 + (R_2 + j\omega L_o)I_0 \quad (4.3.a)$$

$$I_0 = \sqrt{I_M^2 + (I_{JQ} + I_{HB})^2} \quad (4.3.b)$$

**Radni otpor induktora  $R_2$**  određuje se jednadžbom (4.4) prema [80]:

$$R_2 \approx \frac{l_{2N}}{\kappa(\delta_2 o_2)} \quad (4.4)$$

$l_{2N}$  ... Duljina vodiča induktora, m

$\delta_2$  ... Efektivna dubina prodiranja struje u vodič induktora, m

$o_2$  ... Opseg poprečnog presjeka vodiča induktora, m

**Rasipni induktivitet induktora**  $L_0$  u općem slučaju ovisi o induktivitetima induktora  $L_2$  i obratka  $L_1$ , magnetskoj povezanosti induktora s obratkom i broju zavoja induktora  $N_z$ .prema [86]:

$$L_0 = L_2 - N_z k_{12} \sqrt{L_1 L_2} \quad (4.5)$$

$k_{12}$  ... faktor magnetske veze induktor-obradak ( $k_{12} \leq 1$ ), 1

**Induktivitet induktora** (bez obratka)  $L_2$  određuje se analitičkim izrazima prema [1, 2, 5, 7] koji vrijede za specifične induktore (jednovojni, dvovojni, zavojnica):

a) Jednovojni induktor unutrašnjeg promjera  $2r_2$  i kružnog poprečnog presjeka promjera  $2r_{02}$ :

$$L_2 = \mu_0 r_2 \left( \ln \frac{8r_2}{r_{02}} - \frac{7}{4} \right) \quad (4.6.a)$$

b) Jednovojni induktor unutrašnjeg promjera  $2r_2$  i kvadratnog poprečnog presjeka  $b \times b$ :

$$L_2 = \mu_0 r_2 \left( \ln \frac{8r_2}{b} - \frac{1}{2} \right) \quad (4.6.b)$$

c) Zavojnica s  $N_z$  zavoja unutrašnjeg promjera  $2r_2$  i visine  $h_2$ :

$$L_2 = \mu_0 \frac{N_z^2}{h_2} k_r \frac{2\pi r_2 \delta_2}{2} \quad (4.6.b)$$

$k_r$  ... korekcijski faktor, 1

$\delta_2$  ... efektivna dubina prodiranja struje u induktoru, m

**Nadomjesni induktivitet sustava induktor-obradak**  $L_{12}$  i **nadomjesni induktivitet obratka**  $L_1$  određuju se prema [81] iz jednadžbe za proračun srednje energije  $W_M$  pohranjene u magnetskom polju navedenog sustava:

$$W_M = \frac{1}{2} \iiint_{V_1+V_2} \frac{|B|^2}{\mu} dV = \frac{1}{2} L_{12} I_M^2 \quad (4.7.a)$$

$$L_{12} = \frac{1}{I_M^2} \iiint_{V_1+V_2} \frac{B^2}{\mu} dV \quad (4.7.b)$$

$\mu$  ... magnetska permeabilnost, H/m

$B$  ... magnetska indukcija, T

Ako volumen integracije u jednadžbi (4.6.b) obuhvaća obradak i induktor koeficijent  $L_{12}$  predstavlja ekvivalentni induktivitet ovog sustava. Ako volumen integracije u jednadžbi (4.6.b) obuhvaća samo obradak izračunati koeficijent predstavlja ekvivalentni induktivitet obratka  $L_1$ .

**Nadomjesni radni otpor obratka  $R_1$**  obuhvaća pretvorbu električne energije u obratku u toplinu gubicima magnetiziranja i radom induciranih vrtložnih struja. Njegova vrijednost određuje se prema [81] uz pomoć jednadžbe za proračun radne snage u mrežama izmjenične struje:

$$R_1 = \frac{P_{JQ} + P_{HB}}{I_R^2} \quad (4.8)$$

**Efektivna vrijednost struje magnetiziranja  $I_M$**  određuje se iteracijski iz jednadžbe (4.3.a) i Ohmovog zakona za pad napona na induktivnom otporu  $X_{12} = \omega L_{12}$  nadomjesnog strujnog kruga sa slike 4.6:

$$I_M = \frac{U_0 - \sqrt{(R_2 I_0)^2 + (\omega L_o I_0)^2}}{\omega L_{12}} \quad (4.9)$$

Određivanje struje magnetiziranja  $I_M$  nužno je provesti iteracijski zbog usklađivanja vrijednosti nelinearno promjenljive magnetske permeabilnosti obratka ovisne o jakosti polja koja utječe na iznos ekvivalentnog induktiviteta  $L_{12}$ .

**Efektivna vrijednost radne struje  $I_R$**  određuje se iz jednadžbe (4.10) prema [86]:

$$I_R = \frac{P_{HB} + P_{JQ}}{U_0 - \sqrt{(R_2 I_0)^2 + (\omega L_o I_0)^2}} \quad (4.10)$$

$P_{HB}$  ... Snaga magnetiziranja, W

$P_{JQ}$  ... Snaga vrtložnih struja, W

**Snaga vrtložnih struja  $P_{JQ}$  i magnetiziranja obratka  $P_{HB}$**  određuju se numeričkim rješavanjem diferencijalnih jednadžbi elektromagnetskog polja u sustavu induktor-obradak-okolina. U općem slučaju srednja vrijednost električne energije pretvorene u toplinu ugrijavanja za sinusno promjenjivo polje prema [80] jednaka je:

$$P_{JQ} = \frac{1}{2\kappa} \iiint_{V_i} |\underline{J}|^2 dV \quad (4.11)$$

Toplina nastala zbog magnetiziranja obratka s petljom histereze jednaka je ploštini koju zatvara petlja histereze  $B = f(H)$  u svakom ciklusu magnetiziranja [86]:

$$P_{HB} = f \iiint_{V_i} (\oint H dB) dV \quad (4.12)$$

U vlastito razvijenom računalnom programu moguće je izabrati simulaciju induksijskog kaljenja generatorom zadane izlazne struje (tzv. "strujni generator") ili izlaznog napona (tzv. "naponski generator"). Za proračun toplinske energije unijete u obradak  $P_{I,R}$  treba zadati polazni oblik i dimenzije induktora, frekvenciju generatora i vrijednost harmonični promjenjive efektivne struje ( $I_0$ ) ili napona ( $U_0$ ) induktora. Trenutne vrijednosti ovih veličina obično ne prate sinusnu krivulju već neku izobličenu periodičku krivulju čiji oblik ovisi o radnim karakteristikama i vrsti generatora i magnetskoj petlji histereze grijanog materijala. Stoga je zbog pojednostavljenja matematičkog modela i kraćeg postupka rješavanja, preporučljivo aproksimirati krivulje (valnog oblika) struje i napona Fourierovim redom sinusnih funkcija. Fourierovom aproksimacijom se nesinusna krivulja zamjenjuje ekvivalentnom sinusoidom koja predstavlja prvi član Fourierova reda (zbog zadržavanja jedne vrijednosti radne frekvencije). Ekvivalentna struja i napon moraju imati istu efektivnu vrijednost kao izvorne nesinusne veličine zbog očuvanja energije u strujnom krugu. Uvođenjem ekvivalentnih sinusnih veličina zadržava se točnost fazorskih dijagrama definiranih za sinusne veličine. Navedene električne veličine (frekvencija, napon, struja) mogu biti vremenski neovisne ili se mogu zadati promjenljive s vremenom tijekom ciklusa kaljenja. U slučaju vremenski promjenljivog efektivnog iznosa napona ili struje, odnosno frekvencije u razvijenom simulacijskom programu treba zadati vrijednosti ovih veličina u karakterističnim trenucima kaljenja s kojima će se konstruirati funkcije  $U(t)$ ,  $I(t)$ ,  $f(t)$  važne za provedbu simulacije.

Uz navedene električne veličine ( $R_1$ ,  $R_2$ ,  $L_0$  i ostale) značajan pokazatelj primjene ispravnog oblika i dimenzija induktora kao i zadavanja optimalnih radnih parametara induksijskog kaljenja je stupanj djelovanja induktora  $\eta$ . Stupanj djelovanja induktora označava koliki se udio ulazne snage induktora pojavljuje kao iskoristiva toplina u obratku:

$$\boxed{\eta = \frac{P_{JQ} + P_{HB}}{P_{JQ} + P_{HB} + I_0^2 R_2}} \quad (4.13)$$

Indukcijsko kaljenje s višim stupnjem djelovanja induktora za istu dubinu kaljenja zahtijeva manju snagu induksijskog generatora i kraće vrijeme ugrijavanja u odnosu na kaljenje s niskim vrijednostima stupnja djelovanja  $\eta$ . Utjecajni čimbenici na stupanj djelovanja u slučaju induktora zavojnice obuhvaćaju frekvenciju, broj zavoja induktora, duljinu i promjer induktora, širinu zračnog raspora, promjer obratka, električna i magnetska svojstva obratka i dubinu prodiranja struje u obradak [1, 2, 7].

#### 4.3.2 Jednadžba energijske bilance sustava induktor - obradak

U radu se matematički modelira sustav sastavljen od induktora, obratka, prskalice i zraka. Energija dovedena u ovaj sustav manja je od ukupne energije preuzete iz električne mreže zbog gubitaka u induksijskom generatoru. Gubici u induksijskom generatoru nisu obuhvaćeni računalnom simulacijom, već se snaga induktora zadaje prije simulacije. Nju je moguće izmjeriti električkim mjerilom snage ili kalorimetrijskom metodom [6, 9].

Električna energija dovedena na induktor  $P_0$ , jednim dijelom se pohranjuje u magnetskoj energiji  $W_M$  (koja oscilira između generatora i induktora), manjim djelom se zrači elektromagnetskim valovima u okoliš  $P_{2,L}$ , a najvećim udjelom se pretvara u toplinu na omskom otporu induktoru ( $P_{2,R} = I_0^2 R_2$ ) i toplinu ugrijavanja obratka ( $P_{1,R} = P_{JQ} + P_{HB}$ ). Toplina se iz induktora odvodi vodom za hlađenje, a toplina razvijena u obratku iskorištava se za kaljenje.

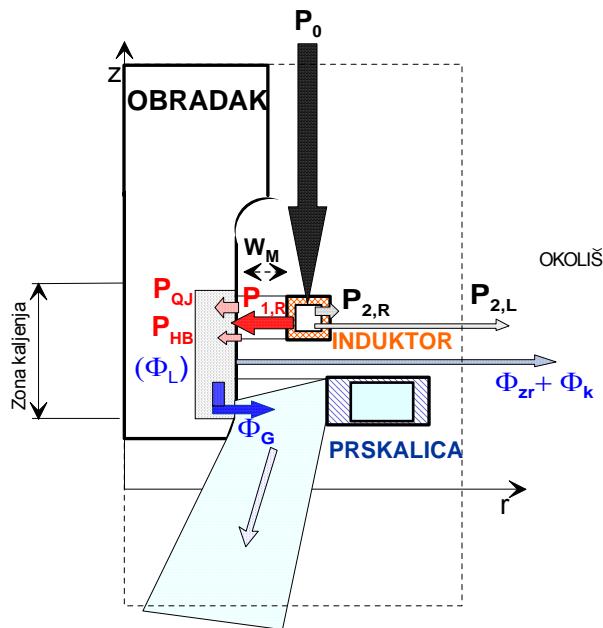
a) bilanca radne snage u sustavu induktor-obradak-okoliš:

$$P_{0,R} = \underbrace{P_{2,R}}_{\text{induktor}} + \underbrace{(P_{HB} + P_{JQ})}_{\text{obradak}} \quad (4.14.a)$$

a) bilanca induktivne snage u sustavu induktor-obradak-okoliš:

$$P_{0,L} = P_{2,L} + W_M \quad (4.14.a)$$

Gubici magnetiziranja  $P_{HB}$  pojavljuju se samo dok je grijani površinski sloj feromagnetičan i sporedni su toplinski izvor, a toplina razvijena Joulovim efektom  $P_{JQ}$  je glavni toplinski izvor za induksijsko kaljenje. Toplina  $P_{JQ} + P_{HB}$  raspoloživa za austenitizaciju rubnog sloja jednim dijelom gubi se kroz površinu obratka u zoni ugrijavanja zračenjem  $\Phi_x$  i konvekcijom  $\Phi_k$ . Manji dio toplinskog toka troši se (poželjno i svrhovito) na nastanak austenita  $\Phi_L$ . Preostali (najveći) dio toplinskog toka nastoji se što brže odvesti (“izvući”) iz površinskog sloja u zonu gašenja ( $\Phi_G$ ) i tako osigurati hlađenje potrebnim brzinama  $v_{hl}$ .



**Slika 4.8** Prijenos i pretvorbe električne energije u toplinsku pri rotaciono posmičnom inducijskom kaljenju

Rješavanjem diferencijalnih jednadžbi elektromagnetskog polja određuje se snaga  $P_{QJ}$  i  $P_{HB}$ . Rješavanjem diferencijalne jednadžbe provođenja topline primarno se određuje oblik i dubina austenitizirane zone te brzine ugrijavanja i ohlađivanja u ovoj zoni. Za optimizaciju induktora kod pripreme postupka i definiranje regulacije procesa kod provedbe inducijskog kaljenja treba poznavati očekivane iznose električnih veličina na induktoru (struja, napon, faktor snage). Mjeranjem ovih veličina na konkretnom induktoru može se provjeriti točnost energijske bilance predviđene računalnom simulacijom u pripremi postupka inducijskog kaljenja.

## 4.4. Definicija simulacijskog algoritma induktijskog kaljenja

### 4.4.1 Opće pretpostavke računalne simulacije induktijskog kaljenja

Matematički modeli elektromagnetskog i temperaturnog polja i mikrostrukturnih faznih pretvorbi u induktijski kaljenom obratku rješavaju se iteracijskim algoritmom. Izvodi i ispravnost jednadžbi matematičkih modela ograničeni su dolje navedenim pretpostavkama.

1. U promatranom diferencijalnom volumenu  $dV$  pojedinog geometrijskog područja (obradak, induktor, okolina) materijal je linearan, homogen i izotropan.
2. Vrijednosti svojstava materijala konstantne su po elementarnom (i konačnom) volumenu, ali se mogu se mijenjati od jednog do drugog konačnog volumena.
3. Unutrašnji toplinski izvori (i ponori) jednolično su raspoređeni po diferencijalnom volumenu  $dV$ .
4. Kod posmičnog induktijskog kaljenja brzina posmaka usmjerenja je u pravcu jedne od koordinatnih osi (uobičajeno osi y ili z).
5. Elektromagnetsko polje smatra se kvazistacionarnim pa se njegove promjene u svim točkama geometrijskih područja događaju istovremeno (vremenski harmonično polje oscilira istom frekvencijom), a djelovanje polja se prenosi difuzijom [9, 79, 80].
6. Zanemaruju se struje dielektričnog pomaka (zračenje elektromagnetskog polja) [9].
7. Zrak oko obratka i induktora je električno nevodljiv ( $\kappa=0$  S/m).
8. Poznate su ovisnosti električne vodljivosti o temperaturi ( $\kappa=\kappa(\vartheta)$ ) i relativne magnetske permeabilnosti o jakosti magnetskog polja i temperaturi ( $\mu_r = \mu_r(H, \vartheta)$ ).
9. Napon i struja induktora su vremenski harmonične veličine poznate frekvencije. Zadana je njihova efektivna vrijednost koja po unesenoj energiji u sustav induktor-obradak odgovara stvarnoj energiji unesenoj proizvoljno promjenljivim oblicima struje i napona.
10. Za matematičko modeliranje posmičnog i rotacijsko-posmičnog induktijskog kaljenja uz uobičajene posmične brzine od nekoliko mm/s zanemaruju se struje inducirane u obratku uslijed gibanja kroz induktor, jer su nekoliko redova veličine manje od struja induciranih harmonično promjenljivim poljem induktora [7, 9].
11. Temperatura zraka i okoliša je konstantna i jednaka temperaturi  $\vartheta_0$ .

12. Na početku simulacije obradak ima temperaturu jednaku temperaturi okoliša i zraka  $\vartheta_0$  ili je jednolično ugrijan na poznatu temperaturu  $\vartheta_{0P}$ .
13. Induktor je šuplji bakreni vodič iznutra hlađen vodom poznatog protoka, čija je temperatura na ulazu u induktor jednaka temperaturi okoliša  $\vartheta_0$ .
14. Temperaturno polje je nestacionarnost, a interval  $\Delta t$  za njegov proračun je adaptivan.
15. Diferencijalni volumen u obratku izlaže se kontinuiranom zagrijavanju i ohlađivanju što može prouzročiti njegovo kaljenje ako su zadovoljeni svi uvjeti kaljenja.
16. Mikrostruktturne fazne pretvorbe tijekom austenitizacije su difuzijske, a tijekom ohlađivanja mogu nastupiti bezdifuzijske (austenit  $\rightarrow$  martenzit) i difuzijske pretvorbe (austenit  $\rightarrow$  bainit / perlit / ferit).
17. U početku simulacije  $t = \tau_0 = 0$  s mikrostruktura obratka može biti sastavljena od bilo kojih faza ili njihove kombinacije a udio joj je jednak jedinici ( $y_0(\tau_0) = I$ ).

#### **4.4.2 Glavni simulacijski algoritam postupka induksijskog kaljenja**

**Simulacija pojedinih faza induksijskog kaljenja.** Kod simulacije posmičnog i rotacijsko-posmičnog induksijskog kaljenja za svaki vremenski inkrement metodom konačnih elemenata rješavaju se jednadžbe elektromagnetskog polja i provođenja topline na cijelom volumenu obratka, čime se istovremeno obuhvaćaju zona ugrijavanja i zona gašenja. Kod simulacije rotacijskog i stacionarnog induksijskog kaljenja jednadžbe elektromagnetskog i temperaturnog polja također se rješavaju za cijeli obradak, ali se prvo simulira faza ugrijavanja, a potom faza gašenja. Proračun mikrostruktturnih faznih pretvorbi izvodi se nakon svakog koraka rješavanja elektromagnetsko-termodinamičkog problema, kako bi se obuhvatio utjecaj mikrostruktturnih faza na raspodjelu elektromagnetskog i temperaturnog polja. Matematički modeli elektromagnetskih, termodinamičkih i mikrostruktturnih procesa postavljeni su za materijalni volumen obratka s vremenski i prostorno promjenjivim rubnim uvjetima. Detaljniji prikaz cjelokupnog vlastito razvijenog algoritma simulacijskog modela induksijskog kaljenja nalazi se na **slici 4.9**. Prikazani algoritam obuhvaća sve metode induksijskog kaljenja (stacionarnu, posmičnu, rotacijsku rotacijsko posmičnu) sa strujnim ili naponskim induksijskim generatorom.

Osiguranje konzistentnosti, točnosti i stabilnosti približnog rješenja. Iz navedenog slijedi da se numeričkom rješavanju matematičkog modela mora pristupiti s posebnom pozornošću i osigurati konzistentnost, točnost i stabilnost približnog rješenja u svakom vremenskom inkrementu. Konzistentnost diskretnog modela osigurana je ako se finijom prostornom i vremenskom diskretizacijom povećava točnost. Iz iskustva je poznato da su numerički modeli uvijek konzistentni ako dobro opisuju fizikalnu pojavu (adekvatne jednadžbe, početni i rubni uvjeti i numeričke metode). Točnost rješenja ovisi o postupku diskretizacije kontinuma (poglavlje 4.2.2). Najozbiljniji problem je osiguranje stabilnosti približnog rješenja, tj. izbjegći da se mala pogreška iz nekog stanja ne povećava u proračunu sljedećeg stanja [40, 76, 77]. U vlastitom simulacijskom programu stabilnost rješenja nastoji se osigurati bezuvjetno stabilnom Galerkinovom vremenskom diskretizacijom.

**Ulazne veličine simulacijskog programa** obuhvaćaju najutjecajnije čimbenike na kvalitetu inducijski zakaljenog sloja (**tablica II.2**, poglavlje 2.2.1) i parametre potrebne za numeričko rješavanje (relaksacijski faktor prilagođavanja vrijednosti svojstava materijala temperaturi, temperatura okoliša, početna temperatura obratka).

**Postupak Delaunay triangularizacije** (poglavlje 4.2.2) u vlastito razvijenom računalnom programu pokreće se na početku simulacije i njime se dobiva strukturirana mreža trokutnih konačnih elemenata koja je gušća uz površinu obratka i induktora, a grublja u njihovoj unutrašnjosti. Tijekom simulacije posmičnog ili rotacijsko posmičnog inducijskog kaljenja ostvaruje se pomicanje induktora i prskalice u svakom vremenskom inkrementu simulacije.

**Rješavanje "elektromagnetsko-termodinamičkog problema"** u svakom vremenskom inkrementu sastoji se od iteracijskog rješavanje problema raspodjele elektromagnetskog polja u induktoru i obratku metodama konačnih (FEM) i rubnih (BEM) elemenata (poglavlje 5). Po postizanju konvergentnog FEM/BEM rješenja provodi se relaksacijsko usklađivanje električnih i magnetskih svojstava materijala s novim vrijednostima jakosti magnetskog polja i potom iteracijsko rješavanje nelinearnog termodinamičkog problema grijanja i/ili gašenja (poglavlje 6). Po postizanju konvergentnog rješenja termodinamičkog modela provodi se ponovno relaksacijsko usklađivanje toplinskih, električnih i magnetskih svojstava materijala s novim vrijednostima temperature u središtim konačnih i rubnih elemenata. Rezultati proračuna provođenja topline (temperatura i brzina grijanja ili hlađenja) potom se primjenjuju kao ulazne veličine u modulu za predviđanje faznih pretvorbi (poglavlje 7). Nakon određivanja vrste i udjela novih faza u kaljenom sloju slijedi još jedno

relaksacijsko usklađivanje svojstava materijala a nakon toga slijedi novi vremenski inkrement i ponovno rješavanje "elektromagnetsko-termodinamičkog problema".

**Relaksacijsko približenje svojstva materijala u geometrijskim čvorovima** obradaka računa se jednadžbom (4.13):

$$\psi_{ii} = \psi_i + \gamma(\psi_{iRAČ} - \psi_{ii}) \quad (4.15)$$

$\psi_{iRAČ}$  ... vrijednost fizikalnog svojstva u  $i$ -tom geometrijskom čvoru određena interpolacijom funkcijске ovisnosti  $\psi=f(\theta)$   
 $\psi_{ii}$  ... vrijednost fizikalnog svojstva u  $i$ -tom geometrijskom čvoru iz prethodnog iteracijskog koraka  
 $\gamma$  ... relaksacijski faktor  
 $\psi_{ii}$  ... nova (relaksacijska) vrijednost fizikalnog svojstva u  $i$ -tom geometrijskom čvoru

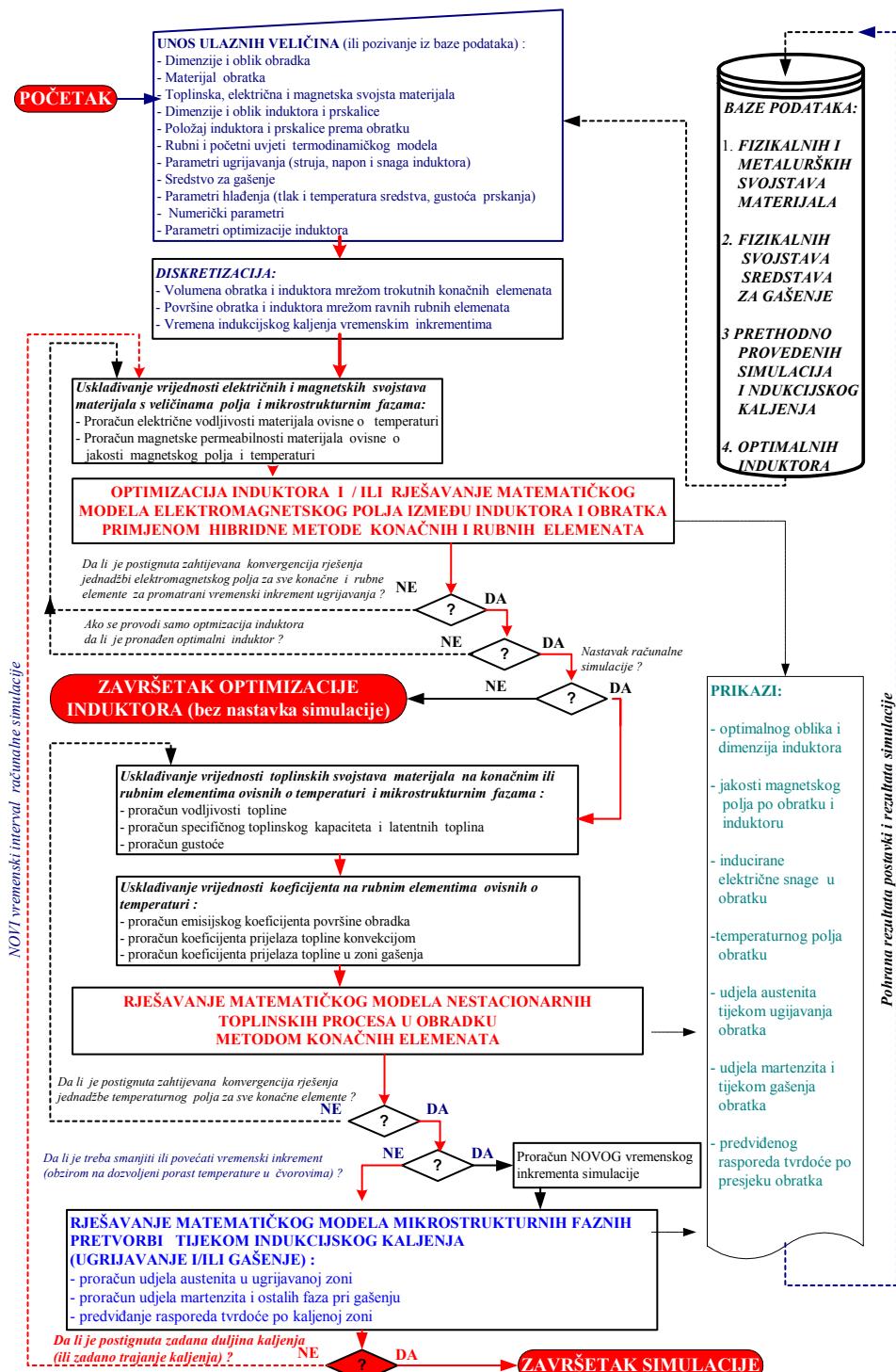
Relaksacijsko približenje nelinearno promjenljivih fizikalnih svojstava ili veličina ( $\psi_i$ ) izvodi se sve dok se ne ispuni zadani kriterij konvergencije u obliku prosječnog relativnog odstupanja:

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^M \left( \frac{\psi_{ii} - \psi_i}{\psi_i} \right)^2}{M}} ; \quad \varepsilon_\psi \leq \varepsilon \quad (4.16)$$

$M$  ... broj geometrijskih čvorova

$\varepsilon_\psi$  ... prosječno relativno odstupanje fizikalnog svojstva ili veličine

U simulacijskom modelu metodom relaksacije aproksimiraju se nelinearne promjene električne vodljivosti ( $\kappa=f(\theta)$ ), vodljivosti topline ( $\lambda=f(\theta)$ ), specifičnog toplinskog kapaciteta ( $c=f(\theta)$ ), gustoće ( $\rho=f(\theta)$ ), relativne magnetske permeabilnosti ( $\mu_r=f(B, \theta)$ ) i koeficijenta prijelaza topline ( $\alpha=f(\theta)$ ).



Slika 4.9. Simulacijski algoritam induktijskog kaljenja

## 5.0 MATEMATIČKO MODELIRANJE ELEKTROMAGNETSKOG POLJA U SUSTAVU INDUKTOR - OBRADAK

### 5.1 Definicija jednadžbi elektromagnetskog polja

**Elektromagnetsko polje u električki vodljivom materijalu** (obradak, induktor) i izolatoru (okolišnji zrak) opisuje se Maxwellovim jednadžbama poznatim iz teorije elektromagnetizma uz njihovo prilagođavanje specifičnim svojstvima materijala [89, 92]. Uz pretpostavke o harmoničnosti elektromagnetskog polja (poglavlje 4.4.1) polazne Maxwellove jednadžbe i iz njih izvedene pomoćne jednadžbe mogu se zapisati u fazorskom obliku (s kompleksnim funkcijama ili kompleksnim vektorima). Kompleksni vektor elektromagnetskog polja  $\vec{\Psi}$  (fazor) u općem slučaju ima šest komponenti u svakoj točki prostora (tri realne i tri imaginarne) koje su funkcija prostornih koordinata, a njegov modul  $|\vec{\Psi}|$  jednak je amplitudi harmonično promjenljive veličine elektromagnetskog polja  $\Psi_m$ . Zapisom jednadžbi harmonično promjenljivog elektromagnetskog polja u fazorskom obliku postiže se njihova redukcija samo na prostornu domenu, a parcijalne derivacije po vremenu svode se na množenje derivirane jednadžbe kompleksnim brojem [79, 80].

U vlastito razvijenom simulacijskom modelu prijenosa elektromagnetskog polja s induktora na obradak primijenjene su jednadžbe elektromagnetskog potencijala izvedene iz sustava Maxwellovih jednadžbi za kvazistacionarno harmonično promjenljivo elektromagnetsko polje u fazorskoj domeni (bez slobodnih električnih naboja).

$$\nabla \times \left( \frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{\underline{A}} \right) = \vec{\underline{J}_0} - j\omega\kappa \vec{\underline{A}} \quad (5.1)$$

Uvedena pomoćna veličina  $\vec{\underline{A}}$  uobičajeno se naziva "magnetski vektorski potencijal" a definirana je sljedećom jednadžbom prema [7, 9, 79, 80]:

$$\vec{\underline{B}} = \nabla \times \vec{\underline{A}} \quad (5.2)$$

Opravdanost ove jednadžbe slijedi iz činjenice da je fazor (kompleksni vektor) magnetske indukcije  $\vec{\underline{B}}$  solenoidan (tj. bez izvora) i kao takav može se predstaviti rotorom drugog fazora uz odgovarajuće baždarenje.

**Coulombovo baždarenje.** Prema Helmholtzovom teoremu vektorska funkcija bit će jednoznačno određena samo ako su joj poznati rotor ( $\nabla \times$ ) i divergencija ( $\nabla \circ$ ). Stoga se uz jednadžbu (5.2) treba definirati i divergencija fazorske funkcije  $\vec{A}$  zadavanjem dodatnog uvjeta tzv. "baždarenja". U slučaju kvazistacionarnog elektromagnetskog polja zbog jednostavnosti jednadžbi polja i sukladnosti s eksperimentalno potvrđenim činjenicama uz jednadžbu (5.2) definira se dodatni Coulombov uvjet, tzv. "Coulombovo baždarenje" prema [80]:

$$\nabla \circ \vec{A} = 0 \quad (5.3)$$

Svojstva materijala: električna vodljivost  $\underline{\kappa}$  i magnetska permeabilnost  $\underline{\mu}$  u jednadžbi (5.1) prikazane su kao kompleksne funkcije ovisne o kružnoj frekvenciji  $\omega$  harmonični promjenljivog elektromagnetskog polja. Frekvencijska ovisnost električne vodljivosti i magnetske permeabilnosti posljedica je mikroskopskih inercijskih i relaksacijskih efekata. U općem se ne podudaraju električna vodljivost  $\kappa$  i magnetska permeabilnost  $\mu$  materijala određene za nepromjenjiva (istosmjerna) polja i kompleksne značajke  $\underline{\kappa}$  i  $\underline{\mu}$  određene za sinusna (izmjenična) polja. Međutim vrijedi granični odnos (5.4) prema [80]:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \underline{\kappa}, \underline{\mu} \rightarrow \kappa, \mu \quad (5.4)$$

Stoga se realne značajke za istosmjerna polja, ipak smiju upotrijebiti za sinusna polja, ali samo za pojedino područje frekvencija i određeni materijal, a nikad ne za sve frekvencije. Za primjenu jednadžbi (5.1) do (5.3) u području frekvencija do 1000 kHz koje se uobičajeno koristi u postupcima induktijskog kaljenja kompleksna električna vodljivosti  $\underline{\kappa}$  i magnetska permeabilnost  $\underline{\mu}$  izjednačit će se sa svojim realnim vrijednostima:

$$\underline{\kappa} \approx \kappa, \quad \underline{\mu} \approx \mu \quad (5.5)$$

**Struja ili napon induktora.** Za područje induktora treba definirati još jedan dodatni uvjet koji povezuje fazor gustoće struje induktora  $\vec{J}_0$  s razlikom električnog potencijala  $\underline{V}$  na priključcima induktora [79, 80, 81]:

$$\vec{\underline{J}}_0 = -\kappa \nabla \underline{V} \quad (5.6.a)$$

$$\underline{V} = V_{0m} e^{j\phi_0}; \quad \phi_0 = 0 \quad (5.6.b)$$

$\vec{\underline{J}}_0$	...	fazor gustoće struje induktora, A/m <sup>2</sup>
$\nabla$	...	diferencijalni operator gradijenta skalarnog polja
$\underline{V}$	...	električni potencijal induktora, V
$V_{0m}$	...	amplituda električnog potencijala induktora, V

Za kružni induktor s  $N_z$  zavoja fazorska jednadžba (5.6.a) dobiva sljedeći skalarni oblik:

$$J_0 = -\kappa_2 \frac{U_m}{2\pi N_z r_2} \quad (5.7)$$

$U_m$	...	Amplituda napona na priključima induktora (V)
$\kappa_2$	...	Električna vodljivost materijala induktora (S/m)
$r_2$	...	Polumjer zavoja induktora (m)
$N_z$	...	Broj zavoja induktora

Uz pretpostavku primjene jednadžbe (5.1) na linearne, homogene i izotropne materijale, član  $1/\mu$  može se pisati ispred operatorka rotor. Tada se na član  $\nabla \times (\nabla \times \vec{\underline{A}})$  može primijeniti jednadžba poznata iz vektorske analize:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{\underline{A}}) = \nabla(\nabla \circ \vec{\underline{A}}) - \nabla^2 \vec{\underline{A}} \quad (5.8)$$

Uz Coulombovo baždarenje član na lijevoj strani jednadžbe (5.8) dobiva svoj konačni oblik tzv. "difuzijske" jednadžbe magnetskog vektorskog potencijala u trodimenzijском prostoru:

$$\boxed{\nabla^2 \vec{\underline{A}} = -\mu \vec{\underline{J}}_0 + j\mu\omega\kappa \vec{\underline{A}}} \quad (5.9)$$

Jednadžba (5.9) jedna je od polaznih jednadžbi matematičkog modela inducijskog kaljenja. Ona se obično zapisuje u obliku (5.10.a) ako se inducijsko kaljenje izvodi sa strujnim generatorom ( $J_0 = \text{const.}$ ), ili u obliku (5.10.b) ako se koristi naponski generator ( $U_m = \text{const.}$ ). Prema pretpostavkama u geometrijskoj domeni obratka  $\nabla \underline{V} = 0$ , a u domeni zraka  $\kappa = 0$  S/m i  $\mu = \mu_0 = 4\pi 10^{-7}$  H/m.

$$\nabla^2 \vec{\underline{A}} - j\mu\omega\kappa \vec{\underline{A}} = -\mu \vec{\underline{J}_0} \quad (5.10.a)$$

a) induktor:

$$\nabla^2 \vec{\underline{A}} - j\mu\omega\kappa \vec{\underline{A}} = \mu\kappa \nabla \underline{V} \quad (5.10.b)$$

b) obradak:

$$\nabla^2 \vec{\underline{A}} - j\mu\omega\kappa \vec{\underline{A}} = 0 \quad (5.11)$$

c) zrak:

$$\nabla^2 \vec{\underline{A}} = 0 \quad (5.12)$$

U vlastito razvijenom simulacijskom programu primjenjena su oba oblika jednadžbe (5.10.a-b) ovisno o zadanim tipu induktijskog generatora.

Fazor vektorskog magnetskog potencijala  $\vec{\underline{A}}$  ima svoj realni i imaginarni dio,

$$\vec{\underline{A}} = \vec{A}_R + j \vec{A}_I \quad (5.13)$$

pa se opće jednadžbe (5.10) do (5.12) mogu raspisati na sustav od po dvije jednadžbe s realnim brojevima pogodniji za numeričko rješavanje od sustava s kompleksnim brojevima što je i provedeno u njihovim dalnjim izvodima za sustav induktor-obradak.

Sustav jednadžbi (5.10) do (5.12) opisuje difuziju elektromagnetskog polja u trodimenijskom prostoru. Međutim u većini slučajeva u kojima su obradak i induktor simetrični pa se rješenje jednadžbi (5.10) do (5.12) može tražiti u geometrijski dvodimenzijskom području u pravokutnom ili cilindričnom koordinatnom sustavu. Pri tome se u geometrijskoj domeni induktora pojavljuje dvodimenzijski raspodijeljen napon  $U_0$ , odnosno gustoća struje  $J_0$ , a vektorski magnetski potencijal  $\vec{\underline{A}}$  ima samo jednu komponentu okomitu na ravnicu  $(x,y)$  ili  $(r,z)$ .

**1) Diferencijalne jednadžbe elektromagnetskog potencijala u dugačkom ravnom induktoru (duljine  $l_{2N}$ ) i obratku izražene u **pravokutnom koordinatnom sustavu****

$$\vec{\underline{A}} = (0, 0, \underline{A}_z) = [A_z(x, y)]_R + j[A_z(x, y)]_I = A_R + jA_I \quad (5.14.a)$$

$$\underline{U} = [U(x, y)]_R + j[U(x, y)]_I = U_R + jU_I \quad (5.14.b)$$

$$\underline{J}_0 = [J_0(x, y)]_R + j[J_0(x, y)]_I = J_{0R} + jJ_{0I} \quad (5.14.c)$$

a) Geometrijska domena induktora

$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\mu_2} \frac{\partial A_R}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\mu_2} \frac{\partial A_R}{\partial y} \right) + \omega \kappa_2 A_I = -J_{0R}$	(5.15.a)
$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\mu_2} \frac{\partial A_I}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\mu_2} \frac{\partial A_I}{\partial y} \right) - \omega \kappa_2 A_R = -J_{0I}$	(5.15.b)
$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\mu_2} \frac{\partial A_R}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\mu_2} \frac{\partial A_R}{\partial y} \right) + \omega \kappa_2 A_I = \kappa_2 \frac{U_R}{l_{2N}}$	(5.15.c)
$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\mu_2} \frac{\partial A_I}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\mu_2} \frac{\partial A_I}{\partial y} \right) - \omega \kappa_2 A_R = \kappa_2 \frac{U_I}{l_{2N}}$	(5.15.d)

b) Geometrijska domena obratka

$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\mu_1} \frac{\partial A_R}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\mu_1} \frac{\partial A_R}{\partial y} \right) + \omega \kappa_1 A_I = 0$	(5.16.a)
$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\mu_1} \frac{\partial A_I}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\mu_1} \frac{\partial A_I}{\partial y} \right) - \omega \kappa_1 A_R = 0$	(5.16.b)

c) Geometrijska domena zraka

$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial A_R}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial A_R}{\partial y} \right) = 0$	(5.17.a)
$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial A_I}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial A_I}{\partial y} \right) = 0$	(5.17.b)

- 2) Diferencijalne jednadžbe elektromagnetskog potencijala osnosimetričnom induktoru (polumjera  $r$ ) i obratku izražene u **cilindričnom koordinatnom sustavu**

$$\vec{A} = (0, A_\theta, 0) = [A_\theta(r, z)]_R + j[A_\theta(r, z)]_I = A_R + jA_I \quad (5.18.a)$$

$$\underline{U} = [U(r, z)]_R + j[U(r, z)]_I = U_R + jU_I \quad (5.18.b)$$

$$\underline{J}_0 = [J_0(r, z)]_R + j[J_0(r, z)]_I = J_{0R} + jJ_{0I} \quad (5.18.c)$$

a) Geometrijska domena induktora

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{\mu_2 r} \frac{\partial(rA_R)}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\mu_2 r} \frac{\partial(rA_R)}{\partial z} \right) + \omega \kappa_2 A_I = -J_{0R} \quad (5.19.a)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{\mu_2 r} \frac{\partial(rA_I)}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\mu_2 r} \frac{\partial(rA_I)}{\partial z} \right) - \omega \kappa_2 A_R = -J_{0I} \quad (5.19.b)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{\mu_2 r} \frac{\partial(rA_R)}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\mu_2 r} \frac{\partial(rA_R)}{\partial z} \right) + \omega \kappa_2 A_I = \kappa_2 \frac{U_R}{2\pi r} \quad (5.19.c)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{\mu_2 r} \frac{\partial(rA_I)}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\mu_2 r} \frac{\partial(rA_I)}{\partial z} \right) - \omega \kappa_2 A_R = \kappa_2 \frac{U_I}{2\pi r} \quad (5.19.d)$$

b) Geometrijska domena obratka

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{\mu_1 r} \frac{\partial(rA_R)}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\mu_1 r} \frac{\partial(rA_R)}{\partial z} \right) + \omega \kappa_1 A_I = 0 \quad (5.20.a)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{\mu_1 r} \frac{\partial(rA_I)}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\mu_1 r} \frac{\partial(rA_I)}{\partial z} \right) - \omega \kappa_1 A_R = 0 \quad (5.20.b)$$

c) Geometrijska domena zraka

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{\mu_0 r} \frac{\partial(rA_R)}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\mu_0 r} \frac{\partial(rA_R)}{\partial z} \right) = 0 \quad (5.21.a)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{\mu_0 r} \frac{\partial(rA_I)}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\mu_0 r} \frac{\partial(rA_I)}{\partial z} \right) = 0 \quad (5.21.b)$$

**Rubni uvjeti između geometrijskih domena** zadaju se na graničnim površinama geometrijskih domena obratka-okolišni zrak, vodiči induktora-koncentrator magnetskog toka, induktor - okolišnji zrak. Na ovim graničnim površinama vrijede uvjeti kontinuiteta veličina magnetskog vektorskog potencijala i tangencijalnih komponenti jakosti magnetskog polja prema [26, 31, 34, 35, 79, 80].

a) obradak – okolišnji zrak

$$\vec{\underline{A}}_1 = \vec{\underline{A}}_4 \quad (5.22.a)$$

$$\frac{1}{\mu_1} \frac{\partial \vec{\underline{A}}_1}{\partial n_1} = \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial \vec{\underline{A}}_4}{\partial n_4} \quad (5.22.b)$$

$$\vec{n}_1 = -\vec{n}_4 \quad (5.22.c)$$

b) induktor – okolišnji zrak

$$\vec{\underline{A}}_2 = \vec{\underline{A}}_4 \quad (5.23.a)$$

$$\frac{1}{\mu_2} \frac{\partial \vec{\underline{A}}_2}{\partial n_2} = \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial \vec{\underline{A}}_4}{\partial n_4} \quad (5.23.b)$$

$$\vec{n}_2 = -\vec{n}_4 \quad (5.23.c)$$

Jednadžbe (5.23.a-c) odnose se na graničnu površinu koncentrator magnetskog toka – zrak (ili vodič induktora – zrak). Ako oko vodiča induktora nije postavljen koncentrator magnetskog toka u jednadžbe (5.23.a-c) treba uvrstiti  $\mu_2 = \mu_0$ . Na osi simetrije matematički modeliranog područja definiraju se **rubni uvjeti simetrije** [109]:

$$\vec{\underline{A}}_1 = 0 \quad (5.24.a)$$

$$\frac{1}{\mu_1} \frac{\partial \vec{\underline{A}}_1}{\partial n} = 0 \quad (5.24.b)$$

Rješenje gornjeg sustava jednadžbi i rubnih uvjeta je kompleksna (fazorska) funkcija  $\vec{A}_R + j \vec{A}_I$  čije se vrijednosti mogu uvijek transformirati u vremensku domenu jednadžbama (4.2.a-c). Nakon rješenja sustava jednadžbi (5.15) do (5.17) ili (5.19) do (5.21) iz vrijednosti realne i imaginarnе komponente magnetskog vektorskog potencija računa se **volumenska snaga Jouleovih toplinskih izvora**  $p_{JQ}$  ( $\text{W/m}^3$ ) [39]:

$$p_{JQ} = \frac{1}{2} \kappa \omega^2 (A_R^2 + A_I^2) + \frac{1}{2} \kappa (\nabla V_R)^2 \quad (5.25)$$

Varijable  $A_R$  i  $A_I$  su moduli realne i kompleksne vrijednosti vektora magnetskog vektorskog potencijala  $\vec{\underline{A}}$ . Jednadžba (5.24) daje direktnu vezu elektromagnetskog i temperaturnog polja. Osim

nje postoji i indirektna povezanost ovih polja preko temperaturno ovisnih električnih i magnetskih svojstava materijala. Posljednji član na desnoj strani jednadžbe (5.25) u obratku je jednak nuli jer po polaznim pretpostavkama u njemu ne teku slobodne struje, dok je u induktoru veći od nule i predstavlja gubitke snage na radnom otporu vodiča induktora.

Usporedbom jednadžbi (5.15)-(5.17) u pravokutnom koordinatnom sustavu s jednadžbama (5.19)-(5.21) u cilindričnom koordinatnom sustavu uočava se njihova sličnost uz transformacije (5.26.a-c), koje vrijede i za rubne uvjete.

Pravokutni koordinatni sustav	Cilindrični koordinatni sustav	
$A'_R \quad A'_I$	$= r A_R \quad r A_I$	(5.26.a)
$\mu' = r \mu$		(5.26.b)
$\kappa' = \kappa / r$		(5.26.c)

Iz gradijenata  $\partial A_R / \partial n$  i  $\partial A_I / \partial n$  mogu se izračunati komponente i ukupni iznos modula fazora magnetske indukcije ( $B_0$ ) potrebni za određivanje magnetske permeabilnosti materijala:

- a) Pravokutni koordinatni sustav ( $\underline{B}_{0x}$ ,  $\underline{B}_{0y}$ ),

$$B_0 = \sqrt{\left(-\frac{\partial A_R}{\partial x}\right)^2 + \left(-\frac{\partial A_I}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial A_R}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial A_I}{\partial y}\right)^2} \quad (5.27)$$

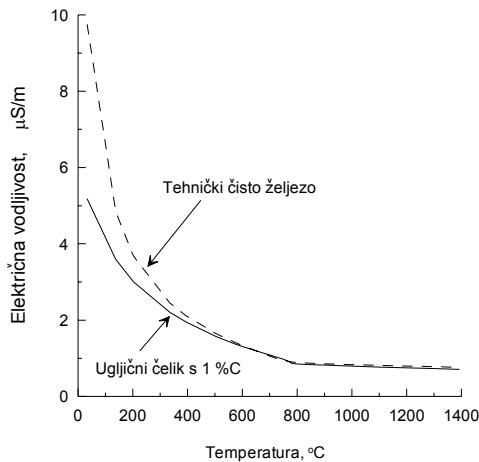
- b) Cilindrični koordinatni sustav ( $\underline{B}_{0r}$ ,  $\underline{B}_{0z}$ ),

$$B_0 = \sqrt{\left(-\frac{\partial A_R}{\partial r} - \frac{A_{R,c}}{r_c}\right)^2 + \left(-\frac{\partial A_I}{\partial r} - \frac{A_{I,c}}{r_c}\right)^2 + \left(-\frac{\partial A_R}{\partial z}\right)^2 + \left(-\frac{\partial A_I}{\partial z}\right)^2} \quad (5.28)$$

$r_c$  ... središte osnosimetričnog konačnog elementa, m

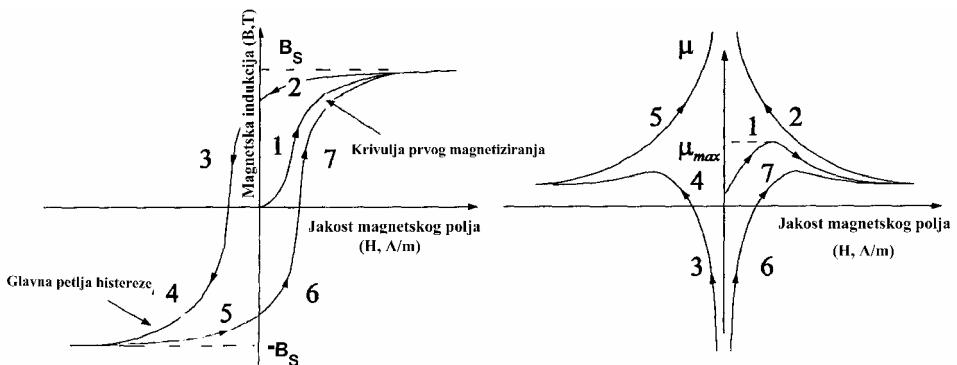
## 5.2 Zadavanje električnih i magnetskih svojstva materijala

**Električna vodljivost**  $\kappa$  ovisi o temperaturi, kemijskom sastavu i mikrostrukturnom stanju čelika. Na **slici 5.1** vidi se tijek promjene električne vodljivosti s porastom temperature kod tehnički čistog željeza i ugljičnog čelika s 1 %C. U bazi podataka vlastito razvijenog simulacijskog programa nalaze se vrijednosti električne vodljivosti za raspon temperatura od 20 do 1200 °C uobičajenih čelika za površinsko kaljenje koji imaju maseni udio ugljika i legirajućih elemenata manji od 10%.



**Slika 5.1** Promjena električne vodljivosti tehnički čistog željeza i ugljičnog čelika s 1 % C (podaci izračunati prema [82])

**Magnetska permeabilnost** čelika za poboljšavanje i željeznih ljevova izrazito se nelinearno mijenja s promjenama jakosti magnetskog polja  $H$  i temperaturi  $\vartheta$ . Već i kod sporih cikličkih promjena magnetskog polja ovisnost  $B=f(H)$ , koja određuje magnetsku permeabilnost je više značna i poprima oblik histerezne krivulje (**slika 5.2**). Ako je materijal doveden do zasićenja na oba kraja krivulje magnetiziranja, petlja se naziva glavna petlja histereze. Sva stanja magnetiziranja feromagnetskog materijala nalaze se unutar ove glavne petlje. U linearnim izotropnim i homogenim materijalima magnetska permeabilnost  $\mu$  je skalarna konstanta, a u nelinearnim izotropnim materijalima ona je skalarna funkcija absolutne vrijednosti jakosti magnetskog polja  $\mu=f(H)$ . Iz **slike 5.2** je vidljivo da upotreba krivulje  $\mu=f(H)$  mora biti povezana sa stanjem u kojem ima smisla, tj. s krivuljom prvog magnetiziranja ili s normalnom krivuljom magnetiziranja. One se obično određuju eksperimentalno na sobnoj temperaturi.



**Slika 5.2** Petlja magnetiziranja i njoj pripadne krivulje magnetske permeabilnosti [80]

Površina unutar petlje histereze predstavlja gubitke magnetiziranja  $P_{HB}$  jedne periode titranja magnetskog polja, pretvorene u toplinu. Veličina petlje histereze za nepromijenjenu jakost magnetskog polja smanjuje se s porastom temperature do Curieove temperature kada feromagnetski materijal postaje paramagnetičan (bez petlje histereze). Petlje histereze deset uobičajeno primjenjivanih čelika za poboljšavanje pohranjene su u bazi podataka simulacijskog programa, pa se tijekom simulacije induksijskog kaljenja osim Jouelove topline određuje i toplina dobivena od gubitaka magnetiziranja materijala.

Kad se vrijednosti temperature bliže Curievoj temperaturi čelika ili željeznog lijeva petlje histereze naglo postaju sve položenije, pa su vrijednosti magnetske permeabilnosti sve manje (**slika 5.2**). Za većinu čelika za poboljšavanje Curieva temperatura iznosi između 745 i 770 °C. Najveća gustoća magnetskog toka koja se postiže s određenim feromagnetskim materijalom naziva se magnetska indukcija zasićenja  $B_S$ . Njena vrijednost obično se očitava s glavne petlje histereze ili je navedena tablično, uglavnom za sobnu temperaturu 293 K. Za povišene temperature promjena  $B_S=f(T)$  može se orijentacijski odrediti Weiss-Curievom jednadžbom [84] iz fizike čvrstog stanja:

$$\frac{B_{s(T)}}{B_{s(293K)}} = \tanh\left(\frac{B_{s(T)}}{B_{s(293K)}} \frac{T_{Curie}}{T}\right) \quad T < T_{Curie} \text{ (K)} \quad (5.29)$$

Relativna magnetska permeabilnost zasićenja  $\mu_{rs(T)}$  ovisna o temperaturi aproksimirana je jednadžbom (5.30.a-b) [85]:

$$\mu_{rs(T)} = \frac{B_{s(T)} / B_{s(273K)}}{C_B (1 - T/T_{Curie})^{\frac{3}{2}}} \quad T < T_{Curie} \quad (5.30.a)$$

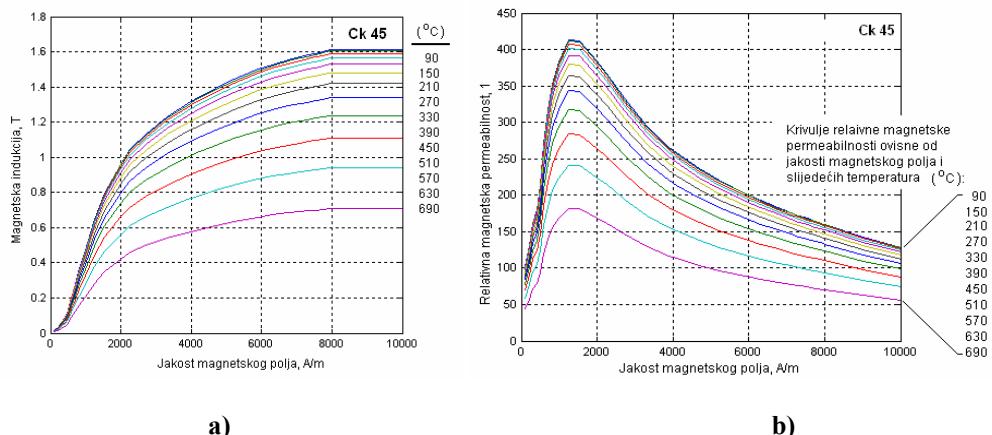
$$\mu_{rs(T)} = 1 \quad T \geq T_{Curie} \quad (5.30.b)$$

Iznosi relativne magnetske permeabilnosti izvan područja magnetskog zasićenja aproksimirani su vlastitim modelom prema jednadžbi (5.31.a-b):

$$\mu_{r(T)} = \left( 1 - \frac{B_{s(273K)} - B_{s(T)}}{B_{s(273K)}} \right) \mu_{rs(273K)} \quad T < T_{Curie} \quad (5.31.a)$$

$$\mu_{r(T)} = 1 \quad T \geq T_{Curie} \quad (5.31.b)$$

Vrijednosti relativne magnetske permeabilnosti na sobnoj temperaturi  $\mu_{rs(273K)}$  određene su interpolacijom polinomima drugog do četvrtog stupnja iz podataka prema [4, 87, 88]. Jednadžbe (5.30) i (5.31) primijenjene su za ekstrapolaciju krivulja magnetiziranja  $B = f(H, \vartheta)$  i krivulja promjene relativne magnetske permeabilnosti ovisno o temperaturi  $\mu=f(H, \vartheta)$  za raspon temperatura od 20 °C do Curieove temperature (**slika 5.3**).



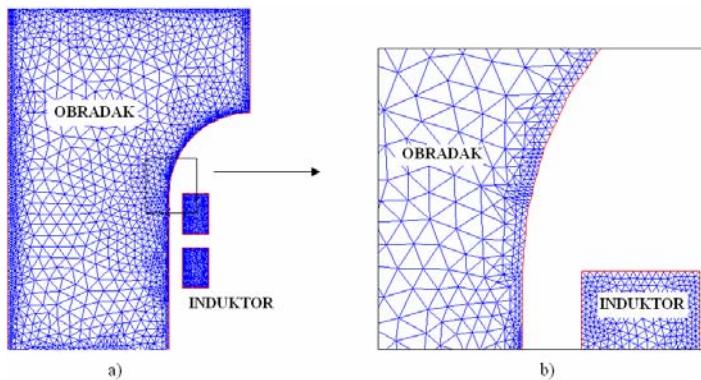
**Slika 5.3.** Primjeri aproksimacije krivulja magnetiziranja i promjene magnetske permeabilnosti iz vlastito razvijenog računalnog programa "Ind2D":

- a) Aproksimacija krivulje magnetiziranja  $B = f(H, \vartheta)$  ugljičnog čelika s 0,45 %C
- b) Aproksimacija magnetske permeabilnosti  $\mu_r=f(H, \vartheta)$  ugljičnog čelika s 0,45 %C

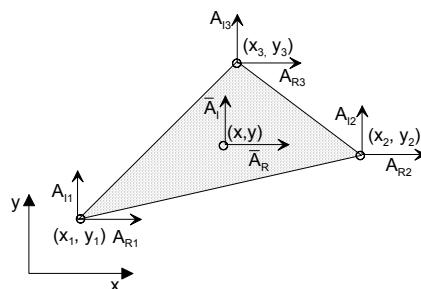
## 5.3 Rješenje jednadžbi elektromagnetskog polja kombinacijom metoda konačnih i rubnih elemenata

### 5.3.1. Definicija funkcije oblika magnetskog vektorskog potencijala na trokutnom konačnom elementu

Geometrijske domene koje izgledom odgovaraju polovici uzdužnog presjeka obratka i induktora diskretiziraju se anizotropnim i strukturiranim trokutnim konačnim elementima na n subdomena (slika 5.4). Magnetski vektorski potencijal u svakom čvoru mreže aproksimira se linearnim funkcijama oblika  $\bar{A}_R$  i  $\bar{A}_I$  (realna i imaginarna komponenta) sa šest stupnjeva slobode (slika 5.5).



**Slika 5.4 a)** Primjer diskretizacije geometrijskih domena osnosimetričnog obratka i induktora mrežom trokutnih konačnih elemenata (iz vlastitog računalnog programa "Ind2D")  
**b)** Detaljniji izgled strukturirane mreže uz kaljenu površinu obratka



**Slika 5.5.** Aproksimacijske funkcije magnetskog vektorskog potencijala u čvorovima linearnog trokutnog elementa

U matematičkom smislu aproksimacijske funkcije  $\bar{A}_R$ ,  $\bar{A}_I$  traže se kao komponente  $n$ -dimenzijskih vektora iz  $n$ -dimenzijskog metričkog prostora. U tom smislu u “ $j$ ”-tom čvoru mreže nepoznati parametri aproksimacijske funkcije magnetskog vektorskog potencijala  $\bar{A}_{R,j}$ ,  $\bar{A}_{I,j}$  su “ $j$ ”-ti koeficijenti linearne kombinacije globalnih baznih vektora  $\varphi_j$ ,

$$\bar{\Psi} = \sum_{i=1}^n \Psi_i \varphi_i \quad (\Psi = \bar{A}_R, \bar{A}_I; \Psi_j = \bar{A}_{R,j}, \bar{A}_{I,j}) \quad (5.32)$$

Globalni bazni vektori  $\varphi_i$  definiraju se za  $N$  geometrijskih čvorova. Nad trokutnim elementom globalni bazni vektor  $\varphi_i$  se sastoji od tri lokalna bazna vektora  $N^e$  (funkcije oblika konačnog elementa) [91, 93, 95, 137]. Funkcije oblika dvodimenzijskog i osnosimetričnog trokutnog elementa imaju isti oblik uz supstituciju  $r \equiv x, z \equiv y$ . U vlastitom simulacijskom programu za lokalne bazne vektore korišteni su Lagrangeovi interpolacijski polinomi prvog stupnja  $[N_1 \ N_2 \ N_3]$ . Oni imaju vrijednost 1 samo u jednom čvoru “e”-tog trokutnog elementa dok su jednaki nuli u svim ostalim čvorovima mreže.

$$[N_1 \ N_2 \ N_3] = [1 \ x \ y] \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \quad (5.33)$$

$$\begin{aligned} a_1 &= x_2 y_3 - y_2 x_3 & b_1 &= y_2 - y_3 & c_1 &= x_3 - x_2 \\ a_2 &= x_3 y_1 - y_3 x_1 & b_2 &= y_3 - y_1 & c_2 &= x_1 - x_3 \\ a_3 &= x_1 y_2 - y_1 x_2 & b_3 &= y_1 - y_2 & c_3 &= x_1 - x_2 \end{aligned} \quad (5.34)$$

$x_j, y_j ; r_j, z_j \dots$  Koordinate čvorova trokutnog elementa, ( $j=1,2,3$ ), m

**Aproksimacijske funkcije  $\bar{\Psi}^e$  trokutnog elementa** za proračun vrijednosti magnetskog vektorskog potencijala  $\bar{A}_R^e, \bar{A}_I^e$  mogu se zapisati na više načina (u obliku polinoma, u proširenom ili skraćenom matričnom obliku) [37, 39, 77].

$$\bar{\Psi}^e = [N_1 \ N_2 \ N_3] \begin{Bmatrix} \Psi_1^e \\ \Psi_2^e \\ \Psi_3^e \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^3 N_j^e \Psi_j^e = [N]^e \{\Psi^e\} \quad j = 1, 2, 3 \quad (5.35)$$

$$\bar{\Psi}^e \equiv \bar{A}_R^e, \bar{A}_I^e; \quad \Psi_j^e \equiv A_{R,j}^e, A_{I,j}^e$$

Funkcije oblika  $N_j, j=1,2,3$  moraju biti kontinuirane i derivabilne samo na konačnom elementu, ali ne i na prijelazu iz jednog na drugi konačni element, što je poznato kao “nejaka formulacija” jednadžbe konačnog elementa. Jednadžbe oblika (5.35) primjenjive su tek kad su poznate vrijednosti magnetskog vektorskog potencijala  $\{A_j^e\}$  u čvorovima trokutnog elementa, npr. kod grafičkog prikaza rješenja. Međutim za rješavanje diferencijalnih jednadžbi elektromagnetskog problema induktivskog kaljenja treba odrediti upravo vrijednosti  $\{A_j^e\}$  i  $\{\Psi_j^e\}$  u svih  $N$  geometrijskih čvorova mreže. To će se izvesti minimizacijom težinskog reziduala uz Galerkinovu metodu rješavanja težinskog integrala, tj. uz izbor  $[W_i] = [N_j]^T$ , pri čemu su u jednadžbi (5.36) obuhvaćeni i reziduali rubnih uvjeta [88, 89].

$$\iiint_V [W_i] \cdot \{R\} \cdot dV = 0 \quad (5.36)$$

### 5.3.2. Formulacija jednadžbi elektromagnetskog polja na konačnom elementu

Formulacijom težinskog reziduala s Galerkinovom metodom rješavanja težinskog integrala (5.36) riješit će se diferencijalne jednadžbe (5.17) do (5.19) magnetskog vektorskog potencijala na dvodimenzionalnom i jednadžbe (5.20) do (5.22) na osnosimetričnom elementu uz pretpostavke iz poglavlja 4.4.1 i rubne uvjete (5.22) do (5.24) i dodatne rubne uvjete proizašle iz povezivanja rješenja metodom konačnih (FEM) i rubnih elemenata (BEM).

- a) Rubni uvjeti na dijelu površine  $S_q$  (kontura  $\Gamma_q$ ) obratka ili induktora s tzv. Neumannovim rubnim uvjetima u pravokutnom koordinatnom sustavu [34, 35]:

$$\left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial A_R}{\partial n} \right)^{FEM} = - \left( \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial A_R}{\partial n} \right)^{BEM} \quad (5.37.a)$$

$$\left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial A_I}{\partial n} \right)^{FEM} = - \left( \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial A_I}{\partial n} \right)^{BEM} \quad (5.37.b)$$

- b) Rubni uvjeti na dijelu površine  $S_0 (= S - S_q)$  obratka ili induktora s tzv. Dirichletovim rubnim uvjetima u pravokutnom koordinatnom sustavu (kontura  $\Gamma_0$ ):

$$(A_R)^{FEM} = (A_R)^{BEM} \quad (5.38.a)$$

$$(A_I)^{FEM} = (A_I)^{BEM} \quad (5.38.b)$$

- c) Na osi simetrije modeliranog područja u pravokutnom koordinatnom sustavu kao i vrlo daleko od njega na površini  $S_\infty$  vrijedi rubni uvjet:

$$\frac{\partial A_R}{\partial n} = \frac{\partial A_I}{\partial n} = 0 \quad (5.39)$$

Za pregledniji izvod formulacije osnosimetričnog elementa uvodi se pomoćna funkcija  $\Pi$  definirana jednadžbom (5.40) primjenom koje se sličnost zapisa i izvoda formulacije osnosimetričnih i dvodimenzijskih konačnih elemenata prema [41]:

$$\Pi = \Pi_R + j\Pi_I = (r A_R) + j(r A_I) \quad (5.40)$$

Uz ovu pomoćnu funkciju rubni uvjeti analogni (5.37) do (5.39) u cilindričnom koordinatnom sustavu zadani su sljedećim jednadžbama:

$$\left( \frac{1}{\mu r} \frac{\partial \Pi_R}{\partial n} \right)^{FEM} = - \left( \frac{1}{\mu_0 r} \frac{\partial \Pi_R}{\partial n} \right)^{BEM} \quad (5.41.a)$$

$$\left( \frac{1}{\mu r} \frac{\partial \Pi_I}{\partial n} \right)^{FEM} = - \left( \frac{1}{\mu_0 r} \frac{\partial \Pi_I}{\partial n} \right)^{BEM} \quad (5.41.b)$$

$$(\Pi_R)^{FEM} = (\Pi_R)^{BEM} \quad (5.42.a)$$

$$(\Pi_I)^{FEM} = (\Pi_I)^{BEM} \quad (5.42.b)$$

$$\frac{\partial \Pi_R}{\partial n} = \frac{\partial \Pi_I}{\partial n} = 0 \quad (5.43)$$

Izvod formulacije konačnog elementa za čvorove u unutrašnjosti geometrijskih domena obratka i induktora počinje uvođenjem aproksimacijskih funkcija (5.33) do (5.35) u diferencijalne jednadžbe (5.15) do (5.17), odnosno (5.19) do (5.21) i pripadne rubne uvjetne (5.22) do (5.23). Za čvorove na površini ovih domena postavljaju se jednadžbe rubnih elemenata. Uvrštavanjem aproksimacijskih funkcija u diferencijalne jednadžbe elektromagnetskog polja pojavljuju se ostaci  $R_R$ ,  $R_I$  raspodijeljeni po konačnom elementu i  $R_{RS}$ ,  $R_{IS}$  po njegovom rubu. Zbog preglednijeg zapisa desna strana jednadžbi (5.15) i (5.19) zamijenit će se članom  $f_R$  za jednadžbe s realnom komponentom magnetskog vektorskog potencijala, odnosno članom  $f_I$  za jednadžbe s imaginarnom komponentom ovog potencijala.

a) Dvodimenzijalni konačni element

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial [N]}{\partial x} \right) \{A_R^e\} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial [N]}{\partial y} \right) \{A_I^e\} + \omega \kappa [N] \{A_I^e\} - \{f_R\} = [R_R(x, y : \{A_R\})] \quad (5.44.a)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial [N]}{\partial x} \right) \{A_I^e\} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial [N]}{\partial y} \right) \{A_R^e\} - \omega \kappa [N] \{A_R^e\} - \{f_I\} = [R_I(x, y : \{A_I\})] \quad (5.44.b)$$

$$\left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial \bar{A}_R}{\partial n} \right)^{FEM} + \left( \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial \bar{A}_R}{\partial n} \right)^{BEM} = R_{RS} \quad (5.45.a)$$

$$\left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial \bar{A}_I}{\partial n} \right)^{FEM} + \left( \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial \bar{A}_I}{\partial n} \right)^{BEM} = R_{IS} \quad (5.45.b)$$

b) Osnosimetrični konačni element

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{\mu r} \frac{\partial [N]}{\partial r} \right) \{\Pi_R^e\} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\mu r} \frac{\partial [N]}{\partial z} \right) \{\Pi_I^e\} + \omega \frac{\kappa}{r} [N] \{\Pi_I^e\} - \{f_R\} = [R_R(r, z : \{\Pi_R\})] \quad (5.46.a)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{\mu r} \frac{\partial [N]}{\partial r} \right) \{\Pi_I^e\} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\mu r} \frac{\partial [N]}{\partial z} \right) \{\Pi_R^e\} - \omega \frac{\kappa}{r} [N] \{\Pi_R^e\} - \{f_I\} = [R_I(r, z : \{\Pi_I\})] \quad (5.46.b)$$

$$\left( \frac{1}{\mu r} \frac{\partial \bar{\Pi}_R}{\partial n} \right)^{FEM} + \left( \frac{1}{\mu_0 r} \frac{\partial \bar{\Pi}_R}{\partial n} \right)^{BEM} = R_{RS} \quad (5.47.a)$$

$$\left( \frac{1}{\mu r} \frac{\partial \bar{\Pi}_I}{\partial n} \right)^{FEM} + \left( \frac{1}{\mu_0 r} \frac{\partial \bar{\Pi}_I}{\partial n} \right)^{BEM} = R_{IS} \quad (5.47.b)$$

Primjenom Galerkinove metode pri postavljanju težinskog integrala

$$\iiint_V [N]^T [R(r, z : \{A\})] dV^e + \iint_S [\bar{N}]^T [R_S(r, z : \{A\})] dS^e = 0 \quad (5.48)$$

na jednadžbe (5.44) do (5.47) slijede sustavi jednadžbi s matricama dimenzija 3x3 koje množe tročlani vektori  $\{A_R^e\}$ ,  $\{A_I^e\}$ , odnosno  $\{\Pi_R^e\}$ ,  $\{\Pi_I^e\}$ .

a) Dvodimenzijski konačni element

$$\iiint_V [N]^T \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial [N]}{\partial x} \right) \{A_R^e\} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial [N]}{\partial y} \right) \{A_I^e\} + \omega \kappa [N] \{A_I^e\} - \{f_R\} \right) dV^e + \iint_{S_q} [\bar{N}]^T \frac{1}{\mu} \left\{ \frac{\partial A_R^e}{\partial n} \right\} dS^\Gamma = 0 \quad (5.49.a)$$

$$\iiint_V [N]^T \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial [N]}{\partial x} \right) \{A_I^e\} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial [N]}{\partial y} \right) \{A_I^e\} - \omega \kappa [N] \{A_R^e\} - \{f_I\} \right) dV^e + \iint_{S_q} [\bar{N}]^T \frac{1}{\mu} \left\{ \frac{\partial A_I^e}{\partial n} \right\} dS^\Gamma = 0 \quad (5.49.b)$$

b) Osnosimetrični konačni element

$$\iiint_V [N]^T \left( \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{\mu r} \frac{\partial [N]}{\partial r} \right) \{\Pi_R^e\} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\mu r} \frac{\partial [N]}{\partial z} \right) \{\Pi_I^e\} + \omega \frac{\kappa}{r} [N] \{\Pi_I^e\} - \{f_R\} \right) dV^e + \iint_{S_q} [\bar{N}]^T \frac{1}{\mu r} \left\{ \frac{\partial \Pi_R^e}{\partial n} \right\} dS^\Gamma = 0 \quad (5.50.a)$$

$$\iiint_V [N]^T \left( \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{\mu r} \frac{\partial [N]}{\partial r} \right) \{\Pi_I^e\} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\mu r} \frac{\partial [N]}{\partial z} \right) \{\Pi_I^e\} - \omega \frac{\kappa}{r} [N] \{\Pi_R^e\} - \{f_I\} \right) dV^e + \iint_{S_q} [\bar{N}]^T \frac{1}{\mu r} \left\{ \frac{\partial \Pi_I^e}{\partial n} \right\} dS^\Gamma = 0 \quad (5.50.b)$$

Primjenom Green-Gaussovog teorema o divergenciji (5.51) prvi članovi u gornjim jednadžbama mogu se transformirati u jednostavniji oblik [80]:

$$\iiint_V u \Delta v dV = - \iiint_V (\nabla u) \cdot (\nabla v) dV + \oint_S u \frac{\partial v}{\partial n} dS \quad (5.51)$$

koji se dalje pojednostavljuje primjenom dolje navedenih jednadžbi (5.52)-(5.53) za infinitezimalni volumen i infinitezimalnu površinu definiranih prema koordinatnom sustavu.

a) Dvodimenzijski konačni element

$$dV^e = z \, dS^e = z \, dx \, dy \quad (5.52.a)$$

$$dS^\Gamma = z \, d\Gamma \quad (5.52.b)$$

b) Osnosimetrični konačni element

$$dV^e = 2\pi r dS^e = 2\pi r dr dz \quad (5.53.a)$$

$$dS^\Gamma = 2r\pi \, d\Gamma \quad (5.53.b)$$

Nakon povratne supstitucije prema jednadžbi (5.40) umjesto funkcija  $\{\Pi_{R,I}^e\}$ ,  $[N]$  i članova  $(1/\mu)$  i  $\kappa$  u jednadžbe osnosimetričnog konačnog elementa uvrštavaju se ponovo funkcije  $\{A_{R,I}^e\}$ ,  $[rN]$  i članovi  $(I/r\mu)$ ,  $(\kappa/r)$  da bi se dobila formulacija konačnog elemenata s realnom  $A_R$  i imaginarnom  $A_I$  komponentom magnetskog vektorskog potencijala. Uobičajenim izborom težinske funkcije rubnih elemenata  $[\bar{N}]$  takvom da je  $[N] = -[\bar{N}]$  i uvođenjem pomoćnih matrica i vektora definiranih kako slijedi dobiva se značajno pregledniji matrični zapis jednadžbi (5.49.a-b) i (5.50.a-b).

a) Pomoćne matrice i vektori za formulaciju dvodimenzijskog konačnog elementa

$$[S_{ij}^e] = \frac{1}{\mu} \iint_S \left( \frac{\partial[N]^T}{\partial x} \frac{\partial[N]}{\partial x} + \frac{\partial[N]^T}{\partial y} \frac{\partial[N]}{\partial y} \right) dx dy \quad (5.54.a)$$

$$[M_{ij}^e] = \iint_S \omega \kappa [N]^T [N] dx dy \quad (5.54.b)$$

$$\{F_i^e\} = \iint_S f_i [N]^T dx dy \quad (5.54.c)$$

$$[T_i^e] = \frac{1}{\mu} \int_{\Gamma_0} [N]^T d\Gamma \quad (5.54.d)$$

b) Pomoćne matrice i vektori za formulaciju osnosimetričnog konačnog elementa

$$[S_{ij}^e] = \frac{2\pi}{\mu} \iint_S \left( \frac{\partial[N]^T}{\partial r} \frac{\partial[N]}{\partial r} + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial[N]^T}{\partial r} [N] + [N]^T \frac{\partial[N]}{\partial r} \right) + \frac{[N]^T [N]}{r^2} + \frac{\partial[N]^T}{\partial z} \frac{\partial[N]}{\partial z} \right) r dr dz \quad (5.55.a)$$

$$[M_{ij}^e] = 2\pi \iint_S \omega \kappa [N]^T [N] r dr dz \quad (5.55.b)$$

$$\{F_i^e\} = 2\pi \iint_S f_i [N]^T r dr dz \quad (5.55.c)$$

$$[T_i^e] = \frac{2\pi}{\mu} \int_{\Gamma_0} [N]^T d\Gamma \quad (5.55.d)$$

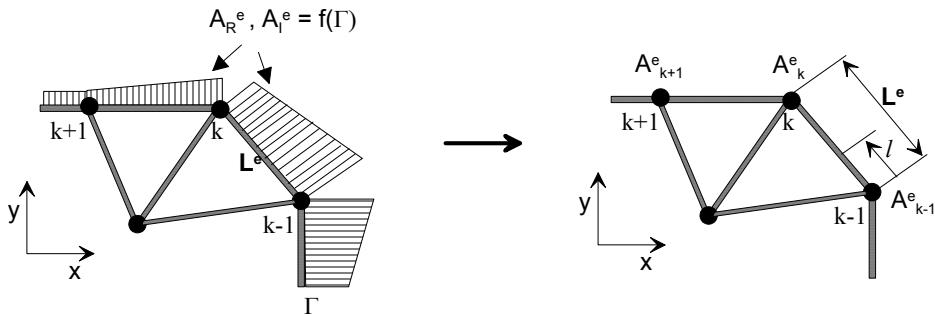
Vrijednosti raspodijeljenog magnetskog vektorskog potencijala po rubnoj površini obratka i induktora računaju se uz pretpostavku linearne promjene veličina  $\{A_R^e\}$ ,  $\{A_I^e\}$ ,  $\{\partial A_R^e / \partial n\}$  i  $\{\partial A_I^e / \partial n\}$  po rubnoj stranici trokutnog elementa duljine  $L^e$  (**slika 5.6**):

$$L^e = \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (y_k - y_{k-1})^2} \quad (5.56)$$

Za osnosimetrične trokutne elemente u jednadžbi (5.56) treba izvesti supstituciju  $r \equiv x, z \equiv y$ . Funkcije oblika nad rubnom stranicom trokutnog elementa duljine  $L^e$  definiraju se u prirodnim koordinatama uz  $l \in \{0, L^e\}$ :

$$N_1^\Gamma = N_{k-1}^{\Gamma e} = 1 - \frac{l}{L^e} \quad (5.57.a)$$

$$N_2^\Gamma = N_k^e = \frac{l}{L^e} \quad (5.57.b)$$



**Slika 5.6.** Zamjena vrijednosti raspodijeljenog magnetskog vektorskog potencijala na graničnoj površini FEM geometrijske domene vrijednostima koncentriranim u čvorovima trokutnog elementa

Nakon uvrštenja funkcija  $N_1^\Gamma$  i  $N_2^\Gamma$  u submatricu  $[T^e]$  i njene numeričke integracije trapeznom formulom (stupanjem točnosti dva,  $O(L^{e2})$ ) slijede njeni specifični oblici za dvodimenzionalni i osnosimetrični konačni element:

- a) Dvodimenzionalni trokutni konačni element

$$[T^e] = \frac{1}{\mu} \int_0^{L^e} [N_1^\Gamma \quad N_2^\Gamma]^T dl = \frac{1}{\mu} \int_0^{L^e} \left[ \left(1 - \frac{l}{L^e}\right) \quad \left(\frac{l}{L^e}\right) \right]^T dl = \frac{L^e}{2\mu} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (5.58)$$

- b) Osnosimetrični trokutni konačni element

$$[T^e] = \frac{1}{\mu} \int_0^{L^e} [N_1^\Gamma \quad N_2^\Gamma]^T r dl = \frac{1}{\mu} \int_0^{L^e} \left[ \left(1 - \frac{l}{L^e}\right) \quad \left(\frac{l}{L^e}\right) \right]^T r dl = \frac{(r_k + r_{k-1})L^e}{4\mu} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (5.59)$$

Uz pomoć jednadžbi (5.55.a-d) i (5.56.a-d) dobiva se **formulacija e-tog konačnog elementa** (dvodimenijskog ili osnosimetričnog) prikladna za sastavljanje globalne matrice:

$$\boxed{\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{ij}^e \\ M_{ij}^e \end{bmatrix} & -\begin{bmatrix} M_{ij}^e \\ S_{ij}^e \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_R^e \\ A_I^e \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -[T_i^e] & 0 \\ 0 & -[T_i^e] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial A_R^{\Gamma e}}{\partial n} \\ \frac{\partial A_I^{\Gamma e}}{\partial n} \end{Bmatrix}^{FEM} = -\begin{Bmatrix} F_{Ri}^e \\ F_{fi}^e \\ F_{Ri}^{\Gamma e} \\ F_{fi}^{\Gamma e} \end{Bmatrix}^{FEM}} \quad (5.60)$$

Članovi jednadžbe (5.60)  $\{A_R^e\}$  i  $\{A_I^e\}$  su nepoznate vrijednosti interpolacijskih funkcija magnetskog vektorskog potencijala u čvorovima u unutrašnjosti geometrijske domene obratka ili induktora. Članovi  $\{\partial A_R^{\Gamma e} / \partial n\}$  i  $\{\partial A_I^{\Gamma e} / \partial n\}$  su nepoznate vrijednosti interpolacijskih funkcija magnetskog vektorskog potencijala u čvorovima na površini obratka ili induktora, koje će se u nastavku izvoda odrediti metodom rubnih elemenata.

**Globalna matrica mreže konačnih elemenata** sadrži sumu elementarnih doprinosa svih čvorova konačnih elemenata. Da bi se moglo provesti sumiranje, matrice i vektore pojedinačnog konačnog elementa treba proširiti na onoliko članova koliko ima čvorova u cijeloj mreži konačnih elemenata. U ovom zapisu su različiti od nule samo oni članovi globalne matrice ili vektora koji se odnose na promatrani  $e$ -ti element. Pri sastavljanju globalne matrice prikladne za primjenu u hibridnoj metodi konačnih i rubnih elemenata treba razdvojiti doprinose čvorova konačnih elemenata iz unutrašnjosti geometrijske domene od doprinosa čvorova na površini domene (obradak, induktor). Globalna matrica za formulaciju konačnog elementa (5.60) može se zapisati u obliku jednadžbe (5.63) uvodenjem pomoćnih submatrica  $[K^e]$  i  $[T^e]$  i vektora  $\{A^e\}$ ,  $\{A^{\Gamma e}\}$ ,  $\{\partial A^{\Gamma e} / \partial n\}$  definiranih jednadžbama (5.61.a-d) i (5.62.a-b):

$$[K]^{\Omega-\Gamma} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{ij}^e \\ M_{ij}^e \end{bmatrix} & -\begin{bmatrix} M_{ij}^e \\ S_{ij}^e \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (5.61.a)$$

$$[K]^{\Gamma} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{ij}^e \end{bmatrix}^{\Gamma} & -\begin{bmatrix} M_{ij}^e \end{bmatrix}^{\Gamma} \\ \begin{bmatrix} M_{ij}^e \end{bmatrix}^{\Gamma} & \begin{bmatrix} S_{ij}^e \end{bmatrix}^{\Gamma} \end{bmatrix} \quad (5.61.b)$$

$$[T^{\Gamma}] = -\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} T_j^e \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} T_j^e \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (5.61.c.)$$

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} F_{R,j}^e \\ F_{I,j}^e \end{Bmatrix} \quad (5.61.d)$$

$$\{F\}^\Gamma = \begin{Bmatrix} F_{R,j}^{\Gamma e} \\ F_{I,j}^{\Gamma e} \end{Bmatrix} \quad (5.61.d)$$

$$\{A^e\} = \begin{Bmatrix} A_R^e \\ A_I^e \end{Bmatrix} \quad (5.62.a)$$

$$\left\{ \frac{\partial A^{\Gamma e}}{\partial n} \right\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial A_R^{\Gamma}}{\partial n} \\ \frac{\partial A_I^{\Gamma}}{\partial n} \end{Bmatrix} \quad (5.62.b)$$

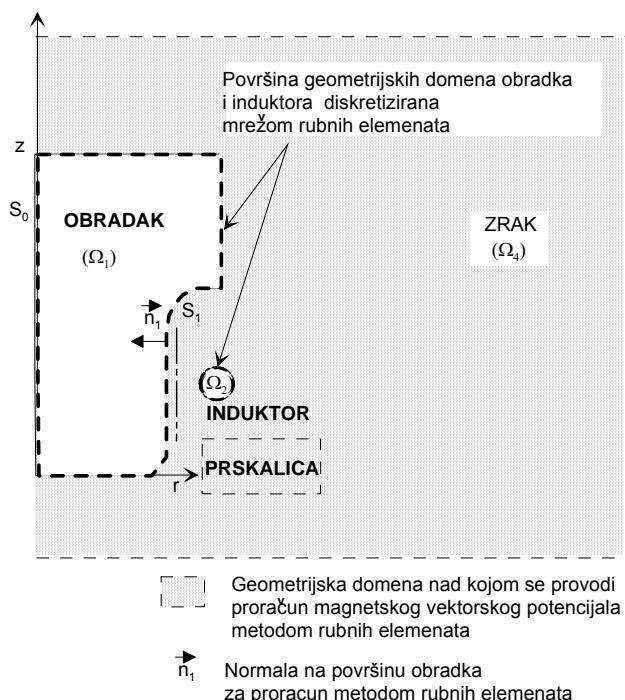
$$\boxed{\begin{bmatrix} [K]^\Omega & 0 \\ [K]^\Gamma & [T]^\Gamma \end{bmatrix} \left\{ \frac{\partial A^{\Gamma e}}{\partial n} \right\}^{FEM} = -\begin{Bmatrix} F^e \\ F^\Gamma \end{Bmatrix}} \quad (5.63)$$

Formirana globalna matrica samo je djelomično popunjena članovima različitim od nule i izrazito je nesimetrična zbog nepoznatih vrijednosti vektora rubnih uvjeta  $\{\partial A / \partial n\}$ . Ove karakteristike čine algebarski sustav jednadžbi (5.63) praktički neprikladnim za numeričko rješavanje direktnim metodama poput Gaussove eliminacije. Zbog njegove nesimetričnosti neefikasna je i primjena iteracijskih metoda kod uobičajenih mreža konačnih elemenata koje sadrže nekoliko stotina do nekoliko tisuća čvorova. Stoga se u vlastitom simulacijskom programu algebarski sustav jednadžbi (5.63) rješava iteracijski zajedno s algebarskim sustavom dobivenim iz formulacije rubnih elemenata razrađene u idućem poglavlju.

Rješenjem algebarskog sustava jednadžbe rubnih elemenata određuje se vrijednost vektora  $\{\partial A / \partial n\}$  na površini obratka i induktora čime se zadaju i rubni uvjeti za algebarski sustav jednadžbe konačnih elemenata (5.63). Uvrštenjem vektora  $\{\partial A / \partial n\}$  u sustav algebarskih jednadžbi (5.63) članovi submatrica  $[K]^\Gamma \cdot \{\partial A / \partial n\}$  i  $[T]^\Gamma \cdot \{\partial A / \partial n\}$  izlučuju se na desnu stranu sustava, a na lijevoj strani ostaje dijagonalno popunjena simetrična submatrica  $[K]^\Omega$  prikladna za brzo, efikasno i točno rješavanje direktnom metodom Gaussove eliminacije.

### 5.3.3 Formulacija jednadžbi elektromagnetskog polja na rubnom elementu

Proračun raspodjele magnetskog vektorskog potencijala po površini obratka i induktora metodom rubnih elemenata provodi se polazeći od jednadžbi elektromagnetskog polja (5.17.a-b) i (5.21.a-b) postavljenih za geometrijsku domenu okolišnog zraka (slika 5.7). Na površini feromagnetskog i električki vodljivog obratka i induktora vrijede rubni uvjeti kontinuiranosti i ravnoteže magnetskog vektorskog potencijala izraženi jednadžbama (5.22) do (5.24) i dodatni uvjeti i povezanosti rješenja jednadžbi elektromagnetskog polja između metoda rubnih i konačnih elemenata izraženi jednadžbama (5.37) do (5.39).



**Slika 5.7** Geometrijska domena okolišnog zraka nad kojom se postavlja formulacija rubnih elemenata magnetskog vektorskog potencijala

U cilju dodatnog pojednostavljenja opravdanog pri uobičajenoj primjeni srednje i visoko frekventnih struja umjesto proračuna raspodijeljenih neovisnih struja po poprečnom presjeku vodiča induktora

uvodi se pretpostavka o djelovanju koncentrirane struje (ili električnog polja  $\underline{E}_0$ ) na površini induktora (tzv. strujom sloju) koji proizvodi magnetsko polje jakosti  $H_0$  izraženo jednadžbom prema [80]:

$$H_0 = \left| \frac{\underline{E}_0}{R_s} \right| = \frac{|\underline{E}_0|}{(1+j)\sqrt{\frac{\omega\mu}{2\kappa}}} \quad (5.64)$$

Uz ovu pretpostavku članovi izvora elektromagnetskog polja  $\{F\}$  i  $\{F\}^\Gamma$  u globalnoj matrici konačnih elemenata (5.63) postaju jednaki nuli:

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} F_{R,j}^e \\ F_{R,j}^e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.65.a)$$

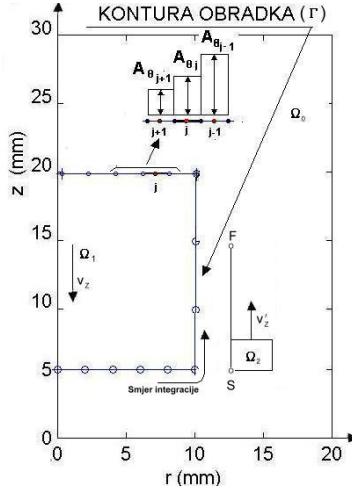
$$\{F\}^\Gamma = \begin{Bmatrix} F_{R,j}^{e,\Gamma} \\ F_{R,j}^{e,\Gamma} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.65.b)$$

Formulacija jednadžbe rubnog elementa postavlja se na temelju rješenja jednadžbi (5.17.a-b) i (5.21.a-b) metodom rubnih elemenata s Greenovom funkcijom slobodnog prostora (3.10.a-b) uz primjenu težinskog integrala (3.14) (poglavlje 3.2). Izvod rješenja jednadžbi elektromagnetskog polja metodom rubnih elemenata sastoji se od tri koraka: diskretizacije površine obratka i induktora linearnim rubnim elementima, formulacije jednadžbe rubnog elementa i aproksimacije singulariteta temeljne Greenove funkcije  $G$  i njene derivacije  $\partial G / \partial n$ .

U izvodu formulacije konačnog elemenata prepostavljeni su linearni trokutni elementi, a pri izvodu formulacije rubnog elementa prepostavljaju se konstantni ravni elementi (**slika 5.8**). Diskretizacija ravnim rubnim elementima provodi se praktički pri diskretizaciji obratka mrežom trokutnih konačnih elemenata, pri čemu stranice konačnih elemenata koje leže na površini obratka predstavljaju rubne elemente.

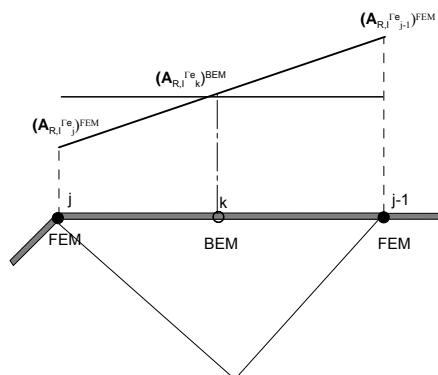
Konstantni rubni element (**slika 5.8**) ima pridružen samo jedan čvor (u težištu elementa) i jednu interpolacijsku funkciju  $[N^\Gamma]$  koja je jednaka jedinici u geometrijskim točkama elementa i nuli na svim ostalim rubnim elementima. Svakom ( $j$ -tom) rubnom elementu pridružene su konstantne

aproksimacijske vrijednosti magnetskog vektorskog potencijala  $(\bar{A}_R^{\Gamma e}, \bar{A}_I^{\Gamma e})_j$  i njegove derivacije

$$\left( \frac{\partial \bar{A}_R^{\Gamma e}}{\partial n}, \frac{\partial \bar{A}_I^{\Gamma e}}{\partial n} \right)_j.$$


**Slika 5.8.** Diskretizacija konture polovice uzdužnog presjeka valjka ravnim i konstantnim rubnim elementima

Konstantni ravni rubni elementi zadovoljavaju formulaciju linearног konačnog elementa i smiju se s njim povezivati jer prepostavljaju konstantnu derivaciju magnetskog vektorskog potencijala u smjeru normalne na rubni element također karakterističnu i za linearne trokutne elemente (**slika 5.9**).



**Slika 5.9.** Shematski prikaz tijeka aproksimacijskih funkcija magnetskog vektorskog potencijala na stranici trokutnog elementa koja je ujedno i rubni element

Između aproksimacijskih funkcija magnetskog vektorskog potencijala na čvorovima rubne stranice trokutnog elementa određenog metodom konačnih elemenata  $(A_R^{\Gamma e})^{FEM}$ ,  $(A_I^{\Gamma e})^{FEM}$  i onog određenog metodom rubnih elemenata  $(\bar{A}_R^{\Gamma e})^{BEM}$ ,  $(\bar{A}_I^{\Gamma e})^{BEM}$  postoji odnos:

$$(\bar{A}_{R,i}^{\Gamma e})^{BEM} = \frac{1}{2} \left[ (A_{R,j-1}^{\Gamma,e})^{FEM} + (A_{R,j}^{\Gamma,e})^{FEM} \right] \quad (5.66.a)$$

$$(\bar{A}_{I,i}^{\Gamma e})^{BEM} = \frac{1}{2} \left[ (A_{I,j-1}^{\Gamma,e})^{FEM} + (A_{I,j}^{\Gamma,e})^{FEM} \right] \quad (5.66.b)$$

$\bar{A}_{R,i}^{\Gamma e}$  je aproksimacija iznosa realne komponente magnetskog vektorskog potencijala u točki  $P_j(x_j, y_j)$  na rubu  $S_1$ , a  $\bar{A}_{I,i}^{\Gamma e}$  je aproksimacija iznosa imaginarne komponente ove veličine (**slika 5.10**). Prostorni kut  $C_{\beta ij}$  pod kojim se iz točke  $P$  vidi točka  $Q$  za zakrivljene dvodimenzijske (i osnosimetrične) površine diskretizirane ravnim rubnim elementima postavljenim pod kutom  $\beta$  računa se jednadžbom (5.67) [46]:

$$C_{\beta ij} = \frac{2\pi - \beta}{2\pi} \quad (5.67)$$

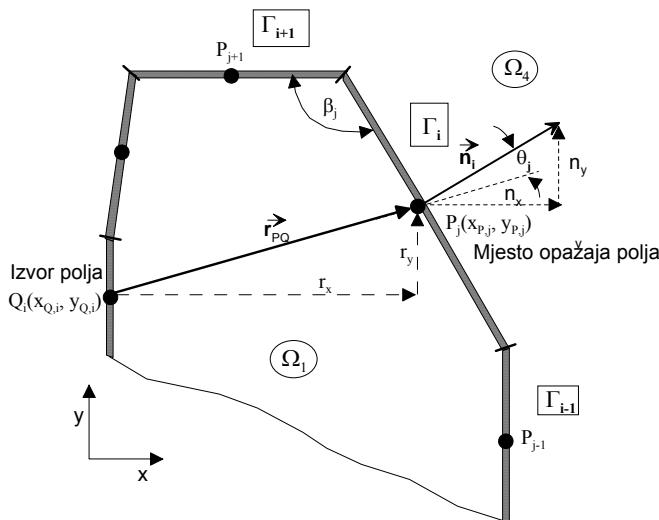
Vektor normale na površinu  $\vec{n}$  i vektor  $\vec{r}_{PQ}$  koji spaja točku polja  $P(x_j, y_j)$  s točkom izvora potencijala  $Q(x_i, y_i)$  nalaze se pod kutom  $\theta$  (**slika 5.10**).

Izvodom težinskog integrala za sustave jednadžbi ((5.17.a-b) i (5.21.a-b) za “j”-tu točku na površini  $S$  dobiva se sustav dvije integralne jednadžbe analogne izrazu (3.14) uz zamjenu opće fizikalne veličine  $\psi$  konkretnom potencijalnom funkcijom: realnom i imaginarnom komponentom magnetskog vektorskog potencijala ( $\bar{\psi} = A_R$ ,  $\bar{\psi} = A_I$ ) [31, 32].

$$C_{\beta ij} A_R^{\Gamma e} + \iint_{S_q + S_0} A_R^{\Gamma e} \frac{\partial G}{\partial n} \cos \theta dS - \iint_{S_q + S_0} G \frac{\partial A_R^{\Gamma e}}{\partial n} \cos \theta dS = \mu_0 \iint_{S_q + S_0} GH_{R0}^{\Gamma} \cos \theta dS \quad (5.68.a)$$

$$C_{\beta ij} A_I^{\Gamma e} + \iint_{S_q + S_0} A_I^{\Gamma e} \frac{\partial G}{\partial n} \cos \theta dS - \iint_{S_q + S_0} G \frac{\partial A_I^{\Gamma e}}{\partial n} \cos \theta dS = \mu_0 \iint_{S_q + S_0} GH_{I0}^{\Gamma} \cos \theta dS \quad (5.68.b)$$

Član  $\cos\theta$  pojavljuje se u gornjim jednadžbama zbog skalarnog množenja fazora magnetskog potencijala i fundamentalnog rješenja  $G$  koje je u ovom slučaju vektorska veličina smjerom i pravcem jednak vektoru  $r_{PQ}$  koji spaja točku polja  $P$  s točkom izvora potencijala  $Q$ . Kod rješavanja jednadžbi (5.68.a-b) u pravokutnom koordinatnom sustavu fazor magnetskog potencijala okomit je na ravninu  $x-y$  pa je član  $\cos\theta$  jednak jedinici. Član na desnoj strani jednadžbi (5.68.a-b) predstavlja djelovanje strujnog sloja s površine vodiča induktora.



**Slika 5.10** Shematski prikaz položaja točke polja  $P$  prema izvoru potencijala u točki  $Q$  na konstantnim ravnim rubnim elementima

Greenova funkcija slobodnog prostora pri rješavanju jednadžbi elektromagnetskog polja (5.68.a-b) prepostavlja djelovanje točkastih izvora magnetskog vektorskog potencijala smještenih u točke  $P_i$  koje se osjeti u točkama polja  $Q_i$ . U direktnoj formulaciji rubnih elemenata točke izvora i točke opažanja polja su jedinstven skup točaka na površini  $S$ . Za dvodimensijske probleme točkasti izvori polja prepostavljuju se raspodijeljeni po pravcu od  $z = -\infty$  do  $z = +\infty$  okomitom na ravninu  $x-y$  (tzv. linjiski izvor polja). Za osnosimetrične probleme točkasti izvori polja prepostavljuju se raspodijeljeni po kružnici koja leži u ravni okomitoj na ravninu  $r-z$ . Greenova funkcija slobodnog prostora i njene derivacije u smjeru normale na rubni element već je navedena jednadžbama (3.10.a-b) prema [35, 46], a sad se navodi u uobičajenom obliku za numeričko rješavanje uz geometrijske veličine prikazane na **slici 5.10**.

a) Dvodimenzijski rubni elementi [46]:

$$G = \frac{1}{2\pi} \ln \left( \frac{1}{\sqrt{(x_p - x_Q)^2 + (y_p - y_Q)^2}} \right) \quad (5.69.a)$$

$$\frac{\partial G}{\partial n} = - \left( n_x \frac{\partial G}{\partial x} + n_y \frac{\partial G}{\partial y} \right) = \frac{\cos \theta}{2\pi \sqrt{(x_p - x_Q)^2 + (y_p - y_Q)^2}} \quad (5.69.b)$$

b) Osnosimetrični rubni elementi [35]:

$$G = \frac{1}{4\pi \sqrt{(r_p - r_Q)^2 + (z_p - z_Q)^2}} \quad (5.70.a)$$

$$\frac{\partial G}{\partial n} = - \left( n_r \left( \frac{\partial G}{\partial r} + \frac{G}{r} \right) + n_z \frac{\partial G}{\partial z} \right) \quad (5.70.b)$$

$$\frac{\partial G}{\partial z} = \frac{-(z_p - z_Q)}{2\pi r_p \sqrt{[(r_p + r_Q)^2 + (z_p - z_Q)^2]}} \cdot \left[ -K(p) + \frac{r_Q^2 + r_p^2 + (z_p - z_Q)^2}{(r_Q - r_p)^2 + (z_p - z_Q)^2} E(p) \right] \quad (5.70.c)$$

$$\frac{\partial G}{\partial r} + \frac{G}{r} = \frac{1}{2\pi r_p \sqrt{[(r_p + r_Q)^2 + (z_p - z_Q)^2]}} \cdot \left[ K(p) + \frac{r_Q^2 - r_p^2 - (z_p - z_Q)^2}{(r_Q - r_p)^2 + (z_p - z_Q)^2} E(p) \right] \quad (5.70.d)$$

$K(p)$	... eliptički integral prve vrste, 1
$E(p)$	... eliptički integral druge vrste, 1
$p$	parametar eliptičkih integrala, 1
$r_p, z_p$	koordinate točke polja, m
$r_Q, z_Q$	koordinate točke izvora potencijala polja, m

Površinski integrali (5.68.a-b) za dvodimenzione i osnosimetrične rubne elemente mogu se pojednostaviti na krivuljne integrale po konturi obratka  $\Gamma_1$  i induktora  $\Gamma_2$  u ravnini  $x$ - $y$  pravokutnog, odnosno  $r$ - $z$  cilindričnog koordinatnog sustava. Diskretizacijom kontura  $\Gamma_1$  i  $\Gamma_2$  s  $M$  ravnih rubnih elemenata intregralni članovi u jednadžbama (5.68.a-b) zamjenjuju se sumom integrala pojedinačnih rubnih elemenata, pri čemu se konstantne aproksimacijske vrijednosti  $\bar{A}_R^\Gamma$ ,  $\bar{A}_I^\Gamma$ ,  $\partial \bar{A}_R^\Gamma / \partial n$ ,  $\partial \bar{A}_I^\Gamma / \partial n$  mogu izlučiti iz integrala:

a) Dvodimenzijalni rubni elementi

$$C_{\beta j} \bar{A}_{R,i}^{\Gamma e} + \sum_M \left( \int_{\Gamma^e} \frac{\partial G}{\partial n} d\Gamma \right) \bar{A}_{R,j}^{\Gamma e} - \sum_M \left( \int_{\Gamma^e} G d\Gamma \right) \left( \frac{\partial \bar{A}_{R,j}^{\Gamma e}}{\partial n} \right) = \mu_0 \sum_M \left( \int_{\Gamma^e} G d\Gamma \right) \{H_{R0}^\Gamma\} \quad (5.71.a)$$

$$C_{\beta j} \bar{A}_{I,i}^{\Gamma e} + \sum_M \left( \int_{\Gamma^e} \frac{\partial G}{\partial n} d\Gamma \right) \bar{A}_{I,j}^{\Gamma e} - \sum_M \left( \int_{\Gamma^e} G d\Gamma \right) \left( \frac{\partial \bar{A}_{I,j}^{\Gamma e}}{\partial n} \right) = \mu_0 \sum_M \left( \int_{\Gamma^e} G d\Gamma \right) \{H_{I0}^\Gamma\} \quad (5.71.b)$$

c) Osnosimetrični rubni elementi

$$C_{\beta j} \bar{A}_{R,i}^{\Gamma e} + \sum_M \left( \iint_{\Gamma^e \phi} \frac{\partial G}{\partial n} r_p \cos \phi d\phi d\Gamma \right) \bar{A}_{R,j}^{\Gamma e} - \sum_M \left( \iint_{\Gamma^e \phi} Gr_p \cos \phi d\phi d\Gamma \right) \left( \frac{\partial \bar{A}_{R,j}^{\Gamma e}}{\partial n} \right) = \mu_0 \sum_M \left( \iint_{\Gamma^e \phi} Gr_p \cos \phi d\phi d\Gamma \right) \{H_{R0}^\Gamma\} \quad (5.72.a)$$

$$C_{\beta j} \bar{A}_{I,i}^{\Gamma e} + \sum_M \left( \iint_{\Gamma^e \phi} \frac{\partial G}{\partial n} r_p \cos \phi d\phi d\Gamma \right) \bar{A}_{I,j}^{\Gamma e} - \sum_M \left( \iint_{\Gamma^e \phi} Gr_p \cos \phi d\phi d\Gamma \right) \left( \frac{\partial \bar{A}_{I,j}^{\Gamma e}}{\partial n} \right) = \mu_0 \sum_M \left( \iint_{\Gamma^e \phi} Gr_p \cos \phi d\phi d\Gamma \right) \{H_{I0}^\Gamma\} \quad (5.72.b)$$

U jednadžbama (5.71.a-b) i (5.72.a-b) pojavljuju se dva karakteristična tipa integrala označeni kao pomoćne funkcije  $A_{ij}^*$  i  $Q_{ij}^*$  koji se uobičajeno rješavaju numeričkom integracijom. U vlastito razvijenom simulacijskom programu korištena je Gaussova kvadratura s pet pomoćnih čvorova.

a) Dvodimenzijalni rubni elementi

$$A_{ij}^* = \int_{\Gamma^e} G d\Gamma \quad (5.73.a)$$

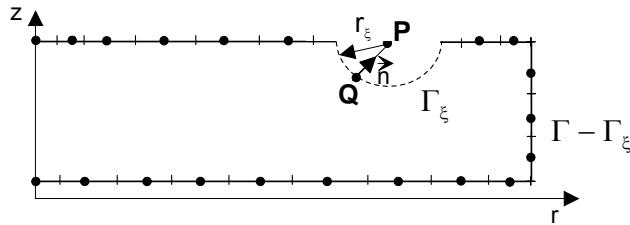
$$Q_{ij}^* = \int_{\Gamma^e} \frac{\partial G}{\partial n} d\Gamma \quad (5.73.b)$$

b) Osnosimetrični rubni elementi

$$A_{ij}^* = \int_{\Gamma^e} \left( \int_0^{2\pi} G \cos \phi d\phi \right) r_p d\Gamma \quad (5.74.a)$$

$$Q_{ij}^* = \int_{\Gamma^e} \left( \int_0^{2\pi} \frac{\partial G}{\partial n} \cos \phi d\phi \right) r_p d\Gamma \quad (5.74.b)$$

Pri rješavanju jednadžbi (5.71.a-b) ili (5.72.a-b) pojavljuju se singularne vrijednosti svaki put kad dolazi do podudaranja točke polja P s točkom izvora Q. Ove singularnosti bliskih točaka Q i P izbjegavaju se integracijom rubnog elementa po polukružnoj konturi  $\Gamma_\xi$  u lokalnom polarnom koordinatnom sustavu postavljenom u točku P (**slika 5.11**).



**Slika 5.11** Kontura integracije oko singularne točke na krivulji  $\Gamma$  ruba geometrijske domene

Na polukružnoj konturi  $\Gamma_\xi$  oko točke P granične vrijednosti integrala  $A_{ij}^*$  i  $Q_{ij}^*$  integriranih u smjeru gibanja kazaljke sata jednake su sljedećim vrijednostima [34, 46]:

a) Dvodimenzijalski rubni elementi

$$A_{ii}^* = l \lim_{\substack{P \rightarrow Q \\ r_\xi \rightarrow 0}} \int_0^\pi \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{r_\xi}\right) r_\xi d\phi \rightarrow r_\xi \left[ \frac{1}{\pi} \ln\left(\frac{1}{r_\xi}\right) + 1 \right] \quad (5.75.a)$$

$$Q_{ii}^* = l \lim_{\substack{P \rightarrow Q \\ r_\xi \rightarrow 0}} \int_0^\pi \frac{\cos\phi}{2\pi r_\xi} r_\xi d\phi \rightarrow 0 \quad (5.75.b)$$

b) Osnosimetrični rubni elementi

$$A_{ii}^* = l \lim_{\substack{P \rightarrow Q \\ r_\xi \rightarrow 0}} \int_{\Gamma_\xi} Gr_P d\Gamma_\xi = \int_0^\pi r_p \left( l \lim_{\substack{P \rightarrow Q \\ r_\xi \rightarrow 0}} G \right) r_\xi d\phi \rightarrow r_p r_\xi \left( \frac{1}{2} \ln\left(\frac{8r_p}{r_\xi}\right) - 1 \right) \quad (5.76.a)$$

$$Q_{ii}^* = l \lim_{\substack{P \rightarrow Q \\ r_\xi \rightarrow 0}} \int_{\Gamma_\xi} \frac{\partial G}{\partial n} r_p d\Gamma_\xi = \int_0^\pi r_p \left( l \lim_{\substack{P \rightarrow Q \\ r_\xi \rightarrow 0}} \frac{\partial G}{\partial n} \right) r_\xi d\phi \rightarrow -\frac{1}{2} r_p \quad (5.76.b)$$

Uvrštenjem izraza (5.73.a-b) u (5.71.a-b) i (5.74.a-b) u (5.72.a.b) dobivaju se izrazi zajednički dvodimenzijском и osnosimetričном rubnom elementu prikladni za matrični zapis i postavljanje globalne matrice rubnih elemenata:

$$\boxed{C_{\beta j} A_{R,i}^{\Gamma e} + \sum_M Q_{ij}^* \left\{ \overline{A}_{R,j}^{\Gamma e} \right\}^{BEM} - \sum_M A_{ij}^* \left\{ \frac{\partial \overline{A}_{R,j}^{\Gamma e}}{\partial n} \right\}^{BEM} = \sum_M \mu_0 A_{ij}^* \left\{ H_{R0}^\Gamma \right\}} \quad (5.77.a)$$

$$\boxed{C_{\beta j} A_{I,i}^{\Gamma e} + \sum_M Q_{ij}^* \left\{ \overline{A}_{I,j}^{\Gamma e} \right\}^{BEM} - \sum_M A_{ij}^* \left\{ \frac{\partial \overline{A}_{I,j}^{\Gamma e}}{\partial n} \right\}^{BEM} = \sum_M \mu_0 A_{ij}^* \left\{ H_{I0}^\Gamma \right\}} \quad (5.77.b)$$

Uz pomoć jednadžbi kontinuiteta FEM - BEM rješenja (5.37), (5.38) i (5.66) i uvođenjem pomoćne matrice  $[C_{ij}]$  sastavljene od vrijednosti nula i  $\frac{1}{2}$ , jednadžbe rubnog elementa (5.77.a-b) mogu se predstaviti kao matrične jednadžbe konačnog elementa s tročlanim vektorima  $\{A_R^{\Gamma e}\}$ ,  $\{A_I^{\Gamma e}\}$ ,  $\{\partial A_R^{\Gamma e} / \partial n\}$ ,  $\{\partial A_I^{\Gamma e} / \partial n\}$  takvim da je uvijek jednak nuli onaj član vektora koji odgovara čvoru trokutnog elementa iz unutrašnjosti geometrijske domene.

$$C_{\beta j} A_{R,i}^{\Gamma e} + \sum_{j=1}^M \left( Q_{ij}^* \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{R,j-1}^{\Gamma e} \\ A_{R,j}^{\Gamma e} \\ 0 \end{bmatrix}^{BEM \rightarrow FEM} \right) + \sum_{j=1}^M A_{ij}^* \mu_r \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial A_{R,j-1}^{\Gamma e}}{\partial n} \\ \frac{\partial A_{R,j}^{\Gamma e}}{\partial n} \\ 0 \end{bmatrix}^{BEM \rightarrow FEM} = \sum_M \mu_0 A_{ij}^* \begin{bmatrix} H_{R0,1}^\Gamma \\ H_{R0,2}^\Gamma \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.78.a)$$

$$C_{\beta j} A_{I,i}^{\Gamma e} + \sum_{j=1}^M \left( Q_{ij}^* \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ A_{R,j}^{\Gamma e} \\ A_{R,j+1}^{\Gamma e} \end{bmatrix}^{bEM \rightarrow FEM} \right) + \sum_{j=1}^M A_{ij}^* \mu_r \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\partial A_{R,j}^{\Gamma e}}{\partial n} \\ \frac{\partial A_{R,j+1}^{\Gamma e}}{\partial n} \end{bmatrix}^{BEM \rightarrow FEM} = \sum_M \mu_0 A_{ij}^* \begin{bmatrix} 0 \\ H_{R0,2}^\Gamma \\ H_{R0,3}^\Gamma \end{bmatrix} \quad (5.78.b)$$

$$C_{\beta j} A_{R,i}^{\Gamma e} + \sum_{j=1}^M \left( Q_{ij}^* \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{R,j-1}^{\Gamma e} \\ 0 \\ A_{R,j+1}^{\Gamma e} \end{bmatrix}^{BEM \rightarrow FEM} \right) + \sum_{j=1}^M A_{ij}^* \mu_r \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial A_{R,j-1}^{\Gamma e}}{\partial n} \\ 0 \\ \frac{\partial A_{R,j+1}^{\Gamma e}}{\partial n} \end{bmatrix}^{BEM \rightarrow FEM} = \sum_M \mu_0 A_{ij}^* \begin{bmatrix} H_{R0,1}^\Gamma \\ 0 \\ H_{R0,3}^\Gamma \end{bmatrix} \quad (5.78.c)$$

Za dobivanje jednadžbi magnetskog vektorskog potencijala rubnog elemenata (5.78.a-c) prikladnih za rješavanje zajedno s jednadžbama konačnog elementa uvode se pomoći članovi matrica  $[G_{ij}]$  i  $[H_{ij}]$ .

Njihova primjena omogućuje jedinstveni matrični oblik formulacije magnetskog vektorskog potencijala na osnosimetričnom i dvodimenzijskom rubnom elementu:

$$[G_{ij}^e] = \mu_r A_{ij}^* [C_{ij}] \quad i = 1, 2, \dots M, j = 1, 2, \dots M \quad (5.79.a)$$

$$[H_{0ij}^\Gamma] = \mu_0 A_{ij}^* [C_{ij}] \quad i = 1, 2, \dots M, j = 1, 2, \dots M \quad (5.79.b)$$

$$[H_{ij}^e] = \begin{cases} Q_{ij}^* [C_{ij}] & i \neq j \\ C_{\beta ij} + Q_{ij}^* [C_{ij}] & i = j \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots M, j = 1, 2, \dots M \quad (5.79.c)$$

$$\begin{bmatrix} [H_{ij}^e] & 0 & [G_{ij}^e] & 0 \\ 0 & [H_{ij}^e] & 0 & [G_{ij}^e] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \left\{ A_R^{\Gamma e} \right\} \\ \left\{ A_I^{\Gamma e} \right\} \\ \left\{ \frac{\partial A_R^{\Gamma e}}{\partial n} \right\} \\ \left\{ \frac{\partial A_I^{\Gamma e}}{\partial n} \right\} \end{Bmatrix} \stackrel{BEM \rightarrow FEM}{=} \begin{bmatrix} [H_{0ij}^\Gamma] \\ [H_{0ij}^\Gamma] \\ [H_{R,0}^\Gamma] \\ [H_{I,0}^\Gamma] \end{bmatrix} \quad i, j = 1, 2, \dots M \quad (5.80)$$

**Globalna matrica rubnih elemenata** potpuno je popunjena članovima koji sadrže sume doprinosa svih rubnih elemenata s onoliko redaka i stupaca koliko ima rubnih elemenata na površini obratka i induktora. Zapis globalne matrice rubnih elemenata slijedi nakon uvođenja globalnih matrica  $[G^\Gamma]$ ,  $[H^\Gamma]$  i vektora  $\{A^{\Gamma e}\}$ ,  $\{\partial A^{\Gamma e} / \partial n\}$  u jednadžbu (5.80).

$$[G^\Gamma] = \begin{bmatrix} [G_{ij}] & 0 \\ 0 & [G_{ij}] \end{bmatrix} \quad (5.81.a)$$

$$[H^\Gamma] = \begin{bmatrix} [H_{ij}] & 0 \\ 0 & [H_{ij}] \end{bmatrix} \quad (5.81.b)$$

$$\{A^{\Gamma e}\} = \begin{Bmatrix} A_R^{\Gamma e} \\ A_I^{\Gamma e} \end{Bmatrix} \quad \left\{ \frac{\partial A^{\Gamma e}}{\partial n} \right\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial A_R^{\Gamma e}}{\partial n} \\ \frac{\partial A_I^{\Gamma e}}{\partial n} \end{Bmatrix} \quad \{H_{0ij}^\Gamma\} = \begin{Bmatrix} H_{0R}^\Gamma \\ H_{0I}^\Gamma \end{Bmatrix} \quad (5.81.c-e)$$

$$\boxed{\left[ H^{\Gamma} \right] \left\{ A^{\Gamma_e} \right\}^{BEM \rightarrow FEM} + \left[ G^{\Gamma} \right] \left\{ \frac{\partial A^{\Gamma_e}}{\partial n} \right\}^{BEM \rightarrow FEM} = \left\{ H_{0ij}^{\Gamma} \right\}} \quad i,j = 1,2,\dots M \quad (5.82)$$

Nakon stvaranja globalne matrice (5.82) u nju se uvode dodatni rubni uvjeti poput uvjeta jednakosti nuli realnih i imaginarnih komponenti magnetskog vektorskog potencijala na osi simetrije  $A_{R,i}^{\Gamma_e} = 0$ ,  $A_{I,i}^{\Gamma_e} = 0$ . Zatim slijedi zajedničko rješavanje globalnog sustava jednadžbi rubnih i konačnih elemenata.

### 5.3.4 Rješenje globalnog sustava jednadžbi konačnog i rubnog elementa

U prethodnim poglavljima 5.3.2 i 5.3.3. izvedene su lokalne i globalne matrične jednadžbe magnetskog vektorskog potencijala na mreži konačnih i rubnih elemenata, a sljedeći korak je izvod njihovog zajedničkog rješenja. Uz uvedenu pretpostavku o zamjeni prostorno raspodijeljene struje induktora strujnim slojem na njegovoj površini članovi  $\{F^e\}$  na desnoj strani globalnog sustava jednadžbi konačnih elemenata (5.63) postaju jednaki nuli. Nakon uvrštavanja globalne jednadžbe rubnih elemenata (5.82) u globalnu jednadžbu konačnih elemenata (5.63) dobiva se algebarski sustav jednadžbi (5.83). Rješenja sustava (5.83) su realna i imaginarna komponenta aproksimacije magnetskog vektorskog potencijala u svim čvorovima mreže konačnih i rubnih elemenata  $\{A^e\} = \{A_R^e\} + j\{A_I^e\}$ ,  $\{A^{\Gamma_e}\} = \{A_R^{\Gamma_e}\} + j\{A_I^{\Gamma_e}\}$ .

$$\begin{bmatrix} K^{\Omega} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K^{\Gamma} \\ T^{\Gamma} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \left[ G^{\Gamma} \right]^{-1} \left\{ H_{0ij}^{\Gamma} \right\} - \left[ G^{\Gamma} \right]^{-1} \left[ H^{\Gamma} \right] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \left\{ A^e \right\} \\ \left\{ A^{\Gamma_e} \right\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.83)$$

Dio globalne matrice FEM/BEM algebarskog sustava (5.83) u kojem se nalaze članovi rubnih elemenata potpuno je popunjeno, a preostali dio s članovima konačnih elemenata popunjeno je samo dijagonalno. Globalna FEM/BEM matrica (5.83) ima narušenu dijagonalnu simetriju i teško je rješiva direktnim metodama rješavanja. Stoga je u vlastitom simulacijskom programu primijenjeno iteracijsko rješavanje algebarskog sustava (5.83) prema [41, 107].

Sustav globalnih jednadžbi konačnih i rubnih elemenata zapisuje se u obliku jednadžbe (5.84) i (5.85) pa se nakon uvođenja rubnih uvjeta rješava se u četiri koraka.

$$\boxed{[K]^{\Omega} \{A^e\} + [T^{\Gamma}] \left\{ \frac{\partial A^{\Gamma e}}{\partial n} \right\} = \{0\}} \quad (5.84)$$

$$\boxed{[H^{\Gamma}] \{A^{\Gamma e}\} + [G^{\Gamma}] \left\{ \frac{\partial A^{\Gamma e}}{\partial n} \right\} = \{H_{0ij}^{\Gamma}\}} \quad (5.85)$$

**I. korak.** Iz jednadžbe (5.84) izračuna se pomoćna matrica  $[X]$  čiji je broj redaka jednak broju čvorova u mreži  $N$ , a broj stupaca jednak je broju rubnih elemenata  $M$ . Uobičajeno je broj rubnih elemenata značajno manji od broja svih čvorova u modelu (tj.  $M < N$ ).

$$[K]^{\Omega}[X] = [T^{\Gamma}] \quad (5.86)$$

**II. korak.** Uz pomoć matrice  $[X]$  i matrica iz jednadžbe (5.84) računa se pomoćna matrica  $[G^{\Gamma}]^*$ :

$$[G^{\Gamma}]^* = [G^{\Gamma}] - [H^{\Gamma}]X \quad (5.87)$$

**III. korak.** Uz pomoć matrice  $[G^{\Gamma}]^*$  rješava se dolje navedena jednadžba (5.88) i iz nje se određuje vektor  $\{\partial A^{\Gamma e} / \partial n\}$ :

$$[G^{\Gamma}]^* \left\{ \frac{\partial A^{\Gamma e}}{\partial n} \right\} = \{H_{0ij}^{\Gamma}\} \quad (5.88)$$

**IV. korak.** Povratnom supstitucijom vektora  $\{\partial A^{\Gamma e} / \partial n\}$  u jednadžbu rubnih elemenata (5.85) određuje se vektor  $\{A^{\Gamma e}\}$ , a zatim se oba vektora uvrštavaju u jednadžbu konačnih elemenata (5.85) i iz nje se određuje vektor magnetskog vektorskog potencijala  $\{A^e\}$  u svim čvorovima mreže konačnih elemenata.

Ovakvim načinom rješavanja ostaje očuvana simetričnost globalnih matrica, pa se mogu uspješno koristiti direktnе metode rješavanja algebarskih sustava jednadžbi u koracima I. do III. Čitav postupak rješavanja sustava jednadžbi (5.84) – (5.85) treba uobičajeno ponoviti dva do pet puta uz usklađivanje nelinearno promjenljivih električnih i magnetskih svojstava materijala iz prethodnog (“I”) i aktualnog

(“II”) iteracijskog koraka do postizanja zahtijevane konvergencije rješenja za vektore  $\{A^e\}$  i  $\{\partial A^{\Gamma e} / \partial n\}$ :

$$\varepsilon_A = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N \left( \frac{\{A^e\}_H - \{A^e\}_I}{\{A^e\}_I} \right)^2}{N}} ; \quad \varepsilon_A \leq \varepsilon \quad (5.89)$$

$$\varepsilon_{dA/dn} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^M \left( \frac{\left\{ \frac{\partial A^{\Gamma e}}{\partial n} \right\}_H - \left\{ \frac{\partial A^{\Gamma e}}{\partial n} \right\}_I}{\left\{ \frac{\partial A^{\Gamma e}}{\partial n} \right\}_I} \right)^2}{M}} ; \quad \varepsilon_{dA/dn} \leq \varepsilon \quad (5.90)$$

$\varepsilon_A, \varepsilon_{dA/dn}$	relativno odstupanje računskih vrijednosti vektora $\{A^e\}$ i $\{\partial A^{\Gamma e} / \partial n\}$ iz dva iteracijska koraka
$N$	broj čvorova konačnih elemenata
$M$	broj čvorova rubnih elemenata

Iz izračunatih vrijednosti vektora  $\{A\}$  i  $\{A^\Gamma\}_{k+1}^{FEM}$  računa se ukupni iznos magnetske indukcije  $B_0$  u središtu pojedinačnog konačnog ili rubnog elementa za koje se potom određuje iznos magnetske permeabilnosti  $\mu_{k+1} = f(B_0, \vartheta)$  i iznos volumne snage Jouelovih toplinskih izvora  $P_{JQ}^e$ . Volumna snaga gubitaka magnetiziranja  $P_{HB}^e$  određuje se iz "histerezne petlje" pri računanju magnetskih svojstava. Suma  $P_{JQ}^e + P_{HB}^e$  na  $e$ -tom konačnom elementu predstavlja volumnu snagu toplinskih izvora i izravno povezuje jednadžbe elektromagnetskog i temperaturnog polja u međusobno ovisan sustav jednadžbi koji se treba rješavati iteracijski u svakom vremenskom koraku simulacije.

## 6.0 MATEMATIČKO MODELIRANJE PRIJENOSA TOPLINE U SUSTAVU INDUKTOR – OBRADAK - PRSKALICA

### 6.1 Definicija jednadžbe provođenja topline u obratku

Postavljanje parcijalne diferencijalne jednadžbe provođenja topline na materijalnom volumenu induksijski kaljenog obratka zasniva se na zakonu o održanju energije u izobarnom procesu. "Sveukupni pretičak topline  $\delta Q_1$  koja se unosi u elementarni volumen  $dV$  provođenjem kroz vanjske površine i sveukupne topline  $\delta Q_V$ , razvijene (ili potrošene) radom unutrašnjih toplinskih izvora (ponora) u vremenskom trajanju  $dt$ , jednak je promjeni entalpije materijala  $dH$  sadržanog u elementarnom volumenu  $dV$ " [90].

$$\delta Q_1 + \delta Q_V = dH \quad (6.1)$$

Sveukupni pretičak topline  $\delta Q_1$  unesen u elementarni volumen  $dV$  određuje se uz pomoć Fourierovog zakona provođenja topline jednadžbom (6.2):

$$\boxed{\delta Q_1 = \nabla \circ (\lambda \nabla \vartheta) dV dt} \quad (6.2)$$

Sveukupna toplina  $\delta Q_V$  pojavljuje se u elementarnom volumenu  $dV$  zbog postojanja unutrašnjih volumenskih Jouleovih toplinskih izvora  $P_{JQ}$  i gubitaka magnetiziranja  $P_{HB}$ :

$$\boxed{\delta Q_V = P_{JQ} dV dt + P_{HB} dV dt} \quad (6.3)$$

Promjena entalpije  $dH$  u elementarnom volumenu materijala  $dV$  dobiva se množenjem specifične entalpije materijala  $h$  s diferencijalom mase  $dm$ :

$$dH = h dm = h \rho dV \quad (6.4)$$

Diferencijalna promjena specifične entalpije željeznog materijala  $dh$  jednaka je promjeni njegove specifične unutrašnje energije ( $du=dh$ ), a diferencijal  $du$  računa se prema jednadžbi  $dh = du = cd\vartheta$ ,

pa je vremenska promjena diferencijala entalpije  $dH$  promatranog elementa  $dV$  (homogenog čvrstog materijala bez faznih pretvorbi) jednaka:

$$\boxed{\frac{dH}{dt} = \frac{dh}{dt} \rho dV = \rho c \frac{\partial \vartheta}{\partial t} dt dV} \quad (6.5)$$

Diferencijalna promjena specifične entalpije  $dh$  u elementarnom volumenu  $dV$  ne ovisi o načinu ugrijavanja ili ohlađivanja već samo o početnom i konačnom toplinskom stanju materijala. Za zatvoreni sustav sastavljen od homogene čvrste tvari promjena specifične entalpije od referentnog toplinskog stanja "0" do toplinskog stanja "1" određuje se dolje navedenim jednadžbama (6.6.a-b) uz poznatu funkciju promjene specifičnog toplinskog kapaciteta  $c = f(\vartheta)$  ili poznate vrijednosti srednjeg specifičnog toplinskog kapaciteta na intervalu temperatura  $(\vartheta_0, \vartheta_1)$  [90].

$$dh = du = c(\vartheta)d\vartheta \quad (6.6.a)$$

$$h_1 - h_0 = \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_1} c(\vartheta)d\vartheta = [c]_{\vartheta_0}^{\vartheta_1} (\vartheta_1 - \vartheta_0) \quad (6.6.b)$$

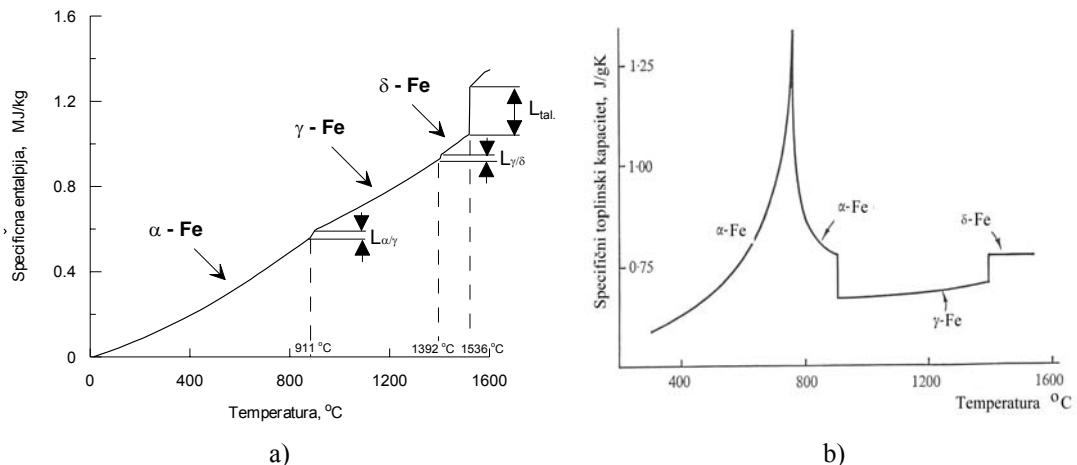
Kod heterogenog i višefaznog materijala specifična entalpija ovisi o temperaturi, kemijskom sastavu i prisutnim mikrostrukturnim fazama. Kao referentno stanje prepostavlja se stanje sa  $\vartheta_0 = 0^\circ\text{C}$  i specifičnom entalpijom svih faza koja je jednaka nuli, tj.  $h_{i0}=0$ . Promjene specifične entalpije višefaznog materijala promatraju se kao promjene entalpija mješavine faza (koje se prepostavljaju homogenim tvarima) poznatih masenih  $w_i$  ili volumnih  $y_i$  udjela i specifičnih entalpija  $h_i$  [22, 42, 92]. Pri tome se zbog male razlike gustoća faza  $\rho_i$  prema srednjoj gustoći  $\rho$  materijala mogu izjednačiti maseni i volumni udjeli faza ( $w_i \approx y_i$ )

$$[h]_{\vartheta_0}^{\vartheta_1} = h_1 - h_0 = \sum_i h_{1,i} w_{1,i} - \sum_i h_{0,i} w_{0,i} \quad (6.7.a)$$

$$w_i = \frac{\rho_i}{\rho} y_i \quad i = 1, 2, 3, 4, 5 \quad (6.7.b)$$

Na **slici 6.1.a-b** prikazana je specifična entalpija i specifični toplinski kapacitet tehnički čistog željeza ovisni o temperaturi. Iz prikaza su uočljive skokovite promjene specifične entalpije na temperaturama alotropskih modifikacija željeza uzrokovane vezivanjem (pri ugrijavanju) ili oslobađanjem (pri ohlađivanju) latentne specifične topline  $L_{ij}$  faznih pretvorbi  $i$ -te faze u  $j$ -tu fazu. Krivulja promjene

specifičnog toplinskog kapaciteta tehnički čistog željeza (kao nekompresibilne tvari) izračunata je derivacijom krivulje specifične entalpije  $h = f(\vartheta)$ . Na dobivenoj krivulji promjene (pravog) specifičnog toplinskog kapaciteta tehnički čistog željeza s temperaturom (**slika 6.1.b**) uočljiv je nagli porast njegove vrijednosti na Curievoj temperaturi prijelaza rešetke  $\alpha$ -željeza iz feromagnetskog u paramagnetsko stanje, a potom skokovita promjena na temperaturi  $\alpha/\gamma$  mikrostrukturne pretvorbe ( $A_1 = 911^\circ\text{C}$ ).



**Slika 6.1. a)** Promjena specifične entalpije tehnički čistog željeza ovisna o temperaturi [82].

**b)** Promjena specifičnog toplinskog kapaciteta tehnički čistog željeza s promjenom temperature izračunata iz krivulje na slici 6.1.a jednadžbom  $c(\vartheta) = dh(\vartheta)/d\vartheta$  [91].

Kod heterogenog višefaznog željeznog materijala pojavljuje se sličan tijek promjene specifične entlapije i (ukupnog) specifičnog toplinskog kapaciteta kao na **slici 6.1** uz pojavu temperaturnih intervala faznih pretvorbi  $\alpha/\gamma$  i  $\gamma/\alpha$  u kojima istovremeno u materijalu postoji dvije ili više faze. Stoga se prema [92] promjena specifične entalpije višefaznog materijala u temperaturnom intervalu ( $\vartheta_1, \vartheta_2$ ) izloženog mikrostrukturnim pretvorbama izražava proširenim jednadžbama (6.6.b) i (6.7.a):

$$h_2 - h_1 = [h]_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} + \sum_{j=1}^5 w_j L_{ij} = \left[ \sum_{i=0}^5 w_i [c_i]_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \right] (\vartheta_1 - \vartheta_2) + \sum_{j=1}^5 w_j L_{ij} \quad (i \neq j, j > i) \quad (6.8.a)$$

$$[c_i]_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} = \frac{[c_i]_0^{\vartheta_2} \vartheta_2 - [c_i]_0^{\vartheta_1} \vartheta_1}{(\vartheta_2 - \vartheta_1)} \quad i,j = 0,1,2,3,4,5 \quad (6.8.b)$$

Kod induktijskog kaljenja u mikrostrukturi čelika moguća je pojava slijedećih pet mikrostrukturnih faza označenih u jednadžbama (6.7) i (6.8) kako slijedi: polazna mikrostruktura ( $i=0$ ), austenit ( $i=1$ ), martenzit ( $i=2$ ), bainit ( $i=3$ ), perlit ( $i=4$ ) i ferit ( $i=5$ ). U istim jednadžbama  $[c_i]_{\theta_1}^{\theta_2}$  predstavlja srednji specifični toplinski kapacitet  $i$ -te mikrostrukturne faze nad zadanim intervalom temperatura ( $\theta_1, \theta_2$ ). Posljednji član na desnoj strani jednadžbe (6.8.a) predstavlja latentnu specifičnu toplinu  $L_{ij}$  vezanu ili oslobođenu tijekom mikrostrukturnih pretvorbi i feromagnetskim promjenama čelika [93]. Volumna latentna toplina  $\Phi_L$  koja se veže ili oslobodi u diferencijalu vremena  $dt$  određena je slijedećim izrazom:

$$\boxed{\Phi_L = \sum_{j=1}^5 \rho_j \frac{dy_j}{dt} L_{ij}} \quad (i \neq j, j > i), i,j = 0,1,2,3,4,5 \quad (6.9)$$

Član  $\Phi_L$  uobičajeno ulazi u jednadžbu provođenja topline kao samostalni član različit od nule u temperaturnom intervalu mikrostrukturnih pretvorbi i na temperaturama bliskim Curieovoj temperaturi. Ako se latentna toplina veže u materijalu član  $\Phi_L$  je pozitivan ( $\Phi_L > 0$ ), a ako se oslobađa tada je član  $\Phi_L$  negativan ( $\Phi_L < 0$ ).

Vodljivost topline višefaznog materijala također je ovisna o kemijskom sastavu, temperaturi te vrsti i udjelima mikrostrukturnih faza:

$$\lambda = \sum_i w_i \lambda_i \quad i = 0,1,2,3,4,5 \quad (6.10)$$

**Diferencijalna jednadžba provođenja topline.** Uvrštenjem jednadžbi (6.2), (6.3) i (6.5) u polazni stavak o očuvanju energije (6.1) u elementarnom volumenu i dijeljenjem dobivene jednadžbe s članovima  $dV$  i  $dt$  dobiva se diferencijalna jednadžba provođenja topline:

$$\boxed{\nabla \cdot (\lambda \nabla \vartheta) + (P_{JQ} + P_{HB} - \Phi_L) = \rho c \frac{\partial \vartheta}{\partial t}} \quad (6.11)$$

Jednadžbe (6.11) je polazna jednadžba za matematičko modeliranje promjena temperaturnog polja u induktijski kaljenom obratku. Iz nje je preko članova  $P_{JQ}$  i  $P_{HB}$  vidljiva izravna povezanost s

jednadžbama elektromagnetskog polja, a preko entalpijskih članova  $c \frac{\partial \vartheta}{\partial t}$  i  $\Phi_L$  vidljiva je posredna povezanost s kinetikom mikrostrukturnih faznih pretvorbi u materijalu. Posredna povezanost toplinskih i mikrostrukturnih procesa u željeznom materijalu vidi se u iteracijskom rješavanju jednadžbe provođenja topline i kinetičkih jednadžbi faznih pretvorbi. Pri tome se uspostavljaju tri vrste uzajamnog djelovanja ovih procesa [92]:

- b) Mikrostrukturne fazne pretvorbe ovise o prethodnom temperaturnom ciklusu kojem je materijal bio izložen.
- c) Toplinska svojstva materijala ovise o kemijskom sastavu, temperaturi, vrsti i udjelima mikrostrukturnih faza.
- d) Mikrostrukturne fazne pretvorbe "vežu" ili "oslobadaju" određenu latentnu toplinu  $L$  čime se dodatno mijenja temperaturno polje u materijalu.

**Pojednostavljeni oblici jednadžbe provođenja topline** (6.11) na elementarnom volumenu  $dV$ . Slično pojednostavljenju trodimenzijskog problema širenja elektromagnetskog polja na dvodimenzijske slučajeve i ovdje se navode dva oblika pojednostavljene jednadžbe (6.11):

- 1) Jednadžba za modeliranje raspodjele temperaturnog polja u dugačkom ravnom obratku u **pravokutnom koordinatnom sustavu**:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \right) + (P_{JQ} + P_{HB} - \Phi_L) = \rho c \frac{\partial \vartheta}{\partial t}} \quad (6.12)$$

- 3) Jednadžbe za modeliranje raspodjele temperaturnog polja osnosimetričnog obratka u **cilindričnom koordinatnom sustavu**:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial r} \left( \lambda r \frac{\partial \vartheta}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda r \frac{\partial \vartheta}{\partial z} \right) + r(P_{JQ} + P_{HB} - \Phi_L) = r\rho c \frac{\partial \vartheta}{\partial t}} \quad (6.13)$$

Usporedbom jednadžbi (6.12) u pravokutnom i (6.13) u cilindričnom koordinatnom sustavu uočava se njihova sličnost uz transformacije (6.14.a-c) koje također vrijede i za rubne uvjete:

Pravokutni koordinatni sustav Cilindrični koordinatni sustav

$$\lambda' = r \lambda \quad (6.14.a)$$

$$\rho' = r \rho \quad (6.14.b)$$

$$P_{JQ}'; P_{HB}' \Phi_L' = r P_{JQ}; r P_{HB}; r \Phi_L \quad (6.14.c)$$

**Početni uvjet.** Za potpuni opis temperaturnog polja i rješavanje parcijalne diferencijalne jednadžbe provođenja topline (6.12) ili (6.13) nužno je postaviti odgovarajuće početne i rubne uvjete. Početni uvjet izražen je jednadžbom (6.15) jer računalna simulacija induksijskog kaljenja započinje uz pretpostavku konstantne temperature obratka, jednake temperaturi okoliša  $\vartheta_0$  ili temperaturi jednoličnog predgrijavanja  $\vartheta_p$  po čitavom volumenu obradaka.

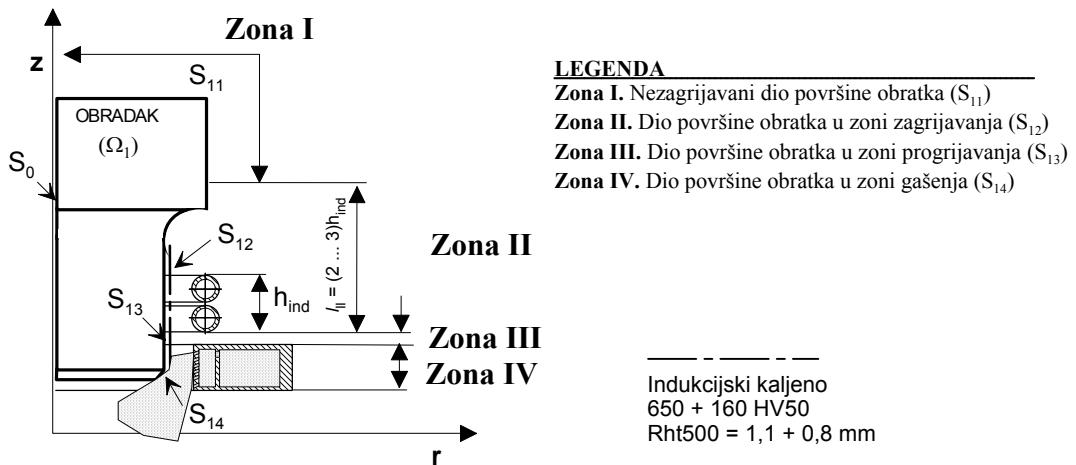
$$t = 0 \quad \vartheta = \text{const.} = \begin{cases} \vartheta_0, & \text{nema predgrijavanja} \\ \vartheta_p > \vartheta_0, & \text{uz predgrijavanje} \end{cases} \quad (6.15)$$

**Rubni uvjeti na obratku** su nestacionarni i prostorno raspodijeljeni po četiri zone (**slika 6.2**):

- I. Ne ugrijavani dio obratka udaljen od induktora i prskalice toliko da je u svim njegovim konačnim elementima temperatura konstantna i jednaka temperaturi okoliša  $\vartheta_0$  ili temperaturi predgrijavanja  $\vartheta_p$ .
- II. Dio obratka u zoni ugrijavanja uz induktor ili obuhvaćen induktorom.
- III. Dio obratka u zoni progrijavanja između induktora i prskalice ili bazena za gašenje.
- IV. Dio obratka u zoni gašenja u prskalici i iza nje ili uronjen u bazen za gašenje.

Za svaku od ovih zona vrijede drugačiji rubni uvjeti određeni dominantnim mehanizmima prijenosa topline. Na osi simetrije geometrijske domene obratka postavlja se **dodatni adijabatski rubni uvjet** koji proizlazi iz uvjeta simetrije obratka:

$$\left. \frac{\partial \vartheta}{\partial n} \right|_{S_0} = 0 \quad (6.16)$$



**Slika 6.2.** Karakteristične zone na površini induksijski kaljenog valjka za postavljanje rubnih uvjeta

**Rubni uvjeti na ne ugrijavanom dijelu obratka (slika 6.2 površina  $S_{11}$ )** odnose se na zadavanje temperature  $\vartheta_s|_{S_{11}} = \vartheta_0$ . U slučaju predgrijanog obratka na ovom dijelu površine postavljaju isti rubni uvjeti kao u zoni ugrijavanja.

**Rubni uvjeti u zoni ugrijavanja (slika 6.2 površina  $S_{12}$ ) i progrijavanja (slika 6.2 površina  $S_{13}$ )**. Ovi dijelovi obratka imaju višu temperaturu od temperature okoliša, pa se u njima pojavljuju značajni gubici topline konvekcijom  $q_k$  i zračenjem  $q_{zr}$  u ukupnog iznosa gustoće toplinskog toka  $q_s$ .

$$q_s|_{S_{12}+S_{13}(+S_{11})} = q_k + q_{zr} \quad (6.17)$$

Gustoća toplinskog toka  $q_k$  zbog prijelaza topline konvekcijom s obradaka na okolišni zrak računa se Newtonovom jednadžbom uz pomoć poznatog srednjeg koeficijenta prijelaza topline  $\alpha_0$  [94]:

$$q_{konv} = \alpha_0 (\vartheta_s - \vartheta_0) \quad (6.18)$$

Gustoća toplinskog toka  $q_{zr}$  izmijenjenog zračenjem između obratka, induktora i okoliša opisana je jednadžbom (6.19) uz poznati koeficijent toplinskog zračenja  $C_{12}$  [6, 7, 74, 94]:

$$q_{zr} = C_{12} [(\vartheta_s + 273)^4 - (\vartheta_0 + 273)^4] \quad (6.19)$$

Jednadžba (6.19) izrazito je nelinearna i neprikladna za numeričke algoritme, pa je uobičajeno izraz u zagradama na njenoj desnoj strani faktorizirati na oblik sličan jednadžbi (6.18) [76]:

$$q_{zr} = C_{12} \cdot [(g_s + 273)^2 + (g_0 + 273)^2] \cdot [(g_s + 273) + (g_0 + 273)] \cdot (g_s - g_0) \quad (6.20.a)$$

$$\alpha_{zr} = C_{12} \cdot [(g_s + 273)^2 + (g_0 + 273)^2] \cdot [(g_s + 273) + (g_0 + 273)] \quad (6.20.b)$$

$$q_{zr} = \alpha_{zr} \cdot (g_s - g_0) \quad (6.20.c)$$

Nova veličina u jednadžbama (6.20.c)  $\alpha_{zr}$  je koeficijent prijenosa topline zračenjem (poglavlje 6.2). Supstitucijom jednadžbi (6.18) i (6.20.c) u jednadžbu (6.17) slijedi jednadžba za proračun ukupne gustoće toplinskog toka kroz površinu obratka u zonama ugrijavanja i progrijavanja:

$$q_s|_{S_{12}+S_{13}(+S_{11})} = (\alpha_0 + \alpha_{zr})(g_s - g_0) \quad (6.21)$$

**Rubni uvjeti u zoni gašenja (slika 6.2 površina S<sub>14</sub>)** definiraju se uvedenjem tzv. "lokalnog koeficijenta prijelaza topline gašenjem"  $\alpha_G$  (W/m<sup>2</sup>K) (poglavlje 6.3.) u jednadžbu sličnu jednadžbi (6.21) prema [14, 15]:

$$q_s|_{S_{14}} = \alpha_G(g_s - g_0) \quad (6.22)$$

Koeficijent prijenosa topline zračenjem  $\alpha_{zr}$  i lokalni koeficijent prijelaza topline gašenjem  $\alpha_G$  su nelinearne veličine ovisne o površinskoj temperaturi obratka  $g_s$ , pa je nužno njihovo iteracijsko računanje za svaki novi vremenski inkrement simulacije.

**Temperaturni gradijent ( $\partial g / \partial n$ )<sub>S</sub>.** Gustoća toplinskog toka  $q_s$  odvedenog kroz površinu obratka povezana je s gradijentom temperature ( $\partial g / \partial n$ )<sub>S</sub> na samoj površini jednadžbom (6.23) [94, 95].

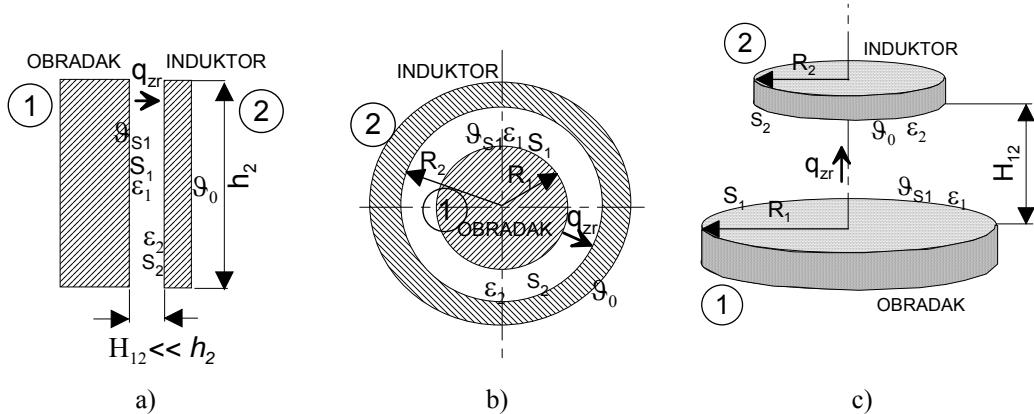
$$-\lambda_s \left( \frac{\partial g}{\partial n} \right)_S = q_s \quad (6.23)$$

$q_s \dots$  Gustoća toplinskog toka, W/m<sup>2</sup>

$\lambda_s \dots = \lambda(g_s)$ , vodljivost topline površinskog sloja, W/(mK)

## 6.2 Određivanje koeficijenta toplinskog zračenja s površine obratka

Koeficijent toplinskog zračenja  $C_{12}$  pri izmjeni topline između obratka i induktora, te obratka i okoliša složeno je izračunati za njihov općeniti položaj u prostoru zbog poteškoća u određivanju faktora konfiguracije (i vidnog faktora  $\omega_S$ ) ovisnog o geometriji i međusobnom položaju ploha. Stoga se za simulaciju induksijskog kaljenja uobičajeno koristi približni proračun koeficijenta zračenja  $C_{12}$  prema modelima navedenim na **slici 6.3.a-c** [7, 94, 96]. za primjenu dolje navedenih modela treba zadati potrebne dimenzije obratka i induktora navedene na **slici 6.3.a-c**, emisione faktore sveukupnog toplinskog zračenja s površine obratka  $\varepsilon_1$  i induktora  $\varepsilon_2$  te konstantu toplinskog zračenja crnog tijela ( $C_c = 5,67 \text{ W}/(\text{m}^2(100\text{K})^4)$ ).



Slika 6.3. Karakteristične konfiguracije obratka i induktora s oznakama mjera za određivanje vidnog faktora konfiguracije:

- a) model zračenja između dvije bliske stjenke,
- b) model zračenja obuhvaćenog tijela,
- c) model zračenja između paralelnih kružnih diskova.

- a) Dio ravne površine obratka postavljen na malom razmaku od induktora (“model zračenja između dvije bliske stjenke”) (**slika 6.3.a**)

$$C_{12} = \frac{S_{01}}{100^4} \frac{C_c}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1} \quad (6.24)$$

- b) Dio površine valjka u induktoru (“model zračenja obuhvaćenog tijela”) (**slika 6.3.b**)

$$C_{12} = \frac{S_{01}}{100^4} \frac{C_C}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \omega_s \left( \frac{1}{\varepsilon_2} - 1 \right)} \quad (6.25)$$

- c) Dio površine obratka oblika kružnog diska ispod induktora oblika diska (model zračenja između paralelnih kružnih diskova) (**slika 6.3.c.**).

$$C_{12} = \frac{S_{01}}{100^4} \frac{C_C}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \omega_s \left( \frac{1}{\varepsilon_2} - 1 \right)} \quad (6.26)$$

$$\omega_s = \frac{1}{2} \left\{ X - \left[ X^2 - 4 \left( \frac{x_2}{x_1} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right\} \quad (6.27.a)$$

$$x_1 = \frac{r_1}{H_{12}} \quad ; \quad x_2 = \frac{r_2}{H_{12}} \quad ; \quad X = 1 + \frac{1 + x_2^2}{x_1^2} \quad (6.27.b-d)$$

- d) Dio površine izvan induktora ili između induktora i prskalice ( $S_{23}$ ) (“model zračenja tijela u veliki prostor”)

$$C_{12} = S_{23} \varepsilon_2 \frac{C_C}{100^4} \quad (6.28)$$

$$S_{01} = 2r_1 \pi (h_2 + 0,1h_2) \quad (6.29.a)$$

$$\omega_s = \frac{S_{01}}{S_2} \quad (6.29.b)$$

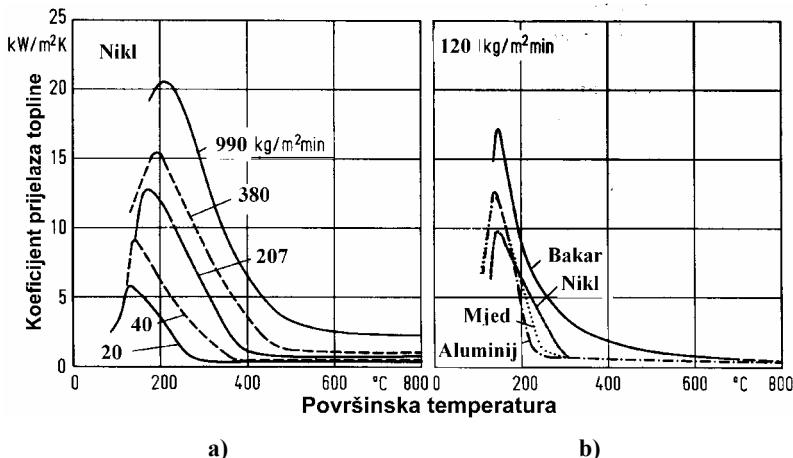
Emisijski faktori sveukupnog toplinskog zračenja  $\varepsilon_1$  i  $\varepsilon_2$  ovise o materijalu, stanju površine obratka (polirana, metalno sjajna, zagasita, oksidirana, hrapava, itd.) i površinskoj temperaturi  $\vartheta_S$ . U bazi podataka vlastito razvijenog simulacijskog programa unijeti su podaci o faktoru  $\varepsilon_1$  promjenjivom ovisno o temperaturi za deset uobičajenih čelika prikladnih za induktijsko kaljenje. Emisijski faktor površine induktora izabran je za slabo zagasitu bakrenu površinu ( $\varepsilon_2 = 0,037$ ) prema [94].

### 6.3. Određivanje koeficijenta prijelaza topline gašenjem

Uobičajeni način hlađenja induksijski kaljene površine obratka je gašenje u prskalici (poglavlje 2.1.2) sa sredstvima podložnim Leidenfrostovom efektu (sredstva koja pokazuju tri faze isparivanja: filmsko, mjeđurasto i konvekcijsko). Pri ispravno provedenom gašenju prskanjem na površini obratka ne pojavljuje se filmsko, već samo mjeđurasto isparivanje (s maksimalnim iznosima koeficijenta prijelaza topline) te ohlađivanje konvekcijom. Stoga se uobičajeno u računalnoj simulaciji induksijskog kaljenja primjenjuje jedinstvena maksimalna vrijednost koeficijenta prijelaza topline prskanjem za cijelu zonu gašenja [70,71]. U vlastito razvijenom simulacijskom programu induksijskog kaljenja osim ovog uobičajenog odabira ugrađena je mogućnost proračuna koeficijenta prijelaza topline raspodijeljenog po zoni gašenja ovisno o temperaturi površine obratka i gustoći prskanja.

**Glavni utjecajni čimbenici na srednji koeficijent prijelaza topline prskanjem  $\alpha_G$ .** Iznos koeficijenta prijelaza topline  $\alpha_G$  određenog sredstva za gašenje najviše ovisi o visini temperature površine, materijalu obratka i gustoći prskanja  $m_0$ ,  $\text{kg}/(\text{m}^2\text{s})$ . Gustoća prskanja predstavlja masu sredstva za gašenje koje u jedinici vremena padne na jedinicu zagrijane površine obratka. Utjecaj vrste ohlađivanog metala može se promatrati uvodeći tzv. "koeficijent prodiranja topline" ( $\sqrt{\lambda \cdot \rho \cdot c}$ ) izračunat za metalno čistu površinu. Ako na površini obratka postoji oksidni sloj, tada je za prijenos topline mjerodavan koeficijent prodiranja topline oksida, a ne onaj osnovnog metala [14]. Npr. za metalno čistu površinu čelika 42CrMo4 temperature  $\vartheta_s = 800^\circ\text{C}$  koeficijent prodiranja topline iznosi  $(\sqrt{\lambda \cdot \rho \cdot c})_{800^\circ\text{C}} = 10,65 \text{ kW s}^{0,5}/(\text{m K})$ , a za temperaturu  $\vartheta_s = 500^\circ\text{C}$   $(\sqrt{\lambda \cdot \rho \cdot c})_{500^\circ\text{C}} = 14,36 \text{ kW s}^{0,5}/(\text{m K})$ .

Na **slici 6.4** prikazana je promjena koeficijenta prijelaza topline o površinskoj temperaturi kod ohlađivanja neželjeznih materijala prskanjem vodom temperature  $20^\circ\text{C}$ . Iz **slike 6.4.a** uočljivo je kako povećanje gustoće prskanja povećava koeficijent prijelaza topline i pomiče Leidenfrostovu temperaturu na više vrijednosti. Utjecaj gustoće prskanja  $m_0$  i vrste metala izražen je samo kod temperatura nižih od Leidenfrostove temperature (u području mjeđurastog isparivanja). **Slika 6.4.b** prikazuje utjecaj vrste ohlađivanog metala na koeficijent  $\alpha_G$  pri gustoći prskanja od  $120 \text{ kg}/(\text{m}^2\text{min})$ .

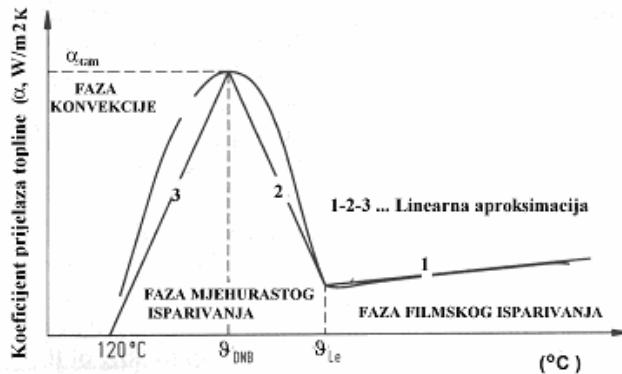


Slika 6.4. Koeficijent prijelaza topline  $\alpha_G$  kod ohlađivanja ravne površine prskanjem vodom (upadni kut mlaza  $90^\circ$ ) [97]:

- utjecaj gustoće mlaza i površinske temperature uzorka od nikla na  $\alpha_G$ ,
- utjecaj vrste ohlađivanog metala i površinske temperature na  $\alpha_G$ ,

**Matematički model funkcije  $\alpha_G = f(\sqrt{\lambda \cdot \rho \cdot c}, \vartheta_s, m_0)$  pri gašenju prskanjem vodom.** Za matematičko modeliranje funkcije  $\alpha_G = f(\sqrt{\lambda \cdot \rho \cdot c}, \vartheta_s, m_0)$  primijenit će se model linearne aproksimacije (slika 6.5) za gašenje prskanjem čistom vodom jer su za njegovo postavljanje dostupni svi potrebni podaci u literaturi [14, 15, 16, 97].

Matematičko modeliranje funkcije  $\alpha_G = f(\vartheta_s)$  za gašenje prskanjem čistom vodom obuhvaća većinom eksperimentalno određene jednadžbe za proračun vrijednosti koeficijenta prijelaza topline pri karakterističnim temperaturama  $\vartheta_k$ ,  $\vartheta_{DNB}$  i  $\vartheta_{Le}$  za pojedinu fazu isparivanja. Vrijednosti temperatura  $\vartheta_{Le}$  i  $\vartheta_{DNB}$  određuju se empiričkim jednadžbama, a temperatura  $\vartheta_k$  prema [14] iznosi  $120^\circ\text{C}$ . Između ovih karakterističnih temperatura primjenjuje se linearna aproksimacija  $\alpha_G = f(\vartheta_s)$  prema slici 6.5.



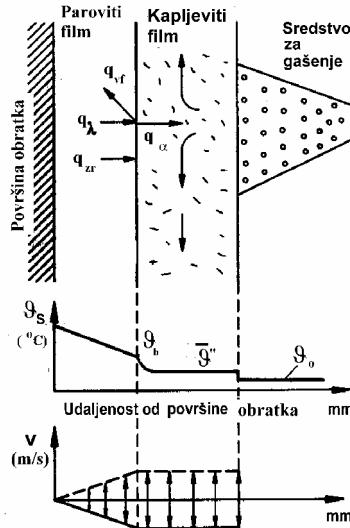
**Slika 6.5.** Model linearno-kvadratne aproksimacije promjene koeficijenta prijelaza topline ovisno o površinskoj temperaturi obratka [14, 15].

**Funkcija  $\alpha_G = f(\sqrt{\lambda \cdot \rho \cdot c}, \theta_s, m_0)$  u fazi filmskog isparivanja.** Kad mlaz vode dode u dodir sa ugrijanim obratkom zbog velikih razlika temperatura pojavljuje se tanki film vodene pare (filmsko isparivanje) između površine obratka i kapljevine (slika 6.6). Paroviti film ponaša se kao toplinski izolator, pa se tijekom njegovog postojanja zadržava visoka temperatura površine obratka. Kroz njega se toplina prenosi mehanizmima provođenja ( $q_\lambda$ ) i zračenja ( $q_{\text{zr}}$ ). Na granici parovitog filma toplina se jednim dijelom odvodi konvekcijom ( $q_a$ ) u granični sloj (koji teče po filmu), a drugim dijelom se troši za isparivanje kapljevine ( $q_{\text{vf}}$ ). Na slici 6.6 kvalitativno je prikazana promjena temperature u parnom filmu i graničnom sloju. U parovitom filmu temperatura se smanjuje od površinske temperature obratka  $\theta_s$  na temperaturu isparivanja kapljevine  $\theta_b$ . Temperatura  $\theta_b$  je veća od temperature zasićenja  $\theta''$  koja bi pripadala kapljevini po krivulji napetosti za postignuti tlak. U graničnom sloju vrijednosti temperature smanjuju se do iznosa radne temperature sredstva za gašenje ( $\theta_0$ ). Debljina parnog filma i gustoća toplinskog toka  $q_s$ , velikim dijelom ovise o gustoći toplinskog toka  $q_a$  ostvarenog prisilnim strujanjem u graničnom sloju. Odvođenje topline prisilnom konvencijom ovisi o profilu brzina u graničnom sloju. U području stabilnog filmskog isparivanja koeficijent prijelaza topline  $\alpha_{G,f}$  ne ovisi o površinskoj temperaturi niti vrsti metala, ali ovisi o gustoći prskanja prema [14]:

$$\boxed{\alpha_{G,f} = 200 + 1,82 \cdot m_0} \quad (6.30)$$

$m_0$  ... specifična gustoća prskanja, kg/(m<sup>2</sup>min)

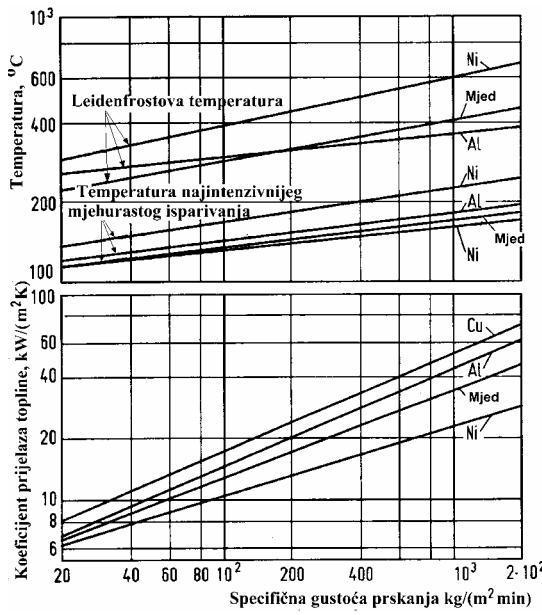
Jednadžba (6.30) vrijedi u rasponu vrijednosti gustoće prskanja ( $m_0$ ) od 100 do 2000 kg/m<sup>2</sup>min za čistu vodu temperature 20°C. Za više temperature koeficijent prijelaza topline ima sporiji porast s porastom gustoće prskanja, nego kod gašenja vodom temperature 20 °C.



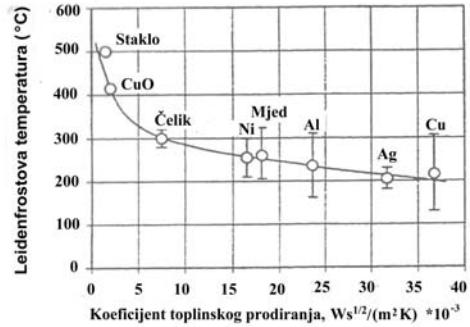
Slika 6.6 Mehanizmi prijenosa topline kod filmskog isparivanja pri gašenju prskanjem [14].

**Funkcija  $\alpha_G = f(\sqrt{\lambda \cdot \rho \cdot c}, g_s, m_0)$  u fazi mjehurastog isparivanja.** Leidenfrostova temperatura  $g_{Le}$  predstavlja graničnu temperaturu iznad koje je moguće uspostavljanje stabilnog parovitog filma. Čim se temperatura površine snizi ispod iznosa Leidenfrostove temperature nastupa kidanje parovitog filma i prijelaz od filmskog k mjehurastom isparivanju. Najviše vrijednosti koeficijenta prijelaza topline pri gašenju prskanjem postižu se u fazi mjehurastog isparivanja pri temperaturi površine  $g_s = g_{DNB}$ . Na slici 6.7 prikazan je utjecaj vrste ohlađivanog metala i gustoće prskanja na visinu Leidenfrostove temperature  $g_{Le}$ , temperature najintenzivnijeg mjehurastog isparivanja  $g_{DNB}$  i maksimalne vrijednosti koeficijenta prijelaza topline  $\alpha_{G,max}$ . Iste se mogu izračunati jednadžbom (6.31) uz zadalu specifičnu gustoću prskanja  $m_0$  [14, 97]:

$$\alpha_{G,max}, g_{DNB}, g_{Le} = a_1 [m_0]^{a_2} \quad (6.31)$$



a)



b)

- Slika 6.7.** a) Leidenfrost-ova temperatura  $\vartheta_{Le}$ , temperatura najintenzivnijeg mjeđurastog isparivanja  $\vartheta_{DNB}$  i maksimalni koeficijent prijelaza topline čiste vode kao ovisni o gustoći prskanja pri hlađenju različitih metala [14, 97]
- b) Utjecaj vrste ohlađivanog metala ili nemetala (izraženog preko koeficijenta prodiranja topline) na vrijednost Leidenfrostove temperature  $\vartheta_{Le}$  čiste vode [16]

Iz dostupne literature [14, 97] preuzeti su koeficijenti  $a_1$  i  $a_2$  kako su navedeni uz jednadžbe (6.32.a-c) za glatku i čistu površinu nikla koji je od ispitivanih materijala po svojstvu  $\sqrt{\lambda \cdot \rho \cdot c} = 14,3$   $\text{KWs}^{0,5}/(\text{mK})$  najbliži uobičajenim vrijednostima austenitiziranog čelika.

$$\alpha_{G,\max} \approx 156[m_0]^{0,19} \quad (6.32.a)$$

$$\vartheta_{DNB} \approx 72[m_0]^{0,16} \quad (6.32.b)$$

$$\vartheta_{Le} \approx 2360[m_0]^{0,32} \quad (6.32.c)$$

$m_0$  ... specifična gustoća prskanja,  $\text{kg}/(\text{m}^2 \text{min})$

Vrijednosti koeficijenata  $a_1$ ,  $a_2$  iz jednadžbe (6.31) vrijede za površine, hrapavosti do  $R_a = 2 \mu\text{m}$ . S povećanjem hrapavosti na  $R_a = 30 \mu\text{m}$  iznosi Leidenfrostove temperature porasli bi za oko  $100^\circ\text{C}$ , a iznosi temperature  $\vartheta_{\text{DNB}}$  za oko  $20^\circ\text{C}$ , dok bi se  $\alpha_{G,\text{max}}$  povećao za oko 20 % [14].

**Funkcija  $\alpha_G = f(\sqrt{\lambda \cdot \rho \cdot c}, \vartheta_s, m_0)$  u fazi prijelaza topline konvekcijom.** Iznos koeficijenta prijelaza topline  $\alpha_{G,k}$  u fazi konvekcije nekoliko je puta manji od iznosa u fazi mjeđurastog isparivanja. Za točniji proračun koeficijenta prijelaza topline konvekcijom treba numerički riješiti trodimenijski matematički model strujanja sredstva za gašenje s prijelazom topline kroz granični sloj ili temperaturno ovisan koeficijent prijelaza topline odrediti eksperimentalno.

U razvijenom simulacijskom programu koeficijent prijelaza topline konvekcijom računa se iz jednadžbi teorije sličnosti prema [14, 15, 94, 96]. U tipičnom slučaju gašenja prskanjem mlaz sredstva za gašenje udara u ugrijanu površinu obradaka srednjom brzinom  $v_0$  i potom slobodno pada uz obradak visinom pada  $z_h$ . Brzina strujanja sredstva za gašenje uz površinu obratka  $v_0$  određuje se primjenom jednadžbe kontinuiteta i Bernoullijeve jednadžbe na slobodni mlaz sredstva za gašenje [15]. Na površini obratka nastaje hidrodinamički granični sloj čija je debljina značajno manja od mjera obratka pa se za proračun koeficijenta prijelaza topline može zanemariti eventualna zakriviljenost površine obratka. Dodatno pojednostavljenje slijedi iz podatka o visini pada sredstva za ohlađivanje  $z_h$ . U većini slučajeva induktivskog kaljenja može se zanemariti i ubrzanje sredstva za gašenje slobodnim padom u odnosu na početnu brzinu mlaza  $v_0$ , odnosno  $2 \cdot g \cdot z_h \ll v_0^2$ , pa se prema [14] za proračun srednjeg koeficijenta prijelaza topline konvekcijom dobiva izraz (6.33):

$$Nu = \frac{z_h \alpha_{G,k}}{\lambda_s} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{v_0 z_h}{a_0}} \quad (6.33)$$

Temperaturna provodnost sredstva za ohlađivanje  $a_0$ ,  $\text{m}^2/\text{s}$  računa se za srednju temperaturu između temperature dijela površine obratka ispod prskalice  $\vartheta_s$  i temperature sredstva za ohlađivanje  $\vartheta_0$ .

Za matematičko modeliranje prijelaza topline vodenim otopinama polimera u dostupnoj literaturi [14, 15, 16, 98] nisu pronađene odgovarajuće jednadžbe koje bi se opisivale prijelaz topline pri gašenju prskanjem stoga je u [73] predložen vlastiti aproksimacijski model s korekcijskim faktorom  $k_{PAG}$  za proračun najveće vrijednosti koeficijenta prijelaza topline pri gašenju:

$$\alpha_{G,\text{max},PAG} = (1 - k_{PAG}) \alpha_{G,\text{max},H_2O} \quad (6.34)$$

Predloženi korekcijski faktor  $k_{PAG}$  ovisi koncentraciji PAG-a u vodi  $c_{PAG}$  i najvećoj brzini hlađenja  $CR_{max}$ , °C/s izmjerenoj u središtu valjka  $\varnothing 12,5$  mm od Inconel-a 600 prema normi ISO 9950. Korekcijski faktor  $k_{PAG}$  određuje se iz omjera najveće brzine hlađenja ovog valjka u čistoj vodi i ispitivanoj vodenoj otopini polimera uz iste uvjete hlađenja (ista temperatura sredstva  $\theta_0$  i brzina strujanja  $v_0$ ):

$$k_{PAG} = \left| \frac{(CR_{max})_{PAG} - (CR_{max})_{H_2O}}{(CR_{max})_{H_2O}} \right| \quad (6.35)$$

Za vodene otopine polimera PAG najveća brzina ohlađivanja  $CR_{max}$  određuje se prema [14, 15]:

$$CR_{max} = 244,7 - 4,3 c_{PAG} - 1,7 \theta_0 + 47,2 v_0 \quad (6.36)$$

Za čistu vodu je  $c_{PAG}$  jednak nuli pa se iz jednadžbi (6.35) i (6.36) dobiva slijedeća jednadžba za određivanje faktora  $k_{PAG}$ :

$$k_{PAG} = \frac{4,3c_{PAG}}{244,7 - 1,7\theta_0 + 47,2v_0} \quad (6.37)$$

Iz jednadžbi (6.34) i (6.37) slijedi karakterističan način promjene faktora  $k_{PAG}$ . S povećanjem koncentracije polimera PAG u vodi smanjuje se najveća brzina ohlađivanja  $CR_{max}$ , prema jednadžbi (6.36), a korekcijski faktor  $k_{PAG}$  se povećava prema jednadžbi (6.37), ali je uvijek manji od jedan. Što je veća koncentracija polimera u vodi manji je koeficijent prijelaza topline ( $\alpha_{G,max}$ ), pa se korekcijski faktor  $k_{PAG}$  uvodi u jednadžbu (6.34) u obliku  $(1 - k_{PAG})$ . Za fazu filmskog isparivanja i slobodne konvekcije primjenjuju se približne vrijednosti koeficijenta prijelaza topline određenog za gašenje čistom vodom. Točnost, pouzdanost i primjenljivost predloženog modela potrebno je istražiti u budućim istraživanjima.

Nakon proračuna aproksimacijske funkcije koeficijenta prijelaza topline ovisnog o temperaturi (**slika 6.6**) određuju se lokalne vrijednosti koeficijenta prijelaza topline  $\alpha_G$  na onim stranicama konačnih elemenata koje diskretiziraju hlađenu površinu obratka. Osim ovog orijentacijskog proračuna u vlastito razvijenom simulacijskom programu ugrađena je baza podataka za pohranu eksperimentalno snimljenih vrijednosti promjene koeficijenta prijelaza topline prskanjem s promjenom temperature. Ugrađena baza podataka osim pregleda i pripreme podataka za simulacijski program pruža mogućnost interpolacije kojom se za zadalu vrijednost površinske temperature na stranici konačnog elementa interpolira vrijednost koeficijenta prijelaza topline.

## 6.4 Zadavanje toplinskih svojstava materijala

Toplinska svojstva materijala (gustoća, koeficijent vodljivosti topline, specifični toplinski kapacitet) u diferencijalnim jednadžbama provođenja topline nelinearno se mijenjaju s promjenom temperature i mikrostrukturnim pretvorbama u materijalu. U vlastito razvijenom simulacijskom programu primjenjeni su podaci iz literature [82, 99] uglavnom s makroskopskim vrijednostima vodljivosti topline, specifične gustoće i specifičnog toplinskog kapaciteta površinskih kaljenih čelika ovisnim o promjeni temperature (0 do 1200 °C). Također je ostavljena mogućnost unosa ovih vrijednosti od strane korisnika. Vrijednosti svojstava interpoliraju se za konkretnu temperaturu u čvorovima konačnih elemenata u svakom vremenskom inkrementu simulacije.

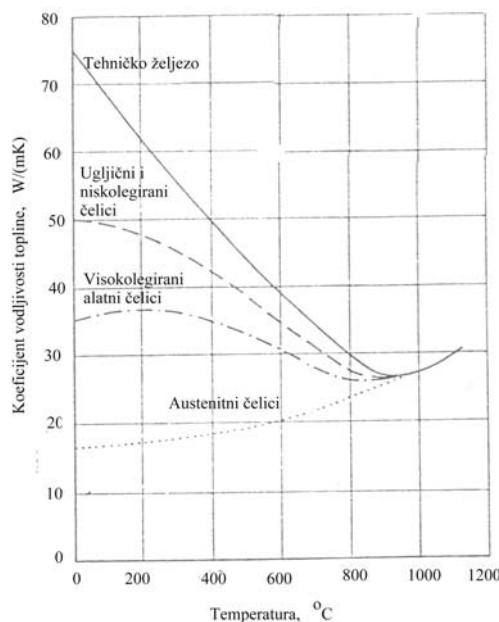
**Gustoća  $\rho$ , kg/m<sup>3</sup>** općenito ovisi o kemijskom sastavu, mikrostrukturnim fazama i temperaturi čelika. Legirni elementi veće gustoće (W, Ni, Mo, Co) povećavaju, a "lakši" legirajući elementi (C, Si, Cr, Mn, Al) snižavaju gustoću čelika. Pri mikrostrukturnim faznim pretvorbama dolazi do promjena gustoće ovisno o vrsti pretvorbe. Kod pretvorbe kristalne rešetke  $\alpha$ -željeza u  $\gamma$ -željezo (tzv. " $\alpha/\gamma$  pretvorba") gustoća se povećava za nekoliko postotaka (< 5 %), a pri pretvorbi  $\gamma/\alpha$  ona se za isti iznos smanjuje. S povećanjem temperature gustoća čelika se smanjuje.

**Koeficijent vodljivosti topline  $\lambda$ , W/(mK)** čelika ovisi o čimbenicima utjecajnim na gibanje slobodnih elektrona i titranje kristalne rešetke (kemijski sastav, mikrostrukturne faze, veličina kristalnih zrna, nesavršenosti, uključci i temperatura). Kako su slobodni elektroni nositelji i električne energije postoji direktna povezanost vodljivosti topline s električnom vodljivosti. Od navedenih utjecajnih čimbenika posebno se ističe utjecaj legirajućih elemenata i temperature na vodljivost topline. Koeficijent vodljivosti topline metala značajno opada dodavanjem bilo kojih legirajućih elemenata jer se time povećava disipacija slobodnih elektrona u metalu [94]. Utjecaj porasta temperature na vodljivost topline čelika različitim sastava najjači je kod nižih temperatura (do 650 °C) kad su velike razlike između nelegiranih, niskolegiranih i visokolegiranih čelika (**slika 6.8**). Na temperaturama iznad 700 °C koeficijenti vodljivosti topline svih čelika postepeno se izjednačuju, a iznad 850 °C su praktički jednaki.

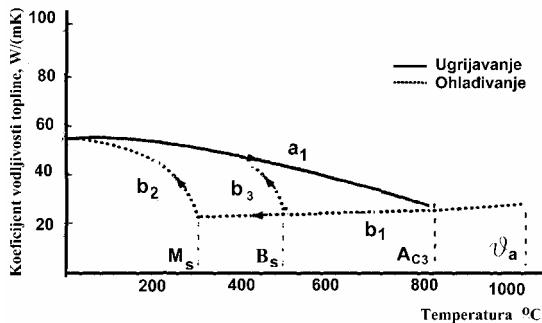
U literaturi se može pronaći niz izraza i različitih pristupa (empiričke jednadžbe, regresijska analiza, primjena neuronskih mreža, genetičkih algoritama i dr.) za određivanje koeficijenta vodljivosti topline u ovisnosti od kemijskog sastava i temperature [94, 99]. U vlastito razrađenom simulacijskom

programu primijenjen je matematički model za aproksimaciju promjene vodljivosti topline ovisne o temperaturi krivuljama  $\lambda = f(\vartheta)$  prema **slici 6.9**. Aproksimacijski model promjene koeficijenta vodljivosti topline tijekom ugrijavanja i ohlađivanja konkretnog čelika opisuje tijek funkcije  $\lambda = f(\vartheta)$  pomoću tri krivulje i jednog pravca. primjena aproksimacijskog modela sa **slike 6.9**. ograničena je na temperature između 0 i 1200°C uobičajene za induksijsko kaljenje.

Krivulja **a<sub>1</sub>** opisuje promjenu koeficijenta vodljivosti topline tijekom ugrijavanja polazne feritno-perlitne mikrostrukture do temperature  $A_3$  (uz faznu pretvorbu ferita i perlita u nehomogeni austenit). Za daljnje ugrijavanje austenita iznad temperature  $A_3$  do konačne temperature austenitizacije  $\vartheta_a$  karakteristična je praktički linearne promjene koeficijenta vodljivosti topline s promjenom temperature aproksimirana pravcem **b<sub>1</sub>**. Promjena koeficijenta vodljivosti topline tijekom ohlađivanja pothlađenog austenita do  $M_s$  temperature također se odvija po pravcu **b<sub>1</sub>** (slično ohlađivanju austenitnih čelika na **slici 6. 8**). Ispod  $M_s$  temperature nastupa promjena koeficijenta vodljivosti topline prema krivulji **b<sub>2</sub>** karakterističnoj za martenzitnu mikrostrukturu. Ako nije nastupila martenzitna pretvorba već bainitna, tada se prema vlastitoj nadopuni matematičkog modela [42] koeficijent vodljivosti topline mijenja prema krivulji **b<sub>3</sub>** karakterističnoj za bainitnu mikrostrukturu.



**Slika 6. 8.** Promjena koeficijenta vodljivosti topline s temperaturom tipičnih skupina čelika [17]



**Slika 6.9.** Promjena srednje vrijednosti koeficijenta vodljivosti topline tijekom ugrijavanja i ohlađivanja čelika pri induktijskom kaljenju interpolirana karakterističnim krivuljama [42].

Krivulja **a<sub>1</sub>** aproksimirana je nizom jednadžbi oblika (6.38) određenih statističkom analizom genetičkim algoritmima i genetičkim programiranjem (**tablica VI.1**) [100]. Pravac **b<sub>1</sub>** opisan je linearnim jednadžbom (6.39.a), a krivulje **b<sub>2</sub>** i **b<sub>3</sub>** aproksimirane su vlastito određenim jednadžbama (6.40.a-b) (koje vrijede za slučajeve kad je  $LE < 5$ ).

$$\lambda(\vartheta)|_{a_1} = a_1 + a_2 \vartheta + a_3 \ln(LE) \quad (6.38)$$

$$\lambda(\vartheta)|_{b_1} = \lambda|_{A_3} + \frac{\lambda|_{1200^\circ C} - \lambda|_{A_3}}{1200 - A_{c3}} (\vartheta - A_{c3}) \quad (6.39)$$

$$\lambda(\vartheta)|_{b_2} = \lambda|_{0^\circ C} - \left( \frac{\vartheta}{M_s} \right)^{LE} \left( \lambda|_{0^\circ C} - \lambda|_{M_s} \right) \quad (6.40.a)$$

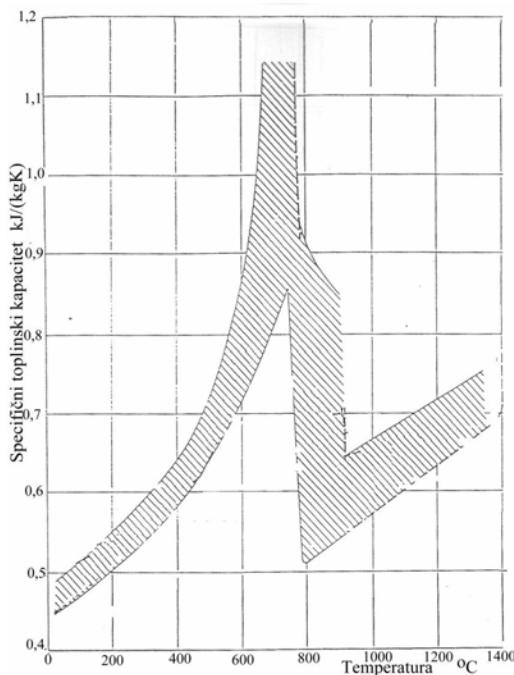
$$\lambda(\vartheta)|_{b_3} = \lambda|_{0^\circ C} - \left( \frac{\vartheta}{B_s} \right)^{LE} \left( \lambda|_{0^\circ C} - \lambda|_{B_s} \right) \quad (6.40.b)$$

$\lambda$	... koefficijent vodljivosti topline, W/(mK)
$a_1, a_2, a_3$	... regresijski koefficijenti
$\vartheta$	... Celzijeva temperatura, °C
$LE$	... suma masenih udjela legirajućih elemenata (C,Si,Mn,Co;Cr,Ni,Mo,V,W,Ti,Ta,Nb), %
$A_{c3}$	... temperatuta završetka $\alpha/\gamma$ fazne pretvorbe, °C
$M_s$	... temperatuta početka martenzitne pretvorbe, °C
$B_s$	... temperatuta početka bainitne pretvorbe, °C

**Tablica VI.1.** Regresijski koeficijenti aproksimacijske funkcije koeficijenta vodljivosti topline za različite temperature od 20 do 700 °C [100]

Temperatura ( $\vartheta$ , °C)	Regresijski koeficijenti jednadžbe (6.38)	
	$a_1 + a_2 \vartheta$	$a_3$
20	49,255	-9,5489
100	47,824	-8,6825
200	46,037	-7,6512
300	43,055	-6,4341
400	39,764	-5,2045
500	37,239	-4,2121
600	35,320	-3,390
700	33,836	-2,7064

**Specifični toplinski kapacitet** čelika  $c=f(\vartheta)$  ovisan o temperaturi određen je iz podataka kalorimetrijskih mjerena entalpije i proračuna  $c(\vartheta)=\partial h/\partial \vartheta$  za tridesetak čelika objavljenih u [82, 99] (slika 6.10).



**Slika 6. 10** Promjena specifičnog toplinskog kapaciteta ovisnog od temperature  $c(\vartheta) = \partial h / \partial \vartheta$  pri ugrijavanju ugljičnih i niskolegiranih čelika [82]

Kao što je vidljivo iz **slike 6.10** približavanjem vrijednosti temperature ugrijavanja čelika temperaturama Curie i  $A_1$  vrijednosti specifičnog toplinskog kapaciteta brzo rastu, a po dostizanju ovih temperatura naglo se smanjuju. Ove velike promjene vrijednosti  $c=f(\vartheta)$  u uskom intervalu između temperatura  $T_{\text{Curie}}$ ,  $A_1$  i  $A_3$  teško je ugraditi u računalni program bez opasnosti od nestabilnosti i grešaka simulacijskog algoritma. Stoga je u vlastito razvijenom simulacijskom modelu induksijskog kaljenja odijeljen specifični toplinski kapacitet mikrostrukturnih faza od latentne topline njihovih faznih i magnetskih pretvorbi. Time je postignuta umjerenija promjena funkcije  $c=f(\vartheta)$  i bolja numerička stabilnost proračuna

Vlastiti model na temelju kojeg je provedeno određivanje specifičnog toplinskog kapaciteta pojedinih faza i latentne topline pretvorbi (mikrostrukturnih i magnetskih) postavljen je prema smjernicama iz [44, 87]. Pri postavljanju računalne simulacije korisnik zadaje vrijednosti specifičnog toplinskog kapaciteta konkretnog čelika u funkciji temperature  $c(\vartheta)$  koje kod ugljičnih i niskolegiranih čelika uobičajeno daju krivulju  $c_{eq}=f(\vartheta)$  shematski prikazanu na **slici 6.11**. Iz zadanih vrijednosti  $c_{eq}=f(\vartheta)$  programski se određuju aproksimacijske funkcije specifičnog toplinskog kapaciteta mikrostrukturnih faza s kristalnom rešetkom  $\alpha$ -željeza ( $c^\alpha$ ) i  $\gamma$ -željeza ( $c^\gamma$ ) bez mikrostrukturnih pretvorbi te vrijednost specifične latentne topline faznih pretvorbi  $\Phi_L$  prema **slici 6.11**.

$$c^\alpha(\vartheta) = c_{eq}(\vartheta_0) + \frac{c_{eq}(A_3)_{\max} - c_{eq}(\vartheta_0)}{A_3 - \vartheta_0} (\vartheta - \vartheta_0) \quad \vartheta < A_3 \quad (6.41)$$

Specifični toplinski kapacitet austenita na temperaturama višim od  $A_3$  jednak je  $c_{eq}(\vartheta)$  i uobičajeno linearno raste s porastom temperature. Specifični toplinski kapacitet pothlađenog austenita (na temperaturama između  $A_1$  i  $M_s$ , linija --- na **slici 6.11**) u razrađenom modelu se određuje ekstrapolacijskom jednadžbom (6.42):

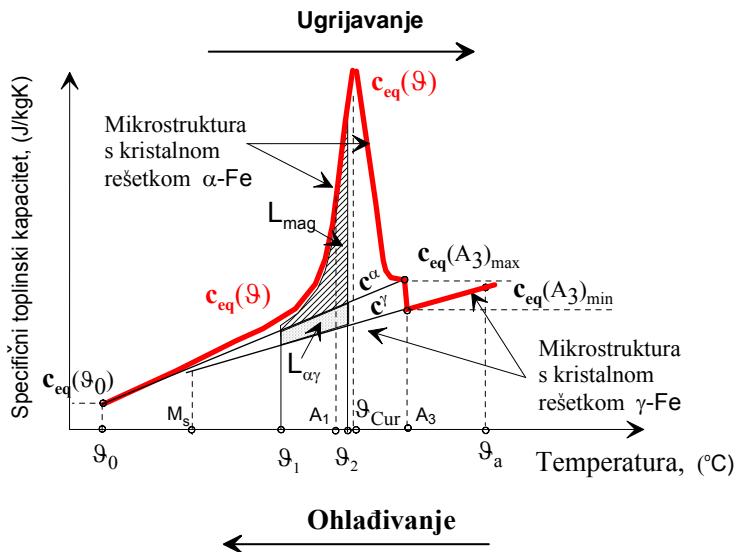
$$c^\gamma(\vartheta) = c_{eq}(\vartheta_a) - \frac{c_{eq}(\vartheta_a) - c_{eq}(A_3)_{\min}}{\vartheta_a - A_3} (\vartheta_a - \vartheta) \quad (6.42)$$

Volumna latentna toplina  $\Phi_L$  fazne i feromagnetske pretvorbe na zadanom intervalu temperatura ( $\vartheta_1 > \vartheta_0$ ,  $\vartheta_2 \leq A_3$ ) određuje se prema slijedećim jednadžbama modela:

$$\boxed{\Phi_L = \begin{cases} \rho \left[ \frac{\partial}{\partial t} (y_1 L_{ij}^{\alpha\gamma}) + \frac{\partial}{\partial t} (y_0 L_{mag}) \right]; & \dots \text{austenitizacija} \\ \rho \left[ \frac{\partial}{\partial t} (y_j L_{ij}^{\alpha\gamma}) + \frac{\partial}{\partial t} (y_j L_{mag}) \right]; & \dots \text{gašenje} \quad (j = 2,3,4,5) \end{cases}} \quad (6.43.a)$$

$$L_{mag} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} [c_{eq}(\theta) - c^\alpha(\theta)] d\theta \quad (6.43.b)$$

$$L_{ij}^{\alpha\gamma} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} [c^\alpha(\theta) - c^\gamma(\theta)] d\theta \quad (6.43.c)$$



$c_{eq}(\theta)$  ... Krivulja promjene specifičnog toplinskog kapaciteta željeznog materijala ovisnog od temperature ugrijavanja ili ohlađivanja

$c^\alpha$  ... Model promjene specifičnog toplinskog kapaciteta u funkciji temperature za mikrostrukturne faze s rešetkom  $\alpha$ -željeza bez utjecaja latentne topline fajnih pretvorbi

$c^\gamma$  ... Model promjene specifičnog toplinskog kapaciteta u funkciji temperature za austenitnu fazu bez utjecaja latentne topline fajnih pretvorbi

Slika 6.11 Vlastiti model promjene specifičnog toplinskog kapaciteta tijekom ugrijavanja i ohlađivanja čelika pri inducirskom kaljenju

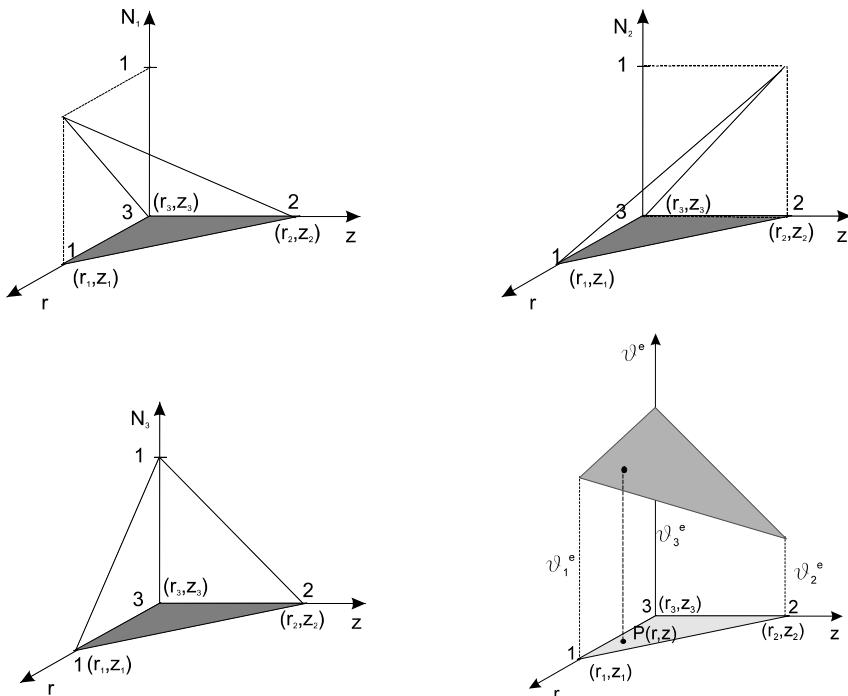
Član  $L_{\text{mag}}$  predstavlja volumnu latentnu toplinu promjene magnetskih svojstava materijala, a član  $L_{ij}^{\alpha\gamma}$  predstavlja volumnu latentnu toplinu fazne pretvorbe. Oba člana mogu se izračunati numeričkom integracijom jednadžbi (6.43.b) i (6.43.c). U grafičkom prikazu promjene specifičnog toplinskog kapaciteta na intervalu temperatura ( $\vartheta_1$ ,  $\vartheta_2$ ) (slika 6.11) član  $L_{\text{mag}}$  predstavlja površinu između krivulja  $c_{\text{eq}}(\vartheta)$  i  $c^\alpha(\vartheta)$ , a član  $L_{ij}^{\alpha\gamma}$  površinu između pravaca  $c^\alpha(\vartheta)$  i  $c^\gamma(\vartheta)$ .

Uvjeti postavljeni na indekse uz jednadžbu (6.43.a) odražavaju moguću kinetiku faznih pretvorbi. Pri ugrijavanju na temperaturu jednaku ili veću od  $A_1$  iz polazne mikrostrukture ( $i=0$ ) polaznog udjela  $y_0 = 1$  nastaje austenit ( $j = 1$ )  $y_1 = 1 - y_0$ . Ugrijavanje polazne mikrostrukture do temperature  $A_3$  uzrokuje promjenu magnetičnosti materijala zbog čega treba dovesti dodatnu energiju koja odgovara latentnoj toplini  $L_{\text{mag}}$ . Stvaranje austenita također zahtijeva dodatnu energiju koja odgovara latentnoj toplini fazne pretvorbe  $L_{ij}$ . Ukupni iznosi ovih latentnih toplina u diferencijalu vremena  $dt$  jednak su njihovom produktu s udjelom odgovarajuće faze  $y_0 L_{\text{mag}}$ , odnosno  $y_1 L_{ij}^{\alpha\gamma}$ . Na završetku stvaranja austenita kad je  $\vartheta_2 = A_3$  udio polazne mikrostrukture u promatranom elementu materijala jednak je nuli ( $y_0 = 0$ ), udio austenita jednak je jedan ( $y_1=1$ ), a iznos specifične entalpije fazne pretvorbe  $L_{ij}^{\alpha\gamma}$  jednak je nuli pa je i član  $\Phi_L$  jednak nuli. Pri ohladivanju udio pothlađenog austenita  $y_1$  se smanjuje zbog izlučivanja mikrostruktturnih faza (martenzita, bainita, ferita, perlita) kojima su pridruženi indeksi veći od 1 uslijed čega se oslobađa latentna toplina faznih pretvorbi  $L_{ij}^{\alpha\gamma}$  i latentna toplina promjene magnetičnosti  $L_{\text{mag}}$ .

## 6.5 Rješenje jednadžbe temperaturnog polja metodom konačnih elemenata

**Aproksimacijske funkcije temperature u čvorovima trokutnog elementa.** Rješavanje jednadžbi temperaturnog polja obratka u razvijenom simulacijskom modelu induksijskog kaljenja provodi se metodom konačnih elemenata na istoj mreži trokutnih konačnih elemenata uz iste linearne funkcije oblika kao kod rješavanja jednadžbi elektromagnetskog polja (poglavlje 5.3). Iznosi temperature po površini trokutnog konačnog elemenata aproksimiraju se linearnim funkcijama (**slika 6.12**) čije su jednadžbe (5.34)- (5.35) već navedene kod formulacije elektromagnetskog konačnog elementa (poglavlje 5.3.1). Aproksimacijske funkcije temperature  $\bar{\vartheta}$  imaju samo jednu komponentu po čvoru konačnog elementa [40, 77].

$$\bar{\vartheta}^e = [N_1 \quad N_2 \quad N_3] \begin{Bmatrix} \vartheta_1^e \\ \vartheta_2^e \\ \vartheta_3^e \end{Bmatrix} = \sum_{j=1}^3 N_j^e \vartheta_j^e = [N]^e \begin{Bmatrix} \vartheta^e \end{Bmatrix} \quad j = 1, 2, 3 \quad (6.44)$$



**Slika 6.12** Funkcije oblika  $N_1$ ,  $N_2$ ,  $N_3$  nad osnosimetričnim trokutnim elementom i aproksimacija raspodjele temperature  $\bar{\vartheta}^e$  po elementu

Veza između proračuna elektromagnetskog i temperaturnog polja izravno je ostvarena preko članova toplinskih izvora  $P_{HB}$  i  $P_{JQ}$ . Diferencijalne jednadžbe temperaturnog polja obratka (6.12), odnosno (6.13) riješit će se formulacijom težinskog reziduala s Galerkinovom metodom rješavanja težinskog integrala na dvodimenzijском, odnosno osnosimetričnom trokutnom elementu s rubnim uvjetima zadanim su jednadžbama (6.17) do (6.19), (6.19) do (6.25).

Raspodjela vrijednosti temperature po konačnom dvodimenzijском ili osnosimetričnom linearном trokutnom elementu matematički je aproksimirana jednadžbom (6.44). Uvrštenjem aproksimacije (6.44) u jednadžbe (6.12) ili (6.13) pojavljuje se ostatak  $\mathbf{R}$  raspodijeljen po trokutnom elementu.

- a) Dvodimenzijski trokutni konačni element

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial [N]}{\partial x} \right) \{g^e\} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda \frac{\partial [N]}{\partial y} \right) \{g^e\} + \{P_{JQ} + P_{HB} - \Phi_L\} - \rho c [N] \left\{ \frac{\partial g^e}{\partial t} \right\} = [R(x, y : \{g\})] \quad (6.45)$$

- b) Osnosimetrični trokutni konačni element

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \lambda r \frac{\partial [N]}{\partial r} \right) \{g^e\} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda r \frac{\partial [N]}{\partial z} \right) \{g^e\} + r \{P_{JQ} + P_{HB} - \Phi_L\} - r \rho c [N] \left\{ \frac{\partial g^e}{\partial t} \right\} = [R(r, z : \{g\})] \quad (6.46)$$

Primjenom Galerkinove metode za postavljanje težinskog integrala,

$$\iiint_V [N]^T [R(r, z : \{g\})] dV^e = 0 \quad (6.47)$$

na gornje jednadžbe (6.45) i (6.46) s rubnim uvjetima (6.21) do (6.25) dobivaju se jednadžbe težinskog integrala s matricama dimenzija 3x3 koje množi tročlani vektor  $\{g^e\}$ .

- a) Dvodimenzijski trokutni konačni element

$$\begin{aligned} & \iiint_V [N]^T \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial [N]}{\partial x} \right) \{g^e\} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda \frac{\partial [N]}{\partial y} \right) \{g^e\} + \{P_{JQ} + P_{HB} - \Phi_L\} - \rho c [N] \left\{ \frac{\partial g^e}{\partial t} \right\} \right) dV^e + \\ & + \iint_{S_q} [\bar{N}]^T \lambda_s \left\{ \frac{\partial g^{re}}{\partial n} \right\} dS^r = 0 \end{aligned} \quad (6.48)$$

b) Osnosimetrični trokutni konačni element

$$\begin{aligned} & \iiint_V [N]^T \left( \frac{\partial}{\partial r} \left( \lambda r \frac{\partial [N]}{\partial r} \right) \{g^e\} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda r \frac{\partial [N]}{\partial z} \right) \{g^e\} + r \{P_{JQ} + P_{HB} - \Phi_L\} - r \rho c [N] \left\{ \frac{\partial g^e}{\partial t} \right\} \right) dV^e + \\ & + \iint_{S_q} [\bar{N}]^T \lambda_s r \left\{ \frac{\partial g^{\Gamma e}}{\partial n} \right\} dS^\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (6.49)$$

Jednadžbe (6.48) odnosno (6.49) uređuju se primjenom Green-Gaussovog teorema o divergenciji i izborom težinske funkcije na rubnim stranicama trokutnih elemenata  $[\bar{N}]$  takvom da je  $[N] = -[\bar{N}]$  nakon čega se dobivaju slijedeće jednadžbe za infinitezimalni volumen i površinu definirane ovisno od koordinatnog sustava:

a) Dvodimenzijalni trokutni konačni element

$$\begin{aligned} & \left( \iint_S [N]^T \rho c [N] dx dy \right) \left\{ \frac{\partial g^e}{\partial t} \right\} + \left( \iint_{S^e} \left( \frac{\partial [N]^T}{\partial x} \lambda \frac{\partial [N]}{\partial x} + \frac{\partial [N]^T}{\partial y} \lambda \frac{\partial [N]}{\partial y} \right) dx dy \right) \{g_e\} \\ & = \iint_S [N]^T \{P_{JQ} + P_{HB} - \Phi_L\} dx dy + \int_{\Gamma_0} [N]^T \lambda_s \left\{ \frac{\partial g^{\Gamma e}}{\partial n} \right\} d\Gamma \end{aligned} \quad (6.50)$$

b) Osnosimetrični trokutni konačni element

$$\begin{aligned} & 2\pi \iint_S [N]^T \rho c [N] r dr dz \left\{ \frac{\partial g^e}{\partial t} \right\} + \left( 2\pi \iint_S \left( \frac{\partial [N]^T}{\partial r} \lambda r \frac{\partial [N]}{\partial r} + \frac{\partial [N]^T}{\partial z} \lambda r \frac{\partial [N]}{\partial z} \right) dr dz \right) \{g^e\} + \\ & = 2\pi \iint_S [N]^T \{P_{JQ} + P_{HB} - \Phi_L\} dr dz + 2\pi \int_{\Gamma_q} [N]^T \lambda_s r \left\{ \frac{\partial g^{\Gamma e}}{\partial n} \right\} d\Gamma \end{aligned} \quad (6.51)$$

Drugi član na desnoj strani jednadžbi (6.50) i (6.51) predstavlja toplinski tok koji konačni element izmjenjuje s okolinom kroz oplošje  $\Gamma^e$ . Ovaj član prikladnije je izraziti preko lokalne gustoće toplinskog toka  $q_S$  izmijenjene s okolišem koja se iznova određuje za svaki novi vremenski inkrement simulacije, a povezana je s gradijentom temperature jednadžbom rubnog uvjeta (6.23). Stoga se član rubnih uvjeta na desnoj strani jednadžbi (6.50) i (6.51) zamjenjuje slijedećim izrazima:

a) Dvodimenzijijski trokutni konačni element

$$\int_{\Gamma_0} [N]^T \lambda_s \left\{ \frac{\partial g^{\Gamma_e}}{\partial n} \right\} d\Gamma = - \int_{\Gamma_0} [N]^T \{q_s\} d\Gamma \quad (6.52)$$

b) Osnosimetrični trokutni konačni element

$$2\pi \int_{\Gamma_0} [N]^T \lambda_s r \left\{ \frac{\partial g^{\Gamma_e}}{\partial n} \right\} d\Gamma = -2\pi \int_{\Gamma_0} [N]^T \{q_s\} r d\Gamma \quad (6.53)$$

Radi jednostavnijeg zapisa i numeričke integracije (Gauss-Legendreova kvadratura uz stupanj točnosti dva) uvode se pomoćne oznake matrica i vektora u jednadžbama (6.50) i (6.51) definirane kako slijedi [40, 77]:

a) Dvodimenzijijski trokutni konačni element

$$[C_{ij}^e] = \iint_S [N]^T \rho c [N] dx dy = \rho^e c^e \frac{A^e}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (6.54)$$

$$[D_{ij}^e] = \iint_{S^e} \left( \frac{\partial [N]^T}{\partial x} \lambda \frac{\partial [N]}{\partial x} + \frac{\partial [N]^T}{\partial y} \lambda \frac{\partial [N]}{\partial y} \right) dx dy = \frac{\lambda^e}{4A^e} [(b_i b_j + c_i c_j)]$$

i = 1,2,3; j = 1,2,3      (6.55)

$$\{\Phi_i^e\} = \iint_S [N]^T \{\Phi_{JQ} + \Phi_{HB} - \Phi_L\} dx dy = \frac{A^e (P_{JQ} + P_{HB} - \Phi_L)^e}{3} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (6.56)$$

$$\{Q_i^\Gamma\} = \int_{\Gamma_0} [N]^T \{q_s\} d\Gamma^e = \int_{\Gamma_0} \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} q_{s1} \\ q_{s2} \\ q_{s3} \end{Bmatrix} d\Gamma \quad (6.57)$$

b) Osnosimetrični trokutni konačni element

$$[C_{ij}^e] = 2\pi \iint_s [N]^T \rho c [N] r dr dz = 2\pi \rho^e c^e \frac{A^e r_c}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (6.58)$$

$$[D_{ij}^e] = 2\pi \iint_s \left( \frac{\partial [N]^T}{\partial r} \lambda_r \frac{\partial [N]}{\partial r} + \frac{\partial [N]^T}{\partial z} \lambda_r \frac{\partial [N]}{\partial z} \right) r dr dz = \frac{\pi \lambda^e r_c}{2 A^e} [(b_i b_j + c_i c_j)] \quad i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3 \quad (6.59)$$

$$\{\Phi_i^e\} = 2\pi \iint_s [N]^T \{\Phi_{JQ} + \Phi_{HB} - \Phi_L\} r dr dz = \frac{2\pi A^e r_c (P_{JQ} + P_{HB} - \Phi_L)^e}{3} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (6.60)$$

$$\{Q_i^\Gamma\} = 2\pi \int_{\Gamma_0} [N]^T \{q_s\} r d\Gamma^e = 2\pi \int_{\Gamma^e} \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} q_{s1} \\ q_{s2} \\ q_{s3} \end{Bmatrix} r d\Gamma \quad (6.61)$$

Matrice i vektori (6.54) do (6.61) imaju svoj fizikalni smisao:  $[C_{ij}^e]$  je matrica toplinske kapacitivnosti,  $[D_{ij}^e]$  matrica provođenja topline,  $\{Q_i^\Gamma\}$  je vektor koncentriranih rubnih uvjeta, a  $\{\Phi_i^e\}$  je vektor koncentriranih toplinskih izvora (ponora) u geometrijskom čvoru.

Vrijednosti gustoće toplinskog toka raspodijeljenog po površini obratka  $q_s = f(\Gamma)$  računa se uz pretpostavku njegove linearne promjene veličina po rubnoj stranici trokutnog elementa duljine  $L^e$  (**slika 6.13**):

$$L^e = \sqrt{(r_{p+1} - r_p)^2 + (z_{p+1} - z_p)^2} \quad (x \equiv r, y \equiv z) \quad (6.62)$$

Ekvivalentni koncentrirani toplinski tokovi u čvorove  $p$  i  $p+1$  na rubu  $S^e$  iznose:

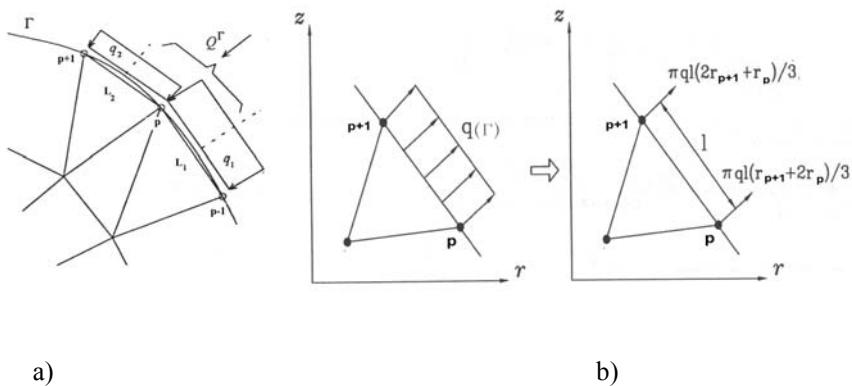
a) Dvodimenzijski trokutni konačni element [89]:

$$Q_p^e = q_{s,1}^e \frac{L_1^e}{2} + q_{s,2}^e \frac{L_2^e}{2} \quad (6.63)$$

b) Osnosimetrični trokutni konačni element [40]:

$$Q_p^e = \pi L^e \frac{r_{p+1} q_{s,p+1}^e + 2r_p q_{s,p}^e}{3} \quad (6.64.a)$$

$$Q_{p+1}^e = \pi L^e \frac{2r_{p+1} q_{p+1}^e + r_p q_p^e}{3} \quad (6.64.b)$$



Slika 6.13. Toplinski tok na graničnoj površini:

- c) dvodimenzijskog elementa [89]
- d) osnosimetričnog trokutnog elementa [40]

Pomoću jednadžbi (6.54) do (6.61) sustav jednadžbi  $e$ -tog konačnog elementa (dvodimenzijskog ili osnosimetričnog) dobiva oblik pogodan za matrični zapis:

$$\boxed{\left[ C_{ij}^e \right] \left\{ \frac{\partial \vartheta}{\partial t} \right\} + \left[ D_{ij}^e \right] \left\{ \vartheta^e \right\} = \left\{ \Phi_i^e \right\} - \left\{ Q_{ij}^e \right\}} \quad (6.65)$$

Jednadžba provođenja topline na konačnom trokutnom elementu (6.65) daje kao rješenje vrijednosti temperature (9) u k-tom vremenskom trenutku. Za izračunavanje temperaturnog polja u slijedećem trenutku  $k+1$  ( $t+\Delta t$ ) jednadžba (6.65) se dodatno diskretizira u vremenskoj domeni.

Zbog stabilnosti i točnosti rješenja nužno je izborom dovoljno bliskih vremenskih stanja ( $t, t+\Delta t$ ) osigurati monotonu promjenu temperature po cijelom matematički modeliranom području obratka tijekom intervala  $\Delta t$ . Diskretizacija u vremenskoj domeni  $\tau$  provedena je primjenom minimizacije težinskih ostataka na jednadžbu (6.65) [137].

$$\int_{\tau} W_t^T \left( \left[ C_{ij}^e \right] \left[ \frac{\partial \vartheta}{\partial t} \right] + \left[ D_{ij}^e \right] \left[ \vartheta^e \right] - \left\{ \Phi_i^e \right\} + \left\{ Q_{ij}^e \right\} \right) dt = 0 \quad (6.66)$$

$W_t$  ... težinska funkcija u vremenskoj domeni

Primjenom postupka aproksimacije funkcije u vremenskoj domeni slijedi:

$$\vartheta \approx \sum N_t \vartheta_k \quad (6.67)$$

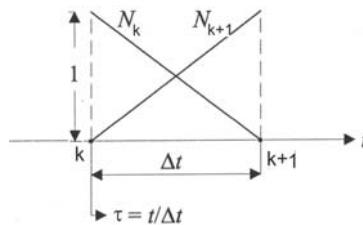
gdje je  $\vartheta_k$  Celzijeva temperatura u geometrijskom čvoru u k-tom trenutku, a  $N_t = f(t)$  vremenska interpolacijska funkcija. Za interpolacijsku funkciju  $N_t$  je dovoljan polinom prvog reda, jer u jednadžbi (6.67) postoji samo prva derivacija temperature po vremenu. Tipični vremenski element dužine  $\Delta t$  koji povezuje trenutke  $k$  i  $k+1$  prikazan je **slikom 6.14**. Linearne interpolacijske funkcije  $N_t$  u vremenskoj domeni  $\tau$  (koja odgovara jednom vremenskom elementu  $\Delta t$ ) zadane su sljedećim jednadžbama [41, 80]:

$$\tau = \frac{t}{\Delta t} \quad 0 < \tau < 1 \quad 0 < t < \Delta t \quad (6.68)$$

$$N_{t,k} = 1 - \tau \quad \frac{\partial N_{t,k}}{\partial t} = -\frac{1}{\Delta t} \quad (6.69.a)$$

$$N_{t,k+1} = \tau \quad \frac{\partial N_{t,k+1}}{\partial t} = \frac{1}{\Delta t} \quad (6.69.b)$$

Izbor linearnih interpolacijskih funkcija  $N_t$  određuje pogrešku rješenja  $\vartheta_{k+1}$  koja je reda  $O(\Delta t^2)$ . To znači da će se nakon  $k$  vremenskih koraka ukupna pogreška rješenja povećati  $k$  puta [92, 95].



Slika 6.14. Linearna interpolacijska funkcija na vremenskom elementu [80]

Uvrštenjem jednadžbi (6.67) i (6.69.a-b) u (6.66) uz pretpostavku da je vremenska domena jednaka jednom elementu slijede izrazi koji povezuju vektore  $\{g_k^e\}$  i  $\{g_{k+1}^e\}$ :

$$\begin{aligned} & \left( \left[ C_{ij}^e \right] \int_0^1 W_t^T \frac{dt}{\Delta t} \right) \{g_{k+1}^e\} + \left( \left[ D_{ij}^e \right] \int_0^1 W_t^T \tau dt \right) \{g_{k+1}^e\} - \left( \left[ C_{ij}^e \right] \int_0^1 W_t^T \frac{dt}{\Delta t} \right) \{g_k^e\} + \left( \left[ D_{ij}^e \right] \int_0^1 W_t^T (1-\tau) dt \right) \{g_k^e\} - \\ & - \int_0^1 W_t^T (N_{t,k} \{\Phi_{i,k}^e\} + N_{t,k+1} \{\Phi_{i,k+1}^e\}) dt + \int_0^1 W_t^T (N_{t,k} \{Q_{i,k}^e\} + N_{t,k+1} \{Q_{i,k+1}^e\}) dt = 0 \end{aligned} \quad (6.70.a)$$

$$\begin{aligned} & \left( \left[ C_{ij}^e \right] \int_0^1 W_t^T \frac{dt}{\Delta t} + \left[ D_{ij}^e \right] \int_0^1 W_t^T \tau dt \right) \{g_{k+1}^e\} - \left( \left[ C_{ij}^e \right] \int_0^1 W_t^T \frac{dt}{\Delta t} - \left[ D_{ij}^e \right] \int_0^1 W_t^T (1-\tau) dt \right) \{g_k^e\} - \\ & - \int_0^1 W_t^T ((1-\tau) \{\Phi_{i,k}^e\} + \tau \{\Phi_{i,k+1}^e\}) dt + \int_0^1 W_t^T ((1-\tau) \{Q_{i,k}^e\} + \tau \{Q_{i,k+1}^e\}) dt = 0 \end{aligned} \quad (6.70.b)$$

U jednadžbe (6.70.a-b) mogu se uvrstiti različite težinske funkcije  $W_t$ . Uobičajeno se umjesto težinske funkcije  $W_t$  koristi parametar  $\Theta$ :

$$\Theta = \frac{\int_0^1 W_t \tau d\tau}{\int_0^1 W_t d\tau} \quad (6.71)$$

Izbor težinske funkcije  $W_t = \tau$  znači primjenu Galerkinove metode i u vremenskoj domeni, što je prirodan izbor jer je isti pristup primjenjen u prostornoj domeni. Kod Galerkinove metode  $\Theta=2/3$  što osigurava bezuvjetnu numeričku stabilnost rješenja jednadžbi (6.70.a-b) [80].

Jednadžbe (6.70.a-b) opisuju problem početnih vrijednosti koji se rješava iteracijski. Uz pretpostavku da je poznat vektor temperature  $\{\vartheta_k^e\}$  u čvorovima konačnog elementa u k-tom trenutku treba izračunati vektor temperature  $\{\vartheta_{k+1}^e\}$  u čvorovima elementa u trenutku  $k+1$ . Uvrštenjem jednadžbe (6.71) u sustav jednadžbi (6.70.a-b) i uređivanjem sustava dobiva se jednadžba (6.72) u kojoj se uočavaju mogućnosti dalnjeg pojednostavljenja matričnog zapisa uvođenjem pomoćnih matrica  $[K_k^e]$ ,  $[K_{k+1}^e]$  i vektora  $[F^e]$ :

$$\underbrace{([C_{ij}^e] + \Theta \Delta t [D_{ij}^e])}_{[K_{k+1}^e]} \{\vartheta_{k+1}^e\} = \underbrace{([C_{ij}^e] - (1-\Theta) \Delta t [D_{ij}^e])}_{[K_k^e]} \{\vartheta_k^e\} + \underbrace{(\Theta \{\Phi_{i,k+1}^e\} + (1-\Theta) \{\Phi_{i,k}^e\} - \Theta \{Q_{i,k+1}^e\} - (1-\Theta) \{Q_{i,k}^e\}) \Delta t}_{\{F^e\}} \quad (6.72)$$

$$[K_{k+1}^e] = [C_{ij}^e] + \Theta \Delta t [D_{ij}^e] \quad (6.73.a)$$

$$[K_k^e] = [C_{ij}^e] - (1-\Theta) \Delta t [D_{ij}^e] \quad (6.73.b)$$

$$\{F^e\} = (\Theta \{\Phi_{i,k+1}^e\} + (1-\Theta) \{\Phi_{i,k}^e\} - \Theta \{Q_{i,k+1}^e\} - (1-\Theta) \{Q_{i,k}^e\}) \Delta t \quad (6.73.c)$$

Uz pomoćne matrice (6.73.a-c) formulacija jednadžbe konačnog nestacionarnog temperaturnog elementa (6.72) (dvodimenziskog ili osnosimetričnog) dobiva svoj konačni oblik:

$$[K_{k+1}^e] \{\vartheta_{k+1}^e\} = [K_k^e] \{\vartheta_k^e\} + \{F^e\} \quad (6.74)$$

Vrijednosti pojedinih članova u jednadžbi (6.74) ovisne su o Celzijevoj temperaturi  $\vartheta_k$ , pa njeno rješavanje zahtijeva i dodatno prilagođavanje vrijednosti fizikalnih svojstva i površinskog toplinskog toka vrijednostima temperature u pojedinim čvorovima u svakom vremenskom inkrementu  $\Delta t$ . Vrijednosti toplinskih svojstava materijala ( $\rho, c, \lambda, L_{ij}$ ) na konačnom elementu konstantne su prema pretpostavkama uvedenim u poglavlju 4.4.1, a mijenjaju se od jednog do drugog konačnog elementa ovisno o srednjoj temperaturi elementa u vremenskom intervalu  $\Delta t$ .

$$\bar{\vartheta}^e = \frac{1}{6} \sum_{k=1}^3 (\vartheta_k^e + \vartheta_{k+1}^e) \quad (6.75)$$

**Globalni sustav FEM jednadžbi temperaturnog polja.** Jednadžbom (6.74) određen je integralni doprinos trokutnog konačnog elementa aproksimacijskoj raspodjeli temperaturnog polja u obratku. Slijedeći korak u primjeni metode konačnih elementa je sastavljanje globalnog sustava jednadžbi za nepoznate temperature  $\vartheta_{k+1}$ , na svim poddomenama, odnosno geometrijskim čvorovima obratka.

Globalni sustav jednadžbi postavlja se u obliku globalnih matrica i vektora dobivenih superpozicijom lokalnih matrica i vektora trokutnih elemenata. Prije superpozicije lokalne matrice i vektori prošire se s nultim članovima kako bi postali istih dimenzija kao i globalne matrice i vektor. Veličina globalne matrice i vektora određena je brojem trokutnih elementa. Prema jednadžbi (6.74) definiraju se sljedeće globalne matrice i vektori:

$$[K_{k+1}] = \sum_e ([C^e] + \Theta \Delta t [D^e]) \quad (6.76.a)$$

$$[K_k] = \sum_e ([C^e] - (1 - \Theta) \Delta t [D^e]) \quad (6.76.b)$$

$$\{F\} = \sum_e (\Theta \Delta t \{F_{k+1}^e\} + (1 - \Theta) \Delta t \{F_k^e\} + \Theta \Delta t \{Q_{k+1}^e\} + (1 - \Theta) \Delta t \{Q_k^e\}) \quad (6.76.c)$$

$$[K_{k+1}] \{\vartheta_{k+1}\} = [K_k] \{\vartheta_k\} + \{F\} \quad (6.76)$$

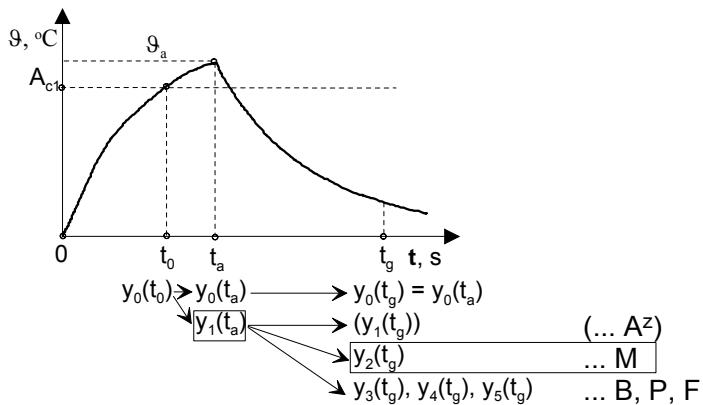
U formirani globalni sustav već su uključeni prirodni rubni uvjeti preko vektora  $Q^e$ . Preostaje još uključenje uvjeta  $\vartheta = \vartheta_0$ , za geometrijske čvorove na površini obratka ispod prskalice koji su uronjeni u sredstvo za gašenje. Najjednostavniji način njihovog uključenja je korištenjem velikog broja na dijagonalnim članovima matrica  $[K_{k+1}]$  i  $[K_k]$ . Ove matrice formiraju se bez obzira na rubni uvjet, a zatim se dijagonalnom članu doda veliki broj  $v >> K_{k+1,ee}$  i  $v >> K_{k,ee}$  takav da vrijedi  $v + K_{k+1,ee} \approx v$ , odnosno  $v + K_{k,ee} \approx v$ . Također se postavlja član  $F_e = \vartheta_0$ . Za računalo s točnošću računanja na 6 znamenki je  $1,23456 \cdot 10^{15} = 1,00000 \cdot 10^{15}$ . Ovim je globalni sustav (6.76) "prisiljen" na rješenje  $\vartheta_e = \vartheta_0$  dotičnim dijelovima površine, jer je doprinos ostalih elementa u globalnim matricama zanemariv u odnosu na  $v$ . Metoda je jednostavna za programiranje i ne narušava simetriju globalnih matrica [77, 89].

## 7.0 MATEMATIČKO MODELIRANJE FAZNIH PRETVORBI U OBRATKU

### 7.1 Definicija kinetičkog dijagrama i jednadžbe za brzinu fazne pretvorbe

Za postavljanje matematičkog modela kinetičkih jednadžbi faznih pretvorbi u elementarnom (ili diskretiziranim konačnom) volumenu materijala važna su sljedeća tri trenutka (**slika 7.1**):

- vrijeme početka austenitizacije ( $t_0$ ),
- vrijeme završetka austenitizacije ( $t_a$ ),
- vrijeme završetka gašenja ( $t_g$ ).



**Slika 7.1.** Vremenski ciklus induksijskog kaljenja i udjeli mikrostrukturnih faza

Već je u pretpostavkama matematičkog modela (poglavlje 4.4.1) napomenuto da vrste i udjeli mikrostrukturnih faza u elementarnom volumenu u polaznom stanju ne moraju biti poznati, pa se volumni udio polazne mikrostrukture na početku austenitizacije prepostavlja jednak jedinici:

$$y_0(t_0) = 1 \quad (7.1)$$

Nakon završetka austenitizacije (kod primjene metode stacionarnog ili rotacionog induksijskog kaljenja), odnosno u zoni ugrijavanja (kod primjene metode posmičnog ili rotaciono posmičnog induksijskog kaljenja) iz faza polazne mikrostrukture nastaje austenit (A) volumnog udjela  $y_1$ :

$$y_1(t_a) \leq 1 \quad (7.2)$$

i prema zakonu održanja mase:

$$y_0(t_a) + y_1(t_a) = 1 \quad (7.3)$$

Po završetku gašenja pothlađeni austenit se transformirao u jednu ili više mikrostrukturalnih faza poznatih (računski određenih) volumnih udjela. U općem slučaju iz pothlađenog austenita mogu nastati martenzit ( $M$ ) volumnog udjela  $y_2$ , bainit ( $B$ ) udjela  $y_3$ , perlit ( $P$ ) udjela  $y_4$  i ferit ( $F$ ) udjela  $y_5$ . Neaustenitizirani dio polazne mikrostrukture  $y_0(t_g) = y_0(t_a)$  ostao je nepromijenjen nakon gašenja, pa i dalje vrijedi prošireni oblik zakona održanja mase (i volumnih udjela):

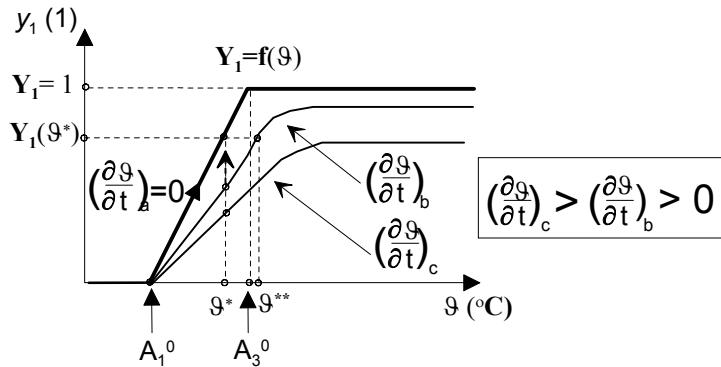
$$y_0(t_g) + y_1(t_g) + y_2(t_g) + y_3(t_g) + y_4(t_g) + y_5(t_g) = 1 \quad (7.4)$$

Iz gornjeg razmatranja proizlaze slijedeća osnovna pravila o brzini pretvorbe polazne mikrostrukture ( $\partial y_0 / \partial t$ ) i potom austenita ( $\partial y_1 / \partial t$ ) tijekom temperaturno-vremenskog ciklusa induktijskog kaljenja [101]:

$$\left( \frac{\partial y_0}{\partial t} \right) = \begin{cases} - & \leq 0, \text{ kad je } t \in [t_0, t_a] \\ = 0, & \text{kad je } t \in [t_a, t_g] \end{cases} \quad (7.5.a)$$

$$\left( \frac{\partial y_1}{\partial t} \right) = \begin{cases} - & \geq 0, \text{ kad je } t \in [t_0, t_a] \\ \leq 0, & \text{kad je } t \in [t_a, t_g] \end{cases} \quad (7.5.b)$$

**Kinetika nastanka nove faze** može se shematski prikazati u tzv. "kinetičkom dijagramu" temperatura – volumni udio nove faze (**slika 7.2**) [60]. Primjer kinetičkog dijagrama na **slici 7.2**. shematski prikazuje nastanak austenita ugrijavanjem podeutektoidnog čelika. Iz dijagrama se vidi kako pri vrlo sporom ugrijavanju ( $\partial \theta / \partial t_a \approx 0$ ) nastali udio austenita  $y_1$  teži ravnotežnom udjelu  $Y_1$  na temperaturama između  $A_1^0$  i  $A_3^0$  (odredene iz ravnotežnog dijagrama stanja). S povećanjem brzine ugrijavanja na ( $\partial \theta / \partial t_b$ , odnosno ( $\partial \theta / \partial t_c$ )) uočava se sve manji mogući udio austenita  $y_1^*$  na temperaturi  $\theta^*$  u usporedbi s ravnotežnim udjelom  $Y_1$ , kao i pomicanje temperature završetka austenitne pretvorbe  $A_3$  na vrijednosti veće od ravnotežne temperature  $A_3^0$ . Ako bi se na temperaturi  $\theta^*$  zaustavilo kontinuirano ugrijavanje i nastavilo izotermičko držanje, nakon vrlo dugog vremena držanja postigao bi se udio austenita  $Y_1(\theta^*)$  manji od maksimalno mogućeg udjela  $Y_1$ , tj. pretvorba bi ostala nezavršena.



**Slika 7.2.** Shematski prikaz kinetike stvaranja austenita kontinuiranim ugrijavanjem  $(\partial \theta / \partial t) > 0$  i izotermičkim držanjem  $(\partial \theta / \partial t) \approx 0$  podeutektoidnog čelika.

**Brzina pretvorbe** (jedne ili više faza)  $\partial y_i / \partial t$  u višefaznom materijalu uz kontinuirano ugrijavanje ili ohlađivanje općenito ovisi o njegovom kemijskom sastavu, polaznoj mikrostrukturi, brzini ugrijavanja ili ohlađivanja, temperaturi, ravnotežnom udjelu nove faze i već nastalom udjelu faze  $y_i$ . Utjecaj navedenih čimbenika na kinetiku fazne pretvorbe može se obuhvatiti kinetičkom jednadžbom općeg oblika (7.6):

$$\frac{\partial y_i}{\partial t} = f[\vartheta(t), y_i] \cdot g\left[\vartheta(t), \frac{\partial \vartheta}{\partial t}\right] \quad (7.6)$$

Stacionarno rješenje jednadžbe (7.6) za konstantnu temperaturu  $\vartheta = \vartheta_{IT}$  treba biti takvo da je  $f[\vartheta_{IT}, Y_i(\vartheta)] = 0$ . To znači da će brzina fazne pretvorbe  $\partial y_i / \partial t$  postati jednaka nuli kad se nakon dovoljno dugog izotermičkog držanja ( $t \rightarrow \infty$ ,  $\vartheta_{IT} = \text{konst.}$ ) postigne ravnotežni udio nove faze  $y_i = Y_i(\vartheta_{IT})$  najvećeg mogućeg iznosa za temperaturu  $\vartheta_{IT}$ .

$$Y_i = \lim_{\substack{t \rightarrow \infty \\ \vartheta_{IT} = \text{konst.}}} y(t) \quad (7.7.a)$$

$$\lim_{\substack{t \rightarrow \infty \\ \vartheta_{IT} = \text{konst.}}} f(\vartheta_{IT}, Y(\vartheta_{IT})) = 0 \quad (7.7.b)$$

**Ravnotežni volumni udio nove faze ( $0 \leq Y_i \leq 1$ )** može se odrediti iz ravnotežnih dijagrama stanja, termodinamičko- metalurških modela ili iz dilatometrijskih ispitivanja (uz vrlo sporo ugrijavanje i ohlađivanje). Određivanje ravnotežnog volumnog udjela pojedinih mikrostrukturnih faza koje se

mogu pojaviti pri induktijskom kaljenju bit će opisano u poglavlju 7.2. Ravnotežni volumni udio treba odrediti za svaku temperaturu iz intervala između temperature početka i završetka fazne pretvorbe.

Za male promjene udjela nove faze  $y_i$  oko ravnotežnog udjela  $Y_i(\vartheta)$  funkcija  $f(\vartheta, y_i)$  može se aproksimirati prvim članom Taylorovog reda:

$$f[\vartheta(t), y_i] \approx f(\vartheta, y_i) + \frac{\partial f(\vartheta, Y_i)}{\partial y} (y_i - Y_i(\vartheta)) \quad (7.8)$$

Iz uvjeta (7.7.a-b) postavljenog na stacionarnost rješenja jednadžbe (7.6) slijedi da je prvi član jednadžbe (7.8) jednak nuli, što daje jednadžbu (7.9):

$$f[\vartheta(t), y_i] = (Y_i(\vartheta) - y_i) \left[ -\frac{\partial f(\vartheta, Y_i)}{\partial y} \right] \quad (7.9)$$

Derivacija funkcije  $\partial f / \partial y$  uvijek je pozitivnih vrijednosti, inače se nikada ne bi postiglo približavanje udjela nove faze  $y_i$  ravnotežnom udjelu  $Y_i$ . Derivacija  $\partial f / \partial y$  fizikalno predstavlja tzv. "funkciju vremenskog kašnjenja pretvorbe"  $\tau(\vartheta)$  [60]:

$$\frac{1}{\tau(\vartheta)} = -\frac{\partial f(\vartheta, Y_i)}{\partial y} \quad (7.10)$$

**Funkcija kašnjenja pretvorbe  $\tau(\vartheta)$ .** Kod izotermičke pretvorbe udio nove faze  $y_i$  eksponencijalno se približava ravnotežnom udjelu  $Y_i(\vartheta)$  s vremenskom konstantom  $[1/\tau(\vartheta_{IP})]$  ovisnom o temperaturi pretvorbe. Kod anizotermičke pretvorbe udio nove faze  $y_i$  slijedi promjene ravnotežnog udjela  $Y_i(\vartheta)$  s vremenskim kašnjnjem  $1/\tau(\vartheta)$  (**slika 7.2**). Npr. kontinuiranim ugrijavanjem polazne mikrostrukture brzinom  $(\partial \vartheta / \partial t)_a$  na temperaturu  $A_1^\circ < \vartheta^* < A_3^\circ$  dobit će se udio nove faze  $y(\vartheta^*) < Y(\vartheta^*)$ . Za dobivanje udjela nove faze jednakog ravnotežnom udjelu  $Y(\vartheta^*)$  čelik treba ugrijati na temperaturu  $\vartheta^* > A_3^\circ$ . Trajanje ugrijavanja od temperature  $\vartheta^*$  do temperature  $\vartheta^{**}$  predstavlja vrijeme kašnjenja pretvorbe  $1/\tau(\vartheta^{**})$ . S povećanjem brzine ugrijavanja (ili ohlađivanja) vrijeme kašnjenja pretvorbe postaje sve veće (a vrijednosti funkcije kašnjenja pretvorbe sve manje) pa su sve veće razlike između stvarne i ravnotežne temperature završetka pretvorbe.

**Funkcija brzine (ugrijavanja ili ohlađivanja)** treba ispunjavati sljedeće zahtjeve [58, 60]:

$$g\left(\vartheta(t), \frac{\partial \vartheta}{\partial t}\right) = \begin{cases} = 1, & \text{ako je } \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial t} \approx 0\right) \\ > 0, & \text{ako je } \left(\left|\frac{\partial \vartheta}{\partial t}\right| > 0\right) \end{cases} \quad (7.11)$$

Ovi zahtjevi osiguravaju vrijednost funkcije  $g(\partial \vartheta / \partial t)$  jednaku jedinici za stacionarno rješenje jednadžbe (7.6) i pozitivne vrijednosti u rješenju problema anizotermičkih faznih pretvorbi.

**Model rješenja opće kinetičke jednadžbe za brzinu fazne pretvorbe.** Opća kinetička jednadžba (7.6) uvedena je u teoriju kinetike faznih pretvorbi fenomenološkim razmatranjima i uočavanjem ponašanja čelika u mikrostrukturnim pretvorbama. Za sada još ne postoji njen jedinstveno rješenje koje bi odgovaralo fazama ugrijavanja i ohlađivanja većine čelika, već se uobičajeno postavljaju matematički modeli prikladni za pojedini tip mikrostrukturnih faznih pretvorbi s određenim brojem koeficijenta i korekcijskih faktora [58, 60, 102, 103]. Iz analize nekoliko značajnijih rješenja problema predviđanja mikrostrukturnih faznih pretvorbi pri induksijskom kaljenju (poglavlje 3.3) i literaturi izvori [9, 38, 42, 58, 60, 69] izabran je i razrađen kinetički model "Leblond-Devaux" za opis cijele kinetike faznih pretvorbi u postupku induksijskog kaljenja. Ovaj model je u usporedbi s ostalim analiziranim modelima najprikladniji za predviđanje brzine fazne pretvorbe pri brzom kontinuiranom ugrijavanju i ohlađivanju.

**Prošireni Leblond-Devaux-ov kinetički model** za opis anizotermičkih pretvorbi pri induksijskom kaljenju postavljen je uvrštenjem jednadžbi (7.9) do (7.11) u opću kinetičku jednadžbu (7.6).

$$\frac{\partial y[\vartheta(t)]}{\partial t} = \frac{Y[\vartheta(t)] - y[\vartheta(t)]}{\tau[\vartheta(t)]} \cdot g\left[\vartheta(t), \frac{\partial \vartheta}{\partial t}\right] \quad (7.12)$$

$\partial y / \partial t$	...	brzina pretvorbe ( $s^{-1}$ )
$y$	...	udio nove faze dobiven na temperaturi $\vartheta$
$Y$	...	maksimalno mogući udio nove faze na temperaturi $\vartheta$ ( $0 < Y < 1$ )
$\tau(\vartheta)$	...	funkcija vremenskog kašnjenja pretvorbe na temperaturi $\vartheta$ [ $\tau(\vartheta) > 0$ ]

Oblik i koeficijenti pojedinih članova opće kinetičke jednadžbe faznih pretvorbi (7.12) pri kontinuiranom ugrijavanju i ohlađivanju određuju se za austenitizaciju, a potom za gašenje u sljedeća dva poglavlja.

## 7.2 Razrada kinetičkog modela faznih pretvorbi

### 7.2.1 Model faznih pretvorbi pri austenitizaciji

Prošireni Leblond-Devaux-ov kinetički model (7.12) na lijevoj strani jednadžbe ima član koji u sebi sadrži derivaciju složene funkcije  $y_1[\vartheta(t)]$  pa se za opis anizotermičke austenitizacije jednadžba (7.12) može zapisati u sljedećem obliku nakon deriviranja složene funkcije  $\frac{\partial y[\vartheta(t)]}{\partial t}$  i uređenja polazne jednadžbe:

$$\boxed{\frac{\partial y_1}{\partial \vartheta} = \frac{Y_1 - y_1}{\tau_1 \frac{d\vartheta}{dt}} g_1} \quad (7.13)$$

$Y_1$  ... ravnotežni volumni udio austenita ( $\text{mm}^3/\text{mm}^3$ )

$y_1$  ... volumni udio austenita,  $\text{mm}^3/\text{mm}^3$

$\tau_1$  ... funkcija vremenskog kašnjenja austenitne pretvorbe,  $\text{s}^\circ\text{C}$

$g_1$  ... funkcija utjecaja brzine ugrijavanja na pretvorbu

$\vartheta$  ... Celzijusova temperatura,  $^\circ\text{C}$

Za rješavanje diferencijalne jednadžbe (7.13) treba zadati funkcije  $Y_1 = f(\vartheta)$ ,  $\tau_1 = f(\vartheta)$  i  $g_1 = f(\vartheta)$  ovisne o temperaturi za konkretni čelik. Za određivanje funkcije ravnotežnog udjela austenita pri zagrijavanju koristit će se ravnotežni dijagrami stanja. Za određivanje funkcije vremenskog kašnjenja austenitizacije i pomoćne funkcije  $q(\vartheta)$  koristit će se ravnotežni dijagrami stanja i dijagram otapanja faza pri brzom zagrijavanju (TTS dijagram) konkretnog čelika. Član jednadžbe (7.13) koji se odnosi na funkciju brzine ugrijavanja  $g[\vartheta, \partial\vartheta/\partial t]$  u vlastito razvijanom kinetičkom modelu austenitizacije aproksimiran je jednadžbom (7.14) prema [59] koja u potpunosti zadovoljava uvjete (7.11) karakteristične za ovakav tip funkcija:

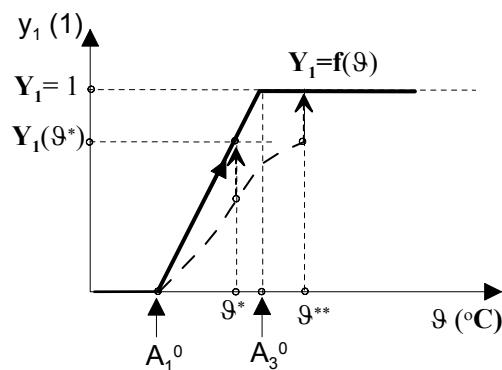
$$g_1 = \exp\left[-q_1 \frac{\partial \vartheta}{\partial t}\right] \quad (7.14)$$

$q_1 = f(\vartheta)$ ... parametar brzine ugrijavanja,  $(\text{K}/\text{s})^{-1}$

**Određivanje funkcije ravnotežnog udjela austenita  $Y_l=f(\vartheta)$ .** Prema predviđanjima iz dijagrama stanja, pri ravnotežnom zagrijavanju čelika na temperaturi  $A_1^0$  nastupa vrlo brz nastanak austenita otapanjem eutektoidne faze. Međutim pokusi ugrijavanja čelika brzinama većim od  $0,05 \text{ } ^\circ\text{C/s}$  (prema podacima iz TTS dijagrama) pokazuju postojanost eutektoidne faze i na temperaturama iznad  $A_1$ , sve do temperature  $A_3$ . Ovo se može objasniti mehanizmom otapanja eutektoidnog cementita koji se uglavnom prije otapa na krajevima lamelica, nego po dužini lamelica pa je nužna viša temperatura ili duže vrijeme austenitizacije za potpuno otapanje eutektoidne faze. Stoga je austenit nastao između temperatura  $A_1$  i  $A_3$  izrazito nehomogenog sastava s područjima siromašnim na ugljiku (mjesta feritnih zrna) i bogatim na ugljiku (mjesta oko eutektoidnih karbida). Iznad temperature  $A_3$  do temperature  $A_{ch}$  sadržaj ugljika u austenitu ujednačuje se difuzijom.

Iz ovakvog tijeka austenitizacije proizlazi da je stvaranje austenita pri kontinuiranom zagrijavanju postepen proces u kojem se otapanje eutektoidnih karbida i feritno-austenitna pretvorba odvijaju u cijelom intervalu između temperatura  $A_1$  i  $A_3$ . Stoga je u razrađenom kinetičkom modelu austenitne pretvorbe pretpostavljena po dijelovima linearna ovisnost ravnotežnog udjela austenita o temperaturi austenitizacije (**slika 7.3**) zadana izrazom (7.15):

$$Y_l(\vartheta) = \begin{cases} 0, & \text{ako je } \vartheta < A_1^0 \\ \frac{1}{A_3^0 - A_1^0} \vartheta - \frac{A_1^0}{A_3^0 - A_1^0}, & \text{ako je } A_1^0 < \vartheta < A_3^0 \\ 1, & \text{ako je } \vartheta \geq A_3^0 \end{cases} \quad (7.15)$$



**Slika 7.3.** Tijek i izgled funkcije  $Y_l(\vartheta)$  pri austenitnoj pretvorbi kontinuiranim ugrijavanjem podeutektoidnog čelika

Vrijednosti temperatura početka  $A_1$  i završetka  $A_3$  austenitizacije pri neravnotežnom (brzom) ugrijavanju više su od ravnotežnih i ovise uglavnom o kemijskom sastavu, polaznoj mikrostrukturi čelika i srednjoj brzini ugrijavanja  $v_a$ , tj.  $A_1 = f(v_a)$ ,  $A_3 = f(v_a)$ .

Upotreba ravnotežnih temperatura  $A_1^0$  i  $A_3^0$  u jednadžbi (7.15) opravdana je slijedećim razmatranjem. Ako je brzina ugrijavanja čelika veća od  $0,05 \text{ } ^\circ\text{C/s}$  i ugrijavanje se zaustavi na nekoj temperaturi  $\vartheta^*$  manjoj od  $A_3^0$  te nastupi izotermičko držanje, najveći (ravnotežni) udio austenita koji se može postići manji je od 1 i ovisi o temperaturi  $\vartheta^*$  (prema jednadžbi (7.15)). Ako je nakon brzog ugrijavanja čelika temperatura austenitizacije viša od  $A_3^0$ , ali još uvijek manja od  $A_3 = f(v_a)$  kad bi se prekinulo kontinuirano ugrijavanje i nastavilo izotermičko držanje na temperaturi  $\vartheta^{**}$  austenitna pretvorba potpuno bi se završila.

**Temperature  $A_1^0$  i  $A_3^0$**  mogu se odrediti iz ravnotežnih dijagrama stanja, od Fe-C dijagrama za nelegirane čelike do pseudobinarnih, ternarnih i ostalih kompleksnih dijagrama za legirane čelike. Orientacijske vrijednosti ovih temperatura (uz točnost  $\pm 5 \text{ } ^\circ\text{C}$ ) za nelegirane i niskolegirane podeutektoidne čelike dolje navedenog sastava mogu se odrediti iz regresijskih jednadžbi (7.16)-(7.17) prema [55] za slijedeći kemijski sastav čelika:

%C	%Mn	%Si	%Ni	%Cr	%Mo
0,2 - 0,7	0 - 1,5	0 - 0,3	0 - 2,8	0 - 1,5	0 - 0,6

$$A_1^0 = 739 - 22 C + 2 Si - 7 Mn + 14 Cr + 13 Mo + 13 Ni + 20 V \quad (7.16)$$

$$\begin{aligned} A_3^0 = & 883,49 - 275,89 C + 90,91 C^2 - 12,26 Cr^2 + 16,45 C Cr - 29,96 Mn + 23,5 C Mn + 8,49 Mo - 10,80 \\ & C Mo - 25,56 Ni + 14,71 C Ni + 1,45 Mn Ni + 0,76 Ni^2 + 13,53 Si - 3,47 Mn Si \end{aligned} \quad (7.17)$$

**Određivanje funkcije vremenskog kašnjenja austenitne pretvorbe  $\tau_l(\vartheta)$ .** Prema [73] porast vrijednosti temperatura  $A_1$  i  $A_3$  u odnosu na njihove ravnotežne vrijednosti  $A_1^0$  i  $A_3^0$  proporcionalan je produktu funkcije vremenskog kašnjenja pretvorbe  $\tau_l(\vartheta)$  i srednje brzine ugrijavanja  $v_a$ :

$$A_1 - A_1^0 = \tau_l v_a \quad (7.18.a)$$

$$A_3 - A_3^0 = \tau_l v_a \quad (7.18.b)$$

Iz jednadžbi (7.18.a-b) slijede iznosi funkcije vremenskog kašnjenja pretvorbe za raspon srednjih brzina ugrijavanja od 0,05 do 2400 °C/s ovisni od temperature austenitizacije prema TTS dijagramu konkretnog čelika:

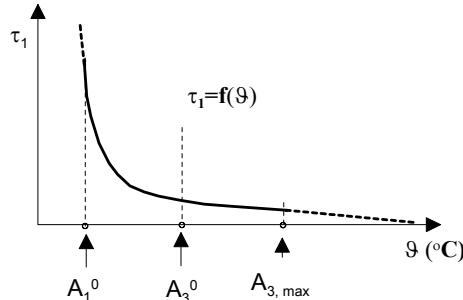
$$\tau_1(\vartheta) = \frac{\vartheta - A_1^0}{v_a} \quad \vartheta = A_1, \quad (7.19.a)$$

$$\tau_1(\vartheta) = \frac{\vartheta - A_3^0}{v_a} \quad \vartheta = A_3 \quad (7.19.b)$$

Oblik i koeficijente funkcije vremenskog kašnjenja pretvorbe (**slika 7.4**) treba odrediti za konkretni čelik, odnosno njegov TTS dijagram. U vlastito razvijenom matematičkom modelu austenitizacije i računalnom programu za simulaciju induksijskog kaljenja korištene su dvije vrste funkcija za aproksimaciju  $\tau = f(\vartheta)$ : polinomi prvog, drugog ili trećeg stupnja (7.20.a) i eksponencijalna funkcija (7.20.b). Koeficijenti aproksimacijskih funkcija (7.20.a-b) određuju se nelinearnom regresijskom analizom, a potom se za daljnji proračun koristi onaj oblik aproksimacijske funkcije koji aproksimira rezultate proračuna (7.19.a-b) s najmanjom sumom kvadrata odstupanja.

$$\tau_1(\vartheta) = k_3(\vartheta - A_1^0)^3 + k_2(\vartheta - A_1^0)^2 + k_1(\vartheta - A_1^0) + k_0 \quad (7.20.a)$$

$$\tau_1(\vartheta) = \exp[-k_1(\vartheta - A_1^0) + k_0] \quad (7.20.b)$$



**Slika 7.4.** Shematski prikaz funkcije vremenskog kašnjenja austenitne pretvorbe ( $\tau_1(\vartheta)$ ) u kontinuiranim zagrijavanju podeutektoidnog čelika

**Određivanje funkcije utjecaja brzine ugrijavanja na kinetiku fazne pretvorbe  $g_1$**  može se provesti iz TTS dijagrama ili iz eksperimentalno snimljene krivulje nastanka austenita pri ugrijavanju

poznatom brzinom  $v_a$ . U vlastito razvijanom kinetičkom modelu austenitizacije funkcija  $g_1$  određena je uz pomoć TTS dijagrama konkretnog čelika. Za njeno određivanje uvedene su slijedeće tri pretpostavke:

- Oblik i koeficijenti funkcije  $g_1$  ne mijenjaju se u intervalu temperatura i brzina ugrijavanja s kojima je snimljen TTS dijagram promatranog čelika.
- Brzina nastanka austenita  $\partial Y_1 / \partial t$  na početku (na temperaturi  $A_1$ ) i završetku pretvorbe (na temperaturi  $A_3$ ) vrlo je mala i iznosi oko  $10^{-6} \text{ mm}^3/\text{mm}^3\text{s}$ .
- Ugrijavanjem polazne mikrostrukture čelika (bez karbida postojanih na visokim temperaturama) na temperaturu  $A_1$  nastaje 1 % austenita, a ugrijavanjem na temperaturu  $A_3$  pretvorba je praktički završena uz nastanak 99 % austenita, što je u skladu s podacima o snimanju TTS dijagrama [10].

Uz uvedene pretpostavke i poznatu aproksimacijsku funkciju vremenskog kašnjenja pretvorbe  $\tau(\vartheta)$  polazeći od jednadžbe (7.12) može se postaviti sustav kinetičkih jednadžbi za početak i završetak stvaranja austenita iz kojih se računa iznos funkcije  $g_1$ :

$$g_1\left(\vartheta, \frac{\partial \vartheta}{\partial t}\right)_{A_1} = 10^{-6} \left[ \frac{\tau_1(\vartheta)}{Y_1 - 0,01} \right]_{v_a = \text{konst}_1} \quad \vartheta = A_1, \quad Y_1 = 1 \quad (7.21.a)$$

$$g_1\left(\vartheta, \frac{\partial \vartheta}{\partial t}\right)_{A_3} = 10^{-6} \left[ \frac{\tau_1(\vartheta)}{Y_1 - 0,99} \right]_{v_a = \text{konst}_1} \quad \vartheta = A_3, \quad Y_1 = 1 \quad (7.21.b)$$

Oblik aproksimacijske jednadžbe funkcije  $g_1$  bio je naveden jednadžbom (7.14) u kojoj je nepoznanica pomoćna funkcija  $q_1$  ovisna o temperaturi ugrijavanja. Pri razradi vlastitog kinetičkog modela austenitizacije pretpostavljena je linearne ovisnosti pomoćne funkcije  $q_1$  o temperaturi ugrijavanja pa se regresijskom analizom niza izračunatih vrijednosti funkcije  $g_1$  (jednadžbama (7.21.a-b)) za različite temperature i brzine ugrijavanja određuju koeficijenti  $k_{g1}$  i  $k_{g0}$  u aproksimacijskoj jednadžbi (7.22):

$$g_1\left(\vartheta, \frac{\partial \vartheta}{\partial t}\right) = \exp\left[-k_{g1}\vartheta \frac{\partial \vartheta}{\partial t} + k_{g0}\right] \quad (7.22)$$

**Numeričko rješenje proširenog modela Leblond-Devaux** traži se za jednadžbu dobivenu uvrštenjem slijedećih funkcija u jednadžbu (7.14):  $Y_1(\vartheta)$  (jednadžba (7.15) s pomoćnim koeficijentima  $a_1$  i  $b_1$ ),  $\tau_1(\vartheta)$  (jednadžba (7.20.a) ili (7.20.b)) i  $g_1$  (jednadžba (7.22)).

$$\frac{\partial y_1}{\partial \vartheta} = \frac{a_1 \vartheta + b_1 - y_1(\vartheta(t))}{\tau_1(\vartheta) \frac{\partial \vartheta}{\partial t}} g_1 \left( \vartheta, \frac{\partial \vartheta}{\partial t} \right) \quad (7.23.a)$$

$$a_1 = \frac{1}{A_3^0 - A_1^0} \quad ; \quad b_1 = -\frac{A_1^0}{A_3^0 - A_1^0} \quad (7.23.b -c)$$

Diferencijalna jednadžba (7.23.a) riješena je numeričkom metodom Runge-Kutta IV reda uz aproksimaciju porasta temperature u intervalu ugrijavanja ( $t^k < t < t^{k+1}$ ) linearom funkcijom (7.24):

$$\vartheta^{k+1} = v_a t + \vartheta^k \quad (7.24)$$

$k$  ... vremenski inkrement (korak) simulacije

## 7.2.2 Model faznih pretvorbi pri gašenju

**Prošireni kinetički model Leblond-Devaux.** Prema [60, 69] polaznu jednadžbu Leblond-Devaux modela (7.13) moguće je primijeniti i za predviđanje brzine faznih pretvorbi pri raspadu pothlađenog austenita. Kod jednostavnih faznih pretvorbi u kojima sudjeluju samo dvije faze (npr. pothlađeni austenit se pretvara u ferit, bez prisutnosti ostalih faza) volumni udio nove faze se povećava, na račun smanjenja udjela ishodne faze, a njihov zbroj tijekom cijele pretvorbe jednak je jedinici. U slučaju složenijih pretvorbi prisutnih pri kontinuiranom ohlađivanju pothlađenog austenita u kojima istovremeno nastaje nekoliko faza (npr. ferit + perlit + bainit + martenzit) pri računanju brzine fazne pretvorbe treba uzeti u obzir utjecaj krivulje ohlađivanja na tijek pretvorbe i nastanak novih faza kao i eventualni utjecaj faza nastalih na višim temperaturama (iznad 500°C) na fazne pretvorbe (nukleaciju i rast novih faza) pri nižim temperaturama (između 500 °C i temperature  $M_s$ ). Za rješenje ovog problema još ne postoje jedinstvene preporuke o izboru funkcija kojima bi se ovi fenomeni obuhvatili. Svojstva ovih funkcija prema svim analiziranim izvorima [60, 69, 70, 103] trebaju biti u skladu s uvjetom (7.10) i karakteristikama TTT dijagrama kontinuiranog ohlađivanja. Stoga je za opis kinetike faznih pretvorbi pri gašenju razrađen vlastiti kinetički model na temelju Leblond-Devaux modela (7.12) i analize TTT dijagrama kontinuiranog ohlađivanja slijedećih karakteristika:

- Najveći udio novih faza (ferita, perlita ili bainita) kod faznih pretvorbi s kontinuiranim ohlađivanjem ne predstavlja termodinamički ravnotežni udio već udio nastao kao posljedica ohlađivanja određenom krivuljom  $\vartheta-t$  do temperature završetka izlučivanja  $i$ -faze iz

pothlađenog austenita. Stoga se za primjenljivost jednadžbi oblika (7.12) kod višefaznih pretvorbi čini prikladnim umjesto (termodinamički) ravnotežnih udjela uvesti najveće moguće udjele faza ( $Y_{m,i} = f(\vartheta)$ ) koji se postižu s određenom krivuljom ohlađivanja (npr. u TTT dijagramu kontinuiranog ohlađivanja) pri čemu trebaju biti zadovoljeni zakon održanja mase (7.4) i slijed faznih pretvorbi konkretne krivulje ohlađivanja  $\vartheta_t$ .

- b) Funkcije vremenskog kašnjenja pretvorbi pothlađenog austenita  $\tau_i$ ,  $i = 3,4,5$  određuju se za pretvorbe austenit –bainit ( $\tau_{13}$ ), austenit - perlit ( $\tau_{14}$ ) i austenit-ferit ( $\tau_{15}$ ) na zadanoj krivulji ohlađivanja u TTT dijagramu kontinuiranog ohlađivanja, a funkcionalni se izražava kao veličina ovisna od temperature, tj.  $\tau_i = f(\vartheta)$ .
- c) Višestruke fazne pretvorbe pothlađenog austenita kontinuiranim ohlađivanjem uvijek nastupaju istim redoslijedom pri čemu završetak izlučivanja jedne faze (npr. ferita) znači početak izlučivanja druge (npr. perlita). Izlučivanje i-te faze završava kad se postigne  $\partial y_i / \partial t = 0$ , odnosno kad je  $(Y_{m,i} - y_i) = 0$ .
- d) Udio martenzita određuje se direktno iz Koistinen-Marburgerove jednadžbe(3.28) (poglavlje 3.3) [62], a temperatura početka martenzitne pretvorbe ( $M_s$ ) iz Andrewsove jednadžbe prema [104].

**Određivanje najvećih mogućih udjela faza pri ohlađivanju ( $Y_{m,i}$ ).** Zadovoljenje zakona održanja mase (7.4) za određivanje najvećeg mogućeg udjela i-te faze pri kontinuiranom ohlađivanju uvjetuje pretpostavku o udjelu austenita ( $y_1$ ) nakon ugrijavanja koji može biti manji ili jednak jedan. Ako je udio austenita nakon ugrijavanja manji od jedan tada su tijekom ugrijavanja ostale neotopljene određene faze polazne mikrostrukture ukupnog udjela  $y_0$  (npr. ne transformirani ferit u dubljim slojevima austenitiziranog ruba koji su bili ugrijani između temperatura  $A_1$  i  $A_3$ ). Ako je austenitizacija bila potpuna nema netransformiranih dijelova polazne mikrostrukture pa je  $y_0 = 0$ , a  $y_1 = 1$ . Stoga je najveći udio i-te faze ( $Y_{m,i}$ ) koji može dobiti iz pothlađenog austenita nakon kontinuiranog ohlađivanja jednak produktu udjela austenita na početku ohlađivanja ( $y_1=1-y_0$ ) i udjela te faze nakon ohlađivanja određenom krivuljom  $\vartheta_t$  do temperature završetka pretvorbe  $\vartheta_{f,i}$ :

$$Y_{m,i}(\vartheta_{f,i}) = (1 - y_0) \cdot [Y_i(\vartheta_{f,i})] \quad i = 3,4,5 \quad (7.25)$$

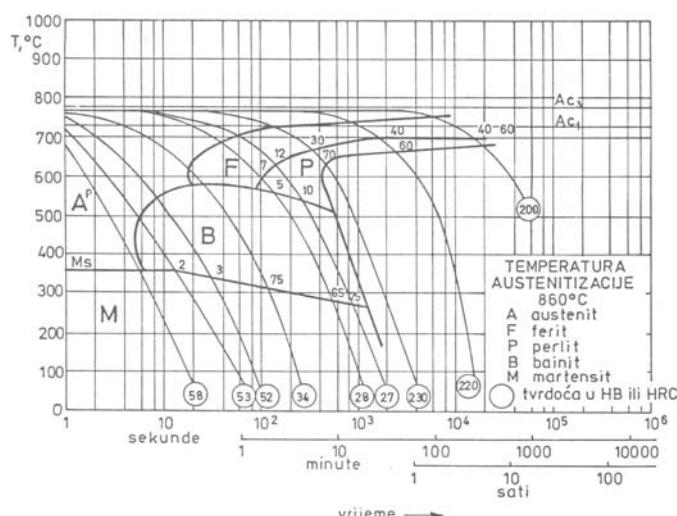
$[Y_i]$ ... Najveći mogući udio  $i$ -faze pri ohlađivanju određenom krivuljom u TTT dijagramu kontinuiranog ohlađivanja., 1

Najveći mogući udio i-te faze ( $Y_i$ ) određen je udjelima faza koje su nastale prije izlučivanja i-te faze na konkretnoj krivulji ohlađivanja, što se može pratiti u TTT dijagramu kontinuiranog ohlađivanja. U njemu su mogući udjeli faza nakon ohlađivanja određenom krivuljom navedeni uz presijecište krivulja ohlađivanja i završetka fazne pretvorbe (slika 7.5). Za određivanje najvećeg mogućeg udjela pojedine faze treba razlikovati kojem od tri područja faznih pretvorbi pripada promatrana krivulja ohlađivanja i prema tome zadati vrijednosti pojedinih članova jednadžbe (7.26):

- Podkritično ohlađivanje koje traje duže od ohlađivanja donjom kritičnom krivuljom gašenja ( $\bar{v}_{hl} \leq v_{kd}$ ) pri čemu iz pothlađenog austenita ( $y_1$ ) uobičajeno nastaju ferit ( $Y_5 > 0$ ) i /ili perlit ( $Y_4 > 0$ ) dok je  $Y_3 = 0$  i  $Y_2 = 0$ .
- Ohlađivanje krivuljom koja se nalazi između gornje i donje kritične krivulje gašenja ( $v_{kg} > \bar{v}_{hl} > v_{kd}$ ) pri čemu iz pothlađenog austenita mogu nastati redom ferit ( $Y_5 > 0$ ), perlit ( $Y_4 > 0$ ), baint ( $Y_3 > 0$ ) i martenzit ( $Y_2 > 0$ ).
- Nadkritično ohlađivanje (gašenje) pri čemu krivulja ohlađivanja daje bezdifuzijsku pretvorbu pothlađenog austenita u martenzit ( $Y_2 > 0$ ) dok su  $Y_5 = 0$ ,  $Y_4 = 0$  i  $Y_3 = 0$ , Srednja brzina ohlađivanja je veća ili jednaka gornjoj kritičnoj brzini gašenja ( $\bar{v}_{hl} \geq v_{kg}$ ).

$$[Y_i(g_{f,i})] = 1 - \sum [Y_{i+1}(g_{f,i+1})] \quad i = 4,3,2 \quad (7.26)$$

$g_{f,i+1}$  ... temperaturna završetka fazne pretvorbe, °C



Slika 7.5. TTT dijagram kontinuiranog ohlađivanja čelika 42CrMo4 [13]

U vlastito razvijenom kinetičkom modelu faznih pretvorbi gašenja udio faza ( $Y_i$ ) određuje se pomoću dva TTT dijagrama za kontinuirano ohlađivanje konkretnog čelika (snimljena s temperaturom austenitizacije manjom od 900 °C i višom od 1000 °C). Ugrađenom linearnom interpolacijom određuje se vrijednost udjela  $i$ -te faze  $Y_i[\vartheta_{f,i}(\bar{v}_{8/5})]$  ovisno od temperature austenitizacije ( $\vartheta_a$ ), temperature ohlađivanja i srednje brzine hlađenja ( $\vartheta = f(\bar{v}_{8/5})$ ) jednadžbama (7.27.a-c) i (7.28).

$$[Y_3(\vartheta)]_{\bar{v}_{8/5}} = \begin{cases} 0, & \text{ako je } \vartheta > \vartheta_{s,3} \\ \frac{Y_3(M_S)}{\vartheta_{s,3} - M_S} \vartheta - \frac{Y_3(M_S)M_S}{\vartheta_{s,3} - M_S}, & \text{ako je } M_S(\bar{v}_{8/5}) < \vartheta < \vartheta_{s,3}(\bar{v}_{8/5}) \\ Y_3, & \text{ako je } \vartheta \leq M_S \end{cases} \quad (7.27.a)$$

$$[Y_4(\vartheta)]_{\bar{v}_{8/5}} = \begin{cases} 0, & \text{ako je } \vartheta > \vartheta_{s,4} \\ \frac{Y_4(\vartheta_{f,4})}{\vartheta_{s,4} - \vartheta_{f,4}} \vartheta - \frac{Y_4(\vartheta_{f,4})\vartheta_{f,4}}{\vartheta_{s,4} - \vartheta_{f,4}}, & \text{ako je } \vartheta_{f,4}(\bar{v}_{8/5}) < \vartheta < \vartheta_{s,4}(\bar{v}_{8/5}) \\ Y_4, & \text{ako je } \vartheta \leq \vartheta_{f,4} \end{cases} \quad (7.27.b)$$

$$[Y_5(\vartheta)]_{\bar{v}_{8/5}} = \begin{cases} 0, & \text{ako je } \vartheta > \vartheta_{s,5} \\ \frac{Y_5(\bar{v}_{8/5})}{\vartheta_{s,5} - \vartheta_{f,5}} \vartheta - \frac{Y_5(\bar{v}_{8/5})\vartheta_{f,5}}{\vartheta_{s,5} - \vartheta_{f,5}}, & \text{ako je } \vartheta_{f,5}(\bar{v}_{8/5}) < \vartheta < \vartheta_{s,5}(\bar{v}_{8/5}) \\ Y_5, & \text{ako je } \vartheta \leq \vartheta_{f,5} \end{cases} \quad (7.27.c)$$

$$\bar{v}_{8/5} = \frac{800 - 500}{t_{8/5}} \quad (7.28)$$

$M_s$  ... temperatura početka izlučivanja martenzita iz austenita, °C

$\vartheta_{s,3}$  ... temperatura početka izlučivanja bainita iz austenita, °C

$\vartheta_{f,3}$  ... temperatura završetka izlučivanja bainita iz austenita, °C

$\vartheta_{s,4}$  ... temperatura početka izlučivanja perlita iz austenita, °C

$\vartheta_{f,4}$  ... temperatura završetka izlučivanja perlita iz austenita, °C

$\vartheta_{s,5}$  ... temperatura početka izlučivanja ferita iz austenita, °C

$\vartheta_{f,5}$  ... temperatura završetka izlučivanja ferita iz austenita, °C

$\bar{v}_{8/5}$  ... srednja brzina ohlađivanja od 800 do 500 °C, °C/s

$t_{8/5}$  ... vrijeme ohlađivanja od 800 do 500 °C, s

**Određivanje funkcije vremenskog kašnjenja pretvorbe**  $\tau_{1,i}[\vartheta(\bar{v}_{8/5})]$ . Iz analize tipičnog TTT dijagrama za kontinuirano ohlađivanje podeutektiodnog čelika uobičajenog za induksijsko kaljenje (**slika 7.5**) uočava se da su granične temperature početka austenitno-feritne ( $\vartheta_{s,5}$ ) i austenitno-perlitne pretvorbe ( $\vartheta_{s,4}$ ) znatno niže od istih temperatura ( $A_{c3}^0$ ,  $A_{cl}^0$ ) prema ravnotežnom dijagramu stanja. Bainitna i martenzitna pretvorba također znatno odstupaju od ravnotežnih raspada austenita, ali su i za njih karakteristične najviše temperature početka i završetka pretvorbe  $B_s$ , i  $B_f$  (jednadžbe 7.29.a-b) prema [110], odnosno  $M_s$ , i  $M_f$  (jednadžbe 7.30.a-b) prema [104]:

$$B_s(^{\circ}\text{C}) = 830 - 270 \text{ } C - 90 \text{ } Mn - 37 \text{ } Ni - 70 \text{ } Cr - 83 \text{ } Mo \quad (\pm 25^{\circ}\text{C}) \quad (7.29.\text{a})$$

$$B_f(^{\circ}\text{C}) = 710 - 270 \text{ } C - 90 \text{ } Mn - 37 \text{ } Ni - 70 \text{ } Cr - 83 \text{ } Mo \quad (\pm 25^{\circ}\text{C}) \quad (7.29.\text{a})$$

$$M_s(^{\circ}\text{C}) = 512 - 453 \text{ } C - 16,9 \text{ } Ni + 15 \text{ } Cr - 9,5 \text{ } Mo + 217 \text{ } C^2 - 71,5 \text{ } C \text{ } Mn - 67,6 \text{ } C \text{ } Cr \quad (\pm 25^{\circ}\text{C}) \quad (7.30.\text{a})$$

$$M_f(^{\circ}\text{C}) = 297 - 453 \text{ } C - 16,9 \text{ } Ni + 15 \text{ } Cr - 9,5 \text{ } Mo + 217 \text{ } C^2 - 71,5 \text{ } C \text{ } Mn - 67,6 \text{ } C \text{ } Cr \quad (\pm 15^{\circ}\text{C}) \quad (7.30.\text{b})$$

Za pretvorbe pothlađenog austenita u ferit, perlit i bainit mogu se postaviti sustavi od po dvije jednadžbe slične jednadžbama (7.19.a-b) iz kojih računa funkcija vremenskog kašnjenja pretvorbe  $\tau_{1,i}(\vartheta)$  ovisna od temperature početka ( $\vartheta_{s,i}$ ) i završetka ( $\vartheta_{f,i}$ ) pretvorbe uz srednju brzinu ohlađivanja od 800 do 500 °C karakterističnu za promatranoj krivulji ohlađivanja. Sustav od dvije jednadžbe za proračun vrijednosti iste funkcije  $\tau_{1,i}(\vartheta)$  nužan je jer ova funkcija utječe na cijelu pretvorbu tijekom ohlađivanja elementarnog volumena od početne temperature ( $\vartheta_{s,i}$ ) do temperature završetka pretvorbe ( $\vartheta_{f,i}$ ). Na **slici 7.6** shematski je prikazano određivanje temperature početka i završetka austenitno-perlitne pretvorbe za jednu krivulju ohlađivanja ("I").

$$\tau_{1,3}(\vartheta) = \frac{B_s - \vartheta_{s,3}(\bar{v}_{8/5})}{\bar{v}_{8/5}} \quad (7.31.\text{a})$$

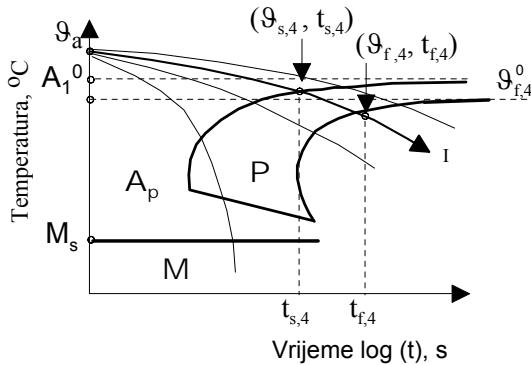
$$\tau_{1,3}(\vartheta) = \frac{B_f - M_s(\bar{v}_{8/5})}{\bar{v}_{8/5}} \quad (7.31.\text{b})$$

$$\tau_{1,4}(\vartheta) = \frac{A_1^0 - \vartheta_{s,4}(\bar{v}_{8/5})}{\bar{v}_{8/5}} \quad (7.32.\text{a})$$

$$\tau_{1,4}(\vartheta) = \frac{\vartheta_{f,4}^0(\bar{v}_{8/5}) - \vartheta_{f,4}(\bar{v}_{8/5})}{\bar{v}_{8/5}} \quad (7.32.\text{b})$$

$$\tau_{1,5}(\vartheta) = \frac{A_3^0 - \vartheta_{s,5}(\bar{v}_{8/5})}{\bar{v}_{8/5}} \quad (7.33.a)$$

$$\tau_{1,5}(\vartheta) = \frac{A_1^0 - \vartheta_{f,5}(\bar{v}_{8/5})}{\bar{v}_{8/5}} \quad (7.33.b)$$



Slika 7.6. Shematski prikaz karakterističnih temperatura za određivanje vremenske funkcije kašnjenja austenitno-perlitne pretvorbe

Nakon proračuna vrijednosti funkcija vremenskog kašnjenja ( $\tau_{1,i}$   $i = 3,4,5$ ) za nekoliko krivulja ohlađivanja iz sva tri ranije navedena područja TTT dijagrama za kontinuirano ohlađivanje konkretnog čelika (potkritično, međukritično i nadkritično gašenje) treba odrediti oblik i koeficijente aproksimacijskih jednadžbi  $\tau_{1,i} = f(\vartheta)$ . U vlastito razvijenom kinetičkom modelu faznih pretvorbi gašenja i računalnom programu za simulaciju induksijskog kaljenja slično kao u modelu austenitizacije korištene su dvije vrste aproksimacijskih funkcija  $\tau_{1,i} = f(\vartheta)$ : polinomi prvog ili drugog stupnja (7.34.a) i eksponencijalna funkcija (7.34.b). Koeficijenti aproksimacijskih funkcija (7.34.a-b) određuju se nelinearnom regresijskom analizom. Nakon toga se izabere i koristi u dalnjim proračunima onaj oblik aproksimacijske funkcije koji aproksimira izračunate vrijednosti funkcija  $\tau_{1,i}$  s najmanjom sumom kvadrata odstupanja.

$$\tau_{1,i}(\vartheta) = k_2(\vartheta_{s,i}^0 - \vartheta)^2 + k_1(\vartheta_{s,i}^0 - \vartheta) + k_0 \quad (7.34.a)$$

$$\tau_{1,i}(\vartheta) = \exp[-k_1(\vartheta_{s,i}^0 - \vartheta) + k_0] \quad (7.34.b)$$

$$\vartheta_{s,i}^0 = \begin{cases} i=3 & i=4 & i=5 \\ B_s & A_1^0 & A_3^0 \end{cases} \quad (7.34.c)$$

**Određivanje funkcije utjecaja brzine ohlađivanja na kinetiku fazne pretvorbe  $g_i$**  provodi se uz pomoć dva TTT dijagrama kontinuiranog ohlađivanja konkretnog kaljenog čelika ( $\vartheta_a < 900$  °C i  $\vartheta_a > 1000$  °C) sa sličnim pretpostavkama i jednadžbama koje su već korištene pri određivanju funkcije  $g_1$  u kinetičkom modelu austenitizacije:

- oblik i koeficijenti funkcije  $g_i$  ( $i = 3,4,5$ ) ne mijenjaju se u intervalu između temperature početka ( $\vartheta_{s,i}$ ) i završetka ( $\vartheta_{f,i}$ ) pretvorbe pri ohlađivanju srednjom brzinom  $\bar{v}_{8/5}$ ,
- brzina nastanka i-te faze  $\partial\vartheta_i/\partial t$  ( $i = 3,4,5$ ) na početku (na temperaturi  $\vartheta_{s,i}$ ) i završetku pretvorbe (na temperaturi  $\vartheta_{f,i}$ ) vrlo je mala i iznosi oko  $10^{-6}$  mm<sup>3</sup>/mm<sup>3</sup>s,
- ohlađivanjem austenita do temperature  $\vartheta_{s,i}$  nastaje 1 % i-te nove faze, a ohlađivanjem do temperature  $\vartheta_{f,i}$  pretvorba i-te faze praktički je završena uz nastanak određenog udjela  $Y_i(\vartheta)$  u skladu s podacima iz TTT dijagrama kontinuiranog ohlađivanja kaljenog čelika.

Uz navedene pretpostavke i određenu aproksimacijsku funkciju vremenskog kašnjenja pretvorbe  $\tau_{1,i}(\vartheta)$  slijedi sustav kinetičkih jednadžbi za početak i završetak austenita u i-tu fazu (ferit, perlit, bainit) iz kojih se računaju iznosi funkcija  $g_i$  ( $i = 3,4,5$ ):

$$g_i\left(\vartheta, \frac{\partial\vartheta}{\partial t}\right) = 10^{-6} \left[ \frac{\tau_{1,i}(\vartheta)}{0,99 \cdot Y_i} \right]_{\bar{v}_{8/5}} \quad \vartheta = \vartheta_{s,i} \quad (7.35.a)$$

$$g_i\left(\vartheta, \frac{\partial\vartheta}{\partial t}\right) = 10^{-6} \left[ \frac{\tau_{1,i}(\vartheta)}{0,01 \cdot Y_i} \right]_{\bar{v}_{8/5}} \quad \vartheta = \vartheta_{f,i} \quad (7.35.b)$$

Oblak aproksimacijskih jednadžbi funkcija  $g_i$  istovjetan je funkciji  $g_1$  iz jednadžbe (7.22) pri čemu se koeficijenti  $k_{g1,i}$  i  $k_{g0,i}$  određuju nelinearnom regresijskom analizom za dvije temperature austenitizacije ( $\vartheta_a < 900$  °C i  $\vartheta_a > 1000$  °C) uz različite temperature i brzine ohlađivanja  $\bar{v}_{8/5}$ :

$$g_i\left(\vartheta, \frac{\partial\vartheta}{\partial t}\right) = \exp\left[-k_{g1,i}\vartheta \cdot \bar{v}_{8/5} + k_{g0,i}\right] \quad (7.36)$$

**Numerički proračun udjela faza nastalih raspadom pothlađenog austenita.** Rješavanjem termodinamičkog problema gašenja ugrijanog površinskog sloja dobiva se krivulja ohlađivanja za svaki konačni element obratka za koju se za svaki novi vremenski inkrement simulacije računa srednja brzina ohlađivanja ( $\bar{v}_{hl}$ ) jednadžbom (7.37):

$$\bar{v}_{hl} = \left( \frac{\int \vartheta(t) dt}{\int dt} \right)_0^t \quad (7.37)$$

Uvrštavanjem jednadžbi (7.25) do (7.27), (7.34) i (7.36) u polaznu kinetičku jednadžbu proširenog Leblond-Devaux modela (7.12) dobiva se sustav od jedne do tri kinetičke jednadžbe (7.38) (ovisno o broju faza koje nastaju difuzijskom pretvorbom iz pothlađenog austenita) i dvije jednadžbe za udjele faza (7.39) i (7.40) koji se numerički rješava za krivulju ohlađivanja austenitiziranog konačnog elementa dobivenu računalnom simulacijom.

$$\frac{\partial y_i}{\partial t} = \frac{Y_{m,i}(\vartheta) - y_i}{\tau_{1,i}(\vartheta)} \cdot g_i(\vartheta, \bar{v}_{8/5}) \quad i = 3, 4, 5 \quad (7.38)$$

$$y_2 = (1 - y_0) \cdot (1 - y_5 - y_4 - y_3) \cdot [1 - \exp[-0,011(M_s - \vartheta)] \quad (7.39)$$

$$y_1(\vartheta_0) = 1 - (y_0 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5) \quad (7.40)$$

$y_0$  ... volumni udio ne transformiranih faza,  $\text{mm}^3/\text{mm}^3$

$y_1$  ... volumni udio zaostalog austenita,  $\text{mm}^3/\text{mm}^3$

$y_2$  ... volumni udio martenzita,  $\text{mm}^3/\text{mm}^3$

$y_3$  ... volumni udio bainita,  $\text{mm}^3/\text{mm}^3$

$y_4$  ... volumni udio perlita,  $\text{mm}^3/\text{mm}^3$

$y_5$  ... volumni udio ferita,  $\text{mm}^3/\text{mm}^3$

$\vartheta_0$  ... temperatuta okoliša,  $^\circ\text{C}$

Diferencijalna jednadžba (7.38) numerički je riješena metodom Runge-Kutta IV reda uz aproksimaciju porasta temperature u intervalu ohlađivanja ( $t^k < t < t^{k+1}$ ) funkcijom (7.41):

$$\vartheta^{k+1} = \vartheta^k - \bar{v}_{hl} t \quad (7.41)$$

$k$  ... vremenski inkrement (korak) simulacije

**Predviđanje tvrdoće nakon induktivskog kaljenja.** Iznos tvrdoće pojedinih faza određuje se prema konkretnom čeliku. Iz izračunatih udjela mikrostrukturnih faza u konačnom volumenu po završetku gašenja  $y_i(t_g)$  i njihovih karakterističnih tvrdoća (uobičajeno u jedinicama Vickers, HV) ukupni iznos tvrdoće računa se adicijskim pravilom:

$$HV = \sum_{i=0}^5 y_i(t_g) HV_i \quad (7.42)$$

**Tvrdoća martenzita** nakon gašenja gornjom kritičnom brzinom gašenja  $v_{kg}$  ili nadkritičnom brzinom gašenja određuje se uz pomoć TTS dijagrama. Tvrdoća martenzita nastalog međukritičnom brzinom gašenja određuje se iz TTT dijagrama za kontinuirano ohlađivanje.

**Tvrdoće bainita, perlita i ferita** određuju se prema TTT dijagramu za kontinuirano ohlađivanje induktivski kaljenog čelika.

## 8.0 OPTIMIZACIJA INDUKTORA

U slučaju induksijskog kaljenja od presudne je važnosti postizanje zadane dubine austenitiziranog sloja ugrijanog iznad temperature početka stvaranja austenita  $A_1$ . Dubina austenitiziranog sloja je uobičajeno veća ili jednaka efektivnoj dubini prodiranja struje  $\delta_l$  u obratku. Temperatura  $A_1$  veća je od Curieove temperature  $\theta_{\text{Curie}}$  pa je austenitizirani sloj u obratku paramagnetičan. Stoga je induktore za induksijsko kaljenje logično optimirati za ugrijavanje paramagnetskog materijala na temperaturi iznad temperature  $A_1$ . Induktori za predgrijavanje ili popuštanje optimirali bi se za ugrijavanje feromagnetskog materijala na temperaturi nižoj od  $\theta_{\text{Curie}}$ .

Najvažniji kriteriji i metode optimizacije induktora već su spomenuti i opisani u poglavlju 3.4. Ovdje će se izvesti njihov formalni matematički oblik i opisat će se primjena dviju metoda u traženju optimalnog oblika i dimenzija induktora:

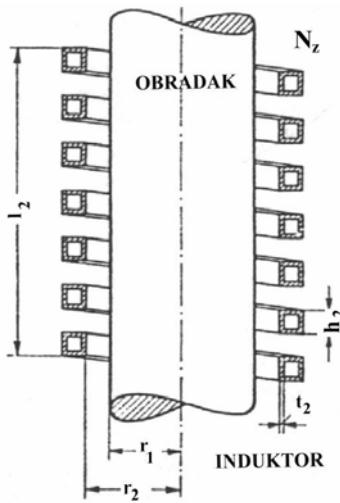
- analitička metoda traženja najvećeg stupnja djelovanja induktora,
- metoda matematičke simulacije s minimizacijom odstupanja zadane veličine na obratku.

### 8.1 Optimizacija induktora analitičkom metodom za postizanje najvećeg stupnja djelovanja

Analitička metoda traženja najvećeg stupnja djelovanja induktora uobičajeno se primjenjuje za viševojne induktore (zavojnice) bez koncentratora magnetskog toka (**slika 8.1**) i rotaciono induksijsko kaljenje. Funkcija cilja u ovoj metodi postavlja se pomoću teorije ekvivalentnog strujnog kruga induktor – okoliš – obradak (poglavlje 4.3.1).

Za provedbu optimizacije frekvencija induksijskog generatora može se zadati fiksnom ili promjenljivom ovisno o generatoru. Međutim izbor frekvencije ne može kompenzirati utjecaj električnih i magnetskih svojstava obratka ili loše konstrukcije induktora. Uobičajeno ograničenje pri izboru frekvencije induksijskog generatora proizlazi iz uvjeta izbjegavanja poništenja induciranih vrtložnih struja na jednoj strani poprečnog presjeka strujama sa suprotne strane presjeka. Kod induksijskog ugrijavanja valjaka polumjera  $r_1$  ovaj uvjet je ostvaren uz  $r_1/\delta_l \geq 4$ :

$$f \geq \frac{6,450}{(\kappa\mu\delta)_g} \quad (8.1)$$



**Slika 8.1** Karakteristične dimenzije viševojnog induktora zavojnice za ugrijavanje dugačkog ravnog valjka [1]

U vlastito razvijenom algoritmu optimizacije induktora zavojnice za induksijsko kaljenje induktor se optimira za najveću vrijednost temperature  $A_1$  prema TTS dijagramu (koja uobičajeno odgovara brzini grijanja oko  $1000\text{ }^{\circ}\text{C/s}$ ). Na ovoj temperaturi relativna magnetska permeabilnost jednaka je jedinici ( $\mu_0=1$ ), a za vrijednost temperaturno ovisne električne vodljivosti uzima se njena srednja vrijednost između temperature  $(A_1)_{\max}$  i temperature austenitizacije ( $\beta_a$ ). Uz ova pojednostavljenja iz teorije ekvivalentnog strujnog kruga i jednadžbi prijenosa elektromagnetskog polja između viševojnog induktora – zavojnice i osnosimetričnog obratka (**slika 8.1**) slijede jednadžbe (8.2.a-c) izvedene prema [1, 2, 7] za postavljanje funkcije cilja najvećeg stupnja djelovanja induktora.

$$\eta = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \quad (8.2.\text{a})$$

$$R_1 = \frac{8,88N_z^2 r_1 K_R}{l_g \kappa_1 \delta_1} F(kr_1) \quad (8.2.\text{b})$$

$$R_2 = \frac{4\pi^2 N_z^2 \left( r_2 + \frac{\delta_2}{2} \right) \sqrt{f}}{l_2 \sqrt{\kappa_2} \sqrt{\frac{N_z \pi h_2}{4l_2}}} F(K_r) \quad (8.2.\text{c})$$

$$\eta = \frac{R_1}{R_1 + R_2} = \frac{1}{1 + \left[ \left( \frac{1261,653 \cdot \kappa_1 l_g}{r_1 \kappa_2 \sqrt{(l_g + 0,002) \kappa_2}} \right) \frac{(2r_2 \sqrt{f} \sqrt{\kappa_2} + 503)}{\sqrt{f} \sqrt{N_z} \sqrt{h_2}} \left( \frac{1}{K_R} \frac{F(K_r)}{F(kr_1)} \right) \right]} \quad (8.3)$$

$f$	... frekvencija, Hz
$N_z$	... broj zavoja induktora
$l_2$	... duljina induktora, m
$r_2$	... polumjer induktora, m
$\delta_2$	... efektivna dubina prodiranja struje u induktoru, m
$t_2$	... debљina stjenke vodiča induktora, m
$h_2$	... visina vodiča induktora, m
$K_r$	... faktor otpora induktora, 1
$\kappa_2$	... električna vodljivost materijala induktora, S/m
$\mu_0$	... magnetski permeabilitet vakuma, $4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}$ H/m
$\kappa_1$	... električna vodljivost materijala obratka, S/m
$\delta_1$	... efektivna dubina prodiranja struje u obradak, m
$l_g$	... duljina grijanja ( $l_g \approx l_2 - 0,002$ ), m
$K_R$	... faktor otpora obratka, 1
$kr_1$	... argument funkcije $F(kr_1)$ , 1

Karakteristični članovi jednadžbi (8.3) izraženi su jednadžbama (8.4.a-b) prema [1].

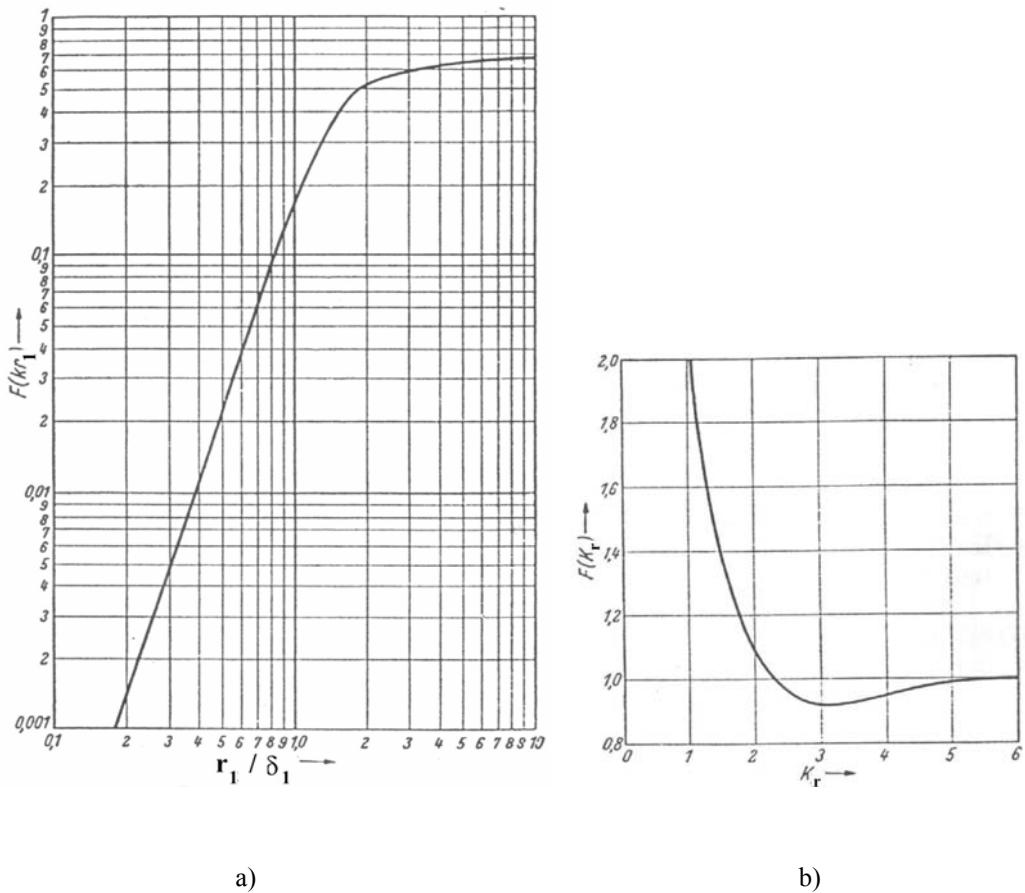
$$K_r = \frac{2t_2}{\delta_2} \quad (8.4.a)$$

$$kr_1 = \frac{r_1}{\delta_1} \quad (8.4.b)$$

$$F(K_r) = \frac{\sinh(K_r) - \sin(K_r)}{\cosh(K_r) - \cos(K_r)} \quad (8.4.c)$$

Grafički prikaz funkcija  $F(K_r)$  i  $F(kr_1)$  dan je na **slici 8.2**. Primjena jednadžbi (8.1) i (8.3) za optimizaciju induktora zavojnice omogućuje određivanje promjera  $2r_2$ , duljine  $l_2$ , visine zavoja  $h_2$  i broja zavoja  $N_z$ , što je dovoljno u određenim slučajevima induksijskog predgrijavanja ili popuštanja čeličnih šipki, valjaka ili profila. Međutim, primjenom jednadžbe (8.3) ne može se odrediti položaj  $N_z$  zavoja po dužini induktora  $l_2$ , niti se može optimirati induktor zavojnica s različitim promjerima zavoja što se ponekad zahtijeva kod induksijskog kaljenja svornjaka, osovina, konusnih vodilica i

sličnih dijelova. Stoga se induktori za induktivsko kaljenje (jednovojni ili viševojni, s ili bez koncentratora magnetskog toka) uobičajeno optimiraju metodama računalnih simulacija i dr. metodama optimizacije ranije navedenim u poglavlju 3.4.



Slika 8.2. a) Grafički prikaz funkcije  $F(kr_g)$ ; b) Grafički prikaz funkcije  $F(K_r)$  [1]

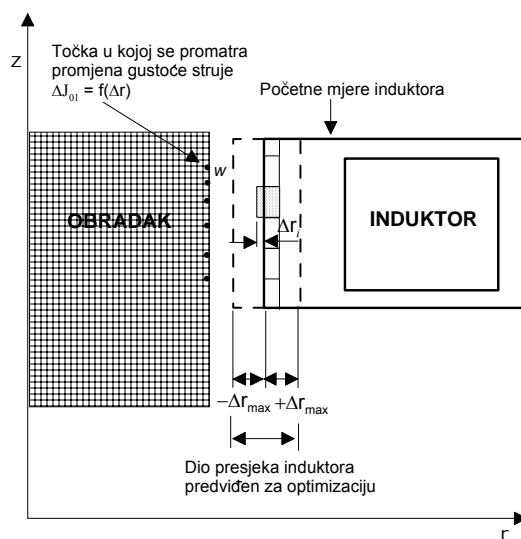
## 8.2. Optimizacija induktora računalnom simulacijom za postizanje zadane raspodijele inducirane struje

Za optimizaciju induktora s ili bez koncentratora magnetskog toka uobičajeno se primjenjuje računalna simulacija uz minimizaciju sume kvadrata odstupanja određene veličine (gustoća inducirane struje, snaga Jouelovih gubitaka) od korisnički zadanih vrijednosti u nekoliko točaka ugrijavanog sloja. U vlastito razvijenom algoritmu optimizacije induktora referentna veličina je modul gustoće inducirane struje na površini obratka  $J_{01} = |\underline{J}_{01}|$  izražen jednadžbom (8.5).

$$\underline{J}_{01} = -j\omega\kappa \underline{A}_0 = \omega\kappa A_{0I} - j\omega\kappa A_{0R} \quad (8.5)$$

Od funkcije  $J_{01} = f(\Gamma_1)$  zahtijeva se jednolična raspodjela po ugrijavanoj površini obratka koja se nalazi u induktoru. Vrijednost fazora gustoće inducirane struje obratka i njegov modul određuju se rješavanje sustava jednadžbi konačnih i rubnih elemenata opisanih u poglavlju 5.

**Optimizacija induktora** za induksijsko kaljenje u vlastito razvijenom optimizacijskom algoritmu provodi se za paramagnetični rubni sloj obratka, pomicanjem čvorova rubnih elemenata na jednovojnom induktoru (**slika 8.3**) ili pomicanjem cijelog zavoja viševojnog induktora.



**Slika 8.3.** Optimizacija induktora promjenama dimenzija i oblika u smjeru osi  $r$

Za svaku promjenu dimenzija induktora za iznos ( $\pm \Delta r_i \pm \Delta z_i$ ), odnosno ( $\pm \Delta x_i \pm \Delta y_i$ ) računa se promjena gustoće induciranih vrtložnih struja  $J_{0i}$  na površini obratka rješavanjem sustava jednadžbi rubnih i konačnih elemenata (5.83)-(5.84). Pomicanje čvorova rubnih elemenata induktora u stvarnosti znači dodavanje ili oduzimanje diskretnih volumena induktora, odnosno mijenjanje njegovog vanjskog oblika i dimenzija.

Optimizacija induktora stoga se sastoji od slijedeća tri koraka:

- I. Zadavanje optimiranog skupa  $N$  rubnih elemenata induktora i  $M$  točaka obratka u kojima se promatra promjena gustoće inducirane struje.
- II. Određivanje optimacijskih koeficijenata.
- III. Iteracijsko određivanje optimalnih dimenzija i oblika induktora minimizacijom odstupanja gustoće induciranih struje na površini obratka.

Ovakav postupak optimizacije moguće je primijeniti kod svih oblika rotaciono simetričnih i dugačkih ravnih obradaka bez obzira na broj zavoja i oblik poprečnog presjeka induktora, a uobičajene su slijedeće dvije optimizacije koje su primijenjene u vlastito razvijenom simulacijskom programu:

- a) optimizacija viševojnih induktora promjenom razmaka između zavoja ili promjenom promjera zavoja,
- b) optimizacija jednovojnog induktora traženjem optimalnog oblika i dimenzija poprečnog presjeka.

**Zadavanje optimiranog skupa rubnih elemenata induktora.** Optimizacija induktora može biti numerički vrlo zahtijevan zadatak s dugotrajnim rješavanjem ako se površna induktora diskretizira velikim brojem rubnih elemenata ili ako se zada velik broj promatranih točaka na površini obratka. Stoga se u cilju pojednostavljenja i ubrzanja optimizacije odvojeno optimiraju promjene u smjeru osi  $r$ , (ili  $x$ ) od onih u smjeru osi  $z$  (ili  $y$ ). Ako induktor ipak treba optimirati promjenama u obje osi tada se nakon postizanja optimalnog rješenja promjenama oblika i dimenzija induktora u smjeru osi  $r$  (ili  $x$ ) provodi dodatno optimiranje i promjenama oblika i dimenzija po osi  $z$  (ili  $y$ ).

Uobičajeno se pretpostavlja optimirana površina induktora nasuprotna zagrijavanoj površini obratka. Obje površine diskretiziraju se relativno grubljom mrežom konačnih i rubnih elemenata s duljinom stranica približno jednakom efektivnoj dubini prodiranja struje u induktoru  $\delta_2$ .

**Određivanje optimizacijskih koeficijenata** za proračun dimenzija induktora provodi se u vlastito razvijenom optimizacijskom algoritmu linearnom regresijskom analizom i računalnom simulacijom elektromagnetskog polja u sustavu induktor – obradak. Pri tome se određuje utjecaj promjene mjera induktora ( $\pm \Delta r_i \pm \Delta z_i$ ), odnosno ( $\pm \Delta x_i \pm \Delta y_i$ ), na gustoću površinski inducirane struje u obratku  $J_{01}$ . Ovisnost promjene gustoće struje u obratku u nastale promjenom mjera induktora u odnosu na njegove polazne mjera aproksimira se funkcijom  $\Delta J_{01} = f(\Delta r, \Delta z)$ :

$$\Delta J_{01,w}(\Delta r, \Delta z) = (a_i \Delta r_i) + (b_i \Delta z_i) \quad w = 1, 2, \dots, M \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (8.6)$$

Oblik jednadžbe (8.6) mora zadovoljiti uvjet da je  $\Delta J_{01}=0$  kad je  $\Delta r=0$  i  $\Delta z=0$ . Koeficijenti  $a_i$  i  $b_i$  odražavaju utjecaj promjene dimenzija induktora na promjenu iznosa gustoće struje  $J_{01}$  inducirane u promatranih  $M$  točaka obratka. Određivanje njihovih vrijednosti provodi se regresijskom analizom prije optimizacije. Za dobivanje potrebnog skupa nezavisnih varijabli  $\{\Delta r, \Delta z\}$  i skupa od njih ovisnih vrijednosti  $\{\Delta J_{01,w}\}$  računalnom simulacijom određuje se promjena gustoće inducirane vrtložne struje u  $M$  točaka obratka nastala kao posljedica pomicanja samo jednog rubnog elementa induktora za iznos  $\Delta r$  ili  $\Delta z$ . Kod optimizacije induktora u obliku viševojne zavojnice promjene mjera  $\Delta r$  odnose se na promjenu promjera zavoja, a promjene mjera  $\Delta z$  na promjenu razmaka između zavoja.

Postupak određivanja promjene vrijednosti inducirane vrtložne struje u obratku  $\Delta J_{01,w}$  u odnosu na iznos određen za polazni oblik i mjere induktora ponavlja se deset puta za svaki rubni element induktora, odnosno sve zavoje viševojnog induktora. Ponavljanjem se stvaraju skupovi nezavisnih varijabli  $\{\Delta r\}$ ,  $\{\Delta z\}$  i skup zavisne varijable  $\{\Delta J_{01,w}\}$  nad kojima se provodi regresijska analiza. Deset vrijednosti promjena mjera induktora zadaju se iz intervala vrijednosti  $\pm \Delta r_{\max}$  ili  $\pm \Delta z_{\max}$ . Regresijskom analizom određeni optimizacijski koeficijenti  $a_1$ ,  $b_1$  čine matrice s  $M$  redaka (broj promatranih točaka na obratku) i  $N$  stupaca (broj rubnih elemenata induktora namijenjenih optimizaciji).

**Iteracijsko određivanje optimalnih dimenzija i oblika induktora** u vlastito razvijenom optimizacijskom algoritmu provodi se u  $p$  koraka dok se ne postigne traženo odstupanje gustoće inducirane struje  $J_{01,w}$  od srednje vrijednosti  $\bar{J}_{01}$  izraženo izrazima (8.7) i (8.8)

$$\varepsilon_J^p = \sqrt{\frac{\sum_{w=1}^M \left( \frac{\bar{J}_{01} - J_{01,w}}{\bar{J}_{01}} \right)^2}{M}} \leq (\varepsilon_J)_{\max} \quad (8.7)$$

$$\bar{J}_{01} = \frac{\sum_{w=1}^M J_{01,w}}{M} \quad (8.8)$$

Određivanje pomaka  $N$  rubnih elemenata (ili čitavih zavoja) induktora provodi se minimizacijom sume odstupanja gustoće inducirane struje  $\left\{ \bar{J}_{01} - (J_{01})_w^p \right\}$  u  $M$  točaka površine obratka:

$$W^p = \sum_{w=1}^M \left( \bar{J}_{01} - (J_{01})_w^p \right)^2 \quad (8.9.a)$$

$$W_{\Delta r}^p = \sum_{w=1}^M \left[ \left( \bar{J}_{01} - (J_{01})_w^{p-1} \right) - \sum_{i=1}^N (a_{w,i} \Delta r_i)^p \right]^2 \quad (8.9.b)$$

$$W_{\Delta z}^p = \sum_{w=1}^M \left[ \left( \bar{J}_{01} - (J_{01})_w^{p-1} \right) - \sum_{i=1}^N (b_{w,i} \Delta z_i)^p \right]^2 \quad (8.9.c)$$

Potrebna promjena dimenzija konačnog elementa uz površinu induktora ( $\Delta r_i, \Delta z_i$ ) ili ( $\Delta x_i, \Delta y_i$ ) u  $p$ -tom koraku optimizacije određuje se minimizacijom sume kvadrata odstupanja prema [31]:

$$\frac{\partial W_{\Delta r}^p}{\partial (\Delta r_j)} = \sum_{w=1}^M 2 \left[ \left( \bar{J}_{01} - (J_{01})_w^{p-1} \right) - \sum_{i=1}^N (a_{w,i} \Delta r_i)^p \right] \cdot a_{w,j} = 0 \quad (8.10.a)$$

$$\frac{\partial W_{\Delta z}^p}{\partial (\Delta z_j)} = \sum_{w=1}^M 2 \left[ \left( \bar{J}_{01} - (J_{01})_w^{p-1} \right) - \sum_{i=1}^N (b_{w,i} \Delta z_i)^p \right] \cdot b_{w,j} = 0 \quad (8.10.b)$$

Iz sustava jednadžbi (8.10.a-b) proizlazi sustav jednadžbi (8.11.a-b) izražen u matričnom zapisu koji treba riješiti po nepoznatim pomacima rubnih elemenata induktora  $\Delta r_i, \Delta z_i$ .

$$[a_{i,w}] \cdot [a_{w,j}] [\Delta r_i] = [a_{j,w}] [\bar{J}_{01} - (J_{01})_w^{p-1}] \quad (8.11.a)$$

$$[b_{i,w}] \cdot [b_{w,j}] [\Delta z_i] = [b_{j,w}] [\bar{J}_{01} - (J_{01})_w^{p-1}] \quad (8.11.b)$$

Rješavanjem sustava algebarskih jednadžbi (8.11.a-b) dobivaju se pomaci  $N$  rubnih elementa induktora kojima se približava ujednačenoj gustoći induciranih vrtložnih struja u  $M$  točaka obratka. Nakon proračuna novih mjera induktora (nastalih pomicanjem rubnih elemenata za iznose  $\Delta r_i$  i  $\Delta z_i$ ) opet se određuje gustoća struja induciranih na površini obratka  $J_{01,w}$  i njena srednja vrijednost  $J_{01}$ .

Iz gornjeg opisa uočava se šest faza iteracijskog traženja optimalnih dimenzija i oblika induktora (III korak optimizacije):

- III. a) Proračun gustoće induciranih vrtložnih struja na površini obratka  $J_{01}$  rješavanjem algebarskog sustava jednadžbi konačnih i rubnih elemenata (5.83)-(5.84).
- III. b) Proračun srednje vrijednosti gustoće induciranih vrtložnih struja na površini obratka  $\bar{J}_{01}$ .
- III. c) Proračun odstupanja gustoće induciranih vrtložnih struja na površini obratka od njihove srednje vrijednosti  $\{\bar{J}_{01} - (J_{01})_w^{p-1}\}$ .
- III. d) Rješavanje algebarskog sustava jednadžbi (8.11.a-b) po nepoznanicama  $\{\Delta r_i\}$  i  $\{\Delta z_i\}$  i određivanje novih mjera induktora.
- III. e) Proračun srednjeg relativnog odstupanja induciranih vrtložnih struja  $\varepsilon_j^p$  jednadžbama (8.6)-(8.7) i usporedba sa zadanim odstupanjem  $(\varepsilon_j)_{\max}$
- III. f) Ponavljanje faza optimizacije III.a) do III.e) do postizanja zadanog kriterija odstupanja induciranih vrtložnih struja (8.6)

Opisani postupak optimizacije prikazat će se na primjeru optimizacije (poglavlje 8.3): viševojnog induktora korištenog za ugrijavanje epruvete za ispitivanje prokaljivosti čelika gašenjem u struji plinova u vakuumskoj peći.

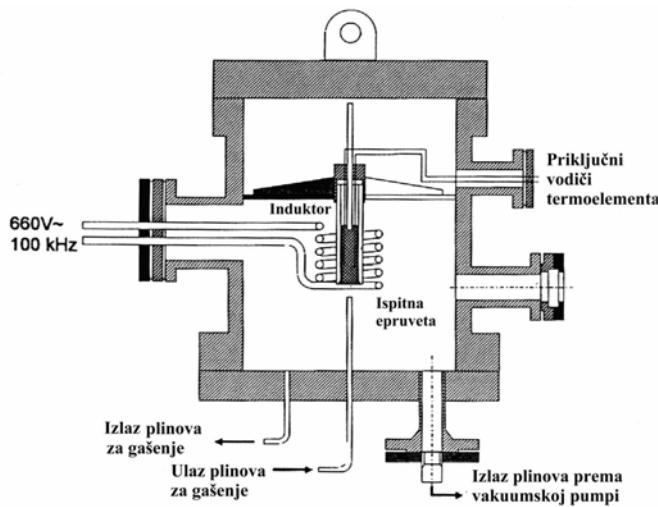
## 8.3 Primjer optimizacije viševojnog induktora

### 8.3.1. Opis problema optimizacije

Optimizacija viševojnog induktora prikazana u ovom poglavlju namijenjena je rješavanju problema jednoličnog ugrijavanja cilindričnog ispitnog uzorka za ispitivanje prokaljivosti i parametara gašenja u struji plina u vakuumskoj komori [108]. Metoda ispitivanja prokaljivosti čelika gašenjem u struji plinova pod visokim tlakom još nije u potpunosti istražena i propisana, premda je potreba za ovakvim istraživanjima izražena već niz godina u industriji vezanoj uz toplinsku obradu u vakuumskim pećima.

Razvojem i usavršavanjem vakuumskih peći i metoda gašenja u njima dostignuti su intenziteti gašenja slični gašenju u ulju, što omogućuje primjenu kaljenja u vakuumskim pećima i kod srednjelegiranih čelika za cementiranje ili poboljšavanje osim uobičajeno kaljivih alatnih i visokolegiranih čelika [109]. Za sve spomenute čelike prikladne za kaljenje u vakuumskim pećima nužno je poznавanje njihove prokaljivosti pri gašenju u struji plinova pod visokim pritiskim zbog predviđanja raspodijele tvrdoće po poprečnom presjeku dijelova i alata kaljenih u vakuumskim pećima u industrijskim uvjetima. Ekvivalentno ispitivanje prokaljivosti pri gašenju u vodi ili ulju je opće prihvaćena metoda Jominy (prema normi DIN 50191) kod koje se ispitna epruveta ugrijava u peći odvojeno od naprave za gašenje.

Ispitivanje prokaljivosti provodi se gašenjem čela ispitne epruvete nastrujavanjem plina. Ugrijavanje i gašenje se izvode u istoj posebno konstruiranoj vakuumskoj komori (**slika 8.4**) uz automatsku regulaciju parametara ugrijavanja i gašenja. Ugrijavanje ispitnog uzorka ( $\varnothing 20 \times 100$  mm) izvodi se induktorom duljine 115 mm izrađenim od bakrene cijevi promjera 6 mm s deset jednakim razmaknutim zavoja. Zbog potrebe za toplinskom izolacijom svih površina epruvete osim čeone površine zračnost između induktora i epruvete je povećana za debljinu toplinske izolacije (8 mm) pa unutrašnji promjer induktora iznosi 36 mm.

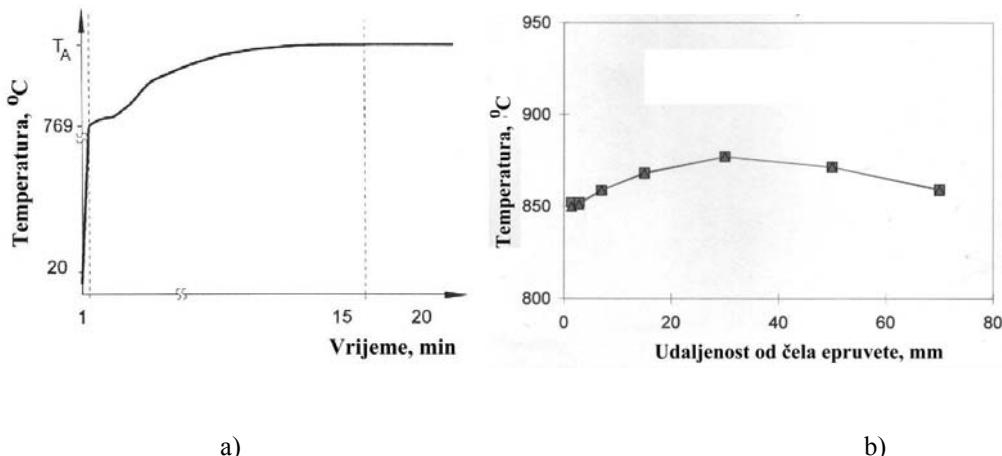


**Slika 8.4** Shematski prikaz vakuumske komore (razvijene u Institutu IWT Universität Bremen) za ispitivanje prokaljivosti čelika u struji plinova (ispitna epruveta  $\varnothing 20 \times 100$  mm) [108]

Za provedbu pokusa gašenja u plinu čitav volumen ispitne epruvete ( $\varnothing 20 \times 100$  mm) treba jednolično ugrijati na temperaturu austenitizacije (npr.  $850^{\circ}\text{C}$  za čelik 42CrMo4). Ispitna epruveta je toplinski izolirana keramičkim cilindrom ( $\varnothing 30/24 \times 180$  mm) zbog osiguranja ohlađivanja samo s čela. U jednom od niza ispitivanja provedenih u institutu IWT Universität Bremen praćena je promjena temperature po visini ispitne epruvete mjerenjem pomoću šest termoelemenata ugrađenih na različitim visinama epruvete na dubini 1,5 mm ispod površine. Dobivena je raspodjela temperature po visini epruvete neposredno prije početka gašenja s čela prikazana na **slici 8.5**.

Analizom ugrijavanja ispitne epruvete na **slici 8.5** uočavaju se dva problema:

- dugotrajno ugrijavanje i
- nejednolična raspodjela temperature po visini epruvete.



**Slika 8.5** Ugrijavanje ispitne epruvete ( $\varnothing 20 \times 100$  mm) od čelika 42CrMo4:

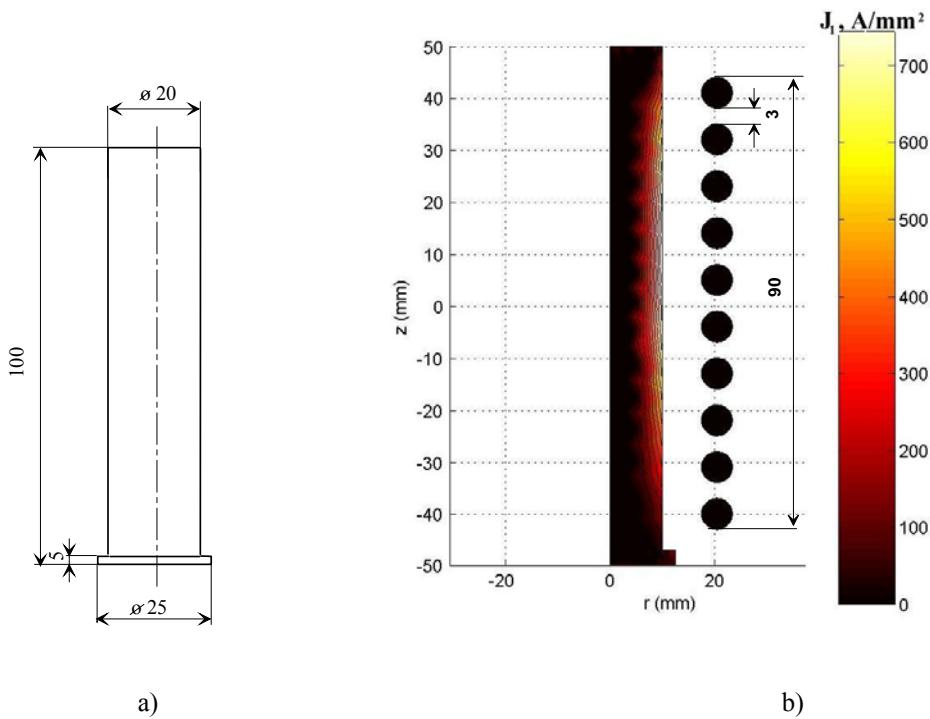
- a) Prikaz krivulje ugrijavanja izmjerene na dubini 1,5 mm ispod površine [108]
- b) Raspored temperature po visini epruvete izmjeren na dubini 1,5 mm ispod površine nakon induktijskog ugrijavanja u trajanju od 15 min ( $f=100$  kHz,  $U=600$ V)

Problem dugotrajnog ugrijavanja nastao je zbog velike zračnosti (8 mm) između induktora i epruvete koja uzrokuje veliko rasipanje elektromagnetskog polja i nizak stupanj djelovanja induktora. Zbog dimenzija cilindra za toplinsku izolaciju epruvete ( $\varnothing 30/24 \times 180$  mm) unutrašnji promjer induktora može se smanjiti sa  $\varnothing 35$  samo na  $\varnothing 32$  mm. Prema vlastito provedenim proračunima ovo će povećati stupanj djelovanja induktora s oko 1,5 % na 2 do 4% kad je rubni sloj epruvete ugrijan na temperature više od temperature Curie. Vrijeme ugrijavanja epruvete moglo bi biti i manje od 10 min za što induktijski generator instaliran u Institutu IWT Universität Bremen ima dovoljno snage, ali u tom slučaju bi srednje brzine ugrijavanja iznosile više od  $5^{\circ}\text{C}/\text{s}$ , što nije slučaj s ugrijavanjem u vakuumskim pećima gdje su brzine ugrijavanja uobičajeno manje od  $1^{\circ}\text{C}/\text{s}$ .

Problem nejednolične raspodijele temperature po visini ispitne epruvete nastaje zbog oblika induktora s jednakim razmakom između zavoja. Određivanje optimalnog razmaka između zavoja riješit će se u idućem poglavlju ranije opisanom metodom optimizacije (poglavlje 8.2).

### 8.3.2 Numeričko rješenje problema optimizacije

Uz pomoć vlastito razvijenog računalno simulacijskog programa analizirano je ugrijavanje epruvete za ispitivanje prokaljivosti gašenjem u plinu mjera  $\varnothing 20 \times 100$  mm od čelika 42CrMo4. Za provedbu računalne optimizacije induktora pretpostavljena je temperatura epruvete oko  $850^{\circ}\text{C}$  po cijelom presjeku. Induktor za ugrijavanje pretpostavlja se izrađenim od bakrene cijevi promjera  $\varnothing 6$  mm s unutrašnjim promjerom zavoja  $\varnothing 35$  mm i razmakom između zavoja 3 mm. Na **slici 8.6** prikazana je raspodjela gustoće induciranih vrtložnih struja u rubnom sloju epruvete uz pretpostavku da je struja induktora bila 600 A. Raspodjela gustoće struje po presjeku induktora nije predmetom optimizacije, pa nije prikazana na **slici 8.6**. Stvarni iznos struje induktora nije nužno zadati za optimizaciju induktora prema kriteriju jednoličnosti induciranih struja jer se pretpostavlja da je rubni sloj obratka paramagnetičan i prethodno ugrijan na temperaturu blizu temperature austenitizacije.



**Slika 8.6.** a) Oblik i dimenzije epruvete za ispitivanje prokaljivosti gašenjem u plinu nastrujavanjem s čela  
b) Simulacijom određena raspodjela gustoće induciranih vrtložnih struja po polovici poprečnog presjeka epruvete od čelika 42CrMo4 nakon induksijskog ugrijavanja ( $f=110\text{ kHz}$ ,  $I_0 = 600\text{ A}$ , mjere induktora:  $\varnothing 47 / 35 \times 90\text{ mm}$ )

Iz slike 8.6 uočljiva je neravnomjerna raspodjela gustoće induciranih vrtložnih struja po visini epruvete s najvećim iznosima na polovici visine induktora gdje su izmjereni i najveći iznosi temperature (slika 8.5). Prikazana raspodjela gustoće induciranih struja nastaje zbog koncentracije elektromagnetskog polja u središtu induktora. Prema vlastitim proračunima odstupanje induciranih vrtložnih struja od srednje vrijednosti (određeno jednadžbom 8.6) za polazni položaj induktora prema epruveti iznosi između 45 do 50 %, a stupanj djelovanja induktora iznosi 3 %. Neravnomjerna raspodjela induciranih vrtložnih struja može se ublažiti pomicanjem razmicanjem i odmicanjem zavoja induktora za određene iznose  $+\Delta z_i$  ili  $-\Delta z_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, 10$  u odnosu na njihov polazni položaj prikazan na slici 8.6. Točan iznos i smjer pomaka zavoja određen je računalnom optimizacijom prema modelu iz poglavlja 8.2.

Za postavljanje optimizacijskog modela korištene su pretpostavke i parametri postupka navedeni u tablici VIII.1. Provedena je optimizacija razmicanjem zavoja po visini induktora a unutrašnji promjer pretpostavljen je  $\varnothing 32$  mm koliko je minimalno dopušteno zbog postavljanja toplinske izolacije oko epruvete. Provedena je optimizacija s dva oblika vodiča induktora: u obliku cijevi  $\varnothing 6$  mm i u obliku kvadratnog profila 5x5 mm.

**Tablica VIII.1** Pretpostavke i radni parametri modela za optimizaciju viševojnog induktora

Naziv	Iznos
Materijal ispitne epruvete	42CrMo4
Mjere ispitne epruvete	$\varnothing 20 \times 100$ mm
Temperatura ispitne epruvete	850 °C
Frekvencija generatora	110 kHz
Struja induktora (A)	600 A
Broj zavoja induktora	10
Vodič induktora	
a) bakrena cijev promjera	$\varnothing 6$ mm
b) bakreni profil poprečnog presjeka	5x5 mm
Mjere induktora:	
unutrašnji promjer x visina zavojnice	$\varnothing 32 \times 95$ mm

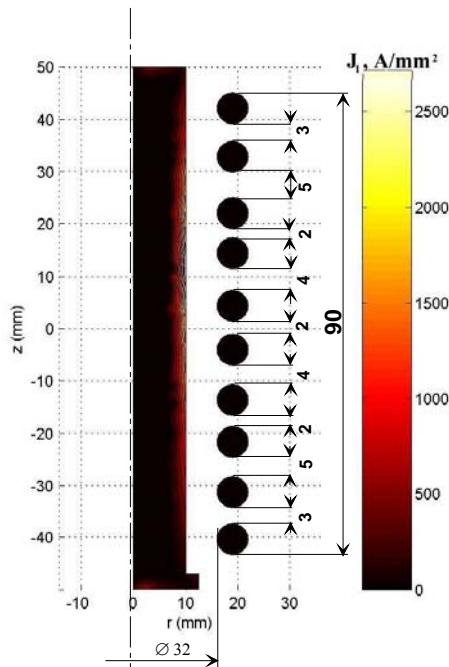
Rezultati optimizacije s ciljem povećanja stupnja djelovanja induktora i postizanja ravnomjernije raspodjele induciranih vrtložnih struja u ugrijavanoj epruveti prikazani su u **tablici VIII.2 i slikama 8.7. i 8.8**. Iz **tablice VIII.2** je vidljivo da je računski dobiven mali stupanj djelovanja induktora unatoč optimizaciji. Za temperature rubnog sloja više od temperature Curie kod induktora s vodičem kvadratnog presjeka  $5 \times 5$  mm stupanj djelovanja je između 3 i 4 %, a kod induktora s vodičem okruglog presjeka  $\varnothing 6$  mm one iznosi 7 do 9 %. Niski stupnjevi djelovanja induktora posljedica su velikog razmaka između unutrašnje površine induktora i ugrijavane površine epruvete. Viši stupnjevi djelovanja induktora između 20 do 30 % pojavljuju se dok je još ugrijavana epruveta feromagnetična, pa stoga treba težiti brzom porastu temperature epruvete do  $750^{\circ}\text{C}$ , a nakon toga će uslijediti polagano ugrijavanje do zahtijevane temperature austenitizacije (slika 8.5.a).

**Tablica VIII.2** Rezultati optimizacije induktora s deset zavoja unutrašnjeg promjera  $\varnothing 32$  mm i visine 90 mm za ugrijavanje epruvete dimenzija  $\varnothing 20 \times 100$  mm

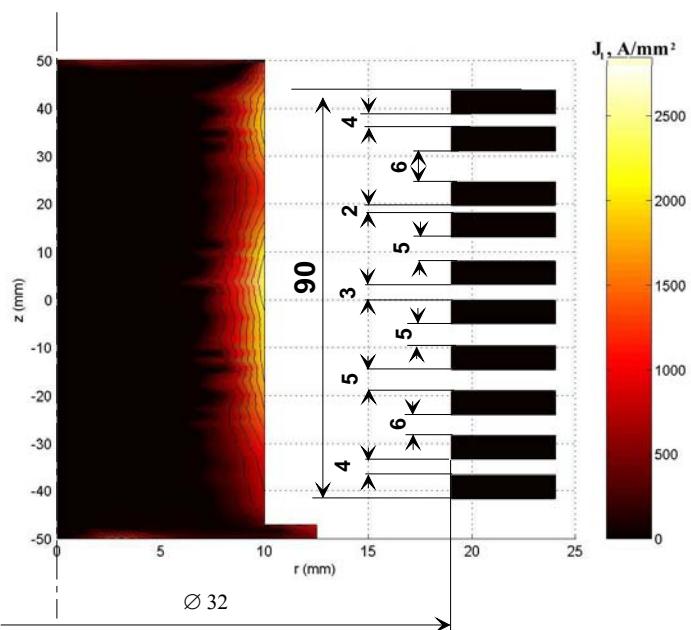
	Stupanj djelovanja induktora	Odstupanje gustoće inducirane struje u obratku od srednje vrijednosti ( $\varepsilon_j^p$ ),
<b>Vodič induktora:</b>		
a) bakrena cijev promjera $\varnothing 6$ mm	7 – 9 %	38,57 %
b) bakreni profil poprečnog presjeka $5 \times 5$ mm	3 – 4 %	28,46 %

Drugi dio zadatka optimizacije bio je postizanje što jednoličnije raspodjele induciranih vrtložnih struja po rubnom sloju ispitne epruvete. Iz **tablice VIII.2** vidljivo je da se prema ovom kriteriju pokazao boljim induktor s vodičem kvadratnog poprečnog presjeka  $5 \times 5$  mm koji ima srednje odstupanje induciranih vrtložnih struja po visini ispitne epruvete 28,46 %. Induktor s vodičem okruglog poprečnog presjeka  $\varnothing 6$  mm ima odstupanje induciranih vrtložnih struja po visini epruvete 38,57 % što je uzrokovano samim kružnim oblikom vodiča.

Na temelju provedenih simulacija ugrijavanja ispitne epruvete u polaznom obliku induktora i u dva nova oblika čini se da se ravnomjerno ugrijavanje postiže u viševojnom induktoru s kvadratnim vodičem dimenzija  $5 \times 5$  mm uz napomenu da se njegovom primjenom može očekivati dugotrajnije ugrijavanje. Računalnim simulacijama i optimizacijom dobiveni razmaci između zavoja oba induktora (s vodičem  $\varnothing 6$  mm, odnosno  $5 \times 5$  mm) dani su na **slikama 8.7 i 8.8** a njihove vrijednosti treba u budućim istraživanjima ispitati i potvrditi u praksi.



**Slika 8.7.** Razmještaj deset zavoja induktora izrađenog od bakrene cijevi promjera  $\odot 6$  mm nakon računalne optimizacije



**Slika 8.8.** Razmještaj deset zavoja induktora izrađenog od bakrenog profila  $5 \times 5$  mm nakon računalne optimizacije

## **8.4 Projektiranje računalnog programa za simulaciju induksijskog kaljenja i optimizaciju induktora**

Prema simulacijskom algoritmu (poglavlje 4) i matematičkim modelima razrađenim u poglavljima 5 do uključivo 8.2 projektiran je i razvijena je baza podataka i računalni program za simulaciju postupka induksijskog kaljenja i optimizaciju induktora. Računalnim programom obuhvaćeno je zadavanje svih potrebnih veličina modela i numeričko rješavanje matematičkih modela elektromagnetskih, termodinamičkih i mikrostrukturnih procesa u obratku tijekom simulacije induksijskog kaljenja dugačkih ravnih i rotaciono simetričnih obradaka. U simulacijski program ugrađena je jednostavna baza podataka kojom su obuhvaćena električna, magnetska, toplinska, metalurška i mehanička svojstva deset uobičajeno induksijski kaljivih čelika (Ck35, Ck45, Cf53, 34Cr4, 41Cr4, 46Cr2, 34CrMo4, 42CrMo4, 50CrMo4 i 50CrV4).

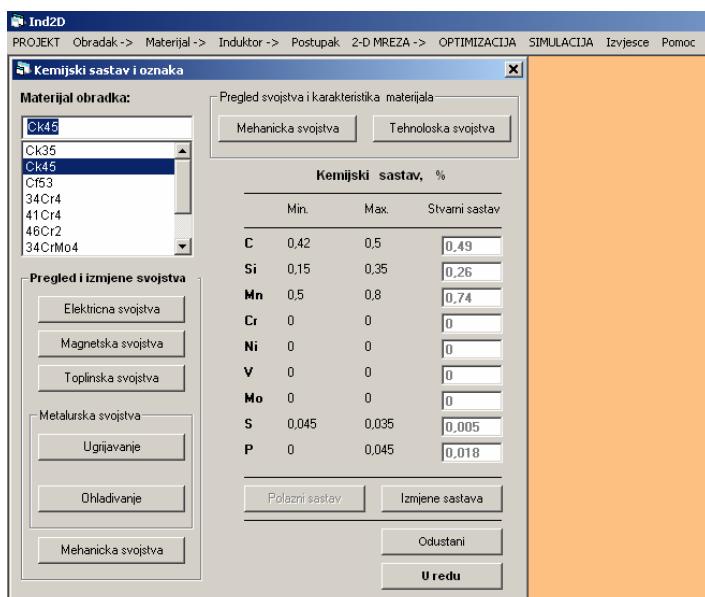
### **8.4.1 Projektiranje vlastite baze podataka za simulaciju induksijskog kaljenja**

**Zahtjevi za projektiranje baze podataka.** Bazom podataka rješavaju se sljedeći upiti tehnologa i potrebe računalnog simulacijskog programa:

- 1) Izbor vrste čelika za induksijsko kaljenje prema DIN normi
- 2) Pregled raspona kemijskog sastava čelika ili željeznog lijeva prema DIN normi i/ili zadavanje konkretnog sastava
- 3) Pregled preporučenih parametara prethodne toplinske obradbe: kaljenja, popuštanja i žarenja za odabrani čelik ili željezni lijev
- 4) Prikaz mehaničkih svojstava u normalizacijski žarenom stanju ( $R_e$ ,  $R_m$ ,  $A_s$ ,  $HB$ )
- 5) Prikaz mehaničkih svojstava ( $R_e$ ,  $R_m$ ,  $A_s$ ,  $R_s$ ) u poboljšanom stanju
- 6) Prikaz i zadavanje fizikalnih svojstava odabranog čelika ovisnih o temperaturi:
  - a) električne vodljivosti
  - b) magnetske permeabilnosti (ovisna o temperaturi i jakosti magnetskog polja)
  - c) koeficijenta vodljivosti topline
  - d) specifičnog toplinskog kapaciteta
  - e) gustoće

- 7) Prikaz i zadavanje vrijednosti temperatura  $A_{c1}$ ,  $A_{c3}$  odabranog čelika ovisno o brzini ugrijavanja prema podacima iz TTS dijagrama
- 8) Prikaz tvrdoće čelika ovisno o brzini ugrijavanja i temperaturi austenitizacije
- 9) Izbor i zadavanje polaznog oblika i dimenzija induktora i prskalice
- 10) Izbor sredstva za gašenje (voda, vodene otopine polimera).

Programiranje baze podataka povedeno je u računalnom jeziku "Visual Basic 6" kao i programska izvedba čitavog korisničkog sučelja simulacijskog programa. U bazu podataka unijete su vrijednosti električnih, magnetskih, toplinskih, metalurških i mehaničkih svojstava čelika ovisna o temperaturi (u rasponu od 20 do 1300°) prema dostupnim podacima iz literature [12, 13, 14, 15, 82, 84, 99, 100]. Pregled i zadavanje navedenih svojstava korisnik počinje izborom vrste čelika na polaznoj formi baze podataka (**slika 8.9**)



**Slika 8.9** Polazna dijaloška forma baze podataka o svojstvima induktijski kaljivih čelika

Polazeći od dijaloške forme na **slici 8.9** korisnik pregledava i po potrebi mijenja sva gore navedena svojstva. Izmijenjena fizikalna, mehanička i metalurška svojstva čelika moguće je pohraniti u zasebnu tekstualnu datoteku te ih sačuvati za nove simulacije, odvojeno od aktualne simulacije. Svojstva materijala programski ugrađena u bazu podataka korisnik ne može mijenjati već ona služe kao predložak od kojeg se polazi pri postavljanju parametara računalne simulacije.

#### 8.4.2. Projektiranje vlastitog računalno-simulacijskog programa

Prema simulacijskom algoritmu razrađenom u poglavlju 4 projektirano je korisničko sučelje vlastitog računalnog programa za simulaciju postupaka induksijskog kaljenja nazvanog "Ind2D" (**slika 8.10**). Razvijeni računalni simulacijski program namijenjen je simulacijama induksijskog kaljenja obradaka rotacijske simetrije i dugačkih ravnih obradaka koji se mogu pojednostavljeno predstaviti kao dvodimenzijski geometrijski modeli u ravnini x-y odnosno r-z. Primjenom dvaju numeričkih metoda: metode konačnih i rubnih elemenata moguće je s točnošću reda ( $O^2$ ) računalno simulirati induksijsko ugrijavanje i induksijsko kaljenje u vrlo širokom rasponu frekvencija, od niskofrekventnog ( $f = 1 \text{ kHz}$ ) do visokofrekventnog ( $f = 500 \text{ kHz}$ ), različitim metodama (stacionarnom, posmičnom, rotacijskom i rotaciono posmičnom). U simulacijski program je kao zasebni modul ugrađena i optimizacija induktora prema kriteriju postizanja jednolične raspodjele induciranih vrtložnih struja na zadanom dijelu kaljene površine obratka. Optimizacija induktora moguća je pomicanjem pojedinih zavoja i promjenom njihovog promjera ili promjenom oblika i mjera poprečnog presjeka jednovojnog induktora.

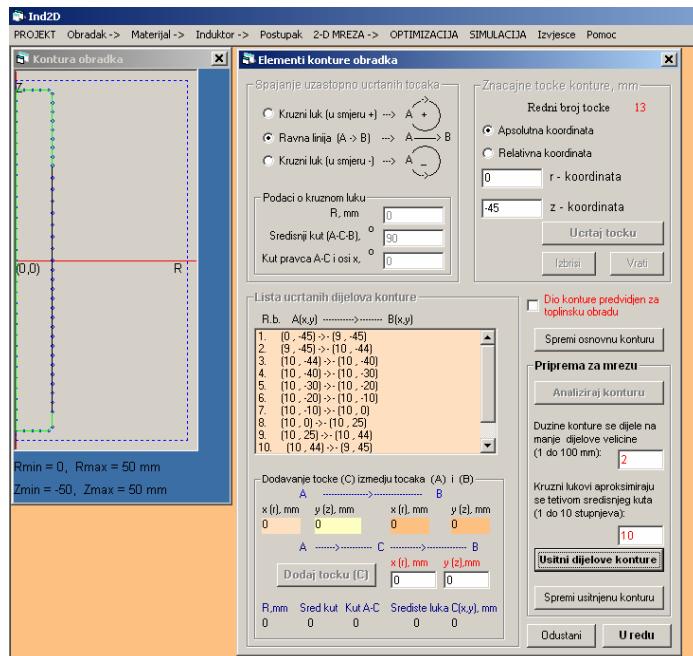


**Slika 8.10.** Polazna forma vlastito razvijenog računalnog programa za simulaciju induksijskog kaljenja i optimizaciju induktora.

Razvijeni računalni simulacijski program projektiran je kao programska ljudska u koju je ugrađeno korisničko sučelje povezano sa sljedećih osam modula:

- Modul za zadavanje geometrijskih elemenata konture obratka (**slika 8.11**)
- Baza podataka o fizikalnim, mehaničkim, metalurškim i tehnološkim svojstvima materijala
- Modul za izbor tipa induktora i zadavanje polaznog oblika i mjera induktora

- d) Modul za zadavanje podataka o parametrima postupka induksijskog kaljenja i svojstvima sredstva za gašenje
- e) Modul za podjelu volumena obratka i induktora na konačne trokutne elemente i njihovih površina na rubne elemente (tzv. modul “generatora mreže”)
- f) Modul za numeričko rješavanje matematičkih modela, elektromagnetskih, termodinamičkih i mikrostrukturnih procesa u obratku (modul “solver”)
- g) Modul za optimizaciju induktora
- h) Modul za prikaz rezultata simulacije (modul “postprocesor”)



Slika 8.11. Korisnička forma vlastito razvijenog računalnog programa za zadavanje geometrijskih elemenata konture obratka

Prva tri modula i posljednje navedeni modul nazuće su povezani s korisničkim sučeljem i stalno su vidljivi korisniku. Ostali moduli nevidljivi su korisniku i samo mu povremeno daju privremena izvješća o statusu i napretku npr. stvaranju mreže, konvergenciji simulacije, završetku ili početku određene faze simulacije ili optimizacije i sl. Korisničko sučelje programa (slika 8.11) i svojom organizacijom sugerira korisniku uobičajeni slijed faza u pripremi i provedbi simulacije.

**Faze pripreme računalne simulacije** postupka induksijskog kaljenja ili optimizacije induktora ugrađene u vlastito razvijeni program jesu slijedeće:

**Faza 1.** Zadavanje oblika i mjera obratka u prikladnom koordinatnom sustavu (pravokutni ili cilindrični) i označavanje dijela površine obratka namijenjenog induksijskom kaljenju (meni "Obradak" na **slici 8.11**).

**Faza 2.** Izbor materijala obratka i zadavanje njegovih svojstava (meni "Materijal" na **slici 8.11**).

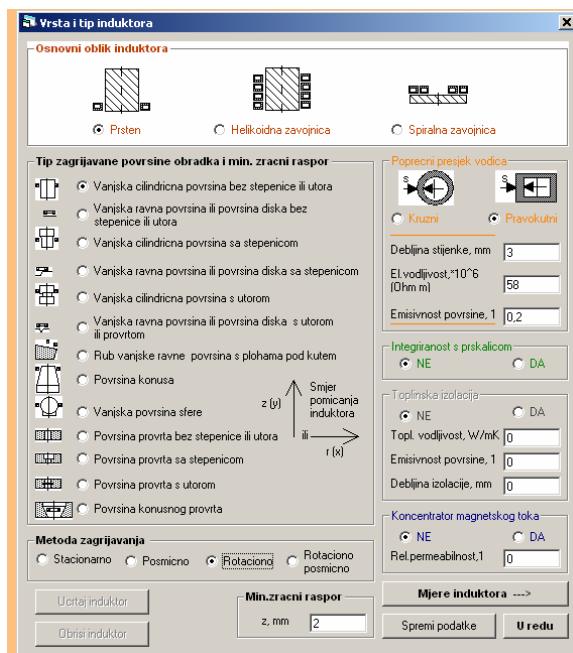
**Faza 3.** Odabir induktora i zadavanje njegovih polaznih mjera (meni "Induktor" na **slici 8.11**).

**Faza 4.** Zadavanje parametara postupka (meni "Postupak" na **slici 8.11**).

**Faza 5.** Zadavanje parametara za stvaranje mreže konačnih i rubnih elemenata (meni "2-D mreza" na **slici 8.11**).

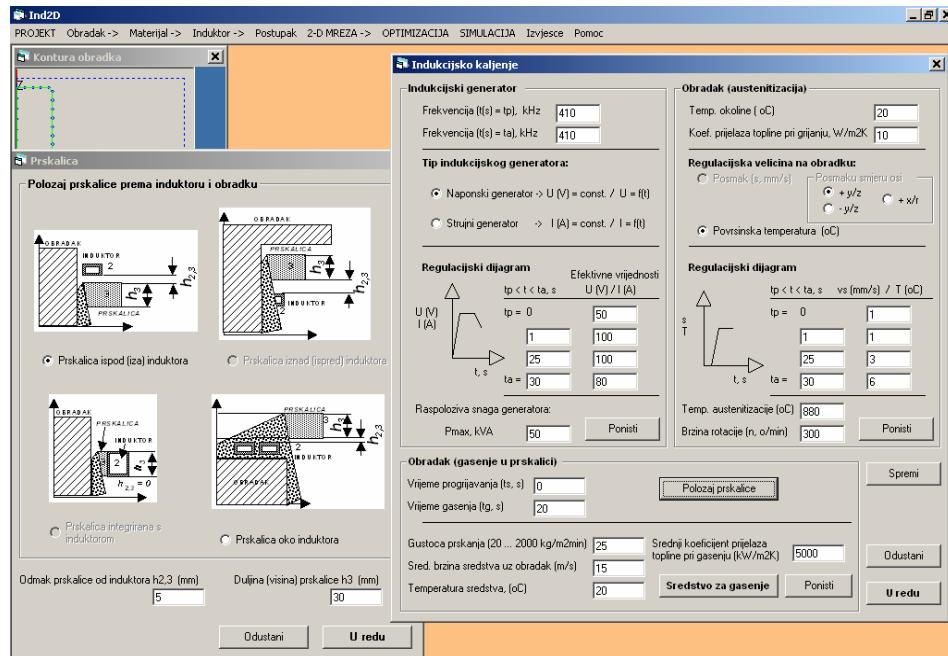
**Faza 6.** Zadavanje parametara simulacije ili optimizacije (meni "Optimizacija" ili "Simulacija" na **slici 8.11**).

Od spomenutih modula složenošću i brojem parametara ističu se dva: modul za izbor induktora i modul za zadavanje parametara postupka. Oblik korisničke forme za odabir induktora prikazan je na **slici 8.12**. Pri odabiru induktora treba zadati njegova fizikalna svojstva i položaj prema obratku.



**Slika 8.12** Korisnička forma vlastitog računalnog programa za izbor tipa induktora.

Oblik korisničke forme za zadavanje parametara postupka induksijskog kaljenja prikazan je na **slici 8.13.** U primjeni vlastito razvijenog računalnog programa predviđena je simulacija induksijskog kaljena uz konstantne ili vremenski promjenljive parametre postupka (struja ili napon induktora, posmak ili temperatura površine obratka) koje je moguće ostvariti mikroprocesorskim vođenjem na suvremenim induksijskim radnim célijama.



**Slika 8.13** Korisnička forma za zadavanje parametra postupka induksijskog kaljenja u vlastito razvijenom računalnom programu "Ind2D"

Nakon pripreme simulacije postupka kaljenja ili optimizacije induktora poziva se modul za stvaranje mreže linearnih trokutnih i ravnih rubnih elemenata. On je projektiran uz pomoć specijaliziranih funkcija računalnog programa za rješavanje parcijalnih diferencijalnih jednadžbi: 'Matlab' - "Partial Differential Equation Toolbox" i vlastito razvijenih programske modula. Generirane mreže konačnih i rubnih mogu biti lokalno adaptirane ili izgrađene u slojevima s malim trokutnim elementima uz površinu i grublјim elementima prema jezgri obratka.

Matematički modeli elektromagnetskih, toplinskih i mikrostrukturnih procesa numerički se rješavaju prema simulacijskom algoritmu i matričnim jednadžbama izvedenim poglavljima pet do sedam. Za numeričko rješavanje primjenjuju se vlastito razvijene programske funkcije i one iz računalnog sustava "Matlab" prevedene u programske jezike C i C++.

## **9.0 EKSPERIMENTALNA PROVJERA RAČUNALNE SIMULACIJE INDUKCIJSKOG KALJENJA**

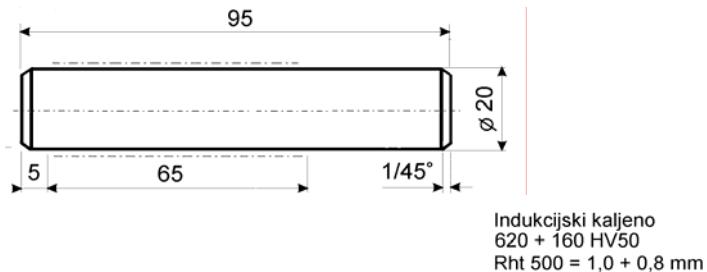
Problemi odabira radnih parametara induksijskog kaljenja i pronalaženja optimalnog induktora riješeni su razradom vlastitog simulacijskog algoritma i razvojem računalnog programa. Pri tome su matematičkim modelima obuhvaćeni elektromagnetski, toplinski i mikrostrukturni procesi u obratku u svrhu preciznog uvida u postupak induksijskog kaljenja i utjecajne čimbenike na postignuta svojstva zakaljenog sloja. Razvijeni računalni program "Ind2D" provjerit će se na primjeru induksijskog kaljenja čeličnih valjaka

Računalna simulacija induksijskog kaljenja čeličnih valjaka provedena je u svrhu određivanja kombinacije radnih parametara (snage generatora i posmične brzine obratka) kojima će se ostvariti propisani zahtjevi na **slici 9.1**. Također je na konkretnim ispitnim uzorcima provjerena točnost rezultata simulacije i predviđenih svojstava zakaljenog sloja u odnosu na na stvarno postignuta svojstva (dubinu kaljenja, površinsku tvrdoću i raspored tvrdoće po dubini zakaljenog sloja).

### **9.1 Izbor ispitnog uzorka**

Rezultati vlastito razvijenog simulacijskog programa "Ind2D" provjereni su na primjeru rotaciono posmičnog induksijskog kaljenja čeličnih valjaka dimenzija  $\phi 20 \times 95\text{mm}$  za koje su definirane kombinacije snage generatora i posmaka kojima se prema rezultatima simulacije postiže tražena dubina kaljenja i površinska tvrdoća. Ostali radni parametri induksijskog kaljenja zadržani su uvijek jednakim tijekom simulacije i pokusa.

Za provjeru računalnog programa "Ind2D" izabran je primjer simulacije rotaciono-posmičnog induksijskog kaljenja čeličnih valjaka dimenzija  $\phi 20 \times 95\text{mm}$  koje treba zakaliti prema zahtjevima propisanim na **slici 9.1**.



**Slika 9.1** Ispitni uzorak od čelika 42CrMo4 (sa zadanim zahtjevima) na kojem je provedena računalna simulacija i pokusi induktijskog kaljenja

Svi su ispitni uzorci bili izrađeni od iste šipke niskolegiranog čelika za poboljšavanje 42CrMo4 tvrdoće u polaznom stanju jednake 284 HV1. Ispitni uzorci su obrađeni rezanjem tokarenjem i finim brušenjem na mjere zadane crtežom (**slika 9.1**) uz površinsku hrapavost  $N6$  ( $R_{a\max} = 12,5 \mu\text{m}$ ). Izabrani čelik 42CrMo4 je dobre prokaljivosti i uobičajeno se koristi za induktijski kaljenje. Kemijski sastav izrađenih ispitnih uzoraka korištenih u računalnoj simulaciji i pokusima induktijskog kaljenja naveden je u **tablici IX.1**.

**Tablica IX.1.** Kemijski sastav ispitivanog čelika 42CrMo4.

% C	% Cr	% Mo	% Mn	% Si	Ni	S	P
0,373	1,14	0,66	0,89	0,26	0,20	0,019	0,022

Ispitne uzorce od čelika 42CrMo4 trebalo je induktijski zakaliti na dubinu  $Rht 500 = 1,0 + 0,8$  mm uz postizanje površinske tvrdoće od 620 + 160 HV50 samo na dijelu površine označenom na **slici 9.1**. Čelični valjak prikazan **slikom 9.1** izabran je zbog jednostavnog oblika i duljine kaljene površine koje ga čine neupitno prikladnim za rotaciono-posmično induktijsko kaljenje. Duljina kaljene površine (65mm) pri induktijskom kaljenju u induktoru s jednim zavojkom (uobičajenim za rotaciono-posmično induktijsko kaljenje) omogućuje postizanje ujednačenog unosa energije i svojstava zakaljenog sloja na sredini valjka gdje će se uzeti uzorak za mikroografsku analizu i ispitivanje rasporeda tvrdoće.

## 9.2. Priprema računalne simulacije i pokusa induksijskog kaljenja

**Priprema induksijskog kaljenja** pokusnih čeličnih valjaka provedena je prema nešto pojednostavljenom postupku u odnosu na prikaz naveden tablicom II.3 (poglavlje 2.2) sa sljedećim fazama:

- 1) Konstrukcija i izrada induktora i prskalice.
- 2) Pozicioniranje induktora i prskalice prema obratku.
- 3) Definiranje radnih parametara postupka:
  - a) određivanje temperature austenitizacije (prema TTS dijagramima čelika 42CrMo4)
  - b) određivanje kombinacija radne snage generatora i posmaka obratka vlastitim računalnim simulacijskim programom
  - c) izbor sredstva za gašenje i parametara gašenja
- 4) Definiranje mjernih veličina (površinska temperatura obratka, napon i struja induktora) i izrada mjernih strujnih i naponskih transformatora.

**Induktor** je konstruiran s jednim zavojem unutrašnjeg promjera  $\phi 22\text{mm}$  koji omogućuje slobodnu rotaciju obratka i minimalni zračni raspor (tj. minimalne gubitke elektromagnetske energije). Induktor je izrađen od šupljeg bakrenog profila (zbog hlađenja vodom tijekom rada) kvadratnog poprečnog presjeka  $5\times 5\text{mm}$  i debljine stjenke  $1\text{mm}$ .

**Prskalica** je konstruirana i izrađena s aktivnom površinom prskanja promjera  $\phi 56\text{mm}$  i visine  $26\text{mm}$  sa 120 rupica promjera  $\phi 1\text{mm}$ .

**Za mjerjenje radne snage induktora** trebalo je izraditi visokofrekventne strujne i naponske mjerne transformatore za istodobno mjerjenje struje i napona induktora (mjerjenja na frekvenciji generatora  $f = 410 \text{ kHz}$ ). Istodobno mjerjenje napona i struje induktora nužno je zbog određivanja radne snage induktora koja ovisi o efektivnom iznosu napona, struje i faznom kutu ( $\cos\varphi$ ) između vektora struje  $I_0$  i napona  $U_0$ :

$$P = U_0 I_0 \cos\varphi \quad (9.1)$$

Ovisnost iskazana jednadžbom (9.1) praktički znači da se tijekom pokusa induksijskog kaljenja treba mjeriti tri veličine ( $U_0$ ,  $I_0$ ,  $\cos\varphi$ ), što je izvedeno korištenjem naponskog i strujnog visokofrekventnog

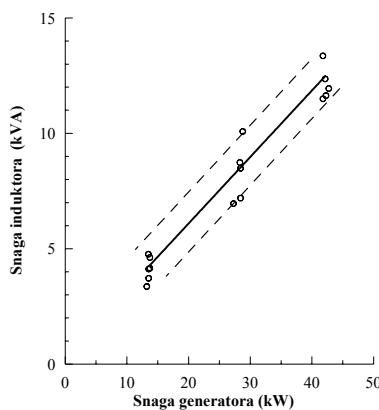
feritnog transformatora i dvokanalnog digitalnog osciloskopa (koji istovremeno snima sve tri veličine napon, struju i fazni kut). Mjerni transformatori izvedeni su s feritnim jezgrama sa slijedećim prijenosnim omjerima:

- a) 1000:1 za strujni mjerni transformator,
- b) 10:1 za naponski mjerni transformator.

Iz snimljenih krivulja promjene struje i napona tijekom nekoliko perioda u istoj vremenskoj skali računaju se efektivni iznosi struje i napona odnosno radna snaga u induktoru.

Tijekom pokusa predviđeno je **mjerjenje površinske temperature obratka** iznad induktora optičkim ili infracrvenim pirometrima toplinskog zračenja. Mjerjenje površinske temperature obratka ispod induktora je otežano i nesigurno zbog zapljuskivanja površine uzorka sredstvom za gašenje.

Pokusi induktijskog kaljenja provedeni su na **visokofrekventnom generatoru** s vakuumskom cijevi najveće izlazne radne snage 50 kW i radne frekvencije između 400 i 450 kHz. Izlaznom snagom generatora upravlja se ručno preko potenciometara. Prije provedbe pokusa induktijskog kaljenja izvedeni su predpokusi ugrijavanja valjka istih dimenzija od iste šarže čelika 42CrMo4 kao što su bili i ispitni uzorci. Tijekom ugrijavanja osciloskopom priključenim na dovodne vodiče induktora (preko mjernih transformatora) snimljena je vremenska promjena napona i struje induktora, a zadavanjem različitih snaga generatora utvrđena je ovisnost snage induktora o snazi generatora (**slika 9.2**).



**Slika 9.2.** Ovisnost snage induktora o snazi generatora određena eksperimentalno ugrijavanjem valjaka  $\phi 20 \times 95\text{mm}$  od čelika 42CrMo4 u induktoru s jednima zavojkom unutrašnjeg promjera  $\phi 22\text{ mm}$  s poprečnim presjekom  $5 \times 5\text{ mm}$ .

**Traženi radni parametri** induksijskog kaljenja pokusnih valjaka određeni su zadavanjem temperature austenitizacije, odabirom sredstva za gašenje i parametara gašenja i zadavanjem snage induktora i posmaka valjaka određenih računalnom simulacijom.

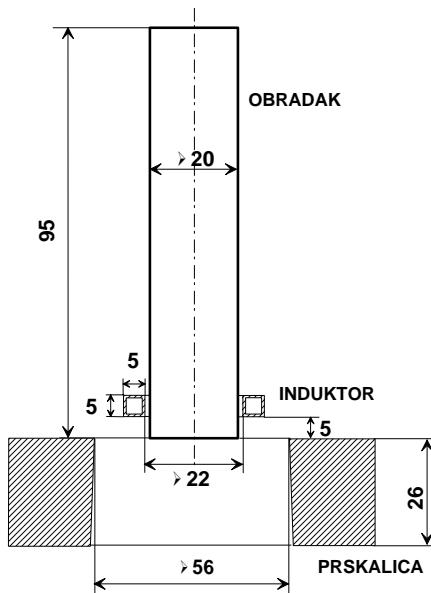
**Temperatura austenitizacije** odabrana je prema TTS dijagramu čelika 42CrMo4 tako da se nalazi između temperature završetka austenitizacije ( $A_3$ ) i postizanja homogenog austenita ( $A_{ch}$ ) (**slika 2.3**, poglavlje 2.1). Ovisno od brzine ugrijavanja područje optimalnih temperatura austenitizacije nalazi se između 850° i 920°C. Pri računalnoj simulaciji temperatura austenitizacije zadana je na donjoj granici (850°C) jer je njen iznos nužan za određivanje trajanja rotacionog ugrijavanja pokusnog valjka u induktoru prije početka posmaka. Posmak obratka uključuje se tek kada se površina valjka ugrije na oko 850°C.

**Za sredstvo za gašenje** izabrana je 18 %-tna vodena otopina polimera PAG iz industrijskog spremnika. Predpokusima je utvrđena gustoća prskanja 8,77 kg/m<sup>2</sup>min i radni pretlak sredstva za gašenje u dovodnom vodu prskalice 1,2 bar. Temperatura sredstva za gašenje bila je 18°C tijekom svih pokusa. Za ove uvjete gašenja prema aproksimacijskom modelu iz poglavlja 6.3. određena je srednja vrijednost koeficijenta prijelaza topline u zoni gašenja  $\approx 12000 \text{ W/m}^2\text{K}$ .

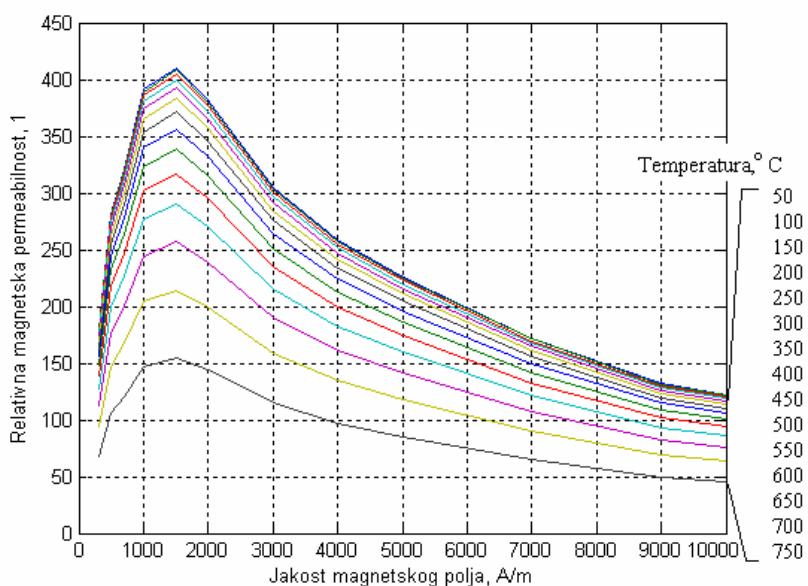
**Simulacija induksijskog kaljenja** pokusnih valjka Ø20x95 od čelika 42CrMo4 izvedena je vlastito razvijenim računalnim programom "Ind2D". Oblik i dimenzije kaljene površine zadane su **slikom 9.1**, a **slika 9.3** prikazuje položaj induktora i prskalice prema ispitnom valjku na početku induksijskog kaljenja. Ovim položajem induktor neće ugrijati rub valjka na temperaturu iznad  $A_{c1}$ , što je provjeroeno predpokusom ugrijavanja i računalnom simulacijom.

**Fizikalna svojstva materijala** (čelika 42CrMo4) zadana su nelinearno promjenljivim, ovisnim o temperaturi i eventualno dodatnim veličinama polja. Na **slici 9.4.a** prikazana je ovisnost relativne magnetske permeabilnosti čelika 42CrMo4 o jakosti magnetskog polja. Primjenom vlastito razvijenog matematičkog modela (poglavlje 5.2) aproksimirana je dodatno i promjena relativne magnetske permeabilnosti ovisno o temperaturi (**slika 9.4.b**).

Zadavanje vrijednosti specifičnog toplinskog kapaciteta čelika 42CrMo4 ovisno o temperaturi u vlastito projektiranim programu "Ind2D" prikazano je na **slici 9.5.**, a zadavanje vrijednosti vodljivosti topline ovisnih o temperaturi i mikrostrukturnom stanju čelika prikazano je na **slici 9.6**.

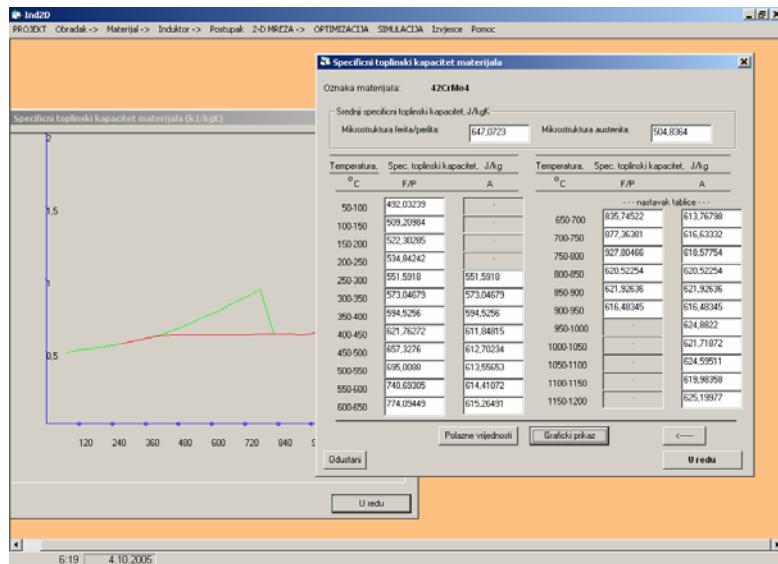


Slika 9.3. Pozicioniranje induktora i prskalice prema ispitnom valjku na početku ciklusa rotaciono-posmičnog kaljenja

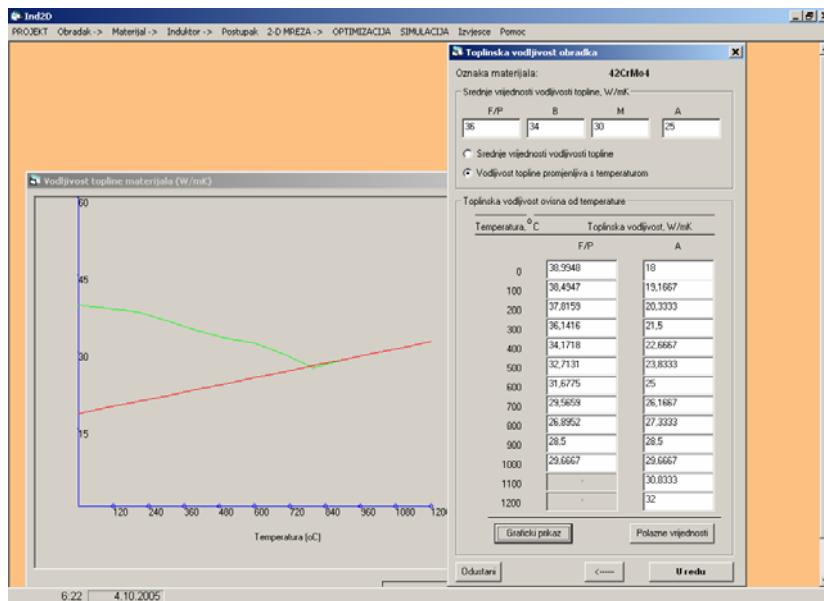


Slika 9.4. Aproksimacija promjene relativne magnetske permeabilnosti čelika 42CrMo4 ovisno o jakosti magnetskog polja za temperature (između 20°C i 750°C)

## Darko Landek: Modeli i algoritmi računalnog projektiranja indukciskog kaljenja



**Slika 9.5.** Zadavanje iznosa specifičnog toplinskog kapaciteta ovisno o temperaturi i mikrostrukturnom stanju čelika 42CrMo4 u računalnom programu "Ind2D" (F/P – feritno-perlitna mikrostruktura, A- austenitna mikrostruktura)



**Slika 9.6.** Zadavanje iznosa vodljivosti topline ovisno o temperaturi i mikrostrukturnom stanju čelika 42CrMo4 u računalnom programu "Ind2D" (F/P – feritno-perlitna mikrostruktura, A- austenitna mikrostruktura)

Na sličan način unošenjem vrijednosti ili korištenjem polaznih vrijednosti iz baze podataka zadana su i ostala svojstva čelika 42CrMo4 potrebna za računalnu simulaciju: toplinska (gustoća, emisijski faktor površine, koeficijent prijelaza topline), metalurška (temperature  $A_1$  i  $A_3$  ovisne o brzini ugrijavanja, gornja i donja kritična brzina gašenja,  $Ms$  temperatura i sl.) i mehanička svojstva (tvrdoća nakon gašenja s povišenih temperatura austenitizacije prema TTS dijagramu).

**Snaga generatora i posmak uzorka mijenjali su se, za pojedinu simulaciju, prema **tablici IX.2**, s ciljem dobivanja one kombinacije radnih parametara snage generatora i posmaka obratka koji će dati propisanu dubinu kaljenja i površinsku tvrdoću. Za simulacijski program zadani su iznosi struje induktora. Raspon radne snage generatora (15 do 45 kW) koja odgovara snazi induktora od 6 do 15 kVA određen je iz dijagrama na **slici 9.2** Brzina posmaka ispitnog valjaka od 4 do 10 mm/s odabrana je predpokusima.**

**Tablica IX.2** Pretpostavke i radni parametri računalne simulacije rotaciono posmičnog induksijskog kaljenja valjaka

Naziv	Iznos
Materijal ispitnih valjaka	42CrMo4
Mjere ispitnih valjaka	$\varnothing 20 \times 95$ mm
Brzina posmaka ispitnih valjaka	4 - 10 mm/s
Broj okretaj valjaka	$300 \text{ min}^{-1}$
Početna temperatura ispitnih valjaka	20 °C
Temperatura austenitizacije	850 – 920 °C
Srednji emisijski faktor površine valjaka	0,52
Srednji koeficijent prijelaza topline gašenjem	$\approx 12\,000 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$
Frekvencija generatora	415 kHz
Radna snaga generatora	15 – 45 kW
Struja induktora	600 – 1500 A
Napon induktora	10 – 30 V
Induktor (bakreni profil poprečnog presjeka 5x5 mm):	$\varnothing 27 / 22 \times 5$ mm
Sredstvo za gašenje	18%-tna vodena otopina PAG
Gustoća prskanja	$8,77 \text{ kg}/(\text{m}^2\text{min})$
Pretlak u dovodnom vodu prskalice	1,2 bar
Temperatura sredstva za gašenje	20 °C
Aktivna površina prskalice	$\varnothing 57 \times 26$ mm

Računalnom je simulacijom dobiveno nekoliko kombinacija snage generatora i posmaka ispitnog valjka, a pokusima indukcijskog kaljenja provjerene su kombinacije prema **tablici IX.3.** Za svako stanje ispitana su po tri pokusna uzorka označena kako je navedeno u **tablici IX.3.**

**Tablica IX.3** Plan pokusa indukcijskog kaljenja valjaka  $\varnothing 20 \times 95$  mm od čelika 42CrMo4

Posmična brzina (mm/s)	Snaga generatora-zadana prema slici 9.2 (kW)	
	30	45
4	Oznake ispitnih uzoraka: $U_{4\_30\_1}$ , $U_{4\_30\_2}$ , $U_{4\_30\_3}$	Oznake ispitnih uzoraka: $U_{4\_45\_1}$ , $U_{4\_45\_2}$ , $U_{4\_45\_3}$
10	Oznake ispitnih uzoraka: $U_{10\_30\_1}$ , $U_{10\_30\_2}$ , $U_{10\_30\_3}$	Oznake ispitnih uzoraka: $U_{10\_45\_1}$ , $U_{10\_45\_2}$ , $U_{10\_45\_3}$

U provedbi pokusa kaljenja čelični valjci su najprije ugrijavani u induktoru bez posmaka: uz radnu snagu generatora 30 kW četiri sekunde, odnosno uz radnu snagu 45 kW dvije sekunde. Tijekom ovog perioda postiže se površinska temperatura oko  $900^{\circ}\text{C}$  i akumulira se toplinska energija u rubnom sloju valjka ispod induktora potrebna za približno ujednačeno ugrijavanje uzorka u posmično gibanju. Navedeni iznosi vremena polaznog ugrijavanja kod rada s ručno reguliranim indukcijskim generatorom (korištenim u pokusima) mogu se samo približno odrediti računalnom simulacijom zbog teško predvidljive promjene napona i struje induktora u prvim trenutcima ugrijavanja i prijelaznih električnih pojava uzrokovanim naglim promjenama električne impedancije induktora (prelazak iz praznog hoda u radni režim ugrijavanja). Ova poteškoća razriješena je pretpostavkom o linearном porastu vrijednosti struje ili napona induktora od iznosa izmјerenog u praznom hodу generatora do nazivne vrijednosti ovih veličina u potpunosti postignute neposredno prije početka rotaciono-posmičnog gibanja obratka.

### 9.3 Rezultati i analiza rezultata računalne simulacije induksijskog kaljenja

Računalna simulacija provedena je uz prepostavku da induksijski generator radi kao strujni izvor koji napaja induktor strujom konstantne jakosti. Prolaskom struje kroz induktor i induciranjem vrtložnih struja u obratku nastaje pad napona na induktoru koji je u ovom slučaju jedan od izlaznih podataka računalne simulacije. U **tablici IX.4** navedene su vrijednosti efektivne struje induktora zadane u računalnoj simulaciji i izračunate vrijednosti napona na induktoru, odnosno prividne snage induktora. Osim toga tijekom simulacije induksijskog kaljenja čeličnih valjka  $\varnothing 20 \times 95$  praćene su i slijedeće veličine:

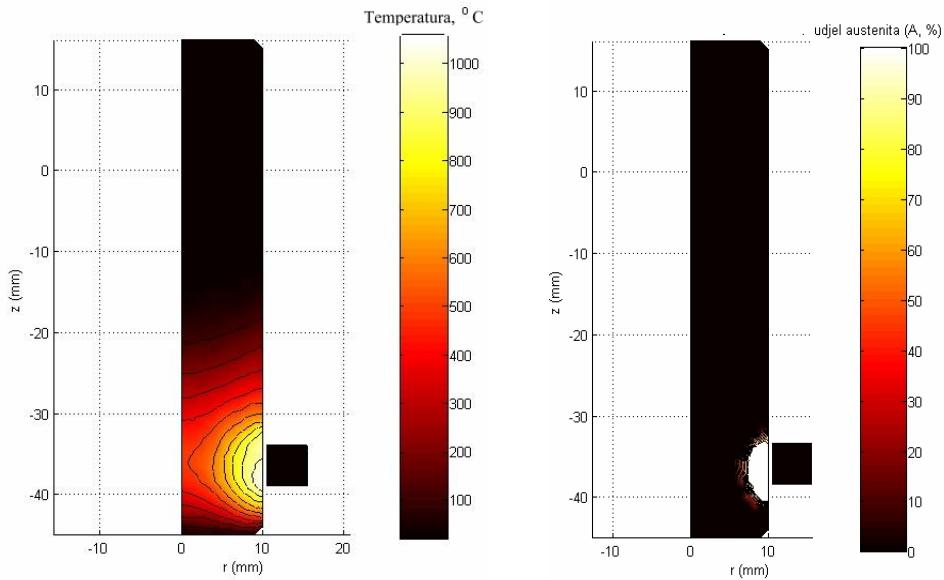
- Raspored inducirane električne snage u površinskom sloju valjka
- Temperaturno polje po presjeku valjka
- Udio austenita nakon ugrijavanja na temperaturu iznad temperature  $A_1$
- Raspored tvrdoće po poprečnom presjeku uzorka.

**Tablica IX.4** Računski određene vrijednosti napona  $U_0$  i snage  $P_0$  induktora prema simulaciji

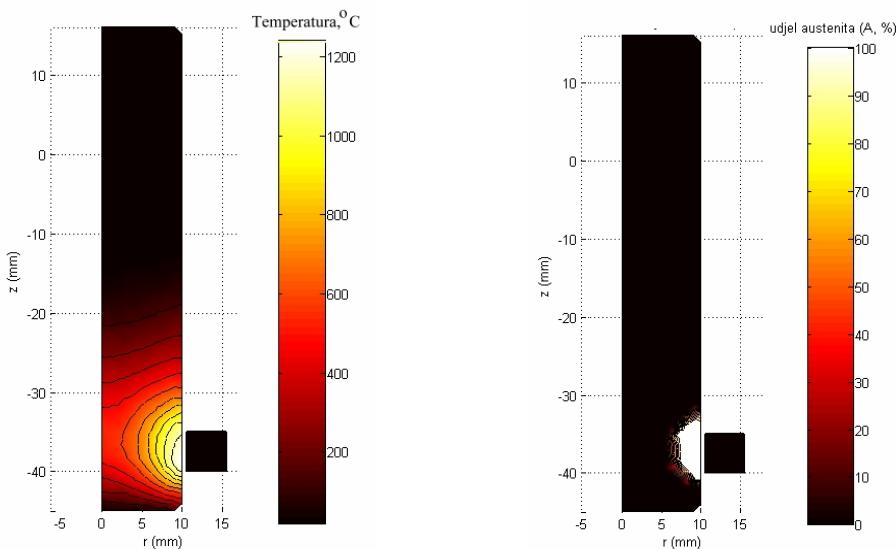
indukcijskog kaljenja valjaka  $\varnothing 20 \times 95$  mm od čelika 42CrMo4

Zadana efektivna jakost struje induktora u simulaciji	Računski određena snaga i napon induktora	
700 A	$U_0 = 14,0$ V $P_0 = 9,818$ kVA	-
800 A	-	$U_0 = 15,47$ V $P_0 = 12,647$ kVA

Na **slici 9.7 i 9.8** prikazano je simulacijom dobiveno temperaturno polje po uzdužnom presjeku polovice valjka  $\varnothing 20 \times 95$  mm, ugrijavanog snagom induksijskog generatora 45 kW uz posmičnu brzinu 4 mm/s i različite prividne snage induktora (9,818 kVA i 12,647 kVA). Temperaturna polja na **slici 9.7** prikazana su nakon jednakog trajanja induksijskog kaljenja, odnosno za slične položaje obratka u induktoru i prskalici. Iz **slika 9.7 i 9.8** uočljivo je da se pri većoj ulaznoj snazi induktora zagrijava dublji površinski sloj obratka i najveća računski određena površinska temperatura je viša.



**Slika 9.7.** Simulacijom dobiveno temperaturno polje i udjel austenita po presjeku valjka  $\varnothing 20 \times 95$  mm na početku posmičnog gibanja uz brzinu 4 mm/s i ugrijavanje snagom generatora 30 kW uz računski određenu snagu induktora 9,818 kVA ( $f = 415$  kHz)



**Slika 9.8 .** Simulacijom dobiveno temperaturno polje i udjel austenita po presjeku valjka  $\varnothing 20 \times 95$  mm na početku posmičnog gibanja uz brzinu 4 mm/s i ugrijavanje snagom generatora 45 kW uz računski određenu snagu induktora 12,647 kVA ( $f = 415$  kHz)

Uz pomoć prikaza sličnih ovom na **slikama 9.7 i 9.8** poznate promjene temperature ovisne od trajanja ugrijavanja u pojedinim točkama trokutnih konačnih elemenata izračunate su srednje brzine ugrijavanja od Curieove temperature do temperature austenitizacije čelika 42CrMo4 ( $850^{\circ}\text{C}$ ). Na osnovi ovih brzina ugrijavanja i predloženih kinetičkih modela faznih pretvorbi (poglavlje 7) izračunata je dubina kaljenja. Zbog velike brzine ohlađivanja praktički ona debljina površinskog sloja na kojoj je materijal bio ugrijan na temperature iznad  $A_{\text{c}1}$  bila je i zakaljena.

Simulacijom su izračunate slijedeće vrijednosti dubine kaljenja ovisne o zadanoj snazi generatora i posmaku obratka za mjesto kaljenja koje se nalazi na 30 mm od čela valjka:

- a)  $R_{\text{ht}} 500 = 1,25 \pm 0,05$  mm za simulaciju induktijskog kaljenja uz: snagu generatora 30 kW, posmičnu brzinu obratka 4 mm/s (srednja snaga induktora 8-10 kVA).
- b)  $R_{\text{ht}} 500 = 1,15 \pm 0,05$  mm za simulaciju induktijskog kaljenja uz: snagu generatora 30 kW, posmičnu brzinu obratka 10 mm/s (srednja snaga induktora 8-10 kVA).
- c)  $R_{\text{ht}} 500 = 1,45 \pm 0,05$  mm za simulaciju induktijskog kaljenja uz: snagu generatora 45 kW, posmičnu brzinu obratka 4 mm/s (srednja snaga induktora 12-14 kVA).
- d)  $R_{\text{ht}} 500 = 1,40 \pm 0,05$  mm za simulaciju induktijskog kaljenja uz: snagu generatora 45 kW, posmičnu brzinu obratka 10 mm/s (srednja snaga induktora 12-14 kVA).

Iz ovih rezultata simulacije usvojena je srednja dubina kaljenja  $R_{\text{ht}} 500 = 1,20$  do  $1,4$  mm koju se želi postići pokusima induktijskog kaljenja na ispitnim valjcima dimenzija  $\varnothing 20 \times 95$  od čelika 42CrMo4. Kao što se vidi iz rezultata izračunata snaga induktora pokazuje rasipanje se u rasponu vrijednosti od  $\pm 1,0$  kVA čini se zbog dvaju čimbenika. Prvi je utjecaj numeričkih pogrešaka vezanih uz usklajivanje vrijednosti svojstava materijala ovisnih o temperaturi i jakosti magnetskog polja s izračunatim vrijednostima ovih veličina pri nestacionarnom zagrijavanju. Drugi utjecajni čimbenik je vezan uz promjenu aproksimacijskih modela u kinetičkim jednadžbama faznih pretvorbi (poglavlje 7) koji približno opisuju tijek nastanka austenita i raspada austenita. Ovi utjecajni čimbenici u manjoj mjeri djeluju na stabilnost rješenja matematičkog modela toplinskih procesa i čini se utječu na najveći dozvoljeni vremenski inkrement s kojim treba provoditi proračune nestacionarnog temperaturnog polja. Početna vrijednost vremenskog inkrementa u simulaciji nalazila se između 0,125 i 0,25 s a onda bi se ovisno o porastu temperature smanjivala za 50 % (ako bi se pojavio porast temperature veći od  $50^{\circ}\text{C}$ ) ili povećavala za isti iznos (ako bi promjene temperature u jednom vremenskom inkrementu bile manje od  $25^{\circ}\text{C}$ ). S druge strane udio austenita (paramagnetik) koji postoji ispod induktora direktno

utječe na raspodjelu magnetskog polja i na inducirana električnu snagu u rubnom sloju. Na taj način pogreška u rješenju nestacionarnog temperaturnog polja utječe određivanje brzine ugrijavanja, odnosno izračunati udio austenita, a to se povratno reflektira na magnetska svojstva rubnog sloja.

Iz izračunatih vrijednosti dubine kaljenja  $Rht$  500 uočava se pojava veće snage induktora kod veće posmične brzine, premda je zadana snaga generatora ista za manju i za veću posmičnu brzinu. Ovo je čini se posljedica dinamike ugrijavanja. Kod veće posmične brzine obratka veći su gradjeni temperature u zoni ugrijavanja ispod induktora, pa je i veći dio materijala ispod induktora feromagnetičan (ugrijan na temperature ispod temperature Curie) nego kod manjeg posmaka. Raspored temperaturnog polja u zoni ugrijavanja utječe na raspored inducirane gustoće struje, odnosno na prenesenu električnu snagu s induktora na obradak. Ovisnost snage induktora o posmičnoj brzini obratka nije jednoznačna i ostaje kao otvoreno pitanje na koje će biti potrebno pronaći odgovor u budućim istraživanja.

Kod sva četiri gore navedena slučaja induksijskog kaljenja simulacijom je predviđena površinska tvrdoća 660 HV1.

## 9.4. Rezultati i analiza rezultata pokusa induktijskog kaljenja

Pokusi induktijskog kaljenja provedeni su, na po tri ispitna uzorka za svaku kombinaciju snage generatora i posmične brzine uzorka. Površinska temperatura ispitana je optičkim pirometrom "Milliskop" tijekom ugrijavanja na početku induktijskog kaljenja na dijelu površine ispitnog valjka između induktora i prskalice. Tijekom same provedbe postupka rotaciono-posmičnog induktijskog kaljenja nije bilo moguće izmjeriti površinsku temperaturu zbog prskanja sredstva za ohlađivanje po ugrijavanoj površini uzorka.

Nakon 10 mm rotaciono posmičnog induktijskog kaljenja, snimljena je vremenska promjena struje i napona induktora, dvokanalnim digitalnim osciloskopom i vlastito konstruiranim i izrađenim mernim transformatorima. Također su izmjereni struja  $I_A$  i napon  $U_A$  anode vakuumske triode generatora. Izmjerene vrijednosti struje i napona anode generatora tijekom rotaciono-posmičnog kaljenja prikazane su u **tablici IX.4**. Izlazna snaga generatora izračunata je jednadžbom:

$$P_A = U_A * I_A \quad (9.2)$$

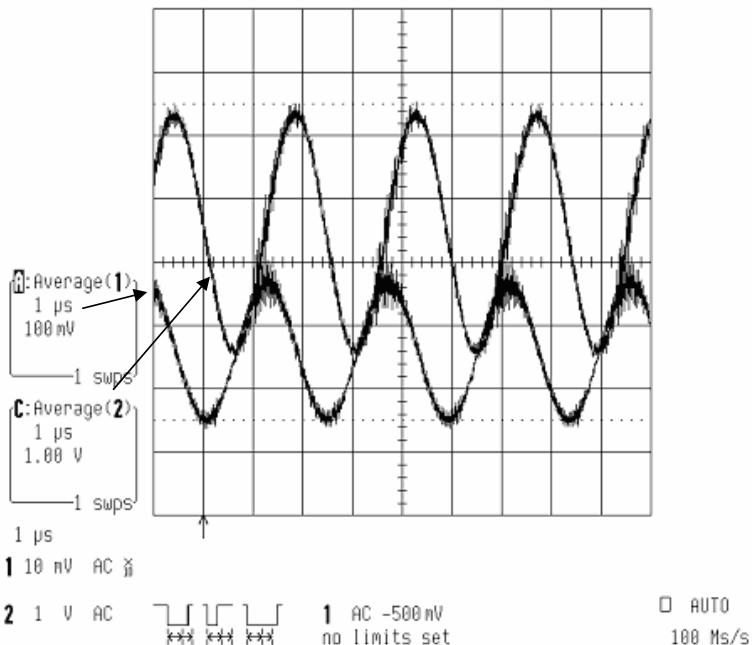
Iz **tablice IX.5** uočljivo je da su postignute tražene snage generatora uz prihvatljivo odstupanje između propisane i stvarne snage.

**Tablica IX.5** Izmjerene vrijednosti struje  $I_A$  i napona  $U_A$  i snage  $P_A$  generatora

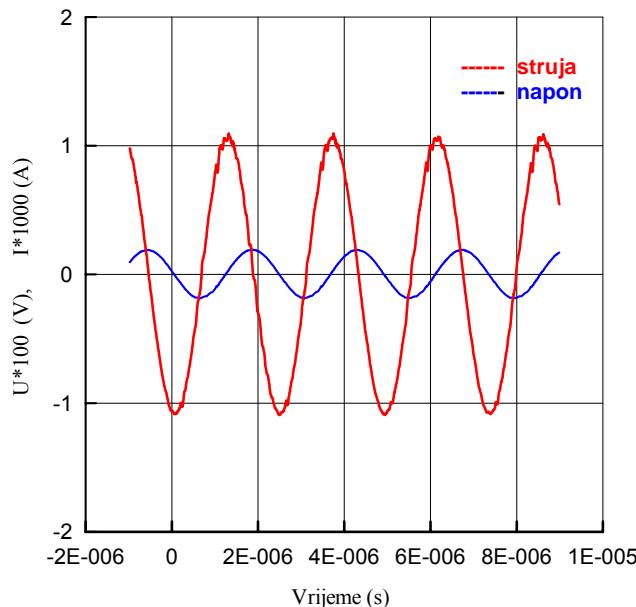
	<b>Zadana snaga generatora (kW)</b>	
	<b>30</b>	<b>45</b>
<b><math>I_A</math> (A)</b>	3,60	4,50
<b><math>U_A</math> (kV)</b>	7,80	9,40
<b>Izračunata (stvarna) snaga generatora <math>P_A</math> (kW)</b>	<b>28,40</b>	<b>42,30</b>

Na **slici 9.9** prikazane su snimljene krivulje vremenske promjene napona (krivulja A) i struje induktora (krivulja C) pri induktijskom kaljenju zadanom snagom generatora 30 kW. Ove krivulje bilo je nužno statistički obraditi prije određivanja iznosa amplitude napona i struje, odnosno određivanja faznog kuta. Pri statističkoj obradi snimljenih podataka s krivulja vremenske promjene

struje i napona induktora izračunate su (“lokalne”) srednje vrijednosti struje i napona za po pet točaka krivulje u rastućem vremenskom nizu. Ovim je uklonjen šum u snimljenim podacima nastao djelovanjem stranih elektromagnetskih polja pri pokusu induksijskog kaljenja. Kroz izračunate “lokalne” srednje vrijednosti napona, odnosno struje provučene su krivulje (**slika 9.10**) iz kojih su određeni efektivni iznosi napona  $U_0$ , struje  $I_0$  te faznog kuta  $\cos\varphi$  induktora navedeni u **tablici IX.6**



**Slika 9.9.** Vremenska promjena napona (krivulja A) i struje induktora (krivulja C), pri induksijskom kaljenju snagom generatora 30 kW (izmjereni napon anode 8,0 kV i struja anode 3,6 A). Prijenosni omjer mjernog naponskog, odnosno strujnog transformatora i sonde osciloskopa iznose 100:1, odnosno 1000:1.



**Slika 9.10.** Vremenska promjena napona i struje induktora, pri induktijskom kaljenju snagom generatora 30 kW (izmjereni napon anode 8,0 kV i struja anode 3,6 A) aproksimirani krivuljama najmanjih kvadrata odstupanja.

Određivanje faznog kuta treba izvesti vrlo precizno, jer već i mala pogreške od  $1^\circ$  uzrokuju velike pogreške izračunate radne snage induktora (zbog računanja kosinusa kuta vrijednosti su veće od  $70^\circ$ ). U provedenim mjeranjima na svim snimljenim krivuljama (i za prazni hod induktora, tj. bez obratka) uočeno je izobličenje vremenske promjene struje kad sinusioda struje prolazi kroz nulu. Ovo je čini se posljedica djelovanja feritnih jezgri mjernih transformatora koje pomiču sinusoidu struje prema sinusodi napona za kut oko  $15^\circ$ . Zbog toga je pri svim mjeranjima faznog kuta vrijednost očitanog faznog kuta umanjena za  $15^\circ$ .

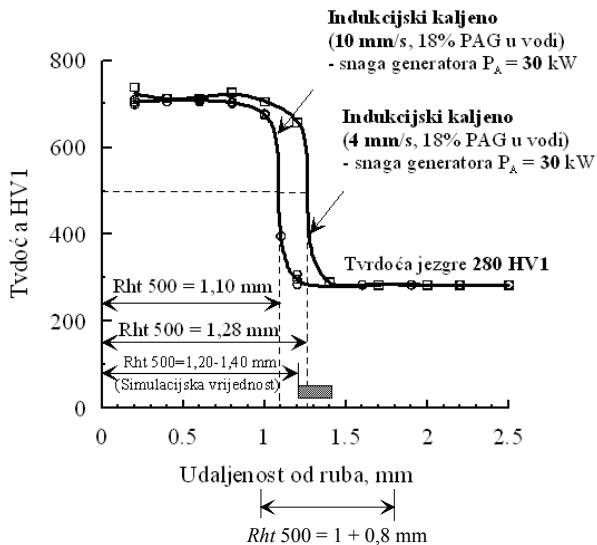
Iz **tablice IX.6** uočljivo je da se samo dio raspoložive snage induktijskog generatora iskorištava na ugrijavanje obratka u induktoru. Pri tome se samo dio radne snage induktora izračunate u posljednjem stupcu **tablice IX.6** pretvara u toplinu ugrijavanja obratka. Preostali dio radne snage troši se na ugrijavanje induktora i odvodi rashladnom vodom (toplinski gubitak). Gubici električne energije ugrijavanjem induktora uočljivi su iz podataka za snagu praznog hoda (0,511 W).

**Tablica IX.6** Vrijednosti struje i napona te faznog kuta induktora tijekom induksijskog kaljenja uz zadanu snagu generatora 30 i 45 kW i posmičnu brzinu obratka 4 i 10 mm/s

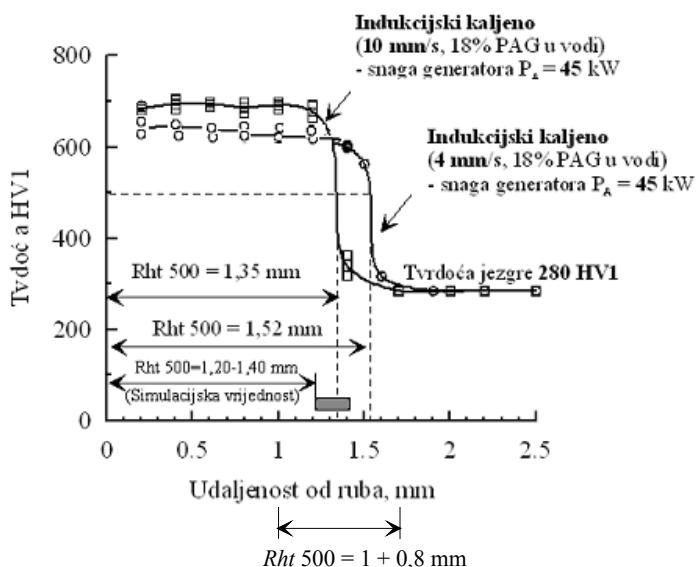
Snaga generatora (kW)	Posmak obratka (mm/s)	Oznaka uzorka	Struja induktora (A)	Napon induktora (V)	Prividna snaga (kVA)	Fazni kut (°)	Radna snaga induktora (kW)
Prazni hod	0	-	70,71	8,485	0,600	53,00	<b>0,511</b>
30	4	<b><math>U_{4\_30\_1}</math></b>	656	10,60	6,954	68,50	<b>2,435</b>
		<b><math>U_{4\_30\_2}</math></b>	-	-	-	-	-
		<b><math>U_{4\_30\_3}</math></b>	707	10,50	7,423	69,00	<b>2,660</b>
	10	<b><math>U_{10\_30\_1}</math></b>	676	11,31	7,646	69,00	<b>2,740</b>
		<b><math>U_{10\_30\_2}</math></b>	778	12,96	10,080	69,75	<b>3,489</b>
		<b><math>U_{10\_30\_3}</math></b>	707	12,00	8,484	69,75	<b>2,936</b>
45	4	<b><math>U_{4\_45\_1}</math></b>	-	-	-	-	-
		<b><math>U_{4\_45\_2}</math></b>	-	-	-	-	-
		<b><math>U_{4\_45\_3}</math></b>	823	14,15	11,637	70,00	<b>3,980</b>
	10	<b><math>U_{10\_45\_1}</math></b>	844	14,15	11,942	66	<b>4,279</b>
		<b><math>U_{10\_45\_2}</math></b>	883	16,26	14,357	70	<b>4,910</b>
		<b><math>U_{10\_45\_3}</math></b>	813	14,14	11,496	69	<b>4,119</b>

Nakon induksijskog kaljenja ispitana je tvrdoća površine metodom Rockwella na 10 mesta površine po svakom uzorku. Svi uzorci su pokazali slične vrijednosti tvrdoće površine u rasponu od 57+2 HRC. Nakon ispitivanja površinske tvrdoće uzorci su prerezani na polovici duljine. Potom je provedena uobičajena metalografska priprema brušenja i poliranja poprečnog presjeka uzorka te nagrizanja 3%-tnim NITAL-om.

Raspored tvrdoće po poprečnom presjeku zakaljenog uzorka ispitivan je metodom Vickers opterećenjem 9,81 N (HV1). Na **slici 9.11** prikazan je raspored tvrdoće po poprečnom presjeku uzorka pri kaljenju snagom generatora 30 kW, a na **slici 9.12** pri rotaciono-posmičnom induksijskom kaljenju zadanom snagom generatora 45 kW, uz posmičnu brzinu 4 i 10 mm/s. Gašenje je izvedeno prskanjem 18%-tnom vodenom otopinom PAG-a uz gustoću prskanja  $8,77 \text{ kg/m}^2 \text{ min}$ . Na dijagramima tvrdoće ucrtana je i dubina induksijskog kaljenja izračunata simulacijom. Dubina induksijskog kaljenja određena je iz rasporeda tvrdoće po poprečnom presjeku i označena na **slikama 9.11 i 9.12**.



**Slika 9.11.** Raspored tvrdoće po poprečnom presjeku indukcijski kaljenih valjaka  $\varnothing 20 \times 95 \text{ mm}$  od čelika 42CrMo4 uz zadanu snagu generatora 30kW ( $f = 415 \text{ kHz}$ ) i posmičnu brzinu 4mm/s i 10 mm/s



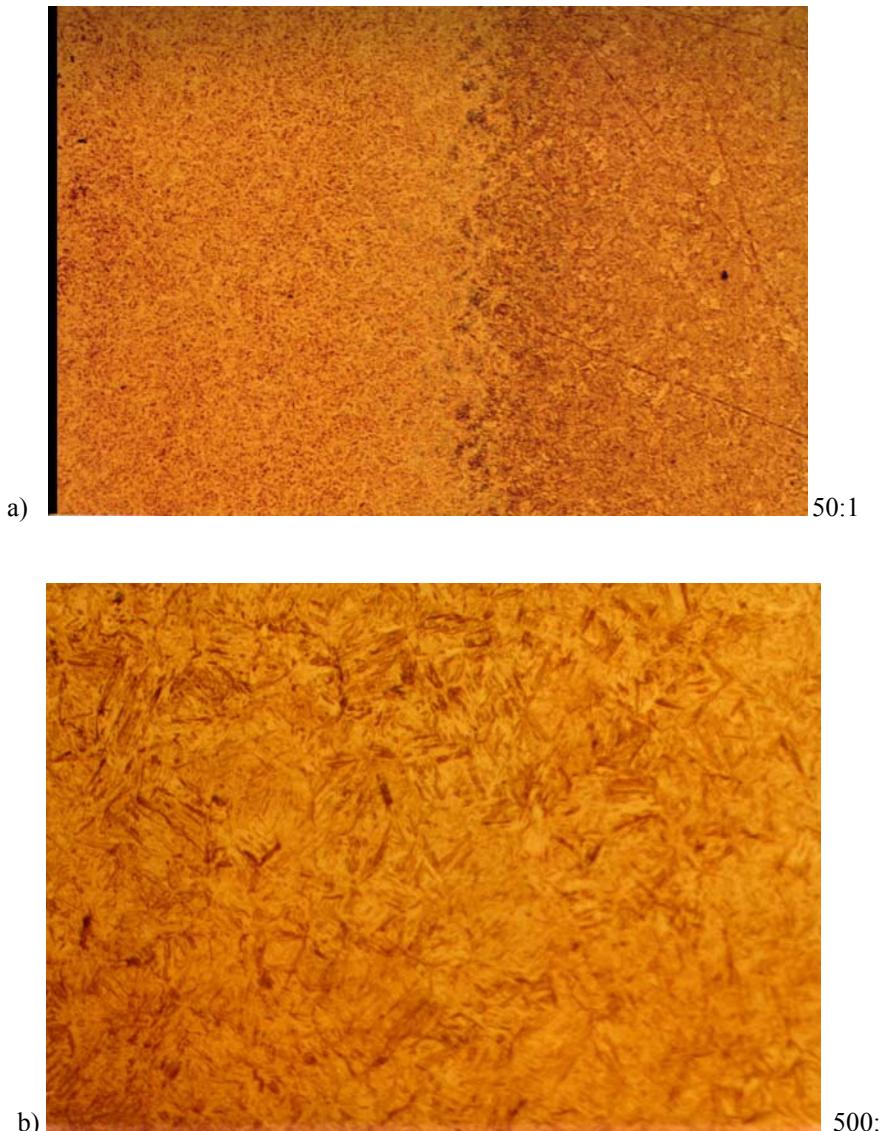
**Slika 9.12.** Raspored tvrdoće po poprečnom presjeku indukcijski kaljenih valjaka  $\varnothing 20 \times 95 \text{ mm}$  od čelika 42CrMo4 uz zadanu snagu generatora 45kW ( $f=415 \text{ kHz}$ ) i posmičnu brzinu 4mm/s i 10 mm/s

Iz dijagrama rasporeda tvrdoće i izmjerениh dubina kaljenja (Rht 500, mm) zaključuje se slijedeće:

- a) Postignuta površinska tvrdoća (oko 700 HV1) slična je onoj dobivenoj simulacijom (660 HV1), a obje vrijednosti tvrdoće (simulacijska i eksperimentalna) zadovoljavaju zahtjev za površinskom tvrdoćom  $620 + 160$  HV50.
- b) Postignute dubine kaljenja ispunjavaju propisani zahtjev za dubinom kaljenja ( $Rht\ 500 = 1,0 + 0,8$  mm). Pri tome se dobro podudara simulacijom i eksperimentalno dobivena vrijednost dubine kaljenja.
- c) Pri induksijskom kaljenju s većim posmakom uz istu snagu generatora dobiva se veća dubina kaljenja, što je na prvi pogled suprotno očekivanjima. Međutim za ugrijavanje obratka treba promatrati izmjerenu radnu snagu induktora nego li snagu generatora. Indukcijski generator zbog svoje električke radne karakteristike može davati različite snage induktora za istu izmjerenu snagu na anodi generatora
- d) S povećanjem radne snage induktora povećava se dubina kaljenja za sve posmične brzine ispitnih valjaka, što je i očekivano.
- e) Povećanje posmične brzine ispitnih valjaka s 4 na 10 mm/s smanjuje dubinu kaljenja.

Na metalografski pripremljenim uzorcima izrezanim iz pojedinog ispitnog valjaka provedena je analiza mikrostrukture. Na **slici 9.13.a** dana je mikrostruktura po poprečnom presjeku ispitnog uzorka induksijski zakaljenog uz snagu generatora 30 kW i posmičnu brzinu 4 mm/s.

U jezgri svih ispitnih uzoraka pronađena je ista mikrostruktura s perlitom i feritom izgleda karakterističnog za stanje isporuke (svjetlo vučena šipka). U površinskom zakaljenom sloju svih ispitnih valjaka uočljiva je mikrostruktura martenzita (**slika 9.13**) što je u skladu dobivenim rezultatima ispitivanja tvrdoće.



**Slika 9.13** Mikrostruktura induktijski zakaljenog ispitnog valjaka od čelika 42CrMo4 uz snagu generatora 30 kW ( $f = 415$  kHz) i posmičnu brzinu 4mm/s.

- Mikrostruktura po poprečnom presjeku (povećanje 50X. nagriženo 3 %-tnim NITAL-om)
- Mikrostruktura rubnog sloja (povećanje 500X. nagriženo 3 %-tnim NITAL-om)

## **10.0 ZAKLJUČAK**

U radu je opisana i razrađena računalna simulacija induksijskog kaljenja i metodologija optimizacije induktora koja predstavlja jednu od važnih faza u suvremenoj pripremi postupka induksijskog kaljenja. Simulacija se sastoji od rješavanja matematičkih modela elektromagnetskih, termodinamičkih i mikrostruktturnih procesa u obratku tijekom induksijskog kaljenja. U radu su analizirane metode (analitičke i numeričke) iz dostupne literature opisani su računalni programi za simulaciju induksijskog kaljenja. Izabrane su metoda rubnih i konačnih elemenata (za rješavanje jednadžbi elektromagnetskog polja) i metoda konačnih elemenata (za rješavanje jednadžbe provođenja topline u obradak). Mikrostruktturni procesi u obratku modelirani su vlastito razvijenim kinetičkim modelom temeljenim na Leblond-Devauxovom modelu predviđanja brzine faznih pretvorbi i regresijskoj analizi TTS dijagrama za kontinuirano ugrijavanje i TTT dijagrama za kontinuirano ohlađivanje.

Pri razradi matematičkog modela elektromagnetskih procesa primijenjena je aproksimacija nelinearne promjene magnetske permeabilnosti ovisne o temperaturi i jakosti magnetskog polja, čime je značajno povećana točnost modela. Za modeliranje termodinamičkih procesa u obratku korištena je metoda konačnih elemenata s Galerkinovim postupkom rješavanja zbog dobre aproksimacije geometrije obratka i fizikalnog smisla ovog postupka (koji predstavlja i prošireni zapis zakona održanja energije u integralnom obliku. Prijelaz topline s površine obratka na sredstvo za gašenje (jedan od bitnih rubnih uvjeta u termodinamičkom modelu) modeliran je empirijskim jednadžbama razvijenim za opis ohlađivanja prskanjem čistom vodom i vodenom otopinom polimera PAG i vlastitim aproksimacijskim izrazom predloženim na temelju sličnih empiričkih izraza za proračun koeficijenta prijelaza topline pri gašenju prskanjem čistom vodom. Predloženi model treba potvrditi budućim pokusima ohlađivanja prskanjem i mjeranjima na konkretnim materijalima.

Na osnovi simulacijskog algoritma razvijen je vlastiti računalni program "Ind2D" s ugrađenom bazom podataka o svojstvima materijala u programskom jeziku Visual Basic, C++ i manjim dijelom primjenom specifičnih funkcija programskog paketa "Matlab". Razvijenim računalnim programom simuliraju se elektromagnetski, termodinamički i mikrostruktturni procesi u obratku tijekom stacionarnog, posmičnog, rotacionog i rotaciono posmičnog induksijskog kaljenja. Orientacijom na dugačke ravne i osnosimetrične obratke obuhvaćena je najveća skupina induksijski kaljenih obradaka.

Razvijeni simulacijski program eksperimentalno je provjerен na primjeru induktijskog kaljenja valjka dimenzija  $\varnothing 20 \times 95$  mm od čelika 42CrMo4. Kombinacija potrebne snage generatora i posmične brzine ispitnog uzorka određeni su računalnim simulacijama vlastitim simulacijskim programom. Za određivanje snage induktora izmjerene su tri električne veličine induktora: jakost struje, napon i fazni kut.

Zbog velikih iznosa i visoke frekvencije struja induktora se teško može izravno izmjeriti, pa je nužna primjena mjernih transformatora. U ovom su radu izrađeni feritni strujni i naponski mjerni transformatori. U budućim istraživanjima trebalo bi dodatno ispitati utjecaj radnih karakteristika izrađenih feritnih mjernih transformatora na vrijednosti izmjerene jakosti struje, napona i faznog kuta induktora, te što točnije utvrditi područje mjerne nesigurnosti transformatora.

Nakon ispitivanja tvrdoće i metalografske analize utvrđeno je da je postignuta propisana dubina kaljenja i površinska tvrdoća na svim ispitnim valjcima. Iznosi površinske tvrdoće i dubine kaljenja dobiveni simulacijom i pokusom dobro se podudaraju, ako se za vrijednost ulazne snage u simulacijskom programu zada snagu induktora, a ne snagu induktijskog generatora (koja se obično mjeri na mjernim instrumentima induksijske radne ćelije). Uočeno je da se za istu zadanu snagu generatora postižu različite snage induktora u rasponu rasipanja od oko 2 kVA. Stoga je za računalnu simulaciju induktijskog kaljenja u sustavu induktor-okoliš-obradak potrebno što preciznijeg zadati jakost struju ili napon induktora za postizanje što realnijih rezultata proračuna. Time bi se smanjio broj pretpokusnih induksijskih kaljenja za utvrđivanje ovisnosti snage induktora o snazi generatora.

U dalnjim istraživanjima treba provjeriti i usavršiti rad simulacijskog programa i optimizacijskog algoritma na primjerima složenijih oblika obradaka sa nizom čelika za poboljšavanje i željeznih lijevova prikladnih za induksijsko kaljenje. Također treba usavršiti pojedine programske module simulacijskog programa u cilju daljnog skraćenja potrebnog vremena simulacije postupka induktijskog kaljenja i optimizacije induktora uz unaprjeđenje točnosti proračuna. Posebnu pažnju treba posvetiti mjerenu površinsku temperaturu obratka. Stoga treba u budućim istraživanjima pronaći način mjerjenja ove temperature tijekom cijelog radnog ciklusa induktijskog kaljenja i to unutar i ispod induktora.

## 11.0 LITERATURA

1. **W.Brunst:** "Die induktive Wärmebehandlung unter besonderer Berücksichtigung des Härtenes der Stähle", Springer-Verlag, Berlin/Göttingen/Heidelberg, **1957.**
2. **C. A. Tudbury:** "Basic of induction heating", Vol.1, John F. Rider Publisher, Inc., New York, Chapman & Hall LTD, London, **1960.**
3. **T. Lyman:** "Induction hardening and tempering", ASM Comittee on Induction Hardening, ASM International, Metal park, Ohio, 1964.
4. **M. Lozinski:** "Industrial Applications of Induction Heating", Pergamon Press, Oxford, UK, **1969.**
5. **G. Benkowsky:** "Induktionserwärmung", VEB Verlag Technik Berlin, Germany, **1980.**
6. **S.L. Semiatin, D.E. Stutz:** "Induction Heat Treatment of Steel", American Society for Metals, Metals Park, Ohio, USA, **1986.**
7. **E.J. Davies:** "Conduction and Induction Heating", P. Peregrimus Ltd, London, UK, **1990.**
8. **P. A. Hassell, N. V. Ross:** "Induction Heat Treating of Steel", ASM Handbook, Part 4. 9th edition, Metals Park, Ohio, USA **1994.**, 164-202.
9. **V.I. Rudnev, et.al.:** "Induction Heat Treatment" in Steel Heat Treatment Handbook ed. by G.E. Totten, M.A.H. Howes, Marcel Dekker, Inc., New York, USA, **1998.**, 765-910.
10. **J. Oerlich, A. Rose, P. West:** "Atlas zur Wärmebehandlung der Stähle", Vol. 4. Zeit-Temperature Austenisierung Schaubilder", Verlag Stahleisen M.B.H., Düsseldorf, **1976.**
11. **M. Novosel:** "Osnove toplinske obradbe" Inženjerski priručnik IP 1, uredništvo A. Mulc, D. Taboršak, I. Budin, Školska knjiga, Zagreb, **1998.**
12. **A. Rose, H. Hougardy:** "Atlas zur Wärmebehandlung von Stahle", Verlag Stahleisen M.B.H., Düsseldorf, **1972.**
13. **A. Rose, F. Wever, W. Peter:** "Atlas zur Wärmebehandlung der Stähle", Teil I & II, Verlag Stahleisen M.B.H., Düsseldorf, **1954./55.**
14. **B. Liščić, H.M. Tensi, W. Luty** (ed.): "A Handbook Theory and Technology of Quenching", Springer Verlag, Berlin, **1992.**
15. **G.E. Totten, C.E. Bates, N.A. Clinton:** "Handbook of Quenchant and Quenching Technology", ASM International, Materials Park, Ohio, USA, **1993.**
16. **H.M. Tensi, G.E. Totten:** "Water spray and Water film Cooling", Proceedings of the 3<sup>rd</sup> International Conference On Quenching and Control of Distortion, 24-26 March, 1999., Prague, Czech Republic, ASM International Metals Park, Ohio, USA, 50-61
17. **B. Liščić, M. Stupnišek, F. Cajner, T. Filetin:** "Toplinska obradba-Praktikum", Sveučilište u Zagrebu, FSB, Zagreb 1992.
18. **E. Pearson:** "Designs Powertrain Components to Optimize Induction Heat Treatment Performance", Proceedings of the 17<sup>th</sup> Heat Treating Society Conference and Expositions., and 1<sup>st</sup> Int. Induction Heat Treating Symposium, 15-18 September, 1997, Indianapolis, Indiana, , ASM International Metals Park, Ohio, USA, 801-810

19. **F. Cajner, B. Petrić, D. Landek:** "Computer process planning of induction hardening", Proceedings of the 8th Seminar IFHTSE, Dubrovnik-Cavtat, Croatia, 12-14 September, 2001., HDTOM IP, 415-422.
20. **R. S. Ruffini, R. T. Ruffini, V. S. Nemkov:** "Advanced design of induction heat treating coils", Proceedings of the 17<sup>th</sup> Heat Treating Society Conference and Expositions., and 1<sup>st</sup> Int. Induction Heat Treating Symposium, 15-18 September, 1997, Indianapolis, Indiana, ASM International Metals Park, Ohio, USA, 687-685
21. **J. Stambaugh, T. Learman:**, "Latest technology in flux field concentrators", Proceedings of the 17<sup>th</sup> Heat Treating Society Conference and Expositions., and 1<sup>st</sup> Int. Induction Heat Treating Symposium, 15-18 September, 1997, Indianapolis, Indiana, ASM International Metals Park, Ohio, USA,, 711-717
22. **M. Gergely et. al.:** "Computerized properties prediction and technology planning in heat treatment of steel", ASM Handbook, Part 4. 9th edition, Metals Park, Ohio, USA 1994., 638-656.
23. **F.J. Young:** "Induction heating for case hardening applications", IEEE Transactions on magnetics, Vol. MAG 13, No. 6, 1977., 1776-1785
24. **C. Marchad, A. Foglia:** "2D finite element program for magnetic induction heating", IEEE Transactions on magnetics, Vol. 19., No. 6, 1983., 2647-2649
25. **Ph. Masse, B. Morel, Th. Breville:** "A finite element prediction correction scheme for magneto-thermal coupled problem during Curie transition", IEEE Transactions on magnetics, Vol. MAG-21., No. 5, 1985., 1871-1873
26. **M. R. Ahmed, J. D. Lavers, P.E.Burke:** "Boundary element application of induction heating devices with rotational symmetry", IEEE Transactions on magnetics, Vol. 25, No. 4, 1989., 3022-3024
27. **M. Melander:** "Theoretical and experimental study of stationary and progressive induction hardening", Journal of Heat Treating, Vol. 4, No.2., December 1985., 145-166
28. **O. Longeot, L. Nicolas, Ph. Wendling:** "3D design of an inductor for induction heating using 2D FEM and 3D BIEM modelling", IEEE Transactions on magnetics, Vol. 27., No. 5, September 1991., 4004-4007
29. **M. Feliachi, G. Develey:** "Magneto-thermal behaviour finite element analysis for ferromagnetic materials in induction heating devices", IEEE Transactions on magnetics, Vol. 27., No. 6, November 1991., 5235-5237
30. **Q. Chen, A. Konrad:** "A review of finite element open boundary techniques for static and quasi-static electromagnetic field problems", Transactions on magnetics, Vol. 33., No. 1, 1991., 663-676
31. **M. Enokizono, T. Todaka:** "Modeling Induction Heating Processes for Numerical Simulation", Proceedings of the 17<sup>th</sup> Heat Treating Society Conference and Expositions, and 1<sup>st</sup> International Induction Heat Treating Symposium, 15.-18. 9. 1997., Indianapolis, ASM International Metals Park, Ohio, USA, 601-610
32. **M. Enokizono, T. Todaka:** "Aproksimate Boundary Element Formulation for high- frequency Eddy current problem", IEEE Transaction on Magnetics, Vol. 29, No. 2, 1993. 1504-1507
33. **L. Krähenbühl et. al.:** "Surface impedances, BIEM and FEM coupled with 1D non linear solutions to solve 3D high frequency eddy current problems", IEEE Transaction on Magnetics, Vol. 11, No.2, 1997. 1167-1172

34. **T. Miyoshi, M. Sumiya, H. Omori:** "Analysis of an induction heating system by the finite element method combined with a boundary integral equation", IEEE Transactions on magnetics, Vol. MAG-23., No. 2, 1991., 1827-1832
35. **K. S. Ismail, R. A. Marzouk:** "Iterative hybrid finite element – boundary element method for the analysis of induction heating system with nonlinear charge" IEEE Transactions on magnetics, Vol. 32., No. 4, 1996., 3212-3217
36. **V. Nemkov et. al.:** "Computer simulation of induction heating and quenching processes", Proceedings of the 3<sup>rd</sup> International Conference on Quenching and Control of Distortion, 24-26 March 1999, Prague, Czech Republic, ASM International Metals Park, Ohio, USA, 370-377
37. **J. Sorić:** "Metoda konačnih elemenata", Sveučilište u Zagrebu, Golden marketing – Tehnička knjiga, Zagreb, 2004.
38. **A. Jacot et. al.** "Modelling of electromagnetic heating, cooling and phase transformations during surface hardening of steels", Journal de Physique IV, Vol. 6., janvier 1996., C1, 203-213
39. **P. P. Sylvester, R. L. Ferrari:** "Finite elements for electrical engineers", 2<sup>nd</sup> edt., Cambridge University Press, Cambridge, 1991.
40. **Y.W. Kwon, H. Bang:** "The Finite Element Method Using Matlab", 2<sup>nd</sup> ed. CRC Press, Boca Raton, USA, 2000.
41. **J. Jin:** "The Finite element method in electromagnetics", John Willy & Son, Inc. New York, 2<sup>ed</sup>, 2002.
42. **D. Durand, C. Durban, F. Girot:** "Coupled Phenomena and Modeling of Material Properties in Quench Hardening Following Inductive Heating of the Surface", Proceedings of the 17<sup>th</sup> Heat Treating Society Conference and Expositions., and 1<sup>st</sup> Int. Induction Heat Treating Symposium, 15-18 September, 1997, Indianapolis, ASM International Metals Park, Ohio, USA, 855-863.
43. **G.S. Sanchez-Sarmiento, J. Vega, A. Gaston:** "Inducer-B A finite element heat – transfer phase transformation model of induction heat treating of steels sensitive to chemical composition", Proceedings of the 17<sup>th</sup> Heat Treating Society Conference and Expositions, and 1<sup>st</sup> International Induction Heat Treating Symposium, 15.-18. 9. 1997., Indianapolis, ASM International Metals Park, Ohio, USA, 841-847
44. **M. Swierkosz, et al.:** "Numerical Simulation of Induction Heating and Quenching", Proceedings of the 17<sup>th</sup> Heat Treating Society Conference and Expositions., and 1<sup>st</sup> Int. Induction Heat Treating Symposium, 15-18 September, 1997, Indianapolis, Indiana, USA, 587-594
45. **C.A. Brebia, S. Walker:** "Boundary Element Techniques in Engineering", Newnes-Butterworths, London, UK, 1980.
46. **G. Beer:** "Programming The Boundary Element Method An Introduction For Engineers", J. Wiley & Sons LTD, Chichester, UK, 2001.
47. **D. Landek, F. Cajner, T. Filetin:** "Computer Simulation of Induction Surface Hardening Axially Symetric Workpieces", Proceedings 2<sup>nd</sup> International Conference Thermal Process Modelling and Computer Simulation, Nancy, France, March 31<sup>st</sup>- April 2<sup>nd</sup> 2003., Journal de Physique, EDP Sciences, Les Ulis, France, Vol. 120, 2004., 499-507
48. **J.W. Christian:** "The theory of transformations in metals and alloys", Pergamon Press, Oxford, 1975

49. **M. Avrami:** "Kinetics of phase change I: general theory", Journal of Chemical Physics, Vol. 7., 1939. 103-112
50. **M. Avrami:** "Kinetics of phase change II: transformation-time relations for random distribution of nuclei", Journal of Chemical Physics, Vol. 8., 1940. 212-221
51. **M. Avrami:** "Kinetics of phase change III: granulation, phase change and microstructure", Journal of Chemical Physics, Vol. 9., 1941. 177-181
52. **J. Burke:** "The Kinetics of Phase Transformation in Metals", prijevod M. Rogulić, TMF, Univ. u Beogradu, 1980
53. **D.A. Porter, K.E. Easterling:** "Phase Transformations in Metals and Alloys", Chapman & Holl, London, UK, 1992.
54. **Ph. Maynier, J. Dollet, P. Bastien:** "Prediction of microstructure via empirical formulae based on CCT diagrams", Hardenability concepts with applications to steel, Metals Society of AIME, 1978., 163-178
55. **M.T. Lusk, Y.K. Lee:** "A Global Material Model for Simulating Kinetics of Low Alloy Steels", Proceedings of the 7<sup>th</sup> International Seminar IFHTSE, Budapest, Hungary, 15-17 September 1999., p.273-282.
56. **W. A. Johnson, R. F. Mehl:** "Reaction kinetics in process of nucleation and growth", Trans. AIME, 135, 1939., 116-158
57. **T. Réti:** "Generalization of the Avrami model for the description of multi-phase transformations", Proceedings of the 8<sup>th</sup> International congress on heat treatment , Heat&Surface, 17.-20. 11. 1992. Kyoto, Japan, 73-76109-117
58. **T. Réti, Z. Fried, I. Felde:** "Multi-phase modeling of austenite transformation process during quenching" Proceedings of the 3<sup>rd</sup> International Conference On Quenching and Control of Distortion, 24-26 March, 1999, Prague, Czech Republic, ASM International Metals Park, Ohio, USA, 157-172
59. ... "SYSWELD 2003 - Metallurgical Transformation Model LSG2M Nancy", ESI Group, 2003.
60. **J. B. Leblond, J. Devaux:** "A new kinetics model for anisothermal metallurgical transformations in steels including effect of austenite grain size", Acta metall., Vil. 32, No.1, 1984., 137-146
61. **B. Raniecki et. al:** "Problem of determination of transient and residual stresses in a cylinder under progressive induction hardening", Proceedings of the 3<sup>rd</sup> International Conference On Quenching and Control of Distortion, 24-26 March, 1999, Prague, Czech Republic, ASM International Metals Park, Ohio, 473-484
62. **P. Koistinen, R. F. Marburger:** "A general equation prescribing the extent of the austenite-martensite transformation in pure iron – carbon alloys and plain carbon steel"; Acta Metallurgica, 7, 1959. 59
63. **B. Smoljan:** "Toplinska obrada čelika, sivog i nodularnog lijeva", Hrvatsko društvo za toplinsku obradbu i inženjerstvo površina, Zagreb, 1999.
64. **E. Scheil:** "Arch. Eisenhuttenwesen, 1935, Vol. 12, 565-567
65. **M. Jurković:** "Matematičko modeliranje inženjerskih procesa i sistema", Tehnički fakultet u Rijeci, 1999.

66. **O. Bodart, A. V. Boureau, R. Touzani:** "Numerical investigation of optimal control of induction heating process", Applied Mathematical Modeling 25, 2001., 697-712
67. **D. Hömberg, J. Sokolowski:** "Optimal shape design of induction coils for surface hardening", SIAM J. Control Optim., Vol. 42, No.3, 1087-1117
68. **M. Horii, N. Takahashi:** "Investigation of evolution strategy and optimization of induction heating model", IEEE Transactions on magnetics, Vol. 36., No. 4, 2000., 1085-1088
69. **H. Porzner et. al.:** " Heat treatment simulations for heat treaters and design engineers", Heat treatment of metals, Vol. 2., 2003., 29-39
70. ... "Reference manual Sysweld 2003", ESI Group, 2003.
71. **E. Reiss:** "Recent development in heat treatment simulation DEFORM-HT", Proceedings of the 8<sup>th</sup> Seminar IFHTSE, Dubrovnik-Cavtat, 12.-14. 09. 2001., 351-357
72. **T Inoue et. al.:** "Simulation and experimental verification of induction hardening process for some kinds of steel", Proceedings of 2<sup>nd</sup> International Conference on Quenching and the Control of Distortion, 4.-7. 11. 1996., Cleveland, USA, 55-62
73. **D. Landek:** "Računalna simulacija postupka induksijskog kaljenja", magistarski rad, Fakultet strojarstva i brodogradnje Sveučilišta u Zagrebu, 2001.
74. **H.H.J.M. Janssen, E.J.W. ter Maten, D. van Houwelingen:** "Simulation of Coupled Electromagnetic and Heat Dissipation Problems", IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 30, No.5, September 1994, 3331-3334.
75. **D. Melaab et. al.:** "Control of induction heat treatment by the measure of power", IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 29, No.2, March 1993, 1558-1561.
76. **R. D. Cook, D. S. Malkus, M. E. Plesha, R. J. Witt:** "Concepts and applications of finite element analysis", John Willey & Sons Inc, 4<sup>th</sup> edition, 2002.
77. **Taylor, Zynkiewitz:** "The finite element method", vol.1,2, McGraw-Hill Book Company, London, 1994.
78. **M. de Berg et. all.:** "Computational geometry – Algorithms and applications", 2<sup>nd</sup> ed., Springer-Verlag, Berlin, 2000.
79. **Z. Haznadar:** "Teorijska elektrotehnika Elektromagnetska teorija i polja", Fakultet elektrotehnike i računarstva Sveučilišta u Zagrebu, 2001.
80. **Z. Haznadar, Ž. Štih:** "Elektromagnetizam 1 i 2", Školska knjiga, Zagreb, 1997.
81. **L.R. Edgar, E.P. Furlani:** "A Computer Simulation of on Induction Heating System", IEEE Transactions on Magnetics, Vol.27, No.5, September 1991, 4343-4354.
82. **F. Richter:** "Die wichtigsten physikalischen Eigenschaften von 52 Eisenwerkstoffen", Verlag Stahleisen M.B.H., Düsseldorf, 1973.
83. **C. Chaboudez et.al.:** "Numeric modelling in induction heating for axisymmetric geometries", IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 33, No.1, January 1997., 739-745
84. **C.W. Chen:** "Magnetism and Metallurgy of Soft Magnetic Materials", Dover Publications, New York, USA, 1986.
85. **W. Opechowski:** "Temperature dependence of magnetization of ferromagnetics at low temperatures", Physica, Vol. 4, 715-722
86. **V. Pinter:** "Osnove elektrotehnike", II. dio, Tehnička knjiga, Zagreb, 1975.

87. **S. Habermehl, D.C. Jiles, C.M. Teller:** "Influence of heat treatment and chemical composition on the magnetic properties of ferromagnetic steels", IEEE Transactions on Magnetics, Vol.MAG-21, No.5, September 1985., 1909-1911
88. **B. Buschur:** "Automatic verification of induction hardening using eddy current and preventive multi-frequency testing", Proceedings of the 17th Heat Treating Conference and Expositions and 1st International Induction Heat Treating Symposium, 15-18. September 1997., Indianapolis, Indiana, ASM International Metals Park, Ohio, USA, 817-825
89. **V. Jović:** "Uvod u inženjersko numeričko modeliranje", Aquarius Engineering, Split, 1993.
90. **A. Galović:** "Termodinamika I", 2. promjenjeno izdanje, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb 2002.
91. **J.B. Austin:** Industrial Eng. Chem., 24, 1932., 1225
92. **J.M. Bergheau, F. Boitout:** "Contribution of finite element simulation to the analysis of bulk and surface heat treatments", Proceedings of the 7<sup>th</sup> IFHTSE Seminar, 15.-16. September 1996., Budapest, 303-313
93. **M. Suehiro:** "A mathematical model for predicting temperature of steel during cooling based on microstructural evolution", Proceedings of 11<sup>th</sup> Congress IFHTSE & 4<sup>th</sup> ASM Heat treating and surface engineering conference in Europe, Vol. 1, Florence, Italy, 19.-21. 10. 1998., 11-19.
94. **A. Galović:** "Termodinamika II", 3. promjenjeno izdanje, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb 2003.
95. **J. Carslaw, W. Jager:** "Conduction Heat in Solids", Oxford at the Clarendon Press, UK 1971.
96. **A.F. Mills:** "Basic Heat and Mass Transfer", Irwin heat transfer series, Chicago, USA, 1995.
97. **U. Reiners, R. Jescher, R. Scolz:** "Wärmeübergang bei der Spritzwasserkühlung von Nichteisenmetallen", Metallkunde 74, 1983., 257-264
98. **D. A. Guisbert, L. M. Jarvis:** "Influence of test conditions on the cooling curve response of polymer quenchants (Tensi agitation device)", Proceedings of the 22th Heat Treating Society Conference and the 2<sup>nd</sup> International Surface Engineering Congress, 15.-17. September 2003. Indianapolis, USA, 218-227
99. **E. Griffiths (ed.):** "Physical constants of some commercial steels at elevated temperatures", The British Iron and Steel Research Association, Butterworths Scientific Publications, London, 1953.
100. **T. Filetin, I. Žmak, D. Markučić, D. Novak:** "Determination of the physical properties of heat treatable steels", Proceedings of the 8th Seminar IFHTSE, Dubrovnik-Cavtat, Croatia, 12-14 September, 2001., 399-406
101. **D. Hämberg:** "A mathematical model for induction hardening including mechanical effect", Nonlinear Analysis Real World Applications 5, 2004., 55-90
102. **T. Réti, et. al.:** "Prediction of as-quenched hardness after rapid austenitization and cooling of surface hardened steels", Computational Materials Science, 15, 1999. 101-112
103. **M. Böhm, S. Dachkovski, M. Hunkel, T. Lübben, M. Wolf:** "Übersicht über einige makroskopische Modelle für Phasenumwandlungen im Stahl", Report 0-09, Zentrum für Technomathematik, Universität Bremen, 08. 2003.
104. **K. W. Andrews:** JISI, 203 (7), July 1965, 721-727

105. **T.H. Fawzi, K. F. Ali, P.E. Burke**: "Boundary Integral Equations Analysis of Induction Devices with Rotational Symmetry", IEEE Transaction on Magnetic, Vol. MAG-19 No. 1, 1983., 36-44.
106. **M. W. Garrett**: "Calculations of fields, forces, and mutual inductances of current systems by elliptic integrals", Journal of applied physics, 09. 1963., 2567-257
107. **J.M. Jin, V.V. Liepa**: "A note on hybrid finite element method to electromagnetics scattering problems", IEEE Trans. Antennas Propagation, vol. AP-36, 1486.-1490., Oct. 1988.
108. **M. Lohrmann**: "Experimentelle und theoretische Untersuchungen zur Vorausbestimmung des Wärmebehandlungsergebnisses beim Hochdruckgasabschrecken", Dissertation, Universität Bremen, **1996**.
109. **B. Edenhofer, J.W. Bouwman**: "Vacuum heat treatment", in Steel Heat Treatment Handbook ed. by G.E. Totten, M.A.H. Howes, Marcel Dekker, Inc., New York, USA, **1998**., 483524-910
110. **W. Steven, A. G. Haynes**: JISI, 203 (7), August 1956, 349-359

## ŽIVOTOPIS

**mr. sc. Darko Landek, dipl. inž. strojarstva**

Darko Landek rođen je 27. 08. 1970. u Bjelovaru. Osnovnu školu završio je u Garešnici 1985. god., a srednju školu elektrotehničke struke u Kutini 1989. Diplomirao je 1995. god. s odličnim uspjehom na Fakultetu strojarstva i brodogradnje Sveučilišta u Zagrebu Proizvodni smjer. Tijekom dodiplomskog studija pohađao je seminar: "EuroLaser Academy", od 02. do 28. 10. 1995. godine, na IST, Technical University of Vienna i dobitnik je Rektorove nagrade za najbolji studentski rad u školskoj godini 1994./95.

Od 1996. godine zaposlen je kao znanstveni novak - mlađi asistent na Katedri za toplinsku obradbu i inženjerstvo površina u Zavodu za materijale FSB-a. Nakon poslijediplomskog studija na smjeru "Materijali u strojarstvu" magistrirao je na Fakultetu strojarstva i brodogradnje 2001. godine s radom pod naslovom "Računalna simulacija postupka induktijskog kaljenja" te je izabran u zvanje asistenta.

Tijekom 1996. do 2005. radio je na više znanstveno-istraživačkih projekata od kojih se ističu projekti br. 12000 "Računalne simulacije i razvoj materijala" (1997. do 1999. god) i aktualni projekt 120032 "Razvoj materijala i procesa računalnim modeliranjem" (2000. do 2005. god) voditelja prof. dr. sc. Tomislava Filetina, te hrvatsko slovenski podprojekt unutar projekta 120032: "Računalna podrška optimiranju induktijskog kaljenja" (1998. do 1999. godine) voditelja akademika Božidara Lišića i prof. dr. sc. Borisa Štoka. Od 01.05. do 30.06. 2005. godine bio je na znanstveno-stručnom usavršavanju u Collaborative Research Centre SFB 570 "Distortion Engineering" na University of Bremen, Njemačka.

Član je Hrvatskog društva za materijale i tribologiju, Hrvatskog društva za toplinsku obradbu i inženjerstvo površina i međunarodnog udruženja ASM Heat Treating Society.

Služi se, u govoru i pismu engleskim jezikom. Oženjen je i otac je jednog djeteta.

## CURRICULUM VITAE

**Mr. Sc. Darko Landek, B. Sc.**

### Personal details:

Date of birth: 27th August 1970.  
Place of birth: Bjelovar / Croatia  
Nationality Croatian  
Married one child

### Education:

- 03/2003 - Work on Ph Thesis entitled: "*Models and Algorithms for Computer Desing of Induction Hardening*"  
10/1996 – 10/2001 Postgraduate studies at the Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture, University of Zagreb in the field of Materials Engineering (completed with master's thesis entitled: "*Computer simulation of the induction hardening procces*").  
10/1989 – 11/1995 Studies at the Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture, University of Zagreb completed with diplom work entitled "*Application of Laser surface hardening of grey irons*"  
9/1985 – 6/1989 Secondary school specializing in Electrical-Engineering /Kutina/ Croatia  
9/1977 – 6/1985 Elementary school Garešnica / Croatia

### Research experience:

- 10/1995 One month EuroLaser Academy seminar at the IST-Technical University of Vienna, Austria  
6/1996 – Employed as young researcher and university assistant at Chair of Heat Treatment and Surface Engineering on the Department for Materials at the Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture, University of Zagreb  
6/1996 – 06/1997 Scientific research project financed by the Croatian Ministry of Science and Technology No. 2-08-182 "Optimizing of the Integrated Production of Artefacts", head researcher Prof. dr.sc. Igor Čatić  
06/1997 – 03/2003 Scientific research project financed by the Croatian Ministry of Science and Technology No. 12004 "Computer Simulations and Material Development", head researcher Prof. dr.sc. Tomislav Filetin  
2000 –2001 Slovenian - Croatian Project "Computer support to Optimising Induction Hardening", head researchers: Prof. Dr. sc. Božidar Liščić (Croatia) and Prof. dr.sc. Boris Štok (Slovenia).  
01/2002 - Technology project: "SUMAT-Development and Application of Advanced Materials", head researcher Prof. dr. sc. Tomislav Filetin  
03/2003 - Scientific research project financed by the Croatian Ministry of Science and Technology No. 0120-032 "Development of Materials and Processes by Computer Modelling", head researcher Prof. dr.sc. Tomislav Filetin  
05/2004-06/2004. Research project SFB 570 - A6, Universität Bremen, Njemačka, Collaborative Research Centre "Distortion Engineering", head researcher Dr.-Ing. Thomas Lübben

### Award:

- 1996 The Chancellor`Award of the University of Zagreb for the best student project in the academic year 1995/96 for a paper entitled "Laser hardening of grey iron".

**Languages competence:** English- Fluent both in oral and written, German in pasive knowledge

**Memberships:** Croatian society heat treatment and surface engineering, Croatian society for materials and tribology, ASM Heat Treating Society.