

# Optimiranje dinamičkih svojstava plinske turbine

---

**Jurjević, Zdenko**

**Doctoral thesis / Disertacija**

**2008**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:235:538024>

*Rights / Prava:* [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-07-12**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

**OPTIMIRANJE DINAMIČKIH SVOJSTAVA  
PLINSKE TURBINE**

**DOKTORSKA DISERTACIJA**

Zdenko Jurjević, dipl.ing.

ZAGREB, 2008.

Optimiranje dinamičkih svojstava plinske turbine

---

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

**OPTIMIRANJE DINAMIČKIH SVOJTAVA  
PLINSKE TURBINE**

**DOKTORSKA DISERTACIJA**

Prof.dr.sc. Milenko Stegić

Zdenko Jurjević, dipl.ing.

ZAGREB, 2008.

## PODACI ZA BIBLIOGRAFSKU KARTICU

UDK: 005.591.1: 534.83: 621.3.049.7: 621.223: 629.134

Ključne riječi: plinska turbina, vibracijaka svojstva, optimiranje, rotorski sustav, krutosti oslonaca

Znanstveno područje: TEHNIČKE ZNANOSTI

Znanstveno polje: STROJARSTVO

Institucija u kojoj

je rad izrađen: Fakultet strojarstva i brodogradnje

Mentor rada: Dr.sc. Milenko Stegić, red. prof.

Broj stranica: 157

Broj slika: 77

Broj tablica: 14

Broj korištenih

bibliografskih jedinica: 49

Datum obrane:

Povjerenstvo:

Akademik Ivo Senjanović, predsjednik povjerenstva

Dr.sc. Milenko Stegić, red. prof. mentor rada

Dr.sc. Mirko Butković, red. prof. član povjerenstva

Institucija u kojoj je rad pohranjen:

Fakultet strojarstva i brodogradnje Sveučilišta u Zagrebu

Nacionalna i sveučilišna knjižnica, Zagreb

## Zahvala

Ovime želim zahvaliti svima koji su omogućili i pomogli pri provedbi ovog istraživačkog projekta:

- prof. dr. sc. Milenku Stegiću koji me je svojim znanjem, iskustvom i savjetima vodio i usmjeravao na putu moga dosadašnjeg znanstvenog usavršavanja,
- akademiku Ivi Senjanoviću i prof. dr. sc Mirku Butkoviću na trudu koji su uložili pregledavajući doktorski rad i na savjetima koji su doprinijeli da rad bude potpuniji i pregledniji.

Ovaj rad ne bi bilo moguće privesti kraju bez pomoći mnogih drugih. No, posebnu zahvalu želim uputiti svojoj voljenoj supruzi Kseniji na njezinoj bezgraničnoj potpori, pomoći, razumijevanju i ljubavi koju mi je pružala tijekom izrade ovog rada.

## Sadržaj

<b>Predgovor</b> .....	<b>i</b>
<b>Sažetak</b> .....	<b>iv</b>
<b>Abstract</b> .....	<b>v</b>
<b>Ključne riječi</b> .....	<b>vi</b>
<b>Keywords</b> .....	<b>vi</b>
<b>Popis oznaka</b> .....	<b>vii</b>
<b>1 Uvod</b> .....	<b>1</b>
<b>1.1 Pregled dosadašnjih istraživanja</b> .....	<b>1</b>
<b>1.2 Definiranje problema</b> .....	<b>2</b>
<b>2 Hipoteza</b> .....	<b>6</b>
<b>3 Opis istraživanja</b> .....	<b>8</b>
<b>4 Računalni program</b> .....	<b>11</b>
<b>4.1 Mogućnosti modeliranja i izračuna</b> .....	<b>12</b>
4.1.1 Slobodne prigušene vibracije i svojstvene vrijednosti.....	14
4.1.2 Prisilne vibracije.....	18
4.1.3 Analiza i tumačenje rezultata.....	20
4.1.3.1 Slobodne neprigušene vibracije.....	20
4.1.3.2 Slobodne prigušene vibracije.....	21
4.1.3.3 Prisilne vibracije.....	23
4.1.4 Kinematika gibanja rotora.....	27
<b>4.2 Koordinatni sustav i mehanički modeli sastavnica</b> .....	<b>30</b>
4.2.1 Vratilo.....	32
4.2.2 Elastični disk.....	35
4.2.3 Elastična spojka.....	37
4.2.4 Radijalni ležaj.....	38
4.2.5 Oslonac ležaja.....	39
4.2.6 Opći oslonac ležaja.....	41
<b>4.3 Provjera računalnog programa</b> .....	<b>42</b>
4.3.1 Kriteriji usporedbe rezultata.....	43

4.3.2 Rezultati provjere.....	44
<b>5 Modeliranje turbinskog postrojenja.....</b>	<b>46</b>
<b>5.1 Modeliranje rotora plinske turbine.....</b>	<b>46</b>
5.1.1 Pojednostavljeni model rotora.....	47
5.1.2 Detaljni model rotora.....	51
<b>5.2 Pojednostavljeni model turbinskog postrojenja.....</b>	<b>53</b>
5.2.1 Model plinske turbine.....	53
5.2.1.1 Rotor plinske turbine.....	54
5.2.1.2 Klizni ležajevi plinske turbine.....	55
5.2.1.3 Oslonci ležajeva plinske turbine.....	55
5.2.1.4 Kućište plinske turbine.....	55
5.2.1.5 Oslonci plinske turbine.....	56
5.2.2 Model generatora.....	56
5.2.2.1 Rotor generatora.....	56
5.2.2.2 Klizni ležajevi generatora.....	57
5.2.2.3 Oslonci ležajeva generatora.....	57
5.2.3 Model izlaznog dijela turbine.....	57
5.2.3.1 Kućište izlaznog dijela turbine.....	58
5.2.3.2 Oslonci izlaznog dijela turbine.....	58
<b>6 Odabir funkcije cilja.....</b>	<b>59</b>
<b>7 Inženjerski postupak optimiranja .....</b>	<b>62</b>
<b>7.1 Pojednostavljeni model plinske turbine.....</b>	<b>62</b>
<b>7.2 Optimiranje krutosti uljnog filma.....</b>	<b>71</b>
<b>7.3 Optimiranje krutosti oslonaca rotora.....</b>	<b>76</b>
<b>7.4 Optimiranje krutosti oslonaca plinske turbine.....</b>	<b>81</b>
<b>8 Postupak optimiranja planiranjem pokusa.....</b>	<b>90</b>
<b>8.1 Uvod.....</b>	<b>90</b>
<b>8.2 Metodologija planiranja pokusa.....</b>	<b>92</b>
8.2.1 Planiranje.....	93
8.2.2 Projektiranje.....	94
8.2.3 Provedba pokusa.....	94
8.2.4 Rasprava.....	94

<b>8.3 Postupak optimiranja planiranjem pokusa .....</b>	<b>95</b>
8.3.1 Odabir projektnih parametara.....	95
8.3.2 Provedba pokusa: simuliranje odziva sustava.....	95
8.3.3 Provjera statističkog modela pokusa.....	101
8.3.4 Optimalni model plinske turbine.....	104
<b>9 Usporedba konstrukcijskih rješenja.....</b>	<b>109</b>
<b>10 Primjer turbinskog postrojenja.....</b>	<b>111</b>
<b>10.1 Inženjerski postupak optimiranja.....</b>	<b>111</b>
10.1.1 Osjetljivost vlastitih frekvencija.....	111
10.1.2 Optimiranje vibracijskih svojstava.....	115
10.1.2.1 Mijenjanje horizontalne i vertikalne krutosti oslonaca.....	115
10.1.2.2 Mijenjanje vertikalne krutosti oslonaca.....	119
<b>10.2 Optimiranje planom pokusa .....</b>	<b>122</b>
10.2.1 Pronalaženje najutjecajnijih parametara selektivnim planom pokusa. .	122
10.2.1.1 Odabir projektnih parametara.....	123
10.2.1.2 Provedba pokusa: simuliranje odziva sustava.....	126
10.2.1.3 Provjera statističkog modela pokusa.....	132
10.2.2 Optimiranje vibracijskih svojstava potpunim faktorskim planom pokusa	
.....	136
10.2.2.1 Moguća optimalna konstrukcijska rješenja.....	140
<b>10.3 Usporedba mogućih optimalnih rješenja.....</b>	<b>143</b>
<b>11 Zaključak.....</b>	<b>145</b>
<b>12 Literatura.....</b>	<b>151</b>
<b>Kratki životopis.....</b>	<b>156</b>
<b>Short Biography.....</b>	<b>157</b>
<b>Dodatak A: Primjeri za provjeru računalnog programa.....</b>	<b>158</b>





### **Predgovor**

Kod projektiranja energetskih turbinskih postrojenja konstrukter mora uvijek imati u vidu da su trajnost, pouzdanost, efikasnost, ekološka prihvatljivost i zadovoljstvo korisnika u uskoj vezi s vibracijskim svojstvima odabranog konstrukcijskog rješenja.

Ranije, dok projektni zahtjevi nisu bili na samim granicama minimalne težine, velikih brzina vrtnje, malih zračnosti, dugog vijeka trajanja i visoke pouzdanosti, bilo je dovoljno okvirno odrediti vibracijska svojstva turbine i ako se kakav problem javio rješavan je „u hodu“ na temelju iskustva. Neizbježno pooštrenje zahtjeva i ograničenja, povećana očekivanja kupca, kao i razvoj tehnike i primjene teorije vibracija, dovelo je do toga da se vibracijska svojstva izračunavaju sa sve većom točnošću već u samom početku razvoja nove turbine.

Ideja o pronalaženju bolje mehaničke konstrukcije koja bi bila jeftinija i lakša, a ujedno zadovoljavala sigurnosna i funkcionalna ograničenja, nije naravno nova. U inženjerskoj praksi uobičajeno je da se analizira nekoliko mogućih rješenja i potom odabere „najbolje“ rješenje. Nažalost, troškovi i potrebno vrijeme takvog pristupa ograničavaju broj rješenja koja se mogu razmatrati. U današnje vrijeme velike konkurencije, visokih zahtjeva i kratkog raspoloživog vremena, prirodno se nametnula ideja o automatizaciji „inženjerskog odlučivanja“ s ciljem pronalaženja „apsolutno najboljeg“ odnosno „optimalnog“ rješenja. Unatoč obimnoj literaturi o optimiranju mehaničkih konstrukcija koja je danas na raspolaganju, nerazumijevanje fizikalnog problema koji se optimira kao i nepoznavanje matematičkog programiranja, veliki broj mogućih metoda optimiranja, te povišeni troškovi optimiranja mehaničke konstrukcije, doveli su do sporog prihvatanja te ideje.

Turbinsko postrojenje suviše je složeno da bi se moglo u cijelosti optimirati. Mnoge inženjerske odluke u projektiranju turbinskog postrojenja temelje se na iskustvu ili su rezultat „brainstorminga“ stručnjaka iz različitih područja.

Mehanički model koji bi sadržavao sva projektna ograničenja i zahtjeve jednog turbinskog postrojenja bio bi suviše složen, a proces optimiranja zahtjevao bi previše truda i vremena. Stoga se projektiranje jednog turbinskog postrojenja u pravilu sastoji od ocjenjivanja pojedinih konstrukcijskih rješenja, odabira jednog, te usavršavanja istog osiguravajući zadovoljenje zadanih projektnih zahtjeva.

Uprkos tome što se turbinsko postrojenje ne može u cijelosti matematički opisati i optimirati, "optimiranje" se može provesti parcijalno poboljšavajući pojedinačno neka odabrana svojstva plinske turbine. Da bi se to postiglo projektne varijable treba tako odabrati da njihova promjena ne utječe na ostale projektne zahtjeve i ograničenja. Primjer takvog pristupa jest optimiranje vibracijskog ponašanja plinske turbine ne mijenjajući snagu i stupanj djelovanja turbine, životni vijek, pouzdanost plinske turbine kao i druga projektna ograničenja.

Uslijed brojnih projektnih zahtjeva koje jedno turbinsko postrojenje treba zadovoljiti: potrebne snage i stupnja djelovanja, minimalnog životnog vijeka rotora, turbine i cijelog postrojenja, dimenzija strujnih kanala kompresorskog i turbinskog dijela, dopuštenih torzijskih, fleksijskih, centrifugalnih i termičkih naprezanja; projektni prostor za optimiranje konture rotora plinske turbine znatno je sužen. Rotor plinske turbine mora, naravno, zadovoljiti temeljne vibracijske kriterije, no za stvarno optimiranje konture rotora plinske turbine, s motrišta zadovoljenja vibracijskih kriterija, praktički, nema dovoljno projektnog prostora.

U drugu ruku, vibracijska svojstva oslonaca rotora imaju velik utjecaj na cjelokupno vibracijsko ponašanje plinske turbine. Ona zajedno s koeficijentima elastičnosti i prigušenja uljnog filma u ležajevima utječu na impendanciju cijelog sustava. Uz to, zbog smanjenja dinamičkih sila uslijed loma lopatica, koje predstavljaju najveće dinamičko opterećenje koje turbina može doživjeti,

rotor plinske turbine oslonjen je elastično u kućištu, a kućište je oslonjeno elastično na temeljnu ploču. Takvo elastično ovješeno čini plinsku turbinu vrlo osjetljivom na vlastite frekvencije kućišta i cijele statorske konstrukcije, pa neodgovarajući odabir krutosti oslonaca rotora i turbine može dovesti do rada u rezonanciji i do vibracijske nestabilnosti.

U radu je stoga pretpostavljeno da su strujni kanali kompresorskog i turbinskog dijela, kućište, kontura rotora i klizni ležajevi dani i da zadovoljavaju temeljne projektne zahtjeve potrebne snage, stupnja djelovanja, minimalnog životnog vijeka, dopuštenih naprezanja kao i kriterije vlastitih frekvencija. Poboljšanje vibracijskih svojstava plinske turbine svodi se na određivanje optimalnih vrijednosti masa i krutosti oslonaca rotora i krutosti oslonaca kućišta turbine.

## Sažetak

Projektirani prostor za optimiranje konture rotora plinske turbine vrlo je sužen brojnim projektnim zahtjevima pa za optimiranje konture s motrišta zadovoljenja vibracijskih kriterija, praktički, nema dovoljno projektnog prostora. U drugu ruku, vibracijska svojstva oslonaca imaju veliki utjecaj na cjelokupno vibracijsko ponašanje plinske turbine. Uz to, elastično ovješeno čini plinsku turbinu vrlo osjetljivom na vlastite frekvencije statorske konstrukcije koje mogu uzrokovati rad u rezonanciji i vibracijsku nestabilnost.

U radu je pokazano da se vibracijska svojstva plinske turbine mogu značajno poboljšati pravilnim odabirom parametara oslonaca rotora i kućišta turbine.

Dva pristupa optimiranja primjenjena su u ovom radu: inženjerski pristup (temeljen na inženjerskom iskustvu i intuiciji) i postupak metodom planiranja pokusa (primjenom statističkih metoda u planiranju, vođenju, razmatranju i tumačenju rezultata).

Na kraju je napravljena usporedba oba pristupa s motrišta kakvoće pronađenih optimalnih rješenja i uloženog truda potrebnog za provedbu optimiranja.

## **Abstract**

The design space for the optimisation of gas turbine rotor contour is very narrow due to many limitations and constrains. On the other hand, the support dynamic characteristics could have a large impact on the vibration characteristic of the whole engine. Moreover, flexible supports make the gas turbine very sensitive to the support structure eigenfrequencies that could cause resonant operation and dynamic instability.

In this research it is shown that it is possible to find optimum values of the bearing and gas turbine casing support modal parameters in order to improve engine dynamic characteristics.

Two optimisation approaches are presented in this research: first the common engineer's approach (based on engineering experience and intuition) and secondly design of experiments approach (using statistical methods in conducting, analysing and interpreting the results).

The approaches to optimise dynamic characteristics are compared from the quality of the optimum found and the effort required to perform the analyses.

## **Ključne riječi**

Plinska turbina, vibracijska svojstva, optimiranje, osjetljivost na neuravnoteženost, rotorski sustav, krutost oslonaca, planiranje pokusa.

## **Keywords**

Gas turbine, dynamic characteristic, optimisation, modal sensitivity, rotor system, support stiffness, design of experiments.

## Popis oznaka

$a$	velika poluos elipse
$[A]$	matrica transformiranog sustava jednadžbi prvog reda
$\alpha_i$	kutovi nagiba toka sila kroz rotor
$b$	mala poluos elipse
$[B]$	matrica transformiranog sustava jednadžbi prvog reda
$c$	viskozno prigušenje (sustava s jednim stupnjem slobode gibanja)
$c_{kr}$	kritično viskozno prigušenje
$c_{ii}$	viskozno prigušenje u smjeru koordinatne osi $X_i$
$c_F$	viskozno prigušenje uljnog filma
$C$	amplituda neprigušenih slobodnih vibracija
$[C]$	matrica prigušenja
$[D]$	zbroj matrica girokopskog efekta i prigušenja
$\delta$	koeficijent prigušenja, realni dio svojstvene vrijednosti $\lambda$
$\Delta$	udaljenost vlastite od radne frekvencije
$\Delta_{min}$	minimalna dopuštena udaljenost vlastite od radne frekvencije
$\varepsilon$	fazni pomak prisilnih vibracija spram uzbude; odnos fleksijske i efektivne smične krutosti
$e$	ekscentricitet mase
$e_{ekv}$	ekvivalentni ekscentricitet mase
$[E]$	osnovna matrica transformiranog sustava jednadžbi prvog reda
$EA$	osna krutost
$EI$	fleksijska krutost
$f_n$	n-ta vlastita frekvencija
$f_{oper}$	radna frekvencija turbine
$f_{uncon}$	prva slobodna fleksijska frekvencija rotora
$F$	vanjska sila
$F_0$	amplituda harmonijske uzbude
$\{F\}$	vektor vanjskih sila



$\{F_s\}$	vektor statičkih vanjskih sila
$\{F_H\}$	vektor harmonijske uzbude
$F_{i1}, F_{Ci}, F_{Si}$	koeficijenti Fourierovog reda
$\varphi$	fazni pomak slobodnih vibracija
$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$	kutovi zakreta oko koordinatnih osi $X_1, X_2, X_3$
$[g_i]$	matrica giroskopskog efekta i-tog diska
$[G]$	matrica giroskopskog efekta
$GA$	torzijska krutost
$[H]$	dinamička krutost sustava
$IDm, IDs$	unutarnji promjer konture rotora i konture toka sile
$I_d$	dijametralni moment tromosti
$I_p$	polarni moment tromosti
$k$	krutost opruge
$k_A$	osna krutost opruge
$k_B$	krutost oslonca ležaja
$k_F$	krutost uljnog filma
$k_T$	torzijska krutost opruge
$k_L$	lateralna krutost opruge
$k_R$	zakretna krutost opruge
$k_S$	krutost oslonca kućišta turbine
$k_{ii}$	krutost opruge u smjeru koordinatne osi $X_i$
$[k_{n,m}^i]$	matrice krutosti i-tog segmenta vratila
$[K]$	matrica krutosti
$\kappa GA$	smična krutost
$L$	duljina segmenta vratila
$\lambda$	svojstvena vrijednost
$m$	masa
$m_{ii}$	masa u smjeru koordinatne osi $X_i$
$m_B$	masa oslonca ležaja
$[m_i]$	matrica mase i-tog diska

$[M]$	matrica mase
$\eta$	omjer uzbudne i kružne vlastite frekvencije
$ODm, ODs$	vanjski promjer konture rotora i konture toka sile
$\omega$	kružna vlastita frekvencija neprigušenog sustava, imaginarni dio svojstvene vrijednosti $\lambda$
$\Omega$	kutna brzina vrtnje
$\psi$	kut zakreta velike poluosi elipse spram osi x
$q$	pomak (sustava s jednim stupnjem slobode gibanja)
$q_h$	homogeno rješenje
$q_p$	partikularno rješenje
$\{q\}$	vektor pomaka
$\{q_s\}$	vektor statičkih pomaka
$\{q_H\}$	vektor odziva sustava uslijed harmonijske uzbuđe
$q_{Ci}, q_{Si}$	koeficijenti odziva sustava uslijed harmonijske uzbuđe
$Q$	amplituda prisilnih vibracija; funkcija povećanja
$Q_s$	normirana funkcija povećanja
$t$	vrijeme
$u$	pomak u smjeru koordinatne osi x
$\{u\}$	svojstveni vektor (desni)
$\{u_{Re}\}$	realni dio svojstvenog vektora
$\{u_{Im}\}$	imaginarni dio svojstvenog vektora
$v$	pomak u smjeru koordinatne osi y
$V$	funkcija povećanja
$V_{rez}$	vrijednost funkcije povećanja u rezonanciji
$w$	kompleksni vektor pomaka
$w_f$	kompleksni vektor pomaka istosmjern vrtnji
$w_b$	kompleksni vektor pomaka protusmjern vrtnji
$x$	koordinatna os
$x_1, x_2, x_3$	pomaci u smjeru koordinatnih osi $X_1, X_2, X_3$
$X_1, X_2, X_3$	koordinatne osi

$\{x\}$	vektor nepoznatih veličina transformiranog sustava jednadžbi prvog reda
$\{X\}$	vektor poznatih veličina transformiranog sustava jednadžbi prvog reda
$y$	koordinanta os
$\zeta$	bezdimenzijsko prigušenje

## Popis slika

Slika 1. Trajektorija rotora u faznoj ravnini kod nadkrično prigušenih vibracija (monotono smirujuće gibanje).....	16
Slika 2. Trajektorije rotora u faznoj ravnini kod podkrično prigušenih i neprigušenih vibracija .....	17
Slika 3. Neprigušeni vibracijski sustav s jednim stupnjem slobode gibanja.....	20
Slika 4. Prigušeni vibracijski sustav s jednim stupnjem slobode gibanja.....	22
Slika 5. Prigušeni vibracijski sustav s kinetičkom periodičkom uzbuđom.....	24
Slika 6. Funkcija povećanja amplitude uslijed harmonijske uzbuđe.....	26
Slika 7. Funkcija povećanja amplitude uslijed neuravnotežene inercijske sile..	26
Slika 8. Fazni kut zaostajanja prisilnih vibracija za uzbuđom .....	27
Slika 9. Eliptično gibanje rotora u ravnini okomitoj na os vrtnje.....	28
Slika 10. Eliptičko gibanje rotora rastavljeno na istosmjernu i protusmjernu komponentu vibracija.....	30
Slika 11. Orijeñtacija globalnog koordinatnog sustava.....	31
Slika 12. Model vratila.....	32
Slika 13. Model elastičnog diska.....	35
Slika 14. Model elastične spojke.....	37
Slika 15. Model radijalnog ležaja.....	38
Slika 16. Model oslonca radijalnog ležaja.....	40
Slika 17. Odabir postupka modeliranja rotora.....	46
Slika 18. Pojednostavljeno modeliranje rotora plinske turbine.....	47
Slika 19. Kontura toka sila uslijed savijanja.....	48
Slika 20. Kontura toka sila u turbinskom dijelu rotora.....	49
Slika 21. Kontura toka sila na izlazu iz kompresora.....	49
Slika 22. Kontura toka sila u sredini kompresora.....	50
Slika 23. Kontura toka sila na ulazu kompresora.....	50
Slika 24. Detaljno modeliranje rotora plinske turbine.....	51

Slika 25. Pojednostavljeni model turbinskog postrojenja.....	53
Slika 26. Model plinske turbine.....	54
Slika 27. Primjer konture rotora plinske turbine.....	54
Slika 28. Primjer konture kućišta plinske turbine.....	55
Slika 29. Model generatora.....	56
Slika 30. Primjer konture rotora generatora.....	57
Slika 31. Model izlaznog dijela turbine.....	57
Slika 32. Kontura rotora i ulazni podaci za računalni program.....	63
Slika 33. Kontura kućišta turbine i ulazni podaci računalnog programa.....	64
Slika 34. Vibracijski model plinske turbine.....	65
Slika 35. Pojednostavljeni model plinske turbine: vlastite frekvencije u ovisnosti o omjeru brzina $\eta$ .....	66
Slika 36. Pojednostavljeni model plinske turbine: načini vibriranja rotora i kućišta plinske turbine kod radne brzine vrtnje rotora (vibracije istosmjerne vrtnji).....	68
Slika 37. Pojednostavljeni model plinske turbine: načini vibriranja rotora i kućišta plinske turbine kod radne brzine vrtnje rotora (vibracije protusmjerne vrtnji).....	69
Slika 38. Odziv pojednostavljenog modela plinske turbine na neuravnoteženost	70
Slika 39. Elastično oslonjen rotor.....	71
Slika 40. Vlastite frekvencije u ovisnosti o krutostima uljnog filma / oslonaca	72
Slika 41. Prvi korak optimiranja: načini vibriranja rotora plinske turbine.....	75
Slika 42. Model jednostavno oslonjenog rotora.....	76
Slika 43. Vlastite frekvencije rotora u ovisnosti o krutostima oslonaca ležajeva / ekvivalentnim krutostima oslonaca ležajeva i kućišta turbine $k_{B1}$ , $k_{B2}$ .....	78
Slika 44. Drugi korak optimiranja: načini vibriranja rotora plinske turbine.....	80
Slika 45. Vlastite frekvencije u ovisnosti o krutostima oslonaca kućišta $k_{S1}$ , $k_{S2}$ .....	83

Slika 46. Osjetljivost na neuravnoteženost u ovisnosti o krutostima oslonaca kućišta turbine kS1, kS2.....	84
Slika 47. Inženjerski postupak: vlastite frekvencije optimalnog modela plinske turbine u ovisnosti o brzini vrtnje rotora.....	85
Slika 48. Inženjerski postupak: načini vibriranja optimalnog modela plinske turbine kod radne brzine vrtnje rotora (vibracije istosmjerne vrtnji) .....	86
Slika 49. Inženjerski postupak: načini vibriranja optimalnog modela plinske turbine kod radne brzine vrtnje rotora (vibracije protusmjerne vrtnji) .....	87
Slika 50. Inženjerski postupak: odziv optimalnog modela na neuravnoteženost	89
Slika 51. Općeniti model procesa / sustava.....	92
Slika 52. Vlastite frekvencije u ovisnosti o rednom broju koraka.....	97
Slika 53. Osjetljivost na neuravnoteženost u ovisnosti o rednom broju koraka.	98
Slika 54. Osjetljivost na neuravnoteženost u ovisnosti o projektnim parametrima.....	102
Slika 55. Planiranje pokusa: vlastite frekvencije optimalnog modela plinske turbine u ovisnosti o brzini vrtnje rotora.....	104
Slika 56. Planiranje pokusa: načini vibriranja optimalnog modela plinske turbine kod radne brzine vrtnje rotora (vibracije istosmjerne vrtnji) .....	105
Slika 57. Planiranje pokusa: načini vibriranja optimalnog modela plinske turbine kod radne brzine vrtnje rotora (vibracije protusmjerne vrtnji) .....	106
Slika 58. Planiranje pokusa: odziv optimalnog modela na neuravnoteženost.	108
Slika 59. Vlastite frekvencije u ovisnosti o ekvivalentnoj krutosti oslonaca rotora.....	112
Slika 60. Vlastite frekvencije u ovisnosti o ekvivalentnoj krutosti oslonaca ležajeva.....	113
Slika 61. Vlastite frekvencije u ovisnosti o krutosti oslonaca turbine.....	114

Slika 62. Vlastite frekvencije i osjetljivost na neuravnoteženost plinske turbine u ovisnosti o omjeru krutosti oslonaca.....	116
Slika 63. Osjetljivost na neuravnoteženost: početno konstrukcijsko rješenje..	117
Slika 64. Osjetljivost na neuravnoteženost: poboljšano konstrukcijsko rješenje .....	118
Slika 65. Vlastite frekvencije i osjetljivost na neuravnoteženost plinske turbine u ovisnosti o omjeru krutosti oslonaca.....	120
Slika 66. Osjetljivost na neuravnoteženost: poboljšano konstrukcijsko rješenje .....	121
Slika 67. Odabrani projektni parametri .....	124
Slika 68. Izračunate vlastite frekvencije .....	126
Slika 69. Osjetljivost na neuravnoteženost u ovisnosti o rednom broju koraka .....	127
Slika 70. Osjetljivost na neuravnoteženost u ovisnosti o glavnim utjecajnim parametrima.....	128
Slika 71. Osjetljivost na neuravnoteženost: optimum dobiven selektivnim pokusom.....	132
Slika 72. Pareto graf: glavni utjecaji selektivnog pokusa.....	135
Slika 73. Vlastite frekvencije u ovisnosti o rednom broju koraka.....	136
Slika 74. Osjetljivost na neuravnoteženost u ovisnosti o rednom broju koraka .....	137
Slika 75. Osjetljivost na neuravnoteženost u ovisnosti o projektnim parametrima.....	138
Slika 76. Osjetljivost na neuravnoteženost: prvo moguće optimalno rješenje.	141
Slika 77. Osjetljivost na neuravnoteženost: drugo moguće optimalno rješenje .....	142

## Popis tablica

Tablica 1: Provjera točnosti rezultata dobivenih računalnim programom.....	45
Tablica 2. ISO 10814 područja osjetljivosti na neuravnoteženost.....	59
Tablica 3. Rezultati prvog koraka optimiranja .....	74
Tablica 4. Rezultati drugog koraka optimiranja .....	79
Tablica 5. Rezultati trećeg koraka optimiranja .....	84
Tablica 6. Sažetak plana pokusa.....	96
Tablica 7. Dio rezultata poredan po rastućoj osjetljivosti na neuravnoteženost .....	100
Tablica 8. Analiza varijance.....	103
Tablica 9. Usporedba konstrukcijskih rješenja.....	110
Tablica 10: Sažetak selektivnog pokusa.....	125
Tablica 11. Dio rezultata selektivnog pokusa poredan po rastućoj osjetljivosti na neuravnoteženost .....	130
Tablica 12. Pregled varijacije.....	133
Tablica 13. Dio rezultata poredan po rastućoj osjetljivosti na neuravnoteženost .....	139
Tablica 14. Usporedba mogućih optimalnih rješenja.....	144





# 1 Uvod

## 1.1 Pregled dosadašnjih istraživanja

Nekoliko normi [1, 2, 3] preporuča da se utjecaj oslonaca u razmatranjima fleksijskih vibracija uzme u izračunima u obzir ako je omjer krutosti oslonaca i krutosti uljnog filma manji ili jednak 3,5. Preporuka normi jest da se oslonci modeliraju preko vibracijskih svojstava ovisnih o uzbudnoj frekvenciji (frekvencijske odzivne funkcije) ili pomoću vrijednosti krutosti i prigušenja dobivenih modalnom analizom, no ne daju objašnjenje kako odrediti ta vibracijska svojstva niti koji način modalne analize primijeniti.

Najčešće se u dinamici rotora oslonci modeliraju elastičnim i prigušnim elementom čija su krutost i prigušenje stalni u cijelom području brzine vrtnje [4, 5]. Krutost oslonca izračunava se na temelju statičkog pomaka ležaja uslijed nametnute sile (pokusom ili izračunom) dok se prigušenje procjenjuje na temelju mjerenja i iskustva. Takav pristup daje dobru procjenu kritičnih brzina vrtnje rotora, ali daje vrlo malo informacija o vlastitim frekvencijama oslonaca.

Ako se u izračunima želi uzeti u obzir utjecaj oslonaca, onda se oslonci rotora modeliraju se kao sustav s jednim stupnjem slobode gibanja u horizontalnom i vertikalnom smjeru. Pravilnim odabirom mase i krutosti oslonca mogu se vrlo dobro procijeniti kritične brzine vrtnje rotora kao i vlastite frekvencije oslonaca i njihov utjecaj na vibracijsko ponašanje cijelog stroja [5, 6]. Tek nedavno počelo se s detaljnijim modeliranjem oslonaca rotora sa svrhom točnijeg simuliranja međudjelovanja rotora i statora. Vibracijski model statora dobiven je modalnom analizom pomoću metode konačnih elemenata [7, 8].

U najvećem broju slučajeva vibracijska svojstva oslonaca rotora određuju se pokusima. Najviše primjenjivana metoda jest mjerenje frekvencijske odzivne funkcije konstrukcije na mjestima oslonaca rotora. Na temelju tako izmjerenih

odzivnih funkcija mogu se dobiti istovjetni vibracijski modeli oslonaca u obliku sustava s jednim [5, 9-12] ili s više stupnjeva slobode gibanja [13, 14].

Umjesto frekvencijske odzivne funkcije, odziv sustava uslijed neuravnoteženosti rotora može se također primijeniti za određivanje modalnih parametara oslonaca rotora [15-18]. Također je moguća primjena polinomne prijelazne funkcije na temelju dobivene frekvencijske odzivne funkcije [19-23]. Prednost polinomne prijelazne funkcija jest u tome što se može primijeniti za razmatranje stabilnosti te za izračun odziva sustava uslijed neuravnoteženosti.

Optimiranje rotorskih sustava bilo je također tema mnogih radova. Optimalan položaj kritičnih brzina vrtnje razmatran je u [24]. Znatan broj autora bavio se optimiranjem rotora u magnetskim ležajevima [25, 26]. Vlastite frekvencije sustava često su uzete kao ograničenja ili kao funkcije cilja optimiranja [27-30]. Jurjević i Stegić [31] prikazali su upotrebu eksponencijalnih kaznenih funkcija u optimiranju modalnih parametara oslonaca rotorskog sustava.

Međutim, većina navedenih radova koji se bave optimiranjem nije praktički primjenjiva jer su sustavi kojima su se autori bavili vrlo jednostavni. Ovaj rad je stoga posvećen optimiranju vibracijskih svojstava današnjih izvedbi plinskih turbina. Istraživanje se temelji na rezultatima danim u [31], gdje je na jednostavnom primjeru pokazano da se vibracijska svojstva rotorskog sustava mogu značajno poboljšati pravilnim odabirom mase, krutosti i prigušenja oslonaca rotora.

## 1.2 Definiranje problema

Najveće moguće dinamičko opterećenje, koje plinska turbina mora izdržati, jest ono uslijed neuravnoteženosti sustava uzrokovano lomom turbinskih odnosno kompresorskih lopatica. Radi smanjenja dinamičkih opterećenje koja se prenose na podlogu, rotor plinske turbine oslonjen je elastično u kućištu turbine, dok je cijela plinska turbina oslonjena elastično na temeljnu ploču.

Takvo elastično ovješeno čini plinsku turbinu vrlo osjetljivom na vlastite frekvencije kućišta turbine i cijele statorske konstrukcije. Pokazalo se da pogrešan odabir krutosti oslonaca rotora i turbine može dovesti do rada u rezonanciji i vibracijske nestabilnosti plinske turbine.

U pravilu, uslijed mnogobrojnih projektnih zahtjeva i konstrukcijskih ograničenja, optimiranje konture rotora plinske turbine s motrišta zadovoljenja vibracijskih kriterija nije izvedivo. U drugu ruku vibracijska svojstva oslonaca rotora plinske turbine uvelike utječu na cjelokupnu impendanciju sustava, a time i na vibracijsko ponašanje turbine.

U radu je stoga pretpostavljeno da su strujni kanali kompresorskog i turbinskog dijela, kućište plinske turbine, kontura rotora i klizni ležajevi zadani i da zadovoljavaju temeljne projektne zahtjeve potrebne snage, stupnja djelovanja, minimalnog životnog vijeka, dopuštenih naprezanja kao i kriterije vlastitih frekvencija. Poboljšanje vibracijskih svojstava plinske turbine svodi se na određivanje optimalnih vrijednosti masa i krutosti oslonaca rotora i krutosti oslonaca kućišta turbine.

Budući da na vibracijsko ponašanje plinske turbine utječu mnogobrojni faktori (položaj vlastitih frekvencija odnosno kritičnih brzina vrtnje, modalno prigušenje sustava, kakvoća uravnotežavanja rotora, način pokretanja turbine itd.), vibracijska svojstva turbine nije lako matematički opisati. Da bi se smanjilo vrijeme potrebno za pripremu modela i izračunavanja, a time pojednostavnilo optimiranje vibracijskih svojstava, model turbinskog postrojenja treba biti jednostavan i u isto vrijeme omogućavati dovoljno točno predviđanje njegovog vibracijskog ponašanja.

Da bi se to doseglo, turbinsko postrojenje je rasčlanjeno na sastavnice, pa potom svaka sastavnica modelirana je kao jednostavan fizikalni sustav koji, s dovoljnom točnošću, opisuje njeno vibracijsko ponašanje. Sastavnice su potom

spojene u vibracijski model turbinskog postrojenja. Modeliranje sastavnica i turbinskog postrojenja opisano je u poglavlju 5.

Da bi se optimiranje vibracijskih svojstava plinske turbine moglo provesti, najprije treba definirati ciljnu funkciju koja opisuje kakvoću njenog vibracijskog ponašanja. S definiranom funkcijom cilja, optimiranje vibracijskih svojstava plinske turbine svodi se na pronalaženje minimuma odabrane ciljne funkcije. Odabir ciljne funkcije opisan je u poglavlju 6.

Nakon provedenog modeliranja i odabrane ciljne funkcije slijedi optimiranje vibracijskih svojstava plinske turbine. Cilj je ovog istraživanja razviti jednostavan postupak optimiranja koji će se temeljiti na pronalaženju optimalnih vrijednosti krutosti oslonaca rotora i oslonaca kućišta za koje će vibracijsko ponašanje plinske turbine biti najpovoljnije.

Dva postupka optimiranja primjenjena su u ovom radu:

- inženjerski - temeljen na iskustvu i intuiciji, mijenjanjem jednog po jednog projektnog parametra,
- i plana pokusa tj. primjena statističkih metoda u planiranju, vođenju, razmatranju i tumačenju rezultata.

Inženjerski postupak temelji se na postepenom povećanju složenosti vibracijskog modela te razumijevanju utjecaja krutosti oslonaca ležajeva i kućišta turbine na vibracijsko ponašanje, a njegova uspješnost ovisi o iskustvu i intuiciji. Inženjerski postupak optimiranja vibracijskog ponašanja plinske turbine razmatran je u poglavlju 7.

Kod plana pokusa promišljeno se mijenjaju projektne varijable da bi se na temelju toga zaključilo kako se mijenja vibracijsko ponašanje plinske turbine. Glavna zadaća plana pokusa jest procjena utjecaja pojedinih projektnih varijabli na vibracijsko ponašanje te određivanje optimalne vrijednosti najutjecajnijih

varijabli s ciljem dosezanja najboljih vibracijskih svojstava plinske turbine, unutar danih projektnih ograničenja. Postupak plana pokusa razmatrana je u poglavlju 8.

Postupci optimiranja uspoređeni su s motrišta kakvoće pronađenih optimalnih rješenja. Rezultati provedenih optimiranja i njihova usporedba izložena je u poglavlju 10.

## 2 Hipoteza

Rotor plinske turbine mora zadovoljiti temeljne vibracijske kriterije, ali, u praksi, za stvarno optimiranje konture rotora, s motrišta zadovoljenja vibracijskih kriterija, nema dovoljno prostora. Projektni prostor za optimiranje konture rotora plinske turbine znatno je sužen brojnim projektnim zahtjevima i ograničenjima koje takvo postrojenje mora zadovoljiti.

U drugu ruku, vibracijska svojstva oslonaca rotora plinske turbine imaju veliki utjecaj na cjelokupno vibracijsko ponašanje turbine. Vibracijska svojstva oslonaca zajedno s koeficijentima elastičnosti i prigušenja uljnog filma u ležajevima utječe na impendanciju cijelog sustava. Uz to, radi smanjenja dinamičkih sila uslijed loma lopatica, zadnjeg turbinskog ili prvog kompresorskog stupnja (koje predstavlja najveće dinamičko opterećenje turbine), rotor plinske turbine oslonjen je elastično u kućištu turbine, a cijela plinska turbina oslonjena je elastično na temeljnu ploču. Takvo elastično ovješeno čini plinsku turbinu vrlo osjetljivom na vlastite frekvencije kućišta i cijele statorske konstrukcije, pa pogrešan odabir krutosti oslonaca rotora i turbine može dovesti do rada u rezonanciji i do vibracijske nestabilnosti.

Hipoteza ovog istraživanja jest: naći optimalne vrijednosti krutosti oslonaca rotora i krutosti oslonaca kućišta turbine kod kojih će vibracijska svojstva turbine biti najpovoljnija, a ujedno zadovoljiti zadane projektne zahtjeve. Poboljšanje vibracijskih svojstava plinske turbine ovdje se svodi na određivanje optimalnih vrijednosti krutosti oslonaca rotora i kućišta turbine.

Hipoteza se temelji na radu [31] gdje je, uprkos tome što je optimiranje provedeno na jednostavnom vibracijskom sustavu s dva stupnja slobode gibanja, nedvojbeno pokazano da se vibracijsko ponašanje rotorskog sustava može značajno poboljšati pravilnim odabirom mase, krutosti i prigušenja oslonaca rotora.

Cilj je ovog istraživanja potvrditi da se dinamička svojstva složenog mehaničkog sustava, kao što je plinska turbina, mogu značajno poboljšati pravilnim odabirom krutosti oslonaca rotora i oslonaca kućišta turbine. Osim toga, cilj je pokazati da se inženjerski prihvatljiv optimum dinamičkih svojstava može pronaći jednostavnim inženjerskim metodama i pravilnim tumačenjem rezultata, bez primjene složenih matematičkih algoritama.



### 3 Opis istraživanja

Cilj istraživanja jest:

- 1 Razviti pojednostavljeni vibracijski model turbinskog postrojenja koji je u stanju, dovoljno točno, odrediti vlastite frekvencije i pouzdano predvidjeti vibracijsko ponašanje turbinskog postrojenja.
- 2 Definirati kakvoću vibracijskog ponašanja plinske turbine i ciljnu funkciju koja ju opisuje.
- 3 Razviti jednostavan postupak optimiranja krutosti oslonaca ležajeva i oslonaca kućišta plinske turbine s ciljem poboljšanja njezinih vibracijskih svojstava (inženjerski postupak optimiranja).
- 4 Provjeriti valjanost i uspješnost inženjerskog postupka optimiranja vibracijskih svojstava na primjeru jedne izvedene plinske turbine.
- 5 Ponoviti optimiranje vibracijskih svojstava primjenom plana pokusa.
- 6 Usporediti dobivene rezultate s motrišta kakvoće pronađenog optimuma i utrošenog vremena za optimiranja.

Vibracijski model treba biti jednostavan i u isto vrijeme sposoban dovoljno točno predvidjeti vibracijsko ponašanje plinske turbine. Takvim pojednostavljenim modeliranjem izravno se smanjuje vrijeme potrebno za pripremu modela, izračun i tumačenje rezultata, pa se time smanjuju i troškovi razvoja nove turbine.

Kao pokazatelj kakvoće vibracijskih svojstava plinske turbine odabrana je osjetljivost turbine na neuravnoteženost rotora prema ISO 10814. Osjetljivost turbine na neuravnoteženost manja je ako su vlastite frekvencije udaljenije od radne frekvencije turbine, te ako je prigušenje u sustavu veće. Kao funkcija koja opisuje osjetljivost turbine na neuravnoteženost uzeta je funkcija povećanja sustava s jednim stupnjem slobode gibanja. Takva ciljna funkcija

pojednostavljuje određivanje područja osjetljivosti na neuravnoteženost, ali njeno izračunavanje zahtjeva izračun kompleksnih vlastitih vrijednosti u svakom pojedinom koraku optimiranja.

Razvijeni postupci optimiranju vibracijskih svojstava plinske turbine temelje se na razmatranju utjecaja pojedinih projektnih parametara na vibracijsko ponašanje, postupnim povećavanjem složenosti modela, te sekvencijskom optimiranju oslonaca rotora i kućišta turbine.

Postupci su podijeljeni u tri koraka:

1. optimiranje krutosti uljnog filma u kliznim ležajevima,
2. optimiranje masa i krutosti oslonaca ležajeva,
3. optimiranje krutosti oslonaca kućišta turbine.

U svakom koraku povećava se složenost vibracijskog modela. Prvi korak temelji se na jednostavnom modelu elastično oslonjenog rotora (slika 39). U drugom koraku oslonci su modelirani kao sustav s jednim stupnjem slobode gibanja (slika 42). U trećem koraku u vibracijski model turbine uključeni su oslonci ležajeva rotora, kućište i oslonci kućišta plinske turbine (slika 34).

Cilj inženjerskog postupka nije samo optimiranje već i razumijevanje vibracijskih svojstava i ponašanja plinske turbine. Postupnim povećavanjem složenosti vibracijskog modela određuju se parametri od najvećeg utjecaja na vibracijska svojstva plinske turbine. Poznavajući te parametre, već u početnoj fazi projekta, može se zaključiti da li je moguće poboljšati vibracijska svojstva plinske turbine unutar zadanih ograničenja. To je naravno važno da se ne bi trošilo vrijeme i novac pokušavajući poboljšati vibracijsko ponašanje plinske turbine i tek na kraju spoznati da je, uz dana projektna ograničenja, nemoguće poboljšanje vibracijskih svojstava.

Ipak, postoji rizik da, za pojedina konstrukcijska rješenja plinskih turbina, takav pojednostavljeni postupak bude nepouzdan i dovede do netočnog optimuma. Kako veliki broj projektnih parametara utječe na vibracijsko ponašanje plinske turbine, najučinkovitiji postupak optimiranja vibracijskih svojstava jest plana pokusa. Kod plana pokusa promišljeno se mijenjaju vrijednosti projektnih parametara da bi se na temelju toga zaključilo kako se mijenja vibracijsko ponašanje plinske turbine. No, ne utječu svi parametri podjednako na vibracijsko ponašanje. Neki imaju veliki utjecaj, neki osrednji, a neki pak imaju zanemariv utjecaj. Zadaća plana i provođenja pokusa jest pronalaženje projektnih parametara koji imaju najveći utjecaj na vibracijsko ponašanje te određivanje vrijednosti tih parametara da bi se postigla optimalna vibracijska svojstva plinske turbine unutar danih ograničenja.

Primjenjeni postupci optimiranja uspoređeni su s motrišta kakvoće pronađenih optimalnih rješenja (kakvoće vibracijskih svojstava plinske turbine) te vremena potrebnog za provedbu postupka optimiranja i tumačenja rezultata.

## 4 Računalni program

Da bi rezultati izračuna bili pouzdani i točni, potrebno je sustav što točnije modelirati. Tehnike modeliranja rotorskog sustava i njegovih sastavnica uspješno se primjenjuju već godinama. Pouzdan model rotorskog sustava, model je koji omogućuje točno predviđanje dinamičkog ponašanja sustava. To znači da su odgovarajuće opisana elastična i inercijska svojstva sustava.

Uz poznavanje mehaničkih modela pojedinih sastavnica rotorskog sustava, preostaje odabir vrste i broja sastavnica te njihovo povezivanje u mehanički model proučavanog rotorskog sustava.

Uobičajeno modeliranje oslonaca rotora jest sa sustavom s jednim stupnjem slobode gibanja, kako u horizontalnom, tako i u vertikalnom smjeru. Iako takav pristup daje dobru procjenu kritičnih brzina vrtnje rotora, ne može se primjenjivati za procjenu vlastitih frekvencije statorske konstrukcije. Kod takvog vibracijskog modela u kojem su utjecaji kućišta turbine modelirani na vrlo jednostavan način, izračun odziva kućišta turbine i statorske konstrukcije na neuravnoteženost nije izvediv i pored toga što je rotor plinske turbine dovoljno detaljno modeliran (slika 42). To ograničenje dovelo je do potrebe za poboljšanim vibracijskim modeliranjem, a time i do potrebe za računalnim programom kojim će se moći dovoljno točno modelirati statorsku konstrukciju i njene veze s rotorom plinske turbine.

Autor je postojeće računalne programe za vibracijske izračune smatrao ili neprikladnim za modeliranje cijele plinske turbine s dovoljno detalja ili neprikladnim za izračune njenog vibracijskog ponašanja. To je bio razlog za razvoj vlastitog računalnog programa koji je prikladan za izračune vibracijskog ponašanja turbinskih postrojenja. Razvijenim računalnim programom moguće je provoditi sve standardne vibracijske izračune rotorskih sustava (suosnost vratila, izmjenična fleksijska naprezanja, vlastite frekvencije, odziv na

harmonijske i kinetičke uzbude, odziv na tranzijentne uzbude, itd.) kao i simulirati kompleksne vibracijske učinke koji proizlaze iz dinamičkih veza između rotora i lopatica plinske turbine, rotora i statorske konstrukcije, kao i veza između osnih, torzijskih i fleksijskih vibracija kod sustava sa zupčaničkim prijenosnicima.

Postupak konstruiranja plinskih turbina podijeljen je u dvije faze: početnu i detaljnu. Računalni program namijenjen je provođenju standardnih vibracijskih izračuna, kao i za izračune osjetljivosti mijenjanjem projektnih parametara u početnoj fazi konstruiranja, dok konstrukcijsko rješenje još nije konačno.

Računalni program posebno je prilagođen za vibracijske izračune turbinskih postrojenja, a razvijen je primjenom Scilab © INRIA-ENPC, slobodno dostupnog znanstvenog računalnog programskog paketa koji omogućuje složene izračune za inženjerske i znanstvene potrebe [32, 33, 34].

### 4.1 Mogućnosti modeliranja i izračuna

Modeliranje i izračuni turbinskog postrojenja provode se u nekoliko koraka. Prvi korak modeliranja jest donešenje odluke o potrebnoj opsežnosti modela. Odluka se temelji na usvojenom cilju i potrebnoj točnosti izračuna, a u skladu s inženjerskim znanjem i iskustvom. Preporučljivo je rabiti što jednostavniji model, ali koji još uvijek dovoljno točno predviđa razmatrana vibracijska svojstva. Konačna provjera valjanosti modela, provodi se usporedbom rezultata izračuna i mjerenja, pa se model usvaja ili poboljšava.

Drugi korak modeliranja jest utvrđivanje glavnih elemenata sustava i njihovih međusobnih veza, te njihovo pojednostavljeno modeliranje. Razvijeni računalni program sadrži modele sljedećih elemenata:

- vratilo - element s  $N$  čvorova ( $N-1$  grednih konačnih elemenata) i  $6N$  stupnjeva slobode gibanja,

- elastični disk - element s dva čvora i 12 stupnjeva slobode gibanja,
- elastična spojka - element bez mase s dva čvora i 12 stupnjeva slobode gibanja (modeliranje elastičnog spoja između dva vratila),
- radijalni ležaj - element bez mase s dva čvora i 4 stupnja slobode gibanja,
- oslonac ležaja - element s dva čvora i 4 stupnja slobode gibanja (u lateralnim smjerovima),
- opći oslonac - element s dva čvora i 12 stupnjeva slobode gibanja (6 u svakom čvoru),
- zupčanički par - element s dva čvora i 12 stupnjeva slobode gibanja.

Skup svih element sustava i njihovih međusobnih veza, zajedno s pretpostavkama o njihovom modeliranju, tvore pojednostavljeni mehanički model cijelog sustava. Model sustava matematički je opisan globalnim jednadžbama gibanja, koje se izvode iz jednadžbi gibanja elemenata i njihovih kinematičkih veza.

Zahvaljujući mogućnosti potpunog parametarskog modeliranja, što znači da se svaki ulazni podatak može unijeti u obliku matematičke funkcije ovisne o vremenu, brzini vrtnje ili nekom drugom projektnom parametru, znatno je smanjeno vrijeme potrebno za analize osjetljivosti ili za optimiranje dinamičkih svojstava koji oboje zahtjevaju veliki broj iteracija projektnih parametara. Time se ujedno smanjuje i vrijeme potrebno za razvoj nove plinske turbine.

Parametarsko modeliranje omogućuje izračune linearnih rotorskih sustava sa stalnim i s vremenski promjenjivim koeficijentima koji su opisani matričnom jednadžbom gibanja:

$$[M]\{\ddot{q}\}+[D]\{\dot{q}\}+[K]\{q\}=\{F\}$$

$$[M]\{\ddot{q}\}+\Omega[G]\{\dot{q}\}+[C]\{\dot{q}\}+[K]\{q\}=\{F\}$$
(1)

gdje su :

- $[M]$  - matrica masa
- $[G]$  - matrica giroskopskog efekta
- $[C]$  - matrica prigušenja
- $[K]$  - matrica krutosti
- $[D]$  - zbroj matrica giroskopskog efekta i prigušenja
- $\{q\}$  - vektor pomaka
- $\{F\}$  - vektor vanjskih sila
- $\Omega$  - kutna brzina vrtnje

Matrica masa  $[M]$  je simetrična, dok su matrica krutosti  $[K]$  i matrica  $[D]$  u općem slučaju nesimetrične. Iz algebre je poznato da se svaka matrica može napisati kao zbroj simetrične i antisimetrične matrice. Tako je matrice  $[D]=[C] + \Omega[G]$ , gdje je matrica prigušenja  $[C]$  simetrična, a matrica giroskopskog efekta  $[G]$  antisimetrična. Slično se može napisati matrica krutosti  $[K]$  kao zbroj simetrične matrice  $[S]$  i antisimetrične matrice  $[A]$ . Ovdje simetrična matrica  $[S]$  predstavlja utjecaj konzervativnih elastičnih sila, dok antisimetrična matrica  $[A]$  predstavlja utjecaj nekonzervativnih elastičnih sila.

#### 4.1.1 Slobodne prigušene vibracije i svojstvene vrijednosti

Kad je vektor vanjskih sila  $\{F\}$  jednak nul vektoru, dobivamo homogeni sustav jednadžbi gibanja:

$$[M]\{\ddot{q}\} + [D]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = \{0\} \quad (2)$$

čije opće rješenje predstavlja slobodne prigušene vibracije. Ako se rješenje jednadžbi gibanja pretpostavi u obliku:

$$\{q\} = \{u\} e^{\lambda t} \quad (3)$$

pa uvrsti u sustav jednadžbi (2), dobva se homogeni sustav linearnih algebaskih jednadžbi sa svojstvenim vektorom  $\{u\}$  kao vektorom nepoznatih veličina:

$$[H(\lambda)]\{q\} = [\lambda^2[M] + \lambda[D] + [K]]\{u\} = \{0\} \quad (4)$$

U toj jednadžbi, matrica  $[H(\lambda)]$  predstavlja dinamičku krutost sustava. Da bi sustav imao netrivialna rješenja, determinanta sustava mora biti jednaka nuli:

$$|H(\lambda)| = |\lambda^2[M] + \lambda[D] + [K]| = 0 \quad (5)$$

Iz tog uvjeta slijede  $2n$  rješenja svojstvenih vrijednosti  $\lambda_i$ , gdje je  $n$  broj stupnjeva slobode gibanja sustava (broj stupnjeva slobode gibanja mehaničkog sustava jednak je umnošku broja čvorova i broja stupnjeva slobode po čvoru). U općem slučaju, svojstvene vrijednosti i njima pridruženi svojstveni vektori su oblika:

$$\lambda_j = \delta_j + i\omega_j \quad u_j = u_{Rej} + i u_{Imj} \quad j = 1 \dots 2n \quad (6)$$

i funkcije su kutne brzine. Imaginarni dio svojstvene vrijednosti  $\omega_j$  predstavlja prigušenu vlastitu frekvenciju sustava, dok realni dio svojstvene vrijednosti  $\delta_j$  predstavlja koeficijent prigušenja. Vibracije sustava biti će prigušene ako je  $\delta_j$  manji od nule, neprigušene ako je  $\delta_j$  jednak nuli, odnosno raspirujuće ako je koeficijent prigušenja  $\delta_j$  veći od nule.

Za čisto realne svojstvene vrijednosti:

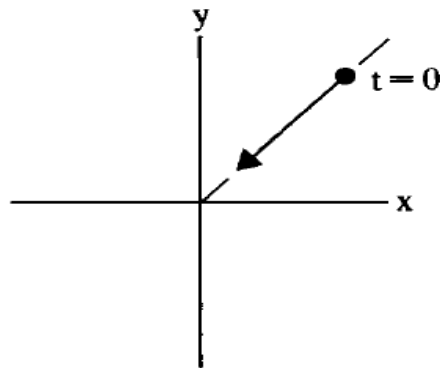
$$\lambda_j = \delta_j \quad u_j = u_{Rej} \quad j = 1 \dots 2n \quad (7)$$

rješenje sustava (2) glasi:

$$\{q_j\} = \{u_{Rej}\} e^{\delta_j t} \quad (8)$$

To rješenje predstavlja monotono raspireno gibanje ako je  $\delta_j$  veći od nule, odnosno monotono smirujuće gibanje ako je  $\delta_j$  manji od nule. Na slici 1. predočena je trajektorija rotora kod monotono smirujućeg gibanja, koja je dio pravca i približava se ishodištu [35].





Slika 1. Trajektorija rotora u faznoj ravnini kod nadkritično prigušenih vibracija (monotono smirujuće gibanje)

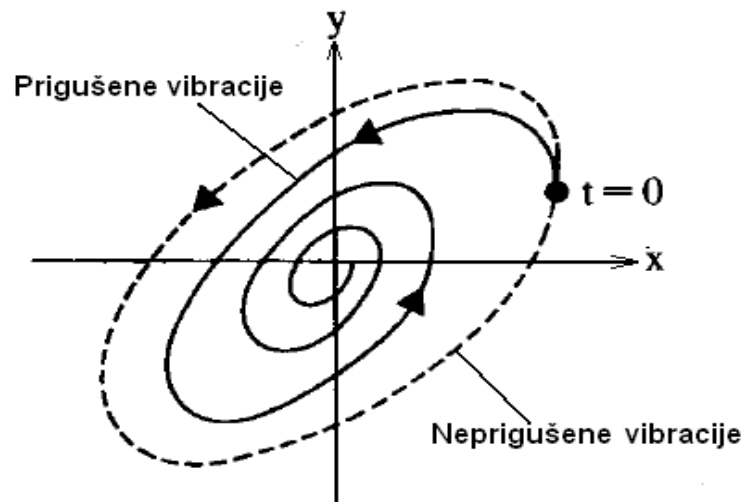
Kod podkritično prigušenih vibracija svojstvene vrijednosti i njima pridruženi svojstveni vektori su kompleksno konjugirani:

$$\begin{aligned} \lambda_j &= \delta_j + i\omega_j & \mathbf{u}_j &= \mathbf{u}_{Rej} + i\mathbf{u}_{Imj} & j &= 1 \dots 2n \\ \lambda_k &= \delta_j - i\omega_j & \mathbf{u}_k &= \mathbf{u}_{Rej} - i\mathbf{u}_{Imj} \end{aligned} \quad (9)$$

Zbrojem rješenja jednog odabranog kompleksno konjugiranog para, dobiva se rješenje slobodnih prigušenih vibracija toga načina vibriranja:

$$\{p_j\} = \{q_j\} + \{q_k\} = 2e^{\delta_j t} (\{u_{Rej}\} \cos(\omega_j t) - \{u_{Imj}\} \sin(\omega_j t)) \quad (10)$$

Trajektorija rotora, kod slobodnih prigušenih vibracija, je spiralna i monotono se približava ishodištu fazne ravnine (slika 2). Ako je  $\delta_j=0$ , trajektorija je elipsa, a vibracije su neprigušene [35].



Slika 2. Trajektorije rotora u faznoj ravni kod podkritično prigušenih i neprigušenih vibracija

Kako je broj numeričkih algoritama za rješavanje kvadratnog problema svojstvenih vrijednosti (5) ograničen, kvadratni problem vrlo se često svodi na linearni problem koji odgovara sustavu diferencijalnih jednačbi prvog reda [35, 36]:

$$[A]\{\dot{x}\} + [B]\{x\} = \{X\} \quad (11)$$

gdje su:

$$[A] = \begin{bmatrix} [0] & [M] \\ [M] & [\Delta] \end{bmatrix} \quad [B] = \begin{bmatrix} -[M] & [0] \\ [0] & [K] \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$\{x\} = \begin{Bmatrix} \{\dot{q}\} \\ \{q\} \end{Bmatrix} \quad \{X\} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{F\} \end{Bmatrix}$$

Ako se rješenje slobodnih vibracija sustava pretpostavi u obliku:

$$\{x\} = \{y\} e^{\lambda t} \quad (13)$$

i, zatim, uvrsti u (11), proizlazi linearna matricna jednadžba za svojstvene vrijednosti i desne svojstvene vektore:

$$\begin{aligned} [\lambda[A]+[B] ]\{y\} &= \{0\} \\ [[E]-\lambda ]\{y\} &= \{0\} \end{aligned} \tag{14}$$

gdje je  $[E]=-[B][A]^{-1}$ . Da bi sustav (14) imao netrivialno rješenje, determinanta sustava mora biti jednaka nuli:

$$|[E]-\lambda| = 0 \tag{15}$$

Svojstvene vrijednosti  $\lambda_i$  dobiju se primjenom neke od numeričkih metoda iz uvjeta (15) ili (5), a zatim se, njihovim uvrštavanjem u sustav linearnih algebarskih jednadžbi (14) ili (4), dobiju vrijednosti svojstvenih vektora  $\{y_i\}$ , odnosno  $\{u_i\}$ .

Kako je računalni program razvijen primjenom Scilab © INRIA-ENPC programskog paketa, za izračunavanje svojstvenih vrijednosti primijenjena je postojeća rutina unutar Scilab-a, koja se temelji na rutinama DGEEV i ZGEEV numeričkog paketa LAPACK [33, 34].

#### 4.1.2 Prisilne vibracije

Uzbude dinamičkog sustava (1) mogu se podijeliti, u determinističnom području, u tri skupine: statičke, periodičke i tranzijentne uzbude. Odziv sustava uslijed statičkih sila  $\{F_s\}$  dobiva se rješavanjem sustava linearnih jednadžbi:

$$[K]\{q_s\}=\{F_s\} \quad \rightarrow \quad \{q_s\}=[K]^{-1}\{F_s\} \tag{16}$$

gdje je  $\{q_s\}$  rezultirajući vektor statičkih pomaka.

Periodičku uzбудu, kružne frekvencije  $\Omega$ , gotovo je uvijek moguće razviti u Fourierov red:

$$\begin{aligned} F(t) &= F_0 + F_{C1} \cos(\Omega t) + F_{C2} \cos(2\Omega t) + \dots \\ &\quad \dots + F_{S1} \sin(\Omega t) + F_{S2} \sin(2\Omega t) + \dots \\ F(t) &= F_0 + F_1 \cos(\Omega t - \phi_1) + F_2 \cos(2\Omega t - \phi_2) + \dots \end{aligned} \quad (17)$$

Rješenje prisilnih vibracija sustava s periodičkom uzbuđom dobiva se superpozicijom rješenja pojedinačnih harmonijskih članova periodičke uzbuđe i rješenja statičkog dijela periodičke uzbuđe  $F_0$ .

Ukupna harmonijska uzbuđa zbroj je svih harmonijskih uzbuđa:

$$\{F_H\} = \sum_{j=1}^m \left( \{F_C\}_j \cos(\Omega_j t) + \{F_S\}_j \sin(\Omega_j t) \right) \quad (18)$$

gdje indeks  $j$  označava redni broj harmonijske uzbuđe, dok su  $\{F_C\}_j$  i  $\{F_S\}_j$  njene amplitude, a  $\Omega_j$  je njena kružna frekvencija. Odziv sustava (1) na harmonijsku uzbuđu (18) je oblika:

$$\{q_H\} = \sum_{j=1}^m \left( \{q_C\}_j \cos(\Omega_j t) + \{q_S\}_j \sin(\Omega_j t) \right) \quad (19)$$

gdje su koeficijenti  $\{q_C\}_j$  i  $\{q_S\}_j$  dani s:

$$\begin{Bmatrix} \{q_C\}_j \\ \{q_S\}_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [K] - \Omega_j^2 [M] & \Omega_j [\Delta] \\ -\Omega_j [\Delta] & [K] - \Omega_j^2 [M] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{F_C\}_j \\ \{F_S\}_j \end{Bmatrix} \quad (20)$$

Odziv sustava uslijed tranzijentne uzbuđe moguće je dobiti numeričkom integracijom sustava jednadžbi gibanja (1), no tijekom ovog istraživanja odziv sustava uslijed tranzijentne uzbuđe nije razmatran.

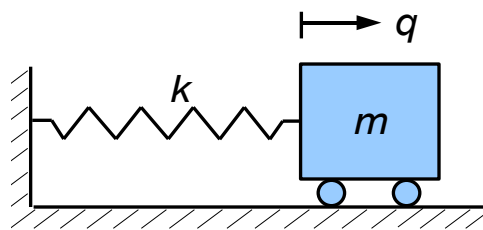
### 4.1.3 Analiza i tumačenje rezultata

Da bi se mogli donijeti ispravni zaključci, rezultate analize slobodnih i prisilnih vibracija treba znati pravilno protumačiti. Pri dinačkoj analizi nekog stroja ili postrojenja upotrebljavaju se ustaljeni pojmovi za opis vibracijskog ponašanja. Radi boljeg razumijevanja daljnjeg teksta, u ovom poglavlju objašnjeni su pojmovi, upotrijebljeni u uvom radu, na primjeru vibracijskog sustava s jednim stupnjem slobode gibanja [39, 40, 41].

Vibracijski sustav s jednim stupnjem slobode gibanja je najjednostavniji model kojim se može riješiti velik broj praktičnih vibracijskih problema. Da bi se takvim jednostavnim modelom dobro opisalo stvarno ponašanje sustava, potrebno je, naravno, prije toga razjasniti i razumijeti fizikalnu stranu problema.

#### 4.1.3.1 Slobodne neprigušene vibracije

Slobodne vibracije su vibracije koje se odvijaju bez vanjske uzbuđe. Sposobnost samostalnog vibriranja imaju sustavi koji se sastoje od inercijskih i elastičnih elemenata. Najjednostavniji takav sustav predložen je na slici 3.



Slika 3. Neprigušeni vibracijski sustav s jednim stupnjem slobode gibanja

Položaj sustava u jednom trenutku određen je koordinatom  $q$ , a jednačba gibanja sustava glasi:

$$m \ddot{q} + k q = 0 \quad (21)$$

Kružna vlastita frekvencija neprigušenog sustava s jednim stupnjem slobode gibanja jest:

$$\omega = \sqrt{k/m} \quad (22)$$

a opće rješenje jednadžbe gibanja, koje predstavlja rješenje slobodnih neprigušenih vibracija, ima oblik:

$$q(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) = C \cos(\omega t - \varphi) \quad (23)$$

gdje su:  $C = \sqrt{A^2 + B^2}$  - amplituda vibracija  
 $\varphi = \arctan(B/A)$  - fazni pomak

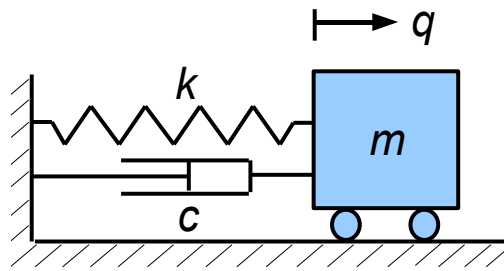
Integracijske konstante  $A$ ,  $B$  odnosno  $C$ ,  $\varphi$  ovise o početnim uvjetima:

$$A = q_0 \quad B = \frac{\dot{q}_0}{\omega} \quad (24)$$

Vibracije su, dakle, harmonijske i neprigušene (amplituda se ne smanjuje s vremenom) s frekvencijom  $f = \omega/2\pi$  odnosno periodom vibriranja  $T = 1/f = 2\pi/\omega$ .

#### 4.1.3.2 Slobodne prigušene vibracije

Kod stvarnih vibracijskih sustava disipacija energije uvijek je prisutna, odnosno vibracije su prigušene. Najjednostavniji prigušeni sustav s viskoznim prigušivačem predložen je na slici 4.



Slika 4. Prigušeni vibracijski sustav s jednim stupnjem slobode gibanja

U viskoznom prigušivaču sila otpora razmjerna je brzini, pa jednadžba gibanja sustava glasi:

$$\begin{aligned} m\ddot{q} + c\dot{q} + kq &= 0 \\ \ddot{q} + 2\delta\dot{q} + \omega^2q &= 0 \\ \ddot{q} + 2\zeta\omega\dot{q} + \omega^2q &= 0 \end{aligned} \quad (25)$$

gdje su:

$$\begin{aligned} \omega &= \sqrt{k/m} && \text{- kružna vlastita frekvencija} \\ \delta &= c/2m = \zeta\omega && \text{- koeficijent prigušenja} \\ \zeta &= \delta/\omega = c/c_{kr} = c/2m\omega && \text{- bezdimenzijsko prigušenje} \\ c_{kr} &= 2m\omega = 2\sqrt{mk} && \text{- kritično viskozno prigušenje} \end{aligned}$$

Ako se rješenje pretpostavi u obliku  $q = u e^{\lambda t}$  i zatim se uvrsti u jednadžbu (25), dobiva se kvadratna jednadžba:

$$\begin{aligned} m\lambda^2 + c\lambda + k &= 0 \\ \lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega^2 &= 0 \end{aligned} \quad (26)$$

Iz te jednadžbe proizlaze svojstvene vrijednosti  $\lambda_{1,2}$ :

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega^2} = \omega\zeta \pm \omega\sqrt{\zeta^2 - 1} \quad (27)$$

Kod slabog prigušenja ( $c < c_{kr}$ ,  $\delta < \omega$ ,  $\zeta < 1$ ) svojstvene vrijednosti su kompleksno konjugirane:

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm i \omega_k = -\delta \pm i \sqrt{\omega^2 - \delta^2} = \omega \zeta \pm i \omega \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (28)$$

gdje je:

$$\omega_k = \omega \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (29)$$

vlastita kružna frekvencija prigušenog sustava. Rješenje sustava, kod slabog prigušenja, jest:

$$\begin{aligned} q(t) &= e^{-\delta t} (A \cos(\omega_k t) + B \sin(\omega_k t)) \\ q(t) &= C e^{-\delta t} \cos(\omega_k t - \varphi) \end{aligned} \quad (30)$$

što predstavlja prigušene harmonijske vibracije kod kojih se amplituda vibracija s vremenom smanjuje.

#### 4.1.3.3 Prisilne vibracije

Prisilne vibracije posljedica su vanjske uzbuđe koja je najčešće periodička, odnosno harmonijska:

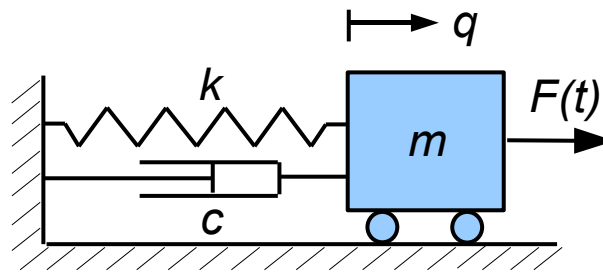
$$F(t) = F_0 \cos(\Omega t) \quad (31)$$

Jednadžba gibanja sustava na slici 5. glasi:

$$\begin{aligned} m \ddot{q} + c \dot{q} + k q &= F_0 \cos(\Omega t) \\ \ddot{q} + 2 \delta \dot{q} + \omega^2 q &= f_0 \cos(\Omega t) \end{aligned} \quad (32)$$

gdje je  $f_0 = F_0/m$ .





Slika 5. Prigušeni vibracijski sustav s kinetičkom periodičkom uzbuđom

Opće rješenje jednadžbe gibanja (32) zbroj je homogenog i partikulanog rješenja:

$$\begin{aligned} q(t) &= q_h(t) + q_p(t) \\ q(t) &= C e^{-\delta t} \cos(\omega_k t - \varphi) + Q \cos(\Omega t - \epsilon) \end{aligned} \quad (33)$$

gdje homogeno rješenje predstavlja slobodnu komponentu vibracija, a partikularno rješenje prisilnu komponentu vibracija. Konstante  $C$  i  $\varphi$  dobivaju se iz početnih uvjeta, dok su amplituda prisilnih vibracija  $Q$  i fazni pomak spram uzbuđe  $\epsilon$  određeni jednadžbama:

$$\begin{aligned} Q &= \frac{F_0}{c} \frac{1}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + (2\zeta\eta)^2}} = Q_0 \frac{1}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + (2\zeta\eta)^2}} \\ \epsilon &= \arctan\left(\frac{2\zeta\eta}{1-\eta^2}\right) \end{aligned} \quad (34)$$

gdje su:  $Q_0 = F_0/c$  - pomak mase uslijed statičke sile  $F_0$

$\eta = \Omega/\omega$  - omjer uzbuđne i kružne frekvencije sustava

$\zeta = \delta/\omega$  - bezdimenzijsko prigušenje

Amplituda slobodne komponente vibracija s vremenom se smanjuje i postaje zanemarivo malena, dok amplituda prisilnih vibracija ostaje neizmjenjena.

Ustaljeno rješenje prisilnih vibracija uslijed harmonijske uzbude su harmonijske vibracije jednake frekvencije kao i uzbuda, a spram uzbude kasne za kut  $\varepsilon$ .

Aao je uzbuda posljedica neuravotežene inercijske sile (npr. kod neuravnoteženog rotora), onda je amplituda uzbude  $F_0 = m_u e \Omega^2$ , a uzbudna sila je  $F_0 = m_u e \Omega^2 \sin(\Omega t)$ . U tom su slučaju amplituda i fazni kut zaostajanja vibracija:

$$Q = \frac{m_u e}{m} \frac{\eta^2}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + (2\zeta\eta)^2}} = e_{ekv} \frac{\eta^2}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + (2\zeta\eta)^2}} \quad (35)$$

$$\varepsilon = \arctan\left(\frac{2\zeta\eta}{1-\eta^2}\right)$$

gdje  $e_{ekv}$  predstavlja ekvivalentni ekscentricitet ( $F_0 = m_u e \Omega^2 = m e_{ekv} \Omega^2$ ):

$$e_{ekv} = m_u e / m \quad (36)$$

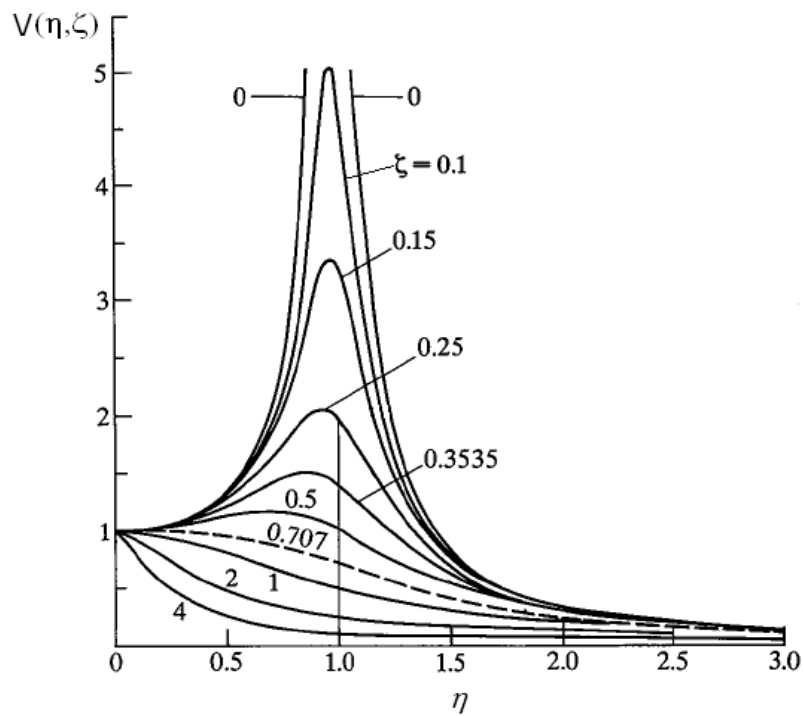
Grafovi funkcije povećanja amplitude uslijed harmonijske uzbude:

$$V(\eta, \zeta) = \frac{Q}{Q_0} = \frac{1}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + (2\zeta\eta)^2}} \quad (37)$$

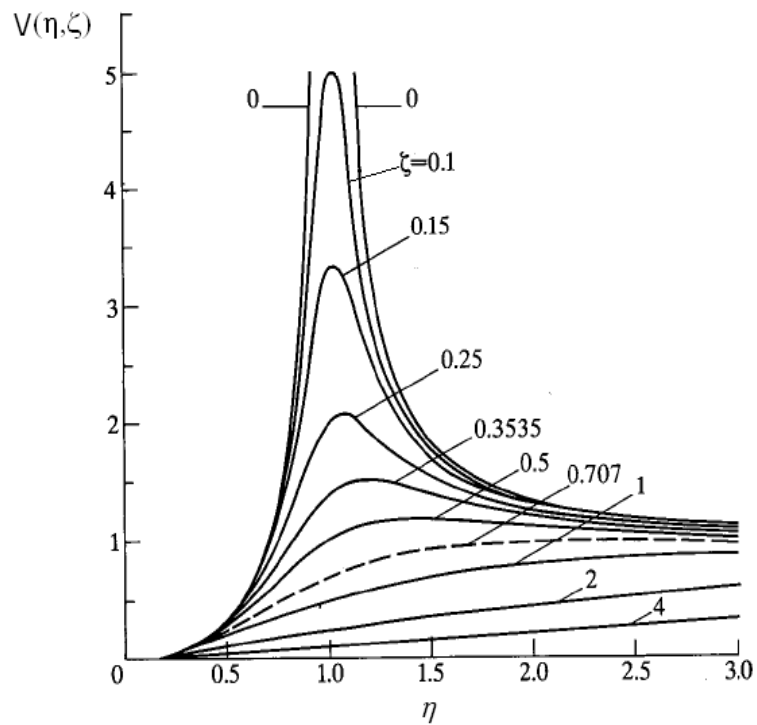
odnosno uslijed neuravotežene inercijske sile:

$$V(\eta, \zeta) = \frac{Q}{e_{ekv}} = \frac{\eta^2}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + (2\zeta\eta)^2}} \quad (38)$$

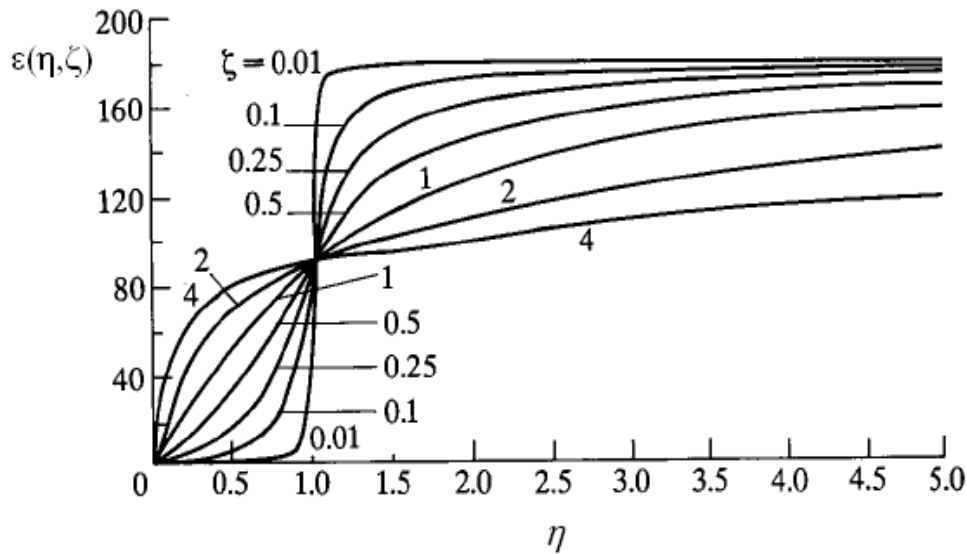
predočeni su na slikama 6. i 7. Grafovi faznog kuta  $\varepsilon$  predočeni su na slici 8.



Slika 6. Funkcija povećanja amplitude uslijed harmonijske uzbude



Slika 7. Funkcija povećanja amplitude uslijed neuravnotežene inercijske sile



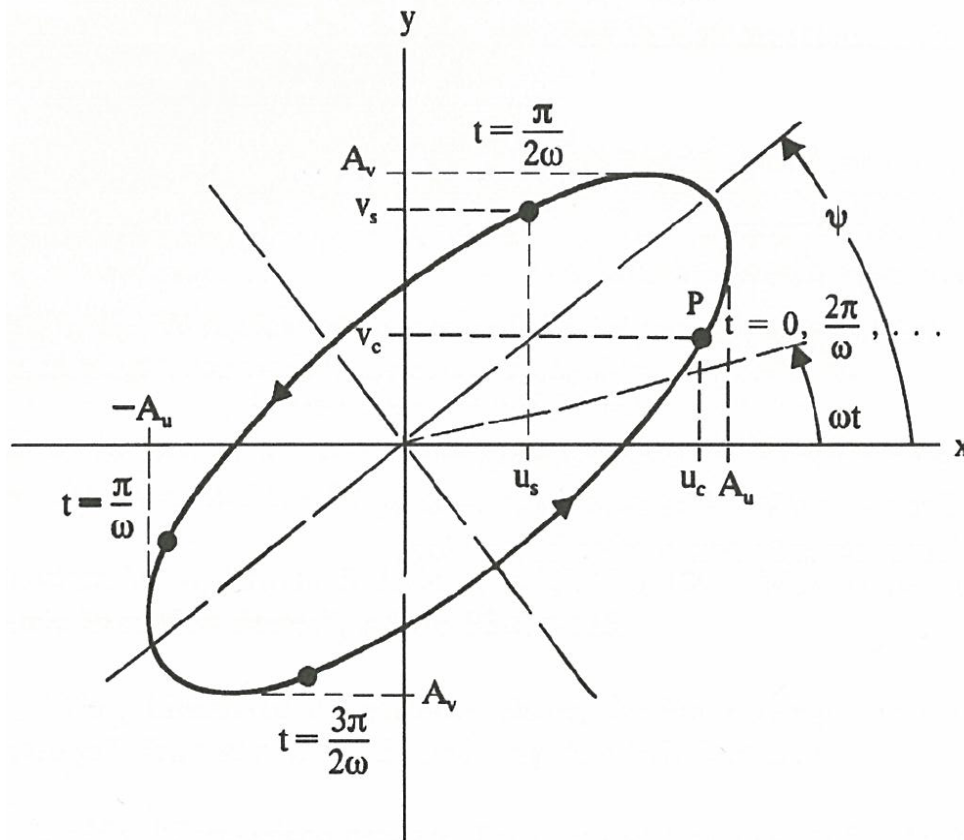
Slika 8. Fazni kut zaostajanja prisilnih vibracija za uzbuđom

#### 4.1.4 Kinematika gibanja rotora

Posebnost rotorskih sustava jest spregnutost vibracija u horizontalnom i vertikalnom smjeru uslijed giroskopskog efekta. Stoga je gibanje rotora, u ravnini okomitoj na os vrtnje, u općem slučaju eliptično. Ako se pretpostavi harmonijsko gibanje rotora s kružnom frekvencijom  $\omega$  (slika 9.), onda su komponente pomaka  $u$  i  $v$  u smjeru koordinatnih osi  $x$  i  $y$ :

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} u_c & u_s \\ v_c & v_s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A_u \cos(\omega t + \varphi_u) \\ A_v \cos(\omega t + \varphi_v) \end{Bmatrix} \quad (39)$$

Za točku  $P$  na rotoru kaže se da vibrira kružnom frekvencijom  $\omega$  i amplitudama  $A_u$  i  $A_v$  u horizontalnom, odnosno vertikalnom smjeru. Gibanje opisano jednađbom (38) naziva se harmonijsko eliptično gibanje. Parametri eliptičnog gibanja rotora, u općem su slučaju ovisni o brzini vrtnje rotora, pa se velika poluos  $a$ , mala poluos  $b$  i kut nagiba  $\psi$  eliptične trajektorije mijenjaju s kružnom frekvencijom. Ako je  $\varphi_u = \varphi_v$ , odnosno ako su  $u$  i  $v$  u fazi, trajektorija rotora je dio pravca s nagibom  $\psi$  spram osi  $x$ .



Slika 9. Eliptično gibanje rotora u ravnini okomitoj na os vrtnje

Ako su  $u_s = -v_c$  i  $u_c = v_s$  onda harmonijsko gibanje, u vertikalnom smjeru, zaostaje za  $\pi/2$  za gibanjem u horizontalnom smjeru i gibanje je kružno, istosmjerno vrtnji rotora. Slično, ako je  $u_s = v_c$  i  $u_c = -v_s$  onda harmonijsko gibanje, u horizontalnom smjeru, zaostaje za  $\pi/2$  za gibanjem u vertikalnom smjeru i gibanje je kružno, protusmjerno vrtnji rotora.

Eliptično gibanje rotora može se prikazati, u kompleksnoj ravnini, vektorom pomaka čija je realna os u smjeru osi  $x$ , a imaginarna u smjeru osi  $y$ . Kompleksni vektor pomaka može se tada napisati u obliku:

$$\begin{aligned} w &= u + iv \\ w &= u_c \cos(\omega t) + u_s \sin(\omega t) + i v_c \cos(\omega t) + i v_s \sin(\omega t) \end{aligned} \quad (40)$$

Nakon uvrštavanja jednakosti:

$$\cos(\omega t) = \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2} \quad \sin(\omega t) = \frac{-e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2i} \quad (41)$$

u (40) dobiva se:

$$w = w_f e^{i\omega t} + w_b e^{-i\omega t} \quad (42)$$

gdje prvi član u jednadžbi (42) predstavlja kružne vibracije istosmjerne vrtnji, a drugi kružne vibracije protusmjerne vrtnji (slika 10). Kompleksne amplitude istosmjernih i protusmjernih vibracija jesu:

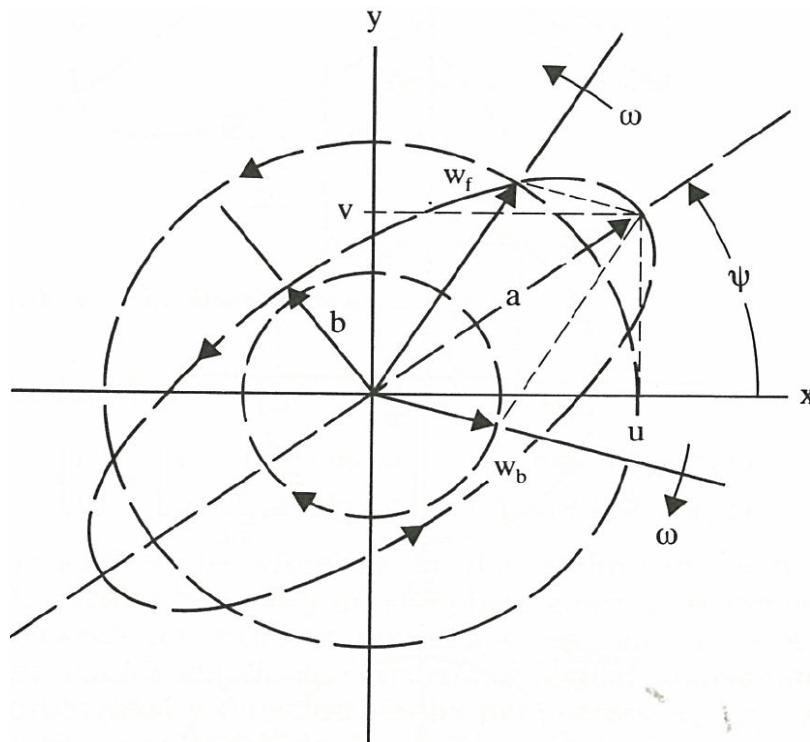
$$\begin{aligned} w_f &= \frac{1}{2} [(u_c + v_s) + i(-u_s + v_c)] = |w_f| e^{i\varphi_f} \\ w_b &= \frac{1}{2} [(u_c - v_s) + i(u_s + v_c)] = |w_b| e^{i\varphi_b} \end{aligned} \quad (43)$$

dok su realne amplitude vibracija i njihovi fazni kutovi:

$$\begin{aligned} |w_f| &= \frac{1}{2} \sqrt{(u_c + v_s)^2 + (-u_s + v_c)^2} & \varphi_f &= \arctan\left(\frac{-u_s + v_c}{u_c + v_s}\right) \\ |w_b| &= \frac{1}{2} \sqrt{(u_c - v_s)^2 + (u_s + v_c)^2} & \varphi_b &= \arctan\left(\frac{u_s + v_c}{u_c - v_s}\right) \end{aligned} \quad (44)$$

Jednadžba (41) pokazuje da se svako eliptično gibanje rotora može rastaviti na zbroj dvaju kružnih gibanja od kojih je jedno istosmjerno, a drugo protusmjerno vrtnji rotora (slika 10). Istosmjerna i protusmjerna komponenta vibracija su opisane sljedećim jednadžbama:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} u_f \\ v_f \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} u_c + v_s & u_s - v_c \\ -u_s + v_c & u_c + v_s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} u_b \\ v_b \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} u_c - v_s & u_s + v_c \\ u_s + v_c & -u_c + v_s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (45)$$



Slika 10. Eliptičko gibanje rotora rastavljeno na istosmjernu i protusmjernu komponentu vibracija

Velika i mala poluos eliptične putanje rotora i kut zakreta velike poluosi, spram osi  $x$ , dani su s:

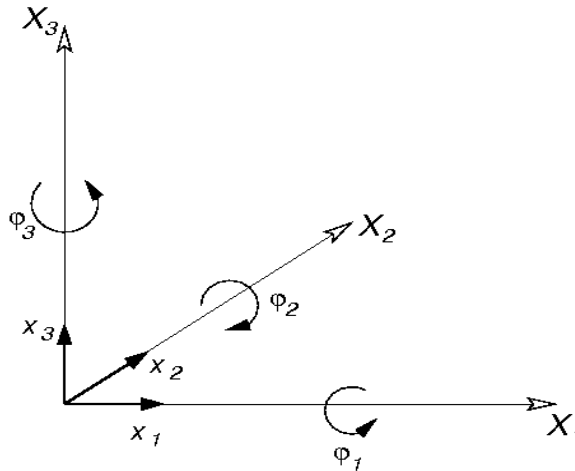
$$a = |w_f| + |w_b| \quad b = |w_f| - |w_b| \quad 2\psi = \varphi_f + \varphi_b \quad (46)$$

Pozitivna vrijednost male osi elipse znači da prevladava istosmjerna komponenta vibracija, dok njena negativna vrijednost znači da prevladava protusmjerna komponenta.

## 4.2 Koordinatni sustav i mehanički modeli sastavnica

Odabran je desni koordinatni sustav  $X_1, X_2, X_3$  (slika 11). Pozitivni pomaci  $x_1, x_2, x_3$  ostvaruju se u smjerovima koordinatnih osi, a kutovi zakreta  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ , oko koordinatnih osi, u skladu su s pravilom desne ruke.

Koordinatna os  $X_1$  usmjerena je u smjeru osi vrtnje, dok su koordinatne osi  $X_2$  i  $X_3$  usmjerene okomito na os vrtnje vratila, u horizontalnom i vertikalnom smjeru.



Slika 11. Orijehtacija globalnog koordinatnog sustava

Vektor pomaka, u globalnom koordinatnom sustavu, jest:

$$\{q\}^T = \{x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad \varphi_1 \quad \varphi_2 \quad \varphi_3\} \quad (47)$$

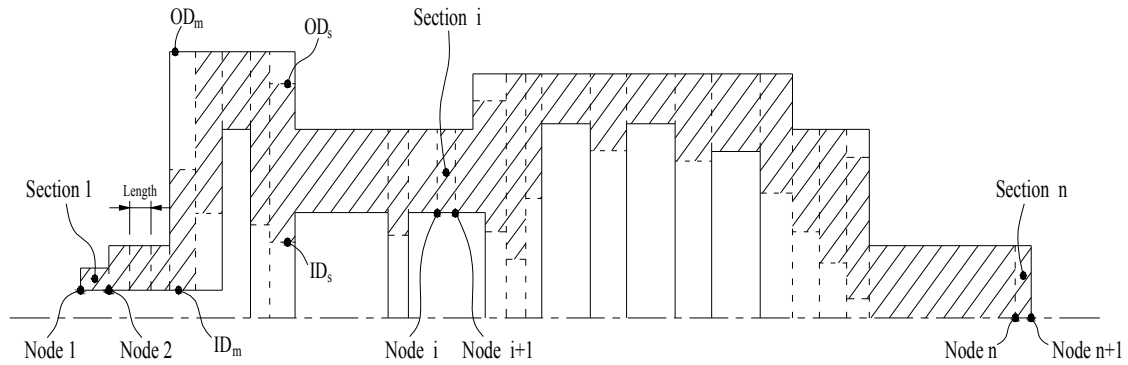
gdje su:

- $x_1$  - horizontalni pomak u smjeru osi vratila
- $x_2$  - horizontalni pomak okomit na os vratila
- $x_3$  - vertikalni pomak okomit na os vratila
- $\varphi_1$  - kut zakreta oko osi  $X_1$  (u smjeru vrtnje vratila)
- $\varphi_2$  - kut zakreta oko osi  $X_2$
- $\varphi_3$  - kut zakreta oko osi  $X_3$

Rotorski sustavi, u pravilu, se sastoje od vratila, krutih i elastičnih diskova, ležajeva, prigušivača, spojki i oslonaca. Matematički modeli sastavnica upotrebljanih u ovom radu dani su u sljedećim poglavljima.



## 4.2.1 Vratilo



Slika 12. Model vratila

Raspodjela mase i krutosti vratila, u pravilu, je izrazito nepravilna (slika 12). U postupku modeliranja masa vratila pripisuje se čvorovima povezanim elastičnim segmentima vratila koji su opisani duljinom ( $L$ ), te vanjskim ( $OD_m$  - vanjski promjer konture rotora,  $OD_s$  - vanjski promjer toka sile za izračun krutosti) i unutarnjim promjerima ( $ID_m$  - unutarnji promjer konture rotora,  $ID_s$  - unutarnji promjer toka sile za izračun krutosti). Broj čvorova, potrebnih za predočavanje stvarnog rotora, ovisi o broju traženih vlastitih frekvencija te o složenosti geometrije rotora.

Broj mogućih izračunatih vlastitih frekvencija jednak je umnošku broja čvorova i stupnjeva slobode gibanja po čvoru. Kako točnost izračunatih vlastitih frekvencija pada s rednim brojem forme vibriranja. Preporuča se da broj čvorova bude najmanje četverostruko veći od broja traženih vlastitih frekvencija. Čvorovi, također, moraju biti odabrani tako da se kontura rotora može dovoljno točno opisati, ali i da se podudaraju sa smještajima različitih dodatnih masa, kao što su turbinske ili kompresorske lopatice, toplinski štitovi, cilindri za uravnotežavanje, spojke itd. Osim toga, čvorovi moraju biti smješteni u osima kliznih ležajeva, brtvi i na mjestima mjerenja radijalnih vibracija.

Ako je rotor potrebno što vjernije modelirati, ili je geometriju rotora teško opisati osnovnim grednim konačnim elementima, rotor se modelira s nekim od komercijalnih računalnih programa s konačnim elementima, pa se na temelju dobivenih rezultata napravi istovjetni, pojednostavljeni, model rotora koji ima jednaka globalna elastična i inercijska svojstva. Sličan pristup primijenjen je u poglavlju 5.1 gdje je opisano modeliranje rotora plinske turbine.

Kod podjele rotora na čvorove i modeliranja grednim konačnim elementima, matrica masa rotora može biti dijagonalna ili puna [35 - 38]. Kod dijagonalne matrice masa, primijenjene u ovom radu, vratilo je modelirano s  $N$  krutih diskova koji su povezani elastičnim segmentima vratila bez masa. Pretpostavlja se da deformacije rotora nastaju samo između dva diska uslijed elastičnosti segmenata vratila, te da  $i$ -ti kruti disk ima masu  $m_i$ , dijametralni moment tromosti  $I_{di}$ , polarni moment tromosti  $I_{pi}$ , i šest stupnjeva slobode gibanja.

Također se pretpostavlja da je segment vratila nepromjenjivog poprečnog presjeka osne krutosti  $EA_i$ , torzijske krutosti  $GI_{pi}$ , fleksijske krutosti  $EI_i$  i efektivne smične krutosti  $\kappa GA_i$  (Timoshenkova teorija savijanja grede) [35, 36].

Ostali konstrukcijski dijelovi, pričvršćeni na rotor, za koje se može pretpostaviti da su kruti i da njihova elastična svojstva ne utječu na dinamička svojstva rotora (kao što su lopatice, toplinski štitovi, cilindri za uravnotežavanje, spojke itd.), modeliraju se kao dodatne mase u čvorovima modela rotora.

Jednadžba gibanja segmenta vratila (konačnog elementa) kod fleksijskih vibracija glasi:

$$\begin{bmatrix} [m_i] & [0] \\ [0] & [m_j] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}_i \\ \ddot{q}_j \end{Bmatrix} + \Omega \begin{bmatrix} [g_i] & [0] \\ [0] & [g_j] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{q}_i \\ \dot{q}_j \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [k_{i,i}^i] & [k_{i,j}^i] \\ [k_{j,i}^i] & [k_{j,j}^i] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_i \\ q_j \end{Bmatrix} = \{F_i\} \quad (48)$$

gdje su:  $[m_i], [m_j]$  - matrice masa  $i$ -tog i  $j$ -tog diska

- $[g_i], [g_j]$  - giroskopska matrica  $i$ -tog i  $j$ -tog diska  
 $[k_{n,m}^i]$  - matrice krutosti  $i$ -tog segmenta vratila  
 $\{q_i\}, \{q_j\}$  - vektori pomaka  $i$ -tog i  $j$ -tog čvora  
 $\{F_i\}, \{F_j\}$  - vanjske sile u  $i$ -tom i  $j$ -tom čvoru  
 $\Omega$  - kutna brzina vrtnje

Matrice masa i giroskopskog efekta glase:

$$[m_i]=[m_j]=\begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_d \end{bmatrix} \quad [g_i]=[g_j]=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_p \\ 0 & 0 & -I_p & 0 \end{bmatrix} \quad (49)$$

Matrica krutosti  $i$ -tog segmenta vratila [35] jest:

$$[k_{i,i}^i]=\frac{EI_i}{L_i^3(1+12\varepsilon_i)}\begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & 6L_i \\ 0 & 12 & -6L_i & 0 \\ 0 & -6L_i & 4L_i^2(1+3\varepsilon_i) & 0 \\ 6L_i & 0 & 0 & 4L_i^2(1+3\varepsilon_i) \end{bmatrix}$$

$$[k_{i,i+1}^i]=[k_{i+1,i}^i]^T=\frac{EI_i}{L_i^3(1+12\varepsilon_i)}\begin{bmatrix} -12 & 0 & 0 & 6L_i \\ 0 & -12 & -6L_i & 0 \\ 0 & 6L_i & 2L_i^2(1-6\varepsilon_i) & 0 \\ -6L_i & 0 & 0 & 2L_i^2(1-6\varepsilon_i) \end{bmatrix} \quad (50)$$

$$[k_{i+1,i+1}^i]=\frac{EI_i}{L_i^3(1+12\varepsilon_i)}\begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & -6L_i \\ 0 & 12 & 6L_i & 0 \\ 0 & 6L_i & 4L_i^2(1+3\varepsilon_i) & 0 \\ -6L_i & 0 & 0 & 4L_i^2(1+3\varepsilon_i) \end{bmatrix}$$

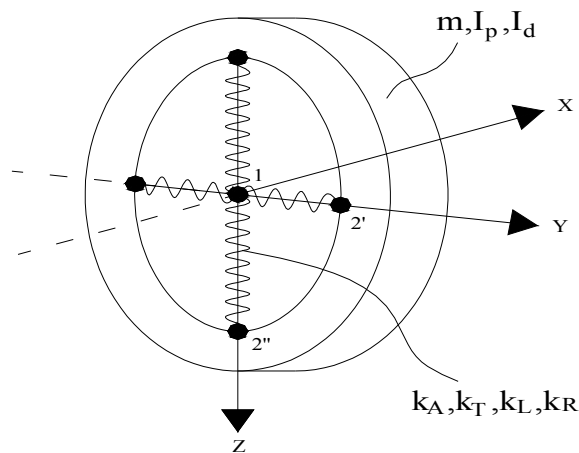
gdje je  $\varepsilon_i = EI_i / (\kappa GA_i L_i)$  odnos fleksijske i efektivne smične krutosti.

Ako se računa sa svih šest stupnjeva slobode po čvoru, globalna jednažba gibanja modela vratila s  $N$  diskova (čvorova) glasi:

$$[M]\{\ddot{q}\} + \Omega[G]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = \{F\} \quad (51)$$

- gdje su:
- $[M]$  - dijagonalna matrica mase ( $6N \times 6N$ )
  - $[G]$  - asimetrična giroskopska matrica ( $6N \times 6N$ )
  - $[K]$  - simetrična matrica krutosti ( $6N \times 6N$ )
  - $\{q\}$  - vektor pomaka ( $6N \times 1$ )
  - $\{F\}$  - vektor vanjskih sila ( $6N \times 1$ )
  - $\Omega$  - kutna brzina vrtnje

#### 4.2.2 Elastični disk



Slika 13. Model elastičnog diska

Zupčanike i diskove turbina i kompresora uobičajeno je modelirati kao krute diskove, gdje je pretpostavljeno da je debljina diska zanemariva spram duljine cijelog rotorskog sustava. Elastični disk primjenjuje se kad elastičnost samog diska značajnije utječe na dinamičko ponašanje rotorskog sustava. Jedine forme vibriranja diska koje se mogu uzбудiti fleksivnim i torzijkim načinima vibriranja rotora jesu forme vibriranja s jednom čvornom linijom po promjeru diska. Takvi načini vibriranja mogu se simulirati pojednostavljenim modelom elastičnog diska na slici 13 [35].

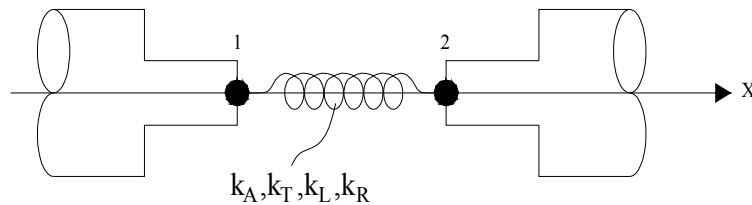
Elastični disk je element s dva čvora i 12 stupnjeva slobode gibanja. Ako su  $m$ ,  $I_p$  i  $I_d$  njegova masa, polarni moment tromosti i dijametralni moment tromosti, a  $k_A$ ,  $k_T$ ,  $k_L$  i  $k_R$  osna, torzijska, lateralna i zakretna krutost, onda matrice mase, giroskopskog efekta i krutosti elastičnog diska glase:

$$\begin{aligned}
 [M] &= \begin{bmatrix} [0] & [0] \\ [0] & [m_d] \end{bmatrix} & [m_d] &= \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_d \end{bmatrix} \\
 [G] &= \begin{bmatrix} [0] & [0] \\ [0] & [g_d] \end{bmatrix} & [g_d] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -I_p & 0 \end{bmatrix} & (52) \\
 [K] &= \begin{bmatrix} [k_d] & -[k_d] \\ -[k_d] & [k_d] \end{bmatrix} & [k_d] &= \begin{bmatrix} k_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{66} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

gdje su  $k_{11}=k_A$ ,  $k_{22}=k_{33}=k_L$ ,  $k_{44}=k_T$ ,  $k_{55}=k_{66}=k_R$ .

Kako prvi čvor elastičnog diska nema mase, onda se taj čvor mora spojiti kinetičkom vezom s vratilom da globalna matrica mase ne bi bila singularna.

## 4.2.3 Elastična spojka

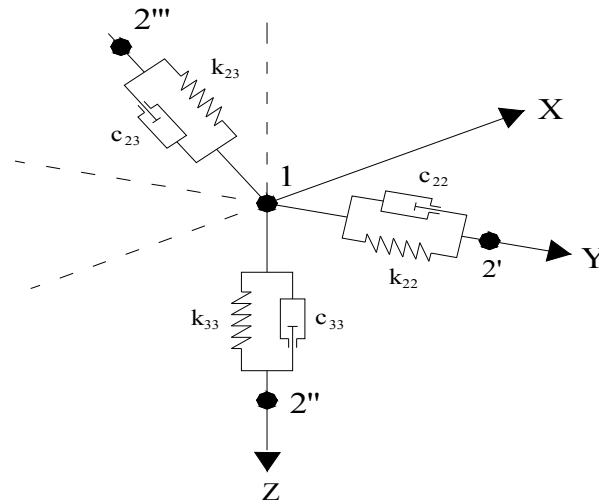


Slika 14. Model elastične spojke

Kada su dva kolinearna vratila povezana spojkom, često se spojka može modelirati kao elastični element s osnom, lateralnom, kutnom i torzijskom krutošću. Krute prirubničke spojke sastavni su dio vratila i modelirane su grednim konačnim elementima. Za mehaničke dijelove elastičnih spojki, također, se pretpostavlja da su sastavni dio vratila, dok se elastični spoj modelira pomoću opruge [35].

Elastična spojka element je s dva čvora i 12 stupnjeva slobode gibanja modelirana kao opruga koja nema masu. Matrice mase i giroskopskog efekta su nulmatrice dok je matrica krutosti jednaka matrici krutosti elastičnog diska.

## 4.2.4 Radijalni ležaj



Slika 15. Model radijalnog ležaja

Radijalni ležajevi imaju ključnu ulogu u određivanju vibracijskih svojstava rotorskih sustava. Krutost i prigušenje uljnog filma utječu na kritične brzine kao i na stabilnost rotorskog sustava. Modeliranje radijalnih ležajeva je stoga presudno za točnost vibracijskih izračuna i predviđanje ponašanja rotorskog sustava.

Određivanje dinamičkih svojstava uljnog filma nije nimalo jednostavno budući da treba riješiti hidrodinamičku jednadžbu koja je nelinearna diferencijalna jednadžba drugog reda. Međutim, postoje, raspoloživi, programski paketi koji služe za izračune kliznih ležajeva [46]. Dinamička svojstva uljnog filma opisuju se s osam lineariziranih parametara krutosti i prigušenja koji proizlaze iz Reynoldsove hidrodinamičke jednadžbe [35-38, 42-47].

Radijalni ležaj je element s dva čvora i četiri stupnja slobode gibanja (dva lateralna pomaka po čvoru). Radijalni ležaj modeliran je kao opruga i prugušivač bez mase. Matrice mase i giroskopskog efekta su nulmatrice dok matrice krutosti i prigušenja glase:

$$\begin{aligned}
 [K] &= \begin{bmatrix} [k_b] & -[k_b] \\ -[k_b] & [k_b] \end{bmatrix} & [k_b] &= \begin{bmatrix} k_{22} & k_{23} \\ k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \\
 [C] &= \begin{bmatrix} [c_b] & -[c_b] \\ -[c_b] & [c_b] \end{bmatrix} & [c_b] &= \begin{bmatrix} c_{22} & c_{23} \\ c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{53}$$

gdje su:

$k_{22}, k_{23}, k_{32}, k_{33}$  - parametri krutosti uljnog filma

$c_{22}, c_{23}, c_{32}, c_{33}$  - parametri prigušenja uljnog filma.

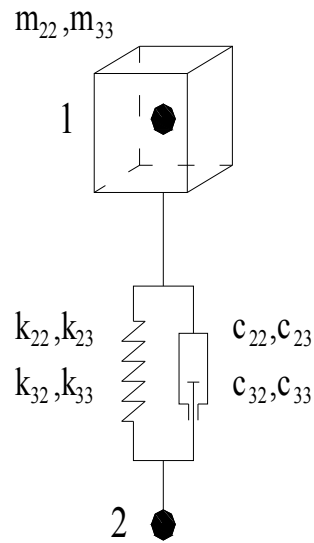
#### 4.2.5 Oslonac ležaja

Vibracijska svojstva oslonaca ležaja imaju veliki utjecaj na cjelokupno vibracijsko ponašanje sustava. Vibracijska svojstva oslonaca zajedno s koeficijentima elastičnosti i prigušenja uljnog filma utječu na ukupnu impendanciju rotorskog sustava. Izračuni odziva sustava s kruto modeliranim osloncima ležaja daju kritične brzine vrtnje rotora veće od stvarnih.

Najčešće primjenjivana metoda, u dinamici rotora, jest modeliranje oslonaca s elastičnim i prigušnim elementom čija su krutost i prigušenje nepromjenjivi u cijelom području brzina vrtnje [4, 5, 35-38, 42, 43]. Krutost oslonca izračunava se na temelju statičkog pomaka ležaja uslijed nametnute sile (pokusom ili izračunom) dok se prigušenje procjenjuje na temelju mjerenja odziva i iskustva.

Oslonac ležaja je element s dva čvora i četiri stupnja slobode gibanja, modeliran kao jednostavan vibracijski sustav (slika 16).





Slika 16. Model oslonca radijalnog ležaja

Matrice mase, krutosti i prigušenja jesu:

$$\begin{aligned}
 [M] &= \begin{bmatrix} [m_s] & [0] \\ [0] & [0] \end{bmatrix} & [m_s] &= \begin{bmatrix} m_2 & 0 \\ 0 & m_3 \end{bmatrix} \\
 [K] &= \begin{bmatrix} [k_s] & -[k_s] \\ -[k_s] & [k_s] \end{bmatrix} & [k_s] &= \begin{bmatrix} k_{22} & k_{23} \\ k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \\
 [C] &= \begin{bmatrix} [c_s] & -[c_s] \\ -[c_s] & [c_s] \end{bmatrix} & [c_s] &= \begin{bmatrix} c_{22} & c_{23} \\ c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{54}$$

gdje su:

- $m_2, m_3$  - masa oslonca
- $k_{22}, k_{23}, k_{32}, k_{33}$  - parametri krutosti oslonca
- $c_{22}, c_{23}, c_{32}, c_{33}$  - parametri prigušenja oslonca.

Kako drugi čvor oslonca ležaja nema mase, to on mora biti spojen kinetičkom vezom ili s nekim drugim čvorom koji ima masu ili s podlogom, da globalna matrica inercije ne bi bila singularna.

### 4.2.6 Opći oslonac ležaja

Opći oslonac ležaja je element s dva čvora i dvanaest stupnjeva slobode gibanja. Taj se element rabi za modeliranje oslonaca koji imaju pored fleksijskih i druge stupnjeve slobode gibanja. Petpostavljeno je da su međusobno kinetički povezani samo lateralni pomaci.

Matrice mase, krutosti i prigušenja općeg oslonca jesu:

$$\begin{aligned}
 [M] &= \begin{bmatrix} [m_s] & [0] \\ [0] & [0] \end{bmatrix} & [m_s] &= \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_d \end{bmatrix} \\
 [K] &= \begin{bmatrix} [k_s] & -[k_s] \\ -[k_s] & [k_s] \end{bmatrix} & [k_s] &= \begin{bmatrix} k_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{22} & k_{23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{32} & k_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{66} \end{bmatrix} & (55) \\
 [C] &= \begin{bmatrix} [c_s] & -[c_s] \\ -[c_s] & [c_s] \end{bmatrix} & [c_s] &= \begin{bmatrix} c_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{32} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

gdje su:

- |  |                                 |
|--|---------------------------------|
| $m_1, m_2, m_3, I_1, I_2, I_3$                                   | - parametri mase oslonca        |
| $k_{11}, k_{22}, k_{23}, k_{32}, k_{33}, k_{44}, k_{55}, k_{66}$ | - parametri krutosti oslonca    |
| $c_{11}, c_{22}, c_{23}, c_{32}, c_{33}, c_{44}, c_{55}, c_{66}$ | - parametri prigušenja oslonca. |

Kao i kod lateralnog oslonca, drugi čvor je bez mase, pa da globalna matrica inercije ne bi bila singularna, čvor mora biti kinetičkom vezom spojen ili s čvorom koji ima masu ili s podlogom.

### 4.3 Provjera računalnog programa

Računalni program provjeren je na temelju odabranih ispitnih primjera koji su podijeljeni u tri skupine:

1. teorijski primjeri (rezultati se mogu provjeriti na temelju jednostavnih izračuna):
  - sustav s jednim stupnjem slobode gibanja
  - sustav s dva stupnja slobode gibanja
  - konzolna greda s diskom
  - greda s diskom u sredini
  - greda uklještena na oba kraja, s diskom u sredini
  - Jeffcottov rotor
  - rotor stalnog promjera
2. jednostavni primjeri rotora (napravljeni u cilju provjere računalnog programa ili primjeri iz literature):
  - jednostavan rotor s dva diska
  - jednostavan rotorski sustav
  - kruto oslonjen rotor
  - elastično oslonjen rotor
  - rotor s ležajevima i osloncima ležajeva
3. modeli turbinskih postrojenja
  - izvedeni modeli čiji su rezultati dostupni.

Vlastiti rezultati uspoređeni su s rezultatima dobivenim analitički ili primjenom komercijalnih programa s metodom konačnih elemenata. Nekoliko ispitnih primjera predloženo je u Dodatku A. Rezultati provjere dani su u poglavlju 4.3.2.

### 4.3.1 Kriteriji usporedbe rezultata

Za provjeru računalnog programa primijenjeni su kriteriji točnosti temeljeni na relativnoj pogrešci vlastito dobivenih rezultata spram poznatih rezultata, a odabrani su na temelju inženjerskog iskustva:

#### **Vlastite frekvencije:**

Apsolutna točnost	pogreška = 0,0%
Odlična točnost	0,0% < pogreška < 0,50%
Vrlo dobra točnost	0,50% < pogreška < 1,00%
Dobra točnost	1,00% < pogreška < 2,00%
Osrednja točnost	2,00% < pogreška < 3,00%
Loša točnost	pogreška > 3,0%

#### **Prigušenje i amplitude vibracija:**

Apsolutna točnost	pogreška = 0,0%
Odlična točnost	0,0% < pogreška < 5,0%
Vrlo dobra točnost	5,0% < pogreška < 10,0%
Dobra točnost	10,0% < pogreška < 20,0%
Osrednja točnost	20,0% < pogreška < 30,0%
Loša točnost	pogreška > 30%

Kako je prigušenje rotorskih sustava u pravilu vrlo maleno, realni je dio kompleksne svojstvene vrijednosti, koji predstavlja prigušenje, mnogo manji od imaginarnog dijela koji predstavlja vlastitu frekvenciju. Ako se pretpostavi da realni i imaginarni dio svojstvene vrijednosti imaju istu apsolutnu točnost, onda će relativna pogreška realnog dijela (prigušenja) biti mnogo manja od relativne pogreške imaginarnog dijela (vlastite frekvencije). Kako su amplitude u rezonanciji obrnuto razmjerne bezdimenzijskom prigušenju ( $V_{rez}=1/2\zeta$ ), njihova točnost istog je reda veličine kao i točnost prigušenja. Zbog toga su pogreške kod kriterija svojstvenih vrijednost jednog reda veličine manje od pogrešaka prigušenja i amplituda vibracija.

### 4.3.2 Rezultati provjere

Rezultati usporedbe vlastitih i poznatih rezultata odabranih ispitnih primjera dani su u tablici 1. Iznosi pogrešaka prigušenja i odziva sustava uslijed neuravnoteženosti nisu jednaki stoga što, na amplitude vibracija, istovremeno utječe nekoliko kritičnih brzina međusobno bliskih jedna drugoj.

Na temelju usporedbe može se zaključiti da je kod:

- teorijskih primjera postignuta apsolutna točnost rezultata (pogreška=0,00),
- jednostavnih rotorskih sustava postignuta odlična točnost rezultata (maksimalna pogreška < 0,5%),
- postojećih modela plinskih turbina postignuta vrlo dobra točnost rezultata (maksimalna pogreška < 1%), osim kod kompleksnih vlastitih vrijednosti gdje je postignuta dobra točnost (maksimalna pogreška < 2%).

Odabranim ispitnim primjerima pokazana je točnost rezultata izračuna, te potvrđeno da se razvijeni postupak i računalni program mogu pouzdano primjeniti i na složenije sustave.

Tablica 1: Provjera točnosti rezultata dobivenih računalnim programom

<b>Ispitni primjer</b>	<b>Najveća pogreška</b>	<b>Točnost rezultata</b>
<b>Vlastite frekvencije (realne svojstvene vrijednosti)</b>		
Teorijski primjeri	<b>0,0%</b>	apsolutna
Jednostavni rotorski sustavi	<b>0,24%</b>	odlična
Postojeći modeli turbinskih postrojenja	<b>0,68%</b>	vrlo dobra
<b>Vlastite frekvencije (kompleksne svojstvene vrijednosti)</b>		
Teorijski primjeri	<b>0,0%</b>	apsolutna
Jednostavni rotorski sustavi	<b>0,35%</b>	odlična
Postojeći modeli turbinskih postrojenja	<b>1,72%</b>	dobra
<b>Prigušenje</b>		
Teorijski primjeri	<b>0,0%</b>	apsolutna
Jednostavni rotorski sustavi	<b>1,94%</b>	odlična
Postojeći modeli turbinskih postrojenja	<b>5,7%</b>	vrlo dobra
<b>Odaziv sustava uslijed neuravnoteženosti rotora</b>		
Teorijski primjeri	<b>0,0%</b>	apsolutna
Jednostavni rotorski sustavi	<b>2,6%</b>	odlična
Postojeći modeli turbinskih postrojenja	<b>6,1%</b>	vrlo dobra
<b>Odaziv sustava uslijed harmonijske uzbuđe</b>		
Teorijski primjeri	<b>0,0%</b>	apsolutna
Postojeći modeli turbinskih postrojenja	<b>1,5%</b>	odlična

## 5 Modeliranje turbinskog postrojenja

### 5.1 Modeliranje rotora plinske turbine

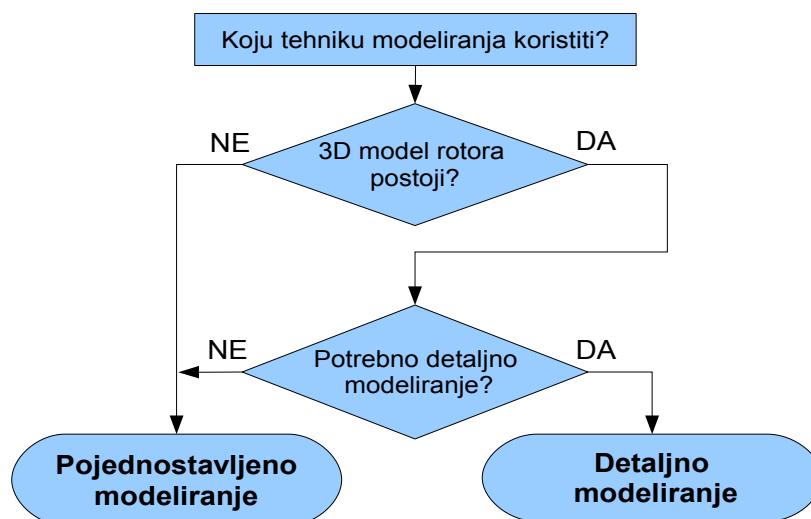
Prvi korak modeliranja rotora plinske turbine jest odabir postupka modeliranja (slika 17):

#### Pojednostavljeno modeliranje rotora

Primjenjuje se tijekom konceptne faze razvoja kada je projekt rotora podložan čestim promjenama i na raspolaganju su samo crteži rotora.

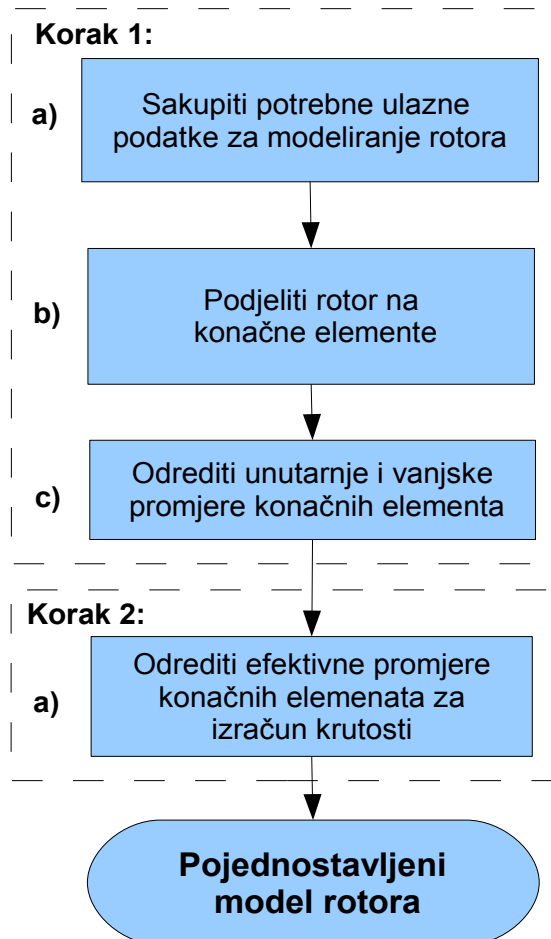
#### Detaljno modeliranje rotora

Primjenjuje se za konačno modeliranje rotora kada se projekt neće više značajno mijenjati i na raspolaganju je trodimenzijski model rotora. Detaljni model rotora primjenjuje se za konačnu kontrolu točnosti rezultata dobivenih pojednostavljenim modelom rotora i/ili ako je potrebna veća točnost rezultata (na primjer kada je jedna od vlastitih frekvencija blizu radne brzine vrtnje).



Slika 17. Odabir postupka modeliranja rotora

## 5.1.1 Pojednostavljeni model rotora



Slika 18. Pojednostavljeno modeliranje rotora plinske turbine

**Korak 1: Diskretizacija rotora**

- a) Sakupiti potrebne ulazne podatke za modeliranje rotora (crteži rotora, podaci o materijalima, raspodjele temperatura).
- b) Podijeliti rotor na konačne elemente.
- c) Na osnovi konture rotora, odrediti unutarnje i vanjske promjere konačnih elemenata ( $ID_m$ ,  $OD_m$ ).



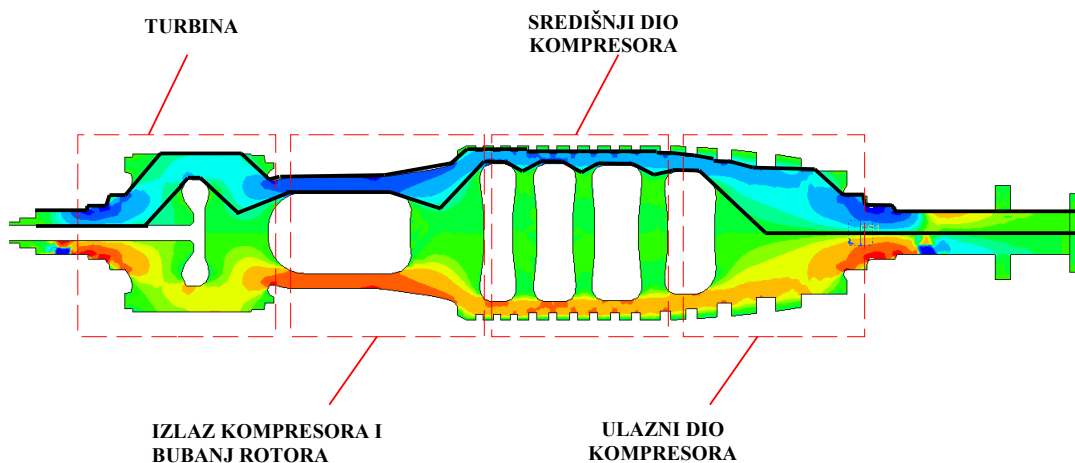
**Korak 2: Modeliranje krutosti rotora**

- a) Odrediti efektivne unutarnje i vanjske promjere konačnih elemenata za izračun krutosti (*IDs*, *ODs*).

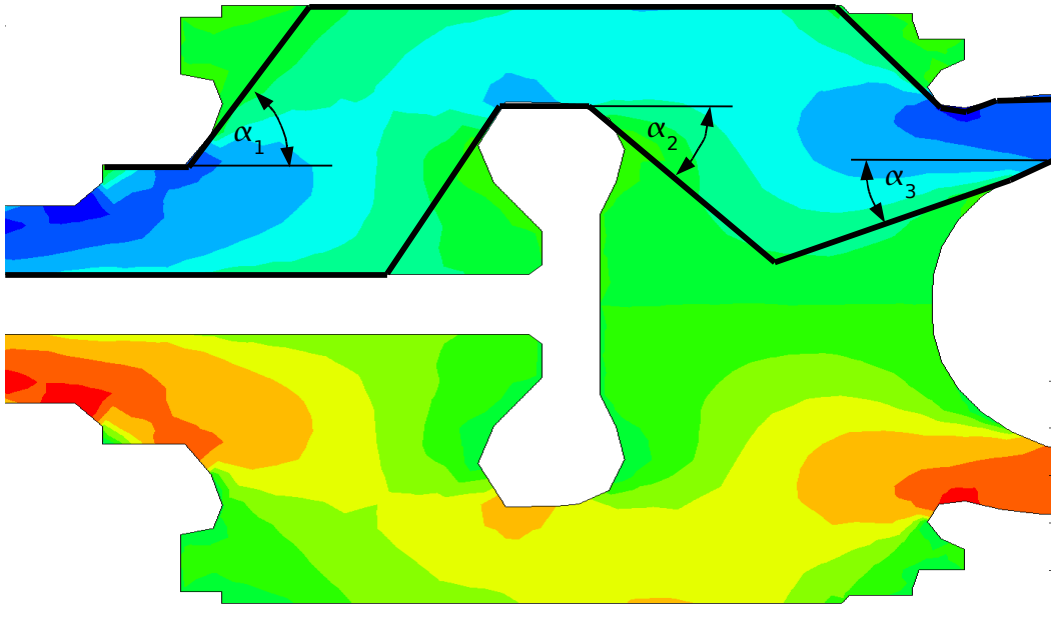
Tok sila dobiven metodom konačnih elemenata, pojednostavljen je vanjskim i unutarnjim konturnim linijama kao što je predočeno na slici 19. Efektivni unutarnji i vanjski promjeri konačnih elemenata određuju se tako da leže na konturnim linijama toka sila. Gornja konturna krivulja predstavlja najveće naprezanje na odgovarajućem presjeku, a donja konturna krivulja 20% najvećeg naprezanja.

Radi pojednostavljenja, a na temelju sličnosti rotora plinskih turbina, konturne linije toka sila se kod pojednostavljenog modela određuju na temelju sljedećih kutova nagiba (slike 20.-23.):

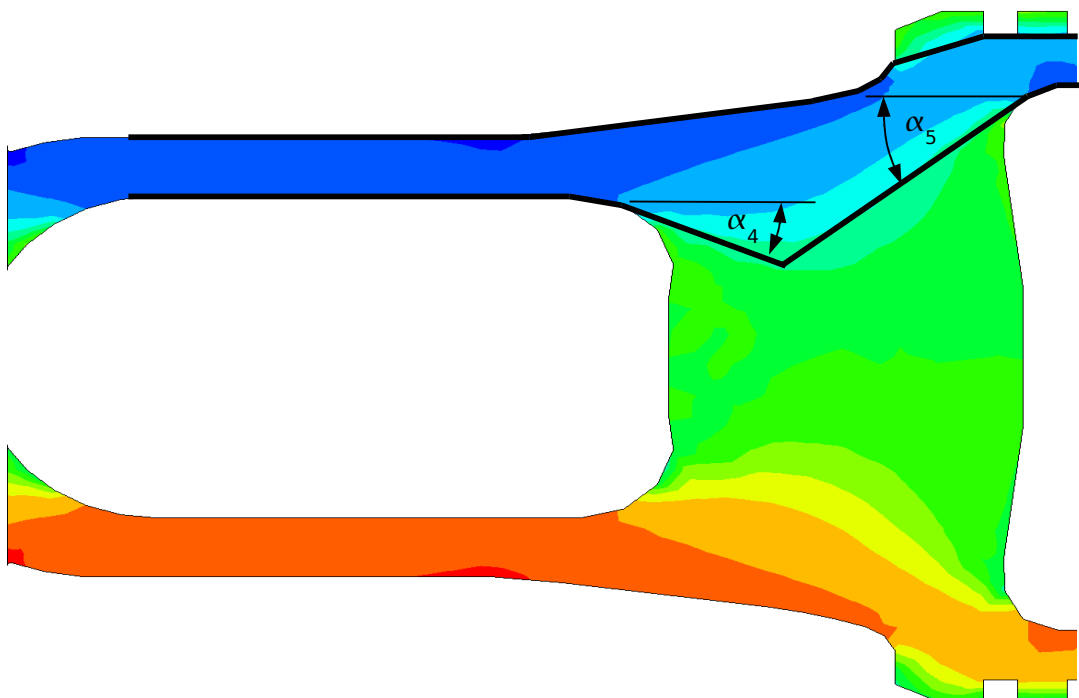
- |                                      |                     |                       |                     |
|--------------------------------------|---------------------|-----------------------|---------------------|
| 1. Turbina:                          | $\alpha_1=45^\circ$ | $\alpha_2=45^\circ$ , | $\alpha_3=30^\circ$ |
| 2. Izlaz kompresora i bubanj rotora: |                     | $\alpha_4=30^\circ$   | $\alpha_5=45^\circ$ |
| 3. Središnji dio kompresora:         |                     |                       | $\alpha_6=30^\circ$ |
| 4. Ulazni dio kompresora:            |                     |                       | $\alpha_7=45^\circ$ |



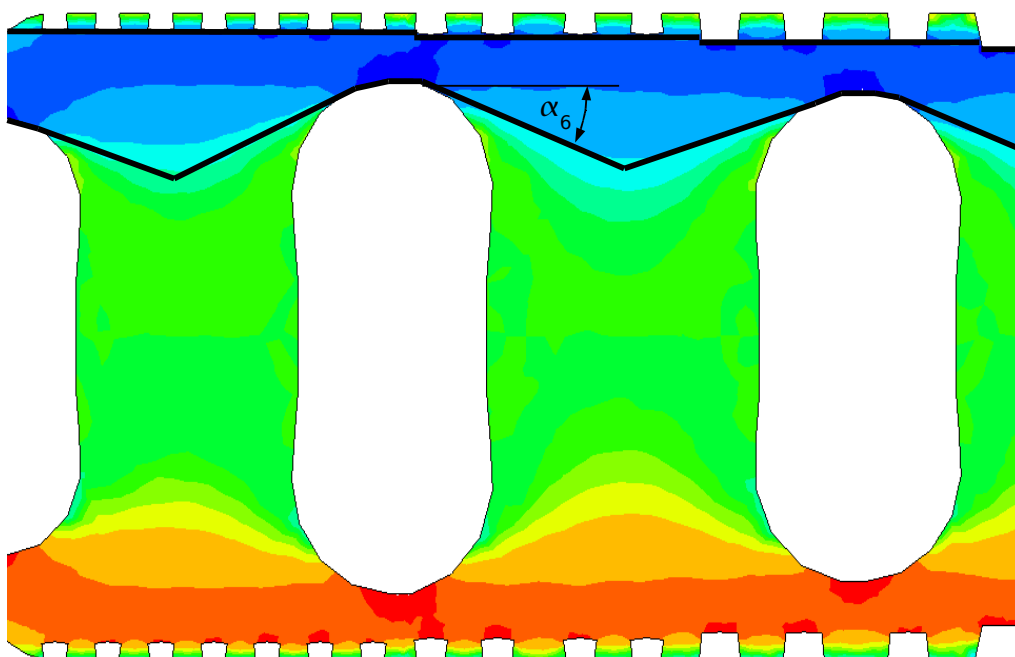
Slika 19. Kontura toka sila uslijed savijanja



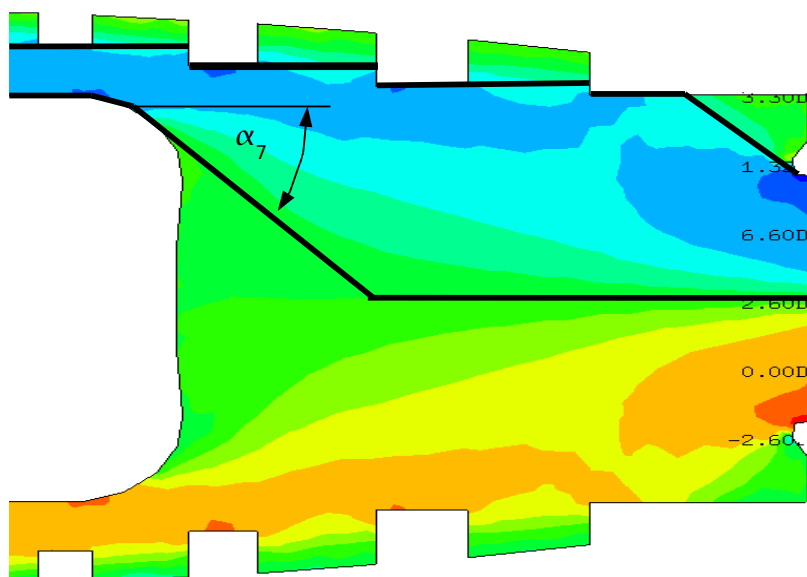
Slika 20. Kontura toka sila u turbinskom dijelu rotora



Slika 21. Kontura toka sila na izlazu iz kompresora



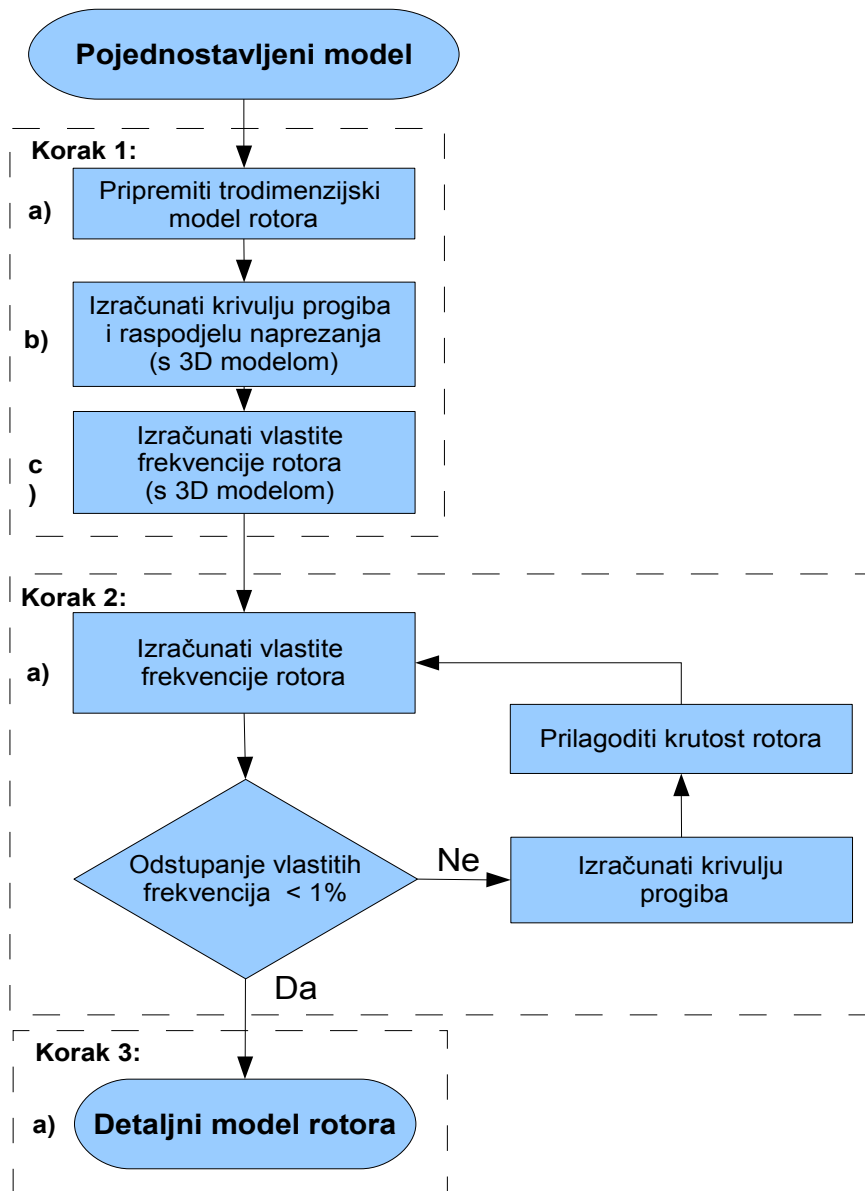
Slika 22. Kontura toka sila u sredini kompresora



Slika 23. Kontura toka sila na ulazu kompresora

## 5.1.2 Detaljni model rotora

Već postojeći, pojednostavljeni model rotora, koristi se kao polazni projekt kod detaljnog modeliranja rotora (slika 24).



Slika 24. Detaljno modeliranje rotora plinske turbine

### **Korak 1: Izračun metodom konačnih elemenata**

- a) Pripremiti trodimenzijski model rotora (uključujući osne i radijalne utore za lopatice)
- b) Izračunati krivulju progiba rotora i raspodjelu naprezanja s 3D modelom rotora
- c) Izračunati vlastite frekvencije rotora

### **Korak 2: Prilagodba krutosti rotora**

- a) Izračunati vlastite frekvencije rotora s pojednostavljenim vibracijskim modelom rotora.
- b) Ako je razlika između vlastitih frekvencija iz koraka 2a (pojednostavljeni vibracijski model rotora) i vlastitih frekvencija iz koraka 1d (trodimenzijski model rotora) manja od 1%, ići na korak 3.
- c) Izračunati krivulje progiba s pojednostavljenim vibracijskim modelom rotora.
- d) Prilagoditi efektivne unutarnje i vanjske promjere konačnih elemenata za izračun krutosti (*IDs*, *ODs*) i vratiti se na korak 2a.

Efektivni promjeri prilagođuju se u području najvećih razlika krivulja progiba pojednostavljenog vibracijskog modela i 3D modela prema sljedećim pravilima:

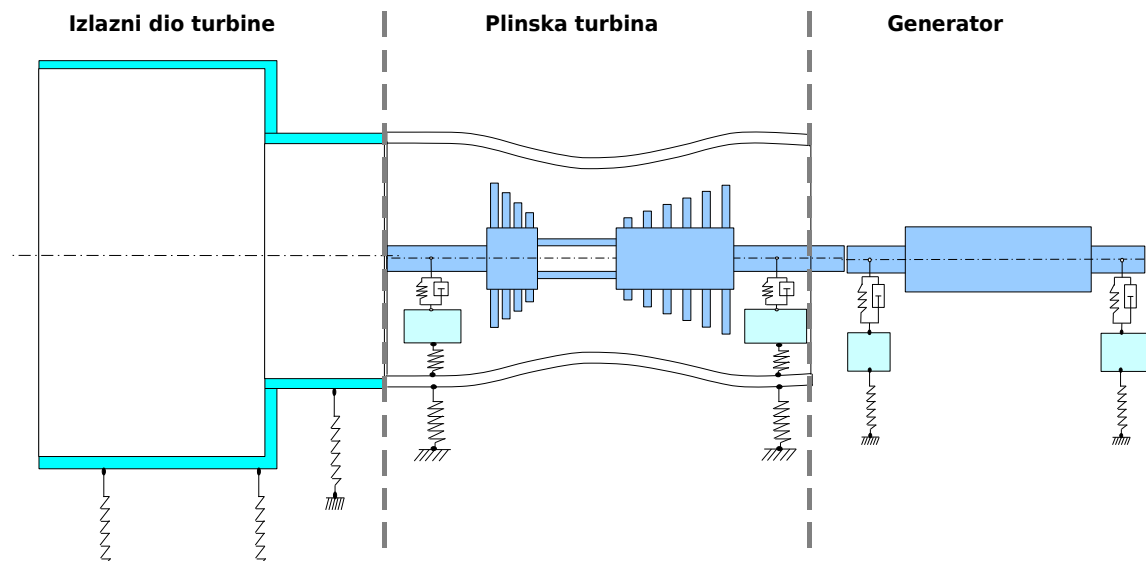
- povećati efektivnu krutost, ako je nagib krivulje progiba vibracijskog modela rotora veći nego nagib krivulje progiba trodimenzijskog modela
- smanjiti efektivnu krutost, ako je nagib krivulje progiba vibracijskog modela rotora niži nego nagib krivulje progiba trodimenzijskog modela

### **Korak 3: Završetak**

- a) Detaljni model rotora

## 5.2 Pojednostavljeni model turbinskog postrojenja

U ovom radu razmatrano je turbinsko postrojenje koje se sastoji od plinske turbine i generatora. Slika 25. predočava shemu vibracijskog modela koji sadrži i izlazni dio plinske turbine.



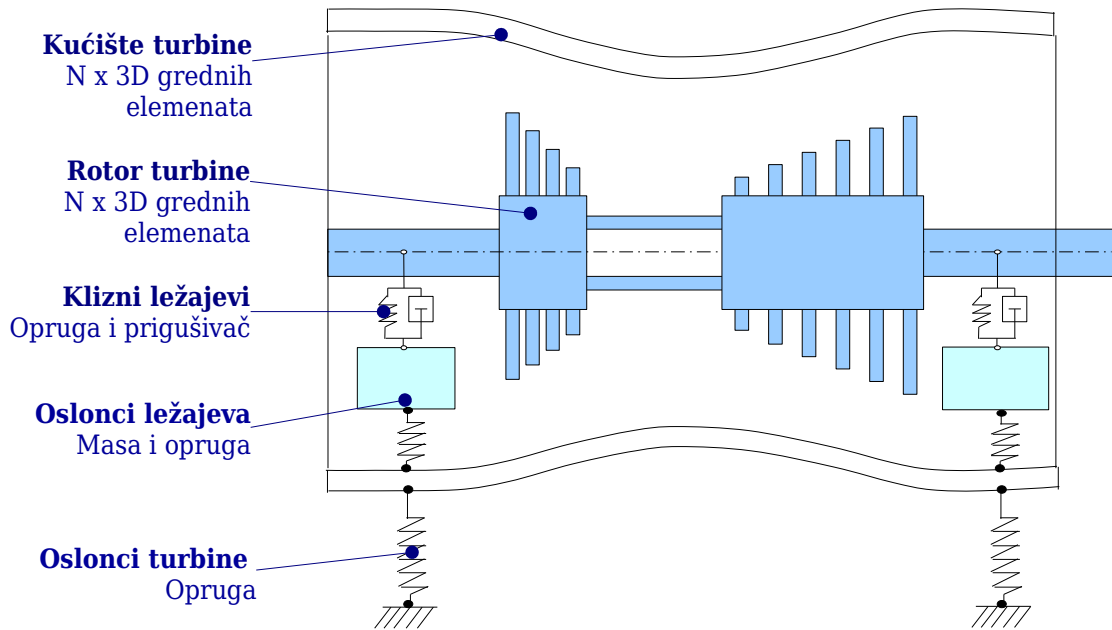
Slika 25. Pojednostavljeni model turbinskog postrojenja

Modeliranje plinske turbine, generatora i izlaznog dijela turbine opisano je u poglavljima koja slijede.

### 5.2.1 Model plinske turbine

Model plinske turbine uključuje sljedeće sastavnice:

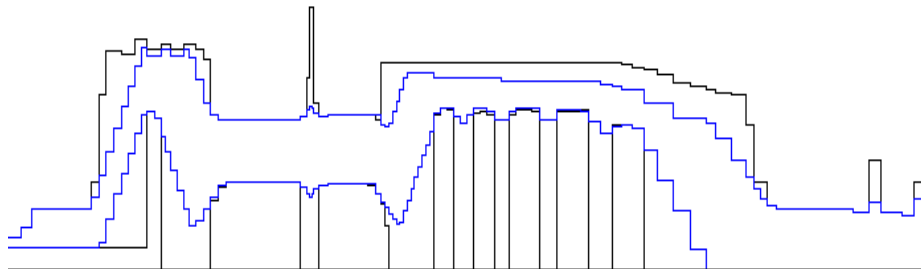
- rotor plinske turbine,
- klizne ležajeve,
- oslonce ležajeva,
- kućište plinske turbine,
- oslonce kućišta plinske turbine.



Slika 26. Model plinske turbine

### 5.2.1.1 Rotor plinske turbine

Rotor plinske turbine modeliran je kao što je opisano u poglavljima 4.2.1 i 5.1. Primjer konture rotora predočen je na slici 27. Plave linije predočavaju konturu toka sila, dok crne linije vanjsku i unutarnju konturu rotora.



Slika 27. Primjer konture rotora plinske turbine

### 5.2.1.2 Klizni ležajevi plinske turbine

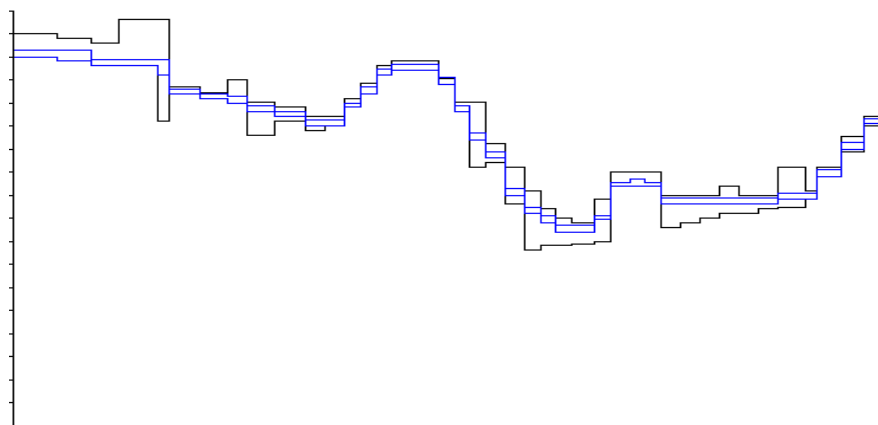
Klizni ležajevi su modelirani kao opruge i prigušivači s krutostima i prigušenjima ovisnim o brzini vrtnje (slika 26.), primjenom elementa radijalni klizni ležaj.

### 5.2.1.3 Oslonci ležajeva plinske turbine

Oslonci ležajeva modelirani su kao jednostavan vibracijski sustav (slika 26.) primjenom elementa lateralni oslonac. Krutost i prigušenje stalni su u cijelom području brzine vrtnje. Krutost oslonaca se ili izračunava statički, na temelju trodimenzijskog modela kućišta plinske turbine, ili se određuje na temelju iskustva.

### 5.2.1.4 Kućište plinske turbine

Kao i rotor plinske turbine, kućište je modelirano trodimenzijskim grednim elementima kao što je opisano u poglavlju 4.2.1. Svojstva fleksijske krutosti kućišta i raspodjela mase određena su primjenom metode konačnih elemenata. Slika 28. predočava primjer konture kućišta plinske turbine.



Slika 28. Primjer konture kućišta plinske turbine



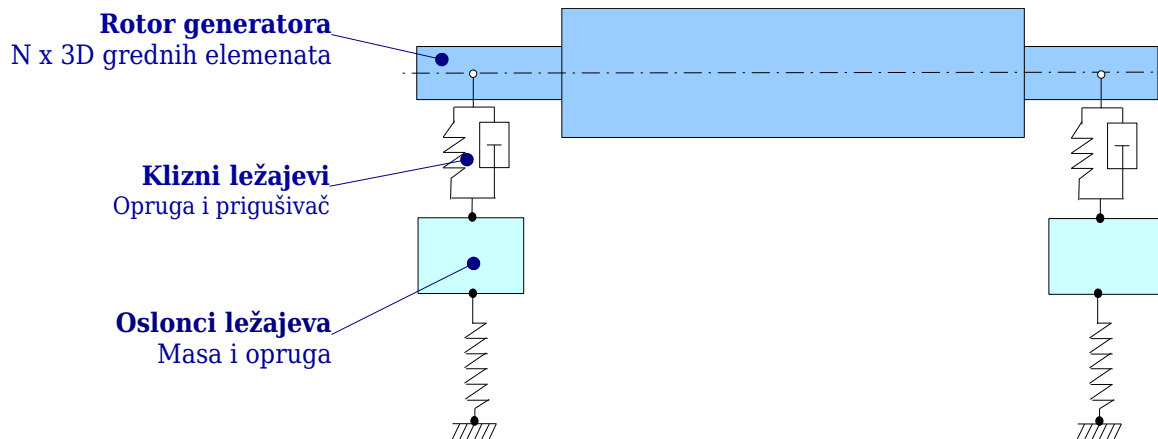
### 5.2.1.5 Oslonci plinske turbine

Oslonci plinske turbine modelirani su kao opruge čije su krutosti dobivene na temelju trodimenzijskog modela uslijed statičkog opterećenja.

### 5.2.2 Model generatora

Upotrebljen je standardni vibracijski model generatora (slika 29.) koji se sastoji iz sljedećih sastavnica:

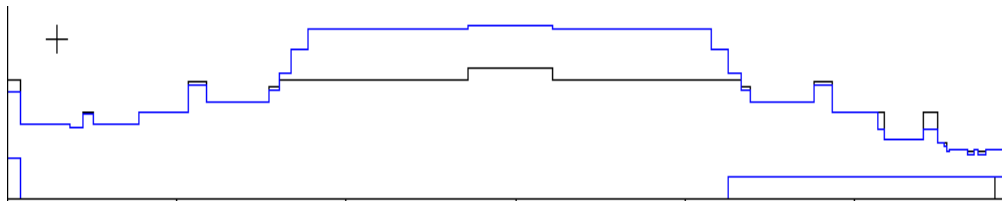
- rotor generatora,
- klizni ležajevi,
- oslonci ležajeva.



Slika 29. Model generatora

#### 5.2.2.1 Rotor generatora

Načelo modeliranja generatorskog rotora slično je modeliranju rotora plinske turbine. Primjer konture rotora predočen je na slici 30.



Slika 30. Primjer konture rotora generatora

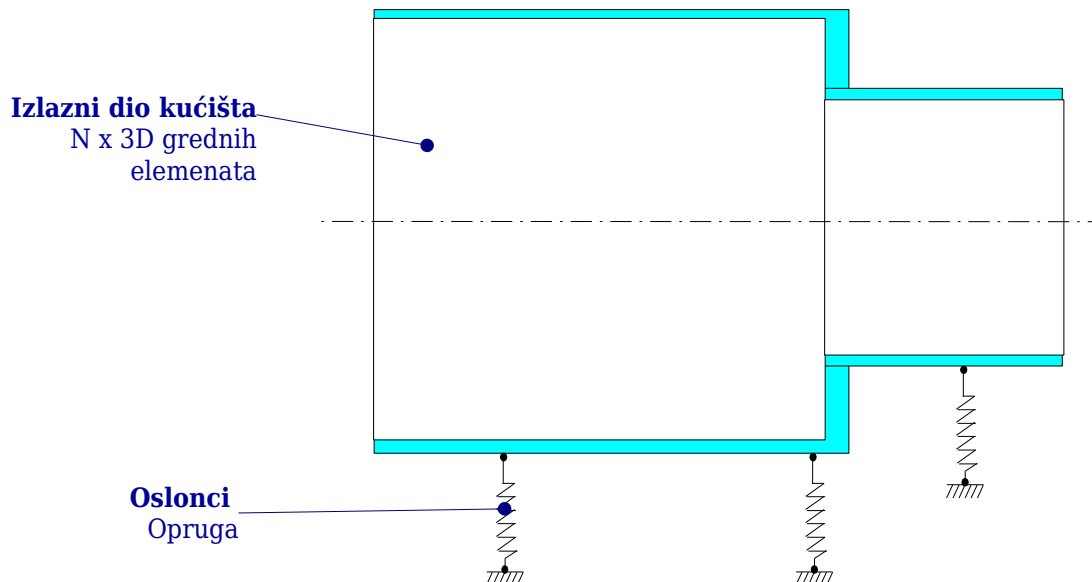
### 5.2.2.2 Klizni ležajevi generatora

Klizni ležajevi modelirani su primjenom elementa radijalni klizni ležaj s krutošću i prigušenjem ovisnim o brzini vrtnje (slika 26).

### 5.2.2.3 Oslonci ležajeva generatora

Oslonci ležajeva modelirani su kao jednostavan vibracijski sustav primjenom elementa lateralni oslonac. Krutost i prigušenje stalni su u cijelom području brzine vrtnje.

### 5.2.3 Model izlaznog dijela turbine



Slika 31. Model izlaznog dijela turbine

### 5.2.3.1 *Kućište izlaznog dijela turbine*

Kao i rotor plinske turbine, kućište je pojednostavljeno modelirano trodimenzijskim grednim elementima kao što je opisano u poglavlju 4.2.1. Svojstva fleksijske krutosti kućišta i raspodjela mase određena su primjenom metode konačnih elemenata.

### 5.2.3.2 *Oslonci izlaznog dijela turbine*

Oslonci izlaznog dijela turbine modelirani su kao opruge čije su krutosti dobivene na temelju trodimenzijskog modela uslijed statičkog opterećenja.

## 6 Odabir funkcije cilja

Cilj je ovog istraživanja razviti postupak optimiranja vibracijskih svojstava mijenjanjem modalnih parametara oslonaca rotora i kućišta plinske turbine. No, kako definirati kakvoću vibracijskog ponašanja plinske turbine?

U pravilu, dva parametra određuju kakvoću vibracijskog ponašanja nekog stroja: udaljenost bilo koje vlastite frekvencije od bilo koje uzbudne frekvencije i odgovarajuće modalno prigušenje. Ali ta dva parametra nisu prikladna za primjenu kao ciljna funkcija u optimiranju.

Norma ISO 10814 povezuje ta dva parametra u osjetljivost stroja na neuravnoteženost, odnosno u modalnu osjetljivost. Osjetljivost na neuravnoteženost razvrstana je po područjima A do E, gdje područje A predstavlja vrlo malu osjetljivost na neuravnoteženost, a područje E vrlo veliku osjetljivost na neuravnoteženost (tablica 2).

Tablica 2. ISO 10814 područja osjetljivosti na neuravnoteženost

Područje	Osjetljivost	Očekivano vibracijsko ponašanje
A	vrlo mala	Vrlo malene vibracije, čak i kod prolaza kroz kritične brzine
B	mala	Malene i stabilne vibracije
C	srednja	Srednje izražene vibracije ali još uvijek prihvatljive
D	velika	Turbina osjetljiva na neuravnoteženost, potrebno često balansiranje
E	vrlo velika	Turbina preosjetljiva na neuravnoteženost, treba izbjegavati

Prema ISO 10814, osjetljivost plinske turbine na neuravnoteženost obuhvaćena je dopuštenom osjetljivošću za strojeve tipa II.

Zone osjetljivosti na neuravnoteženost temelje se na funkciji povećanja sustava s jednim stupnjem slobode gibanja prema jednadžbi:

$$Q = \frac{\eta^2}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + (2\zeta_n\eta)^2}} = \frac{\eta^2}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + (\eta/Q_n)^2}} \quad (56)$$

gdje su:

- $\eta$  - omjer frekvencija ( $\eta = \Omega/\omega_n$ )
- $\zeta_n$  - bezdimenzijsko prigušenje
- $Q_n$  - povećanje u rezonanciji  $Q_n = 1/2\zeta_n$
- $\omega_n$  - kritična brzina vrtnje
- $\Omega$  - radna frekvencija

Područja osjetljivosti prema ISO 10814 jesu:

- područje A: vrlo mala osjetljivost  $Q = 0 - 2,5$
- područje B: mala osjetljivost  $Q = 2,5 - 5,0$
- područje C: srednja osjetljivost  $Q = 5,0 - 7,5$
- područje D: visoka osjetljivost  $Q = 7,5 - 10$
- područje E: vrlo visoka osjetljivost  $Q > 10$

Graf osjetljivosti prema ISO 10814 dobiva se postavljanjem funkcije povećanja  $Q$  na granične vrijednosti između dvaju područja (na primjer  $Q=2,5$  za graničnu vrijednost između područja A i B), rješavanjem jednadžbe (56) po povećanju u rezonanciji  $Q_n$ , te iscrtavanjem  $Q_n$  u ovisnosti o omjeru frekvencija  $\eta$ . Nakon što su sve granične krivulje iscrtane, graf se može upotrijebiti za određivanje osjetljivosti na neuravnoteženost kao što je opisano u ISO 10814.

Osjetljivost na neuravnoteženost prema ISO 10814 nije numerička nego diskretna funkcija pa nije praktična za optimiranje. Međutim, zone osjetljivosti odgovaraju određenim graničnim vrijednostima funkcije povećanja  $Q$  koja je

kontinuirana funkcija. To znači da se ona može upotrijebiti kao mjera kakvoće vibracijskih svojstava plinske turbine. Radi pojednostavljenog definiranja područja osjetljivosti, umjesto funkcije povećanja  $Q$ , kao funkcija cilja uzeta je normirana funkcija povećanja  $Q_s$  dana jednadžbom:

$$Q_s = \frac{1}{2,5} \frac{\eta^2}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + (2\zeta_n \eta)^2}} \quad (57)$$

Područja osjetljivosti na neuravnoteženost određena su sljedećim vrijednostima normirane funkcije povećanja:

- područje A             $Q_s = 0 - 1$
- područje B             $Q_s = 1 - 2$
- područje C             $Q_s = 2 - 3$
- područje D             $Q_s = 3 - 4$
- područje E             $Q_s > 4$ .

Plinska turbina u pravilu je projektirana za rad u području frekvencija od 94% do 105% nominalne radne frekvencije. Stoga se za određivanje funkcije cilja, za odgovarajući skup vrijednosti projektnih parametara, funkcija povećanja  $Q_s$  izračunava za cijelo područje radne frekvencije, a zatim se njena maksimalna vrijednost uzima kao vrijednost funkcije cilja.

Optimiranje vibracijskih svojstava plinske turbine svodi se na minimiziranje odabrane ciljne funkcije (odnosno minimiziranje osjetljivosti plinske turbine na neuravnoteženost). Kako je osjetljivost na neuravnoteženost  $Q_s$  funkcija omjera frekvencija  $\eta$  i bezdimenzijskog prigušenja  $\zeta_n$ , njeno određivanje zahtjeva izračun kompleksnih vlastitih vrijednosti u svakom koraku optimiranja.

## 7 Inženjerski postupak optimiranja

Inženjerski postupak optimiranja vibracijskih svojstava plinske turbine sastoji se od tri koraka:

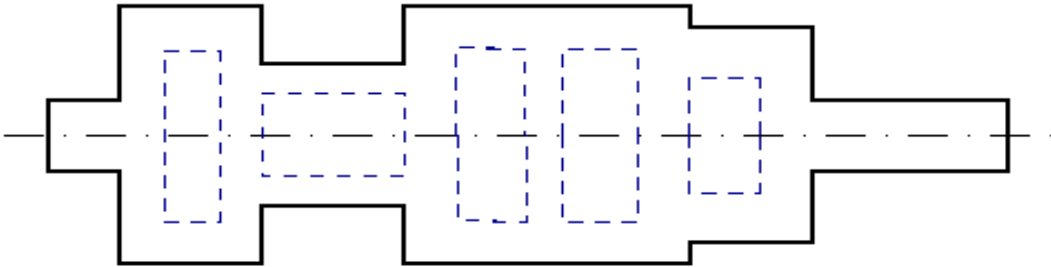
1. optimiranje krutosti uljnog filma,
2. optimiranje mase i krutosti oslonaca ležajeva,
3. optimiranje krutosti oslonaca kućišta turbine.

U svakom koraku povećava se složenost vibracijskog modela. Prvi korak temelji se na jednostavnom modelu elastično oslonjenog rotora. U drugom koraku oslonci su modelirani kao jednostavan vibracijski sustav. U trećem koraku u vibracijski model turbine uključeni su oslonci ležajeva rotora, kućište turbine i oslonci kućišta. Inženjerski postupak optimiranja objašnjen je na pojednostavljenom modelu plinske turbine.

### 7.1 Pojednostavljeni model plinske turbine

Plinska turbina modelirana je kao što je opisano u poglavlju 5.2.1. Konture rotora i kućišta plinske turbine predloženi su na slikama 32. i 33. zajedno s ispisom ulaznih podataka računalnog programa:

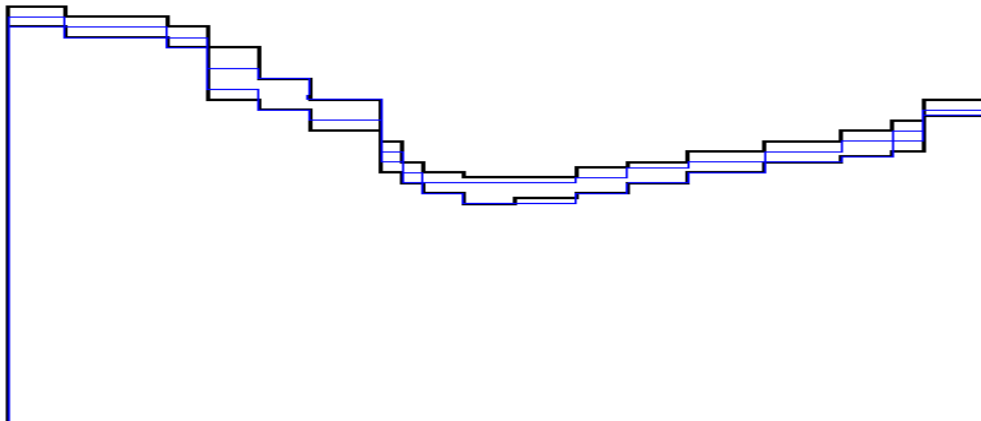
- *Length* - duljina grednog konačnog elementa (m)
- *ODm, IDm* - vanjski i unutarnji promjer za izračun mase elementa (m)
- *ODbs, IDbs* - ekvivalentni vanjski i unutarnji promjer za izračun fleksijske krutosti (m)
- *ODbs, IDbs* - ekvivalentni vanjski i unutarnji promjer za izračun torzijske krutosti (m)
- *Temperature* - temperatura konačnog elementa prema kojoj se određuju svojstva materijala (°C)
- *Material* - oznaka materiala konačnog elementa



	Sec. Name	Length	ODm	IDm	ODbs	IDbs	ODts	IDts	Temperature	Material	Node Name
1		0.1	0.5	0	0.5	0	0.5	0	70	Steel	
2		0.7	0.5	0	0.5	0	0.5	0	70	Steel	BRG 1
3		0.24	1.8	0	1.8	0	1.8	0	120	Steel	
4		0.37	1.8	0	1.8	0	1.8	0	250	Steel	
5		0.25	1.8	1.2	1.8	1.2	1.8	1.2	230	Steel	
6		0.25	1.8	1.2	1.8	1.2	1.8	1.2	340	Steel	
7		0.45	1.8	0	1.8	0	1.8	0	400	Steel	
8		0.57	1.	0.6	1.	0.6	1.	0.6	420	Steel	
9		0.64	1.	0.6	1.	0.6	1.	0.6	420	Steel	
10		0.37	1.	0.6	1.	0.6	1.	0.6	440	Steel	
11		0.19	1.8	0	1.8	0	1.8	0	410	Steel	
12		0.046	1.8	0	1.8	0	1.8	0	440	Steel	
13		0.185	1.8	0	1.8	0	1.8	0	450	Steel	
14		0.266	1.8	0	1.8	0	1.8	0	450	Steel	
15		0.345	1.8	1.2	1.8	1.2	1.8	1.2	420	Steel	
16		0.345	1.8	1.2	1.8	1.2	1.8	1.2	380	Steel	
17		0.39	1.8	0	1.8	0	1.8	0	350	Steel	
18		0.404	1.8	1.2	1.8	1.2	1.8	1.2	280	Steel	
19		0.455	1.8	1.2	1.8	1.2	1.8	1.2	225	Steel	
20		0.56	1.8	0	1.8	0	1.8	0	170	Steel	
21		0.78	1.5	0.8	1.5	0.8	1.5	0.8	100	Steel	
22		0.6	1.5	0	1.5	0	1.5	0	70	Steel	
23		0.79	0.5	0	0.5	0	0.5	0	70	Steel	
24		0.8	0.5	0	0.5	0	0.5	0	70	Steel	BRG 2
25		0.58	0.5	0	0.5	0	0.5	0	70	Steel	

Slika 32. Kontura rotora i ulazni podaci za računalni program





	Sec. Name	Length	ODm	IDm	ODbs	IDbs	ODts	IDts	Temperature	Material	Node Name
1		0.55	4.0	3.8	3.9	3.8	3.9	3.8	450	St572S	
2		1	3.9	3.7	3.8	3.7	3.8	3.7	450	St572S	BRG 1
3		0.4	3.8	3.6	3.7	3.6	3.7	3.6	450	St572S	SUP 1
4		0.5	3.6	3.1	3.4	3.2	3.7	3.5	450	St572S	
5		0.5	3.3	3	3.3	3	3.3	3	450	St572S	
6		0.7	3.1	2.8	3.2	2.9	3.2	2.9	450	St572S	
7		0.2	2.7	2.4	2.6	2.5	2.6	2.5	450	St572S	
8		0.2	2.5	2.3	2.4	2.3	2.4	2.3	450	St572S	
9		0.4	2.4	2.2	2.3	2.2	2.3	2.2	450	St572S	
10		0.5	2.35	2.1	2.3	2.1	2.3	2.1	450	St572S	
11		0.6	2.35	2.15	2.3	2.1	2.3	2.1	300	St572S	
12		0.5	2.45	2.2	2.35	2.2	2.35	2.2	300	St572S	
13		0.6	2.5	2.3	2.45	2.2	2.45	2.2	300	St572S	
14		0.75	2.6	2.4	2.5	2.4	2.5	2.4	300	St572S	
15		0.75	2.7	2.5	2.6	2.5	2.6	2.5	200	St572S	
16		0.5	2.8	2.55	2.7	2.55	2.7	2.55	100	St572S	SUP 2
17		0.3	2.9	2.6	2.8	2.7	2.8	2.7	100	St572S	
18		0.6	3.1	2.95	3.0	2.95	3.0	2.95	100	St572S	BRG 2

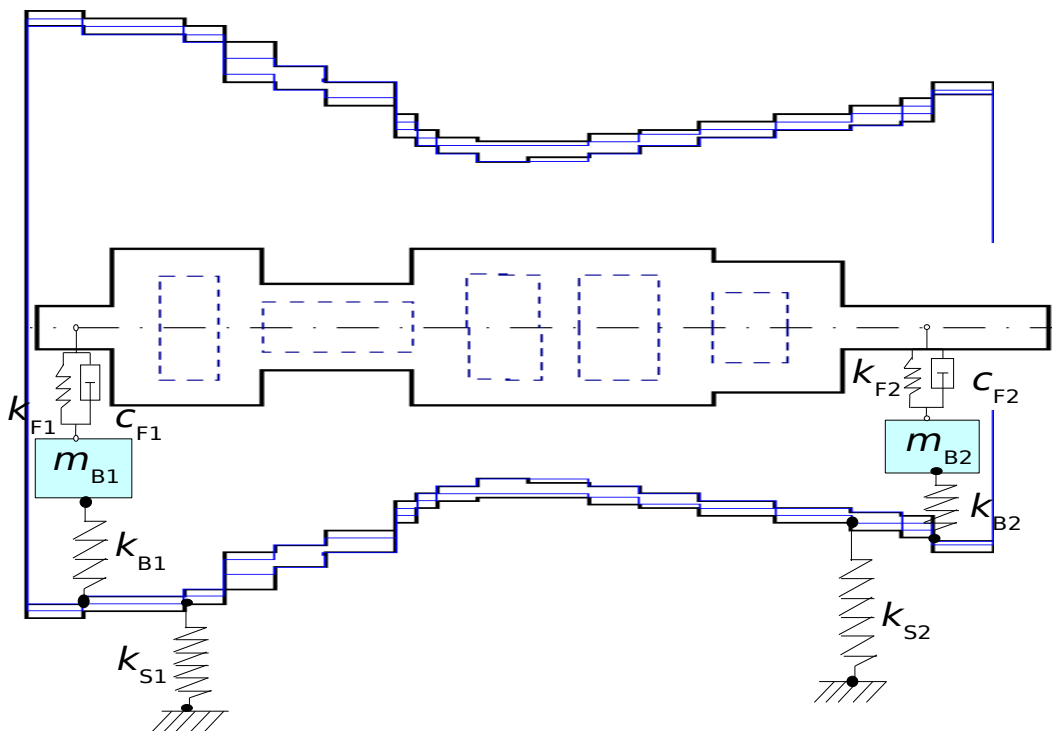
Slika 33. Kontura kućišta turbine i ulazni podaci računalnog programa

Model rotora sastoji se od 25 grednih konačnih elemenata, a ukupna duljina je 10,68 m. Model kućišta duljine je 9,55 m i sastoji se od 18 grednih konačnih elemenata.

Konstante krutosti i prigušenja uljnog filma, mase oslonaca ležajeva, konstante krutosti oslonaca ležaja, te konstante krutost oslonaca kućišta turbine iznose:

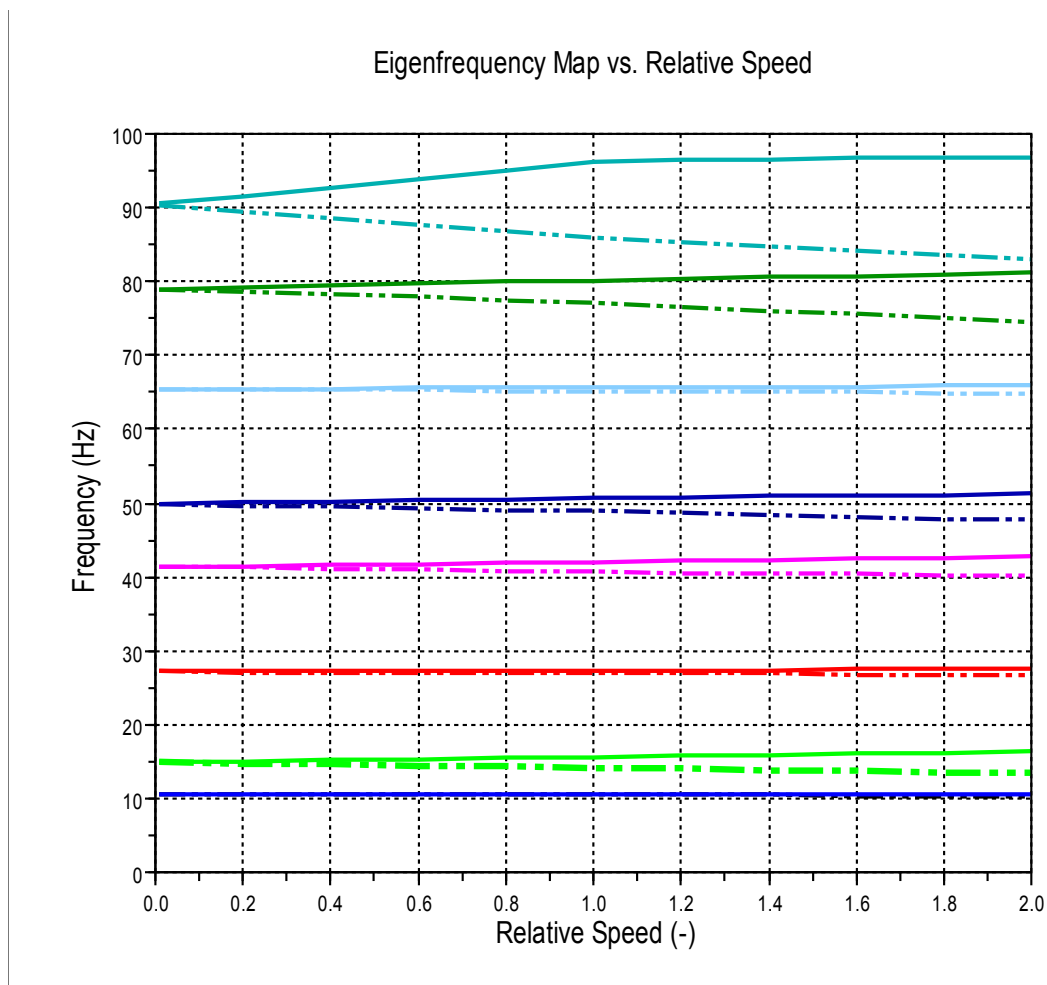
- koeficijenti krutosti uljnog filma  $k_{F1} = k_{F2} = 1 \cdot 10^9 \text{ N/m}$
- koeficijenti prigušenja uljnog filma  $c_{F1} = c_{F2} = 1 \cdot 10^6 \text{ Ns/m}$
- masa oslonaca ležajeva  $m_{B1} = m_{B2} = 15000 \text{ kg}$
- krutost oslonaca ležajeva  $k_{B1} = k_{B2} = 1 \cdot 10^9 \text{ N/m}$
- krutost oslonaca kućišta turbine  $k_{S1} = k_{S2} = 1 \cdot 10^9 \text{ N/m}$

gdje je, radi jednostavnosti, pretpostavljeno da su sva svojstva jednaka u vertikalnom i horizontalnom smjeru.



Slika 34. Vibracijski model plinske turbine

Na slici 35. predočen je graf vlastitih frekvencija pojednostavljenog modela plinske turbine u ovisnosti o omjeru brzina  $\eta$ , gdje se pune krivulje odnose na vibracije istosmjerne vrtnji, a crtkane krivulje na vibracije protusmjerne vrtnji. Kako su krutosti oslonaca jednaki u horizontalnom i vertikalnom smjeru, protusmjerni i istosmjerni načini vibriranja nisu spregnuti. A kako se neuravnotežene inercijske sile vrte zajedno s rotorom, one mogu uzбудiti samo načine vibriranja istosmjerne vrtnji. Iz grafa je očito da se peta vlastita frekvencija vibracija istosmjernih vrtnji nalazi u nedozvoljenom području u blizini radne frekvencije plinske turbine.



Slika 35. Pojednostavljeni model plinske turbine: vlastite frekvencije u ovisnosti o omjeru brzina  $\eta$

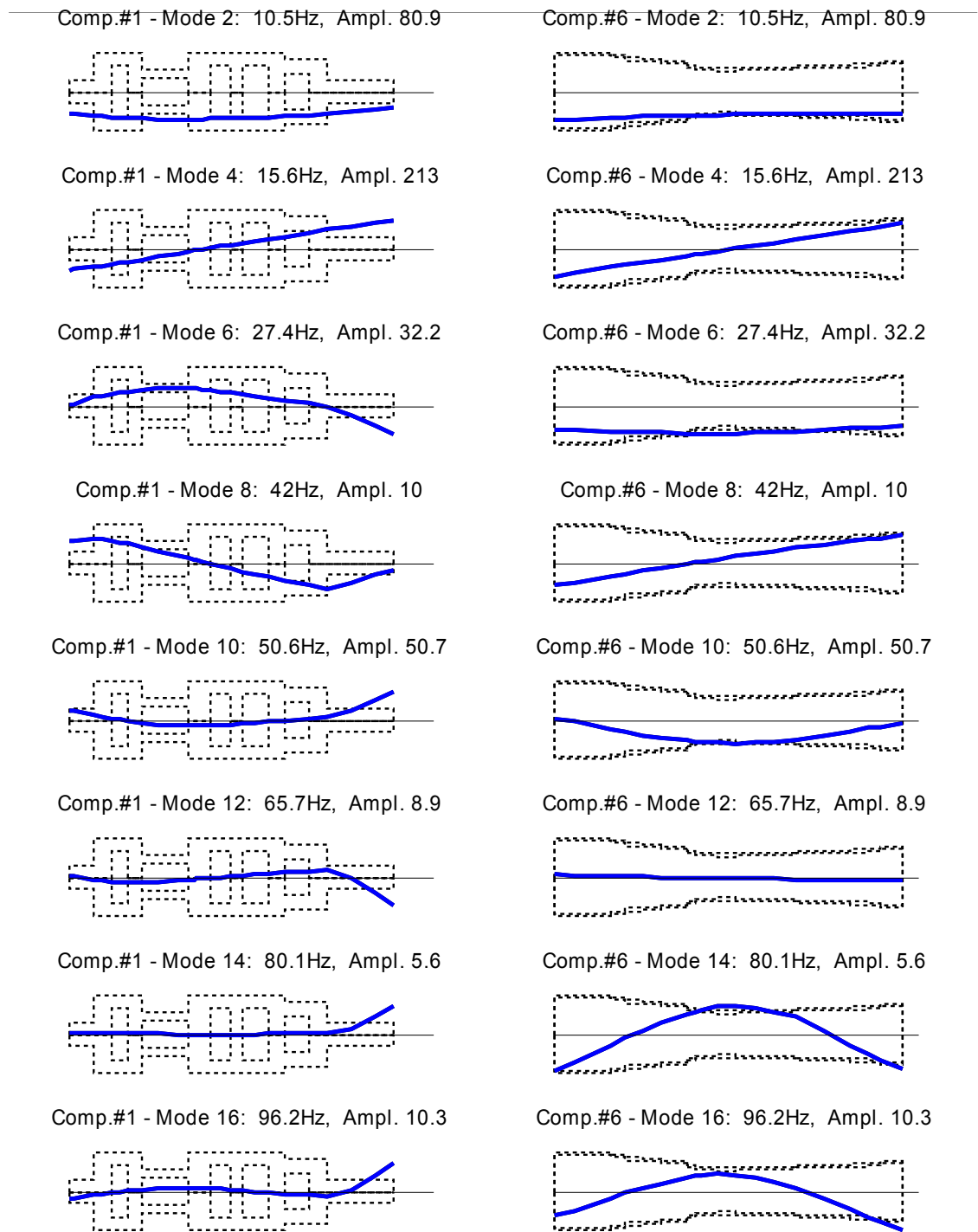
Slika 36. predočava načine vibriranja rotora i kućišta plinske turbine istosmjerne vrtnji, a slika 37. načine vibriranja protusmjerne vrtnji. Crne krivulje predočavaju oblike vibriranja u smjeru velike poluosi elipse, a plave krivulje u smjeru male poluosi elipse. Kako su krutosti uljnog filma i oslonaca jednake u horizontalnom i vertikalnom smjeru gibanje je kružno (velika i mala poluos su jednake). Iz slika 36. i 37. očito je da su kod vibracija istosmjernih vrtnji načini vibriranja u smjeru velike i male poluosi u fazi (pomaci su istog predznaka, forme vibriranja se poklapaju), a kod protusmjernih vibracija su u protufazi (pomaci su suprotnog predznaka, forme vibriranja su zrcalne).

Na temelju slike 36. može se zaključiti da je peti način vibriranja, sa vlastitom frekvencijom od 50,6 Hz, sastavljen od trećeg načina vibriranja rotora i trećeg načina vibriranja kućišta plinske turbine. Uz to, što se taj način vibriranja nalazi u blizini radne frekvencije turbine, vrijednost funkcije povećanja u rezonanciji je velika ( $Q=50,7$ , odnosno  $Q_s=Q/2,5=20,3$ ), što znači da je osjetljivost turbine na neuravnoteženost vrlo visoka ( $Q>10$ , odnosno  $Q_s>4$  - područje E prema ISO 10814).

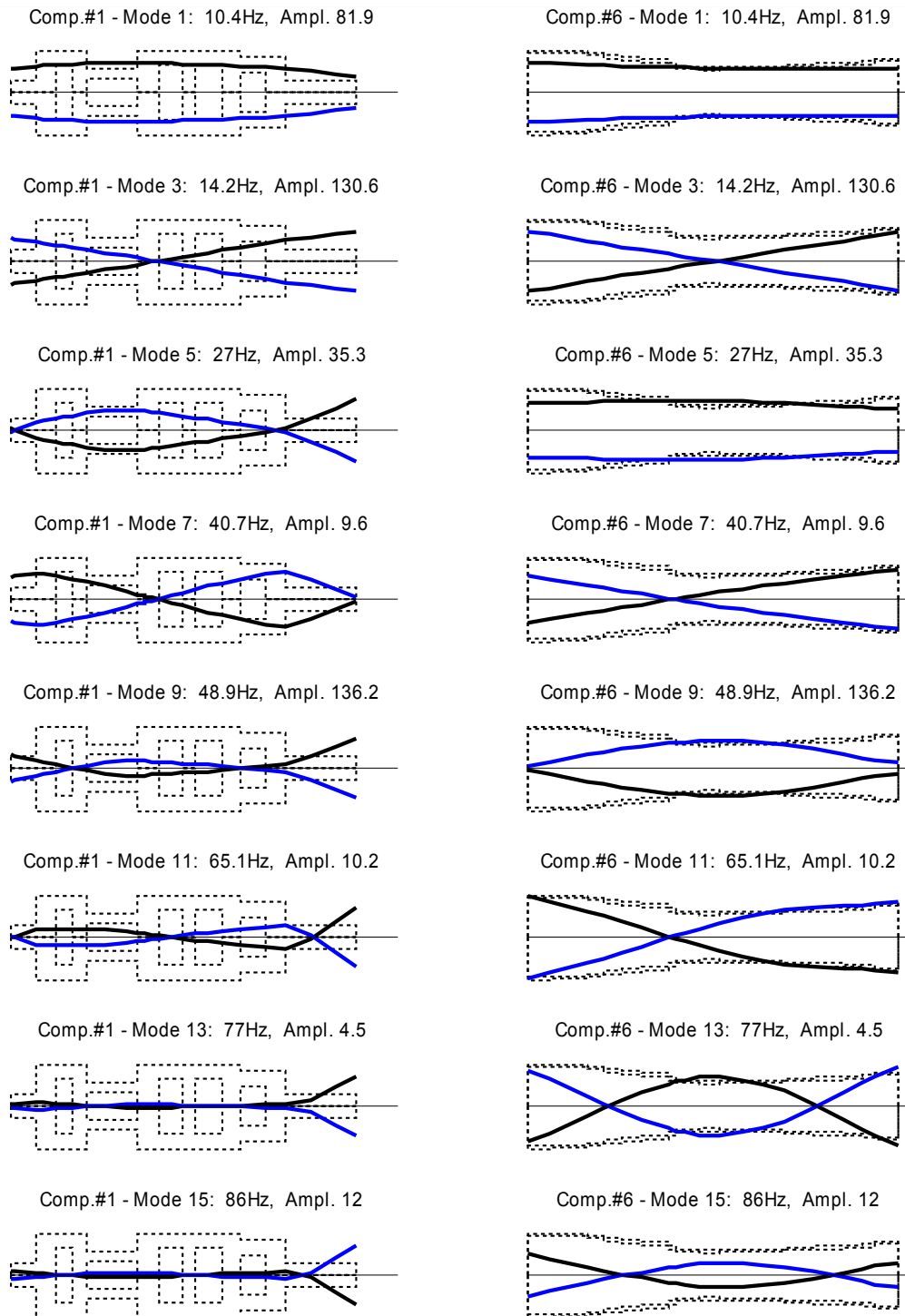
Odziv sustava uslijed neuravnoteženih inercijskih sila predočen je na slici 38. Na rotor plinske turbine dodana su neuravnoteženja koja uzbuđuju prvi, drugi i treći način vibriranja rotora:

- čvor 5.: 0,20 kgm, pod kutom od  $180^\circ$
- čvor 13.: 0,20 kgm, pod kutom od  $0^\circ$
- čvor 21.: 0,25 kgm, pod kutom od  $180^\circ$

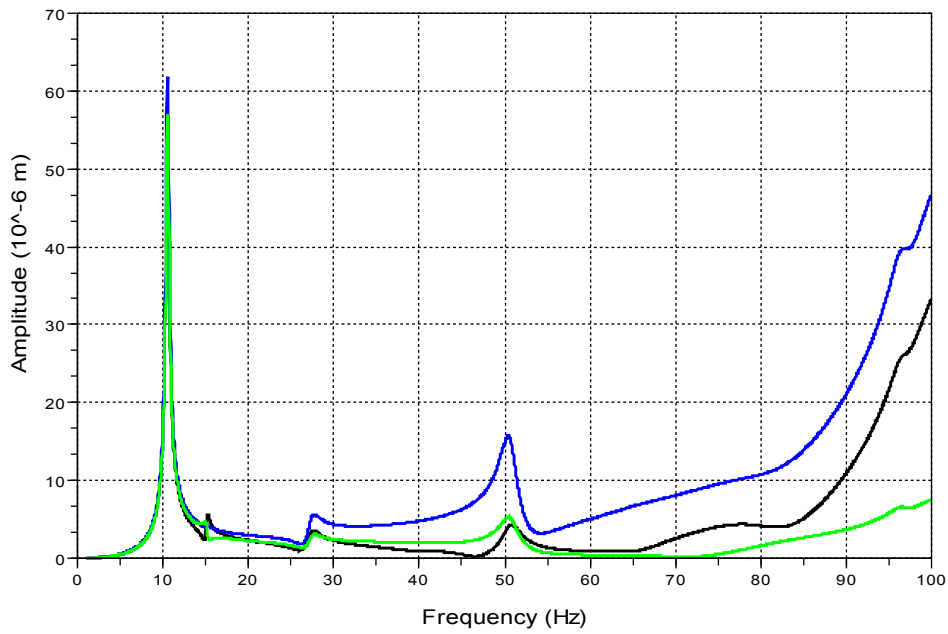
Osim toga, uz prigušenje u uljnom filmu, dodano je strukturalno prigušenje od 1% (prigušenje razmjerno matrici krutosti sustava). Vrlo visoka osjetljivost turbine na neuravnoteženost očita je, također, i na slici 38., vlastita frekvencija je u samoj blizini radne frekvencije turbine.



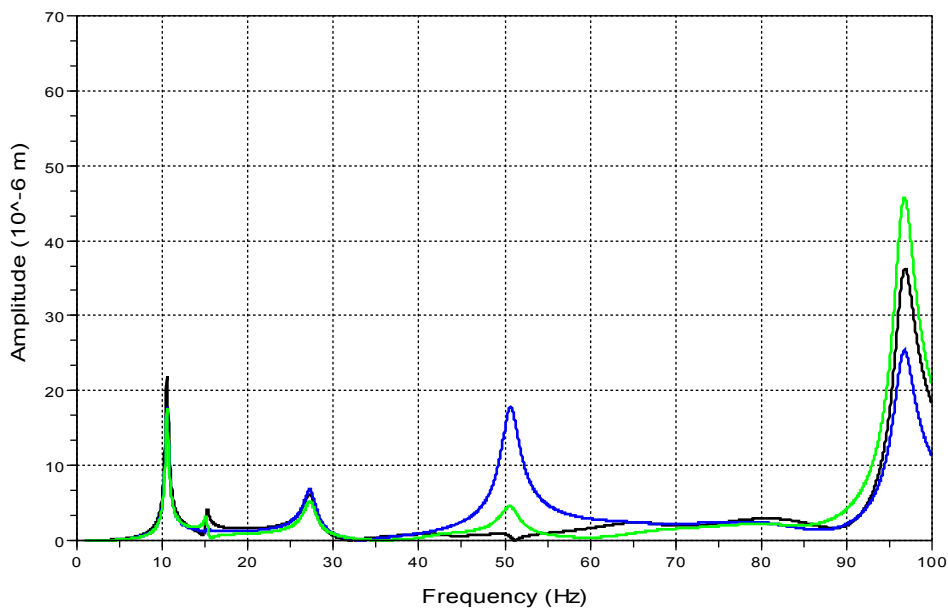
Slika 36. Pojednostavljeni model plinske turbine: načini vibriranja rotora i kućišta plinske turbine kod radne brzine vrtnje rotora (vibracije istosmjerne vrtnji)



Slika 37. Pojednostavljeni model plinske turbine: načini vibriranja rotora i kućišta plinske turbine kod radne brzine vrtnje rotora (vibracije protusmjerne vrtnji)



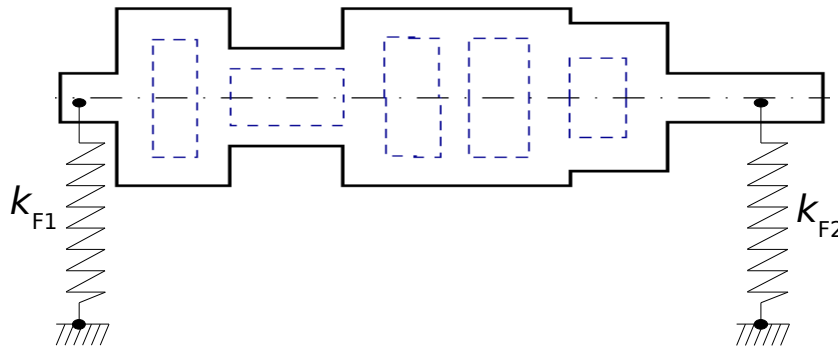
a) rotor plinske turbine: čvorovi 5, 13 i 20



b) kućište plinske turbine: čvorovi 1, 9 i 18

Slika 38. Odziv pojednostavljenog modela plinske turbine na neuravnoteženost

## 7.2 Optimiranje krutosti uljnog filma



Slika 39. Elastično oslonjen rotor

U prvom koraku odabire se krutost uljnog filma. Ovaj korak optimiranja može se primijeniti i za optimiranje razmaka ležajeva i konture rotora u početnoj fazi razvoja nove plinske turbine kada projekt rotora još nije konačan i moguće ga je mijenjati. No u ovom istraživanju pretpostavljeno je da su kontura rotora, razmak ležaja, i koeficijenti krutosti i prigušenja uljnog filma zadani, te se optimiranje dinamičkih svojstava plinske turbine provodi promjenom krutosti oslonaca rotora i kućišta turbine. Prvi korak inženjerskog postupka optimiranja u ovom primjeru je upotrebljen samo za provjeru zadane krutosti uljnog filma.

Potrebni ulazni podaci su:

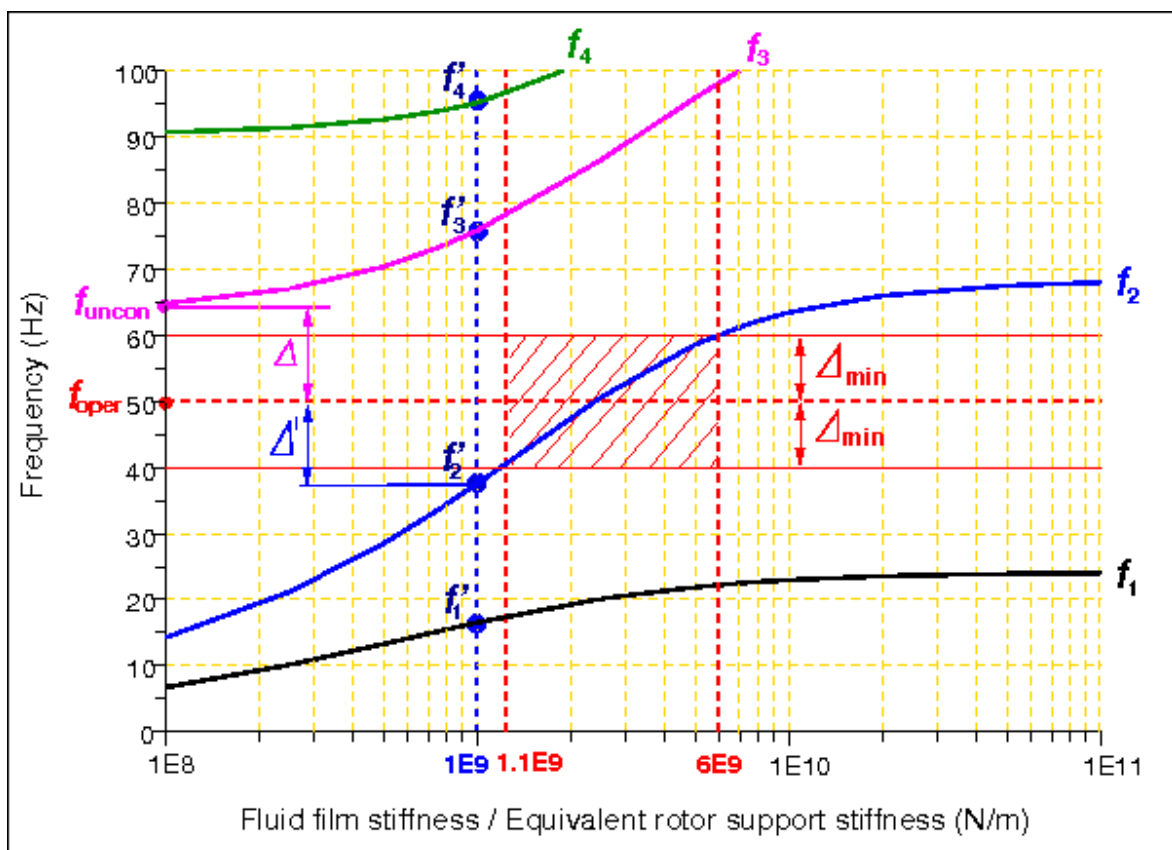
- raspodjela temperature rotora konstanta,
- svojstva materiala konstante,
- raspodjela torzijskog momenta konstanta,
- vanjski i unutarnji promjeri rotora konstante,
- razmak ležajeva konstanta,
- početne krutosti uljnog filma / oslonaca ( $k_{F1}$ ,  $k_{F2}$ ) varijable.



Zahtjevi i ograničenja koji trebaju biti zadovoljena:

- maksimalne i minimalne vrijednosti optimizacijskih varijabli
- dopušteno opterećenje ležajeva
- dopušteno torzijsko i fleksijsko naprezanje
- udaljenosti vlastitih frekvencija od radne frekvencije

Uz pretpostavku da rotor zadovoljava torzijsku i prvu slobodnu fleksijsku vlastitu frekvenciju te dopušteno torzijsko i fleksijsko naprezanje, prvi korak postupka optimiranja svodi se na odabir ekvivalentne krutosti oslonaca, odnosno krutosti uljnog filma u ležajevima ( $k_{F1}$ ,  $k_{F2}$ ) na temelju grafa vlastitih frekvencija rotora plinske turbine u ovisnosti o krutosti oslonaca (slika 40).



Slika 40. Vlastite frekvencije u ovisnosti o krutostima uljnog filma / oslonaca rotora  $k_{F1}$ ,  $k_{F2}$

Objašnjenja oznaka na slici 40. su:

$f_{oper}$	radna frekvencija turbine
$f_{uncon}$	prva slobodna fleksijska vlastita frekvencija rotora (kod radne brzine vrtnje)
$f'_{1,2,3}$	prva, druga i treća vlastita frekvencija kod radne brzine vrtnje za odabranu krutost uljnog filma
$\Delta, \Delta'$	mjera sigurnosti prve slobodne vlastite frekvencije i druge vlastite frekvencije rotora za odabranu krutost uljnog filma
$\Delta_{min}$	minimalna dopuštena udaljenost vlastite frekvencije od radne frekvencije

Apcisa diagrama na slici 40. (krutosti  $k_{F1}$ ,  $k_{F2}$ ) može se shvatiti dvojako: kao ekvivalentna krutost oslonaca rotora ili kao krutost uljnog filma. Ako se kao apcisa uzme ekvivalentna krutost oslonaca rotora, graf se primjenjuje za određivanje slobodne fleksijske frekvencija rotora  $f_{uncon}$  i odabir ekvivalentne krutosti oslonaca na temelju minimalne dopuštene udaljenosti od radne frekvencije  $\Delta_{min}$ .

Ako je apcisa krutost uljnog filma onda graf na slici 40. daje informaciju o položaju fleksijskih frekvencija rotora  $f'_{1,2,3}$  koje predstavljaju granične vrijednosti kada krutost oslonaca ležajeva teži k neizmjereno (asimptote na slici 43. u drugom koraku optimiranja).

Na temelju najmanje dopuštene udaljenosti vlastite frekvencije od radne frekvencije  $\Delta_{min}=10 \text{ Hz}$  određena su dva dopuštena područja ekvivalentne krutosti oslonaca rotora: krutost manja od **1,1e9 N/m** i krutost veća od **7e9 N/m**.

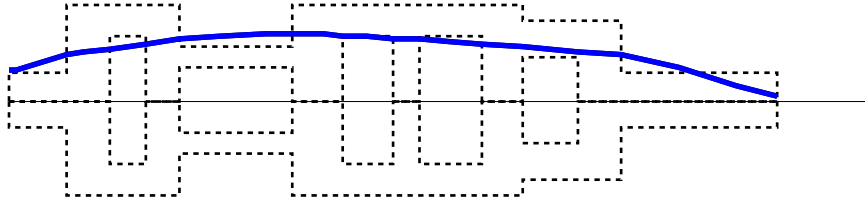
Tablica 3. Rezultati prvog koraka optimiranja

Opis	Vrijednost
Radna frekvencija turbine $f_{oper}$	<b>50 Hz</b>
Dozvoljene vrijednosti ekvivalente krutosti oslonaca	<b>&lt;1,1e9 N/m &gt;7e9 N/m</b>
Zadana krutost uljnog filma $k_{F1}, k_{F2}$	<b>1e9 N/m</b>
Prva slobodna vlastita frekvencija (kod radne brzine vrtnje) $f_{uncon}$	<b>63,2 Hz</b>
Udaljenost od radne frekvencije $\Delta'_1 = f_{uncon} - f_{oper}$	<b>13,2 Hz</b>
Prva vlastita frekvencija (kod radne brzine vrtnje) $f'_1$	<b>16,6 Hz</b>
Druga vlastita frekvencija (kod radne brzine vrtnje) $f'_2$	<b>37,5 Hz</b>
Treća vlastita frekvencija (kod radne brzine vrtnje) $f'_3$	<b>75,8 Hz</b>
Četvrta vlastita frekvencija (kod radne brzine vrtnje) $f'_4$	<b>95,1 Hz</b>
Udaljenost druge vlastite od radne frekvencije $\Delta'_2 = f_{oper} - f'_2$	<b>12,5 Hz</b>

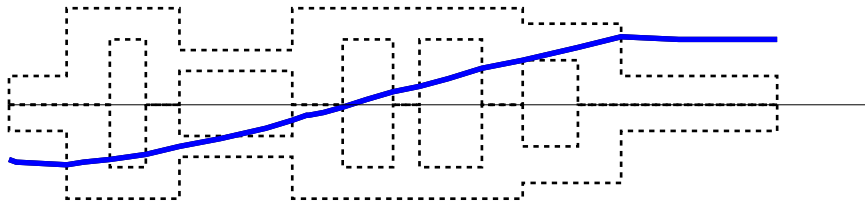
Za zadanu krutost uljnog filma od **1e9 N/m** vlastite frekvencije rotora su izvan nedozvoljenog područja u blizini radne frekvencije turbine ( $\Delta' = 12,5 \text{ Hz} > \Delta_{min}$ ). To potvrđuje da je zadana krutost uljnog filma ispravno odabrana.

Slika 41. predočava načine vibriranja elastično oslonjenog rotora plinske turbine kod radne brzine vrtnje.

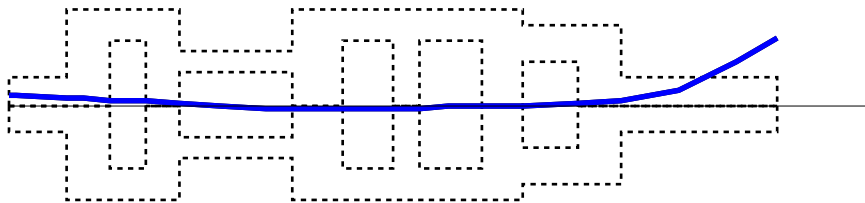
Comp.#1 - Mode 2: 16.6Hz, Ampl. INF.



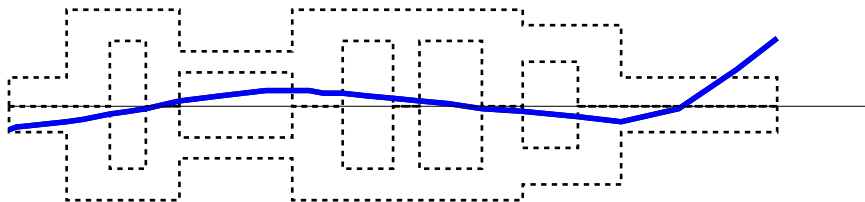
Comp.#1 - Mode 4: 37.5Hz, Ampl. INF.



Comp.#1 - Mode 6: 75.8Hz, Ampl. INF.



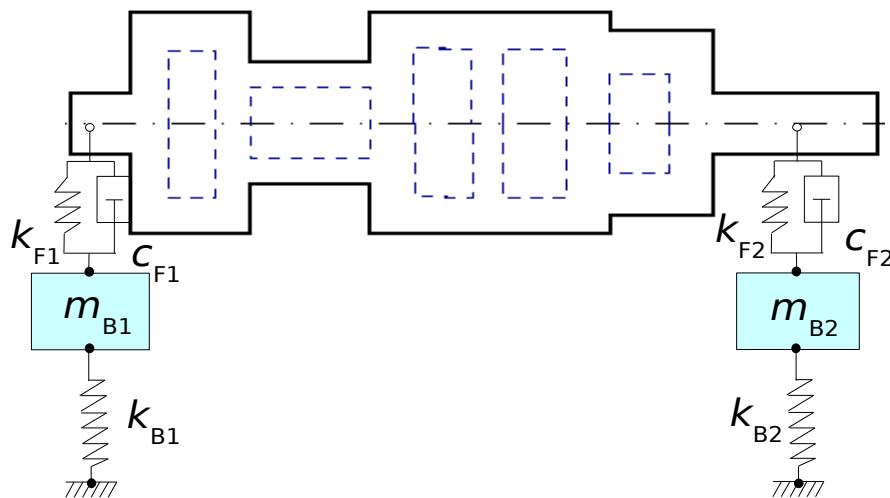
Comp.#1 - Mode 8: 95.1Hz, Ampl. INF.



Slika 41. Prvi korak optimiranja: načini vibriranja rotora plinske turbine

### 7.3 Optimiranje krutosti oslonaca rotora

Drugi korak inženjerskog postupka optimiranja temelji se na složenijem vibracijskom modelu kod kojeg je svaki oslonac ležaja modeliran kao jednostavan mehanički sustav (slika 42). Kontura rotora i koeficijenti krutosti i prigušenja uljnog filma ( $k_{F1}$ ,  $k_{F2}$ ,  $c_{F1}$ ,  $c_{F2}$ .) zadani su ili poznati iz prvog koraka.



Slika 42. Model jednostavno oslonjenog rotora

Zadaća je drugog koraka optimiranja naći mase ( $m_{B1}$ ,  $m_{B2}$ ) i krutosti oslonaca ležajeva ( $k_{B1}$ ,  $k_{B2}$ ) kod kojih rotor plinske turbine zadovoljava vibracijske kriterije fleksijskih vlastitih frekvencija. Drugi korak optimiranja temelji se na izračunu vlastitih frekvencija u ovisnosti o krutostima oslonaca ležajeva (slika 43).

Potrebni ulazni podaci su:

- |  |           |
|--|-----------|
| • krutosti i prigušenja uljnog filma ( $k_{F1}$ , $k_{F2}$ , $c_{F1}$ , $c_{F2}$ ) | konstante |
| • mase oslonaca ležajeva ( $m_{B1}$ , $m_{B2}$ )                                   | varijable |
| • krutost oslonaca ležajeva ( $k_{B1}$ , $k_{B2}$ )                                | varijable |

Zahtjevi i ograničenja koja trebaju biti zadovoljena:

- minimalne i maksimalne vrijednosti optimizacijskih varijabli,
- fleksijske vlastite frekvencije i modalna prigušenja.

Optimalno rješenje drugog koraka:

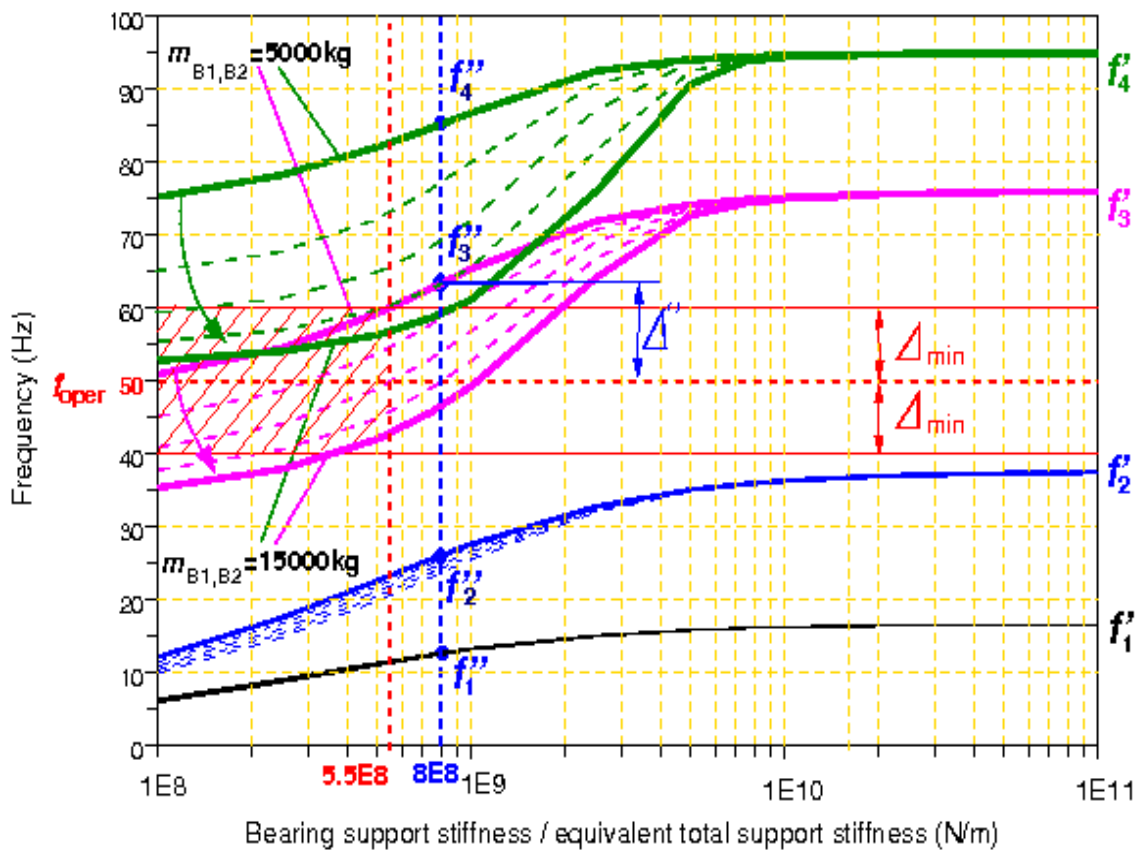
- optimalna krutost uljnog filma (iz prvog koraka),
- optimalne mase i krutosti oslonaca ležajeva.

Apcisa na slici 43. se može shvatiti dvojako: kao krutost oslonaca ležajeva ili kao ekvivalentna ukupna krutost oslonaca ležajeva i kućišta turbine. Ako se shvati kao ekvivalentna ukupna krutost oslonaca ležajeva i kućišta turbine, graf daje informaciju o dopuštenom području krutosti oslonaca na temelju minimalne dopuštene udaljenosti vlastite frekvencije od radne frekvencije  $\Delta_{\min}$ .

Ako se apcisa shvati kao krutost oslonaca ležajeva, graf služi za određivanje vlastitih frekvencija rotora  $f''_{1,2,3}$  koje predstavljaju granične vlastite frekvencije kod krutih oslonaca kućišta turbine.

U drugom koraku optimiranja mijenjaju se krutosti oslonaca ležajeva ( $k_{B1}$ ,  $k_{B2}$ ) i mase oslonaca ležajeva ( $m_{B1}$ ,  $m_{B2}$ ). Mase oslonaca mijenjane su u području od 5000 kg do 15000 kg s korakom od 2500 kg. Iz grafa na slici 43. očito je da mase oslonaca imaju najveći utjecaj na treću i četvrtu vlastitu frekvenciju rotora kod nižih vrijednosti krutosti oslonaca (povećanjem mase oslonaca vlastite frekvencije se smanjuju, a smanjenjem mase se povećavaju).

Rezultati drugog koraka optimiranja dani su u tablici 4. Radi povećanja treće vlastite frekvencije rotora, odabrana je masa oslonaca od **5000 kg**, što je tri puta manje nego kod početnog konstrukcijskog rješenja kod kojeg je masa oslonaca **15000 kg**.



- $f_{oper}$  radna frekvencija turbine  
 $f'_{1,2,3}$  vlastite frekvencije rotora za odabranu krutost uljnog filma (iz prvog koraka optimizacije)  
 $f''_{1,2,3}$  vlastite frekvencije rotora za odabrane krutosti i masu oslonaca  
 $\Delta''$  udaljenost vlastite frekvenicije od radne brzine vrtnje  
 $\Delta_{min}$  minimalna dopuštena udaljenost vlastite frekvenicije od radne brzine vrtnje  
 $m_{B1}, m_{B2}$  mase oslonaca ležajeva

Slika 43. Vlastite frekvencije rotora u ovisnosti o krutostima oslonaca ležajeva / ekvivalentnim krutostima oslonaca ležajeva i kućišta turbine  $k_{B1}, k_{B2}$

Tablica 4. Rezultati drugog koraka optimiranja

Opis	Vrijednost
Radna frekvencija turbine $f_{oper}$	<b>50 Hz</b>
Odabrane mase oslonaca $m_{B1}, m_{B2}$	<b>5000 kg</b>
Dozvoljeno područje ekvivalente krutosti oslonaca	<b>&gt;5,5e8 N/m</b>
Odabrane krutosti oslonaca ležajeva $k_{B1}, k_{B2}$	<b>8e8 N/m</b>
Prva vlastita frekvencija (kod radne brzine vrtnje) $f''_1$	<b>12,6 Hz</b>
Druga vlastita frekvencija (kod radne brzine vrtnje) $f''_2$	<b>26,0 Hz</b>
Treća vlastita frekvencija (kod radne brzine vrtnje) $f''_3$	<b>63,3 Hz</b>
Četvrta vlastita frekvencija (kod radne brzine vrtnje) $f''_4$	<b>85,2 Hz</b>
Udaljenost treće vlastite od radne frekvencije $\Delta'' = f''_3 - f_{oper}$	<b>13,3Hz</b>

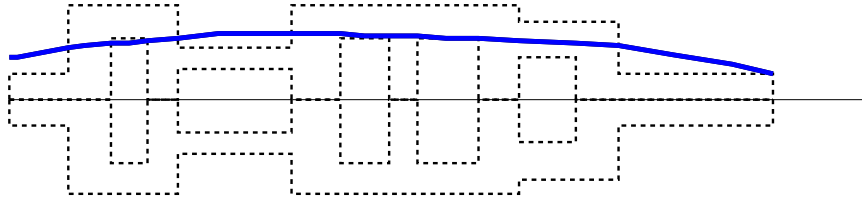
Slično kao i u prvom koraku iz minimalne dopuštene udaljenosti vlastite frekvencije od radne frekvencije proizlazi dopušteno područje krutosti oslonaca ležajeva **>5,5e8 N/m**.

Kako vlastite frekvencije  $f''_{1,2,3}$  predstavljaju granične frekvencije koje se mogu doseći potpuno krutim osloncima kućišta turbine, odabrana je krutost oslonaca ležajeva od **8e8 N/m**, koja je nešto veća od minimalne dopuštene krutosti oslonaca ležajeva od **5,5e8 N/m**.

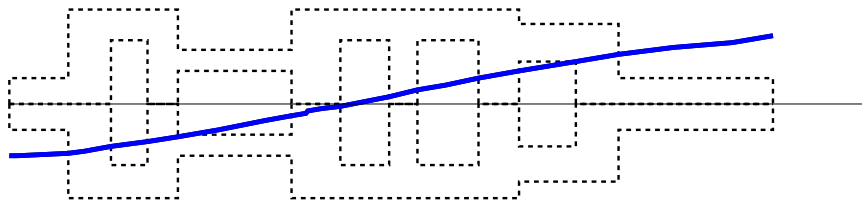
Načini vibriranja modela jednostavno oslonjenog rotora s odabranom masom i krutošću oslonaca predočeni su na slici 44. Udaljenost treće vlastite frekvencije rotora od radne frekvencije je  $\Delta'' = \mathbf{13,3 Hz} > \Delta_{min} = \mathbf{10 Hz}$ , što znači da je uvjet minimalne udaljenosti zadovoljen.



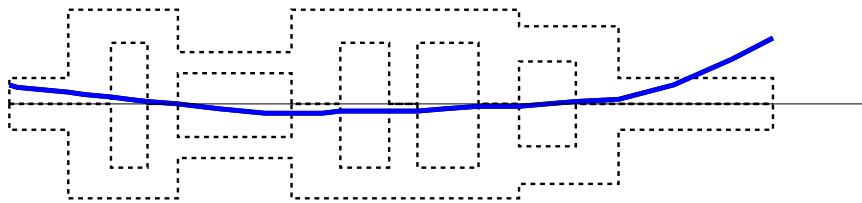
Comp.#1 - Mode 2: 12.6Hz, Ampl. 39.7



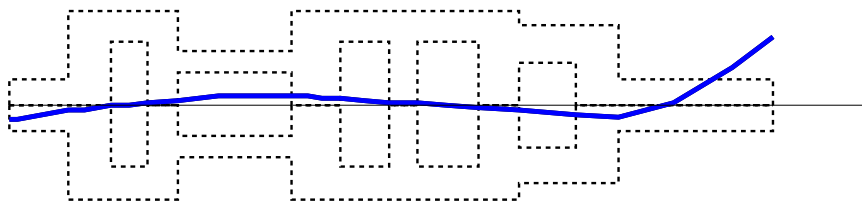
Comp.#1 - Mode 4: 26Hz, Ampl. 20.1



Comp.#1 - Mode 6: 63.3Hz, Ampl. INF.



Comp.#1 - Mode 8: 85.2Hz, Ampl. 26.8



Slika 44. Drugi korak optimiranja: načini vibriranja rotora plinske turbine

## 7.4 Optimiranje krutosti oslonaca plinske turbine

Treći korak provodi se na vibracijskom modelu cijele plinske turbine (slika 34). Krutost uljnog filma i oslonci ležajeva su zadani ili određeni u prethodna dva koraka. Cilj je trećeg koraka optimiranja određivanje optimalne krutosti oslonaca kućišta plinske turbine i, ako je potrebno, provjeriti odabrane parametre oslonaca ležajeva iz prethodnog koraka.

S motrišta određivanja krutosti oslonaca kućišta plinske turbine, treći korak sličan je drugom koraku. Međutim, određivanje krutosti oslonaca kućišta turbine iz grafa vlastitih frekvencija moguće je samo ako postoji područje krutosti oslonaca kućišta kod kojeg je uvjet minimalne dopuštene udaljenosti vlastite od radne frekvencije zadovoljen. Ako to nije slučaj, krutost oslonaca kućišta turbine određuje se iz grafa osjetljivosti na neuravnoteženost. Općenito rečeno, udaljenost vlastite od radne frekvencije sadržana je u kriteriju osjetljivosti na neuravnoteženost. U ovom primjeru prikazana su oba postupka: određivanje krutosti na temelju minimalne dopuštene udaljenosti vlastite od radne frekvencije i na temelju maksimalne dopuštene osjetljivosti na neuravnoteženost.

Potrebni ulazni podaci su:

- |  |           |
|--|-----------|
| ● krutosti i prigušenja uljnog filma ( $k_{F1}$ , $k_{F2}$ , $c_{F1}$ , $c_{F2}$ ) | konstante |
| ● mase oslonaca ležajeva ( $m_{B1}$ , $m_{B2}$ )                                   | konstante |
| ● krutosti oslonaca ležajeva ( $k_{B1}$ , $k_{B2}$ )                               | konstante |
| ● model kućišta turbine  | konstanta |
| ● krutosti oslonaca kućišta turbine ( $k_{S1}$ , $k_{S2}$ )                        | varijable |

Zahtjevi i ograničenja koja trebaju biti zadovoljena:

- minimalne i maksimalne vrijednosti varijabli,
- fleksijske vlastite frekvencije turbine i modalna prigušenja.

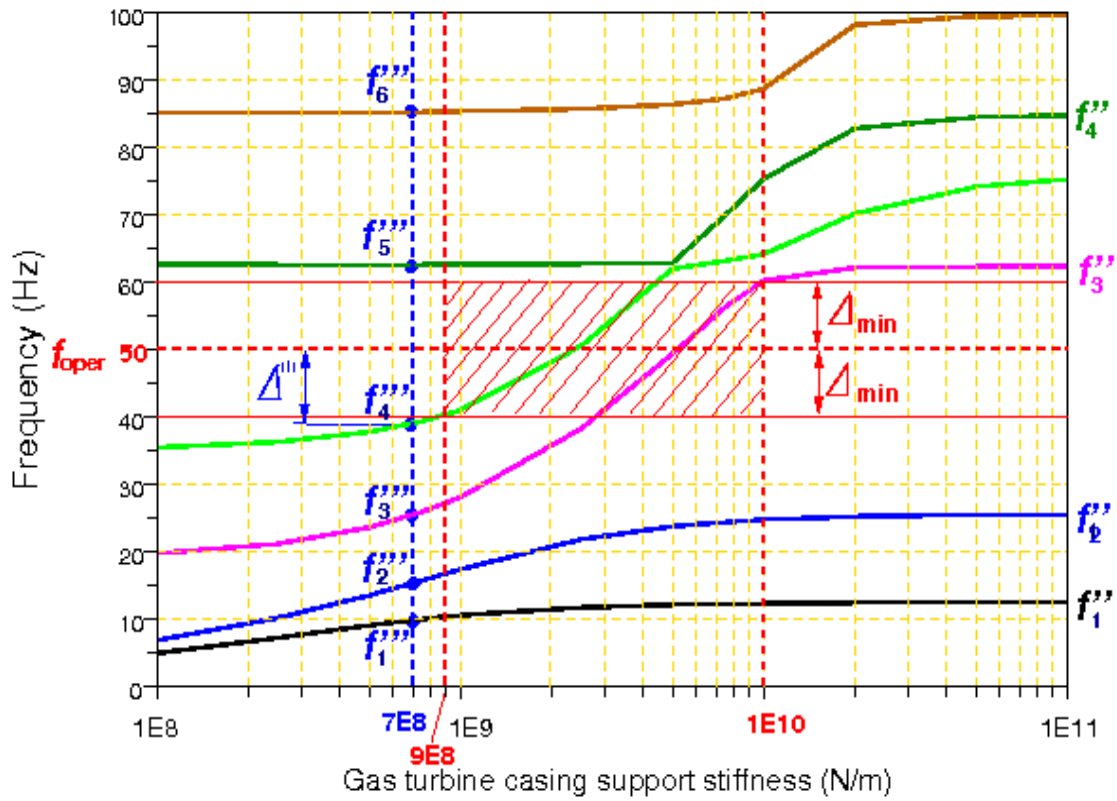
Konačno optimalno rješenje:

- optimalne krutosti uljnog filma (iz prvog koraka optimiranja),
- optimalne mase i krutosti oslonaca ležajeva (iz drugog koraka optimiranja),
- optimalne krutosti oslonaca turbine kod kojih turbina ima minimalnu osjetljivost na neuravnoteženost.

Slično kao u prvom tako i u drugom koraku optimiranja, na temelju grafa vlastitih frekvencija i minimalne dopuštene udaljenosti vlastite od radne frekvencije od **10 Hz**, proizlazi dopušteno područje krutosti oslonaca kućišta **<9e8 N/m** i **>1e10 N/m** (slika 45).

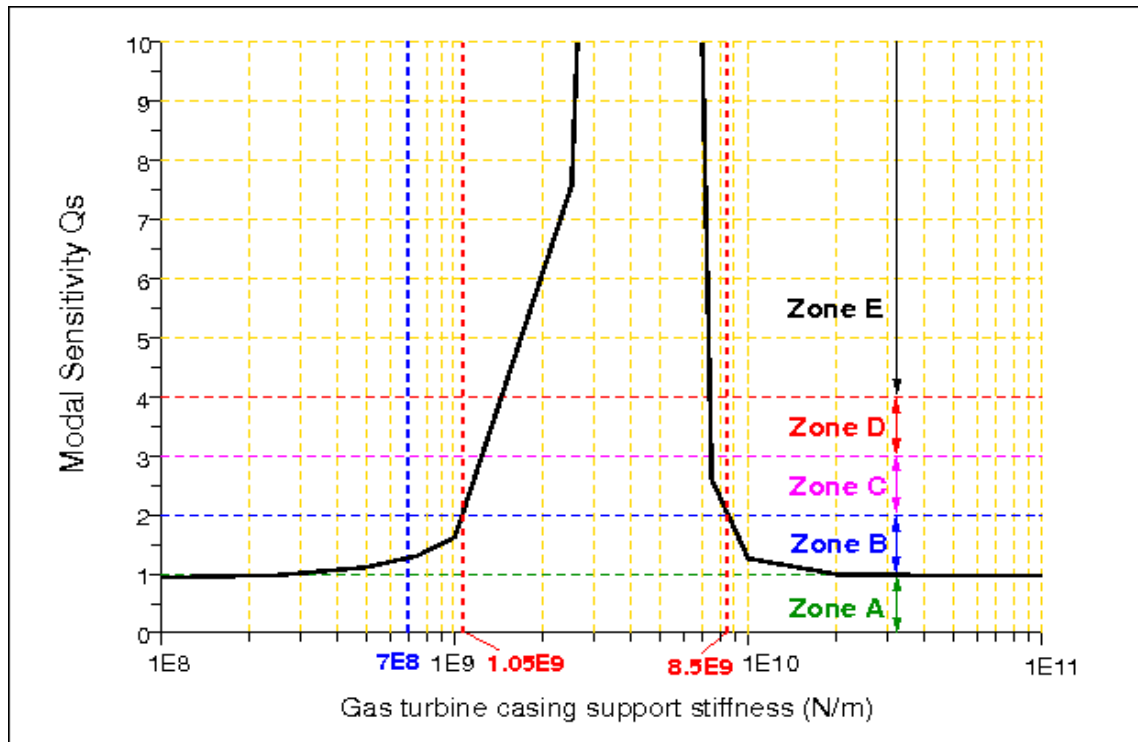
Na temelju uvjeta niske osjetljivost turbine na neuravnoteženost (područja A i B prema ISO 10814), iz grafa osjetljivosti na slici 46., krutosti oslonaca turbine moraju biti ili manje od **1,05e9 N/m** ili veće od **8,5e9 N/m**. Očito je da je uvjet najmanje dopuštene udaljenosti vlastite od radne frekvencije ( $\Delta > \Delta_{min} = 10$  Hz) nešto stroži od uvjeta najveće dopuštene osjetljivosti na neuravnoteženost ( $Q_s < Q_{smax} = 2$ ).

Rezultati drugog koraka optimiranja dani su u tablici 5. Određena je krutost oslonaca kućišta od **7e8 N/m** koja daje udaljenost četvrte vlastite frekvencije od radne frekvencije  $\Delta''' = 11,0$  Hz (slika 45.) i osjetljivost turbine na neuravnoteženost  $Q_s = 1,25$  (područje osjetljivost B, slika 46). Tako su zadovoljeni i uvjet minimalne udaljenosti vlastite frekvencije i uvjet maksimalne osjetljivosti na neuravnoteženost. Osjetljivost na neuravnoteženost optimiranog modela plinske turbine znatno je manja od osjetljivost i početnog konstrukcijskog rješenja ( $Q_s = 20,3$ ).



- $f_{oper}$  radna frekvencija turbine
- $f''_{1,2,3}$  vlastite frekvencije rotora za odabrane krutosti i mase oslonaca (iz drugog koraka optimiranja)
- $f'''_{1,2,3}$  vlastite frekvencije rotora za odabrane krutosti oslonaca
- $\Delta'''$  udaljenost vlastite frekvencije od radne brzine vrtnje
- $\Delta_{min}$  minimalna dopuštena udaljenost vlastite frekvencije od radne brzine vrtnje

Slika 45. Vlastite frekvencije u ovisnosti o krutostima oslonaca kućišta  $k_{s1}$ ,  $k_{s2}$

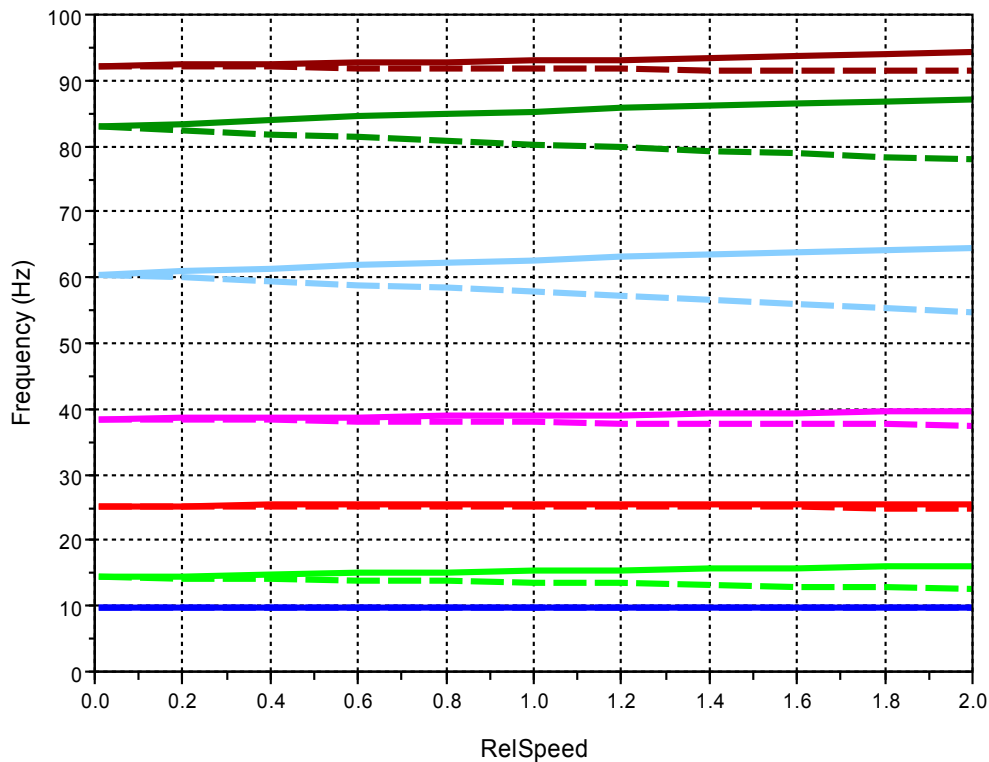


Slika 46. Osjetljivost na neuravnoteženost u ovisnosti o krutostima oslonaca kućišta turbine  $k_{S1}$ ,  $k_{S2}$

Tablica 5. Rezultati trećeg koraka optimiranja

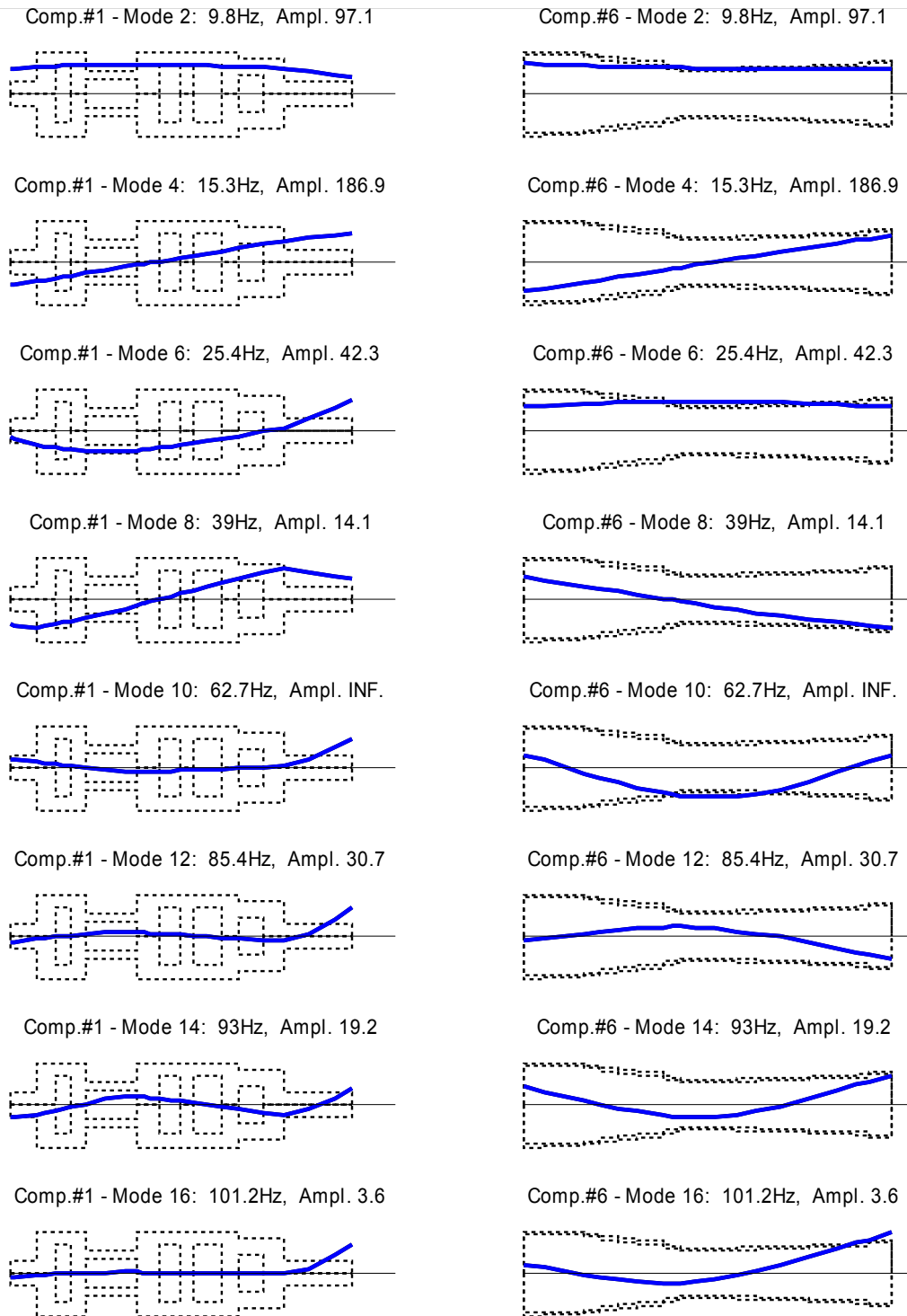
Opis	Vrijednost
Dozvoljeno područje ekvivalente krutosti oslonaca	<b>&lt;9e8 N/m</b> <b>&gt;1e10 N/m</b>
Odabrane krutosti oslonaca ležajeva $k_{B1}$ , $k_{B2}$	<b>7e8 N/m</b>
Prva vlastita frekvencija (kod radne brzine vrtnje) $f''_1$	<b>9,8 Hz</b>
Druga vlastita frekvencija (kod radne brzine vrtnje) $f''_2$	<b>15,3 Hz</b>
Treća vlastita frekvencija (kod radne brzine vrtnje) $f''_3$	<b>25,4 Hz</b>
Četvrta vlastita frekvencija (kod radne brzine vrtnje) $f''_4$	<b>39,0 Hz</b>
Peta vlastita frekvencija (kod radne brzine vrtnje) $f''_5$	<b>62,7 Hz</b>
Šesta vlastita frekvencija (kod radne brzine vrtnje) $f''_6$	<b>85,4 Hz</b>
Udaljenost četvrte vlastite od radne frekvencije $\Delta'' = f_{oper} - f''_4$	<b>11,0 Hz</b>

Grafovi vlastitih frekvencija optimalnog modela plinske turbine u ovisnosti o brzine vrtnje rotora predloženi su na slici 47. Pune krivulje odnose se na vibracije istosmjerne vrtnji a crtkane na vibracije protusmjerne vrtnji rotora.

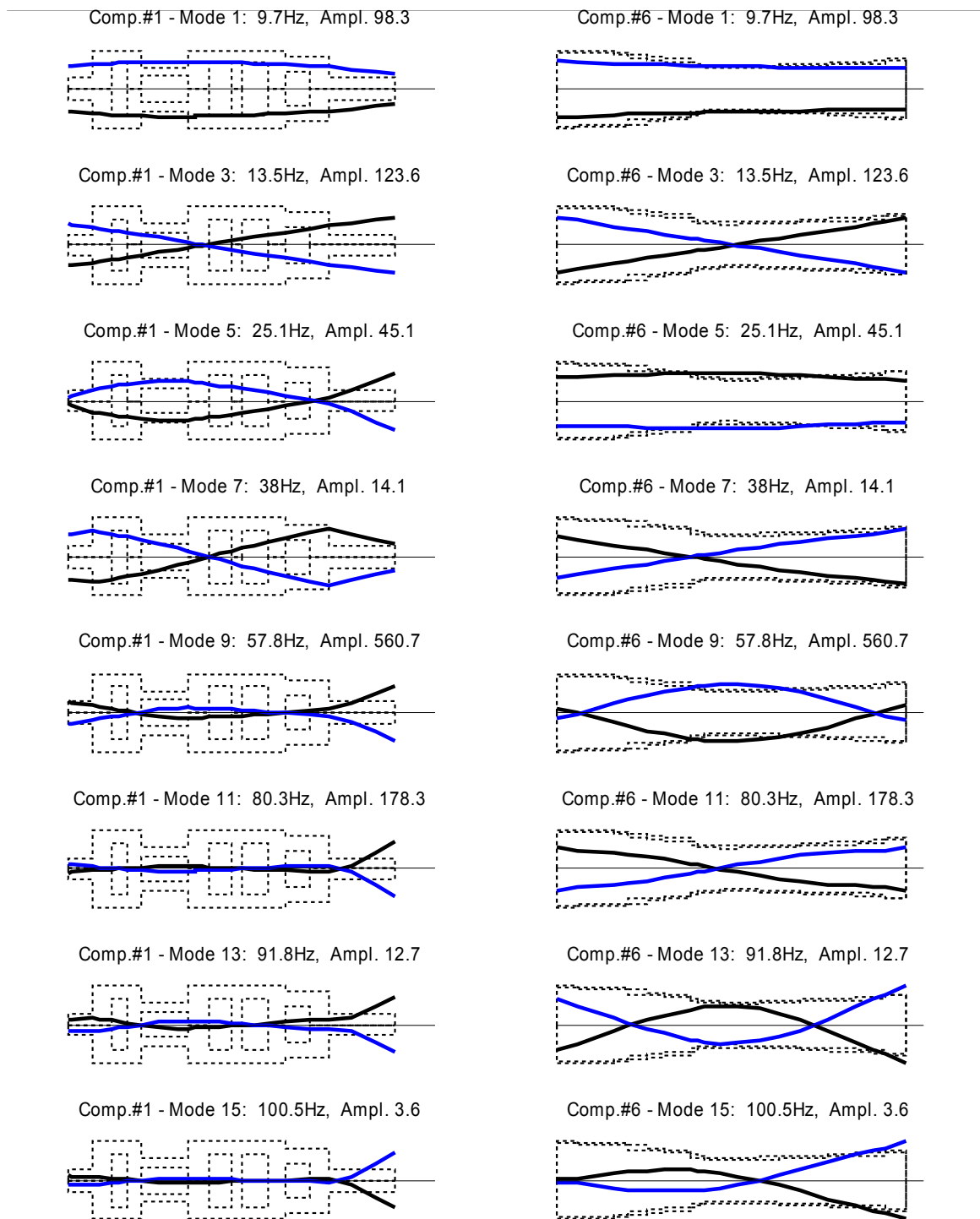


Slika 47. Inženjerski postupak: vlastite frekvencije optimalnog modela plinske turbine u ovisnosti o brzini vrtnje rotora

Slika 48. predložava načine vibriranja plinske turbine istosmjerne vrtnji, a slika 49. načine vibriranja protusmjerne vrtnji (pri radnoj brzini vrtnje rotora). Kao i kod početnog modela turbine, kod vibracija istosmjernih vrtnji načini vibriranja u smjeru velike i male poluosi su u fazi, a kod protusmjernih vibracija su u protufazi.



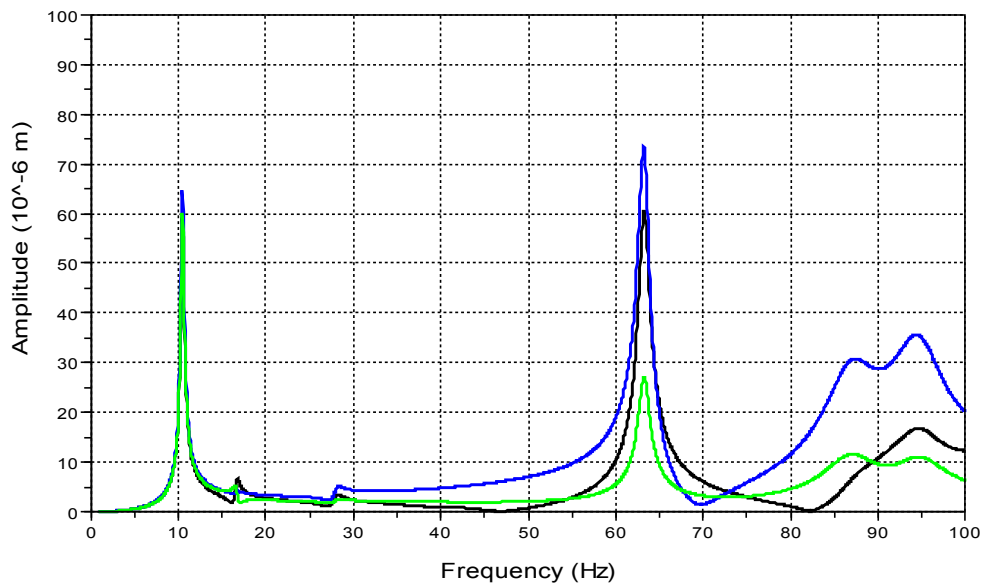
Slika 48. Inženjerski postupak: načini vibriranja optimalnog modela plinske turbine kod radne brzine vrtnje rotora (vibracije istosmjerne vrtnji)



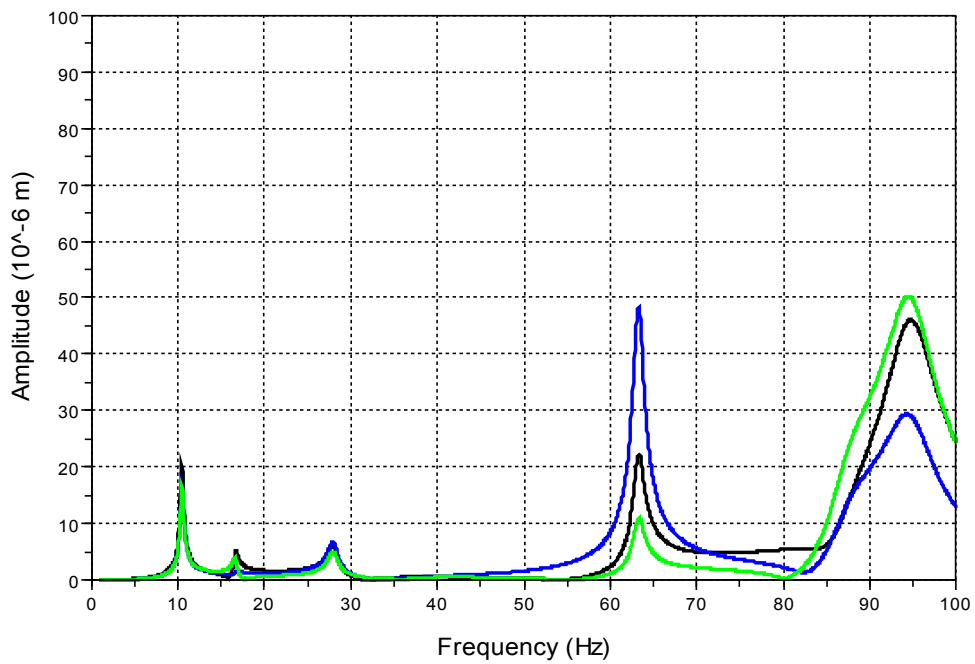
Slika 49. Inženjerski postupak: načini vibriranja optimalnog modela plinske turbine kod radne brzine vrtnje rotora (vibracije protusmjerne vrtnji)



Odziv sustava uslijed neuravnoteženosti kod uzbude prve, druge i treće kritične brzine predložen je na slici 50. Grafovi potvrđuju da je uvjet minimalne dopuštene udaljenosti vlastite od radne frekvencije zadovoljen (nema kritične brzine vrtnje unutar nedopuštenog područja oko radne brzine vrtnje).



a) rotor plinske turbine: čvorovi 5, 13 i 20



b) kućište plinske turbine: čvorori 1, 9 i 18

Slika 50. Inženjerski postupak: odziv optimalnog modela na neuravnoteženost

## 8 Postupak optimiranja planiranjem pokusa

### 8.1 Uvod

Da bi se kakvoća nekog proizvoda, procesa ili sustava mogla kontinuirano poboljšavati, vrlo je bitno razumijeti odziv sustava na vanjske utjecaje. Pokusi se u inženjerskom okruženju provode da bi se **istražila**, **procijenila** i **potvrdila** neka pretpostavka. Istraživanje se provodi radi tumačenja i razumijevanja sakupljenih podataka. Procjenjivanje predstavlja određivanje utjecaja pojedinih projektnih varijabli na ponašanje sustava, dok potvrđivanje znači provjeru rezultata dobivenih pokusom. Glavna zadaća pokusa jest istraživanje odnosa između ključnih projektnih parametara i odziva sustava.

Uobičajeni je postupak u inženjerskoj praksi mijenjanje jedne po jedne projektne varijable. Uspjeh takvim pristupom ovisi o domišljatosti, iskustvu i intuiciji. Osim toga, takav način može zahtijevati mnogo sredstava, a u konačnici će dati ograničene informacije o procesu odnosno proizvodu.

U drugu ruku, statističko razmišljanje i statističke metode igraju važnu ulogu kod planiranja, vođenja, razmatranja i tumačenja podataka dobivenih pokusom. Kad mnogo parametara utječe na svojstvo nekog proizvoda, najučinkovitiji je put prema optimalnom rješenju planiranjem pokusa tako da se do valjanog, pouzdanog i razumnog zaključka može doći efikasno i ekonomično.

Kod planiranja pokusa, inženjer ciljno mijenja projektne parametre da bi odredio kako se uslijed toga mijenja odziv sustava. Važno je napomenuti da ne utječu svi parametri jednako na odziv sustava. Neki imaju velik utjecaj, neki osrednji, a neki pak nemaju gotovo nikakav utjecaj na odziv sustava. Stoga je glavna zadaća pažljivog planiranja i provedbe pokusa pronaći skup projektnih

parametara koji ima najveći utjecaj i zatim odrediti vrijednosti tih parametara kod kojih će sustav, proizvod ili process imati najbolja svojstva (za dane zahtjeve i ograničenja).

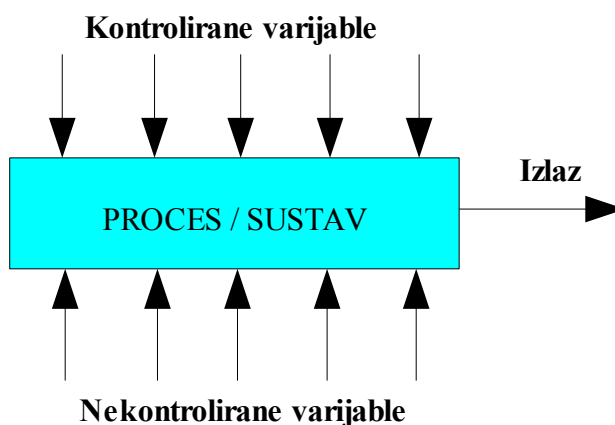
Planiranje pokusa sastoji se od sljedećih koraka:

- 1) **hipoteza** - pretpostavka koju treba dokazati i koja motivira ekperiment,
- 2) **pokus** - serija pokusa kojom se istražuje hipoteza,
- 3) **razmatranje** - provođenje statističkih izračuna i razmatranje rezultata dobivenih pokusima,
- 4) **tumačenje** - razumijevanje rezultata pokusa i statističkih izračuna,
- 5) **zaključak** - potvrda ili odbacivanje hipoteze. Često se moraju napraviti dodatni pokusi da bi se hipoteza mogla potvrditi, a ponekad se početna hipoteza mora prilagoditi ili čak potpuno promijeniti.

Kroz znanstveno planiran i vođen pokus određuju se parametri koji imaju najveći utjecaj na srednju vrijednost i odstupanje mjerenih podataka. Na temelju mjerenih rezultata može se predvidjeti odziv sustava za različite vrijednosti projektnih parametara.

Za razumijevanje projektiranog ekperimenta, ključno je potpuno razumjeti sustav odnosno proces koji se razmatra. Proces ovdje predstavlja transformiranje ulaznih podataka u odziv sustava. Ulazni podaci ili projektni parametri mogu biti materijali, metode, okolina, strojevi, postupci, itd. dok je odziv sustava neko svojstvo ili kakvoća proizvoda.

Kod planiranja pokusa ciljno se mijenjaju ulazne varijable da bi se promatrale promjene odziva sustava. Informacije dobivene iz pravilno planiranih, provedenih i razmatranih pokusa rabe se za poboljšanje funkcionalnosti proizvoda, za smanjenje vremena potrebnog za razvoj ili za smanjenje prevelikih odstupanja u proizvodnom procesu.



Slika 51. Općeniti model procesa / sustava

U svakodnevnim situacijama, neke varijable ili parametri mogu se vrlo lako kontrolirati, a neke je teško ili skupo kontrolirati za vrijeme svakodnevne proizvodnje i kod standardnih uvjeta. Slika 51. predložuje općeniti model procesa ili sustava.

Na slici 51. izlaz je mjereno svojstvo proizvoda. Varijable koje je moguće kontrolirati mogu se lako mijenjati tijekom pokusa i one imaju ključnu ulogu pri procesu optimiranja. U drugu ruku, varijable koje nije moguće kontrolirati su odgovorne za odstupanja ili nedosljednost svojstava proizvoda. Stoga je važno odrediti optimalne vrijednosti varijabli koje se mogu kontrolirati da bi se minimizirao efekt varijabli koje je nemoguće kontrolirati. To je temeljna strategija robustnog projekta.

## 8.2 Metodologija planiranja pokusa

Metodologija planiranja pokusa je u načelu podijeljena u četiri faze:

- 1) planiranje,
- 2) projektiranje,
- 3) provedba i
- 4) razmatranje.

### 8.2.1 Planiranje

Faza planiranja sastoji se od sljedećih koraka:

#### Prepoznavanje i postavljanje problema

Jasno i točno postavljanje problema rezultira boljim razumijevanjem onoga što treba biti napravljeno. Postavljeni problem treba sadržavati mjerljiv cilj koji ima praktičnu vrijednost.

#### Odabir odziva ili mjere kakvoće

Odabir odziva ili mjere kakvoće vrlo je bitan za uspjeh bilo kojeg planiranja pokusa. Odziv može biti numerička varijabla ili atribut; odziv u obliku numeričke varijable (kao što je duljina, debljina, promjer, jačina) daju više informacija nego odziv u obliku atributa (kao što su dobro/loše, uspješno/neuspješno ili da/ne).

#### Odabir procesnih ili projektnih parametara

Za prepoznavanje i odabir potencijalnih parametara važni su: inženjersko znanje i iskustvo, povijesni podaci, analiza uzroka i posljedica, te razmatranje i diskutiranje sakupljenih podataka o sustavu. Odabir procesnih odnosno projektnih parametara vrlo je važan korak u planiranju pokusa. Ako su važni parametri izostavljeni onda planiranje pokusa neće polučiti nikakvo poboljšanje. Dobro je provesti selektivni pokus u početnoj fazi istraživanja s ciljem utvrđivanja parametara koji imaju najveći utjecaj.

#### Razvrstavanje parametara

Sljedeći je korak razvrstavanje parametara prema tome da li se njima može upravljati za vrijeme pokusa ili bi njima bilo previše složeno ili skupo upravljati u postojećim uvjetima.

### Određivanje broja razina pojedinih parametara

Broj razina broj je vrijednosti koju parametar može imati za vrijeme pokusa. U početnoj fazi pokusa dvije razine su obično dovoljne. U kasnijoj fazi pokusa najčešće se primjenjuju tri razine, a u pojedinim slučajevima može biti potrebno i više od tri razine.

### Lista međusobnog djelovanja

Da bi se moglo efektivno tumačiti rezultate, vrlo je poželjno dobro razumijeti međusobno djelovanje dvaju parametra.

## 8.2.2 Projektiranje

U toj fazi izabran je najprikladniji plan pokusa: faktorski, djelomično faktorski ili selektivni, itd. Ovdje treba istaknuti da veličina pokusa ovisi o broju faktora i međusobnih djelovanja, broju razina svakog od faktora i sredstvima namijenjenim za provedbu pokusa.

## 8.2.3 Provedba pokusa

U toj fazi provodi se planirani pokus i prikupljaju se rezultati.

## 8.2.4 Rasprava

Nakon provedenog pokusa razmatraju se i tumače rezultati s ciljem:

- određivanja parametara koji utječu na srednju vrijednost,
- određivanja parametara koji utječu na odstupanje,
- određivanja vrijednosti parametara koji daju optimalni rezultat,
- donošenja zaključka da li je daljnje poboljšanje moguće.

### 8.3 Postupak optimiranja planiranjem pokusa

Postupak optimiranja planiranjem pokusa prikazan je na jednostavnom modelu plinske turbine (slika 34).

#### 8.3.1 Odabir projektnih parametara

Kao i kod inženjerskog postupka optimiranja, odabrano je šest projektnih parametara: mase oslonaca ležajeva ( $m_{B1}$ ,  $m_{B2}$ ), krutosti oslonaca ležajeva ( $k_{B1}$ ,  $k_{B2}$ ) i krutosti oslonaca kućišta turbine ( $k_{S1}$ ,  $k_{S2}$ ) (slika 34). Razlika je međutim što su, zbog jednostavnosti, kod inženjerskog postupka parametri mijenjani istovremeno za prvi i drugi oslonac, dok su ovdje mijenjani odvojeno.

Odabrani projektni parametri su bezdimenzijski, a predstavljaju omjer vrijednosti parametara konačnog i početnog konstrukcijskog rješenja (3 znači da parametar ima tri puta veću vrijednost od početne).

#### 8.3.2 Provedba pokusa: simuliranje odziva sustava

Nakon točnog i jasno sročnog problema i odabira projektnih parametara, slijedi provedba pokusa i razmatranje rezultata. Provedba planiranog pokusa svodi se na:

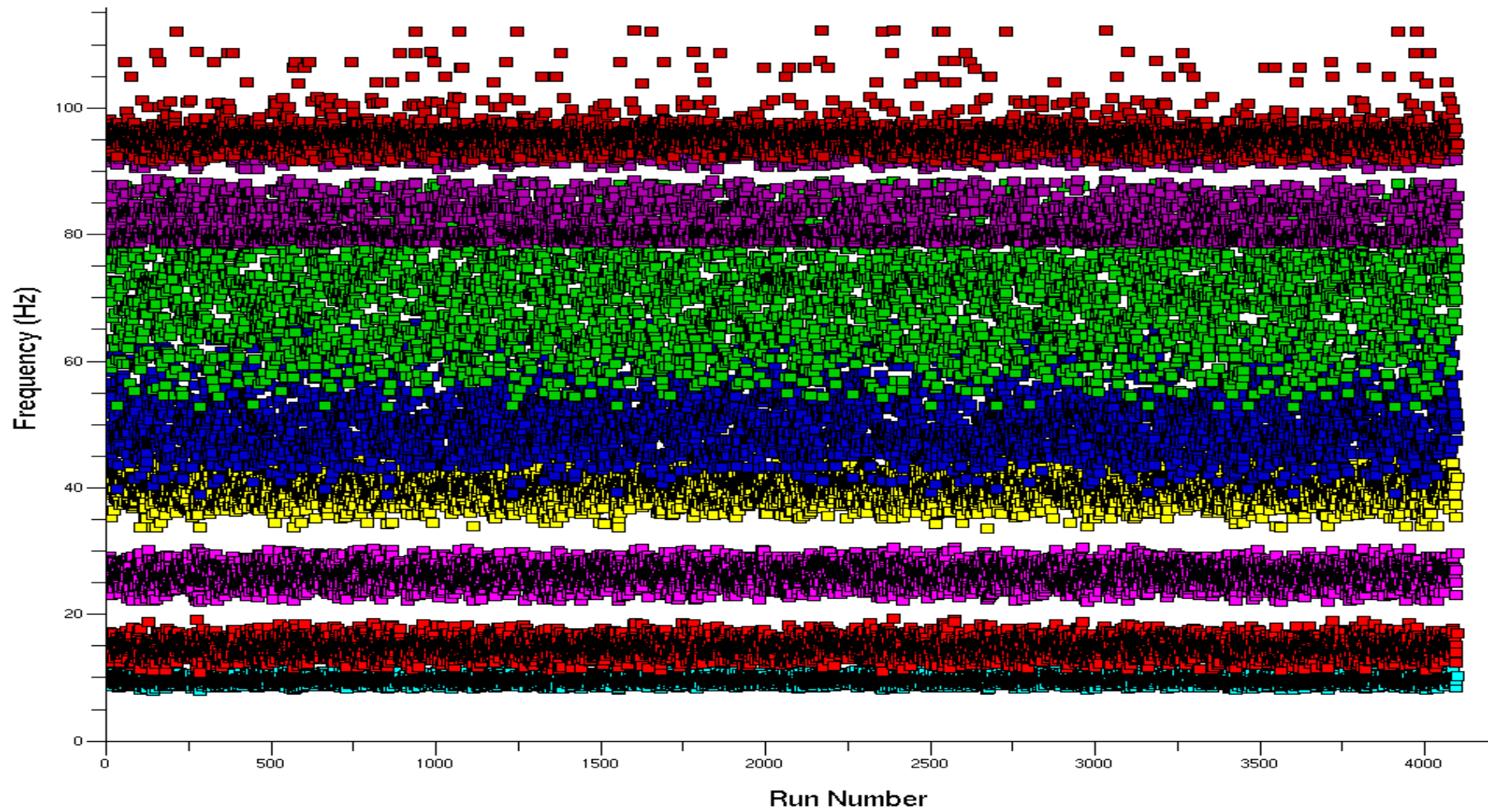
1. proračun kompleksnih vlastitih vrijednosti sustava,
2. određivanje omjera brzina  $\eta$  i bezdimenzijskog prigušenja  $\zeta_n$ ,
3. izračunavanje osjetljivosti na neuravnoteženost  $Q_s$  (simulirani odziv sustava).

U tablici 6. dan je sažeti opis pokusa: korišteni model, nazivi parametara i njihova donja i gornja vrijednost, naziv odziva sustava, broj koraka, izmjerena minimalna i maksimalna vrijednost, itd. Odabrani projektni parametri mijenjani su u potpunom faktorskom pokusu na četiri razine s ciljem minimiziranja osjetljivosti plinske turbine na neuravnoteženost. Šest projektnih parametara na četiri razine rezultiralo je s ukupno 4096 koraka.

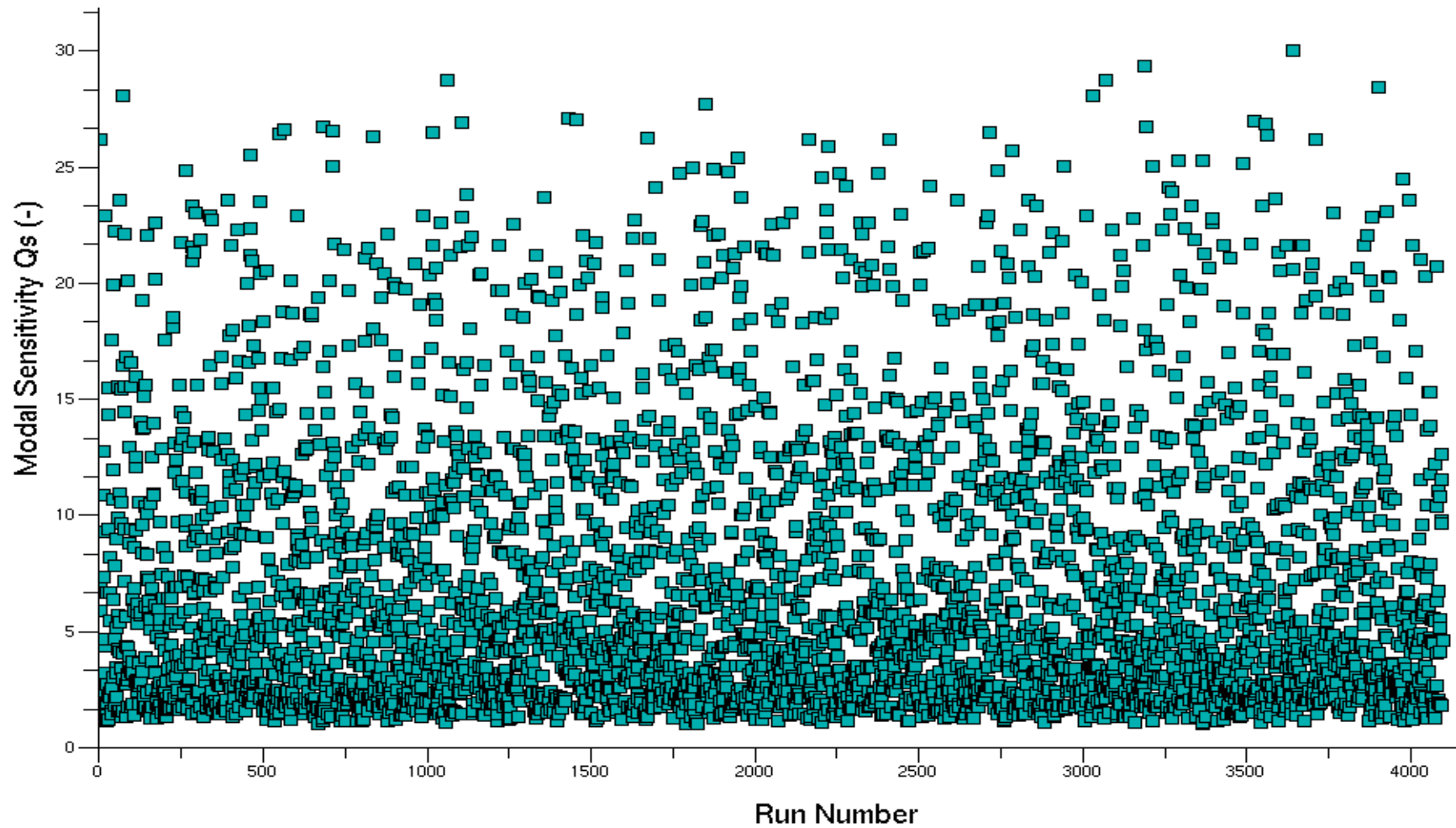


Tablica 6. Sažetak plana pokusa

<b>Design Summary</b>										
<b>Study Type</b>	Factorial			<b>Runs</b>	4096					
<b>Initial Design</b>	Full Factorial			<b>Blocks</b>	No Blocks					
<b>Center Points</b>	0									
<b>Design Model</b>	2FI									
<b>Factor</b>	<b>Name</b>	<b>Units</b>	<b>Type</b>	<b>Low Actual</b>	<b>High Actual</b>	<b>Levels:</b>				
A	SuppMass1	-	Categoric	0.33	1.33	4				
B	SuppStiff1	-	Categoric	0.5	1.25	4				
C	CasSuppStiff1	-	Categoric	0.5	1.25	4				
D	SuppMass2	-	Categoric	0.33	1.33	4				
E	SuppStiff2	-	Categoric	0.5	1.25	4				
F	CassSuppStiff2	-	Categoric	0.5	1.25	4				
<b>Response</b>	<b>Name</b>	<b>Units</b>	<b>Obs</b>	<b>Analysis</b>	<b>Minimum</b>	<b>Maximum</b>	<b>Mean</b>	<b>Std. Dev.</b>	<b>Ratio</b>	<b>Trans</b>
Y1	Modal Sensitivity-		4096	Factorial	1.03	30.00	7.22	5.82	29.24	None



Slika 52. Vlastite frekvencije u ovisnosti o rednom broju koraka



Slika 53. Osjetljivost na neuravnoteženost u ovisnosti o rednom broju koraka

Izračunate vlastite frekvencije u ovisnosti o broju koraka predočene su na slici 52. Na temelju tog grafa teško se može zaključiti postoji li mogućnost poboljšanja vibracijskih svojstava, dok graf osjetljivosti na neuravnoteženost (slika 53.) nedvojbeno pokazuje da se visoka osjetljivost na neuravnoteženost početnog konstruktivnog rješenja od **20,4** (područje E prema ISO 10814) može smanjiti na **1,0** (granica područja A i B).

Optimalne vrijednosti projektnih parametara kod, kojih osjetljivost na neuravnoteženost ima minimalnu vrijednost, najlakše je odrediti razvrstavanjem rezultata pokusa po rastućoj osjetljivosti na neuravnoteženost. (tablica 7).

Najmanja osjetljivost na neuravnoteženost od **1,03** postiže se promjenom vrijednosti pet projektnih parametara (označenih žutom bojom u tablici 7.): smanjenjem mase prvog i drugog oslonca za **66%** (parametri A i D) i krutosti drugog oslonca ležaja i oba oslonca kućišta turbine za **50%** (parametri C, E i F).

Ako se neki projektni parametar ne može mijenjati (zbog ograničenog budžeta za razvoj plinske turbine ili uslijed ostalih projektnih ograničenja), tada se kao optimum može odabrati rješenje kod kojeg će promjene projekta biti manje zahtjevne. Primjer takvog rješenja označen je plavom bojom u tablici 7.: smanjenje mase prvog i drugog oslonca za **66%** (parametri A i D) i krutosti drugog oslonca kućišta turbine za **50%** (parametar F).

Takvim rješenjem postiže se nešto veća osjetljivost na neuravnoteženost nego kod prethodnog rješenja, ali je potrebno mijenjati samo tri projektna parametra (promjene početnog konstruktivnog rješenja potrebne su samo na mjestima tih triju parametara).

Tablica 7. Dio rezultata poredan po rastućoj osjetljivosti na neuravnoteženost

Korak	A	B	C	D	E	F	Qs
1789	<b>0,33</b>	1,25	<b>0,5</b>	<b>0,33</b>	<b>0,5</b>	<b>0,5</b>	<b>1,03</b>
669	<b>0,33</b>	1	<b>0,5</b>	<b>0,33</b>	<b>0,5</b>	<b>0,5</b>	<b>1,03</b>
3365	<b>0,33</b>	1	0,75	<b>0,33</b>	0,5	<b>0,5</b>	<b>1,03</b>
1826	<b>0,33</b>	0,5	0,5	<b>0,33</b>	1	<b>0,5</b>	<b>1,06</b>
3156	<b>0,33</b>	0,75	0,5	<b>0,33</b>	0,75	<b>0,5</b>	<b>1,07</b>
1056	<b>0,33</b>	1,25	0,75	<b>0,33</b>	0,5	<b>0,5</b>	<b>1,07</b>
3367	<b>0,33</b>	1	1	<b>0,33</b>	0,5	<b>0,5</b>	<b>1,08</b>
3541	0,33	1	0,5	0,33	0,5	0,75	1,09
2201	0,33	0,5	0,75	0,33	1	0,5	1,09
2883	0,33	0,75	0,75	0,33	0,75	0,5	1,11
3006	0,33	1	0,75	0,33	0,5	0,75	1,13
2072	0,33	0,5	0,5	0,33	1,25	0,5	1,14
784	0,33	1,25	1	0,33	0,5	0,5	1,14
2757	0,33	0,5	1	0,33	1	0,5	1,14
3411	0,33	1,25	0,5	0,33	0,5	0,75	1,14
1512	0,33	1	0,5	0,33	0,75	0,5	1,16
1396	0,33	1	1,25	0,33	0,5	0,5	1,16
2284	0,33	0,5	0,75	0,33	0,75	0,75	1,16
3674	0,33	0,5	0,5	0,33	0,75	0,75	1,16
682	0,33	0,5	1,25	0,33	0,75	0,5	1,16
3596	0,33	0,5	1	0,33	0,75	0,5	1,16
749	0,33	0,5	0,75	0,33	0,75	0,5	1,16
3978	0,33	0,5	0,5	0,33	0,75	0,5	1,16
3872	0,33	0,5	1	0,33	0,75	0,75	1,16
738	0,33	0,75	1,25	0,33	0,5	0,5	1,17

Grafovi osjetljivosti na neuravnoteženost u ovisnosti od pet projektnih parametara predočeni su na slici 54. Vrijednosti korelacija pokazuju da su značajni projektni parametri (vrijednosti korelacija su veće od 0,1):

- masa prvog oslonca ležaja (A )
- krutost prvog oslonca ležaja (B)
- masa drugog oslonca ležaja (D)
- krutost drugog oslonca ležaja (E)

dok su krutost prvog i drugog oslonca kućišta (parametri C i F) zanemarivi. Korelacija se primjenjuje kod selektivnog pokusa za odabir značajnih parametara.

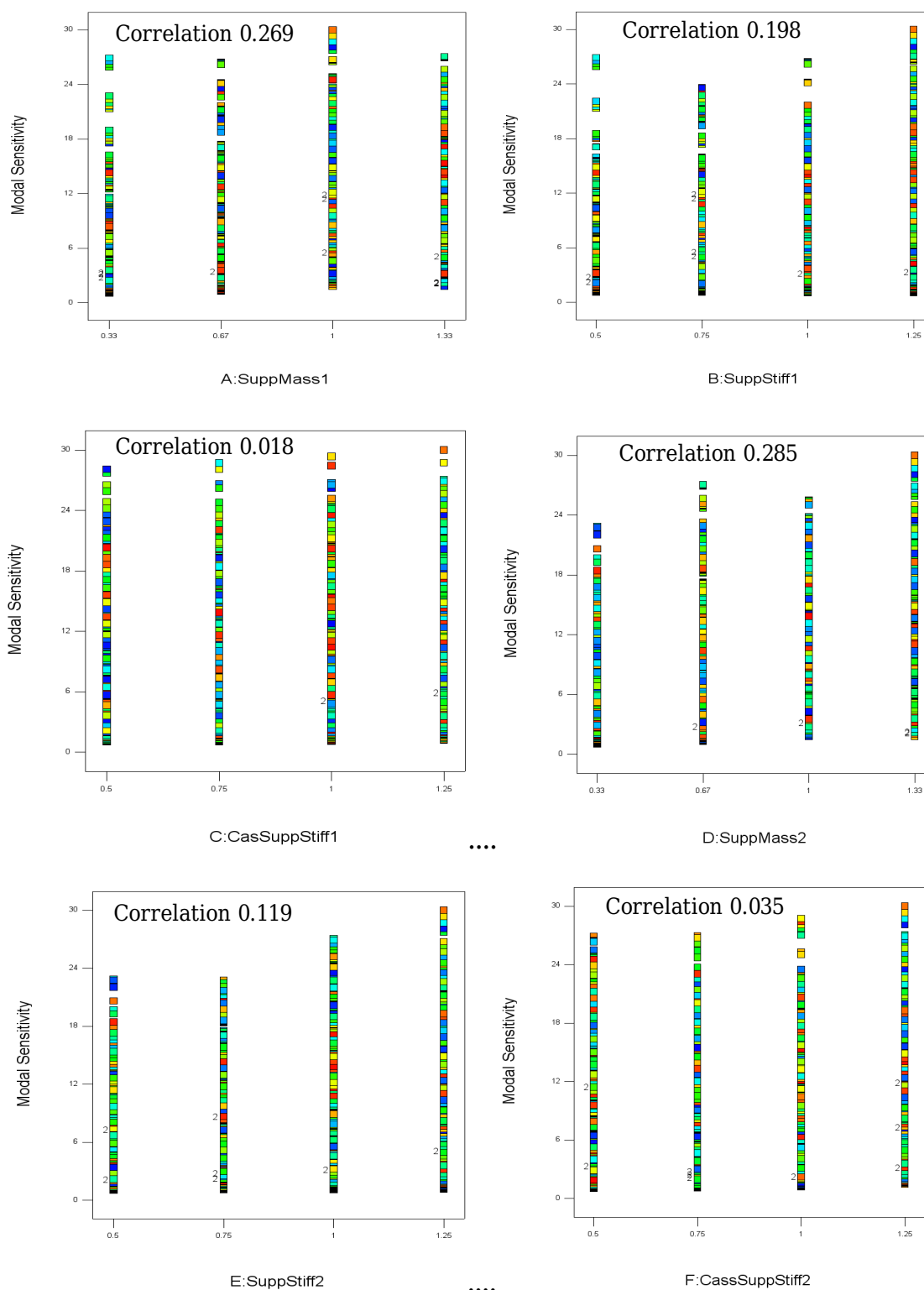
### 8.3.3 Provjera statističkog modela pokusa

Statistički model pokusa se u ovom radu nije primjenjivao za optimiranje dinamičkih svojstava plinske turbine, već se odabir optimalnih projektnih parametara provodio jednostavnim razvrstavanjem rezultata pokusa po rastućoj osjetljivosti na neuravnoteženost. Provjera statističkog modela pokusa ovdje je prikazana samo informativno.

U tablici 8. prikazani su odabrani efekti modela s vrijednostima njihovih utjecaja na osjetljivost plinske turbine na neuravnoteženost. Vrijednost "Prob > F" manja od 0,05 označava značajne parametre u modelu, vrijednost veća od 0,1 pokazuje da parametri zanemarivi. Rezultati u tablici 8. potvrđuju da su A, B, D i E značajni parametri, a C i F zanemarivi.

F vrijednost modela od 25,48 ističe da je odabrani model značajan, pa se taj model može primijeniti.

## 8 Postupak optimiranja planiranjem pokusa



Slika 54. Osjetljivost na neuravnoteženost u ovisnosti o projektnim parametrima

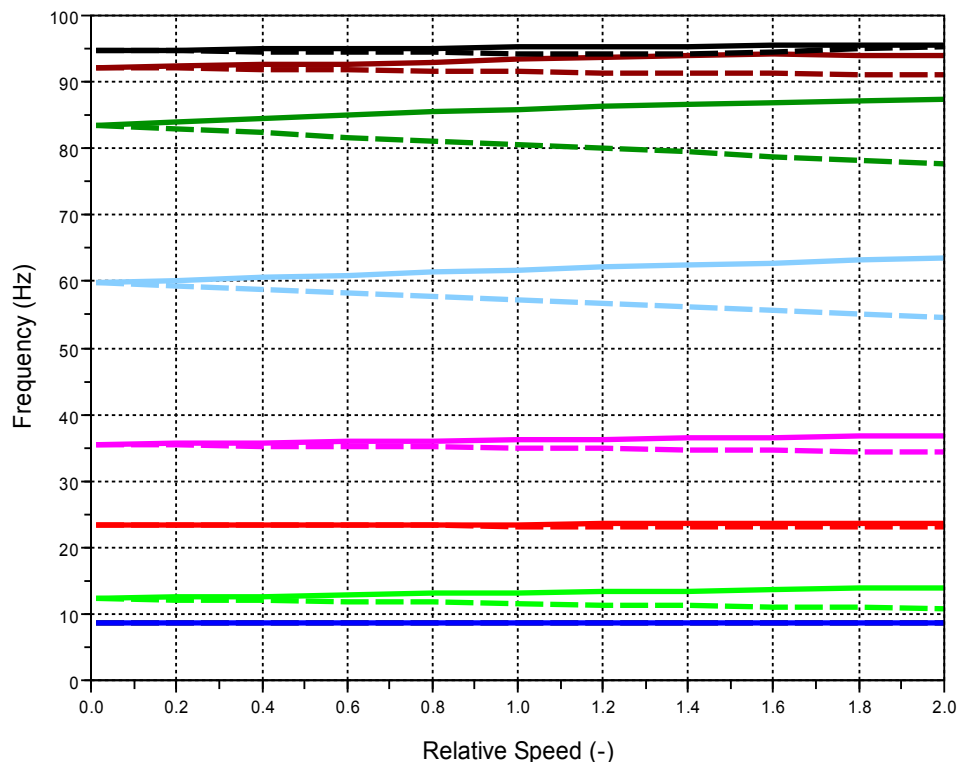
Tablica 8. Analiza varijance

<b>ANOVA for selected factorial model</b>						
<b>Analysis of variance table [Classical sum of squares - Type II]</b>						
<b>Source</b>	<b>Sum of Squares</b>	<b>df</b>	<b>Mean Square</b>	<b>F Value</b>	<b>p-value Prob &gt; F</b>	
Model	1.046E+05	153	683.70	78.71	< 0.0001	significant
<i>A-SuppMass</i>	12127.91	3	4042.64	465.43	< 0.0001	
<i>B-SuppStiff1</i>	6628.56	3	2209.52	254.38	< 0.0001	
<i>C-CasSuppSi</i>	44.14	3	14.71	1.69	0.1661	
<i>D-SuppMass.</i>	11768.04	3	3922.68	451.62	< 0.0001	
<i>E-SuppStiff2</i>	5972.03	3	1990.68	229.19	< 0.0001	
<i>F-CassSuppS</i>	172.24	3	57.41	6.61	0.0002	
AB	30170.47	9	3352.27	385.95	< 0.0001	
AC	75.32	9	8.37	0.96	0.4683	
AD	12493.07	9	1388.12	159.81	< 0.0001	
AE	1761.26	9	195.70	22.53	< 0.0001	
AF	74.09	9	8.23	0.95	0.4819	
BC	105.88	9	11.76	1.35	0.2032	
BD	939.65	9	104.41	12.02	< 0.0001	
BE	1809.96	9	201.11	23.15	< 0.0001	
BF	11.04	9	1.23	0.14	0.9985	
CD	26.48	9	2.94	0.34	0.9623	
CE	34.18	9	3.80	0.44	0.9155	
CF	0.72	9	0.080	9.207E-03	1.0000	
DE	19731.20	9	2192.36	252.40	< 0.0001	
DF	216.13	9	24.01	2.76	0.0032	
EF	444.16	9	49.35	5.68	< 0.0001	



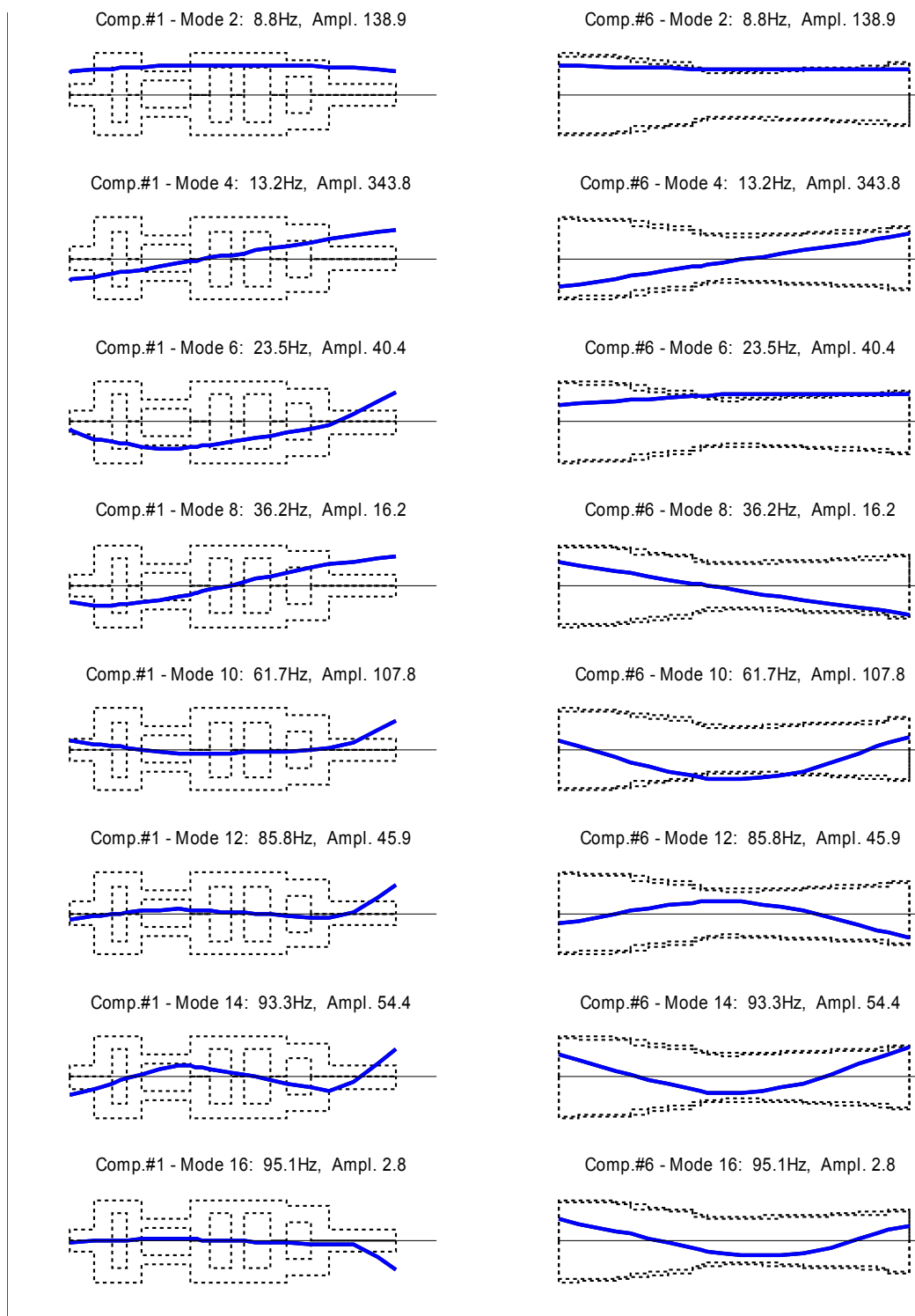
### 8.3.4 Optimalni model plinske turbine

Grafovi vlastitih frekvencija optimalnog modela plinske turbine u ovisnosti o brzine vrtnje rotora predočeni su na slici 55. Pune krivulje odnose se na vibracije istosmjerne vrtnji, a crtkane na vibracije protusmjerne vrtnji rotora.

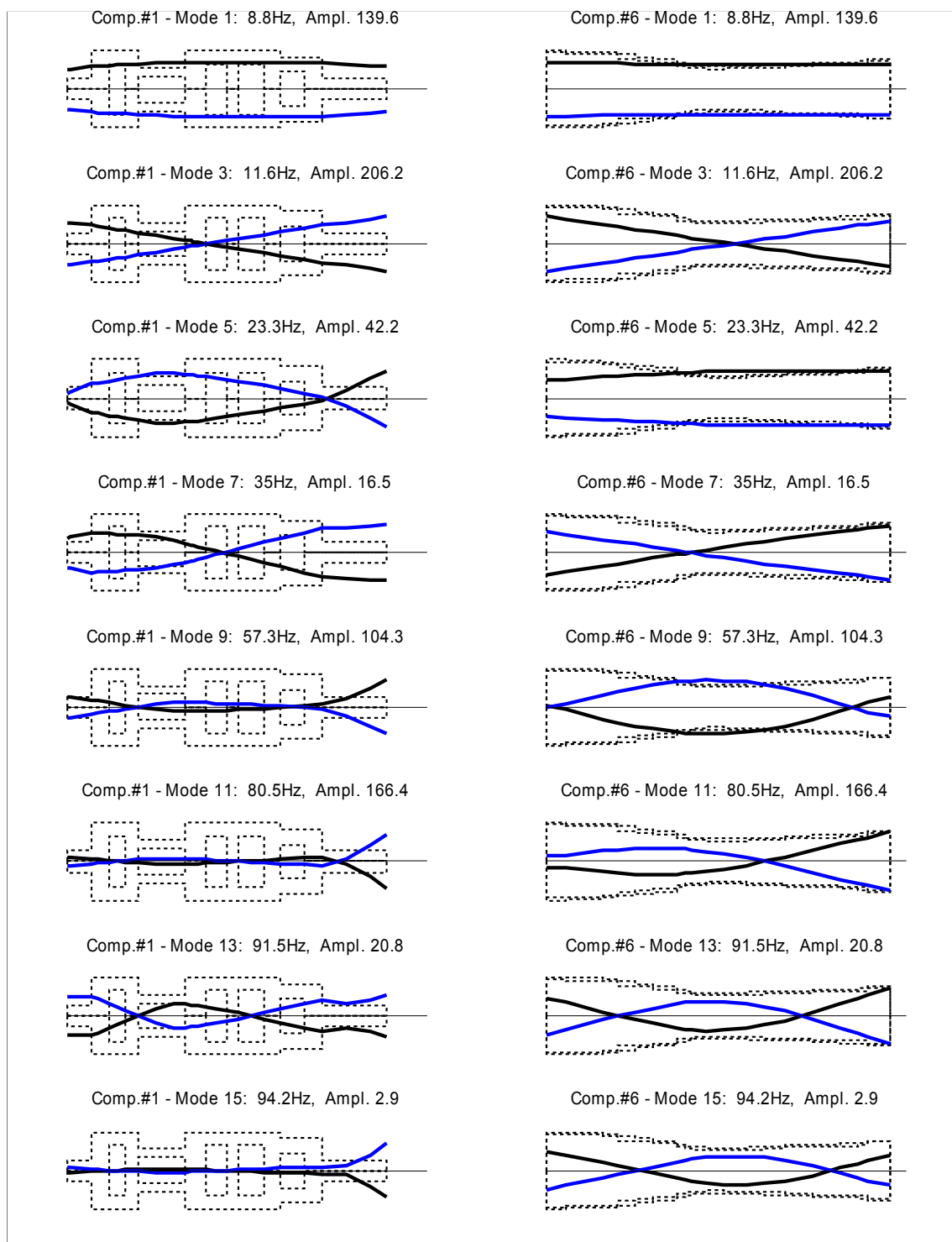


Slika 55. Planiranje pokusa: vlastite frekvencije optimalnog modela plinske turbine u ovisnosti o brzini vrtnje rotora

Slika 56. predočava načine vibriranja plinske turbine istosmjerne vrtnji, a slika 57. načine vibriranja protusmjerne vrtnji (pri radnoj brzini vrtnje rotora). Kao i kod početnog modela turbine, kod vibracija istosmjernih vrtnji načini vibriranja u smjeru velike i male poluosi su u fazi, a kod protusmjernih vibracija su u protufazi.



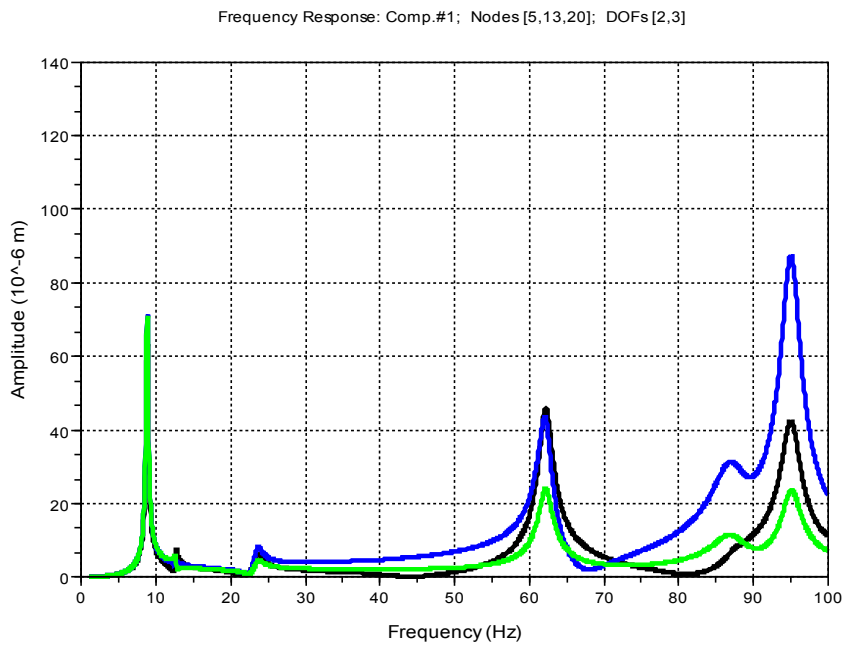
Slika 56. Planiranje pokusa: načini vibriranja optimalnog modela plinske turbine kod radne brzine vrtnje rotora (vibracije istosmjerne vrtnji)



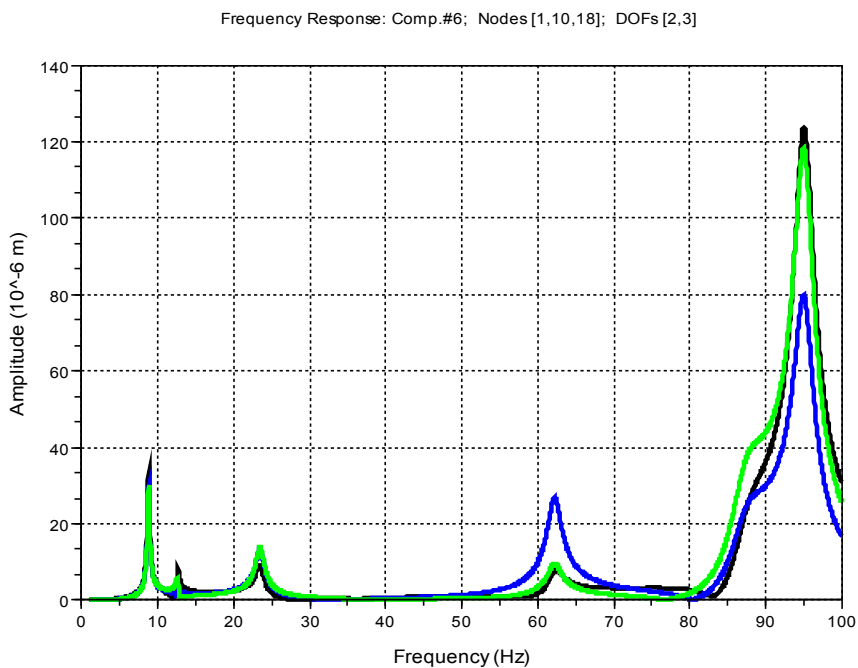
Slika 57. Planiranje pokusa: načini vibriranja optimalnog modela plinske turbine kod radne brzine vrtnje rotora (vibracije protusmjerne vrtnji)

Odziv sustava uslijed neuravnoteženosti kod uzbude prve, druge i treće kritične brzine predložen je na slici 58. Grafovi potvrđuju da je uvjet minimalne dopuštene udaljenosti vlastitih od radne frekvencije zadovoljen (nema kritične brzine vrtnje unutar nedopuštenog područja oko radne brzine vrtnje).

## 8 Postupak optimiranja planiranjem pokusa



a) rotor plinske turbine: čvorovi 5, 13 i 20



b) kućište plinske turbine: čvorori 1, 9 i 18

Slika 58. Planiranje pokusa: odziv optimalnog modela na neuravnoteženost

## 9 Usporedba konstrukcijskih rješenja

U tablici 9. uspoređeni su rezultati tri konstrukcijska rješenja:

1. početnog konstrukcijskog rješenja
2. optimalnog rješenja dobivenog inženjerskim postupkom
3. optimalnog rješenja dobivenog postupkom planiranja pokusa

S motrišta kakvoće vibracijskih svojstava, odnosno s motrišta osjetljivosti na neuravnoteženost, oba optimalna rješenja jesu značajno poboljšanje spram početnog konstrukcijskog rješenja: osjetljivost na neuravnoteženost optimalnih rješenja jest u području B prema ISO 10841 (niska osjetljivost na neuravnoteženost) dok je osjetljivost početnog konstrukcijskog rješenja na neuravnoteženost u području E (vrlo visoka osjetljivost na neuravnoteženost).

S motrišta procjene složenosti mogućih optimalnih rješenja, odnosno potrebnih promjena početnog konstrukcijskog rješenja, rješenje dobiveno inženjerskim postupkom nešto je složenije od rješenja dobivenog postupkom planiranja pokusa, jer zahtjeva promjenu svih šest projektnih parametara, dok rješenje postupkom planiranja pokusa zahtjeva promjenu pet projektnih parametara.

Tablica 9. Usporedba konstrukcijskih rješenja

Konstrukcijsko rješenje	Početno konstrukcijsko rješenje	Optimum dobiven inženjerskim pristupom	Optimum dobiven planiranin pokusom
Vrijednost projektnih parametara:			
masa oslonca prvog ležaja $m_{B1}$	15 000 kg	5 000 kg	5 000 kg (33%)
krutost oslonca prvog ležaja $k_{B1}$	1,0 E9 N/m	8,0 E8 N/m	1,0 E9 N/m (100%)
krutost prvog oslonca kućišta $k_{S1}$	1,0 E9 N/m	7,0 E8 N/m	5,0 E8 N/m (50%)
masa oslonca drugog ležaja $m_{B2}$	15 000 kg	5 000 kg	5 000 kg (33%)
krutost oslonca drugog ležaja $k_{B2}$	1,0 E9 N/m	8,0 E8 N/m	5,0 E8 N/m (50%)
krutost drugog oslonca kućišta $k_{S2}$	1,0 E9 N/m	7,0 E8 N/m	5,0 E8 N/m (50%)
Udaljenost vlastite od radne frekvencije $\Delta$	<b>0,6 Hz</b> (manja od $\Delta_{min}=10$ Hz)	<b>11,0 Hz</b> (veća od $\Delta_{min}=10$ Hz)	<b>11,7 Hz</b> (veća od $\Delta_{min}=10$ Hz)
Osjetljivost na neuravnoteženost $Q_s$	<b>20,3</b> vrlo visoka osjetljivost (područje E )	<b>1,25</b> niska osjetljivost (područje B)	<b>1,03</b> niska osjetljivost (granica poodručja A i B)

## 10 Primjer turbinskog postrojenja

### 10.1 Inženjerski postupak optimiranja

#### 10.1.1 Osjetljivost vlastitih frekvencija

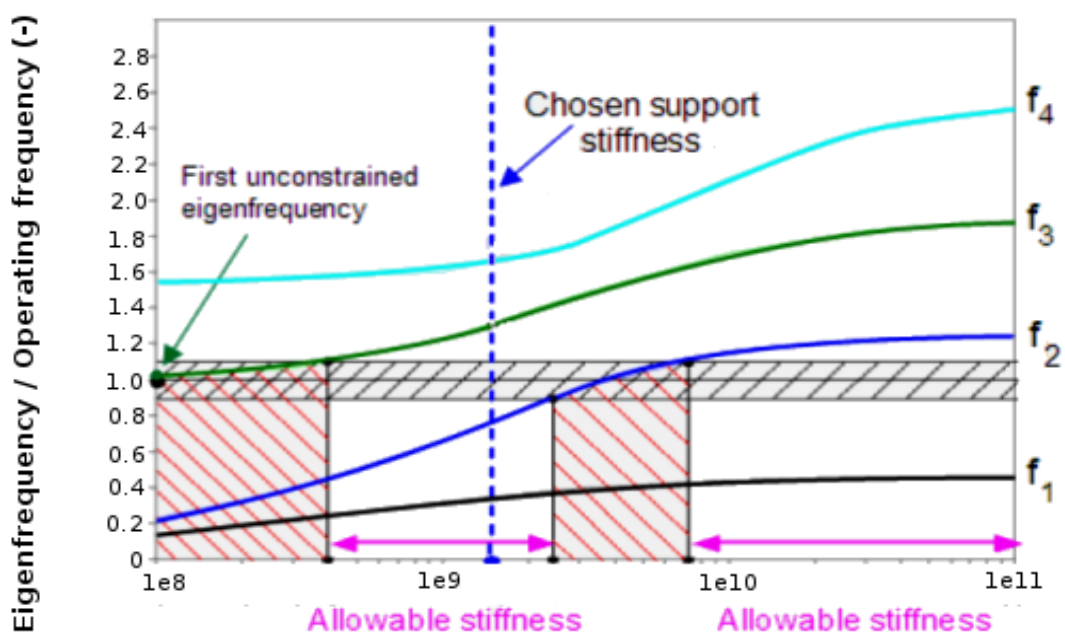
S ciljem poboljšanja razumijevanja vibracijskog ponašanja plinske turbine, već u ranoj konceptnoj fazi razvoja, proveden je izračun osjetljivosti vlastitih frekvencija. Primijenjen je pojednostavljeni model cijelog turbinskog postrojenja, za dva različita tipa plinskih turbine: novi projekt plinske turbine (turbina A) i postojeći projekt plinske turbine (turbina B). Posebna pažnja usmjerena je na osjetljivosti novog projekta na neuravnoteženost spram osjetljivošću postojeće turbine.

Usporedba vibracijskih svojstava dviju turbina provedena je postepenim povećavanjem složenosti vibracijskog modela (inženjerski pristup) uz pretpostavku jednake krutosti oslonaca u horizontalnom i vertikalnom smjeru. Rezultati su predočeni na slikama 59. do 61.

Prvi korak proveden je na vibracijskom modelu elastično oslonjenog rotora (slika 39). Na temelju grafa vlastitih frekvencija u ovisnosti o ekvivalentnoj krutosti oslonaca rotora može se zaključiti da su vlastite frekvencije rotora kod konceptualnog projekta u blizini radne frekvencije dok su vlastite frekvencije postojeće turbine 15% iznad radne frekvencije (slika 59).

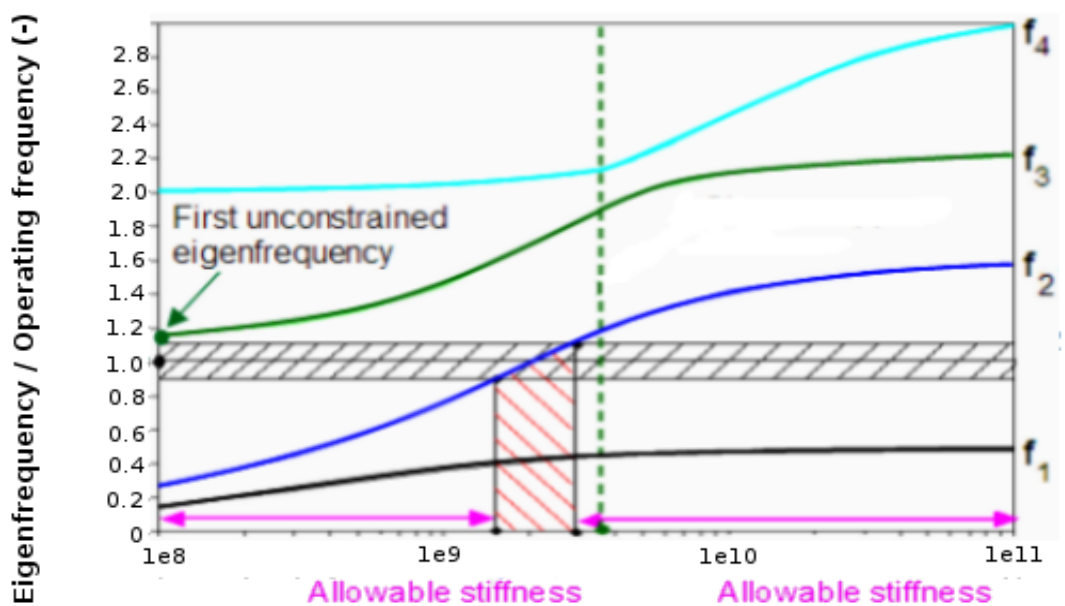
Nakon povećanja složenosti vibracijskog modela dodavanjem oslonaca ležajeva (slika 40.), graf vlastitih frekvencija u ovisnosti o ekvivalentnoj krutosti oslonaca ležajeva pokazuje da je za iste krutosti oslonaca ležajeva kao i kod postojećeg projekta, treća kritična brzina vrtnje rotora konceptualnog projekta unutar područja radne frekvencije turbine, dok je treća kritična brzina rotora postojeće turbine iznad područja radne frekvencije (slika 60).





Equivalent rotor support stiffness (N/m)

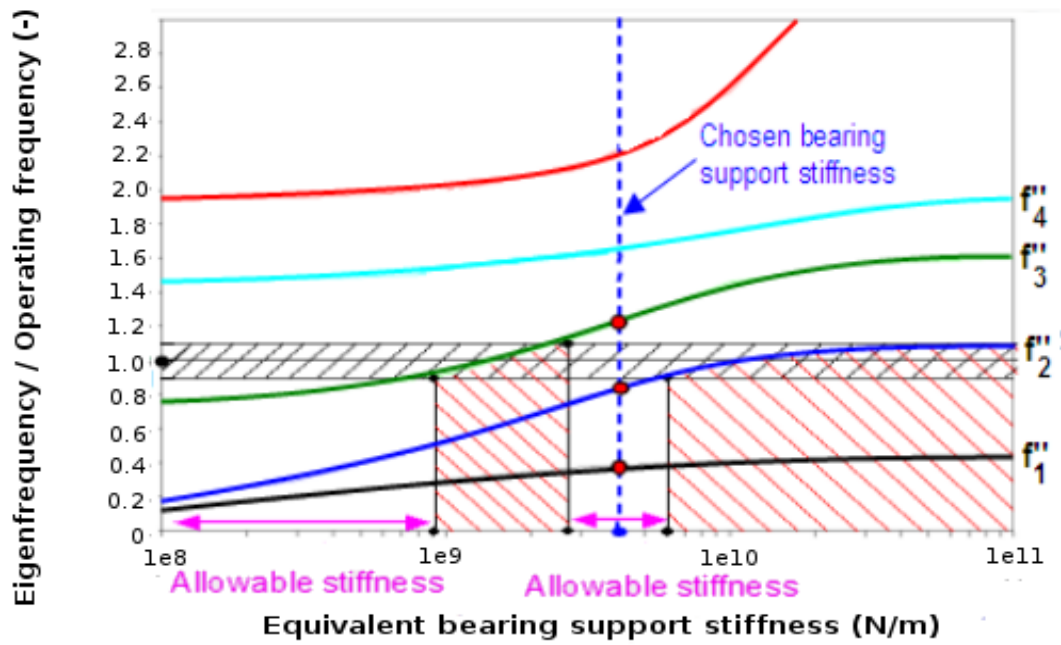
a) Turbina A



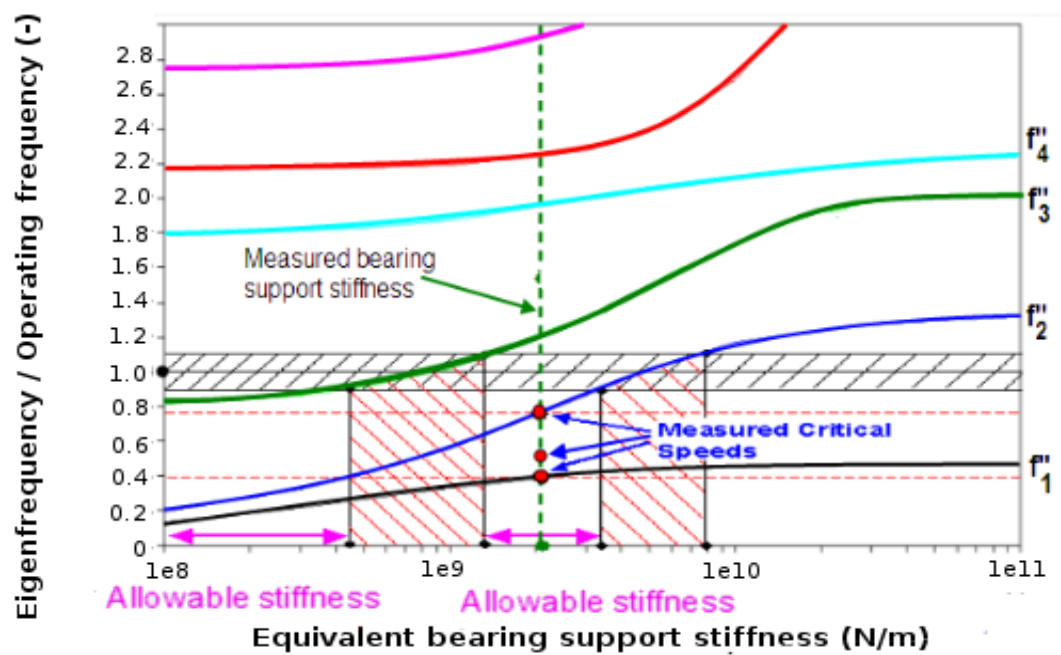
Equivalent rotor support stiffness (N/m)

a) Turbina B

Slika 59. Vlastite frekvencije u ovisnosti o ekvivalentnoj krutosti oslonaca rotora

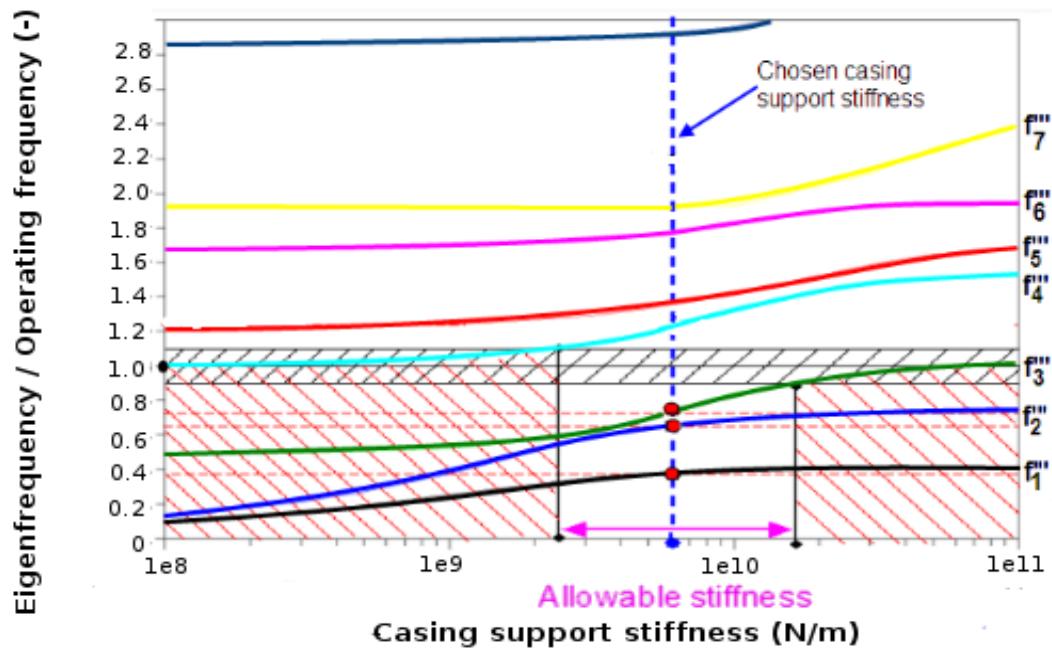


a) Turbina A

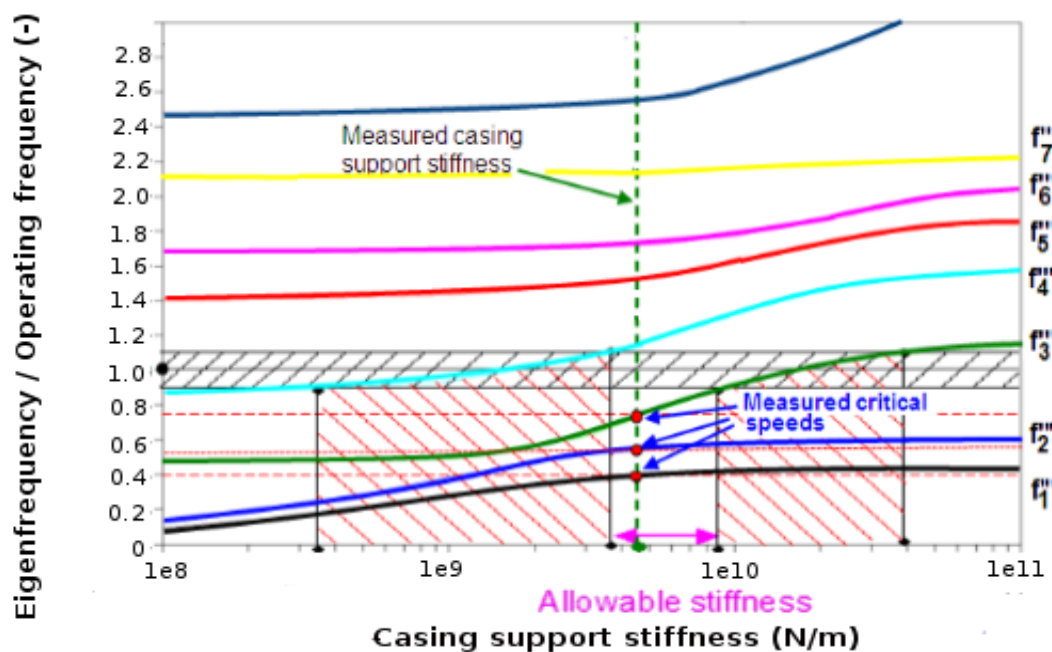


b) Turbina B

Slika 60. Vlastite frekvencije u ovisnosti o ekvivalentnoj krutosti oslonaca ležajeva



a) Turbina A



a) Turbina B

Slika 61. Vlastite frekvencije u ovisnosti o krutosti oslonaca turbine

Unatoč tome, odabirom veće krutosti oslonaca ležajeva, treća kritična brzina vrtnje rotora konceptualnog projekta pomiče se izvan područja radne frekvencije. To saznanje pomoglo je u završnoj fazi razvoja da bi se poboljšala vibracijska svojstva plinske turbine.

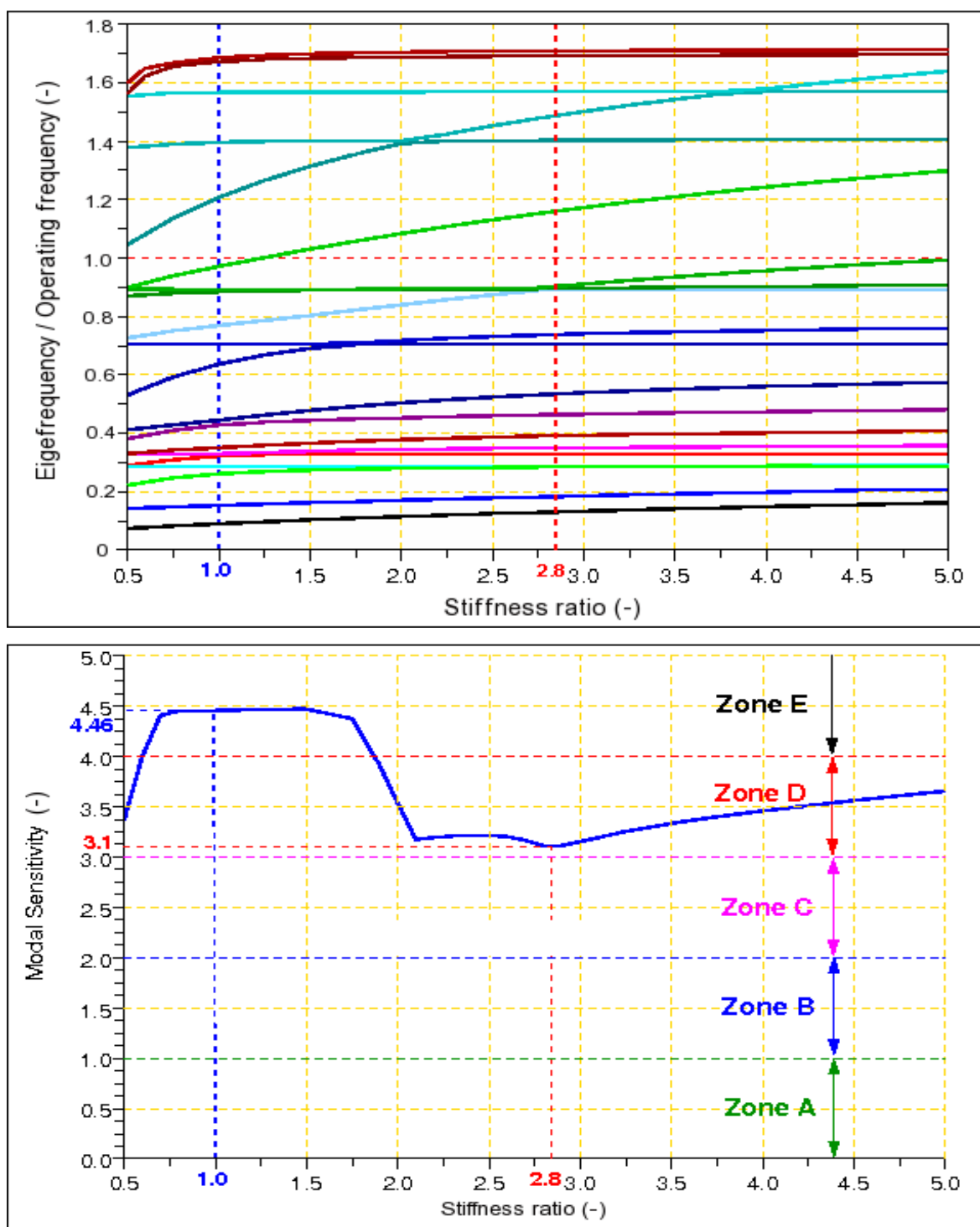
Iz grafa vlastitih frekvencija (slika 61) pojednostavljenog vibracijskog modela cijele turbine (slika 42.) određeno je područje krutosti oslonaca ležajeva kod kojeg su vlastite frekvencije plinske turbine izvan područja radne frekvencije. Određene "optimalne" krutosti oslonaca turbine nalazi se u sredini tog područja. To pokazuje, također, prednost vibracijskog modela cijele turbine spram pojednostavljenog modela. Takav model može dati zajedničke načine vibriranja rotora i kućišta plinske turbine, što nije moguće s pojednostavljenim vibracijskim modelima oslonaca rotora.

### 10.1.2 Optimiranje vibracijskih svojstava

Budući da je izračun osjetljivosti pokazao mogućnost poboljšanja vibracijskih svojstava novog projekta turbine (turbina A) povećanjem krutosti oslonaca ležajeva i kućišta turbine, provedeno je detaljno razmatranje s ciljem poboljšanja osjetljivosti početnog konstrukcijskog rješenja plinske turbine na neuravnoteženost.

#### 10.1.2.1 Mijenjanje horizontalne i vertikalne krutosti oslonaca

Slika 62. prikazuje grafove vlastitih frekvencija i osjetljivosti na neuravnoteženost vibracijskog modela cijele turbine (slika 34). Apcisa predstavlja faktor povećanja krutosti oslonaca u horizontalnom i vertikalnom smjeru. Vrijednosti vlastitih frekvencija prikazane su u bezdimenzijskom obliku, tj. normirane su s radnom frekvencijom  $f_{oper}$ .

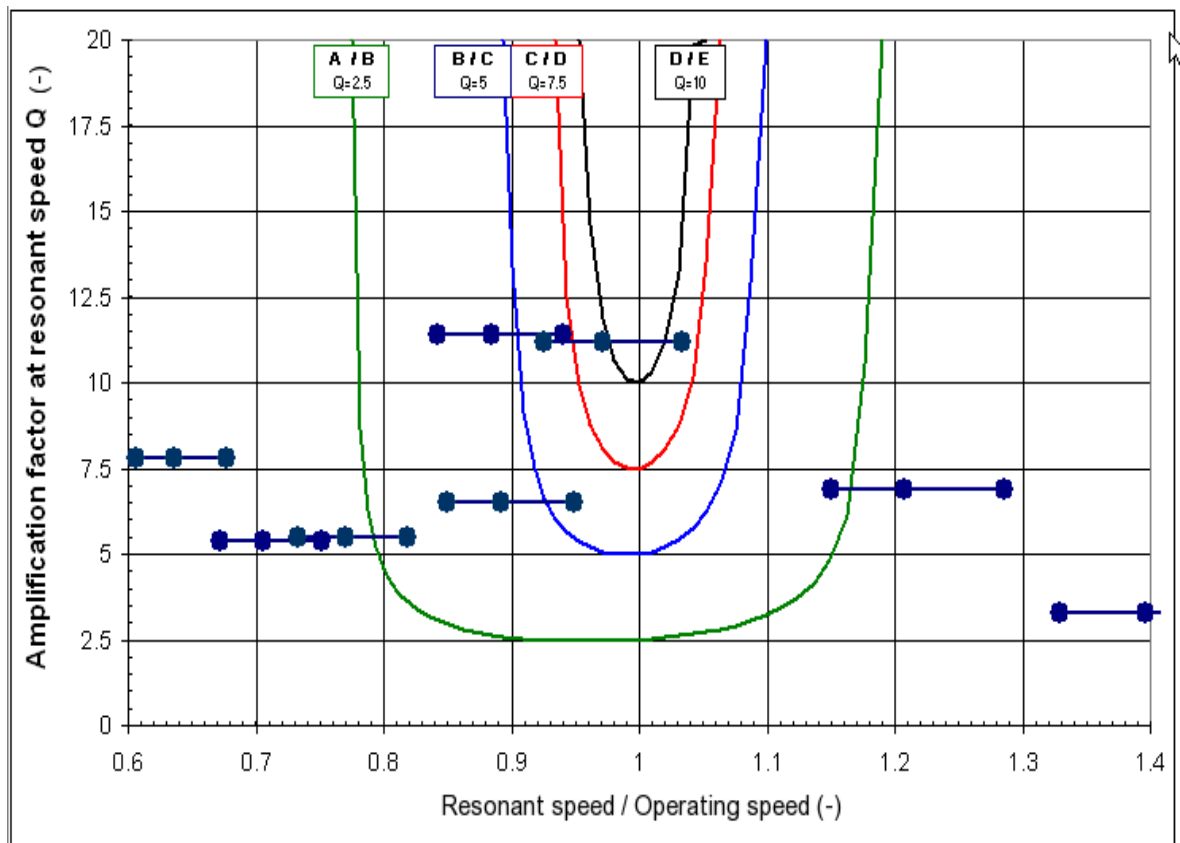


Slika 62. Vlastite frekvencije i osjetljivost na neuravnoteženost plinske turbine u ovisnosti o omjeru krutosti oslonaca

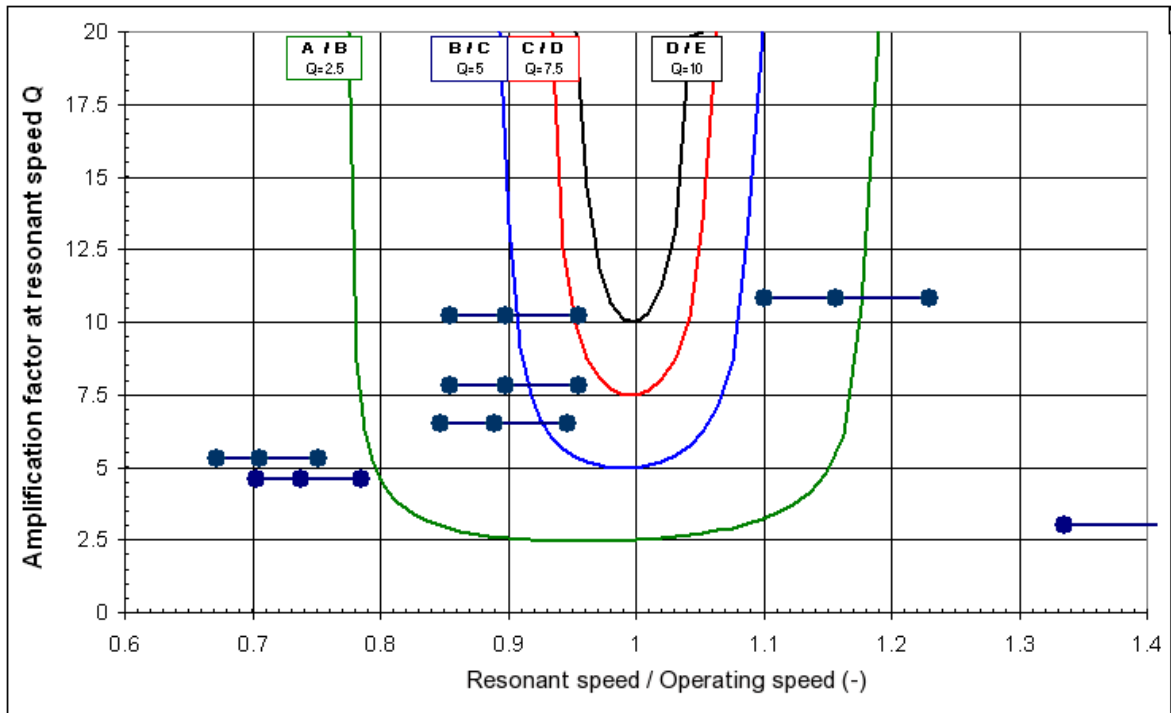
Vrijednost omjera krutosti od **1,0** predstavlja početno konstrukcijsko rješenje. Da bi se smanjila osjetljivost na neuravnoteženost s **4,6** (područje E - vrlo visoka osjetljivost) na **3,11** (područje D - visoka osjetljivost), krutosti oslonaca moraju se povećati za **2,8** puta.

Povećanje krutosti od **2,8** puta predstavlja optimalno povećanje, jer daje minimalnu osjetljivost na neuravnoteženost (za dano područje krutosti). Međutim, iako je postignuta minimalna osjetljivost, osjetljivost na neuravnoteženost još je uvijek unutar područja D (visoka osjetljivost).

Grafovi osjetljivosti početnog i poboljšanog konstrukcijskog rješenja na neuravnoteženost predloženi su na slikama 63. i 64.



Slika 63. Osjetljivost na neuravnoteženost: početno konstrukcijsko rješenje



Slika 64. Osjetljivost na neuravnoteženost: poboljšano konstrukcijsko rješenje

Kritični načini vibriranja početnog konstrukcijskog rješenja unutar su područja T i E. Odgovarajući načini vibriranja poboljšanog projekta su unutar područja B, C i D. Međutim, osjetljivost na neuravnoteženost je unutar područja D samo kod najmanje radne frekvencije (94% nominalne radne frekvencije), dok je osjetljivost poboljšanog projekta na neuravnoteženost kod nominalne radne frekvencije unutar područja B (niska osjetljivost). To predstavlja poboljšanje početnog konstrukcijskog rješenja.

Kritični način vibriranja početnog konstrukcijskog rješenja je vertikalni način vibriranja rotora plinske turbine, kućišta i izlaznog dijela turbine. Kod poboljšanog konstrukcijskog rješenja, kritični način vibriranja je horizontalni način vibriranja rotora plinske turbine, kućišta i izlaznog dijela turbine. Povećavanjem horizontalne i vertikalne krutosti, vertikalna vlastita frekvencija pomaknuta je izvan područja radne frekvencije, ali je horizontalna vlastita frekvencija sada kritična jer se približila radnoj frekvenciji.

Na temelju toga može se zaključiti da se daljnje poboljšanje može ostvariti povećavajući samo vertikalnu krutost oslonaca i zadržavajući horizontalnu krutost na razini početnog konstrukcijskog rješenja.

### 10.1.2.2 Mijenjanje vertikalne krutosti oslonaca

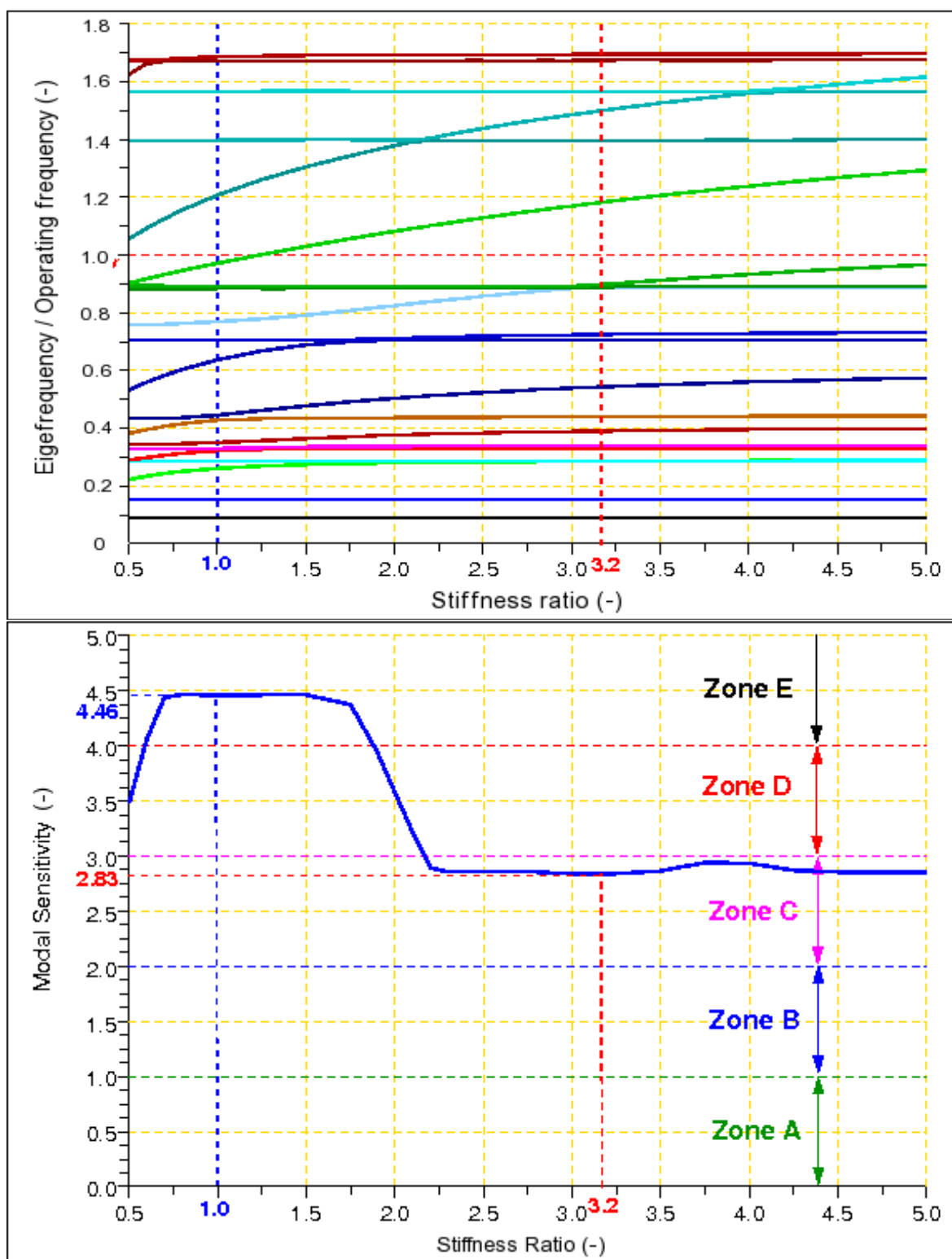
Povećanjem vertikalne i horizontalne krutosti oslonaca 11. vlastita frekvencija horizontalnih vibracija blizu je radne frekvencije, pa je veći utjecaj 11. načina vibriranja u odzivu sustava. Iz toga se može zaključiti da se povećanje osjetljivosti na neuravnoteženost horizontalnog načina vibriranja može spriječiti zadržavanjem horizontalne krutosti oslonaca na razini istoj kao i kod početnog konstrukcijskog rješenja. Dakle, poboljšanje vibracijskih svojstava provodi se povećanjem vertikalne krutosti oslonaca.

Slika 65. predočava grafove vlastitih frekvencija i osjetljivosti na neuravnoteženost u ovisnosti o faktoru povećanja vertikalne krutosti oslonaca. Vrijednosti vlastitih frekvencija prikazane su u bezdimenzijskom obliku, tj. normirane su s radnom frekvencijom  $f_{oper}$ .

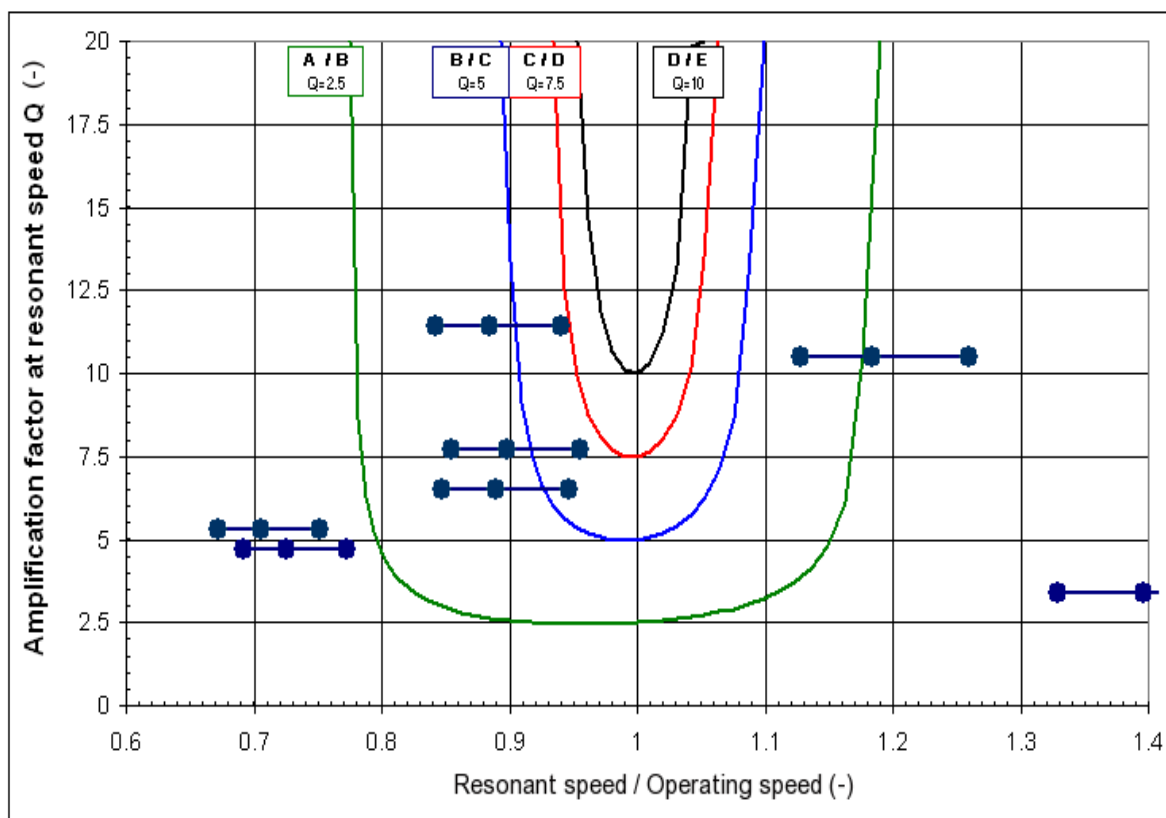
Vrijednost omjera krutosti **1,0** predstavlja početno konstrukcijsko rješenje, dok omjer krutosti **3,2** predstavlja optimum kod kojeg je dosegnuta minimalna osjetljivost na neuravnoteženost **2,83** (područje C - umjerena osjetljivost).

Grafovi osjetljivosti na neuravnoteženost pokazuje da je kritični vertikalni način vibriranja pomaknut iznad područja radne frekvencije dok je horizontalni način vibriranja ostao ispod područja radne frekvencije (slika 66). Način vibriranja s najvećom osjetljivošću na neuravnoteženost jest 11. horizontalni način vibriranja rotora plinske turbine, kućišta i izlaznog dijela turbine, koji je unutar područja B i C (niska i umjerena osjetljivost). Kod nominalne radne frekvencije osjetljivost na neuravnoteženost je unutar područja B.





Slika 65. Vlastite frekvencije i osjetljivost na neuravnoteženost plinske turbine u ovisnosti o omjeru krutosti oslonaca



Slika 66. Osjetljivost na neuravnoteženost: poboljšano konstrukcijsko rješenje

## 10.2 Optimiranje planom pokusa

### 10.2.1 Pronalaženje najutjecajnijih parametara selektivnim planom pokusa

Zadaća je selektivnog pokusa odrediti skup projektnih parametara koji najviše utječu na vibracijska svojstva i ukloniti parametre sa zanemarivim utjecajem.

Smanjenje broja projektnih parametara omogućuje da se pozornost usredotoči na nekoliko ključnih parametara u sljedećem koraku optimiranja u kojem se provodi optimiranje vibracijskih svojstava. Time se smanjuje vrijeme potrebno za optimiranje vibracijskog ponašanja i vrijeme potrebno za razvoj nove plinske turbine.

Uobičajeni je selektivni pokus Pluckett-Burman koji se temelji na Hadamard matricama kod kojih je broj pokušaja višekratnik broja 4 ( $N=4, 8, 12, 16, 20$ , itd). Pluckett-Burman pokus prikladan je za proučavanje  $(N-1)/(L-1)$  parametara, gdje je  $L$  broj razina parametara [48, 49]. Taj pokus daje efektivan način proučavanja velikog broja parametara uz minimalni broj pokušaja u cilju određivanja parametara koji zahtijevaju daljnje istraživanje. Važno je svojstvo Pluckett-Burman pokusa da su svi glavni utjecaji procijenjeni s jednakom točnošću.

Pluckett-Burman pokus može biti geometrijski i ne mora biti geometrijski. Kod geometrijskog pokusa je broj pokušaja potencija broja 2 (4, 8, 16, itd). Taj je pokus jednak djelomičnom pokusu razlučivosti III kod kojeg se mogu proučavati uzajamna djelovanja parametara.

Kod negeometrijskog pokusa broj pokušaja je višekratnik broja 4, ali nije potencija broja 2 (12, 20, 24, 28, itd).

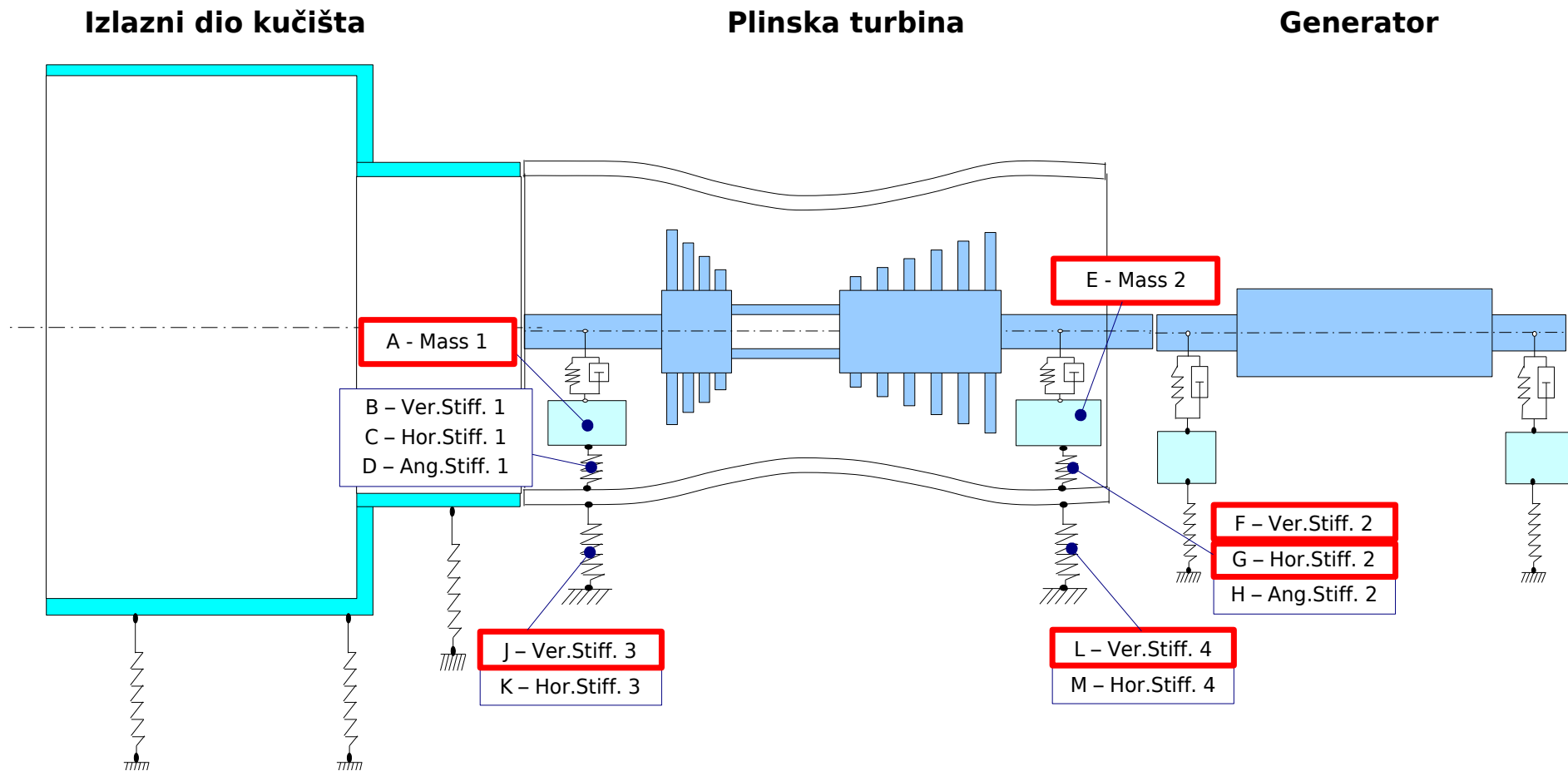
Kako su vibracijska svojstva turbine izrazito nelinearna može se očekivati veliki broj međudjelovanja parametara. Stoga Pluckett-Burman pokus koji nije geometrijski nije niti pogodan za proučavanje vibracijskog ponašanja plinske turbine.

Za odabir vitalnih projektnih parametara, koji imaju najveći utjecaj na vibracijska svojstva plinske turbine, primjenjen je djelomični pokus s vrijednostima parametara na dvije razine. Takav pokus daje mogućnost ograničenog proučavanja međusobnog djelovanja parametara.

### *10.2.1.1 Odabir projektnih parametara*

Kod selektivnog pokusa vrlo je važno uključiti sve projektne parametre koji mogu imati utjecaj na konačno rješenje. Tako se smanjuje rizik da će se izostaviti parametri od značajnog utjecaja što može u konačnici dovesti do krivog zaključka da poboljšanje vibracijskih svojstava nije moguće.

Odabranih 12 projektnih parametara predloženo je na slici 67. U tablici 10. dan je sažeti opis izračuna: model pokusa, broj pokušaja, odziv sustava, nazivi parametara, te donja i gornja vrijednost parametara. Odabrani projektni parametri su bezdimenzijski, a predstavljaju omjer vrijednosti parametara konačnog i početnog konstrukcijskog rješenja (3 znači da parametar ima tri puta veću vrijednost od početne).



Slika 67. Odabrani projektni parametri

Tablica 10: Sažetak selektivnog pokusa

**Study Type** Factorial  
**Initial Design** 2 Level Factorial  
**Center Points** 0  
**Model** Reduced 3FI  
**Experiments** 129  
**Blocks** No Blocks

Response		Description	Units	Obs	Min	Max	Trans	Model
Y1	Mod. Sens.	Modal Sensitivity	-	129	2,5	4,46	None	R3FI

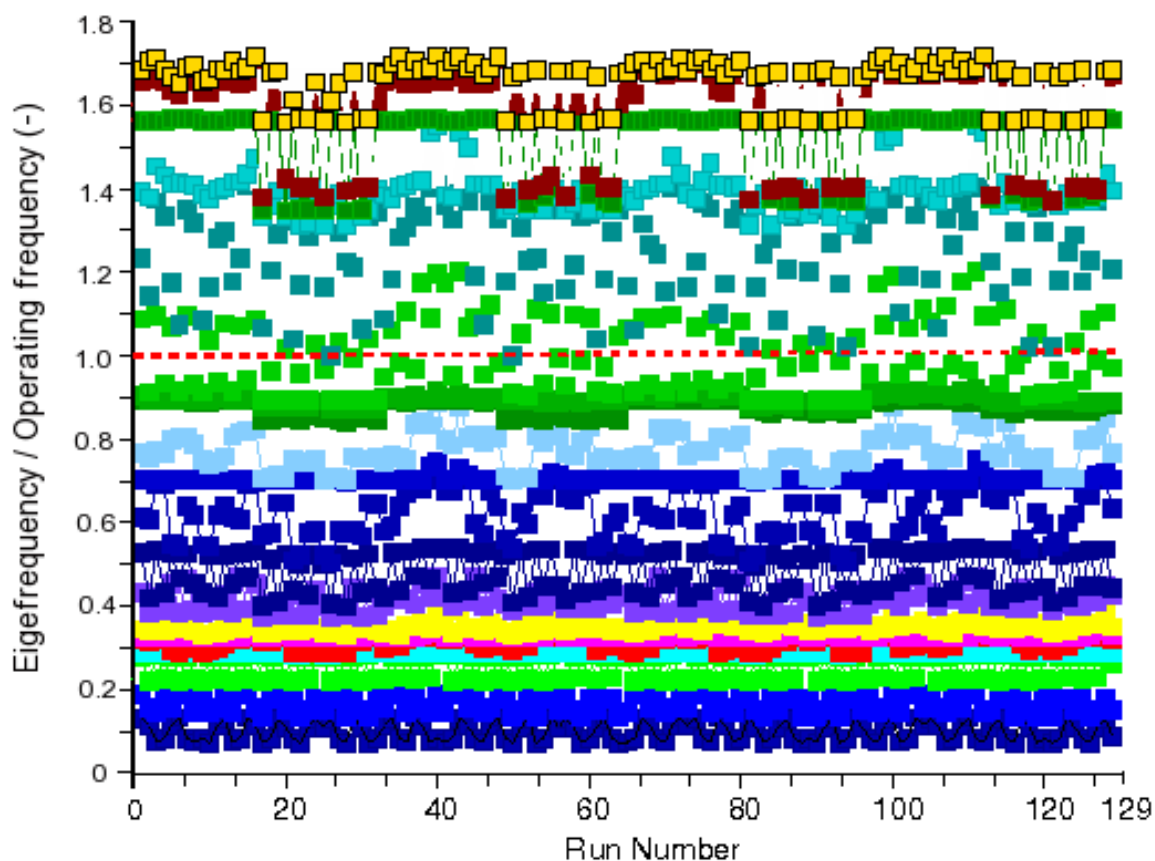
Factor	Designation	Description	Units	Type	Low Actual	High Actual	Low Coded	High Coded
A	Mass 1	Mass of the first bearing support	-	Numeric	0,75	1,5	-1	1
B	Ver. Stiff. 1	Vertical stiffness of the first bearing support	-	Numeric	0,5	3	-1	1
C	Hor. Stiff. 1	Horizontal stiffness of the first bearing support	-	Numeric	0,5	3	-1	1
D	Ang. Stiff. 1	Angular stiffness of the first bearing support	-	Numeric	0,5	3	-1	1
E	Mass 2	Mass of the second bearing support	-	Numeric	0,75	1,5	-1	1
F	Ver. Stiff.2	Vertical stiffness of the second bearing support	-	Numeric	0,5	3	-1	1
G	Hor. Stiff.2	Horizontal stiffness of the second bearing support	-	Numeric	0,5	3	-1	1
H	Ang. Stiff.2	Angular stiffness of the second bearing support	-	Numeric	0,5	3	-1	1
J	Ver. Stiff.3	Vertical stiffness of the first casing support	-	Numeric	0,5	3	-1	1
K	Hor. Stiff.3	Horizontal stiffness of the first casing support	-	Numeric	0,5	3	-1	1
L	Ver. Stiff.4	Vertical stiffness of the second casing support	-	Numeric	0,5	3	-1	1
M	Hor. Stiff.4	Horizontal stiffness of the second casing support	-	Numeric	0,5	3	-1	1

### 10.2.1.2 Provedba pokusa: simuliranje odziva sustava

Nakon odabira projektnih parametara slijedi provedba pokusa koja se, kao i kod pojednostavljenog modela plinske turbine, sastoji od izračuna:

1. kompleksnih vlastitih vrijednosti sustava
2. omjera brzina  $\eta$ , bezdimenzijskog prigušenja  $\zeta_n$
3. i osjetljivosti na neuravnoteženost  $Q_s$

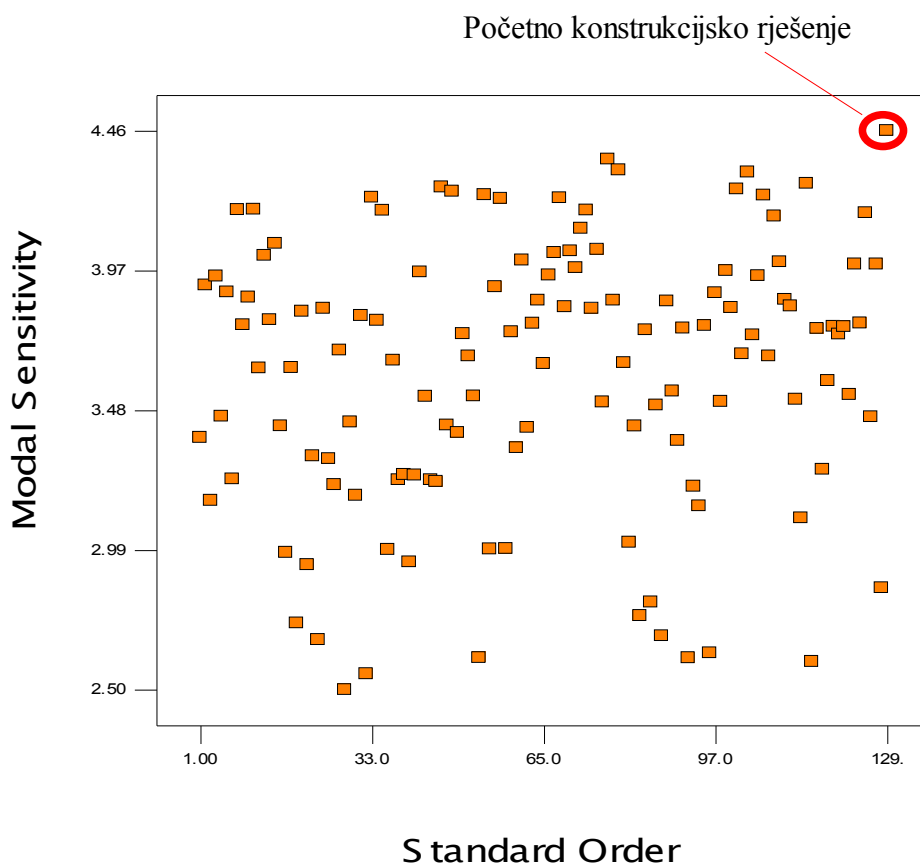
Dvanaest projektnih parametara, na dvije razine, rezultira s  $2^{(12-5)}$  djelomičnim pokusom razlučivosti IV [48, 49].



Slika 68. Izračunate vlastite frekvencije

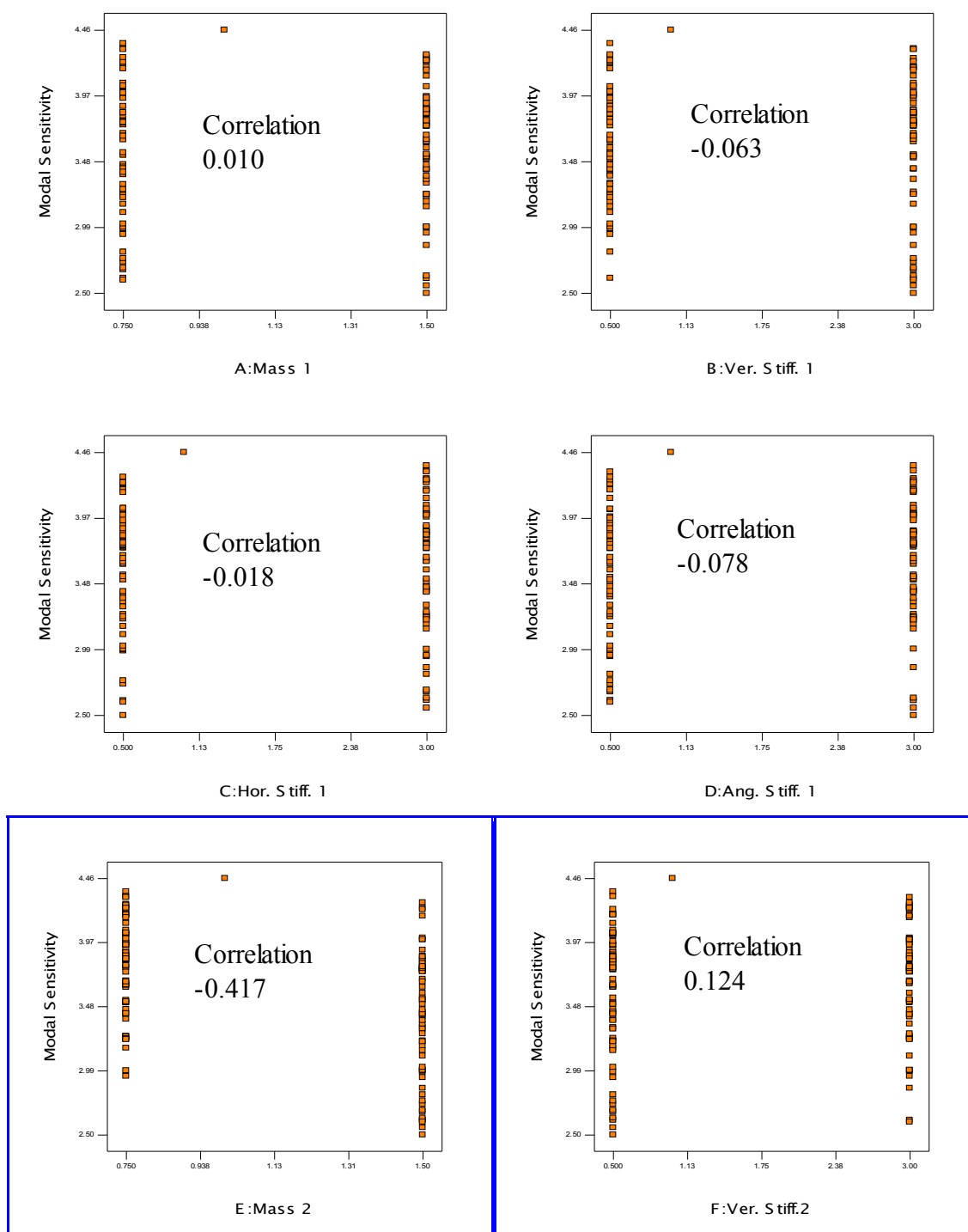
Ukupni broj koraka selektivnog pokusa jest 129, a posljednji korak predstavlja početno konstrukcijsko rješenje. Slika 68. predočava graf izračunatih vlastitih frekvencija u ovisnosti o rednom broju koraka. Na temelju tog grafa teško se može zaključiti postoji li mogućnost za poboljšanje vibracijskih svojstava, dok graf osjetljivosti na neuravnoteženost (slika 69.) nedvojbeno pokazuje mogućnost poboljšanja: visoka osjetljivost početnog konstrukcijskog rješenja na neuravnoteženost od **4,46** može se smanjiti na **2,5**.

Grafovi osjetljivosti na neuravnoteženost u ovisnosti o glavnim utjecajnim parameterima predočeni su na slici 70. Mogućnost smanjenja osjetljivosti razvidna je na tim grafovima.

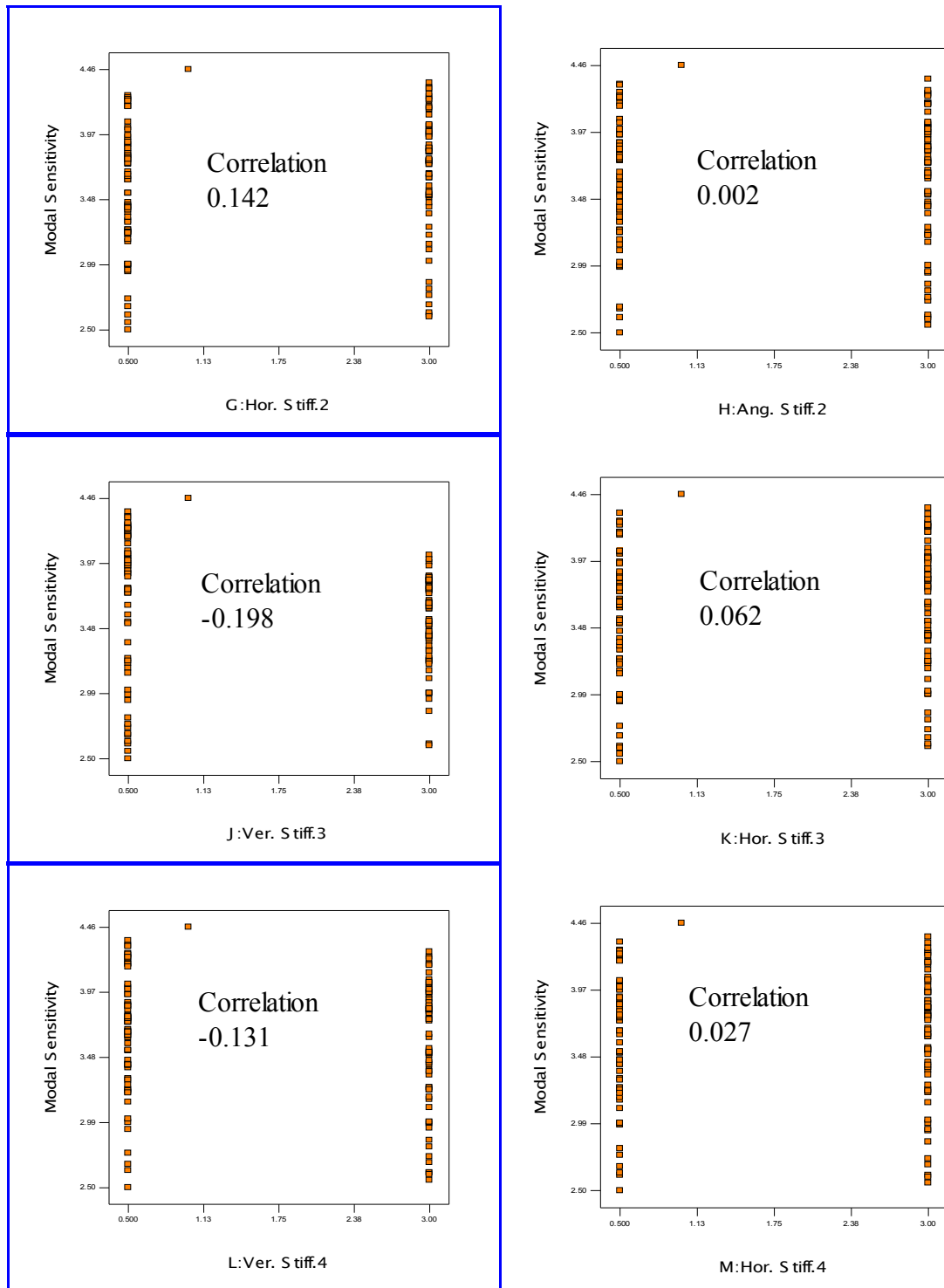


Slika 69. Osjetljivost na neuravnoteženost u ovisnosti o rednom broju koraka





Slika 70. Osjetljivost na neuravnoteženost u ovisnosti o glavnim utjecajnim parametrima



Slika 70. Osjetljivost na neuravnoteženost u ovisnosti o glavnim utjecajnim parametarima (nastavak)

Tablica 11. Dio rezultata selektivnog pokusa poredan po rastućoj osjetljivosti na neuravnoteženost

Korak optim.	A	B	C	D	E	F	G	H	J	K	L	M	Osjetljivost
<b>28</b>	<b>1,5</b>	<b>3</b>	<b>0,5</b>	<b>3</b>	<b>1,5</b>	<b>0,5</b>	<b>0,5</b>	<b>0,5</b>	<b>0,5</b>	<b>0,5</b>	<b>0,5</b>	<b>0,5</b>	<b>2,50</b>
<b>32</b>	<b>1,5</b>	<b>3</b>	<b>3</b>	<b>3</b>	<b>1,5</b>	<b>0,5</b>	<b>0,5</b>	<b>3</b>	<b>0,5</b>	<b>0,5</b>	<b>3</b>	<b>3</b>	<b>2,56</b>
<b>115</b>	<b>0,75</b>	<b>3</b>	<b>0,5</b>	<b>0,5</b>	<b>1,5</b>	<b>3</b>	<b>3</b>	<b>3</b>	<b>3</b>	<b>0,5</b>	<b>3</b>	<b>3</b>	<b>2,60</b>
92	1,5	3	0,5	3	1,5	0,5	3	0,5	0,5	3	3	3	2,61
53	0,75	0,5	3	0,5	1,5	3	0,5	3	3	0,5	3	0,5	2,61
96	1,5	3	3	3	1,5	0,5	3	3	0,5	3	0,5	0,5	2,63
23	0,75	3	3	0,5	1,5	0,5	0,5	0,5	0,5	3	0,5	0,5	2,68
87	0,75	3	3	0,5	1,5	0,5	3	0,5	0,5	0,5	3	3	2,69
19	0,75	3	0,5	0,5	1,5	0,5	0,5	3	0,5	3	3	3	2,73
83	0,75	3	0,5	0,5	1,5	0,5	3	3	0,5	0,5	0,5	0,5	2,76
85	0,75	0,5	3	0,5	1,5	0,5	3	3	0,5	3	3	0,5	2,81
128	1,5	3	3	3	1,5	3	3	3	3	3	3	3	2,86
21	0,75	0,5	3	0,5	1,5	0,5	0,5	3	0,5	0,5	0,5	3	2,94
40	1,5	3	3	0,5	0,75	3	0,5	3	3	0,5	3	3	2,95
17	0,75	0,5	0,5	0,5	1,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	3	0,5	2,98
36	1,5	3	0,5	0,5	0,75	3	0,5	0,5	3	0,5	0,5	0,5	2,99
55	0,75	3	3	0,5	1,5	3	0,5	0,5	3	3	3	3	2,99
58	1,5	0,5	0,5	3	1,5	3	0,5	3	3	3	3	0,5	2,99
81	0,75	0,5	0,5	0,5	1,5	0,5	3	0,5	0,5	3	0,5	3	3,02
113	0,75	0,5	0,5	0,5	1,5	3	3	0,5	3	3	3	0,5	3,10

Vrijednost korelacije na slici 70. ukazuje da najveći utjecaj na osjetljivost na neuravnoteženost imaju (parametri su također označeni na slici 67.):

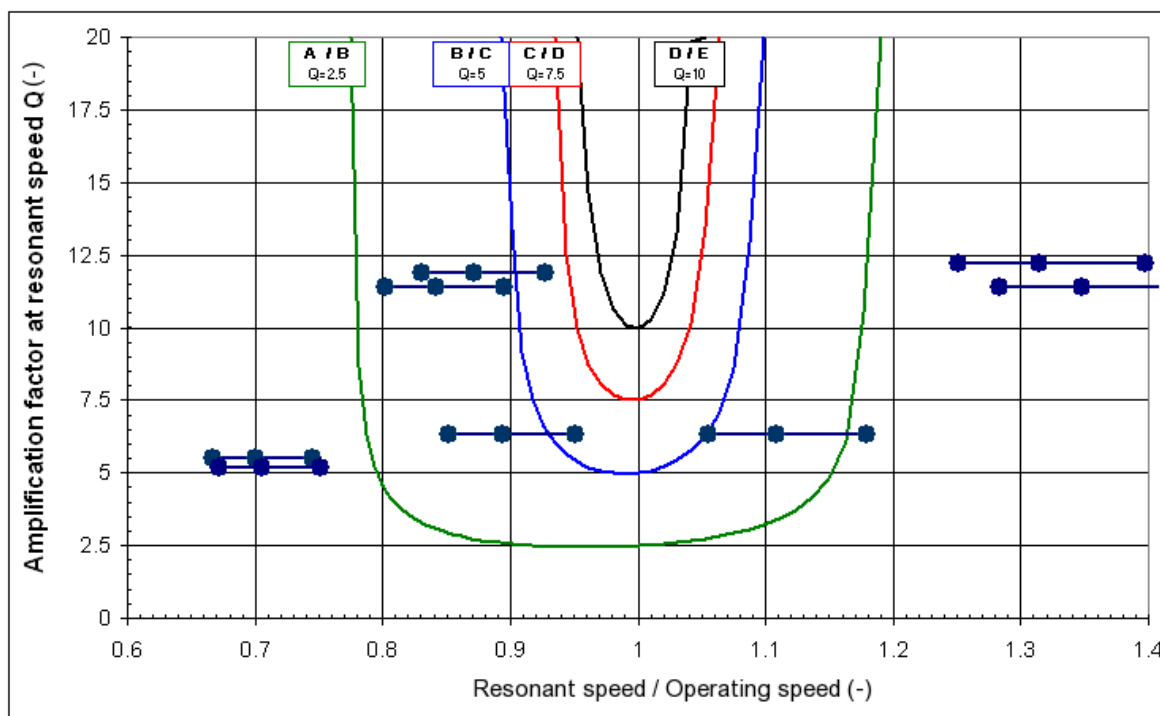
- masa drugog oslonca ležaja (E),
- vertikalna krutost drugog oslonca ležaja (F),
- horizontalna krutost drugog oslonca ležaja (G),
- vertikalna krutost prvog oslonca turbine (J),
- vertikalna krutost drugog oslonca turbine (L).

U tablici 11. naveden je dio rezultata razvrstan po rastućoj osjetljivosti na neuravnoteženost. Najmanja osjetljivost od 2,5 i 2,56 (područje C prema ISO 10814) dosegnuta je u 28. i 32. koraku. Na temelju razvrstanih rezultata mogu se, na jednostavan način, procijeniti parametri od najvećeg utjecaja i njihove "optimalne" vrijednosti.

Najmanja osjetljivost na neuravnoteženost od 2,5 (prvi redak tablice 11.) ostvarena je povećanjem mase oba oslonca (parametri A i E) i smanjenjem krutosti oslonca drugog ležaja (parametri F, G i H), te krutosti oba oslonca turbine (parametri J, K, L i M). Povećanje mase i smanjenje krutosti oslonaca smanjuju vlastite frekvencije. Graf osjetljivosti na neuravnoteženost optimuma dobivenog selektivnim pokusom predložen je na slici 71.

Drugi "optimum" (drugi redak tablice 11.) postignut je povećanjem krutosti oslonaca (parametri B, C, D, H, L i M), odnosno povećanjem kritične vlastite frekvencije.

Rezultati optimiranja pokazuju temeljnu ideju smanjenja osjetljivosti plinske turbine na neuravnoteženost: pomicanjem kritičnog načina vibriranja dovoljno ispod ili iznad područja radne frekvencije turbine.



Slika 71. Osjetljivost na neuravnoteženost: optimum dobiven selektivnim pokusom

### 10.2.1.3 Provjera statističkog modela pokusa

Statistički model pokusa nije upotrebljavan za optimiranje dinamičkih svojstava plinske turbine, već se odabir optimalnih projektnih parametara provodio jednostavnim razvrstavanjem rezultata pokusa po rastućoj osjetljivosti na neuravnoteženost. Provjera statističkog modela pokusa ovdje je prikazana samo informativno.

Odabrani parametri statističkog modela navedeni su u tablici 12. zajedno s iznosima njihovog utjecaja na osjetljivost plinske turbine na neuravnoteženost.

Tablica 12. Pregled varijacije

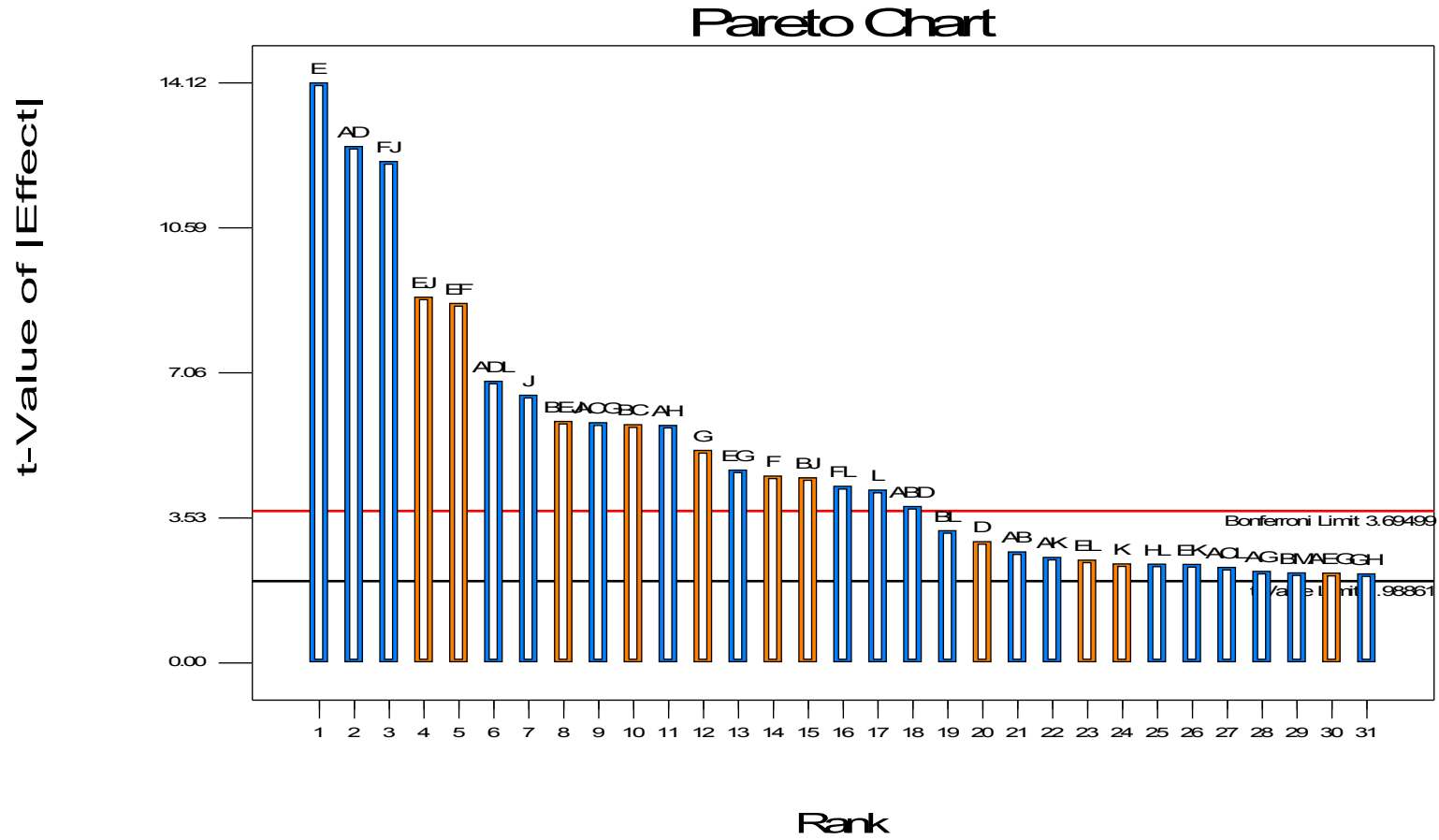
	Zbroj kvadrata	Srednja vrijednost	F	Prob > F
<b>Model</b>	<b>24,6</b>	<b>0,769</b>	<b>22,3</b>	<b>&lt; 0,0001</b>
A	0,00632	0,00632	0,183	0,670
B	0,0830	0,0830	2,40	0,125
C	0,00240	0,00240	0,0695	0,793
D	0,208	0,208	6,02	0,0160
E	4,76	4,76	138,0	< 0,0001
F	0,494	0,494	14,3	0,000274
G	0,638	0,638	18,5	< 0,0001
H	0,00328	0,00328	0,0947	0,759
J	1,01	1,01	29,3	< 0,0001
L	0,422	0,422	12,2	0,000725
AB	0,174	0,174	5,03	0,0272
AC	0,000331	0,000331	0,00957	0,922
AD	3,77	3,77	109,0	< 0,0001
AG	0,118	0,118	3,42	0,0674
AH	0,698	0,698	20,2	< 0,0001
AL	0,00377	0,00377	0,109	0,742
BC	0,702	0,702	20,3	< 0,0001
BD	0,0872	0,0872	2,52	0,116
BE	0,0129	0,0129	0,372	0,543
BJ	0,485	0,485	14,0	0,000309
BL	0,247	0,247	7,15	0,00882
CG	0,00518	0,00518	0,150	0,700
DL	0,00423	0,00423	0,122	0,727
EF	1,83	1,83	52,8	< 0,0001
EG	0,526	0,526	15,2	0,000178
EJ	1,89	1,89	54,7	< 0,0001
FJ	3,55	3,55	103,0	< 0,0001
FL	0,440	0,440	12,7	0,000563
ABD	0,346	0,346	10,0	0,00210
ACG	0,815	0,815	23,6	< 0,0001
ADL	1,12	1,12	32,5	< 0,0001
BEJ	0,825	0,825	23,9	< 0,0001

Vrijednost od "Prob > F" manja od 0,01 označava značajne parametre u modelu, vrijednost veća od 0,1 pokazuje da su parametri zanemarivi. U ovom slučaju E, F, G, J, L, AD, AH, BC, BJ, BL, EF, EG, EJ, FJ, FL, ABD, ACG, ADL, BEJ su značajni parametri. Između ostalog oni uključuju sljedeće značajne projektne parametre: masu drugog oslonca ležaja (E), vertikalnu krutost drugog oslonca ležaja (F), horizontalnu krutost drugog oslonca ležaja (G), vertikalnu krutost prvog oslonca turbine (J) i vertikalnu krutost drugog oslonca turbine. Isti značajni projektni parametri dobiveni su na temelju korelacije (slika 70).

F vrijednost statističkog modela od 22,3 (tablica 12.) potvrđuje da je odabrani model ispravan.

Za optimiranje dinamičkih svojstava plinske turbine u sljedećem koraku, odabrani su prethodno određeni najutjecajniji projektni parametri, a isključene su sprege parametara. Ako, uslijed isključenih sprega, nije moguće naći, s inženjerskog motrišta, zadovoljavajući optimum, onda se moraju uključiti i istaknute sprege projektnih parametara.

Pareto graf na slici 72. predočuje doprinos glavnih parametara i njihovih istaknutih sprega.



Slika 72. Paretov graf: glavni utjecaji selektivnog pokusa

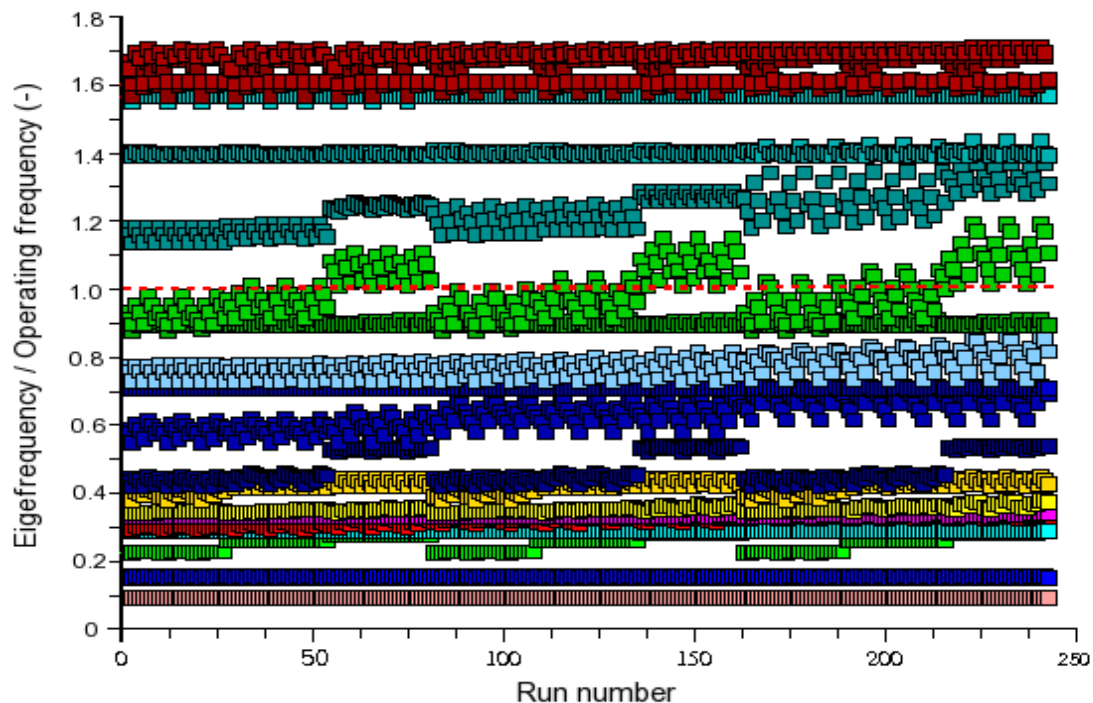


### 10.2.2 Optimiranje vibracijskih svojstava potpunim faktorskim planom pokusa

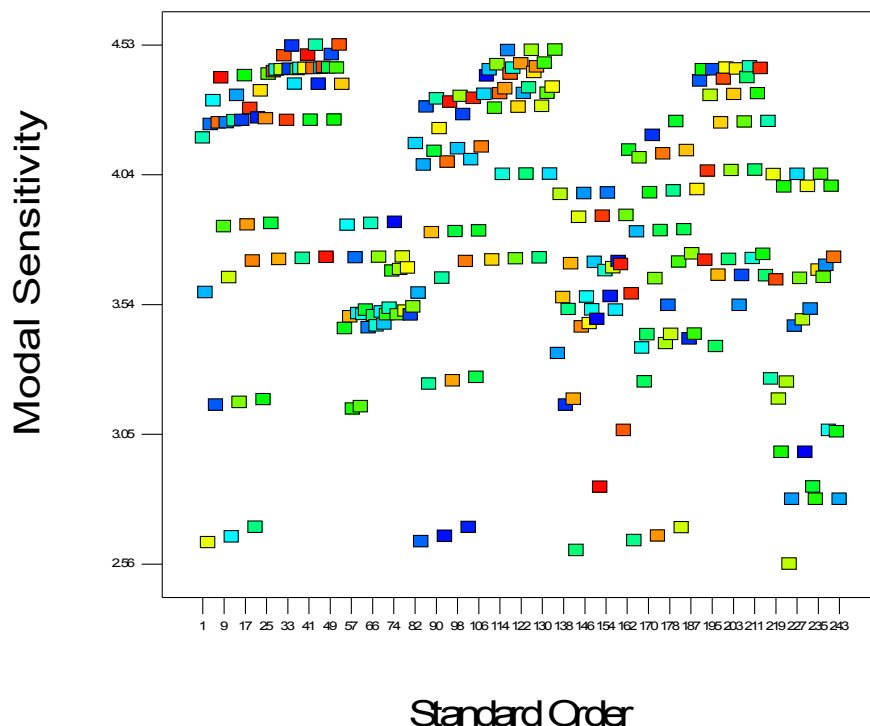
U prethodnom poglavlju od dvanaest projektnih parametara odabrano je pet s najvećim utjecajem na vibracijska svojstva plinske turbine:

- A - masa drugog oslonca ležaja (E),
- B - vertikalna krutost drugog oslonca ležaja (F),
- C - horizontalna krutost drugog oslonca ležaja (G),
- D - vertikalna krutost prvog oslonca turbine (J),
- E - vertikalna krutost drugog oslonca turbine (L),

gdje slova u zagradama predstavljaju oznaku parametra iz selektivnog pokusa. Pet značajnih parametara mijenjani su u potpunom faktorskom pokusu na tri razine s ciljem minimiziranja osjetljivosti plinske turbine na neuravnoteženost. Ukupni broj koraka potpunog faktorskog pokusa na tri razine jest 243. Vrijednosti izračunatih vlastitih frekvencija predočene su na slici 73.



Slika 73. Vlastite frekvencije u ovisnosti o rednom broju koraka

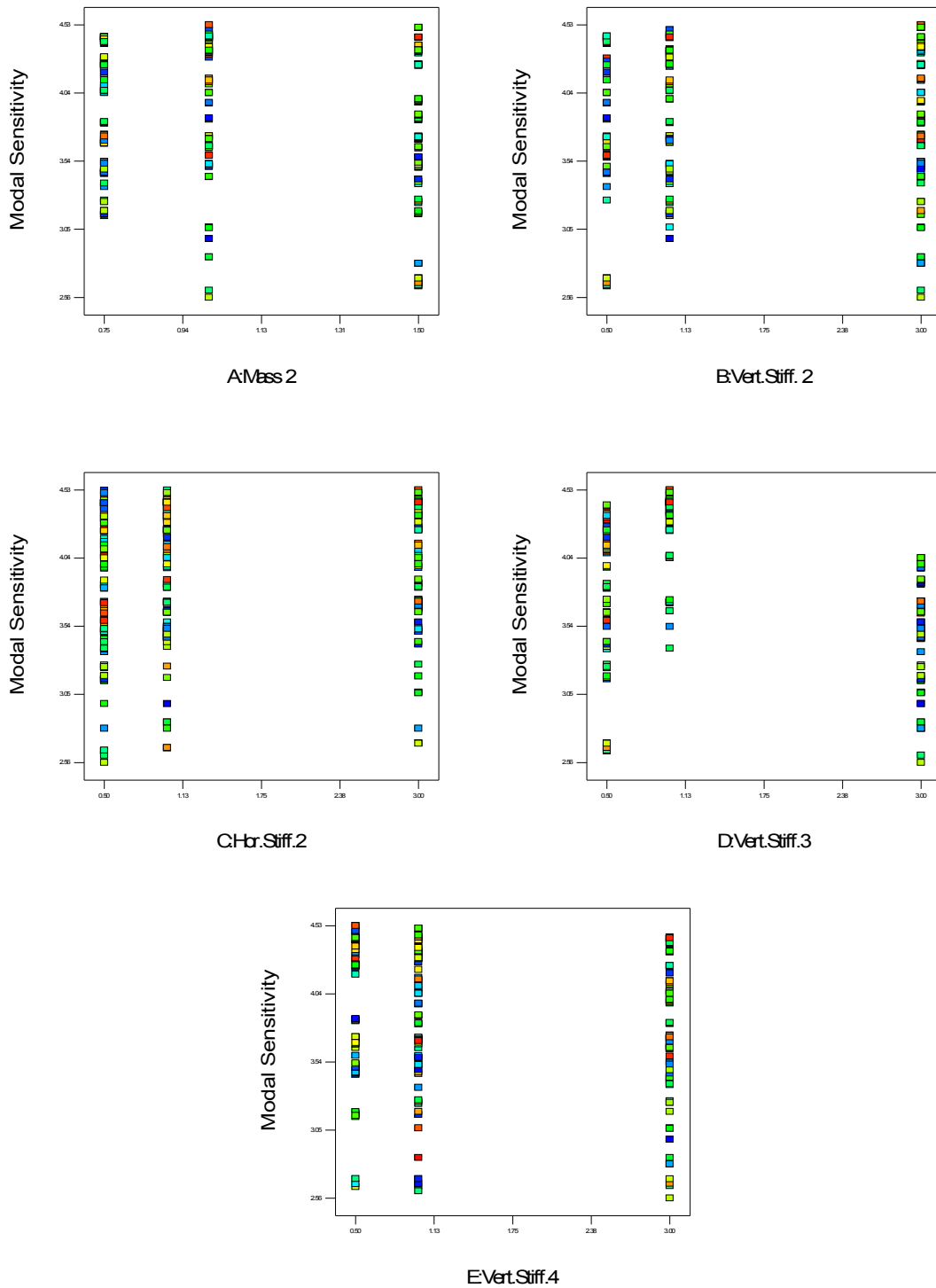


Slika 74. Osjetljivost na neuravnoteženost u ovisnosti o rednom broju koraka

Graf na slici 74. pokazuje da se osjetljivost plinske turbine na neuravnoteženost može smanjiti s **4,46** na **2,56**. Grafovi osjetljivosti na neuravnoteženost u ovisnosti od pet projektnih parametara pokazuju da su svi projektni parametri, izuzev parametra C, podjednako značajni (slika 75).

Ako se rezultati pokusa razvrstaju po rastućoj osjetljivosti na neuravnoteženost, mogu se, na jednostavan način, odrediti optimalne vrijednosti projektnih parametara kod kojih osjetljivost na neuravnoteženost ima minimalnu vrijednost (tablica 13).

Na temelju tablice 13., osjetljivost na neuravnoteženost od 2,61 deseže se s 200% povećanom vertikalnom krutošću drugog oslonca ležaja (parametar B), 50% smanjenom horizontalnom krutošću drugog oslonca ležaja (parametar C) te 200% povećanom vertikalnom krutošću oba oslonca turbine.



Slika 75. Osjetljivost na neuravnoteženost u ovisnosti o projektним parametrima

Tablica 13. Dio rezultata poredan po rastućoj osjetljivosti na neuravnoteženost

Korak optim.	A	B	C	D	E	Osjetljivost
224	1	3	0,5	3	3	2,56
143	1	3	0,5	3	1	2,61
3	1,5	0,5	0,5	0,5	0,5	2,64
84	1,5	0,5	0,5	0,5	1	2,65
165	1,5	0,5	0,5	0,5	3	2,65
12	1,5	0,5	1	0,5	0,5	2,66
93	1,5	0,5	1	0,5	1	2,67
174	1,5	0,5	1	0,5	3	2,67
183	1,5	0,5	3	0,5	3	2,70
102	1,5	0,5	3	0,5	1	2,70
21	1,5	0,5	3	0,5	0,5	2,70
243	1,5	3	3	3	3	2,81
234	1,5	3	1	3	3	2,81
225	1,5	3	0,5	3	3	2,81
152	1	3	1	3	1	2,85
233	1	3	1	3	3	2,85
230	1	1	1	3	3	2,98
221	1	1	0,5	3	3	2,99
242	1	3	3	3	3	3,06
239	1	1	3	3	3	3,07
161	1	3	3	3	1	3,07
58	0,75	1	0,5	3	0,5	3,15
61	0,75	3	0,5	3	0,5	3,16
6	1,5	1	0,5	0,5	0,5	3,16
139	0,75	1	0,5	3	1	3,16
15	1,5	1	1	0,5	0,5	3,17
24	1,5	1	3	0,5	0,5	3,18
142	0,75	3	0,5	3	1	3,19
220	0,75	1	0,5	3	3	3,19
87	1,5	1	0,5	0,5	1	3,24
223	0,75	3	0,5	3	3	3,25
169	0,75	3	0,5	0,5	3	3,25
96	1,5	1	1	0,5	1	3,26

Osjetljivost na neuravnoteženost od 2,67 desegnuta je s 50% povećanom masom drugog oslonca ležaja (parameter A) i 50% smanjenom vertikalnom krutošću drugog oslonca ležaja i prvog oslonca turbine (parametri B i D).

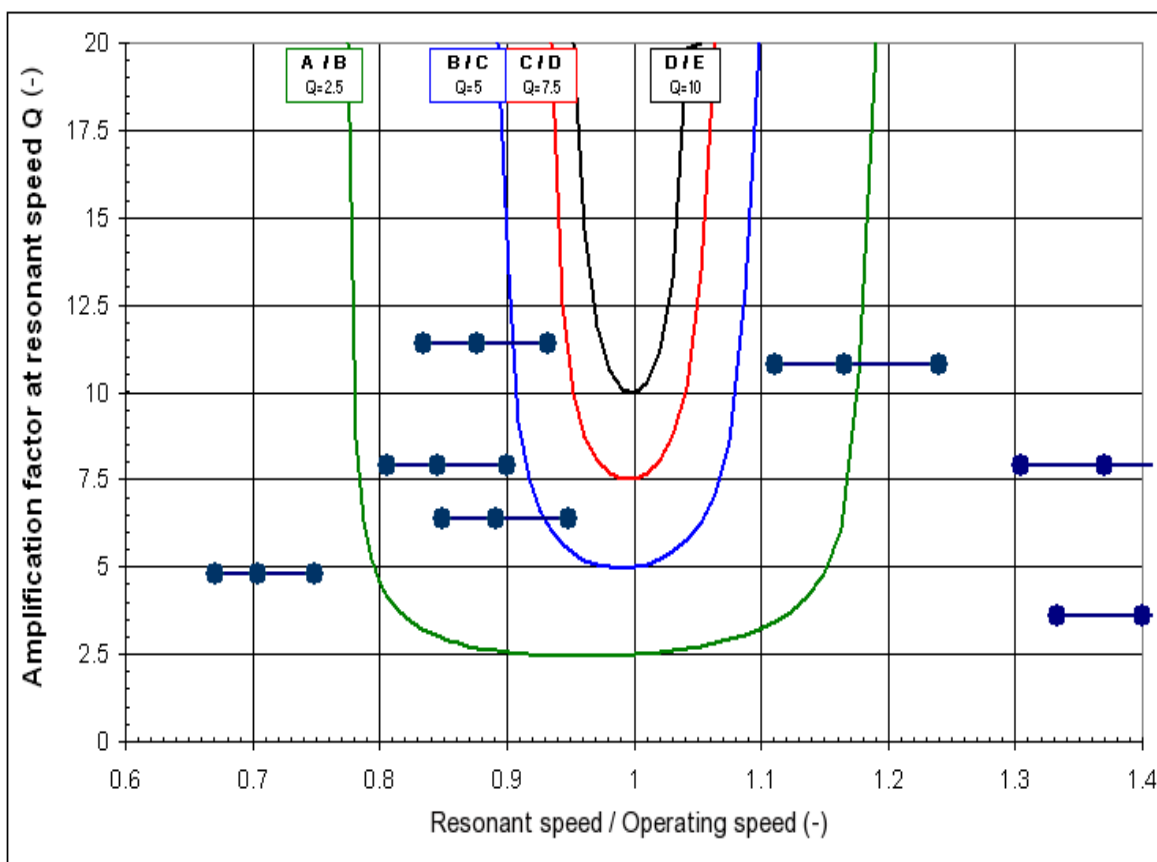
Osjetljivost na neuravnoteženost od 2,85 desegnuta je s 200% većom vertikalnom krutošću drugog oslonca ležaja i prvog oslonca turbine (parametri B i D).

Ta tri rješenja, ponovo, ističu temeljnu ideju smanjenja visoke osjetljivosti plinske turbine na neuravnoteženost: pomicanjem kritičnog načina vibriranja dovoljno ispod ili iznad područja radne frekvencije turbine. Povećavanjem krutosti oslonaca povećava se vlastita frekvencija vibriranja, dok se povećanjem mase oslonaca i smanjenjem krutosti smanjuje vlastita frekvencija kritičnog načina vibriranja.

### *10.2.2.1 Moguća optimalna konstrukcijska rješenja*

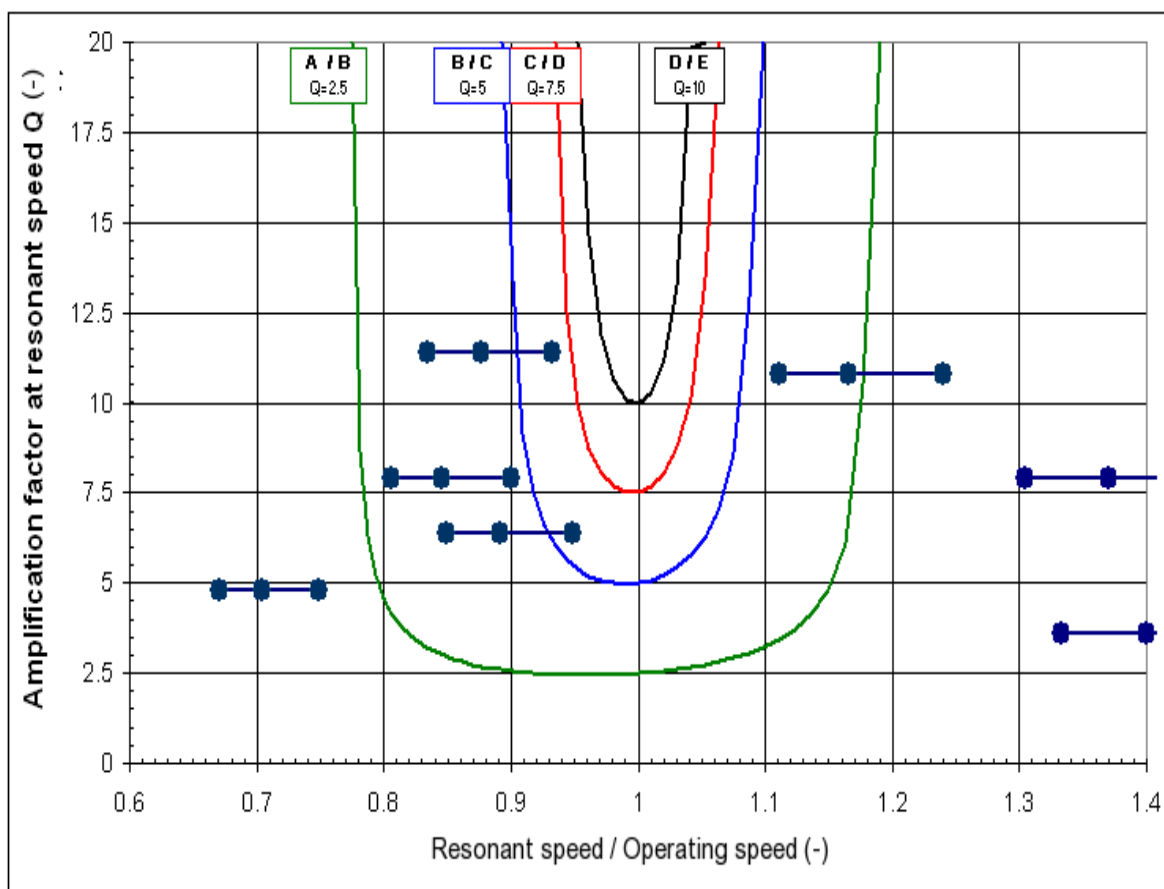
Kao što je istaknuto, tri moguća optimalna konstrukcijska rješenja pokazuju temeljnu ideju smanjenja visoke osjetljivosti na neuravnoteženost. Najmanja osjetljivost, kod prvog rješenja, ostvarena je povećanjem vertikalne i smanjenjem horizontalne krutosti drugog oslonca ležaja, te povećanjem vertikalne krutosti prvog oslonca kućišta turbine. Tako je kritični način vibriranja pomaknut iznad radne frekvencije turbine što rezultira smanjenjem osjetljivosti plinske turbine na neuravnoteženost (slika 76).

Smanjenje osjetljivosti na neuravnoteženost, kod drugog rješenja, ostvareno je smanjenjem vlastite frekvencije, odnosno pomicanjem kritične vlastite frekvencije ispod radne frekvencije turbine (slika 77.), povećavanjem mase drugog oslonca ležaja, te smanjenjem vertikalne krutosti drugog oslonca ležaja i prvog oslonca turbine.



Slika 76. Osjetljivost na neuravnoteženost: prvo moguće optimalno rješenje

Smanjenje osjetljivosti na neuravnoteženost, kod trećeg rješenja, ostvareno je povećanjem vertikalne krutosti drugog oslonca ležaja, te prvog i drugog oslonca kućišta turbine. Treće rješenje odgovara optimumu dobivenom inženjerskim postupkom (slika 66).



Slika 77. Osjetljivost na neuravnoteženost: drugo moguće optimalno rješenje

### 10.3 Usporedba mogućih optimalnih rješenja

Dobivena su četiri moguća optimalna rješenja: jedno rješenje primjenom inženjerskog postupka i tri rješenja primjenom plana pokusa. Usporedba rezultata predočena je u tablici 14.

S motrišta kakvoće vibracijskih svojstava turbine, sva rješenja pokazuju značajno smanjenje osjetljivosti plinske turbine na neuravnoteženost od 36% do 41%, međutim prvo rješenje primjenom planiranja pokusa ističe se najmanjom osjetljivošću na neuravnoteženost 2,61.

Kod rješenja primjenom inženjerskog postupka, kao i kod prvog i trećeg rješenja iz plana pokusa, smanjenje osjetljivosti na neuravnoteženost ostvareno je pomicanjem vlastite frekvencije iznad područja radnih frekvencija turbine, dok je kod drugog rješenja iz plana pokusa smanjenje osjetljivosti na neuravnoteženost ostvareno pomicanjem vlastite frekvencije ispod područja radnih frekvencija turbine, smanjenjem krutosti oslonaca ležajeva. To ima prednost u smanjenju opterećenja uslijed neuravnoteženosti koje se prenosi na temeljnu ploču.

S motrišta procjene složenosti mogućih optimalnih rješenja, te potrebnih promjena početnog konstrukcijskog rješenja, rješenje primjenom inženjerskog postupka najsloženije je jer zahtjeva promjenu četiri projektna parametra, dok je treće rješenje iz plana pokusa najjednostavnije jer zahtjeva promjenu samo dva projektna parametra.

Kod odabira konačnog optimalnog rješenja mora se uzeti u obzir sve navedeno.



Tablica 14. Usporedba mogućih optimalnih rješenja

Konstrukcijsko rješenje	Početno konstrukcijsko rješenje	Moguća optimalna konstrukcijska rješenja			
		Inženjerski pristup	Pristup planiranja pokusa		
			Prvo	Drugo	Treće
Vrijednost projektnih parametara *:					
masa prvog ležaja (A)	1	1	1	1	1
vert. krutost oslonca prvog ležaja (B)	1	<b>3,2</b>	1	1	1
horiz. krutost oslonca prvog ležaja (C)	1	1	1	1	1
kutna krutost oslonca prvog ležaja (D)	1	1	1	1	1
masa drugog ležaja (E)	1	1	1	<b>1,5</b>	1
vert. krutost oslonca drugog ležaja (F)	1	<b>3,2</b>	<b>3,0</b>	<b>0,5</b>	<b>3,0</b>
horiz. krutost oslonca drugog ležaja (G)	1	1	<b>0,5</b>	1	1
kutna krutost oslonca drugog ležaja (H)	1	1	1	1	1
vert. krutost prvog oslonca kućišta (J)	1	<b>3,2</b>	<b>3,0</b>	<b>0,5</b>	<b>3,0</b>
horiz. krutost prvog oslonca kućišta (K)	1	1	1	1	1
vert. krutost drugog oslonca kućišta (L)	1	<b>3,2</b>	1	1	1
horiz. krutost drugog oslonca kućišta (M)	1	1	1	1	1
Pomak vlastite frekvencije	-----	prema gore	prema gore	prema dolje	prema dolje
Osjetljivost na neuravnoteženost $Q_s$	<b>4,45</b> (područje E )	<b>2,83</b> (područje C)	<b>2,61</b> (područje C)	<b>2,67</b> (područje C)	<b>2,85</b> (područje C)
Poboljšanje spram početnog rješenja	-----	<b>36%</b>	<b>41%</b>	<b>40%</b>	<b>36%</b>

\* vrijednosti projektnih parametara su bezdimenzijske, a predstavljaju omjer vrijednosti poboljšanog i početnog konstrukcijskog rješenja

## 11 Zaključak

Provedeno istraživanje potvrdilo je hipotezu da oslonci plinske turbine u današnjim konstrukcijama imaju veliki utjecaj na vibracijska svojstva cijelog postrojenja i da se dinamička svojstva složenog mehaničkog sustava, kao što je plinska turbina, mogu značajno poboljšati pravilnim odabirom krutosti oslonaca rotora i oslonaca kućišta turbine. Osim toga, pokazano je da se inženjerski prihvatljiv optimum dinamičkih svojstava može naći jednostavnim inženjerskim metodama i pravilnim tumačenjem rezultata, bez primjene složenih matematičkih algoritama.

Uslijed elastičnog oslanjanja, plinska turbina je izrazito osjetljiva na vlastite frekvencije statorske strukture, koje mogu uzrokovati rad u rezonanciji i vibracijsku nestabilnost. U ovom radu pošlo se od pretpostavki da su rotor, ležajevi i kućište plinske turbine zadani, te da zadovoljavaju dopuštena naprezanja, zahtjeve minimalnog životnog vijeka i kriterij vlastitih frekvencija modela s neizmjerljivo mekanim osloncima. Poboljšanje vibracijskih svojstava plinske turbine, temelji se na pronalaženju optimalnih vrijednosti parametara oslonaca ležajeva i oslonaca kućišta turbine.

Optimiranje vibracijskih svojstava plinske turbine provedeno je na pojednostavljenom vibracijskom modelu turbinskog postrojenja koji dovoljno točno opisuje njegovo vibracijsko ponašanje. Takav pojednostavljeni model rezultira sa smanjenim potrebnim vremenom za pripremu modela, za izračun i za tumačenje rezultata, a time i smanjenjem troškova razvoja nove turbine.

Normirana funkcija povećanja, odnosno osjetljivost plinske turbine na neuravnoteženost, opisuje kakvoću vibracijskih svojstava i odabrana je kao funkcija cilja. Za odabrane vrijednosti projektnih parametara, osjetljivost plinske turbine na neuravnoteženost izračunava se za sve vlastite vrijednosti u radnom području turbine (od 94% do 105% nominalne frekvencije vrtnje; s

korakom od 1%), a maksimalna osjetljivost na neuravnoteženost predstavlja vrijednost funkcije cilja za te vrijednosti projektnih parametara. Optimiranje vibracijskog ponašanja plinske turbine svodi se na minimiziranje funkcije cilja, odnosno minimiziranje osjetljivosti plinske turbine na neuravnoteženost.

Dva postupka optimiranja primjenjena su u ovom radu: inženjerski (temeljen na inženjerskom iskustvu i intuiciji) i plan pokusa (primjena statističkih metoda u planiranju, vođenju, razmatranju i tumačenju rezultata). Postupci su uspoređeni s motrišta kakvoće pronađenih optimalnih rješenja.

Dva su primjera razmatrana u ovom radu: pojednostavljeni model plinske turbine i model jednog turbinskog postrojenja.

Kod pojednostavljenog modela plinske turbine, primjenom oba postupka optimiranja dinamičkih svojstava, ostvareno je znatno poboljšanje spram početnog konstrukcijskog rješenja: osjetljivost na neuravnoteženost optimalnih rješenja spada u područje B prema ISO 10841 (niska osjetljivost na neuravnoteženost) dok je osjetljivost početnog konstrukcijskog rješenja na neuravnoteženost u području E (vrlo visoka osjetljivost na neuravnoteženost).

Kod modela turbinskog postrojenja dobivena su četiri moguća optimalna rješenja: jedno rješenje primjenom inženjerskog postupka i tri rješenja primjenom plana pokusa. S motrišta kakvoće vibracijskih svojstava turbine, sva rješenja pokazuju značajno smanjenje osjetljivosti plinske turbine na neuravnoteženost od 36% do 41%.

Međutim, uspjeh inženjerskog pristupa ovisi o iskustvu i intuiciji. Osim toga, kako su krutosti oba oslonca turbine, kod inženjerskog postupka mijenjane jednako, utjecaj pojedinačne krutosti oslonca ostao je nepoznat. U drugu ruku, ako bi se optimiranje provelo mijenjanjem jednog po jednog projektnog parametra to bi značajno povećalo broj potrebnih koraka, a još uvijek ne bi bilo moguće razmatrati sprege projektnih parametara. Iako inženjerski postupak

pokazuje značajno poboljšanje osjetljivosti plinske turbine na neuravnoteženost, ipak postoji rizik da takav postupak može dovesti do krivog optimalnog rješenja.

Primjena plana pokusa u optimiranju vibracijskih svojstava plinske turbine omogućuje efikasno i ekonomično donošenje ispravnih, pouzdanih i razumnih zaključaka. U planu pokusa promišljeno se mijenjaju projektni parametri i na temelju toga zaključuje kako se mijenjaju vibracijska svojstva plinske turbine. Kako na vibracijska svojstva ne utječu svi projektni parametri jednako, glavna je zadaća plana pokusa određivanje projektnih parametara koji imaju najveći utjecaj na vibracijsko ponašanje plinske turbine, te pronalaženje optimalne vrijednosti tih parametara, kako bi se postigla najbolja vibracijska svojstva plinske turbine unutar zadanih ograničenja.

Kod primjera turbinskog postrojenja, u prvom koraku plana pokusa primjenjen je selektivni pokus s ciljem određivanja najutjecajnijih projektnih parametara na vibracijska svojstva, te isključivanja parametara sa zanemarivim utjecajem. U prvom koraku plana pokusa (selektivni pokus) izračunato je 129 vrijednosti funkcije cilja. Na temelju razmatranja korelacije i varijance utvrđeno je pet značajnih projektnih parametara: masa drugog oslonca ležaja, vertikalna krutost drugog oslonca ležaja, horizontalna krutost drugog oslonca ležaja, vertikalna krutost prvog oslonca turbine i vertikalna krutost drugog oslonca turbine (slika 67). Smanjenje broja projektnih parametara na samo one najznačajnije, omogućuje optimiranje vibracijskih svojstava plinske turbine u sljedećem koraku. Tako se smanjuje vrijeme potrebno za optimiranje vibracijskih svojstava, pa tako i vrijeme potrebno za razvoj nove plinske turbine.

U drugom koraku pet značajnih parametara mijenjano je u potpunom faktorskom pokusu, na tri razine, s ciljem minimalne osjetljivosti plinske turbine na neuravnoteženost. Potpuni faktorski pokus, na tri razine vrijednosti

parametara, zahtjeva 243 izračuna funkcije cilja. Rezultati pokazuju da se osjetljivost početnog konstrukcijskog rješenja na neuravnoteženost može smanjiti **36% - 41%** (slika 74).

Četiri moguća optimalna konstrukcijska rješenja, jedno dobiveno inženjerskim postupkom i tri iz plana pokusa, pokazuju kako se može smanjiti osjetljivost turbine na neuravnoteženost: pomicanjem kritične vlastite frekvencije dovoljno ispod ili iznad područja radne frekvencije turbine. Povećavanjem krutosti oslonaca povećava se vlastita frekvencija dok se povećanjem mase oslonaca i smanjenjem krutosti vlastita frekvencija smanjuje.

Kod odabira konačnog optimalnog rješenja moraju se uzeti u obzir svi utjecaji: smanjenje osjetljivosti na neuravnoteženost, složenost odabranog konstrukcijskog rješenja, troškovi, opterećenje preneseno na temeljnu ploču, itd.

S motrišta kakvoće vibracijskih svojstava plinske turbine prvo optimalno rješenje iz plana pokusa najbolje je konstrukcijsko rješenje jer rezultira s najmanjom osjetljivošću na neuravnoteženost. Međutim, značajno poboljšanje osjetljivosti postignuto je, također, i kod drugih optimalnih rješenja.

S motrišta složenosti optimalnih rješenja i potrebnih promjena početnog konstrukcijskog rješenja, rješenje dobiveno inženjerskim postupkom jest najsloženije jer zahtjeva promjenu četiri projektna parametra, dok je treće rješenje iz plana pokusa najjednostavnije jer zahtjeva promjenu samo dva projektna parametra.

Kod rješenja primjenom inženjerskog postupka, kao i kod prvog i trećeg rješenja iz plana pokusa, smanjenje osjetljivosti plinske turbine na neuravnoteženost ostvareno je povećanjem krutosti oslonaca ležajeva i pomicanjem kritične vlastite frekvencije iznad frekvencijskog radnog područja turbine, dok je kod drugog rješenja iz plana pokusa smanjenje osjetljivosti na

neuravnoteženost ostvareno smanjenjem krutosti oslonaca ležajeva. To ima prednost jer smanjuje opterećenja prenesena na temeljnu ploču.

Rezultati istraživanja jasno pokazuju prednosti optimiranja vibracijskih svojstava plinske turbine:

- Postizanje niske osjetljivosti plinske turbine na neuravnoteženost već na samom početku razvoja.
- Razumjevanje vibracijskog ponašanja plinske turbine i značajnih projektnih parametara koji utječu na njena vibracijska svojstva.
- Smanjenje vremena potrebnog za razvoj plinske turbine zahvaljujući pojednostavljenom i potpuno parametriziranom vibracijskom modelu, kao i sustavnom razmatranju problema na temelju plana pokusa.
- Bolje razumjevanje ograničenja zadanog projekta plinske turbine, čime se omogućava spoznaja, već na samom početku razvoja, da se vibracijska svojstva plinske turbine ne mogu poboljšati uz zadane zahtjeve i ograničenja.

Doprinos ovog istraživanja je u sustavnom pojednostavljenju složenog problema optimiranja dinamičkih svojstava plinske turbine:

- Primjenom pojednostavljenog modela turbinskog postrojenja - smanjeno je potrebno vrijeme za pripremu modela.
- Definiranjem osjetljivosti plinske turbine na neuravnoteženost kao funkcije cilja koja opisuje kakvoću vibracijskih svojstava - optimiranje vibracijskog ponašanja plinske turbine svodi se na minimiziranje funkcije cilja.
- Razvijeni postupci optimiranja vibracijskih svojstava su jednostavni i lako primjenjivi u inženjerskoj praksi.

Pojednostavljeni postupak izravno smanjuje vrijeme potrebno za pripremu modela, izračun i tumačenje rezultata, pa tako i troškove razvoja nove turbine.

Nadalje, cilj razvijenih postupaka optimiranja nije samo poboljšanje dinamičkih svojstava već i razumijevanje dinamičkog ponašanja plinske turbine. Postupnim povećavanjem složenosti vibracijskog modela određuju se najutjecajni parametri na njegova vibracijska svojstva. Poznavajući te parametre, već u početnoj fazi projekta, može se zaključiti da li je moguće poboljšati vibracijska svojstva plinske turbine unutar zadanih ograničenja. To je, naravno, važno da se ne bi trošilo vrijeme i novac pokušavajući nemoguće, jer se, unutar zadanih projektnih ograničenja, vibracijska svojstva plinske turbine ne mogu poboljšati.

---

## 12 Literatura

- [1] API Standard 612, "Special Purpose Steam Turbines for Petroleum, Chemical and Gas Service Industries", American Petroleum Institute, 1995.
- [2] API Standard 616, "Gas Turbines for Petroleum, Chemical and Gas Service Industries", American Petroleum Institute, 1998.
- [3] API Standard 617, "Centrifugal Compressors for Petroleum, Chemical and Gas Service Industries", American Petroleum Institute, 1995.
- [4] Kirk, R. G., Gunter, E. J., "The Effect of the Support Flexibility and Damping on the Synchronous Response of a Single Mass Flexible Rotor", ASME Journal of Engineering for Industry, 94(1), pp.221-232., 1972.
- [5] Nicholas, J. C., Barrett, L. E., "The Effect of Bearing Support Flexibility on Critical Speed Prediction", ASLE Trans., 29, No. 3, pp. 329-338., 1986.
- [6] Lund, J. W., Pedersen, L. B., "The Influence of Pas Flexibility on the Dynamic Coefficients of a Tilting Pad journal Bearing", ASME Journal of Tribology, 109(1), pp. 65-70., 1986.
- [7] Li, D. F., Gunter, E. J., "Component Mode Synthesis of Large Rotor Systems", ASME Journal of Engineering for Power, 104(2), pp.552-560, 1982.
- [8] Queitzsch, G. K., "Forced Response Analysis of Multi-Level Rotor with Substructure", Ph.D. Dissertation, University of Virginia, 1985.
- [9] Barrett, L. E., Nicholas, J. C., Dhar, D., "The Dynamic Analysis of Rotor-Bearing Systems Using Experimental Bearing Support Compliance Data", Proceedings of the Fourth International Modal Analysis Conference, Union College, Schenectady, NY, Society for Experimental Mechanics, Bethel, CT, pp. 1531-1535., 1986.
- [10] Nicholas, J. C., Whalen, J. K., Franklin, S. D., "Improving Critical Speed Calculations Using Flexible Bearing Support FRF Compliance Data", *Proceedings of the 15<sup>th</sup> Turbomachinery Symposium*, Texas A&M University, College Station, TX., 1986.



- 
- [11] Redmond, I., "Practical Rotordynamics Modelling Using Combined Measured and Theoretical Data", Proceedings of the 13<sup>th</sup> International Modal Analysis Conference, Nashville, TC, Society for Experimental Mechanics, Bethel, CT., 1995.
- [12] Redmond, I., "Rotordynamics Modelling Utilizing Dynamic Support Data Obtained From Field Impact Tests", *Proceedings of Sixth International Conference on Vibrations in Rotating Machinery*, Oxford, Sept., Paper C500/055/96., 1996.
- [13] Rouch, K. E., McMains, T. H., Stephenson, R. W., "Modelling of Rotor-Foundations Systems Using Frequency-Response Functions in a Finite Element Approach", *1989 ASME Design Technical Conference 12th Biennial Conference on Mechanical Vibration and Noise*, Montreal, Canada ASME, New York, pp.157-166., 1989.
- [14] Stephenson, R. W., Rouch, K. E., "Generating Matrices of the Foundation Structure of a Rotor System from Test Data", *J. Sound Vib.*, 154, No. 3, pp. 467-484., 1992.
- [15] Feng, M. S., Hahn, E. J., "On the Identification of a Flexibly Supported Rigid Foundation With Unknown Location of the Principal Axes of Inertia", *Proceedings of ISROMAC-7, the 7<sup>th</sup> International Symposium on Transport Phenomena and Dynamics of Rotating Machinery*, Honolulu, HI, Feb., Pacific Center of Thermal Fluid Engineering, Bird Rock Publishing, pp. 705-714., 1998.
- [16] Lees, A. W., Friswell, M. I., "The Evaluation of Rotor Imbalance in Flexibly Mounted Machines", *J. Sound Vib.*, 208, No. 5, pp. 671-683., 1997.
- [17] Lees, A. W., Friswell, M. I., Smart, M. G., Prells, U., "The Identification of Foundation Vibration Parameters From Running Machine Data", *Proceedings of ISROMAC-7, the 7<sup>th</sup> International Symposium on Transport Phenomena and Dynamics of Rotating Machinery*, Honolulu, HI, Feb., Society for Experimental Mechanics, Bethel, CT, pp. 715-724., 1998.
- [18] Edwards, S., Lees, A. W., Friswell, M. I., "The Identification of Rotor Unbalance From Measured Foundation Response Data", *Proceedings of the*

- 
- 17<sup>th</sup> International Modal Analysis Conference, Feb. 8-11, Kissimmee, FL, Pacific Center of Thermal Fluid Engineering, Bird Rock Publishing, pp. 1610-1615., 1999.
- [19] Vazquez, J. A., Barrett, L. E., "Representing Flexible Supports by Polynomial Transfer Functions", ASME Paper 98-GT-27., 1998.
- [20] Vazquez, J. A., Barrett, L. E., "Transfer Function Representation of Flexible Supports and Casings of Rotating Machinery", *Proceedings of the 17<sup>th</sup> International Modal Analysis Conference*, Feb. 8-11, Kissimmee, FL, Society of Experimental Mechanics, Bethel, CT., 1999.
- [21] Vazquez, J. A., „Using Transfer Functions to Model Flexible Supports and Casings of Rotating Machinery“, Ph.D. dissertation, University of Virginia, Charlottesville, VA, Jan., 1999.
- [22] Vazquez, J. A., Barrett, L. E., and Flack, R. D., "A Flexible Rotor on Flexible Bearing Supports. Part I: Stability", *Proceedings of the 1999 Vibration Conference*, Sept. 12-16., Las Vegas, NV, Paper DETC99/VIB-8285., 1999.
- [23] Vazquez, J. A., Barrett, L. E., and Flack, R. D., "A Flexible Rotor on Flexible Bearing Supports. Part I: Unbalance Response", *Proceedings of the 1999 Vibration Conference*, Sept. 12-16., Las Vegas, NV, Paper DETC99/VIB-8286., 1999.
- [24] Rajan, M., Rajan, S. D., Nelson, H. D. and Chen, W. J., "Optimal Placement of Critical Speeds in Rotor-Bearing Systems", *ASME Journal of Vibration Acoustics, Stress and Reliability in Design*, 109, pp. 152-157., 1987.
- [25] Steffen Jr, V., Pacheco, R. P., Borges, J. A. F., "Optimisation Techniques in Rotordynamics", *Proceedings of the 15<sup>th</sup> International Modal Analysis Conference*, Orlando, FL, USA, pp.2009-2015., 1997.
- [26] Srinivasan, S., Maslen, E. H., Barrett, L. E., "Optimization of Bearing Locations for Rotor Systems with Magnetic Bearings", *ASME Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 119, pp.464-468., 1997.
- [27] Shiau, T. N., Kuo C. P., Hwang, J. R., "Multiobjective Optimization of a Flexible Rotor in Magnetic Bearings with Critical Speeds and Control

- 
- Current Constraints", *Proceedings of the International Gas Turbine Aeroengine Congress and Exposition*, ASME, New York, NY, pp. 1-13., 1994.
- [28] Doizelet, D., Bondoux, D., "Application of Optimization Techniques for Hypercritical Rotors", *Proceedings of the 3<sup>rd</sup> International Conference on Rotor Dynamics*, Lyon, pp. 57-62., 1990.
- [29] Diewald, W., Nordmann, R., „Parameter Optimization for the Dynamics of Rotating Machinery", *Proceedings of th 3<sup>rd</sup> International Conference on Rotor Dynamics*, Lyon, pp. 51-55., 1990.
- [30] Chen, T. Y., Wang, B. P., „Optimum Design of Rotor-Bearing Systems with Eigenvalue Constraints", *ASME Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 115, pp.246-255., 1993.
- [31] Jurjevic, Z., Stegic, M., "Using Exponential Penalty Functions in Optimisation of Rotor Supports", *Transcription of Famena*, Volume 28-1, 2004.
- [32] Scilab Group, "Introduction to Scilab - User's Guide", Inria /ENCP Cergrene, 2001.
- [33] Scilab Group, "Scilab Reference Manual", Inria /ENCP Cergrene, 2002.
- [34] Scilab Group, "Scilab Inside - Guide for Developers", Inria /ENCP Cergrene, 2002.
- [35] Erich, F.E., "Handbook of Rotordynamics", Krieger Publishing Company, 1999.
- [36] Yamamoto T., Ishida Y., "Linear and Nonlinear Rotordynamics", John Wiley & Sons, 2001.
- [37] Vance, J.M., "Rotordynamics of Turbomachinery", John Wiley & Sons, 1988.
- [38] Childs D., "Turbomachinery Rotordynamics", Wiley Inter Science, 1993.
- [39] Stegić M., "Inženjerski priručnik IP1, Teorija vibracija", Školska knjiga, 1996.
- [40] Stegić M., "Teorija vibracija linearnih diskretnih mehaničkih sustava", Udžbenici Sveučilišta u Zagrebu, 1996.
- [41] Den Hartog J.P., "Mechanical Vibrations", Courier Dover Publication, 1985.

- 
- [42] Vulić, N., "Numerički proračun linijskih sustava", magistarski rad, Fakulteta strojarstva i brodogradnje Sveučilišta u Zagrebu, 1989.
- [43] Bobanac, N., "Analiza precesionih vibracija osovinskog voda", magistarski rad, Fakulteta strojarstva i brodogradnje Sveučilišta u Zagrebu , 1987.
- [44] Parunov J., "Numerički model kliznog ležaja", Radovi Fakulteta strojarstva i brodogradnje Sveučilišta u Zagrebu, XVIII , 1994.
- [45] Grubišić R., Parunov J., Draganja D., "Utjecaj krutosti kežajeva i precesije brodskog vijka na fleksijske vibracije brodskog osovinskog voda", II Radovi Fakulteta strojarstva i brodogradnje Sveučilišta u Zagrebu, XX, 1996.
- [46] Mittwollen, N., "Taschenlager-Optimierung", FFV Bericht Vorhaben Nr.339, TU Braunschweig and FVV Frankfurt, 1987.
- [47] Someya, T., "Journal Bearing Databook", Spinger Verlag, 1989.
- [48] Antony, J., "Design of Experiments for Engineers and Scientists", Butterworth-Heinemann, 2003.
- [49] Anderson M.J, Whitcomb P.J. "DOE Simplified - Practical Tools for Effective Experimentation", Productivity Inc., 2000.

---

## Kratki životopis

Zdenko Jurjević rođen je 22. prosinca 1967. godine u Zagrebu. Osnovnu i srednju školu matematičko-informatičkog smjera završio je u Karlovcu.

Godine 1987/88. upisao je studij strojarstva na Fakultetu strojarstva i brodogradnje Sveučilišta u Zagrebu, na kojem je diplomirao u veljači 1996. godine.

Odmah nakon završenog studija, zapošljava se u tvrtki ABB PPL u Karlovcu gdje radi na projektiranju pomoćnih sustava plinske turbine. U kolovozu 1999. godine odlazi na specijalizaciju u Alstom Power Ltd. u Badenu, Švicarska, u trajanju od 18 mjeseci.

Od ožujka 2001. godine zaposlen je u Alstom Power Ltd. u Badenu gdje nastavlja raditi na projektiranju pomoćnih sustava plinske turbine, a od srpnja 2003. godine radi u razvoju plinskih turbina na analizi konstrukcija i vibracijama turbinskih postrojenja.

Autor je nekoliko desetaka stručnih radova iz područja dinamike rotorskih sustava i procesnog inženjerstva, patenta hlađenja kućišta plinske turbine i računalnog programa TMDLab za analizu vibracija turbinskih postrojenja. Osim toga, koautor je nekoliko znanstvenih radova.

Tečno govori i piše engleski a služi se njemačkim jezikom.

---

## Short Biography

Zdenko Jurjević was born in Zagreb on 22<sup>nd</sup> December, 1967. He finished elementary school and mathematics-informatics secondary school in Karlovac.

In the academic year 1987/88, he started a nine-semester study in mechanical engineering at Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture, University of Zagreb, where he graduated in February 1996.

After graduation he have worked on design and development of the gas turbine auxiliary systems at ABB PPL in Karlovac. In August 1999, he went for 18 months specialization to ALSTOM Power Ltd. in Baden, Switzerland.

Since March 2001 he have been working at ALSTOM Power Ltd. in Baden, where he continued to work on development of the gas turbine auxiliary systems, and since July 2003 he have been working on structural and vibration analysis of the turbine power trains.

He is author of many profesional papers in fields of rotodynamics and process engineering, an invention of the gas turbine casing cooling, and a package for dynamic analysis of the turbine power trains TMDLab. As co-author he published several scientific papers.

He speaks fluent English and German.

# Dodatak A: Primjeri za provjeru računalnog programa

## Primjer 1:

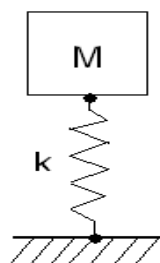
### Realne svojstvene vrijednosti: SUSTAV SA JEDNIM STUPNJEM SLOBODE GIBANJA (1 SSG)

#### Ulazni podaci

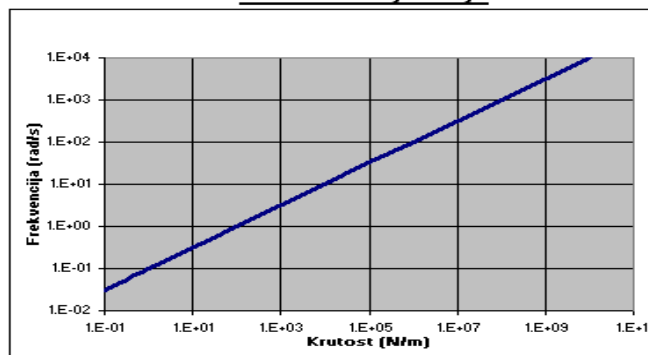
Masa  $M = 100$  kg

Krutost $k$ (N/m)	Frekvencija $\omega$ (rad/s)
1.00E-01	3.16E-02
1.00E+00	1.00E-01
1.00E+02	1.00E+00
1.00E+04	1.00E+01
1.00E+06	1.00E+02
1.00E+08	1.00E+03
1.00E+10	1.00E+04

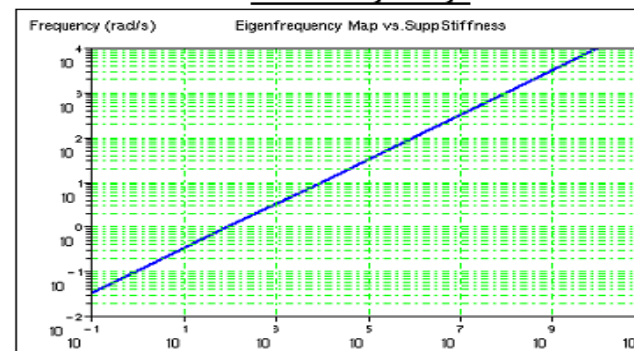
Rel. razlika 0.00%



#### Analičko rješenje



#### Vlastito rješenje



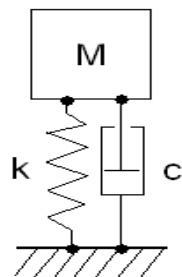
### Kompleksne svojstvene vrijednosti: SUSTAV SA JEDNIM STUPNJEM SLOBODE GIBANJA (1 SSG)

#### Ulazni podaci

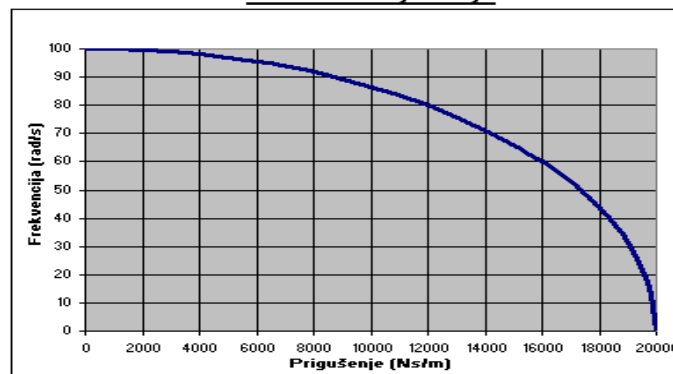
Masa  $M = 100$  kg  
Krutost  $k = 1.00E+06$  N/m

Prigušenje $c$ (Ns/m)	Frekvencija $\omega$ (rad/s)
1	100.00
2000	99.50
4000	97.98
6000	95.39
8000	91.65
12000	80.00
16000	60.00
18000	43.59
19000	31.22
19700	17.26
20000	0.00

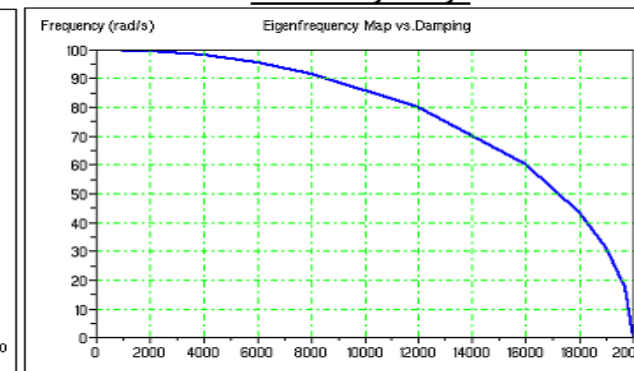
Rel. razlika 0.00%



#### Analičko rješenje



#### Vlastito rješenje



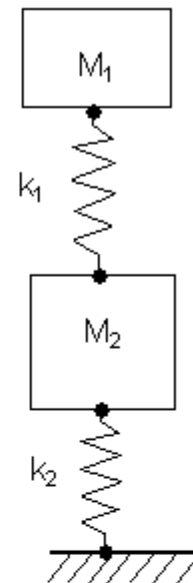
**Primjer 2:**

**Realne svojstvene vrijednosti: SUSTAV SA 2 SSG**

**Ulazni podaci**

<b>Masa 1</b>	M1=	<b>100</b>	kg
<b>Krutost 1</b>	k1=	<b>1.00E+06</b>	N/m
<b>Masa 2</b>	M2=	<b>100</b>	kg
<b>Krutost 2</b>	k2=	<b>1.00E+06</b>	N/m

		<b>Analitičko rješenje</b>	<b>Vlastito rješenje</b>	<b>Relativna razlika</b>
$\omega_1$	rad/s	61.80	61.80	<b>0.00%</b>
$\omega_2$	rad/s	161.80	161.80	<b>0.00%</b>

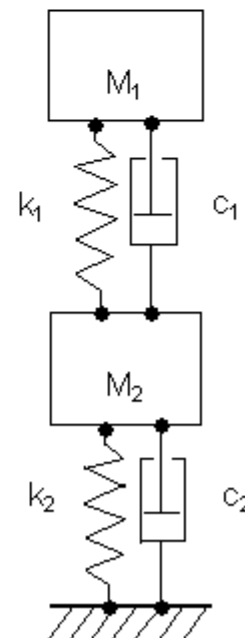


**Kompleksne svojstvene vrijednosti: SUSTAV SA 2 SSG**

**Ulazni podaci**

<b>Masa 1</b>	M1=	<b>100</b>	kg
<b>Krutost 1</b>	k1=	<b>1.00E+06</b>	N/m
<b>Prigušenje</b>	c1=	<b>1.00E+06</b>	Ns/m
<b>Masa 2</b>	M2=	<b>100</b>	kg
<b>Krutost 2</b>	k2=	<b>1.00E+06</b>	N/m
<b>Prigušenje</b>	c2=	<b>1.00E+06</b>	Ns/m

		<b>Analitičko rješenje</b>	<b>Vlastito rješenje</b>	<b>Relativna razlika</b>
$\omega_1$	(rad/s)	61.77	61.774	<b>0.00%</b>
$\zeta_1$	-	0.03	0.031	<b>0.00%</b>
$\omega_2$	(rad/s)	161.27	161.273	<b>0.00%</b>
$\zeta_2$	-	0.08	0.081	<b>0.00%</b>





**Primjer 3:****Realne svojstvene vrijednosti: KONZOLNA GREDA BEZ MASE SA DISKOM****Svojstva tromosti diska**

Mdiska= 50 kg  
Ipdiska= 30 kgm<sup>2</sup>

**Geometrija grede**

L= 1 m  
D= 0.1 m

**Svojstva materijala**

$\rho_0$ = 0 kg/m<sup>3</sup>  
E= 2.10E+11 N/m<sup>2</sup>  
 $\nu$ = 0.3 -  
G= 8.08E+10 N/m<sup>2</sup>

**Izračunata svojstva grede**

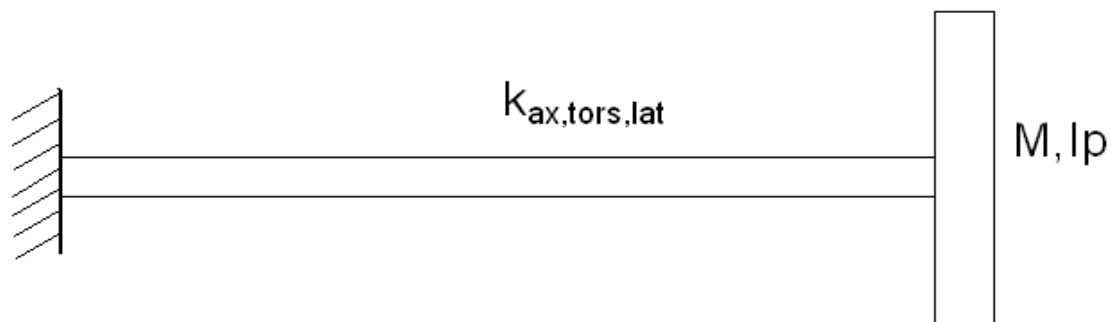
A= 7.85E-03 m<sup>2</sup>  
I<sub>t</sub>= 9.82E-06 m<sup>4</sup>  
I<sub>b</sub>= 4.91E-06 m<sup>4</sup>  
Mgrede= 0.00E+00 kg  
Ipgrede= 0.00E+00 kgm<sup>2</sup>

**Izračunata krutost grede**

k<sub>a</sub>= 1.65E+09 N/m  
k<sub>t</sub>= 7.93E+05 N/m  
k<sub>s</sub>= 3.09E+06 N/m

**Ukupna tromost sustava**

M= 50.00 kg  
I<sub>p</sub>= 30.00 kgm<sup>2</sup>



Vlastita frekvencija	Analitičko rješenje	Vlastito rješenje	Relativna razlika
Oсна $\omega_a$ (Hz)	914.09	914.09	0.00%
Torzijska $\omega_t$ (Hz)	25.88	25.88	0.00%
Savojna $\omega_s$ (Hz)	39.58	39.58	0.00%

**Primjer 4:****Realne svojstvene vrijednosti: KONZOLNA GREDA SA DISKOM****Svojstva tromosti diska**

Mdiska=	50	kg
Ipdiska=	30	kgm <sup>2</sup>

**Geometrija grede**

L=	1	m
D=	0.1	m

**Svojstva materijala**

ρ <sub>0</sub> =	7850	kg/m <sup>3</sup>
E=	2.10E+11	N/m <sup>2</sup>
ν <sub>i</sub> =	0.3	-
G=	8.08E+10	N/m <sup>2</sup>

**Izračunata svojstva grede**

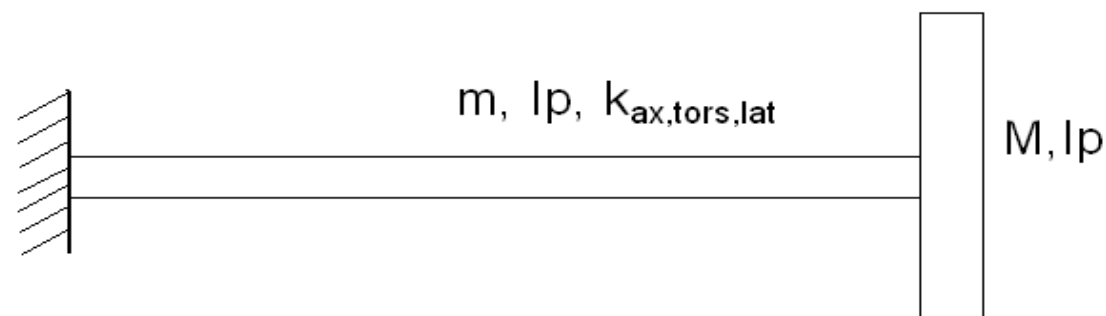
A=	7.85E-03	m <sup>2</sup>
I <sub>t</sub> =	9.82E-06	m <sup>4</sup>
I <sub>b</sub> =	4.91E-06	m <sup>4</sup>
Mgrede=	6.17E+01	kg
I <sub>p</sub> grede=	7.71E-02	kgm <sup>2</sup>

**Izračunata krutost grede**

k <sub>a</sub> =	1.65E+09	N/m
k <sub>t</sub> =	7.93E+05	N/m
k <sub>s</sub> =	3.09E+06	N/m

**Ukupna tromost sustava**

M=	70.55	kg
I <sub>p</sub> =	30.03	kgm <sup>2</sup>



Vlastita frekvencija (Hz)	Analitičko rješenje	Vlastito rješenje	Relativna razlika
Oсна $\omega_a$ (Hz)	769.52	769.52	0.00%
Torzijska $\omega_t$ (Hz)	25.86	25.86	0.00%
Savojna $\omega_s$ (Hz)	33.32	33.32	0.00%

**Primjer 5:****Realne svojstvene vrijednosti: GREDA BEZ MASE SA DISKOM NA SREDINI****Svojstva tromosti diska**

Mdiska= 50 kg

**Geometrija grede**

L= 2 m

D= 0.1 m

**Svojstva materijala**ro= 0 kg/m<sup>3</sup>E= 2.10E+11 N/m<sup>2</sup>

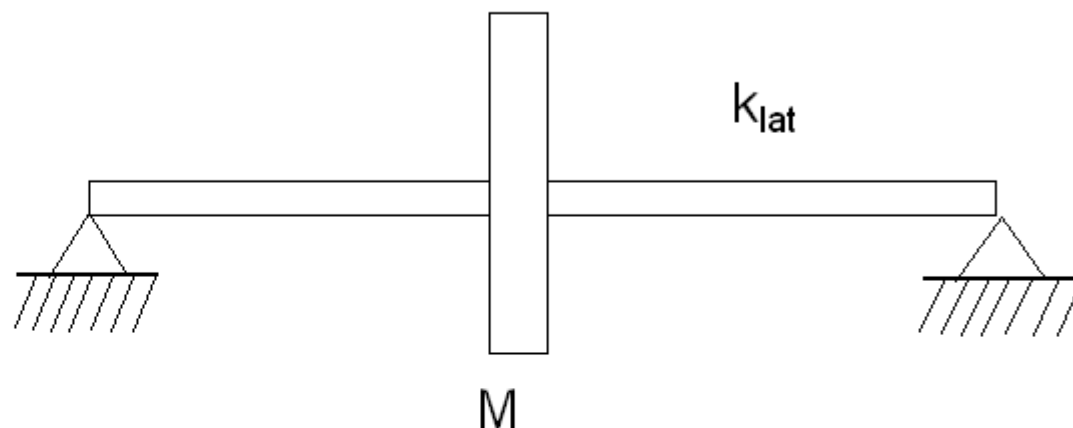
ni= 0.3 -

**Izračunata svojstva grede**A= 0.007853982 m<sup>2</sup>Ib= 4.90874E-06 m<sup>4</sup>**Izračunata krutost grede**

k= 6.19E+06 N/m

**Ukupna tromost sustava**

M= 50.00 kg



Vlastita frekvencija	Analitičko rješenje	Vlastito rješenje	Relativna razlika
$\omega$ (Hz)	55.976	55.976	0.00%

**Primjer 6:****Realne svojstvene vrijednosti: GREDA SA DISKOM NA SREDINI****Svojstva tromosti diska**

Mdiska= 50 kg

**Geometrija grede**

L= 2 m

D= 0.1 m

**Svojstva materijala**ro= 7850 kg/m<sup>3</sup>E= 2.10E+11 N/m<sup>2</sup>

ni= 0.3 -

**Izračunata svojstva grede**A= 0.007853982 m<sup>2</sup>Ib= 4.90874E-06 m<sup>4</sup>

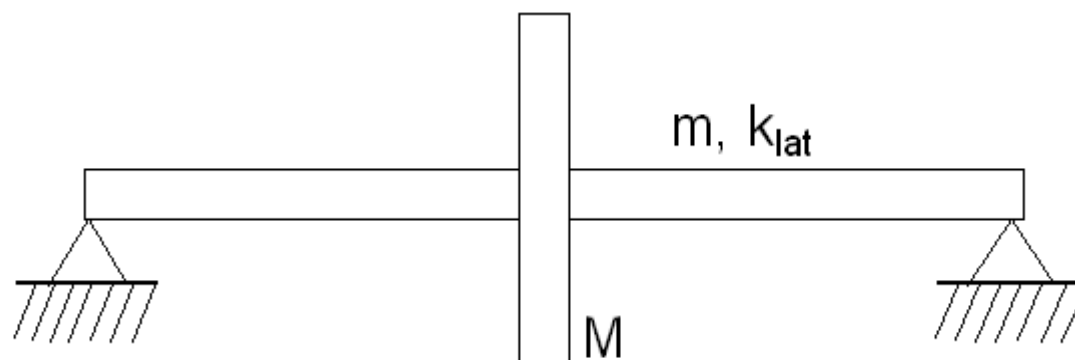
Mgrede= 123.3075117 kg

**Izračunata krutost grede**

k= 6.19E+06 N/m

**Ukupna tromost sustava**

M= 91.10 kg



Vlastita frekvencija	Analitičko rješenje	Vlastito rješenje	Relativna razlika
$\omega$ (Hz)	41.469	41.469	0.00%

**Primjer 7:**

**Realne svojstvene vrijednosti: GREDA UKLJEŠTENA NA OBA KRAJA SA DISKOM NA SREDINI**

**Svojstva tromosti diska**

Mdiska= 50 kg

**Geometrija grede**

L= 2 m

D= 0.1 m

**Svojstva materijala**

$\rho_0$ = 7850 kg/m<sup>3</sup>

E= 2.10E+11 N/m<sup>2</sup>

$\nu_i$ = 0.3 -

**Izračunata svojstva grede**

A= 0.007853982 m<sup>2</sup>

I<sub>b</sub>= 4.90874E-06 m<sup>4</sup>

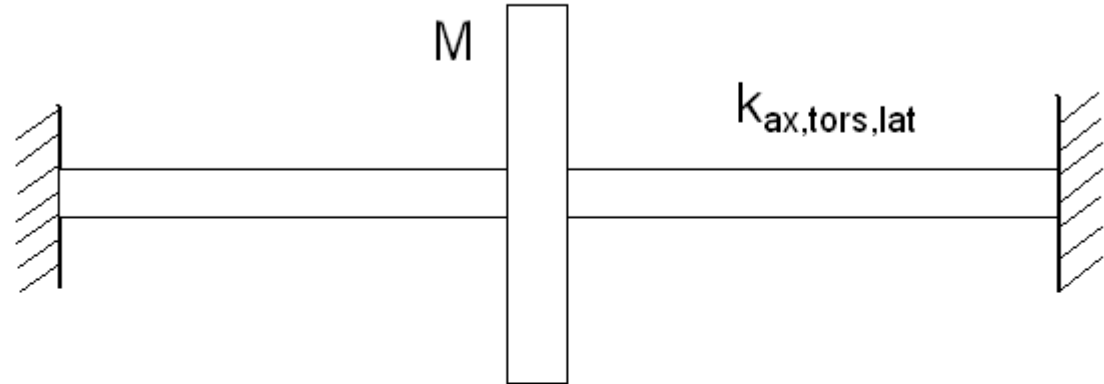
Mgrede= 123.3075117 kg

**Izračunata krutost grede**

k= 2.47E+07 N/m

**Ukupna tromost sustava**

M= 91.10 kg



Vlastita frekvencija	Analitičko rješenje	Vlastito rješenje	Relativna razlika
$\omega$ (Hz)	82.938	82.938	0.00%

**Primjer 8:**

**Kompleksne svojstvene vrijednosti: JEFFCOTTOV ROTOR**

**Svojstva tromosti diska**

Mdiska= 5.55 kg  
Ipdiska= 0.0312 kgm<sup>2</sup>

**Geometrija grede**

L= 0.5 m  
D= 0.03 m

**Svojstva materijala**

ro= 0 kg/m<sup>3</sup>  
E= 2.10E+11 N/m<sup>2</sup>  
ni= 0.3 -  
G= 8.08E+10 N/m<sup>2</sup>

**Izračunata svojstva grede**

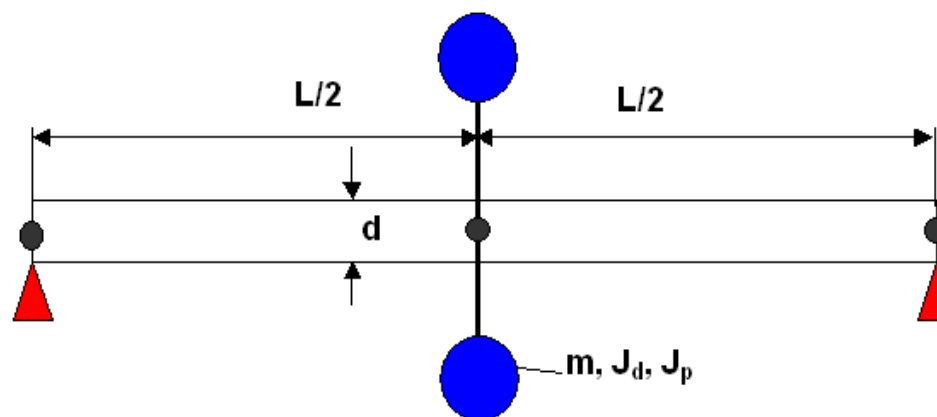
A= 0.000706858 m<sup>2</sup>  
Ib= 3.97608E-08 m<sup>4</sup>  
kapa= 0.886363636 -  
eps= 0.00264  
Mgrede= 0 kg  
Ipgrede= 0 kg

**Izračunata krutost grede**

ks= 3.18E+06 N/m  
ka= 1.99E+05 N/rad

**Ukupna tromost sustava**

M= 5.55 kg  
Ip= 0.0312 kgm<sup>2</sup>



Vlastita frekvencija	Prva	Druga	Prva	Druga protusmjer.	Druga istosmjer.
Kutna brzina (1/s)	0		200		
Analitičko rješenje (Hz)	120.49	401.77	120.49	248.79	648.79
Vlastito rješenje (Hz)	120.49	401.77	120.49	248.79	648.79
Relativna razlika	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%

**Primjer 9:****Kompleksne svojstvene vrijednosti: ROTOR STALNOG PROMJERA****Ulazni podaci**

$L = 1$  m  
 $d = 20$  mm  
 $E = 2.1E+11$  N/m<sup>2</sup>  
 $\nu = 0.3$  -  
 $\rho = 7850$  kg/m<sup>3</sup>

**Vlastite frekvencije kod kružne frekvencije  $0 \text{ s}^{-1}$** 

	Vlastita frekvencije (Hz)				Max.
	1st	2nd	3rd	4th	
<b>Poznato rješenje</b>	40.57	161.51	360.72	634.72	
<b>Vlastito rješenje</b>	40.56	161.51	360.71	634.71	
<b>Relativna razlika</b>	<b>-0.02%</b>	<b>0.00%</b>	<b>0.00%</b>	<b>0.00%</b>	<b>0.02%</b>

**Vlastite frekvencije kod kružne frekvencije  $1000 \text{ s}^{-1}$** 

	Vlastita frekvencije istosmjerne vrtnji (Hz)				Max.
	1st	2nd	3rd	4th	
<b>Poznato rješenje</b>	40.80	162.48	362.87	638.45	
<b>Vlastito rješenje</b>	40.80	162.49	362.86	638.45	
<b>Relativna razlika</b>	<b>0.00%</b>	<b>0.00%</b>	<b>0.00%</b>	<b>0.00%</b>	<b>0.00%</b>

**Primjer 10:**

**Kompleksne svojstvene vrijednosti: JEDNOSTAVAN ROTORSKI SUSTAV SA DVA DISKA**

Primjer iz literature: E Kramer, 1984, "Maschinendynamik", Springer-Verlag, str. 181

**Ulazni podaci**

Tromost diskova:  $m_A = 1200$  kg  
 $I_A = 100$  kgm<sup>2</sup>  
 $m_B = 1200$  kg  
 $I_B = 100$  kgm<sup>2</sup>

Duljina vratila:  $l_1 = 800$  mm  
 $l_2 = 1100$  mm  
 $l_3 = 700$  mm

Promjer vratila:  $d_1 = 120$  mm  
 $d_2 = 120$  mm  
 $d_3 = 80$  mm

**Svojstva materijala**

Modul elastičnosti  $E = 2.10E+11$  N/m<sup>2</sup>  
 Poissonov koeficijent  $\nu = 0.3$  -  
 Gustoća  $\rho = 7850$  kg/m<sup>3</sup>

**Model B**

Kritična brzina (1/min)	Prva	Druga	
Poznato rješenje	457.0	852.0	
Vlastito rješenje	457.3	852.3	Max.
Razlika	0.3	0.3	0.30
Relativna razlika	0.07%	0.04%	0.07%

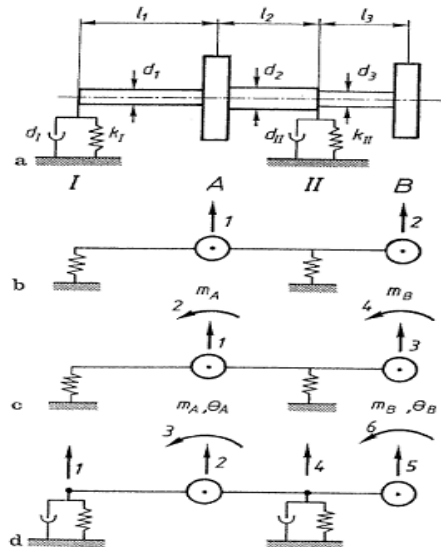
**Model C**

Kritična brzina (1/min)	Prva	Druga	Treća	Četvrta	
Poznato rješenje	427.0	852.0	1867.0	2672.0	
Vlastito rješenje	426.7	851.6	1866.2	2665.7	Max.
Razlika	-0.3	-0.4	-0.8	-6.3	6.3
Relativna razlika	-0.07%	-0.05%	-0.04%	-0.24%	0.24%

**Model D**

Kritična brzina (1/min)	Prva	Druga	Treća	Četvrta	
Poznato rješenje	429.0	890.0	1904.0	2818.0	
Vlastito rješenje	429.2	889.5	1907.0	2817.2	Max.
Razlika	0.2	-0.5	3.0	-0.8	3.0
Relativna razlika	0.05%	-0.06%	0.16%	-0.03%	0.16%

Bezdim. prigušenje (-)	Prva	Druga	Treća	Četvrta	
Poznato rješenje	0.001	0.019	0.003	0.048	
Vlastito rješenje	0.003	0.026	0.220	0.052	Max.
Razlika	0.002	0.007	0.217	0.004	0.2



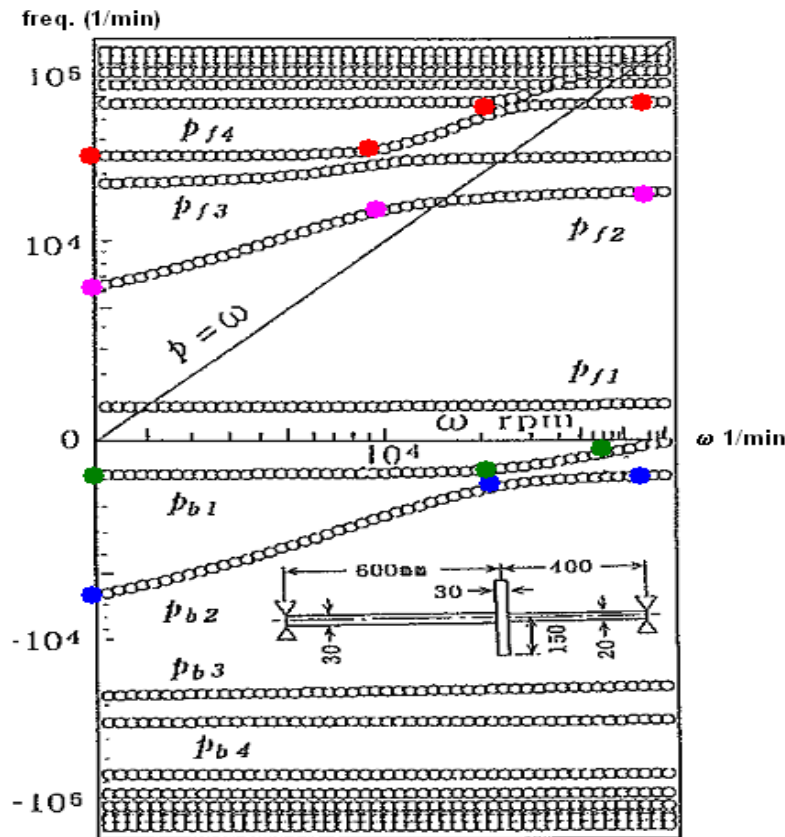


**Primjer 11:**

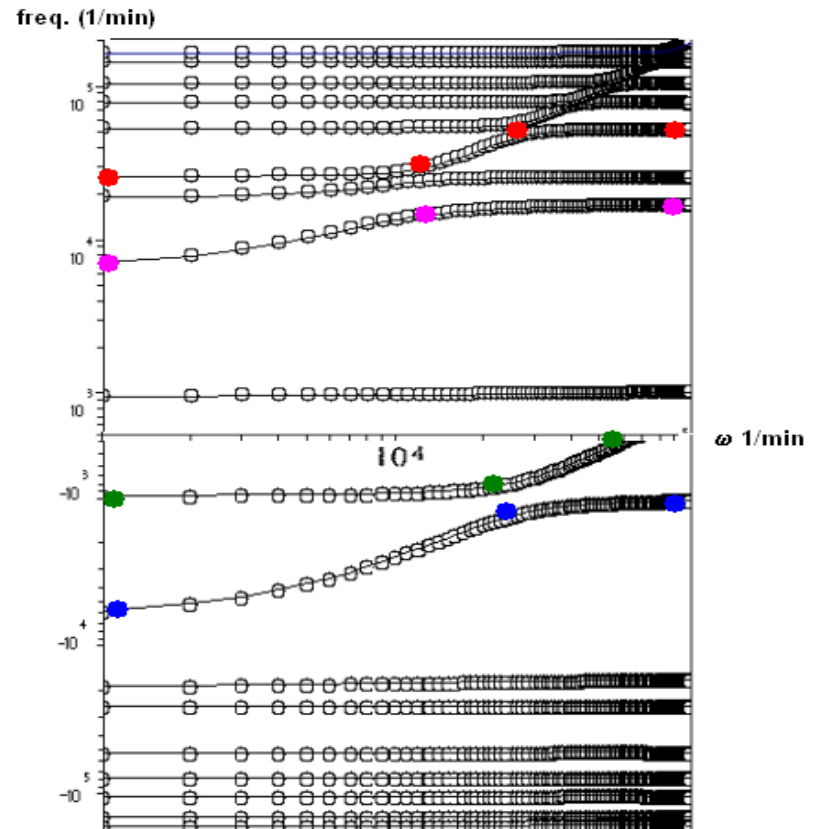
**Kompleksne svojstvene vrijednosti: JEDNOSTAVAN ROTORSKI SUSTAV**

Primjer iz literature: T.Yamamoto & Y.Ishida, 2001, "Linear and Nonlinear Rotordynamics", John Wiley & Sons, str. 268

**Poznato rješenje**

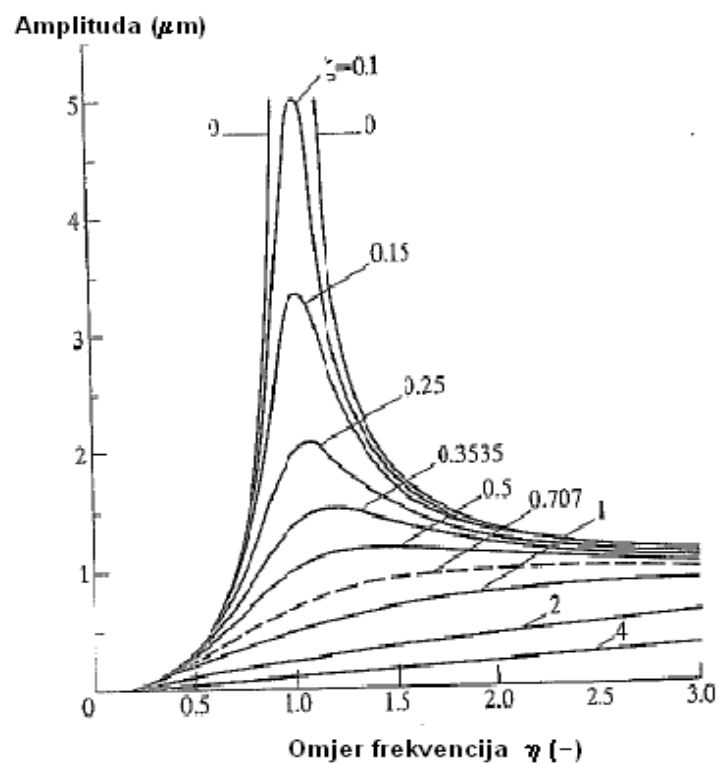
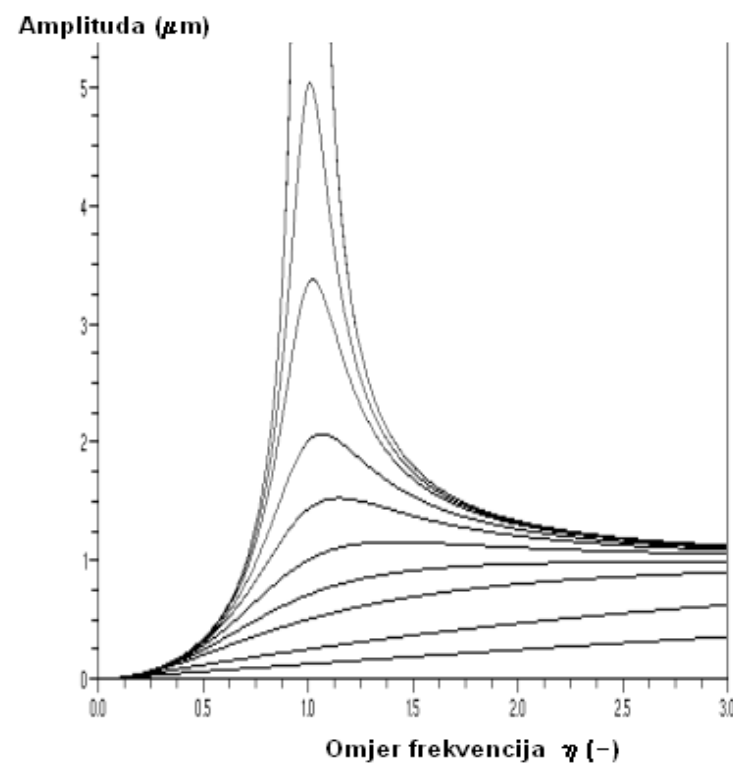


**Vlastito rješenje**



**Primjer 12:****Prisilne vibracije: JEFFCOTTOV ROTOR - KINEMATIČKA UZBUDA**

Primjer iz literature: Fredrich F. Erich, 1999, "Handbook of Rotordynamics", Krieger Publishing Company, str. 1.6

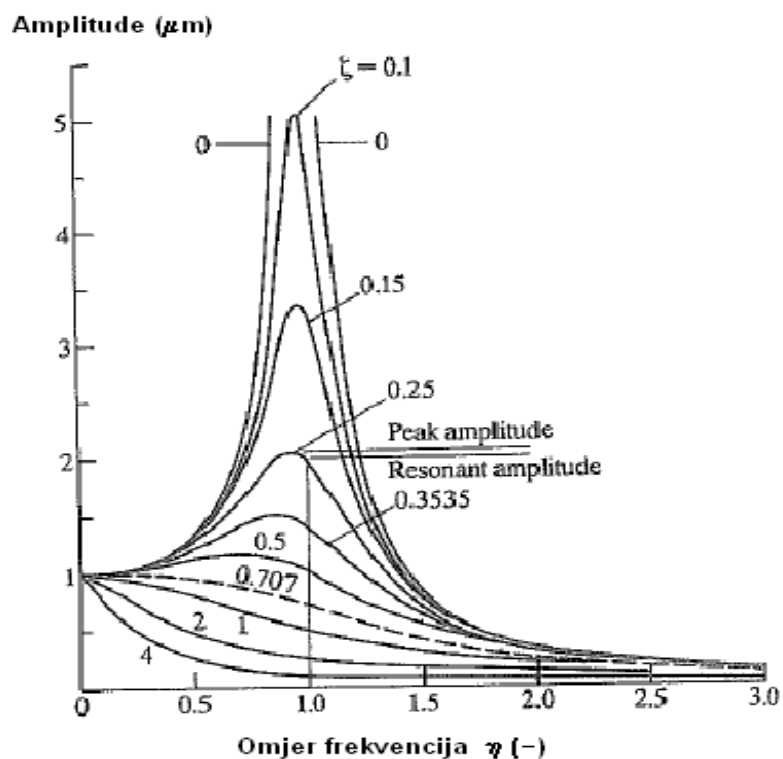
**Poznato rješenje****Vlastito rješenje**

**Primjer 13:**

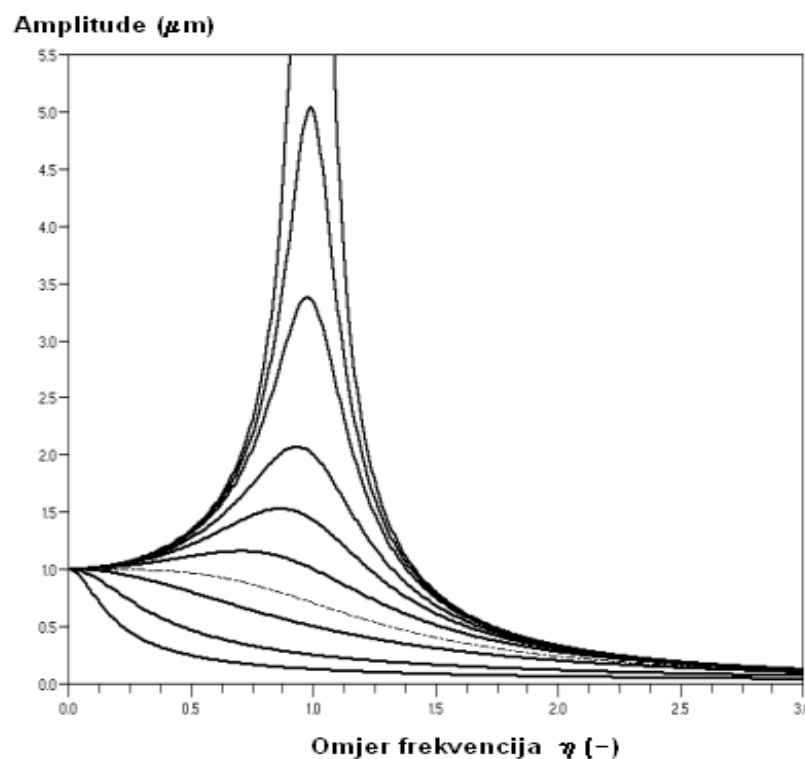
**Prisilne vibracije: JEFFCOTTOV ROTOR - HARMONIJSKA UZBUDA**

Primjer iz literature: Fredrich F. Erich, 1999, "Handbook of Rotordynamics", Krieger Publishing Company, str. 1.7

**Poznato rješenje**



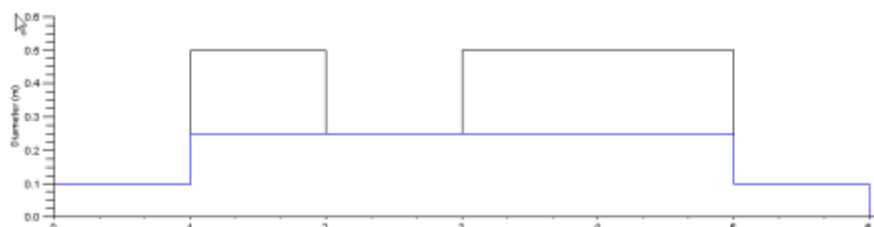
**Vlastito rješenje**



**Primjer 14:**

**Svojne vlastite frekvencije: JEDNOSTAVAN ROTOR**

**Kontura rotora**



**Vlastite kružne frekvencije**

Oblik vibriranja	Poznato rješenje	Vlastito rješenje	Razlika	
	1/min	1/min	1/min	%
Prvi	2190	2190	0	0.00%
Drugi	3974	3972	-2	-0.05%
Treći	4608	4608	0	0.00%
Četvrti	7312	7314	2	0.03%
<b>Max Dev.</b>			<b>2</b>	<b>0.05%</b>

**Poznato rješenje**



ne = 7312 1/min



ne = 4608 1/min

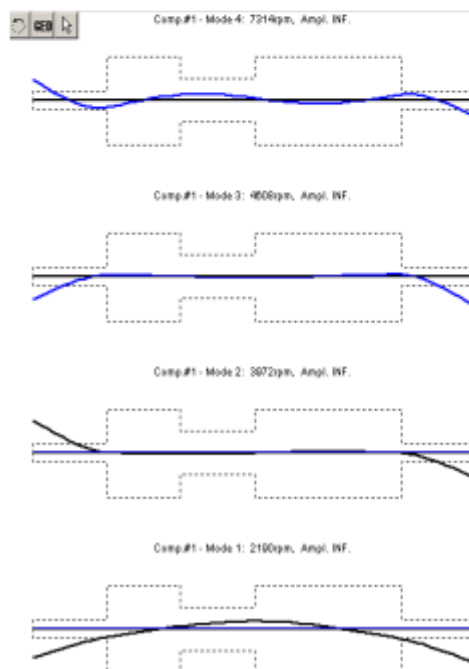


ne = 3974 1/min



ne = 2190 1/min

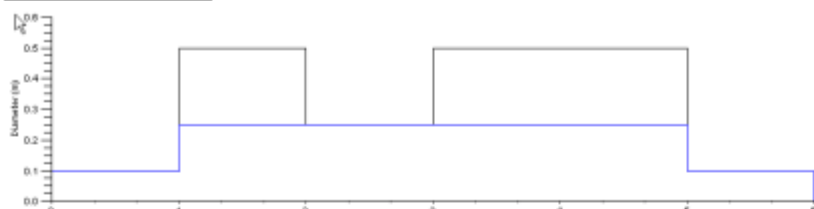
**Vlastito rješenje**



**Primjer 15:**

**Svojne vlastite frekvencije: KRUTO OSLONJEN ROTOR**

**Kontura rotora**



**Vlastite kružne frekvencije**

Oblik vibriranja	Poznato rješenje	Vlastito rješenje	Razlika	
	1/min	1/min	1/min	%
Prvi	583	582	-1	0.17%
Drugi	1565	1566	1	0.06%
Treći	3663	3666	6	0.16%
Četvrti	7151	7152	1	0.01%
Peti	9299	9300	1	0.01%
	<b>Max Dev.</b>		<b>6</b>	<b>0.16%</b>

**Poznato rješenje**



ne = 9299 1/min



ne = 7151 1/min



ne = 3663 1/min

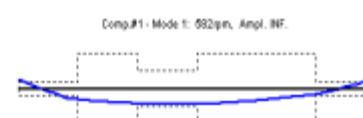
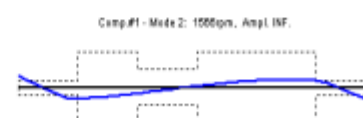
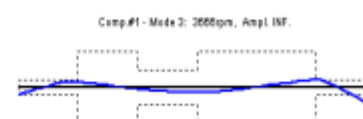
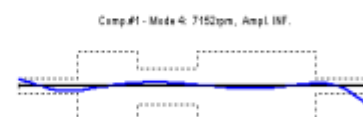
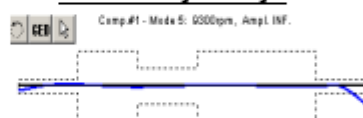


ne = 1565 1/min



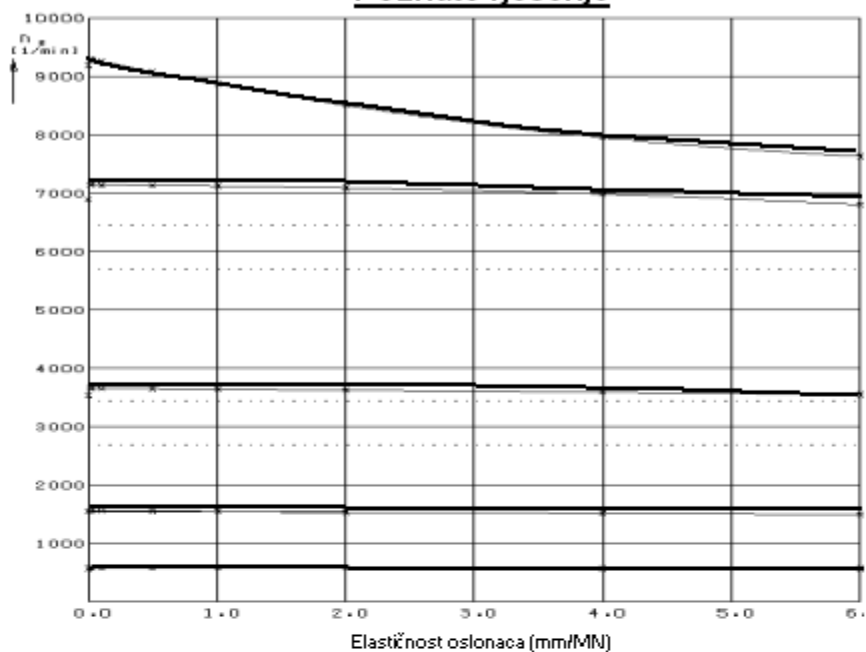
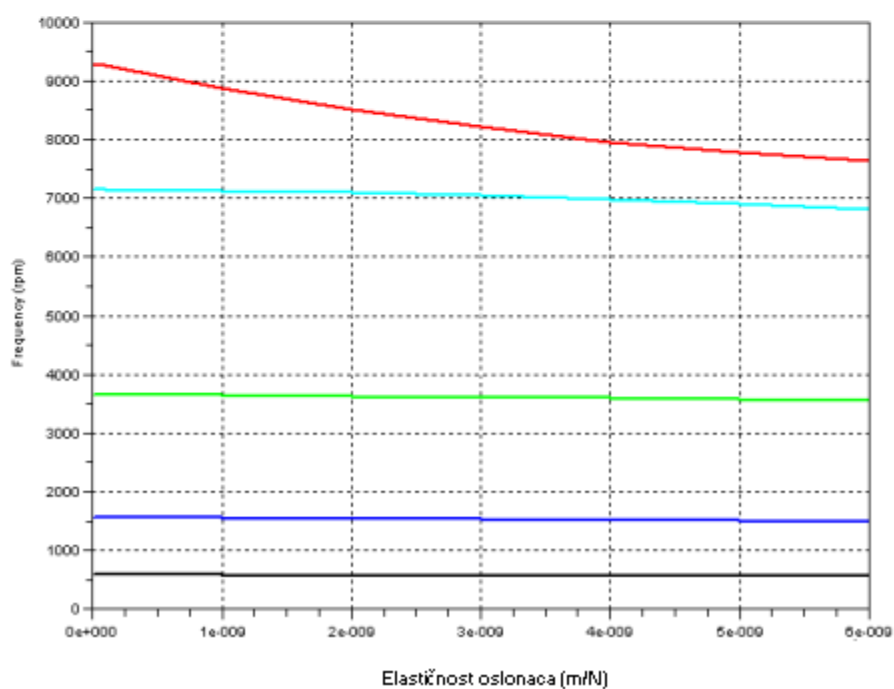
ne = 583 1/min

**Vlastito rješenje**



**Primjer 16:****Savojne vlastite frekvencije: Elastično oslonjen rotor**

Grafovi vlastite kružnih frekvencija u ovisnosti o krutosti oslonca

**Poznato rješenje****Vlastito rješenje**

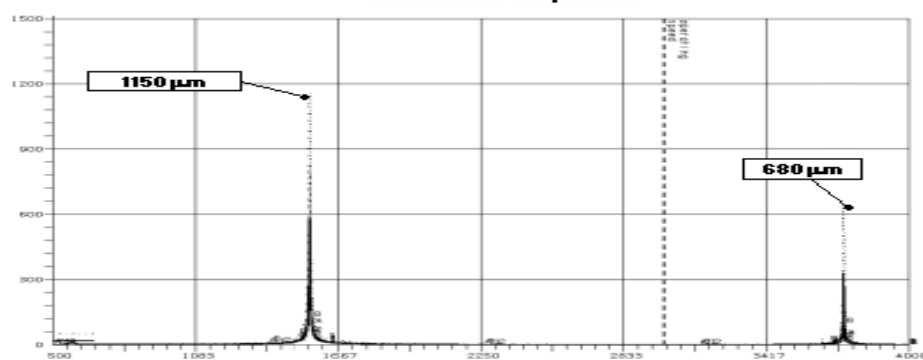
**Primjer 17:**

**Prisilne vibracije: JEDNOSTAVAN ROTOR SA LEŽAJEVIMA I OSLONCIMA LEŽAJEVA**

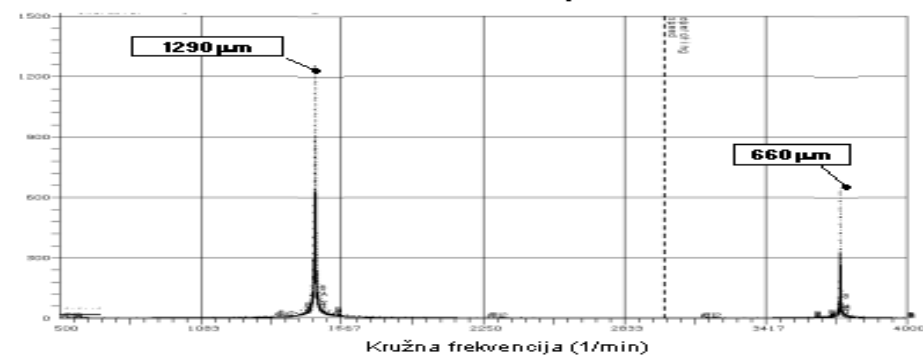
Usporedba amplituda u rezonanciji uslijed neuravnoteženosti rotora

	1560 1/min		4000 1/min		Max
	Vert.	Horiz.	Vert.	Horiz.	
Poznato rješenje	1150	1290	680	660	
Vlastito rješenje	1180	1300	690	670	
Relativna razlika	2.61%	0.78%	1.47%	1.52%	2.61%

**Poznato rješenje**  
Vertikalne amplitude



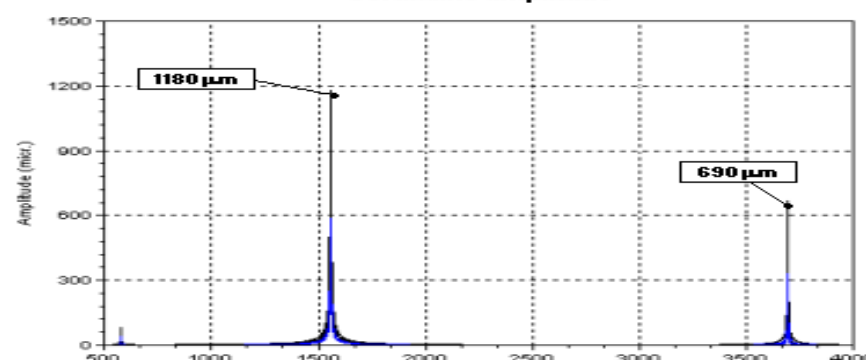
Horizontalne amplitude



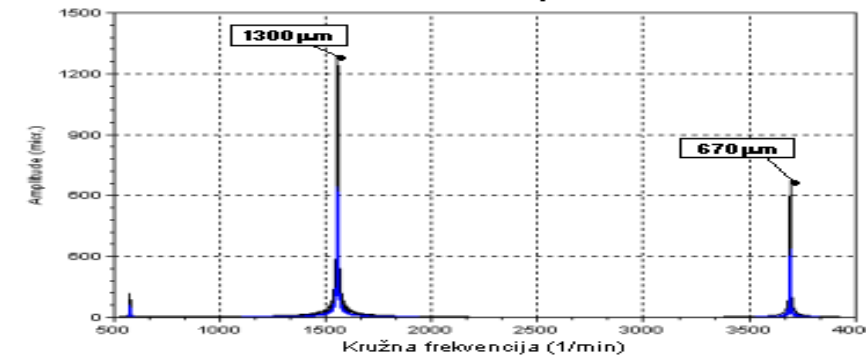
Kružna frekvencija (1/min)

**Vlastito rješenje**

Vertikalne amplitude



Horizontalne amplitude



Kružna frekvencija (1/min)

**Primjer 18:**

**Prisilne vibracije: PRIMJER TURBINSKOG POSTOJENJA**

Usporedba amplituda u rezonanciji uslijed neuravnoteženosti rotora

Kritična brzina	1500 1/min	2100 1/min	4000 1/min	4100 1/min	
Poznato rješenje	16000	16500	18100	10000	
Vlastito rješenje	15200	15500	17500	9500	Max
Razlika	-5.00%	-6.06%	-3.31%	-5.00%	6.06%

