

# Analiza pouzdanosti u konceptualnom projektiranju konstrukcije broda

---

Pirić, Karlo

Doctoral thesis / Disertacija

2014

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:235:512088>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-03-02**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb](#)





Sveučilište u Zagrebu

FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

Karlo Pirić

**ANALIZA POUZDANOSTI U  
KONCEPTUALNOM PROJEKTIRANJU  
KONSTRUKCIJE BRODA**

DOKTORSKI RAD

Zagreb, 2014



Sveučilište u Zagrebu

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING AND NAVAL  
ARCHITECTURE

Karlo Pirić

**RELIABILITY ANALYSIS IN SHIP  
STRUCTURAL CONCEPT DESIGN**

DOCTORAL THESIS

Zagreb, 2014



Sveučilište u Zagrebu

FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

Karlo Pirić

**ANALIZA POUZDANOSTI U  
KONCEPTUALNOM PROJEKTIRANJU  
KONSTRUKCIJE BRODA**

DOKTORSKI RAD

Mentor:  
Prof.dr.sc. Vedran Žanić

Zagreb, 2014



Sveučilište u Zagrebu

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING AND NAVAL  
ARCHITECTURE

Karlo Pirić

# **RELIABILITY ANALYSIS IN SHIP STRUCTURAL CONCEPT DESIGN**

DOCTORAL THESIS

Supervisor:  
Prof. Vedran Žanić, NA, PhD

Zagreb, 2014

## Podaci za bibliografsku karticu

<b>UDK:</b>	629.5.05:519.6
<b>Ključne riječi:</b>	Teorija pouzdanosti, vjerojatnost oštećenja, funkcija performanse, metoda smanjenja dimenzionalnosti, funkcija gustoće vjerojatnosti, statistički momenti oko ishodišta, senzitivnost vjerojatnosti oštećenja, projektna točka, sistemska pouzdanost
<b>Znanstveno područje:</b>	Tehničke znanosti
<b>Znanstveno polje:</b>	Brodogradnja
<b>Institucija u kojoj je rad izrađen:</b>	Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje
<b>Mentor rada:</b>	Dr.sc. Vedran Žanić, red.prof.
<b>Broj stranica:</b>	XVIII + 123
<b>Broj slika:</b>	47
<b>Broj tablica:</b>	51
<b>Broj bibliografskih jedinica:</b>	58
<b>Datum obrane:</b>	05. veljače 2014.
<b>Povjerenstvo:</b>	Dr.sc. Joško Parunov, red.prof. - predsjednik Dr.sc. Vedran Žanić, red.prof. - mentor Dr.sc. Luka Grubišić, izv.prof. - član Prirodoslovno-matematički fakultet
<b>Institucija u kojoj je rad pohranjen:</b>	Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje

## Zahvale

Prije svega, želim se zahvaliti svome mentoru prof. dr. sc. Vedranu Žaniću na stimulativnom radu, uloženom trudu i ukazanom znanju te velikoj pomoći koja mi je bila potrebna prilikom izrade i pisanja ove doktorske disertacije. Hvala i na pruženoj slobodi u istraživačkom radu što je od velike važnosti za mladog znanstvenika.

Također se želim zahvaliti svim članovima Povjerenstva koji su svojim primjedbama i prijedlozima dodatno utjecali na provedena istraživanja i sadržaj doktorskog rada kao i na njegovu kvalitetu.

Hvala kolegama doc.dr.sc. Jerolimu Andriću, dr.sc. Maru Ćorku, dr.sc. Stanislavu Kitaroviću, dr.sc. Peri Prebegu i dipl.ing. Marku Stipčeviću na stručnoj pomoći i ugodnoj radnoj atmosferi, ali i neizmjerne prijateljskoj podršci i razumijevanju od trenutka kada sam postao članom Zavoda za brodogradnju i pomorsku tehniku. Veliko hvala i na brojnim ugodnim i veselim trenucima u dosadašnjem zajedničkom radu i životu općenito.

Iskreno se zahvaljujem i svim ostalim kolegama i suradnicima na matičnom Zavodu i šire, koji su u značajnoj mjeri doprinijeli stvaranju ugodnog i motivirajućeg radnog ambijenta.

I na kraju, najveću zahvalnost dugujem supruzi Željani i svojoj obitelji jer su najzaslužniji da ova disertacija uopće postoji. Vjerojatno ne razumiju previše od onoga što je u njoj napisano, ali da nije bilo njihove bezuvjetne ljubavi i svakodnevnih odricanja te neizmjerne vjere u moj uspjeh, ova disertacija nikada ne bi ni bila napisana. Hvala vam...

Autor

# Sadržaj

<b>PREDGOVOR</b>	<b>VI</b>
<b>SAŽETAK</b>	<b>VII</b>
<b>KLJUČNE RIJEČI</b>	<b>VIII</b>
<b>SUMMARY</b>	<b>IX</b>
<b>KEY WORDS</b>	<b>X</b>
<b>POPIS OZNAKA</b>	<b>XI</b>
<b>POPIS SLIKA</b>	<b>XIV</b>
<b>POPIS TABLICA</b>	<b>XVI</b>
<b>POPIS SKRAĆENICA</b>	<b>XVIII</b>
<b>1 UVOD</b>	<b>1</b>
1.1 Obrazloženje razmatranog problema i motivacija za istraživanje	1
1.2 Pregled dosadašnjih istraživanja	2
1.3 Cilj i hipoteza istraživanja	11
1.4 Metodologija i plan istraživanja	11
<b>2 DEFINICIJA PROBLEMA U ANALIZI POUZDANOSTI</b>	<b>14</b>
<b>3 DEFINICIJA I KARAKTERISTIKE SLUČAJNE VARIJABLE</b>	<b>19</b>
3.1 Statistički momenti	20
3.2 Srednja vrijednost	21
3.3 Standardna devijacija	21



3.4	Koeficijent varijacije	21
3.5	Koeficijent korelacije	22
<b>4</b>	<b><u>PREDLOŽENA METODA ZA ANALIZU POUZDANOSTI</u></b>	<b><u>23</u></b>
4.1	Analogija s Monte Carlo metodom	24
4.2	Metoda smanjenja dimenzionalnosti	26
4.2.1	Formule numeričke kvadrature u kojima figuriraju statistički momenti	30
4.2.2	Modifikacija metode smanjenja dimenzionalnosti	31
4.3	Nataf transformacija	34
4.3.1	Određivanje matrice korelacijskih koeficijenata $\rho^e$	37
4.4	Određivanje funkcije gustoće vjerojatnosti	38
4.4.1	Izvod i konačni analitički izrazi za nulti i prvi statistički moment oko ishodišta funkcije $H(g)$	40
4.4.2	Konačni analitički izraz za proizvoljni statistički moment oko ishodišta funkcije $H(g)$	45
4.4.3	Određivanje parametara funkcije gustoće vjerojatnosti funkcije performanse	46
4.4.4	Određivanje vjerojatnosti oštećenja	46
4.5	Određivanje senzitivnosti i projektne točke	47
4.6	Sistemska pouzdanost	48
4.6.1	Serijski sustav	50
4.6.2	Paralelni sustav	52
<b>5</b>	<b><u>RAČUNALNI PROGRAM ZA ANALIZU POUZDANOSTI FASTREL</u></b>	<b><u>54</u></b>
<b>6</b>	<b><u>PRIMJERI</u></b>	<b><u>57</u></b>
6.1	Verifikacijski primjeri	58
6.1.1	Primjer 1 – Linearna funkcija performanse	58
6.1.2	Primjer 2 – Nelinearna funkcija performanse	60

6.1.3	Primjer 3 – Nelinearna funkcija performanse (dvije projektne točke)	62
6.1.4	Primjer 4 – Nelinearna funkcija performanse (konkavna)	64
6.1.5	Primjer 5 – Sistemska pouzdanost (serijski sustav)	66
6.2	Primjeri primjene predložene metode	71
6.2.1	Primjer 6 – Uzdužna granična čvrstoća broda za prijevoz kontejnera	71
6.2.2	Primjer 7 – Sistemska pouzdanost ukrepljenog panela	74
6.2.3	Primjer 8 – Uzdužna granična čvrstoća kutijastog nosača	80
6.2.4	Primjer 9 – Višekriterijska optimizacija kutijastog nosača	87
<b>7</b>	<b><u>ZAKLJUČAK</u></b>	<b><u>95</u></b>
	<b><u>LITERATURA</u></b>	<b><u>97</u></b>
	<b><u>ŽIVOTOPIS</u></b>	<b><u>102</u></b>
	<b><u>CURRICULUM VITAE</u></b>	<b><u>103</u></b>
<b>8</b>	<b><u>PRILOZI</u></b>	<b><u>104</u></b>
8.1	Izvodi i konačni analitički izrazi integrala $I_k$	104
8.1.1	Integral $I_1$	104
8.1.2	Integral $I_2$	105
8.1.3	Integral $I_3$	107
8.1.4	Integral $I_4$	108
8.1.5	Integral $I_5$	109
8.1.6	Integral $I_6$	110
8.1.7	Integral $I_7$	111
8.2	Karakteristike različitih razdioba vjerojatnosti	113
8.3	Marginalna transformacija	117
8.4	Određivanje faktora $F$ u Nataf transformaciji	119

## Predgovor

U novije vrijeme je uočljiv značajan rast primjene optimizacije u konceptualnoj fazi projektiranja konstrukcije broda. Rast je najviše uvjetovan razvojem računala, ali i zahtjevima brodograđevne industrije koja primjenom znanstveno-istraživačkih dostignuća iz područja sinteze konstrukcija želi osigurati svoj opstanak na veoma zahtjevnom brodograđevnom tržištu. Brodovlasnik najčešće želi postići što je moguće lakši brod, jer na taj način može prevoziti više tereta za koji se plaća vozarina, međutim za širi društveni interes (izražen kroz tzv. *“societal constraint“*) je bitno da je brod što je moguće sigurniji te da odolijeva svim vremenskim nepogodama za vrijeme svog eksploatacijskog vijeka. Sukladno navedenom, vidljivo je da se zahtijeva primjena višekriterijske optimizacije koja će iznaći projekte koje karakterizira što veća razina sigurnosti uz što manju masu. S obzirom da je funkcija za određivanje mase konstrukcije broda relativno jednostavna, ovim radom će se naglasak staviti na analizu sigurnosti/pouzdanosti.

Pouzdanost je svojstvo konstrukcije da u predviđenom vremenu ispunjava svoju funkciju, sačuvavši pri tome svoja eksploatacijska svojstva u određenim granicama. Teorija pouzdanosti konstrukcija racionalno razmatra neizvjesnosti koje se javljaju prilikom projektiranja konstrukcija te nastoji postići sigurniju, uporabljiviju i ekonomski isplativiju konstrukciju. Određivanje vjerojatnosti oštećenja je jedno od ključnih područja interesa teorije pouzdanosti. Ako je poznata vjerojatnost oštećenja iz nje se direktno može odrediti sigurnost.

Metode pouzdanosti koje se danas koriste zahtijevaju velik broj evaluacija, a samim time i dulje računalno vrijeme te ih je gotovo nemoguće koristiti u realističnom višekriterijskom optimizacijskom procesu kad imamo velik broj projektnih i slučajnih varijabli. Stoga se nameće potreba za razvojem novih, manje zahtjevnih metoda za analizu vjerojatnosti oštećenja koje će s dovoljnom točnošću zahtijevati značajno manji broj evaluacija, a samim time i manje računalno vrijeme, te će kao takve omogućiti višekriterijsku optimizaciju.

Karlo Pirić, dipl.ing.brodogradnje  
Zagreb, srpanj 2013.

## Sažetak

Teorija pouzdanosti konstrukcija racionalno razmatra neizvjesnosti koje se javljaju prilikom strukturne analize i projektiranja konstrukcija, za razliku od tradicionalnih metoda koje pretpostavljaju da su svi parametri koji utječu na čvrstoću i opterećenje konstrukcije determinističke veličine. Određivanje vjerojatnosti oštećenja jedno je od ključnih područja interesa teorije pouzdanosti. U uvodnim razmatranjima ovog rada, dan je pregled dosadašnjih istraživanja i kratak opis trenutno korištenih metoda za analizu pouzdanosti. Različite metode omogućavaju različitu točnost procjene vjerojatnosti oštećenja, ali zahtijevaju i različito računalno vrijeme. U ovome radu predložena je metoda analize pouzdanosti koja, u odnosu na trenutačno korištene metode, zahtijeva značajno manje računalno vrijeme uza zadovoljavajuću točnost. Metoda se temelji na određivanju funkcije gustoće vjerojatnosti funkcije performanse jer se tada vjerojatnost oštećenja može odrediti njenim integriranjem u području od minus beskonačno do nula. Određivanje navedene funkcije gustoće vjerojatnosti se odvija u dva glavna koraka. U prvom se određuju njeni statistički momenti primjenom (u ovom radu modificirane) metode smanjenja dimenzionalnosti. Drugim korakom se iznalazi odgovarajući oblik funkcije gustoće vjerojatnosti koji zadovoljava statističke momente izračunate u prvom koraku. Pri tom se pretpostavlja da se funkcija gustoće vjerojatnosti može prikazati kao normalizirani umnožak dviju normalnih kumulativnih funkcija razdiobe. U ovom radu su izvedeni i analitički izrazi za određivanje proizvoljnih statističkih momenata tako pretpostavljene funkcije gustoće vjerojatnosti. Koristeći te izraze definira se nelinearni sustav jednadžbi iz kojeg se određuju četiri nepoznata parametra pretpostavljene funkcije gustoće vjerojatnosti. Također su dani i izrazi za određivanje osjetljivosti (senzitivnosti) vjerojatnosti oštećenja, izrazi za određivanje projektne točke te (za slučaj systemske pouzdanosti) izrazi za određivanje korelacije između oblika oštećenja. Predložena metoda za analizu pouzdanosti je implementirana u računalni program FASTREL te je verificirana i validirana na nizu primjera preuzetih iz relevantne literature. Također su prikazani i primjeri primjene predložene metode.

## **Ključne riječi**

Teorija pouzdanosti, vjerojatnost oštećenja, funkcija performanse, metoda smanjenja dimenzionalnosti, funkcija gustoće vjerojatnosti, statistički momenti oko ishodišta, senzitivnost vjerojatnosti oštećenja, projektna točka, sistemska pouzdanost.

## Summary

Structural reliability theory rationally considers uncertainties that emerge during the analysis and design of ship structures, in contrast to the traditional methods which assume that all parameters affecting the structural strength and load are deterministic values. Determination of the probability of failure is one of the most significant aspects of the reliability theory. Within the introductory part of this work, an overview of the previous scientific research work regarding the considered topic is given, as well as the brief description of different currently utilized reliability analysis methods. Various existing methods are characterized by a different accuracy levels regarding the probability of failure assessment and by various computational timeframes. Within the scope of this work, an efficient reliability analysis method is proposed, which requires significantly lower computational timeframes and which provides sufficiently accurate results with respect to the existing reliability analysis methods. Proposed method is based on determination of the performance function's probability density function, since the probability of failure can be determined by its integration within the range of minus infinity to zero. Determination of the considered probability density function is performed through two main steps. Within the first step its statistical moments are determined by utilization of the modified (within this work) dimension reduction method. Within the second step an appropriate form of the probability density function is sought, which satisfies statistical moments calculated within the first step. It is assumed thereby that probability density function can be expressed as normalized product of two normal cumulative distribution functions. Additionally, within the scope of this work, analytical expressions for determination of arbitrary statistical moments of the assumed probability density function are derived. Those expressions form the basis of the nonlinear system of equations, whose solution represents four unknown parameters of the assumed probability density function. Furthermore, expressions for determination of the: probability of failure sensitivity, design point and modal correlations (system reliability), are given. Proposed probability analysis method is implemented within the FASTREL computer program and it is verified and validated on a number of examples from the relevant literature. Various examples of application of the proposed method are also given and described.

## **Key words**

Reliability theory, probability of failure, performance function, dimension reduction method, probability density function, raw statistical moments, probability of failure sensitivity, design point, system reliability.

## Popis oznaka

Oznaka	Opis
$A$	Donje trokutasta matrica potrebna za transformaciju iz $y$ -prostora u $u$ -prostor
$C_Y$	Matrica kovarijance slučajnih varijabli $Y$
$COV_X$	Koeficijent varijacije slučajne varijable $X$
$E[\cdot]$	Operator očekivanja
$f_G(g)$	Funkcija gustoće vjerojatnosti funkcije $G(\mathbf{X})$
$f_X(x)$	Funkcija gustoće vjerojatnosti slučajne varijable $X$
$f_X(\mathbf{x})$	Združena funkcija gustoće vjerojatnosti svih slučajnih varijabli $\mathbf{X}$
$F$	Faktor koji predstavlja omjer između korelacijskih koeficijenata (Nataf transformacija)
$F_X(x)$	Kumulativna funkcija razdiobe slučajne varijable $X$
$G(\mathbf{X})$	Funkcija performanse
$G^*(\mathbf{X})$	Aproksimirana funkcija performanse
$H(g)$	Funkcija umnoška dvije normalne kumulativne funkcije razdiobe kojom se definira funkcija $f_G(g)$
$I_k$	Oznaka za $k$ ti integral
$MGr_i$	$i$ ti statistički moment oko ishodišta funkcije $f_G(g)$
$MHr_i$	$i$ ti statistički moment oko ishodišta funkcije $H(g)$
$MXc_i$	$i$ ti statistički moment oko srednje vrijednosti funkcije $f_X(x)$
$MXr_i$	$i$ ti statistički moment oko ishodišta funkcije $f_X(x)$
$N$	Ukupan broj slučajnih varijabli
$N_{ip}$	Broj integracijskih točaka
$N_k$	Broj kriterija (oblika oštećenja, funkcija performanse)
$N_{rsm}$	Ukupan broj statističkih momenata oko ishodišta koje mora zadovoljiti funkcija $f_G(g)$
$P$	Kvantitativna mjera vjerojatnosti
$P_F$	Vjerojatnost oštećenja (pouzdanost komponente)
$P_{Fp}$	Vjerojatnost oštećenja paralelnog sustava (sistemska pouzdanost)
$P_{Fs}$	Vjerojatnost oštećenja serijskog sustava (sistemska pouzdanost)
$r$	Član formule za računanje integrala metodom parcijalne integracije



$\mathbb{R}$	Skup realnih brojeva
$s$	Član formule za računanje integrala metodom parcijalne integracije
$\mathbf{u}$	Vektor realizacija slučajnih varijabli u $u$ -prostoru
$U$	Oznaka slučajne varijable u $u$ -prostoru
$\mathbf{U}$	Vektor slučajnih varijabli u $u$ -prostoru
$\mathbf{u}^*$	Projektna točka u $u$ -prostoru
$u_{GH}$	Gauss-Hermiteova integracijska točka
$u_{SN}$	Gauss-Hermiteova integracijska točka za standardnu normalnu razdiobu
$w_{GH}$	Težinski faktor Gauss-Hermiteove integracijske točke
$w_{SN}$	Težinski faktor Gauss-Hermiteove integracijske točke za standardnu normalnu razdiobu
$x$	Realizacija slučajne varijable
$\mathbf{x}$	Vektor realizacija slučajnih varijabli u $x$ -prostoru
$X$	Oznaka slučajne varijable u $x$ -prostoru
$\mathbf{X}$	Vektor slučajnih varijabli u $x$ -prostoru
$\mathbf{y}$	Vektor realizacija slučajnih varijabli u $y$ -prostoru
$Y$	Oznaka slučajne varijable u $y$ -prostoru
$\mathbf{Y}$	Vektor slučajnih varijabli u $y$ -prostoru
$\alpha$	Parametar razdiobe vjerojatnosti slučajne varijable $X$
$\beta$	Indeks pouzdanosti
$\gamma_{ij}$	Korelacija između $i$ tog i $j$ tog oblika oštećenja (funkcije performanse)
$\delta$	Parametar razdiobe vjerojatnosti slučajne varijable $X$
$\phi(\cdot)$	Standardna normalna razdioba
$\Phi(\cdot)$	Standardna normalna kumulativna funkcija razdiobe
$\mu_1$	Srednja vrijednost monotono rastuće normalne kumulativne funkcije razdiobe kojom se definira funkcija $H(g)$
$\mu_2$	Srednja vrijednost monotono padajuće normalne kumulativne funkcije razdiobe kojom se definira funkcija $H(g)$
$\mu_X$	Srednja (očekivana) vrijednost slučajne varijable $X$
$\mu_G$	Srednja (očekivana) vrijednost funkcije $G(\mathbf{X})$
$\boldsymbol{\mu}_X$	Vektor srednjih (očekivanih) vrijednost slučajnih varijabli $\mathbf{X}$
$\rho_{ij}$	Korelacijski koeficijent između $i$ te i $j$ te slučajne varijable u $x$ -prostoru
$\boldsymbol{\rho}$	Matrica korelacijskih koeficijenata između slučajnih varijabli u $x$ -prostoru

$\rho_{ij}^e$	Korelacijski koeficijent između $i$ te i $j$ te slučajne varijable u $y$ -prostoru
$\rho^e$	Matrica korelacijskih koeficijenata između slučajnih varijabli u $y$ -prostoru
$\sigma_1$	Standardna devijacija monotonno rastuće normalne kumulativne funkcije razdiobe kojom se definira funkcija $H(g)$
$\sigma_2$	Standardna devijacija monotonno padajuće normalne kumulativne funkcije razdiobe kojom se definira funkcija $H(g)$
$\sigma_X$	Standardna devijacija slučajne varijable $X$
$\sigma_{XX}$	Varijanca slučajne varijable $X$
$\sigma_{X_i X_j}$	Kovarijanca dviju slučajnih varijabli $X_i$ i $X_j$
$\omega$	Oznaka događaja
$\Omega$	Skup događaja
$\Omega_F$	Područje oštećenja (nezadovoljenja kriterija)

## Popis slika

Slika 1.1	Temeljni problem analize pouzdanosti.	3
Slika 1.2	Generiranje vektora slučajnih varijabli u $u$ -prostoru.	4
Slika 1.3	Prikaz indeksa pouzdanosti.	6
Slika 1.4	Dijagram toka FORM metode.	7
Slika 3.1	Funkcija gustoće vjerojatnosti slučajne varijable $X$ .	19
Slika 3.2	Kumulativna funkcija razdiobe slučajne varijable $X$ .	20
Slika 4.1	Dijagram toka predložene metode za analizu pouzdanosti.	24
Slika 4.2	Histogram relativnih frekvencija.	25
Slika 4.3	Grafički prikaz vjerojatnosti oštećenja.	25
Slika 4.4	Prikaz integracijskih točaka u $u$ -prostoru za slučaj s dvije slučajne varijable.	33
Slika 4.5	Prikaz transformacije problema iz $x$ -prostora u $u$ -prostor.	36
Slika 4.6	Generiranje općenite funkcije gustoće vjerojatnosti.	39
Slika 4.7	Prikaz različitih grupa sistema.	48
Slika 4.8	Sistemska pouzdanost.	49
Slika 4.9	Grafički prikaz područja oštećenja u $u$ -prostoru za serijski sustav.	50
Slika 4.10	Grafički prikaz područja oštećenja u $u$ -prostoru za paralelni sustav.	52
Slika 5.1	Dijagram toka računalnog programa FASTREL.	56
Slika 6.1	Mehanizam plastičnog kolapsa okvira.	58
Slika 6.2	FGV funkcije performanse za Primjer 1.	60
Slika 6.3	FGV funkcije performanse za Primjer 2.	61
Slika 6.4	FGV funkcije performanse za Primjer 3.	63
Slika 6.5	Funkcija performanse u $u$ -prostoru za Primjer 3.	63
Slika 6.6	FGV funkcije performanse za Primjer 4.	65
Slika 6.7	Funkcija performanse u $u$ -prostoru za Primjer 4.	65
Slika 6.8	FGV prve funkcije performanse za Primjer 5.	67
Slika 6.9	FGV druge funkcije performanse za Primjer 5.	68
Slika 6.10	FGV treće funkcije performanse za Primjer 5.	69
Slika 6.11	Fizičko oštećenje konstrukcije kontejnerskog broda MSC Napoli [48].	71
Slika 6.12	FGV funkcije performanse za Primjer 6.	73
Slika 6.13	Analizirani ukrepljeni panel za Primjer 7.	74
Slika 6.14	Grafički prikaz procijenjenih vjerojatnosti oštećenja sustava za Primjer 7.	78

Slika 6.15	Nedominirani projekti za Primjer 7.	79
Slika 6.16	Dimenzije, geometrija poprečnog presjeka i karakteristike konstrukcijskih elemenata kutijastog nosača za Primjer 8.	81
Slika 6.17	Diskretni sastavni elementi kutijastog nosača za Primjer 8.	81
Slika 6.18	$M - \kappa$ dijagram za Primjer 8.	82
Slika 6.19	Kolapsna sekvenca kutijastog nosača (progib) za Primjer 8.	83
Slika 6.20	Prikaz slučajnih varijabli kutijastog nosača za Primjer 8.	83
Slika 6.21	FGV funkcije performanse za Primjer 8.	85
Slika 6.22	Senzitivnost vjerojatnosti oštećenja s obzirom na varijable struka kutijastog nosača za Primjer 8.	85
Slika 6.23	Senzitivnost vjerojatnosti oštećenja s obzirom na varijable donjeg pojasa kutijastog nosača za Primjer 8.	86
Slika 6.24	Senzitivnost vjerojatnosti oštećenja s obzirom na varijable gornjeg pojasa kutijastog nosača za Primjer 8.	86
Slika 6.25	Dimenzije, geometrija poprečnog presjeka i karakteristike konstrukcijskih elemenata kutijastog nosača za Primjer 9.	87
Slika 6.26	Materijalne karakteristike konstrukcijskih elemenata kutijastog nosača za Primjer 9.	87
Slika 6.27	Projektne varijable kutijastog nosača za Primjer 9.	88
Slika 6.28	“Deterministička“ Pareto fronta prvog pristupa za Primjer 9.	91
Slika 6.29	“Vjerojatnosno“ filtrirana “deterministička“ Pareto fronta prvog pristupa za Primjer 9.	92
Slika 6.30	“Vjerojatnosna“ Pareto fronta drugog pristupa za Primjer 9.	92

## Popis tablica

Tablica 2.1	Statističke karakteristike slučajnih varijabli.	17
Tablica 4.1	Gauss-Hermiteove integracijske točke i težinski faktori ( $N_{ip} = 6$ ).	32
Tablica 6.1	Karakteristike slučajnih varijabli za Primjer 1.	59
Tablica 6.2	Statistički momenti funkcije $G(\mathbf{X})$ i parametri funkcije $f_G(g)$ za Primjer 1.	59
Tablica 6.3	Usporedba rezultata za Primjer 1.	59
Tablica 6.4	Karakteristike slučajnih varijabli za Primjer 2.	60
Tablica 6.5	Statistički momenti funkcije $G(\mathbf{X})$ i parametri funkcije $f_G(g)$ za Primjer 2.	61
Tablica 6.6	Usporedba rezultata za Primjer 2.	61
Tablica 6.7	Karakteristike slučajnih varijabli za Primjer 3.	62
Tablica 6.8	Statistički momenti funkcije $G(\mathbf{X})$ i parametri funkcije $f_G(g)$ za Primjer 3.	62
Tablica 6.9	Usporedba rezultata za Primjer 3.	62
Tablica 6.10	Karakteristike slučajnih varijabli za Primjer 4.	64
Tablica 6.11	Statistički momenti funkcije $G(\mathbf{X})$ i parametri funkcije $f_G(g)$ za Primjer 4.	64
Tablica 6.12	Usporedba rezultata za Primjer 4.	64
Tablica 6.13	Karakteristike slučajnih varijabli za Primjer 5.	66
Tablica 6.14	Statistički momenti funkcije $G_1(\mathbf{X})$ i parametri funkcije $f_{G_1}(g)$ za Primjer 5.	67
Tablica 6.15	Usporedba rezultata za prvu funkciju performanse za Primjer 5.	67
Tablica 6.16	Statistički momenti funkcije $G_2(\mathbf{X})$ i parametri funkcije $f_{G_2}(g)$ za Primjer 5.	68
Tablica 6.17	Usporedba rezultata za drugu funkciju performanse za Primjer 5.	68
Tablica 6.18	Statistički momenti funkcije $G_3(\mathbf{X})$ i parametri funkcije $f_{G_3}(g)$ za Primjer 5.	69
Tablica 6.19	Usporedba rezultata za treću funkciju performanse za Primjer 5.	69
Tablica 6.20	Usporedba matrica korelacijskih koeficijenata između oblika oštećenja za Primjer 5.	70
Tablica 6.21	Usporedba procijenjenih vjerojatnosti oštećenja sustava za Primjer 5.	70
Tablica 6.22	Karakteristike slučajnih varijabli za Primjer 6.	72
Tablica 6.23	Statistički momenti funkcije $G(\mathbf{X})$ i parametri funkcije $f_G(g)$ za Primjer 6.	72
Tablica 6.24	Usporedba rezultata za Primjer 6.	73
Tablica 6.25	Projektna točka ( $u$ -prostor) i senzitivnost vjerojatnosti oštećenja s obzirom na pojedinu slučajnu varijablu za Primjer 6.	73
Tablica 6.26	Kriteriji izvijanja za različite elemente ukrepljenog panela za Primjer 7.	75
Tablica 6.27	Karakteristike slučajnih varijabli za Primjer 7.	76

Tablica 6.28	Plan eksperimenata (ortogonalno polje L27) za Primjer 7.	77
Tablica 6.29	Usporedba vjerojatnosti oštećenja sustava za Primjer 7.	77
Tablica 6.30	Karakteristike slučajnih varijabli za Primjer 8.	84
Tablica 6.31	Statistički momenti funkcije $G(\mathbf{X})$ i parametri funkcije $f_G(g)$ za Primjer 8.	84
Tablica 6.32	Usporedba rezultata za Primjer 8.	84
Tablica 6.33	Inicijalne, minimalne i maksimalne vrijednosti projektnih varijabli te korak projektne varijable u optimizacijskom algoritmu za Primjer 9.	88
Tablica 6.34	Ukupna površina poprečnog presjeka, vertikalni granični momenti i kritična ili granična nosivost sastavnih elemenata kutijastog nosača za Primjer 9.	89
Tablica 6.35	Ograničenja optimizacije kutijastog nosača za Primjer 9.	90
Tablica 6.36	Ciljevi optimizacije kutijastog nosača za Primjer 9.	90
Tablica 6.37	Karakteristike slučajnih varijabli za Primjer 9.	91
Tablica 6.38	Područje projektnih varijabli i atributa nedominiranih projekata dviju različitih "vjerojatnosnih" Pareto fronti za Primjer 9.	93
Tablica 8.1	Funkcije gustoće vjerojatnosti i kumulativne funkcije razdiobe.	113
Tablica 8.2	Srednja vrijednost i standardna devijacija kao funkcija parametara razdiobe.	114
Tablica 8.3	Parametri razdiobe kao funkcija srednje vrijednosti i standardne devijacije.	115
Tablica 8.4	Marginalne transformacije.	117
Tablica 8.5	Razdiobe prve kategorije.	119
Tablica 8.6	Razdiobe druge kategorije.	119
Tablica 8.7	$F$ kad je $X_i$ normalno distribuirana a $X_j$ iz prve kategorije razdioba.	120
Tablica 8.8	Koeficijenti uz parametre linearne kombinacije koja aproksimira $F$ kad je $X_i$ normalno distribuirana a $X_j$ iz druge kategorije razdioba.	120
Tablica 8.9	Koeficijenti uz parametre linearne kombinacije koja aproksimira $F$ kad su $X_i$ i $X_j$ iz prve kategorije razdioba.	121
Tablica 8.10	Koeficijenti uz parametre linearne kombinacije koja aproksimira $F$ kad je $X_i$ iz prve a $X_j$ iz druge kategorije razdioba.	122
Tablica 8.11	Koeficijenti uz parametre linearne kombinacije koja aproksimira $F$ kad su $X_i$ i $X_j$ iz druge kategorije razdioba.	123

## Popis skraćenica

FASTREL	<i>Fast Reliability</i> (računalni program)
FEM	<i>Finite element method</i>
FGV	Funkcija gustoće vjerojatnosti
FORM	<i>First Order Reliability Method</i>
IACS	<i>International Association of Classification Societies</i>
MAIB	<i>Marine Accident Investigation Branch</i>
MOPSO	<i>Multi-objective Particle Swarm Optimization</i>
MVFOSM	<i>Mean Value First Order Second Moment</i>
PCA	<i>Progressive Collapse Analysis</i>
SORM	<i>Second Order Reliability Method</i>

# 1 Uvod

## 1.1 Obrazloženje razmatranog problema i motivacija za istraživanje

Optimizacija konstrukcije broda se najčešće provodi s ciljem smanjenja njene mase uza zadovoljenje propisanih kriterija jer se smatra da je konstrukcija dovoljno sigurna ako su zadovoljeni svi kriteriji propisani pravilima klasifikacijskog društva prema kojem se projektira i gradi brod. Međutim, kriteriji propisani pravilima klasifikacijskog društva pretpostavljaju da su svi parametri (dimenzije i karakteristike materijala strukturnih elemenata konstrukcije broda kao i opterećenja koja djeluju na brod) determinističke veličine. Pri tome se sve neizvjesnosti uzimaju u obzir preko faktora sigurnosti/iskoristivosti, što rezultira sigurnom ali i teškom te ekonomski manje isplativom konstrukcijom broda.

S druge pak strane, teorija pouzdanosti konstrukcija pretpostavlja da su parametri slučajne veličine te na taj način racionalnije razmatra neizvjesnosti koje se javljaju prilikom projektiranja i gradnje konstrukcija. Metode pouzdanosti (metode za analizu vjerojatnosti oštećenja), koje su razvijene u prošlom stoljeću, a i danas se koriste, zahtijevaju veliko računalno vrijeme te su neupotrebljive u optimizacijskom procesu kojeg karakterizira veliki broj projektnih i slučajnih varijabli. Zbog toga se javila potreba za razvojem novih, manje zahtjevnih metoda za analizu vjerojatnosti oštećenja koje će s dovoljnom točnošću zahtijevati značajno manji broj evaluacija a samim time i manje računalno vrijeme. Takve metode trebale bi omogućiti višekriterijsku optimizaciju (s npr. dva cilja - smanjenje mase i povećanje sigurnosti) koja će iznaći projekte koje karakterizira što veća razina sigurnosti uz što manju masu.

Za veliku većinu aktualnih tipova brodova zadovoljenje kriterija uzdužne granične čvrstoće broskog trupa je od fundamentalnog i dominantnog značaja za osiguranje sigurnosti konstrukcije broda te se u tom smislu analiza pouzdanosti (*eng. reliability analysis*), s obzirom na uzdužnu graničnu čvrstoću broskog trupa može smatrati najprikladnijom globalnom mjerom sigurnosti (*eng. safety measure*) konstrukcije broda.



Novo razvijena metoda bila bi pogodna za razne projektne procedure. Na primjer, višekriterijalna projektna metodologija koja koristi sigurnost kao cilj [1] zahtijeva brz i učinkovit algoritam za analizu pouzdanosti. Analiza pouzdanosti se provodi unutar više projektnih petlji te cjelokupna učinkovitost procedure uvelike ovisi o efikasnosti algoritma za analizu pouzdanosti.

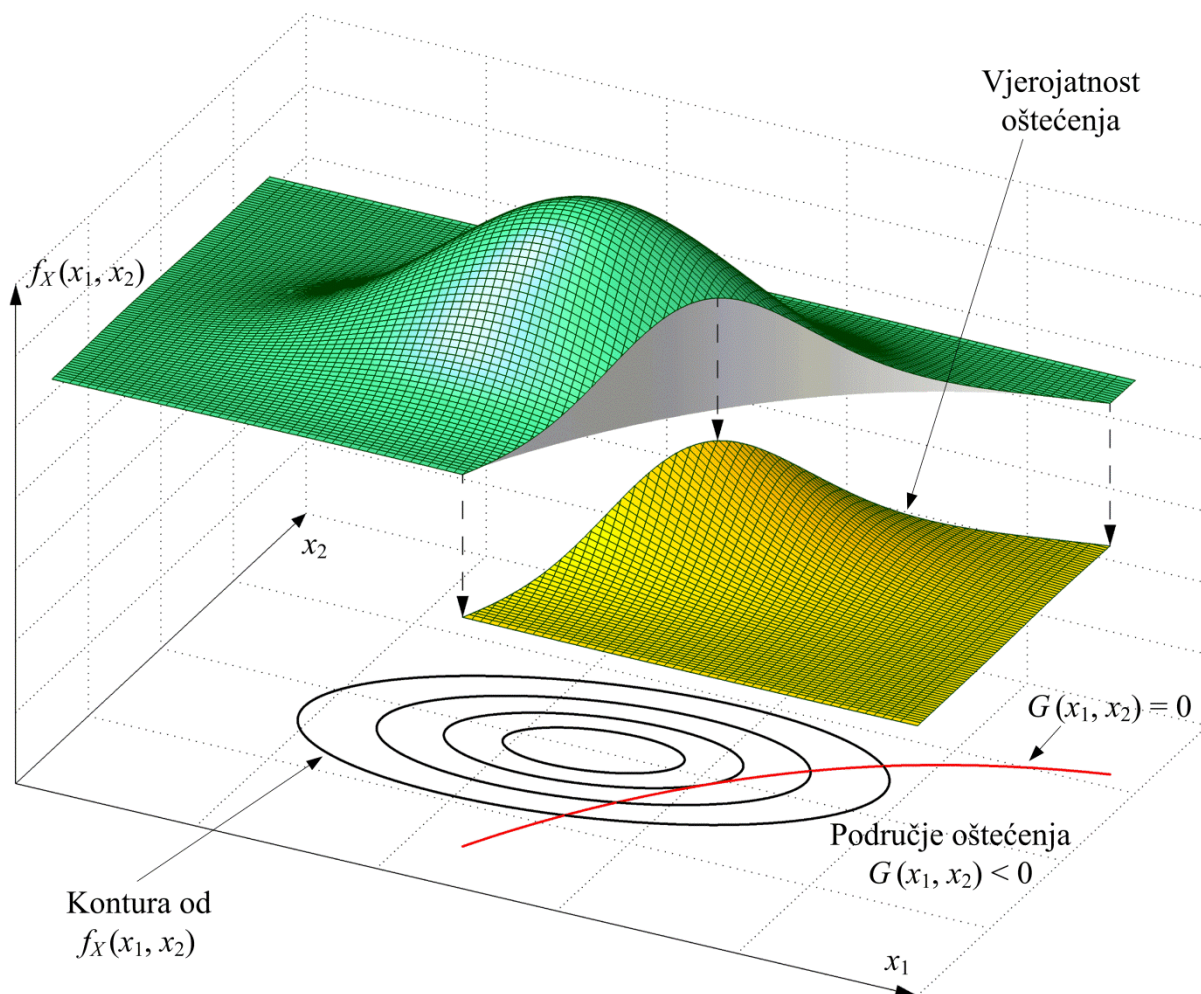
Također se analiza senzitivnosti, kao standardni dio kvalitetnog projektnog procesa, koristi za određivanje informacije o stabilnosti (ili robusnosti) rješenja te informacije o potrebnoj razini sofisticiranosti pri izboru i određivanju parametara razmatranog problema te zaključaka s tim u vezi [2], [3], [4]. Takva procedura također zahtjeva primjenu brze i jednostavne metode za analizu pouzdanosti.

## 1.2 Pregled dosadašnjih istraživanja

Poznato je da čvrstoća materijala, dimenzije strukturnih elemenata itd., značajno variraju u statističkom smislu, dok primijenjeno opterećenje često sadrži visok stupanj neizvjesnosti. Zbog toga se uvode različiti faktori sigurnosti/iskoristivosti koji u obzir uzimaju neizvjesnosti te omogućavaju konzervativnu procjenu parametara, što u konačnici rezultira konstrukcijom značajno veće mase od potrebne (konstruirane prema kriteriju granične nosivosti) te je stoga i ekonomski manje isplativa.

Iz svega gore navedenog, javila se potreba za racionalnijim pristupom projektiranja konstrukcija u kojem se parametri razmatraju kao slučajne varijable karakterizirane funkcijom gustoće vjerojatnosti (*eng. probability density function*) koja označava izglednost pojave vrijednosti te varijable. Iz toga proizlazi temeljni problem analize pouzdanosti [5], određivanje vrijednosti višedimenzionalnog integrala kojemu je podintegralna funkcija združena funkcija gustoće vjerojatnosti (*eng. joint probability density function*) svih slučajnih varijabli, a integracija obuhvaća područje gdje je funkcija graničnog stanja (*eng. limit state function*) manja ili jednaka nuli. Rješenje tog integrala predstavlja vjerojatnost oštećenja (*eng. probability of failure*).

Slika 1.1 prikazuje združenu funkciju gustoće vjerojatnosti (zelena + odvojena žuta ploha) dviju slučajnih varijabli  $X_1$  i  $X_2$ , funkciju graničnog stanja (crvena linija), konture združene funkcije gustoće vjerojatnosti (u ovom slučaju elipse u  $x_1$ - $x_2$  ravnini) te dio združene funkcije gustoće vjerojatnosti koji se nalazi u području oštećenja (žuta ploha). Volumen ispod zelene plohe predstavlja pouzdanost, volumen ispod žute plohe predstavlja vjerojatnost oštećenja, dok je ukupni volumen jedinične vrijednosti.

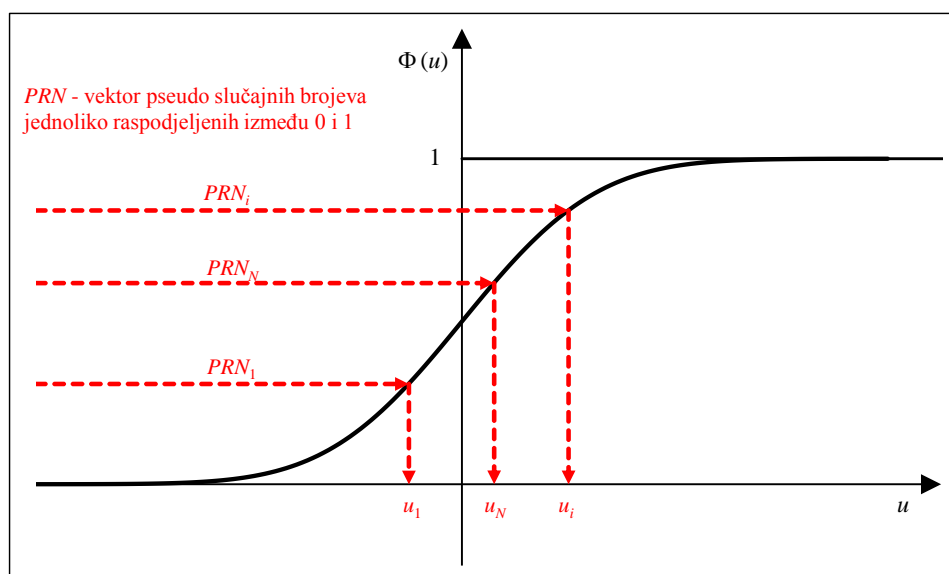


Slika 1.1 Temeljni problem analize pouzdanosti.

Ovisno o stupnju složenosti analize i dostupnosti ulaznih podataka, imamo na raspolaganju nekoliko mogućnosti za odrediti vjerojatnost oštećenja: direktnom integracijom višedimenzionalnog integrala, simulacijskim metodama ili analitičkim metodama.

Direktna integracija se temelji na integraciji združene funkcije gustoće vjerojatnosti svih slučajnih varijabli koje su uključene u razmatranje čvrstoće i opterećenja konstrukcije te je najzahtjevnija u pogledu potrebnih ulaznih podataka. Međutim i kad bi imali sve ulazne podatke, evaluacija višedimenzionalnog integrala za procjenu vjerojatnosti oštećenja konstrukcije je veoma zahtjevna pa je ova metoda praktično primjenjiva jedino ako imamo mali broj varijabli za koje je poznata združena funkcija gustoće vjerojatnosti.

Najpoznatija simulacijska metoda je metoda Monte Carlo (*eng. Monte Carlo method*), koju su prvi put predstavili Newmann i Ulam (1944). Najčešće se koristi za probleme koji sadržavaju slučajne varijable opisane poznatom ili pretpostavljenom kumulativnom funkcijom razdiobe [6]. Koristeći generator slučajnih brojeva i odgovarajuću kumulativnu funkciju razdiobe svake pojedine slučajne varijable, generira se kombinacija slučajnih varijabli te se za svaku kombinaciju odredi vrijednost funkcije graničnog stanja (opisani postupak predstavlja jednu simulaciju). Taj postupak se ponavlja niz puta te se vjerojatnost oštećenja određuje kao omjer između broja simulacija koje su dale negativne vrijednosti funkcija graničnog stanja i ukupnog broja simulacija. Slučajni brojevi se mogu generirati na različite načine, ali slučajni brojevi koji se koriste u problemima moderne inženjerske prakse su generirani s takozvanim generatorom pseudo slučajnih brojeva. Press et al [7] i Limić [8] predlažu stabilan generator pseudo slučajnih brojeva koji generiraju slučajne brojeve jednoliko raspodijeljene između 0 i 1. Slika 1.2 prikazuje generiranje vektora slučajnih varijabli u  $u$ -prostoru koristeći vektor pseudo slučajnih brojeva. Za metodu Monte Carlo veoma je važno odrediti ukupan broj simulacija. Što je veći broj simulacija veća je točnost rezultata, međutim veće je i potrebno računalo vrijeme. Melchers [9] je predložio formulu za procjenu ukupnog broja simulacija.



Slika 1.2 Generiranje vektora slučajnih varijabli u  $u$ -prostoru.

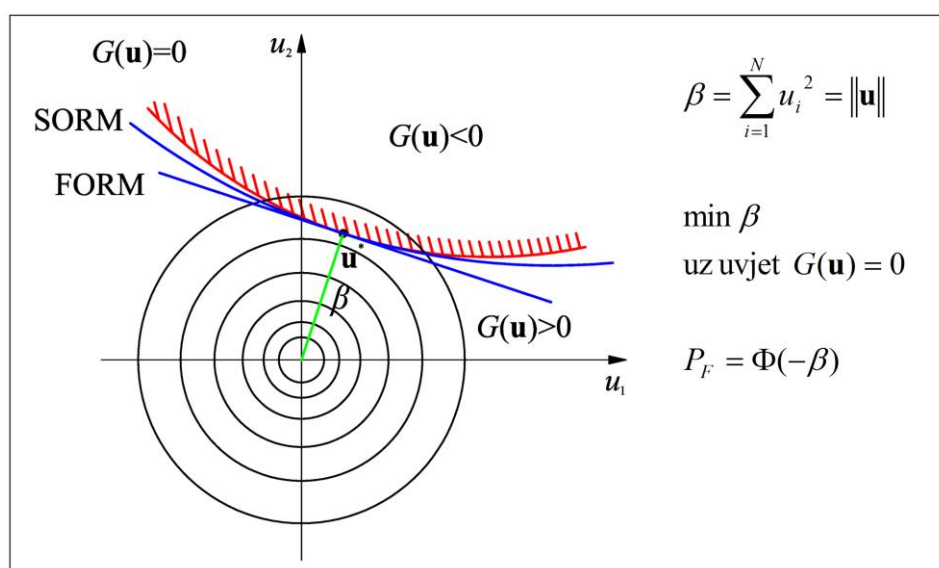
S obzirom da metoda Monte Carlo zahtjeva veliki broj simulacija kada je vjerojatnost oštećenja vrlo mala, izvedeno je mnogo varijanti ove metode kojim se nastoji poboljšati efikasnost procjene, a najvažnija od njih je metoda uzorkovanja s obzirom na značajnost rješenja (*eng. importance sampling*).

Ova metoda uvodi novu funkciju kojom se nastoji smanjiti varijanca (*eng. variance*) simulacijskog procesa, a niz autora predlaže različite funkcije. Englund i Rackwitz [10] su proveli usporedbu različitih metoda uzorkovanja s obzirom na značajnost rješenja te su zaključili da nema najbolje metode koja se može primjenjivati u svim uvjetima. Neke metode su robusnije, dok su neke efikasnije te odabir metode ovisi o vrsti problema ali i raspoloživim spoznajama o problemu. Simulacijske metode, iako najtočnije, zahtijevaju veliki broj evaluacija, pa se najčešće koriste za verifikaciju alternativnih metoda za analizu pouzdanosti.

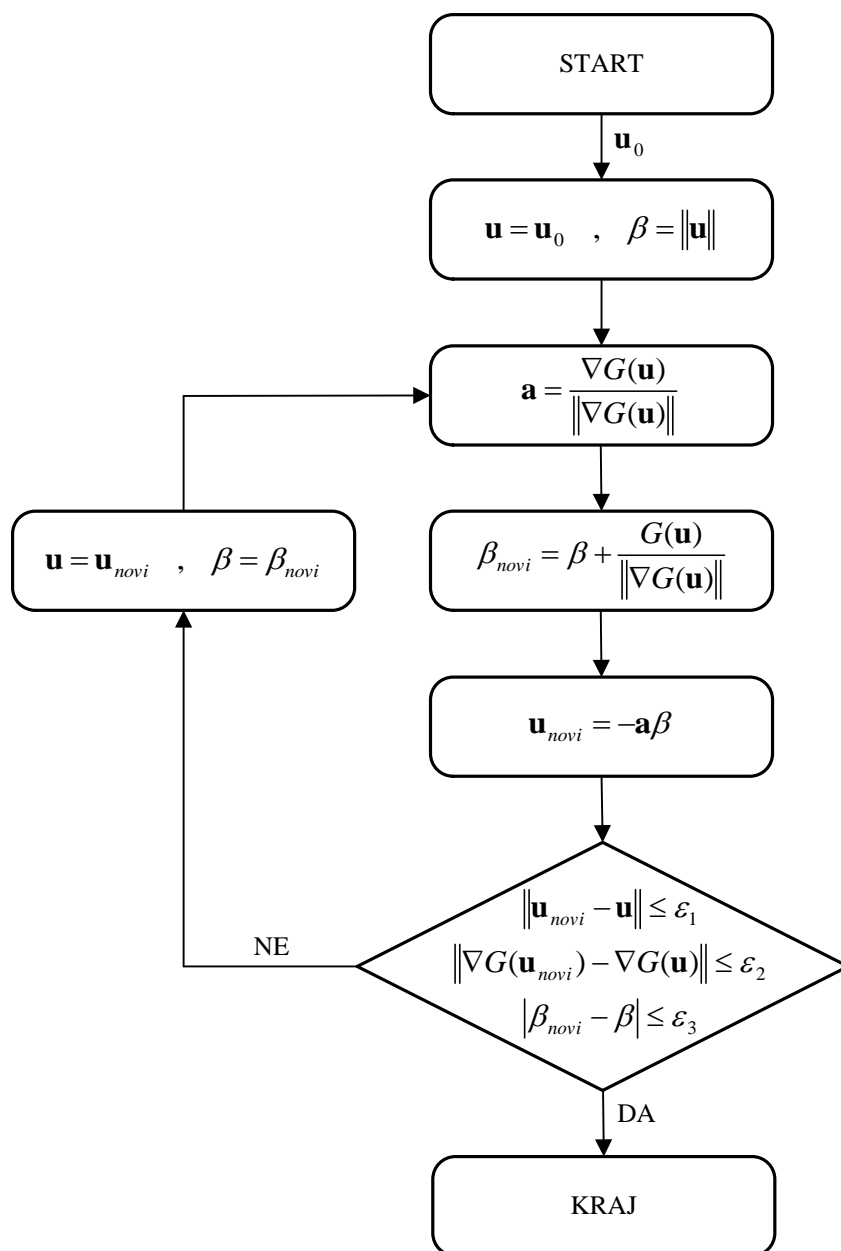
Zbog poteškoća pri određivanju vjerojatnosti oštećenja kod korištenja direktne integracijske metode te numeričkih metoda, razvijene su različite analitičke metode koje su manje točnosti ali zahtijevaju značajno manji broj simulacija (evaluacija funkcije graničnog stanja). Analitičke metode umjesto vjerojatnosti oštećenja, uvode indeks pouzdanosti  $\beta$  (*eng. reliability index, safety index*) [11], [12], kojim se definira sigurnost konstrukcije a prvi ga je predstavio Cornell. Indeks pouzdanosti je u direktnoj vezi sa vjerojatnošću oštećenja i u određenim uvjetima, ako je određen indeks pouzdanosti, može se dobiti egzaktna vjerojatnost oštećenja.

Na primjer, ako su slučajne varijable nezavisne (*eng. independent random variables*) i normalno distribuirane te je funkcija graničnog stanja linearna, vjerojatnost oštećenja može biti određena direktno iz indeksa pouzdanosti koristeći tablicu standardne normalne razdiobe. Ukoliko su slučajne varijable zavisne (*eng. dependent random variables*) i nisu normalno distribuirane, potrebno je napraviti određene transformacije (Nataf) da bi se dobile ekvivalentne nezavisne normalne varijable, pa se na takav način dobije aproksimirana vjerojatnost oštećenja. Također, mogu se napraviti određene transformacije za nelinearnu funkciju graničnog stanja. Razvijeno je nekoliko analitičkih metoda za analizu pouzdanosti. Izvorno je indeks pouzdanosti bio baziran na metodi MVFOSM (*eng. Mean Value First Order Second Moment*) koja linearizira funkciju graničnog stanja u točki gdje sve slučajne varijable imaju srednju vrijednost i razmatra samo prvi član razvoja funkcije graničnog stanja u Taylorov red te koristi samo dva statistička momenta rezerve sigurnosti (*eng. safety margin*) - srednju vrijednost i varijancu [11]. MVFOSM metoda ima tri osnovna nedostatka: 1) ako je funkcija graničnog stanja nelinearna, a linearizacija funkcije graničnog stanja je provedena u točki gdje sve slučajne varijable imaju srednju vrijednost (zanemarujući više članove Taylorovog reda), može se pojaviti greška udaljavajući se od točke linearizacije; 2) osjetljiva je na različite ekvivalentne formulacije istog problema što znači da indeks pouzdanosti ovisi o formulaciji funkcije graničnog stanja; 3) ne uključuje informacije o funkciji gustoće vjerojatnosti svake pojedine slučajne varijable.

Metodu pouzdanosti prvog reda FORM (*eng. First Order Reliability Method*) [11], [13] prvi su predstavili Hasofer i Lind kojom su riješena prva dva nedostatka MVFOSM, dok su nadopunu metode napravili Rackwitz i Fiessler kojom su uključili informaciju o funkciji gustoće vjerojatnosti svake pojedine slučajne varijable. Oni su razvoj funkcije graničnog stanja u Taylorov red umjesto u točki gdje sve slučajne varijable imaju srednju vrijednost postavili u neku točku na plohi oštećenja (*eng. failure surface*). Na plohi oštećenja su funkcija graničnog stanja i njene derivacije nezavisne o tome kako je formuliran problem. Njihovom se procedurom prvo sve slučajne varijable transformiraju u standardne normalne slučajne varijable (srednja vrijednost je jednaka nuli dok je standardna devijacija jedinične vrijednosti) koje pri tome moraju biti nezavisne. Da bismo zavisne varijable transformirale u nezavisne mogu se koristiti Rosenblatt ili Nataf transformacija [14]. Sljedeći korak u FORM metodi je transformacija funkcije graničnog stanja u standardni normalni prostor. Tada se indeks pouzdanosti definira kao najkraća udaljenost od ishodišta do plohe oštećenja u standardnom normalnom prostoru (Slika 1.3). Određivanje najkraće udaljenosti je iterativan postupak (Slika 1.4) koji se najčešće bazira na Newton-Raphson metodi. Nakon što je određena projektna točka (*eng. design point, most probable failure point*), tj. točka na plohi oštećenja koja je najbliža ishodištu u standardnom normalnom prostoru, u posljednjem koraku metode se područje oštećenja aproksimira područjem koje je razdvojeno tangentnim hiper-ravninama u projektnoj točki te je aproksimacija prvog reda vjerojatnosti oštećenja jednaka udjelu vjerojatnosti izvan hiper-ravnine.



Slika 1.3 Prikaz indeksa pouzdanosti.



Slika 1.4 Dijagram toka FORM metode.

Metodu pouzdanosti drugog reda SORM (*eng. Second Order Reliability Method*) [13] predstavili su Fiessler et al. (1979), dok su daljnja poboljšanja predstavili Der Kiureghian et al. (1987) te Hohenbichler et al. (1987). SORM za razliku od FORM-a plohu graničnog stanja u projektnoj točki aproksimira hiper-paraboloidima (Slika 1.3) pa se u konačnici dobije točniji iznos vjerojatnosti oštećenja. To posebno dolazi do izražaja kad je funkcija graničnog stanja izrazito nelinearna. Breitung (1984), Tvedt (1990) te Zhao i Ono (1990) [15] su predložili različite načine paraboloidne aproksimacije funkcije graničnog stanja. Iako SORM daje bolju procjenu vjerojatnosti oštećenja od FORM-a, ipak je zahtjevnija jer zahtjeva veći broj evaluacija.

Iako je FORM i danas najčešće korištena metoda za analizu pouzdanosti konstrukcija, i dalje se ispituju njeni nedostaci. Prije svega točnost i poteškoće koje se javljaju pri traženju projektne točke iterativnim postupkom koji koristi derivacije funkcije graničnog stanja. Također se nastoji ukloniti i prepreku korištenja metode u iterativnim optimizacijskim procedurama baziranim na metodama matematičkog programiranja, s obzirom na potrebno računalno vrijeme. Tako se u današnje vrijeme razvijaju takozvane momentne metode (*eng. moment methods*) za analizu pouzdanosti koje su veoma jednostavne, nemaju poteškoće povezane s traženjem projektne točke, ne zahtijevaju iterativni postupak i računanje derivacija, nemaju problema s više projektnih točaka [16] te su pogodne za analizu pouzdanosti i optimizaciju konstrukcija. Ove metode određuju vjerojatnost oštećenja koristeći statističke momente razmatrane funkcije performanse (*eng. performance function*). Ako se mogu odrediti centralni statistički momenti (*eng. central statistical moments*) funkcije performanse, vjerojatnost oštećenja, koja je definirana kao vjerojatnost da je funkcija performanse manja ili jednaka nuli, može biti prikazana kao funkcija ovisna o tim momentima [17]. Pronalaskom odnosa između vjerojatnosti oštećenja i centralnih momenata može se odrediti vjerojatnost oštećenja, a obzirom da su prva dva momenta općenito nedovoljna potrebno je koristiti momente višeg reda [18]. Rahman i Xu [19], [20] su predstavili metodu smanjenja dimenzionalnosti (*eng. dimension reduction method*) za određivanje statističkih momenata oko ishodišta (*eng. raw statistical moments*) funkcije gustoće vjerojatnosti funkcije performanse.

Koristeći navedenu metodu značajno su smanjili broj evaluacija funkcije performanse za određivanje momenata s dovoljno dobrom točnošću, u odnosu na momente određene metodom Monte Carlo (referentna metoda). Li i Zhang [21] su za analizu pouzdanosti kombinirali metodu smanjenja dimenzionalnosti s metodom maksimalne entropije, pretpostavljajući funkciju gustoće vjerojatnosti funkcije performanse u obliku eksponencijalne funkcije koja u eksponentu ima polinom četvrtog stupnja.

U prethodnom razmatranju prikazane su metode za analizu pouzdanosti koje razmatraju samo jednu funkciju graničnog stanja, dok će se u daljnjem razmatranju opisati metode za analizu pouzdanosti sustava (*eng. system reliability*) koji se sastoji od niza funkcija graničnog stanja, s tim da svaka funkcija graničnog stanja predstavlja jedan oblik oštećenja (*eng. failure mode*) [11], [22]. Sa stajališta pouzdanosti sustav može biti serijski, paralelni ili opći (kombinacija serijskih i paralelnih podsustava). Serijski sustav se sastoji od niza veza (elemenata) koji su spojeni u seriju na takav način da oštećenje jedne ili više veza uzrokuje oštećenje cijelog sustava (*eng. weakest link system*).

Kod paralelnog sustava oštećenje jedne ili više veza ne mora uzrokovati oštećenje cijelog sustava. Primjer paralelnog sustava su statički neodređene konstrukcije kod kojih, u slučaju oštećenja jednog ili više strukturnih elementa, ne mora doći do oštećenja cijele konstrukcije jer će ostali elementi konstrukcije preuzeti opterećenje oštećenih elementa. U općem slučaju stvarne redundantne konstrukcije imaju više različitih sekvenci oštećenja cijele konstrukcije, pa se svaka sekvenca modelira kao paralelni podsustav. Ako jedan od tih paralelnih podsustava doživi neuspjeh (*eng. fails*), tada imamo oštećenje cijelog sustava te je cjelokupni model systemske pouzdanosti serijski sustav paralelnih podsustava.

Da bi se odredila vjerojatnost oštećenja sustava potrebno je, kao i kod pouzdanosti komponente (kada imamo samo jednu funkciju graničnog stanja), riješiti višedimenzionalan integral s tim da se problem dodatno komplicira jer je sad područje integracije definirano pomoću više funkcija graničnog stanja. Iz tog se razloga najčešće ne određuje točna vrijednost vjerojatnosti oštećenja cijelog sustava već se definiraju donja i gornja granica vjerojatnosti oštećenja (*eng. lower and upper bounds*). Razlikujemo granice prvog reda (*eng. first order bounds*) i granice drugog reda (*eng. second order bounds*) [11], [22]. Granice prvog reda ne zahtijevaju informaciju o korelaciji između pojedinih oblika oštećenja te obuhvaćaju usko područje vjerojatnosti ako je jedan oblik oštećenja dominantan. Međutim, ako to nije slučaj, područje vjerojatnosti će biti široko te samim tim i beskorisno te je potrebno koristiti granice drugog reda koje koriste korelacije između pojedinih oblika oštećenja (Ditlevsenova donja i gornja granica [22]).

Za određivanje svih mogućih sekvenci oštećenja, koje će u konačnici dovesti do oštećenja cijelog sustava, najčešće se grafički prikazuju sve veze između pojedinih događaja (oštećenje pojedine komponente ili podsustava) i glavnog događaja (oštećenje cijelog sustava) [23]. U tu se svrhu najčešće koristi dijagram koji nakon definiranja glavnog događaja razmatra na koje se sve načine može realizirati glavni događaj te se spušta sve do pojedinih elementarnih događaja (*eng. fault tree diagram*). S druge pak strane, može se koristiti dijagram koji koristi obrnutu logiku, tj. kreće od nekog inicijalnog elementarnog događaja i slijede se sve moguće posljedice koje nastaju njegovom realizacijom (*eng. event tree diagram*).

Korištenjem  $\beta$ -unzipping metode [24] pouzdanost realnih, kompliciranih konstrukcija se može procijeniti na više različitih razina. Na nultoj razini se pojedini elementi (*eng. failure functions/elements*) konstrukcije promatraju zasebno i bez interakcija s drugim elementima, te je indeks pouzdanosti sustava jednak minimalnom indeksu pouzdanosti od svih elemenata.



Prva razina pretpostavlja da su svi elementi povezani serijski, te se razmatraju samo oni elementi kojima je indeks pouzdanosti manji od prethodno definiranog (kritično oštećeni elementi), a u analizi pouzdanosti se koriste indeksi pouzdanosti kritično oštećenih elemenata te korelacije između pojedinih rezervi sigurnosti. Na drugoj se pak razini pretpostavlja da je cijeli sustav serijski sustav paralelnih podsustava od kojih se svaki paralelni podsustav sastoji od dva kritično oštećena elementa, te se nastoji pronaći kritičan par oštećenih elemenata. Taj se par zatim izbacuje iz cjelokupnog sustava te se dodaje fiktivno opterećenje ako su elementi duktilni (nisu kruti). Zatim se modificirana konstrukcija analizira kao elastična te se odrede indeksi pouzdanosti ostalih elemenata. U trećoj se razini pretpostavlja da su pojedini paralelni podsustavi sastavljeni od tri kritična elementa, na četvrtoj razini od četiri itd., ali najčešće nema potrebe ići iznad treće razine.

Metoda *branch and bound* [24] također na racionalan način određuje najvjerojatniji scenarij oštećenja pojedinih komponenti koje će u konačnici utjecati na oštećenje cijelog sustava. Metoda započinje određivanjem vjerojatnosti oštećenja svake pojedine komponente, pa se za komponentu sa najvećom vjerojatnosti oštećenja pretpostavi da je doživjela oštećenje. Zatim se provjerava oštećenje cijelog sustava te ako sustav nije oštećen određuju se rezerve sigurnosti preostalih neoštećenih komponenti te se postupak ponavlja dok cijeli sustav ne doživi oštećenje. Na takav način se dobije cijeli scenarij oštećenja komponenti koje će utjecati na oštećenje cijelog sustava.

Iz svega navedenog, vidljivo je da se provode intenzivna i kontinuirana istraživanja u teoriji pouzdanosti, a sve sa ciljem dobivanja što je moguće točnijeg iznosa vjerojatnosti oštećenja uz smanjenje potrebnog računalnog vremena.

### 1.3 Cilj i hipoteza istraživanja

Cilj rada je razviti novu metodu za analizu pouzdanosti koja će uza zadovoljavajuću točnost zahtijevati manje računalno vrijeme potrebno za procjenu vjerojatnosti oštećenja od trenutačno korištenih metoda te će kao takva omogućiti razmatranje sigurnosti u kontekstu projektnih ograničenja i/ili cilja višekriterijske optimizacije u konceptualnoj fazi projektiranja.

Hipoteza istraživanja:

Modifikacijom metode smanjenja dimenzionalnosti u kombinaciji s predloženom metodom za određivanje funkcije gustoće vjerojatnosti, moguće je uza zadovoljavajuću točnost procjene vjerojatnosti oštećenja značajno smanjiti potrebno računalno vrijeme za analizu pouzdanosti u odnosu na trenutačno korištene metode.

### 1.4 Metodologija i plan istraživanja

U početnoj fazi istraživanja obuhvaćenih ovim radom, osim detaljnog upoznavanja s relevantnom literaturom, nastavilo se s razvojem predložene nove metode za analizu pouzdanosti [25] koja se na razmatranim primjerima pokazala vrlo točnom (za konceptualnu fazu projektiranja) i brzom (mjereno brojem evaluacija funkcije performanse - kriterija oštećenja). Metoda se temelji na određivanju statističkih momenata funkcije gustoće vjerojatnosti funkcije performanse te iznalaženju funkcije gustoće vjerojatnosti koja zadovoljava te statističke momente. Tada se vjerojatnost oštećenja može dobiti integriranjem funkcije gustoće vjerojatnosti u granicama od minus beskonačno do nula. Statistički momenti funkcije performanse (koja je funkcija slučajnih varijabli) se određuju korištenjem metode smanjenja dimenzionalnosti. Pritom se, ukoliko su slučajne varijable zavisne, koristi Nataf transformacija [26] da bi se iz zavisnih dobile nezavisne slučajne varijable.

Predložena metoda ne koristi formule numeričke kvadrature u kojima figuriraju statistički momenti, kako je to izvorno zamišljeno u metodi smanjenja dimenzionalnosti, već za jednodimenzionalnu numeričku integraciju po svakoj slučajnoj varijabli koristi Gauss-Hermiteove integracijske točke i odgovarajuće težinske faktore standardne normalne razdiobe ( $u$ -prostor) koje se zatim transformiraju u realni  $x$ -prostor. Integrirajući na takav način nema potrebe za rješavanjem linearnog sustava jednadžbi i određivanjem nultočaka polinoma, kao što je to slučaj pri korištenju formula numeričke kvadrature u kojima figuriraju statistički momenti [21].

S tom je modifikacijom metoda smanjenja dimenzionalnosti dobila na brzini, ali i na točnosti. Predložena metoda pretpostavlja da se funkcija gustoće vjerojatnosti može prikazati kao suma više različitih normalnih razdioba, svaka s različitom srednjom vrijednošću, standardnom devijacijom i težinskim faktorom. Pri tome su srednje vrijednosti postavljene u Gauss-Hermiteove integracijske točke od normalne razdiobe definirane s pomoću prvih dvaju prethodno izračunatih statističkih momenta. Tada se iznalaženje funkcije gustoće vjerojatnosti, koja zadovoljava prethodno izračunate statističke momente, može definirati kao optimizacijski problem u kojem je potrebno pronaći takve standardne devijacije koje će minimizirati sumu negativnih težinskih faktora. Težinski faktori se određuju iz linearnog sustava jednadžbi koji proizlazi iz uvjeta da funkcija gustoće vjerojatnosti zadovoljava određeni broj statističkih momenata. Međutim, prilikom testiranja predložene metode, u nekim primjerima optimizacijski algoritam ne bi pronašao rješenje u kojem su svi težinski faktori pozitivni te funkcija gustoće vjerojatnosti nije pozitivna u cijeloj domeni. Zbog te je fizikalne nekorektnosti u okviru ovog doktorskog rada razvijen novi pristup za određivanje funkcije gustoće vjerojatnosti. Novi pristup pretpostavlja da se funkcija gustoće vjerojatnosti može prikazati kao normalizirani umnožak dvije normalne kumulativne funkcije razdiobe, što osigurava da je funkcija gustoće vjerojatnosti pozitivna u cijeloj domeni (od  $-\infty$  do  $+\infty$ ).

Vjerojatnost oštećenja određena novorazvijenom metodom verificirana je na teoretskim primjerima (vidi Poglavlje 6.1) te uspoređena, s obzirom na točnost i brzinu, s metodama Monte Carlo, SORM i FORM određenim s pomoću računalnog programa CALREL [27]. Također je napravljena računalna implementacija nove metode za analizu pouzdanosti u obliku analitičkog modula uključenog unutar projektnog sustava OCTOPUS [28] koji se razvija na Fakultetu strojarstva i brodogradnje, a prema koncepciji danoj u [2]. Pri tom se koristilo programsko okruženje Microsoft Visual Studio 2008 te programski jezik Intel Fortran Composer XE.

U završnoj fazi istraživanja razmotrili su se razni aspekti primjene nove metode za analizu pouzdanosti. Prikazan je način primjene nove metode na primjeru realnog broda (vidi Poglavlja 6.2.2 i 6.2.1). Također je prikazana analiza pouzdanosti kutijastog nosača (vidi Poglavlje 6.2.3). Pri tom se geometrijske i materijalne karakteristike razmatranih modela definiralo upotrebom računalne aplikacije MAESTRO [29].

Uzdužnu graničnu čvrstoću brodskog trupa [30], [31], [32], [33], [34], [35] može se smatrati najprikladnijom globalnom mjerom sigurnosti brodske konstrukcije, te je provedena analiza pouzdanosti za jedan takav primjer (vidi Poglavlje 6.2.1). Pri tom se kao slučajne varijable razmatralo [36]: ekstremni vertikalni valni moment savijanja, ekstremni moment savijanja uslijed prolaznih vibracija trupa broda, kombinacijski faktor između valnog opterećenja i opterećenja uslijed prolaznih vibracija, te nesigurnosti uslijed modeliranja: graničnog momenta savijanja brodskog trupa, momenta savijanja na mirnoj vodi, linearnog valnog opterećenja, nelinearnog valnog opterećenja i opterećenja uslijed prolaznih vibracija. Granični (vertikalni) moment savijanja brodskog trupa se promatrao kao deterministička veličina (uz pripadne nesigurnosti modeliranja) [36]. Provedena je također i analiza pouzdanosti kutijastog nosača (vidi Poglavlje 6.2.3) gdje se granični moment promatrao kao funkcija niza slučajnih varijabli (geometrijske i materijalne karakteristike konstrukcijskih elemenata) definiranih razdiobom vjerojatnosti te parametrima razdiobe [37], [38], [39].

U doktorskom radu se, osim pouzdanosti komponente, obuhvatila i pouzdanost sustava (vidi Poglavlja 6.1.5 i 6.2.2), te je provedena analiza pouzdanosti elemenata brodske konstrukcije (ukrepljenih panela) s obzirom na više različitih kriterija (izvijanje) [40].

Posljednjom fazom istraživanja razmotrila se primjena nove metode za analizu pouzdanosti u okviru optimizacijske procedure primijenjene u kontekstu konceptualnog projektiranja konstrukcije kutijastog nosača (ista procedura se koristi kod projektiranja konstrukcije trupa broda) koristeći računalni projektni sustav OCTOPUS. Na takav način je pokazano da je moguće dobiti nedominirane projekte (elemente Pareto fronte) koje karakterizira racionalnije dimenzioniranje, tj. redukcija i/ili kvalitetnija raspodjela uzdužno efikasnog materijala brodske konstrukcije uza zadovoljenje kriterija sigurnosti (sigurnost kao ograničenje) ili povećanje razine sigurnosti za konstantnu masu i/ili cijenu (sigurnost kao cilj). Pri tome, razmatranje sigurnosti kao cilja u okviru konceptualnog projektiranja ima racionalnu osnovu za nalaženje ne samo ekonomski najisplativijeg projekta koji zadovoljava sve propisane zahtjeve i ograničenja, već i nalaženje najsigurnijeg projekta za zadanu konstantnu masu koji bi mogao predstavljati dobru osnovu za sljedeću (preliminarnu) fazu projektiranja.

## 2 Definicija problema u analizi pouzdanosti

Kao što je već spomenuto u uvodnom poglavlju, u analizi pouzdanosti pojedine parametre promatramo kao slučajne varijable te nastojimo odrediti vjerojatnost da određeni kriterij (koji je funkcija slučajnih varijabli) bude nezadovoljen. Ta vjerojatnost predstavlja vjerojatnost oštećenja (*eng. probability of failure*). Važno je napomenuti da ovdje pojam oštećenje podrazumijeva nezadovoljenje određenog kriterija, tj. ne znači da je nužno nastupilo stvarno oštećenje.

U okviru ovog doktorskog rada razmatrat će se isključivo pouzdanost nosivih konstrukcija iako se ista metodologija može koristiti i u drugim područjima (ekonomija, elektrotehnika, itd.). Razlika će se očitovati samo u slučajnim varijablama i kriterijima dok je metodologija u potpunosti jednaka.

Važno je na početku napomenuti da razlikujemo analizu pouzdanosti komponente (slučaj sa samo jednim kriterijem) te analizu sistemske pouzdanosti (slučaj s više kriterija). Razlika se najviše očituje pri korištenju analitičkih metoda i to najviše zbog njihove metodologije određivanja vjerojatnosti oštećenja (određuju vjerojatnost oštećenja svakog pojedinog kriterija te korelacije između kriterija), dok kod simulacijskih metoda to ne dolazi toliko do izražaja.

Fundamentalan problem analize pouzdanosti je određivanje vrijednosti višedimenzionalnog integrala (Slika 1.1) definiranog sljedećim izrazom:

$$P_F = P(\mathbf{X} \in \Omega_F) = \int_{\Omega_F} f_X(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (2.1)$$

gdje je  $\mathbf{X} = \{X_1, \dots, X_N\}^T$  realan,  $N$ -dimenzionalan vektor slučajnih varijabli;  $\Omega_F$  je područje oštećenja (nezadovoljenja kriterija);  $f_X(\mathbf{x})$  je združena funkcija gustoće vjerojatnosti svih slučajnih varijabli  $\mathbf{X}$ ;  $P$  je vjerojatnosna mjera, a  $P_F$  je vjerojatnost oštećenja.

U ovim izrazima, a i inače kad je riječ o slučajnim varijablama, treba razlikovati oznaku  $X$  koja predstavlja oznaku za slučajnu varijablu od oznake  $x$  koja predstavlja realizaciju slučajne varijable  $X$  ( $x \in \mathbb{R}$ )!

Za slučaj pouzdanosti komponente, područje oštećenja je definirano kao:

$$\Omega_F = \{\mathbf{X} : G(\mathbf{X}) < 0\} \quad (2.2)$$

gdje je  $G(\mathbf{X})$  funkcija performanse (u teoriji pouzdanosti se koristi termin funkcija graničnog stanja). Funkcija performanse nije ništa drugo nego definirani kriterij koji je napisan u takvom obliku da je vrijednost funkcije performanse manja od nule ukoliko je za određenu kombinaciju slučajnih varijabli kriterij nezadovoljen. Termin funkcija graničnog stanja dolazi iz FORM metode, s obzirom da ona traži najvjerojatniju točku oštećenja (*eng. most probable failure point*) iterativnim postupkom te se pri tom uvijek nalazi na plohi  $G(\mathbf{X}) = 0$  (granici zadovoljenja kriterija).

U mnogim problemima iz prakse, egzaktno rješenje gore definiranog višedimenzionalnog integrala nije moguće iz razloga što je  $N$  velik broj,  $f_X(\mathbf{x})$  u općem slučaju nije Gaussovog tipa (i najčešće je nepoznata), a  $G(\mathbf{X})$  je visoko nelinearna funkcija. Najčešće su nam poznate sljedeće informacije o slučajnim varijablama (vidi Poglavlje 3):

- razdioba vjerojatnosti;
- srednja vrijednost  $\mu_X$  i koeficijent varijacije  $COV_X$  (ili standardna devijacija  $\sigma_X$ );
- matrica korelacijskih koeficijenata između slučajnih varijabli  $\rho$ .

S obzirom da je prema izrazu (2.1) potrebno odrediti združenu funkciju gustoće vjerojatnosti svih slučajnih varijabli  $f_X(\mathbf{x})$ , a obično su nam poznate marginalne funkcije gustoće vjerojatnosti  $f_{X_i}(x_i)$  svih slučajne varijable te matrica korelacijskih koeficijenata između slučajnih varijabli  $\rho$ , za određivanje  $f_X(\mathbf{x})$  se koristi Nataf model (Gaussova kopula) [41]. Nataf transformacija, vidi Poglavlje 4.3, sadržava dva koraka: transformaciju realnih slučajnih varijabli  $\mathbf{X}$  ( $x$ -prostor) u korelirane standardne normalne slučajne varijable  $\mathbf{Y}$  ( $y$ -prostor) i transformaciju koreliranih standardnih normalnih slučajnih varijabli  $\mathbf{Y}$  u nekorelirane standardne normalne slučajne varijable  $\mathbf{U}$  ( $u$ -prostor). U prvom koraku se aproksimira združena funkcija gustoće vjerojatnosti koristeći Gaussovu kopulu, a drugi korak zahtjeva linearnu transformaciju.

Gaussova kopula se određuje prema sljedećem izrazu:

$$F_{X_1, \dots, X_N}(x_1, \dots, x_N) = \Phi_N(\Phi^{-1}[F_{X_1}(x_1)], \dots, \Phi^{-1}[F_{X_i}(x_i)], \dots, \Phi^{-1}[F_{X_N}(x_N)]) \quad (2.3)$$

gdje je  $F_{X_i}$  marginalna kumulativna funkcija razdiobe slučajne varijable  $X_i$ ,  $\Phi(\cdot)$  je standardna normalna kumulativna funkcija razdiobe, a  $\Phi_N(\cdot)$  je  $N$ -dimenzionalna standardna normalna kumulativna funkcija razdiobe u kojoj figurira matrica korelacija između slučajnih varijabli.

Ako promotrimo sljedeću transformaciju iz  $x$ -prostora u  $y$ -prostor (vidi Poglavlje 8.3):

$$y_i = \Phi^{-1}(F_{X_i}(x_i)) \quad , \quad i = 1, \dots, N \quad (2.4)$$

tada je združena funkcija gustoće vjerojatnosti definirana kao:

$$\begin{aligned} f_{X_1, \dots, X_N}(x_1, \dots, x_N) &= \frac{\partial^N F_{X_1, \dots, X_N}(x_1, \dots, x_N)}{\partial x_1 \cdots \partial x_N} = \frac{\partial y_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial y_N}{\partial x_N} \cdot \frac{\partial^N F_{X_1, \dots, X_N}(x_1, \dots, x_N)}{\partial y_1 \cdots \partial y_N} \\ &= \frac{f_{X_1}(x_1) \cdots f_{X_N}(x_N)}{\phi(y_1) \cdots \phi(y_N)} \cdot \phi_N(\mathbf{y}, \boldsymbol{\rho}^e) \end{aligned} \quad (2.5)$$

gdje je  $\boldsymbol{\rho}^e$  matrica korelacijskih koeficijenata između slučajnih varijabli u  $y$ -prostoru, a koja se može odrediti (vidi Poglavlje 4.3.1) ako su poznate marginalne funkcije gustoće vjerojatnosti  $f_{X_i}(x_i)$ . Sada,  $N$ -dimenzionalan vektor standardnih normalnih slučajnih varijabli  $\mathbf{Y}$  ima združenu funkciju gustoće vjerojatnosti  $\phi_N(\mathbf{y}, \boldsymbol{\rho}^e)$ .

Linearna transformacija iz  $y$ -prostora u  $u$ -prostor je dana sljedećim izrazom:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A}\mathbf{U} \quad (2.6)$$

gdje je  $\mathbf{A}$  donje trokutasta matrica koja se određuje iz sljedećeg izraza (vidi Poglavlje 8.3):

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \boldsymbol{\rho}^e \quad (2.7)$$

Koristeći izraze (2.4) i (2.6) odnos (Nataf transformacija) između realnih slučajnih varijabli  $\mathbf{X}$  i nezavisnih standardnih normalnih slučajnih varijabli  $\mathbf{U}$  je prikazan sljedećim izrazom:

$$\begin{aligned} x_1 &= F_{X_1}^{-1}(\Phi(A_{11}u_1)) \\ x_2 &= F_{X_2}^{-1}(\Phi(A_{21}u_1 + A_{22}u_2)) \\ &\vdots \\ x_N &= F_{X_N}^{-1}(\Phi(A_{N1}u_1 + A_{N2}u_2 + \cdots + A_{NN}u_N)) \end{aligned} \quad (2.8)$$

Za bolju definiciju osnovne nomenklature navodi se slijedeći primjer definiranja problema kod pouzdanosti komponente.

Potrebno je odrediti vjerojatnost oštećenja (nezadovoljenja) sljedećeg kriterija:

$$3 \cdot X_1 + \ln(X_2) + X_3^2 \cdot X_4 \geq X_5 + 4 \cdot X_6 \quad (2.9)$$

Statističke karakteristike slučajnih varijabli (razdioba, srednja vrijednost i koeficijent varijacije) prikazuje Tablica 2.1.

Tablica 2.1 Statističke karakteristike slučajnih varijabli.

Oznaka	Razdioba	$\mu_X$	$COV_X$ [%]
$X_1$	Normalna	2.0	10.0
$X_2$	Lognormalna	10.0	8.0
$X_3$	Uniformna	3.5	20.0
$X_4$	Normalna	2.5	15.0
$X_5$	Weibullova	8.0	30.0
$X_6$	Weibullova	7.5	40.0

Matrice korelacijskih koeficijenata između slučajnih varijabli su:

$$\mathbf{p}_{14} = \begin{bmatrix} 1 & 0.4 & 0.2 & 0.3 \\ 0.4 & 1 & 0.4 & 0.2 \\ 0.2 & 0.4 & 1 & 0.1 \\ 0.3 & 0.2 & 0.1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_{56} = \begin{bmatrix} 1 & 0.4 \\ 0.4 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

Pri tom su  $\mu_X$  i  $COV_X$  srednja (očekivana) vrijednost i koeficijent varijacije, a  $\mathbf{p}_{14}$  i  $\mathbf{p}_{56}$  su matrice korelacijskih koeficijenata između prve četiri i zadnje dvije slučajne varijable.

Funkcija performanse za kriterij definiran izrazom (2.9) glasi:

$$G(\mathbf{X}) = 3 \cdot X_1 + \ln(X_2) + X_3^2 \cdot X_4 - X_5 - 4 \cdot X_6 \quad (2.11)$$

te je analizom pouzdanosti potrebno odrediti vjerojatnost oštećenja koja je jednaka vjerojatnosti:

$$P_F = P(G(\mathbf{X}) < 0) = P(\mathbf{X} \in \Omega_F) = \int_{\Omega_F} f_X(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (2.12)$$



Vjerojatnost oštećenja određena metodom Monte Carlo je 0.463, a metodom FORM je 0.475. Prema tome, ako parametre ne bi promatrali kao slučajne varijable (što znači da bi kriterij promatrali za parametre  $X_i = \mu_{X_i}$ ), dobili bi zadovoljenje kriterija ( $38.9 \geq 38$ ) ali vjerojatnost njegovog nezadovoljenja je veoma velika (gotovo 50%).

Da je u navedenom primjeru umjesto jednog bilo definirano više kriterija (koji bi definirali više funkcija performansi) tada bi govorili o sistemskoj pouzdanosti. Za slučaj s npr. dva kriterija vjerojatnost oštećenja bi, ovisno o tome govorimo li o serijskom ili paralelnom sustavu, bila jednaka:

- vjerojatnost oštećenja serijskog sustava:

$$P_{Fs} = P(G_1(\mathbf{X}) < 0 \cup G_2(\mathbf{X}) < 0) \quad (2.13)$$

- vjerojatnost oštećenja paralelnog sustava:

$$P_{Fp} = P(G_1(\mathbf{X}) < 0 \cap G_2(\mathbf{X}) < 0) \quad (2.14)$$

### 3 Definicija i karakteristike slučajne varijable

Neka je  $\Omega$  skup događaja, tada svakom događaju  $\omega$  iz skupa događaja na odgovarajući način pridružujemo realan broj  $x$ . Ako s  $X$  označimo funkciju koja događajima iz  $\Omega$  pridružuje različite vrijednosti  $x$ , tada funkciju  $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  zovemo slučajna varijabla.

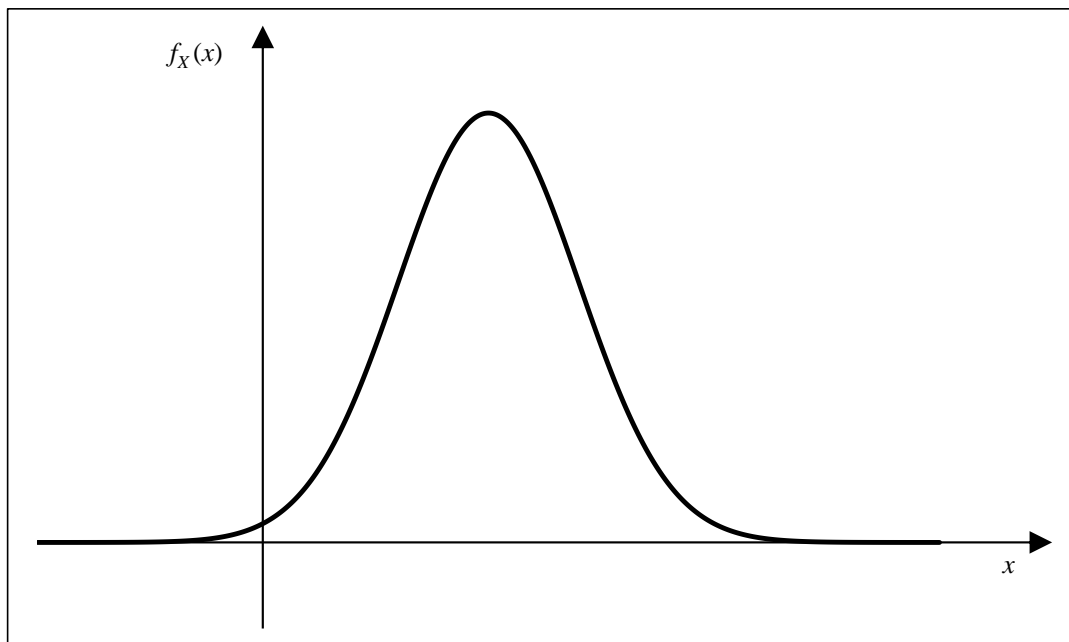
S obzirom da u pokusu možemo dobiti različite ishode,  $X$  može poprimiti različite vrijednosti (zbog toga u nazivu riječ *varijabla*), a vrijednost koju poprima ovisi o slučajnom ishodu pokusa (zbog toga se u nazivu pojavljuje riječ *slučajna*).

Razdioba vjerojatnosti slučajne varijable  $X$  zadana je nekom funkcijom  $f_X(x)$  (koja je izvan tog područja jednaka nuli) za koju vrijedi:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1, \quad f_X(x) \geq 0, \quad x \in \mathbb{R} \quad (3.1)$$

a funkciju  $f_X(x)$  s ovim dvama svojstvima zovemo funkcijom gustoće vjerojatnosti slučajne varijable  $X$ . Vjerojatnost da ta slučajna varijabla poprimi vrijednost u intervalu  $[a, b]$  je:

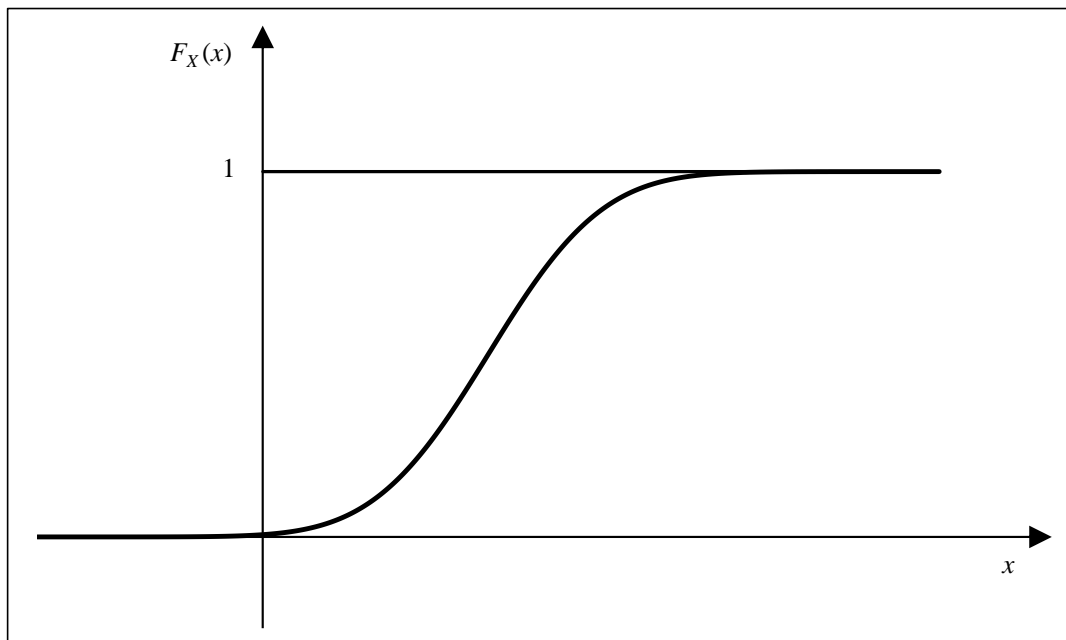
$$P(a < X < b) = \int_a^b f_X(x) dx \quad (3.2)$$



Slika 3.1 Funkcija gustoće vjerojatnosti slučajne varijable  $X$ .

Kumulativna funkcija razdiobe se može odrediti pomoću funkcije gustoće vjerojatnosti na sljedeći način:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = P(-\infty < X \leq x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt \quad (3.3)$$



Slika 3.2 Kumulativna funkcija razdiobe slučajne varijable X.

Karakteristike različitih razdioba vjerojatnosti su prikazane u Poglavlju 8.2 gdje Tablica 8.1 prikazuje izraze za funkciju gustoće vjerojatnosti i kumulativnu funkciju razdiobe različitih razdioba vjerojatnosti, Tablica 8.2 prikazuje izraze za određivanje njihovih srednjih vrijednosti i standardnih devijacija, dok Tablica 8.3 prikazuje izraze za određivanje njihovih parametara (izrazi su izvedeni iz izraza za srednju vrijednost i standardnu devijaciju).

### 3.1 Statistički momenti

Razlikujemo dvije grupe statističkih momenata funkcije gustoće vjerojatnosti slučajne varijable  $X$ : momente oko ishodišta  $MXr_i$  (eng. *raw statistical moments*) i momente oko srednje vrijednosti  $MXc_i$  (eng. *central statistical moments*).

$$MXr_i = \int_{-\infty}^{\infty} x^i \cdot f_X(x) dx \quad (3.4)$$

$$MXC_i = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_x)^i \cdot f_x(x) dx \quad (3.5)$$

gdje  $i$  označava red statističkih momenata funkcije gustoće vjerojatnosti slučajne varijable  $X$ .

### 3.2 Srednja vrijednost

Srednja (očekivana) vrijednost slučajne varijable  $X$  je jednaka prvom statističkom momentu oko ishodišta funkcije gustoće vjerojatnosti slučajne varijable  $X$ :

$$\mu_x = E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_x(x) dx \quad (3.6)$$

gdje je  $E[\cdot]$  operator očekivanja.

### 3.3 Standardna devijacija

Disperzija (*eng. variance*) slučajne varijable  $X$  je jednaka drugom statističkom momentu oko srednje vrijednosti funkcije gustoće vjerojatnosti slučajne varijable  $X$ :

$$\sigma_{xx} = E[(X - \mu_x)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_x)^2 \cdot f_x(x) dx \quad (3.7)$$

te je standardna devijacija jednaka pozitivnom drugom korijenu disperzije:

$$\sigma_x = \sqrt{\sigma_{xx}} \quad (3.8)$$

### 3.4 Koeficijent varijacije

Koeficijent varijacije je jednak omjeru između standardne devijacije i srednje vrijednosti:

$$COV_x = \frac{\sigma_x}{\mu_x} \quad (3.9)$$

### 3.5 Koeficijent korelacije

Koeficijent korelacije između dviju slučajnih varijabli  $X_i$  i  $X_j$  se određuje prema sljedećem izrazu:

$$\rho_{ij} = \frac{\sigma_{X_i X_j}}{\sigma_{X_i} \cdot \sigma_{X_j}} \quad (3.10)$$

gdje su  $\sigma_{X_i}$  i  $\sigma_{X_j}$  standardne devijacije slučajnih varijabli  $X_i$  i  $X_j$ , a  $\sigma_{X_i X_j}$  je kovarianca slučajnih varijabli  $X_i$  i  $X_j$  dana sljedećim izrazom:

$$\sigma_{X_i X_j} = E[(X_i - \mu_{X_i}) \cdot (X_j - \mu_{X_j})] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_i - \mu_{X_i}) \cdot (x_j - \mu_{X_j}) \cdot f_X(x_i, x_j) dx_i dx_j \quad (3.11)$$

Koeficijent korelacije ( $-1 \leq \rho_{ij} \leq 1$ ) je mjera linearne ovisnosti slučajnih varijabli  $X_i$  i  $X_j$ . Sve točke  $(X_i, X_j)$  leže s vjerojatnošću 1 na pravcu točno onda kada je  $\rho_{ij}^2 = 1$ . Kad su  $X_i$  i  $X_j$  nezavisne slučajne varijable onda je  $\rho_{ij} = 0$ . Iz  $\rho_{ij} = 0$  možemo zaključiti na neovisnost slučajnih varijabli  $X_i$  i  $X_j$  samo onda kada one tvore dvodimenzionalnu normalnu razdiobu, koju definira sljedeća funkcija razdiobe vjerojatnosti:

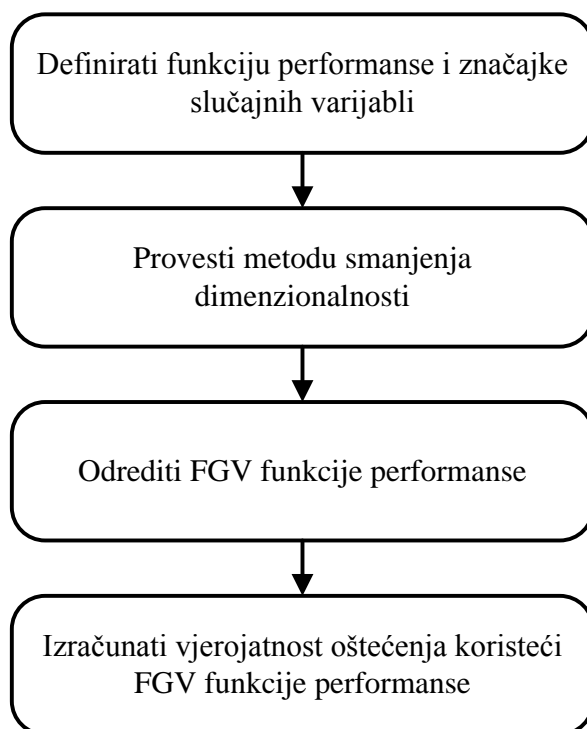
$$f_X(x_i, x_j) = \frac{1}{2\pi \cdot \sigma_{X_i} \cdot \sigma_{X_j} \cdot \sqrt{1 - \rho_{ij}^2}} \cdot e^{-\frac{1}{2 \cdot (1 - \rho_{ij}^2)} \left( \left( \frac{x_i - \mu_{X_i}}{\sigma_{X_i}} \right)^2 - 2 \frac{\rho_{ij} \cdot (x_i - \mu_{X_i}) \cdot (x_j - \mu_{X_j})}{\sigma_{X_i} \cdot \sigma_{X_j}} + \left( \frac{x_j - \mu_{X_j}}{\sigma_{X_j}} \right)^2 \right)} \quad (3.12)$$

## 4 Predložena metoda za analizu pouzdanosti

U današnje vrijeme se u analizi pouzdanosti, za određivanje približnog rješenja višedimenzionalnog integrala, vidi izraz (2.1), koriste simulacijske (Monte Carlo metoda, metoda uzorkovanja s obzirom na značajnost rješenja, itd.) ili analitičke metode (FORM, SORM, itd.). Simulacijske metode su velike točnosti, ali su i vremenski veoma zahtjevne zbog velikog broja simulacija (evaluacija funkcije performanse za različite kombinacije slučajnih varijabli), dok analitičke metode karakterizira manja točnost i manji broja evaluacija. Međutim, sve do danas razvijene metode još uvijek zahtijevaju prevelik broj evaluacija da bi se mogle koristiti u veoma zahtjevnom optimizacijskom procesu kojeg karakterizira velik broj projektnih i slučajnih varijabli (kao što je slučaj u strukturnoj optimizaciji konstrukcije broda). Iz tog je razloga u ovom radu predložena nova metoda za analizu pouzdanosti (Slika 4.1 prikazuje dijagram toka predložene metode). Metoda se sastoji od:

- Definiranja funkcije performanse i značajki slučajnih varijabli;
- Određivanja statističkih momenata oko ishodišta funkcije gustoće vjerojatnosti (u daljnjem tekstu: FGV) funkcije performanse koristeći univarijatnu metodu smanjenja dimenzionalnosti;
- Određivanja oblika FGV funkcije performanse na način da njeni statistički momenti oko ishodišta budu jednaki onima izračunatim univarijatnom metodom smanjenja dimenzionalnosti;
- Integriranja FGV funkcije performanse u području oštećenja (od  $-\infty$  do 0).

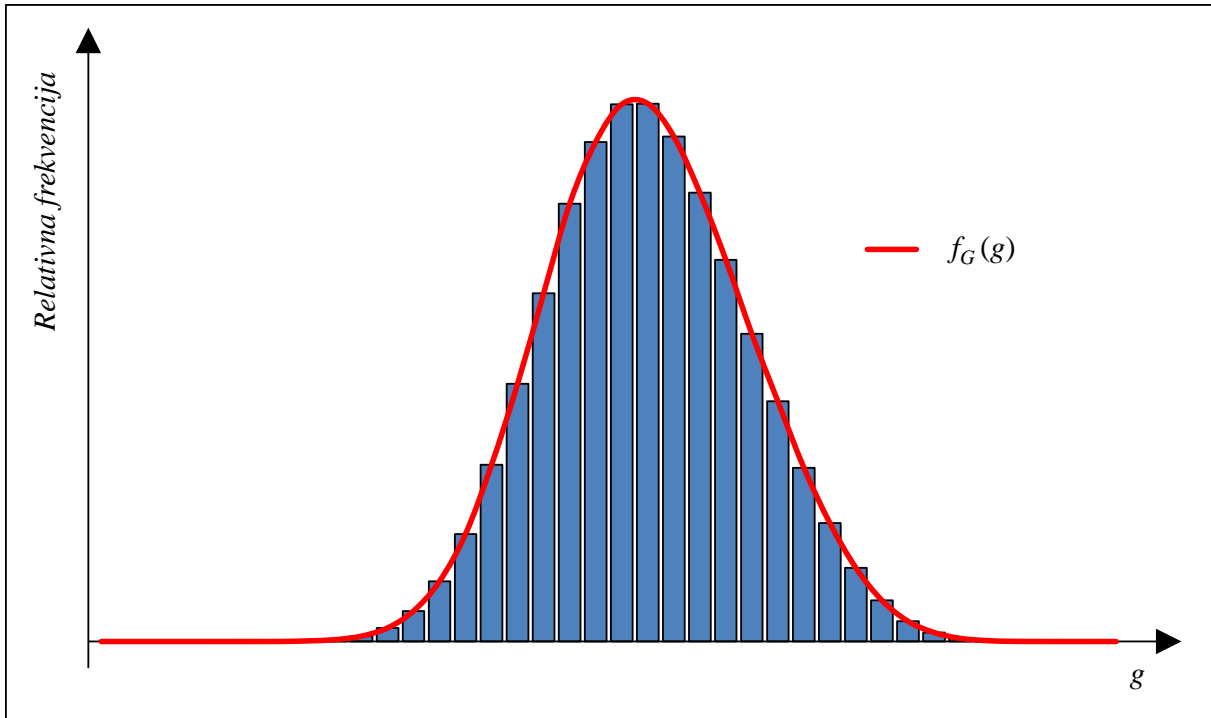
Ovakav način određivanja vjerojatnosti oštećenja je veoma jednostavan, nema nedostatke vezane za određivanje projektne točke kao što su iteracije i računanje derivacija te je zbog malog broja evaluacija funkcije performanse pogodan za upotrebu u projektnim procedurama.



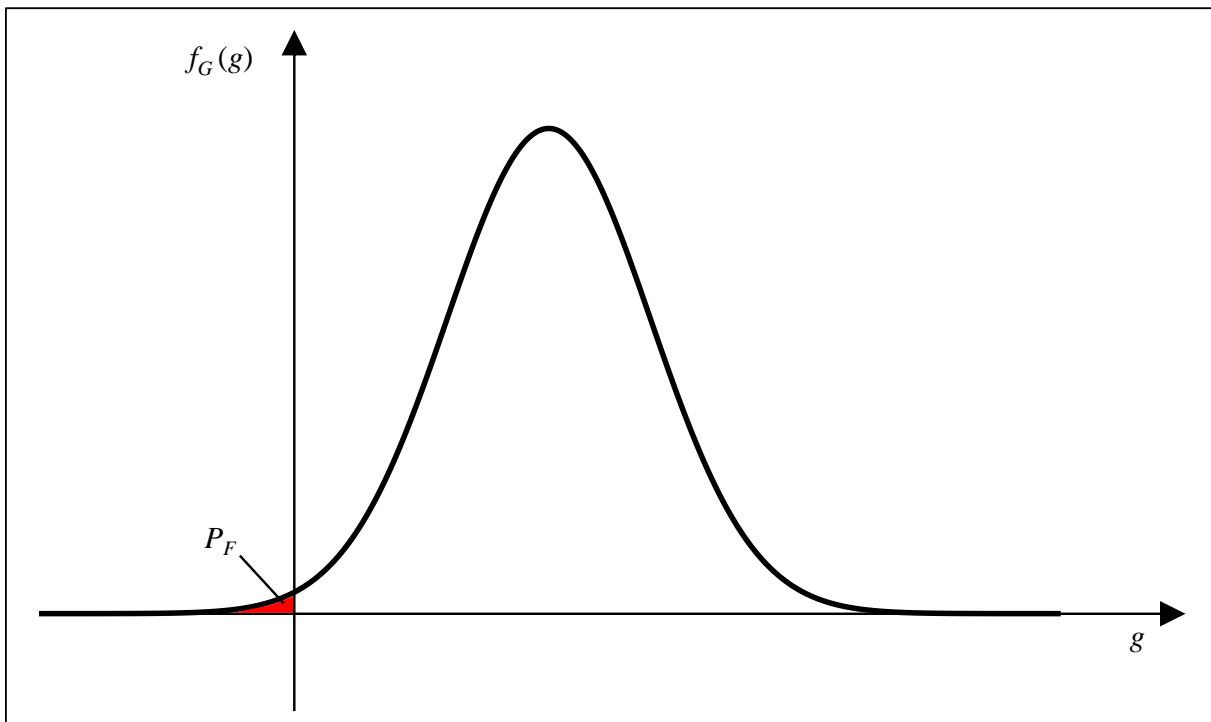
Slika 4.1 Dijagram toka predložene metode za analizu pouzdanosti.

## 4.1 Analogija s Monte Carlo metodom

Monte Carlo metoda se bazira na velikom broju simulacija (evaluacija funkcije performanse za različite kombinacije slučajnih varijabli). Vjerojatnost oštećenja je tada jednaka omjeru između broja simulacija koje su dale negativne vrijednosti funkcije performanse i ukupnog broja simulacija. Međutim, s obzirom da na raspolaganju imamo velik broj vrijednosti funkcija performanse (npr. 1 000 000), moguće je odrediti FGV funkcije performanse te pomoću nje procijeniti vjerojatnost oštećenja. Pri tome je potrebno napraviti histogram (Slika 4.2) na način da se prvo područje između minimalne i maksimalne vrijednosti funkcije performanse podijeli u određeni broj razreda. Zatim se za svaki razred odredi relativna frekvencija kao omjer broja simulacija koje su dale vrijednost funkcije performanse unutar toga razreda i ukupnog broja simulacija. Kad se na takav način dobije histogram relativnih frekvencija moguće je, uz određenu točnost, odrediti kako izgleda  $f_G(g)$  (FGV funkcije performanse  $G(\mathbf{X})$ ), s obzirom da bi ovako definirani histogram odgovarao površini ispod FGV funkcije performanse kada bi teoretski broj simulacija bio beskonačan te kada bi se rezultati tih simulacija prikazali kroz beskonačan broj razreda infinitezimalno male širine. Vjerojatnost oštećenja je tada jednaka površini ispod FGV funkcije performanse u području od  $-\infty$  do 0 (Slika 4.3).



Slika 4.2 Histogram relativnih frekvencija.



Slika 4.3 Grafički prikaz vjerojatnosti oštećenja.



Slično kao u gore prikazanoj metodi i predložena metoda za analizu pouzdanosti nastoji odrediti FGV funkcije performanse ali sa značajno manjim brojem evaluacija funkcije performanse. Metoda ne koristi histogram zbog malog broja simulacija već koristeći metodu smanjenja dimenzionalnosti određuje statističke momente oko ishodišta FGV funkcije performanse, vidi Poglavlje 4.2. Mali broj simulacija se očituje u tome što metoda smanjenja dimenzionalnosti, koristeći karakteristike slučajnih varijabli, uzorke (eksperimente) funkcije performanse (koju promatramo kao novu slučajnu varijablu  $G$ , a realizaciju te slučajne varijable označavamo s  $g$ ) odabire za određene vrijednosti slučajnih varijabli  $\mathbf{X}$ . Zatim se, kad su izračunati statistički momenti, određuje oblik FGV koji zadovoljava te momente na način prikazan u Poglavlju 4.4.

## 4.2 Metoda smanjenja dimenzionalnosti

Univarijatnu metodu smanjenja dimenzionalnosti (*eng. univariate dimension reduction method*) su predložili Rahman i Xu [19] u svrhu predviđanja statističkih momenata FGV funkcije performanse koja ovisi o slučajnim varijablama. Sama metoda uključuje:

- Aditivnu dekompoziciju višedimenzionalne funkcije performanse u više jednodimenzionalnih funkcija;
- Aproksimaciju statističkih momenata funkcije performanse sa statističkim momentima svake slučajne varijable;
- Formule numeričke kvadrature u kojima figuriraju statistički momenti za numeričku integraciju.

Ako promotrimo  $N$ -dimenzionalnu, derivabilnu, realnu funkciju performanse  $G(\mathbf{X})$  koja ovisi o vektoru slučajnih varijabli  $\mathbf{X}$ , tada se  $i$ ti statistički moment oko ishodišta funkcije performanse  $MGr_i$  može odrediti koristeći sljedeći izraz [21]:

$$MGr_i = E\left[\{G(\mathbf{X})\}^i\right] = \int_{R^N} \{G(\mathbf{x})\}^i \cdot f_X(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (4.1)$$

gdje je  $E[\cdot]$  operator očekivanja,  $f_X(\mathbf{x})$  je združena funkcija gustoće vjerojatnosti svih slučajnih varijabli, a  $i$  predstavlja red statističkog momenta oko ishodišta.

Pretpostavimo da  $G(\mathbf{X})$  ima konvergentan razvoj u Taylorov red u proizvoljnoj referentnoj točki  $\mathbf{x} = \mathbf{c} = \{c_1, \dots, c_N\}^T$ , prikazan sljedećim izrazom:

$$G(\mathbf{x}) = G(\mathbf{c}) + \sum_{j=1}^N \frac{\partial G}{\partial x_j}(\mathbf{c})(x_j - c_j) + R_2 \quad (4.2)$$

gdje je  $R_2$  ostatak reda (označava sve članove drugog i višeg reda):

$$R_2 = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{j=1}^N \frac{\partial^k G}{\partial x_j^k}(\mathbf{c})(x_j - c_j)^k \quad (4.3)$$

Ako se za aproksimaciju funkcije performanse  $G(\mathbf{X})$  koristiti univarijatna metoda aditivne dekompozicije koja transformira višedimenzionalnu funkciju u više jednodimenzionalnih funkcija na sljedeći način:

$$G^*(\mathbf{X}) = \left[ \sum_{j=1}^N G(\mu_{X_1}, \dots, \mu_{X_{j-1}}, X_j, \mu_{X_{j+1}}, \dots, \mu_{X_N}) \right] - (N-1) \cdot G(\mu_{X_1}, \dots, \mu_{X_N}) \quad (4.4)$$

gdje je svaki član u sumi jednodimenzionalna slučajna funkcija (funkcija samo jedne slučajne varijable), a  $G(\mu_{X_1}, \dots, \mu_{X_N})$  je deterministička vrijednost funkcije performanse određena za slučaj kad su sve slučajne varijable postavljene na srednju vrijednost  $\boldsymbol{\mu}_X = \{\mu_{X_1}, \dots, \mu_{X_N}\}^T$ , tada je razvoj funkcije  $G^*(\mathbf{X})$  u Taylorov red (u točki  $\mathbf{x} = \mathbf{c}$ ) prikazan sljedećim izrazom:

$$G^*(\mathbf{x}) = G(\mathbf{c}) + \sum_{j=1}^N \frac{\partial G}{\partial x_j}(\mathbf{c})(x_j - c_j) \quad (4.5)$$

Uspoređujući izraze (4.2) i (4.5), vidljivo je da univarijatna aproksimacija dovodi do sljedeće greške:

$$G(\mathbf{x}) - G^*(\mathbf{x}) = R_2 \quad (4.6)$$

Za dovoljno glatku funkciju  $G(\mathbf{X})$  s konvergentnim Taylorovim redom, koeficijenti uz članove višeg reda su najčešće mnogo manji od koeficijenata članova prvog reda. U tom slučaju, članovi višeg reda manje doprinose funkciji te se stoga mogu zanemariti.

Nadalje, izraz (4.4) predstavlja funkciju koja je u potpunosti jednaka funkciji  $G(\mathbf{X})$  kad je  $G(\mathbf{X}) = \sum_j G_j(X_j)$ , tj. kad  $G(\mathbf{X})$  može biti aditivno dekomponirana u funkcije jedne varijable  $G_j(X_j)$ .

Uvrštavajući izraz (4.4) u (4.1) dobiva se:

$$MGr_i \cong E \left[ \left\{ \left[ \sum_{j=1}^N G(\mu_{X_1}, \dots, \mu_{X_{j-1}}, X_j, \mu_{X_{j+1}}, \dots, \mu_{X_N}) \right] - (N-1) \cdot G(\mu_{X_1}, \dots, \mu_{X_N}) \right\}^i \right] \quad (4.7)$$

Primjena binomne formule na izraz (4.7) daje:

$$MGr_i \cong \sum_{k=0}^i \binom{i}{k} \cdot E \left[ \left\{ \sum_{j=1}^N G(\mu_{X_1}, \dots, \mu_{X_{j-1}}, X_j, \mu_{X_{j+1}}, \dots, \mu_{X_N}) \right\}^k \right] \cdot [-(N-1) \cdot G(\mu_{X_1}, \dots, \mu_{X_N})]^{i-k} \quad (4.8)$$

Ako uvedemo sljedeću supstituciju, tj. sa  $S_{k,j}$  označimo:

$$S_{k,j} = E \left[ \left\{ \sum_{j=1}^N G(\mu_{X_1}, \dots, \mu_{X_{j-1}}, X_j, \mu_{X_{j+1}}, \dots, \mu_{X_N}) \right\}^k \right] \quad (4.9)$$

gdje je  $k = 0, \dots, i$  te  $j = 1, \dots, N$ ; tada  $S_{k,j}$  može biti prikazan korištenjem rekurzivne formule:

$$\begin{aligned} S_{k,1} &= E[G^k(X_1, \mu_{X_2}, \dots, \mu_{X_N})] \\ S_{k,2} &= \sum_{r=0}^k \binom{k}{r} \cdot S_{r,1} \cdot E[G^{k-r}(\mu_{X_1}, X_2, \mu_{X_3}, \dots, \mu_{X_N})] \\ &\vdots \\ S_{k,j} &= \sum_{r=0}^k \binom{k}{r} \cdot S_{r,j-1} \cdot E[G^{k-r}(\mu_{X_1}, \dots, \mu_{X_{j-1}}, X_j, \mu_{X_{j+1}}, \dots, \mu_{X_N})] \\ &\vdots \\ S_{k,N} &= \sum_{r=0}^k \binom{k}{r} \cdot S_{r,N-1} \cdot E[G^{k-r}(\mu_{X_1}, \dots, \mu_{X_{N-1}}, X_N)] \end{aligned} \quad (4.10)$$

Uvrštavanjem posljednjeg izraza iz (4.10) u izraz (4.8) dobiva se:

$$MGr_i \cong \sum_{k=0}^i \binom{i}{k} S_{k,N} \cdot [-(N-1) \cdot G(\mu_{X_1}, \dots, \mu_{X_N})]^{i-k} \quad (4.11)$$

Jednodimenzionalna integracija u izrazu (4.10) se može prikazati kao:

$$E[G^p(\mu_{X_1}, \dots, \mu_{X_{j-1}}, X_j, \mu_{X_{j+1}}, \dots, \mu_{X_N})] = \int_{-\infty}^{\infty} G^p(\mu_{X_1}, \dots, \mu_{X_{j-1}}, x_j, \mu_{X_{j+1}}, \dots, \mu_{X_N}) \cdot f_{X_j}(x_j) dx_j \quad (4.12)$$

gdje je  $p = k - r$ , dok je  $f_{X_j}(x_j)$  marginalna funkcija gustoće vjerojatnosti  $j$ te slučajne varijable koja se može odrediti ako je poznata združena funkcije gustoće vjerojatnosti svih slučajnih varijabli  $f_X(\mathbf{x})$  (ili možemo uzeti da je ona jednaka funkciji gustoće vjerojatnosti  $j$ te slučajne varijable).

Treba primijetiti da je izraz (4.12) korektan jedino u slučaju kad je vektor slučajnih varijabli  $\mathbf{X}$  nezavisan. Stoga je, u slučaju da je vektor slučajnih varijabli zavisn, potrebno koristiti multivarijatnu transformaciju (na primjer Rosenblatt ili Nataf [26]), da bismo zavisn vektor slučajnih varijabli  $\mathbf{X}$  transformirali u nezavisni vektor standardnih normalnih slučajnih varijabli  $\mathbf{U}$  (srednja vrijednost jednaka 0, a standardna devijacija jednaka 1).

Također treba primijetiti da se jednodimenzionalna deterministička integracija u (4.12) može odrediti koristeći standardno kvadraturno pravilo (na primjer, Gauss-Hermiteovo ili Gauss-Legendreovo kvadraturno pravilo ako  $X_j$  slijedi normalnu ili uniformnu razdiobu). Tada se izraz (4.12) može prikazati kao:

$$E[G^p(\mu_{X_1}, \dots, \mu_{X_{j-1}}, X_j, \mu_{X_{j+1}}, \dots, \mu_{X_N})] \cong \sum_{i=1}^{N_{ip}} w_{j,i} \cdot G^p(\mu_{X_1}, \dots, \mu_{X_{j-1}}, x_{j,i}, \mu_{X_{j+1}}, \dots, \mu_{X_N}) \quad (4.13)$$

gdje je  $N_{ip}$  broj integracijskih točaka za svaku  $j$ tu varijablu, a  $w_{j,i}$  i  $x_{j,i}$  su težinski faktor i integracijska točka za svaku  $j$ tu varijablu u  $i$ toj integracijskoj točki.

Prema gore navedenoj proceduri, ukupan broj evaluacija funkcije performanse pri određivanju statističkih momenata oko ishodišta koristeći univarijatnu metodu smanjenja dimenzionalnosti je jednak  $N \cdot N_{ip} + 1$ , gdje je  $N$  broj slučajnih varijabli.

Kad je funkcija gustoće vjerojatnosti slučajne varijable  $X_j$  proizvoljna, Rahman i Xu [19] integracijske točke i njihove odgovarajuće težinske faktore određuju koristeći formule numeričke kvadrature u kojima figuriraju statistički momenti (*eng. moment-based quadrature rule*) [19], [21].

### 4.2.1 Formule numeričke kvadrature u kojima figuriraju statistički momenti

Za proizvoljnu FGV  $j$ te slučajne varijable, integracijske točke i odgovarajuće težinske faktore se određuje rješavanjem linearnog sustava jednadžbi koji sadrži statističke momente oko ishodišta FGV slučajne varijable, a koji je prikazan sljedećim izrazom [21]:

$$\begin{bmatrix} MXr_{j,k-1} & -MXr_{j,k-2} & \cdots & (-1)^{k-1} MXr_{j,0} \\ MXr_{j,k} & -MXr_{j,k-1} & \cdots & (-1)^{k-1} MXr_{j,1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ MXr_{j,2k-2} & -MXr_{j,2k-3} & \cdots & (-1)^{k-1} MXr_{j,k-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} v_{j,1} \\ v_{j,2} \\ \vdots \\ v_{j,k} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} MXr_{j,k} \\ MXr_{j,k+1} \\ \vdots \\ MXr_{j,2k-1} \end{Bmatrix} \quad (4.14)$$

gdje je  $k$  broj integracijskih točaka ( $k = N_{ip}$ ),  $\mathbf{v}_j = \{v_{j,1}, \dots, v_{j,k}\}^T$  je vektor nepoznanica  $j$ te slučajne varijable koji je potrebno odrediti, a  $MXr_{j,k}$  je  $k$ ti statistički moment oko ishodišta FGV  $j$ te slučajne varijable definiran sljedećim izrazom:

$$MXr_{j,k} = \int_{-\infty}^{\infty} x_j^k \cdot f_{X_j}(x_j) dx_j \quad (4.15)$$

Nakon što je određen vektor  $\mathbf{v}$ , integracijske točke  $x_{j,i}$  su nultočke polinoma zadanog sljedećim izrazom:

$$x_j^k - v_{j,1}x_j^{k-1} + v_{j,2}x_j^{k-2} - \cdots + (-1)^k v_{j,k} = 0 \quad (4.16)$$

Pri tom jednadžba polinoma slijedi iz uvjeta:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_j^n \cdot (x_j^k - v_{j,1}x_j^{k-1} + v_{j,2}x_j^{k-2} - \cdots + (-1)^k v_{j,k}) \cdot f_{X_j}(x_j) dx_j = 0, \quad n=0, \dots, 2k-1 \quad (4.17)$$

Naposljetku, težinski faktor  $j$ te slučajne varijable u  $i$ toj integracijskoj točki se određuje prema izrazu:

$$w_{j,i} = \frac{\sum_{m=0}^{k-1} (-1)^m MXr_{j,k-m-1} \cdot q_{j,im}}{\prod_{m=1, m \neq i}^k (x_{j,i} - x_{j,m})} \quad (4.18)$$

gdje je  $q_{j,i0} = 1$ ,  $q_{j,im} = v_{j,m} - x_{j,i} q_{j,im-1}$ .

## 4.2.2 Modifikacija metode smanjenja dimenzionalnosti

U okviru ovog doktorskog rada napravljena je modifikacija metode smanjenja dimenzionalnosti. Modifikacijom se umjesto korištenjem formula numeričke kvadrature u kojima figuriraju statistički momenti, integracijske točke  $x_{j,i}$  i njihove odgovarajuće težinske faktore  $w_{j,i}$  za svaku jednodimenzionalnu numeričku integraciju (svaku slučajnu varijablu), određuje korištenjem Gauss-Hermiteove integracije standardne normalne razdiobe ( $u$ -prostor) s težinskom funkcijom  $\exp(-x^2)$  [17] te transformiranjem te točke u  $x$ -prostor. Određivanje integracijskih točaka i težinskih faktora je prikazano sljedećim izrazima:

$$w_{SNi} = \frac{w_{GHi}}{\sqrt{\pi}}, \quad u_{SNi} = \sqrt{2} \cdot u_{GHi}, \quad w_{j,i} = w_{SNi}, \quad x_{j,i} = \text{funkcija}(\alpha_j, \delta_j, u_{SNi}) \quad (4.19)$$

gdje su  $u_{GHi}$  i  $w_{GHi}$  ita integracijska točka i njen odgovarajući težinski faktor Gauss-Hermiteove integracije [42],  $u_{SNi}$  i  $w_{SNi}$  su ita integracijska točka u  $u$ -prostoru (za standardnu normalnu razdiobu) i njen odgovarajući težinski faktor, a  $x_{j,i}$  i  $w_{j,i}$  su ita realna integracijska točka  $j$ te slučajne varijable (koja se dobije nakon transformacije iz  $u$ -prostora u  $x$ -prostor) i njen odgovarajući težinski faktor. Tablica 4.1 prikazuje ovdje opisane Gauss-Hermiteove integracijske točke i težinske faktore kad je broj integracijskih točaka  $N_{ip} = 6$ .

Na primjer, ako neka nezavisna  $j$ ta slučajna varijabla slijedi normalnu ili Weibullovu razdiobu tada se njena ita integracijska točka  $x_{j,i}$  određuje prema sljedećim izrazima [4]:

$$x_{j,i} = \alpha_j + \delta_j \cdot u_{SNi} \quad \text{- za normalnu razdiobu} \quad (4.20)$$

$$x_{j,i} = \alpha_j \cdot \left\{ -\ln[\Phi(-u_{SNi})] \right\}_{\delta_j}^{\frac{1}{\delta_j}} \quad \text{- za Weibullovu razdiobu} \quad (4.21)$$

gdje su  $\alpha$  i  $\delta$  parametri normalne i Weibullove razdiobe.

Integrirajući na ovaj način nema potrebe za rješavanjem linearnog sustava jednadžbi i pronalaženjem nultočaka polinoma prilikom određivanja integracijskih točaka i njihovih odgovarajućih težinskih faktora (i to za svaku slučajnu varijablu), kao što je to slučaj kod formula numeričke kvadrature u kojima figuriraju statistički momenti [21]. Također je i sam algoritam stabilan jer se koriste tablično zadane vrijednosti integracijskih točaka i težinskih faktora te stoga, za određene karakteristike slučajnih varijabli, ne postoji mogućnost loše uvjetovanosti matrice (što rezultira nemogućnošću invertiranja ili nekorektnim invertiranjem matrice) iz izraza (4.14).

Tablica 4.1 Gauss-Hermiteove integracijske točke i težinski faktori ( $N_{ip} = 6$ ).

$i$	$u_{GH}$	$w_{GH}$	$u_{SN}$	$w_{SN}$
1	-2.350604974	0.004530010	-3.324257434	0.002555784
2	-1.335849074	0.157067320	-1.889175878	0.088615746
3	-0.436077412	0.724629595	-0.616706590	0.408828470
4	0.436077412	0.724629595	0.616706590	0.408828470
5	1.335849074	0.157067320	1.889175878	0.088615746
6	2.350604974	0.004530010	3.324257434	0.002555784

Navedenom modifikacijom se, dakle, funkcija performanse transformira u  $u$ -prostor te se određuje njena vrijednost u Gauss-Hermiteovim točkama standardne normalne razdiobe (srednja vrijednost jednaka 0, a standardna devijacija jednaka 1). Stoga izraz (4.10) postaje:

$$\begin{aligned}
 S_{k,1} &= E[G^k(U_1, 0, \dots, 0)] \\
 S_{k,2} &= \sum_{r=0}^k \binom{k}{r} \cdot S_{r,1} \cdot E[G^{k-r}(0, U_2, 0, \dots, 0)] \\
 &\vdots \\
 S_{k,j} &= \sum_{r=0}^k \binom{k}{r} \cdot S_{r,j-1} \cdot E[G^{k-r}(0, \dots, 0, U_j, 0, \dots, 0)] \\
 &\vdots \\
 S_{k,N} &= \sum_{r=0}^k \binom{k}{r} \cdot S_{r,N-1} \cdot E[G^{k-r}(0, \dots, 0, U_N)]
 \end{aligned} \tag{4.22}$$

a izraz (4.11) postaje ( $G = G(\mathbf{U})$ , gdje je  $\mathbf{U}$  vektor slučajnih varijabli u  $u$ -prostoru):

$$MGr_i \cong \sum_{k=0}^i \binom{i}{k} S_{k,N} \cdot [-(N-1) \cdot G(0, \dots, 0)]^{i-k} \tag{4.23}$$

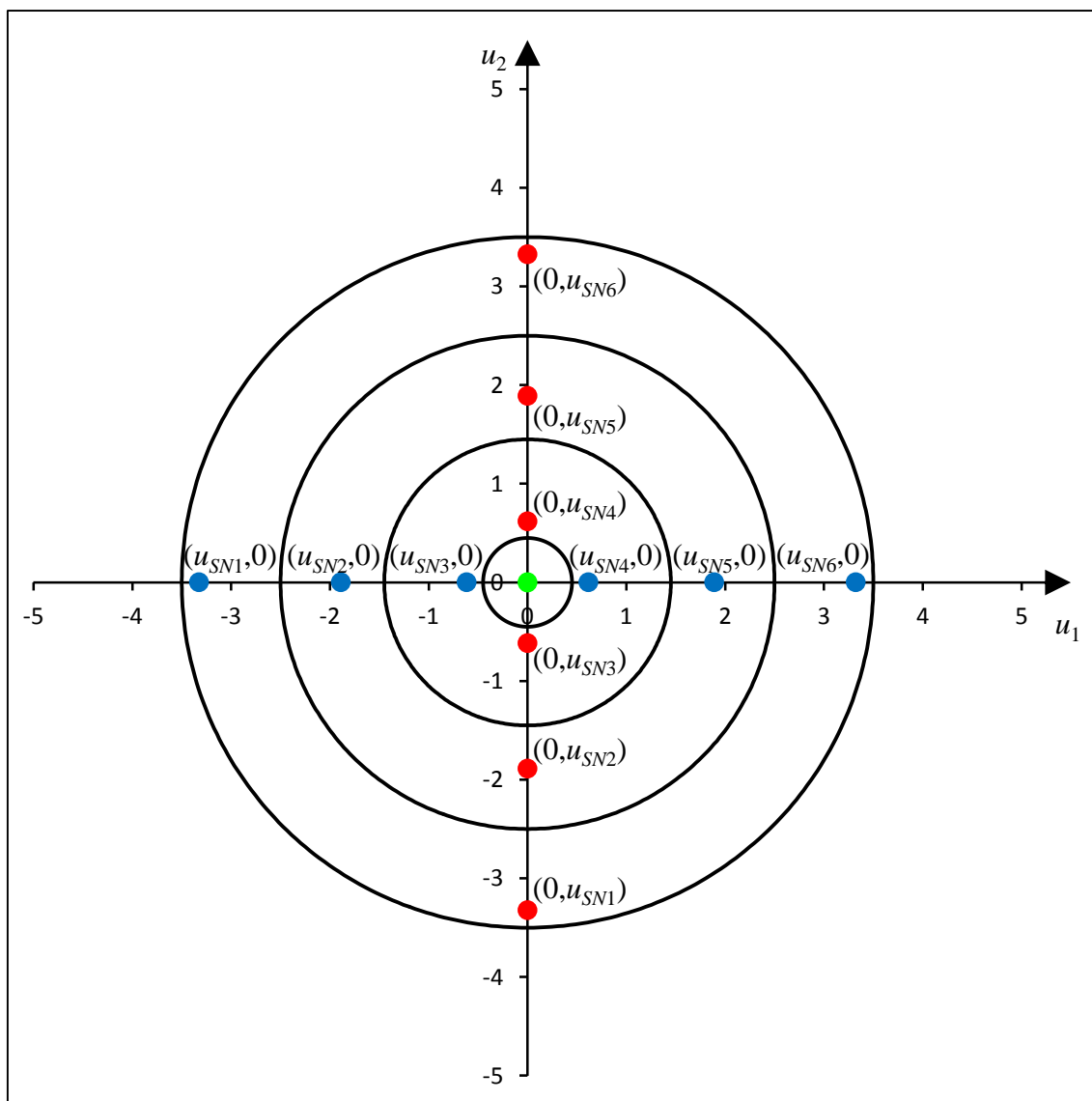
Jednodimenzionalna integracija u izrazu (4.12) se može napisati kao:

$$E[G^p(0, \dots, 0, U_j, 0, \dots, 0)] = \int_{-\infty}^{\infty} G^p(0, \dots, 0, u_j, 0, \dots, 0) \phi(u_j) du_j \tag{4.24}$$

Koristeći integracijske točke i njihove odgovarajuće težinske faktore iz izraza (4.19), za izraz (4.24) vrijedi:

$$E[G^p(0, \dots, 0, U_j, 0, \dots, 0)] \cong \sum_{i=1}^{N_p} w_{S_{Ni}} \cdot G^p(0, \dots, 0, u_{S_{Ni}}, 0, \dots, 0) \tag{4.25}$$

Slika 4.4 prikazuje integracijske točke u  $u$ -prostoru za slučaj s dvije slučajne varijable. Točke prikazane plavom bojom se odnose na prvu varijablu (dok je druga na nuli), a crvenom bojom su prikazane točke koje se odnose na drugu varijablu (dok je prva na nuli). U zelenoj točki se računa deterministička vrijednost funkcije performanse, vidi izraz (4.23).



Slika 4.4 Prikaz integracijskih točaka u  $u$ -prostoru za slučaj s dvije slučajne varijable.



### 4.3 Nataf transformacija

U ovom poglavlju je opisana transformacija iz realnog prostora ulaznih slučajnih varijabli  $\mathbf{X}$  ( $x$ -prostor) u nekorelirani standardni normalni prostor slučajnih varijabli  $\mathbf{U}$  ( $u$ -prostor) [22]. Pri tom je prvom koraku potrebno odrediti transformaciju iz  $x$ -prostora u korelirani standardni normalni prostor slučajnih varijabli  $\mathbf{Y}$  ( $y$ -prostor) koja je definirana sljedećim izrazom:

$$y_i = \Phi^{-1}(F_{X_i}(x_i)), \quad i = 1, \dots, N \quad (4.26)$$

gdje je  $N$  broj slučajnih varijabli,  $\Phi(\cdot)$  je standardna normalna kumulativna funkcija razdiobe dok su  $F_{X_1}, \dots, F_{X_N}$  apsolutno kontinuirane i rastuće kumulativne funkcije razdiobe slučajnih varijabli  $\mathbf{X}$ . Transformacija u izrazu (4.26) je dobivena pod pretpostavkom da su ulazne slučajne varijable  $X_1, \dots, X_N$  međusobno nezavisne i imaju odgovarajuće kumulativne funkcije razdiobe  $F_{X_1}, \dots, F_{X_N}$ . Međutim, ako su slučajne varijable  $X_1, \dots, X_N$  međusobno zavisne, “marginalna“ transformacija u izrazu (4.26) primijenjena na  $X_1, \dots, X_N$  daje slučajne varijable  $Y_1, \dots, Y_N$  koje nisu međusobno nezavisne. Stoga je potrebno odrediti matricu ekvivalentnih korelacijskih koeficijenata  $\rho^e$  normalno distribuiranih slučajnih varijabli  $\mathbf{Y}$ , koja se određuje iz matrice korelacijskih koeficijenata  $\rho$  (matrica korelacijskih koeficijenata između slučajnih varijabli u  $x$ -prostoru) na način da se svaki korelacijski koeficijent matrice  $\rho$  pomnoži s odgovarajućim faktorom  $F$  koji ovisi o vrsti razdiobe i statističkim parametrima.

Za opis ove transformacije dovoljno je promatrati dvije slučajne varijable  $X_i$  i  $X_j$ . Marginalne transformacije, vidi Poglavlje 8.3, od  $X_i$  i  $X_j$  do normalno distribuiranih slučajnih varijabli  $Y_i$  i  $Y_j$  koje imaju srednju (očekivanu) vrijednost 0, a standardnu devijaciju 1 su prikazane sljedećim izrazima:

$$\begin{aligned} x_i &= F_{X_i}^{-1}[\Phi(y_i)] \\ x_j &= F_{X_j}^{-1}[\Phi(y_j)] \end{aligned} \quad (4.27)$$

Slučajne varijable  $Y_i$  i  $Y_j$  imaju ekvivalentni korelacijski koeficijent  $\rho_{ij}^e$  koji se u Nataf transformaciji određuje na način da se zavisnost između  $X_i$  i  $X_j$  aproksimira što je više moguće (za postupak određivanja  $\rho_{ij}^e$  vidi Poglavlje 4.3.1).

Sljedeći korak je transformacija iz  $y$ -prostora, gdje su normalno distribuirane slučajne varijable  $\mathbf{Y}$  (srednja vrijednost 0, standardna devijacija 1 i matrica korelacijskih koeficijenata  $\rho^e$ ), u  $u$ -prostor gdje su normalno distribuirane slučajne varijable  $\mathbf{U}$  koje su nekorelirane i također sa srednjom vrijednošću 0 i standardnom devijacijom 1. Ova transformacija se može provesti na više načina, a ovdje će se prikazati, kao najjednostavnija, Choleskyeva metoda. Transformacija je općenito definirana izrazom (usporedi s izrazima (2.6) i (2.7)):

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A}\mathbf{U} \quad (4.28)$$

gdje je za navedenu metodu,  $\mathbf{A}$  donja trokutasta matrica ( $A_{ij} = 0$  za  $j > i$ ). Za matricu kovarijance  $\mathbf{C}_Y$  slučajnih varijabli  $\mathbf{Y}$  vrijedi:

$$\mathbf{C}_Y = E[\mathbf{Y}\mathbf{Y}^T] = E[\mathbf{A}\mathbf{U}\mathbf{U}^T\mathbf{A}^T] = \mathbf{A}E[\mathbf{U}\mathbf{U}^T]\mathbf{A}^T = \mathbf{A}\mathbf{A}^T = \rho^e \quad (4.29)$$

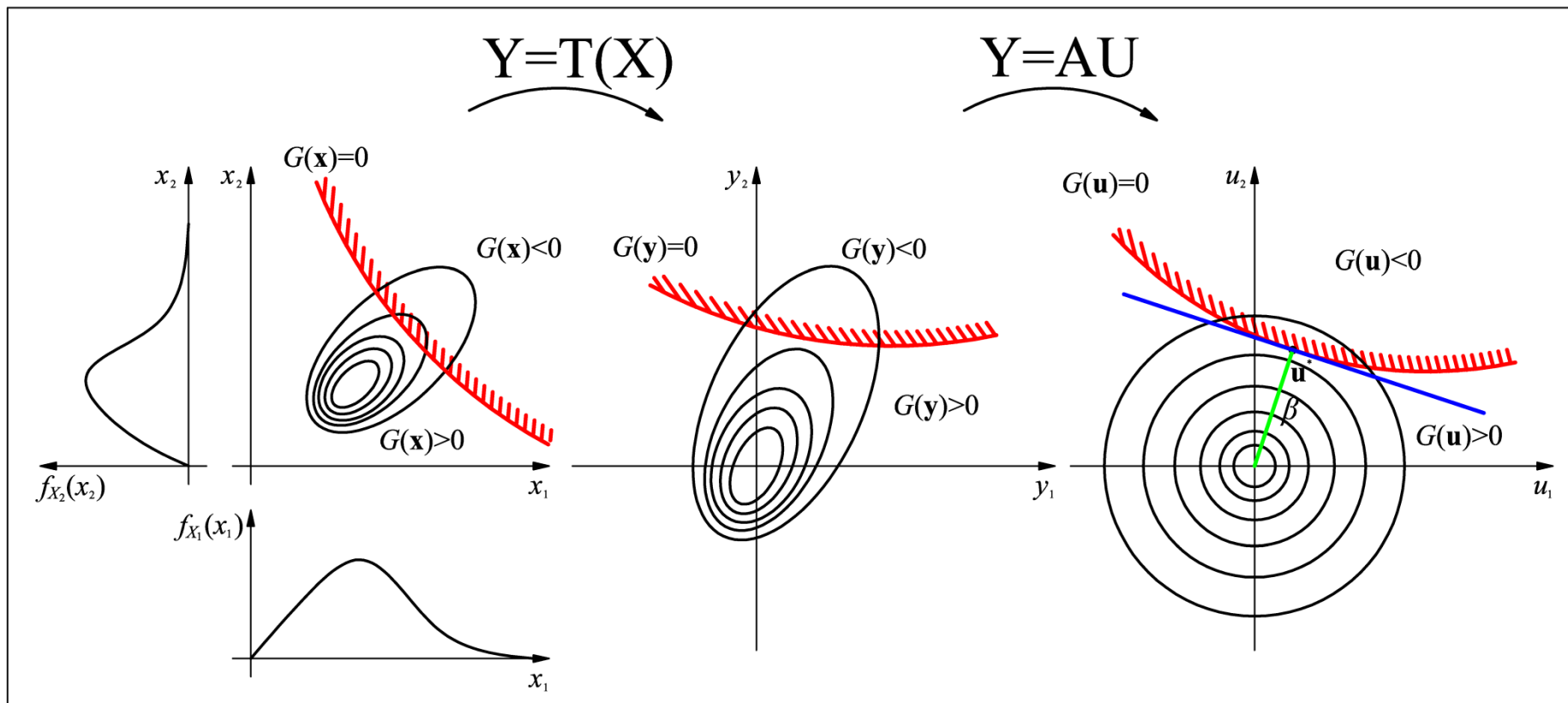
Elementi matrice  $\mathbf{A}$  određeni iz izraza (4.29) glase:

$$A_{ij} = \begin{cases} \left. \begin{array}{l} 1 \quad \text{za } i=1 \\ \rho_{ij}^e \quad \text{za } i>1 \end{array} \right\} & \text{za } j=1 \\ \left. \begin{array}{l} \left( \rho_{ij}^e - \sum_{k=1}^{j-1} A_{ik}A_{jk} \right) / A_{jj} \quad \text{za } j < i \\ \sqrt{1 - \sum_{k=1}^{i-1} A_{ik}^2} \quad \text{za } j = i \\ 0 \quad \text{za } j > i \end{array} \right\} & \text{za } j > 1 \end{cases} \quad (4.30)$$

Sada se slučajne varijable  $\mathbf{Y}$ , koristeći izraze (4.28) i (4.30), mogu napisati u obliku:

$$\begin{aligned} Y_1 &= A_{11} \cdot U_1 \\ Y_2 &= A_{21} \cdot U_1 + A_{22} \cdot U_2 \\ Y_3 &= A_{31} \cdot U_1 + A_{32} \cdot U_2 + A_{33} \cdot U_3 \\ &\vdots \end{aligned} \quad (4.31)$$

Slika 4.5 prikazuje transformaciju problema iz  $x$ -prostora u  $u$ -prostor. Linije prikazane crvenom bojom predstavljaju linije u kojoj je funkcija performanse (funkcija graničnog stanja) jednaka nuli  $G(\cdot) = 0$ . U projektnoj točki  $\mathbf{u}^*$  je prikazana linearizacija funkcije performanse (plava linija). Na slici je naznačen i indeks pouzdanosti  $\beta$  koji predstavlja najkraću udaljenost u  $u$ -prostoru od ishodišta do funkcije performanse (zelena linija).



Slika 4.5 Prikaz transformacije problema iz  $x$ -prostora u  $u$ -prostor.

### 4.3.1 Određivanje matrice korelacijskih koeficijenata $\rho^e$

Ako predstavimo normalizirane varijable  $Z_i$  i  $Z_j$  kao:

$$Z_k = \frac{X_k - \mu_{Xk}}{\sigma_{Xk}}, \quad k = i, j \quad (4.32)$$

tada je korelacijski koeficijent  $\rho_{ij}$  između  $X_i$  i  $X_j$  jednak  $\rho_{ij} = E[Z_i Z_j]$ . Uvrštavanjem izraza (4.27) u izraz (4.32) dobiva se:

$$z_k = \frac{F_{Xk}^{-1}[\Phi(y_k)] - \mu_{Xk}}{\sigma_{Xk}}, \quad k = i, j \quad (4.33)$$

Veza između  $\rho_{ij}$  i nepoznatog ekvivalentnog korelacijskog koeficijenta  $\rho_{ij}^e$  između  $Y_i$  i  $Y_j$  se može prikazati sljedećim izrazom:

$$\rho_{ij} = E[Z_i Z_j] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} z_i z_j \phi_2(y_i, y_j, \rho_{ij}^e) dy_i dy_j \quad (4.34)$$

gdje je  $\phi_2(\cdot)$  dvodimenzionalna normalna FGV. Uvrštavanjem izraza (4.33) u izraz (4.34) dobiva se:

$$\rho_{ij} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_{Xi}^{-1}[\Phi(y_i)] - \mu_{Xi}}{\sigma_{Xi}} \frac{F_{Xj}^{-1}[\Phi(y_j)] - \mu_{Xj}}{\sigma_{Xj}} \phi_2(y_i, y_j, \rho_{ij}^e) dy_i dy_j \quad (4.35)$$

a koristeći izraz (4.31) te njegovim sređivanjem i uvrštavanjem u (4.35) dobiva se konačni izraz iz kojeg se iterativnim putem određuje  $\rho_{ij}^e$ :

$$\rho_{ij} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_{Xi}^{-1}[\Phi(u_i)] - \mu_{Xi}}{\sigma_{Xi}} \frac{F_{Xj}^{-1}\left[\Phi\left(\rho_{ij}^e u_i + \sqrt{1 - (\rho_{ij}^e)^2} u_j\right)\right] - \mu_{Xj}}{\sigma_{Xj}} \phi(u_i) \phi(u_j) du_i du_j \quad (4.36)$$

Der Kiureghian i Liu [26] su odredili  $\rho_{ij}^e$  iz izraza (4.36) za različite kombinacije razdioba i njihovih statističkih parametara te su dali izraze, vidi Poglavlje 8.4, za faktor  $F$  kojim se aproksimira  $\rho_{ij}^e$  prema sljedećem izrazu:

$$\rho_{ij}^e = F \cdot \rho_{ij} \quad (4.37)$$

## 4.4 Određivanje funkcije gustoće vjerojatnosti

Kad za funkciju performanse imamo procijenjene statističke momente oko ishodišta tada je potrebno odrediti analitički izraz njene FGV. Iako pretpostavka da se FGV može prikazati kao suma od  $k$  različitih normalnih FGV [25] daje točnu vrijednost vjerojatnosti oštećenja, u nekim primjerima optimizacijski algoritam ne može pronaći rješenje u kojem su svi težinski faktori pozitivni te FGV nije pozitivna u cijeloj domeni. Ta fizikalna nekorektnost je potaknula razvoj i implementaciju novog pristupa za određivanje FGV koji je opisan u ovom radu. Novi pristup pretpostavlja da se FGV može prikazati kao normalizirani umnožak dvije normalne kumulativne funkcije razdiobe, što osigurava da je FGV pozitivna u cijeloj domeni (od  $-\infty$  do  $+\infty$ ).

Ako s  $H(g)$  označimo funkciju umnoška dvije kumulativne normalne razdiobe:

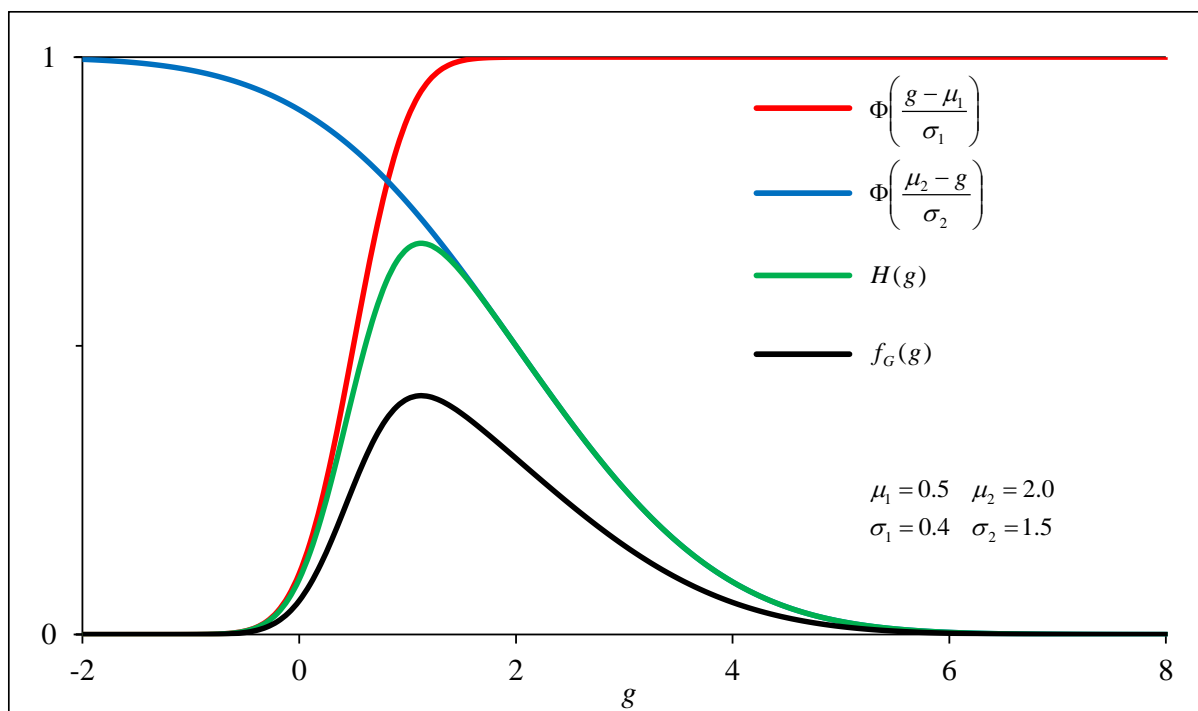
$$H(g) = \Phi\left(\frac{g - \mu_1}{\sigma_1}\right) \cdot \Phi\left(\frac{\mu_2 - g}{\sigma_2}\right) \quad (4.38)$$

gdje je  $\Phi(\cdot)$  standardna normalna kumulativna funkcija razdiobe (srednja vrijednost jednaka 0, a standardna devijacija jednaka 1), a  $\mu_1, \mu_2, \sigma_1$  i  $\sigma_2$  su srednje vrijednosti i standardne devijacije (koje su po definiciji pozitivne) dviju normalnih kumulativnih funkcija razdioba. Tada izraz za FGV funkcije performanse glasi:

$$f_G(g) = \frac{H(g)}{\int_{-\infty}^{\infty} H(g) dg} \quad (4.39)$$

te je važno napomenuti da funkcija  $f_G(g)$  ima oba svojstva funkcije gustoće vjerojatnosti, vidi izraz (3.1).

Normalizacija osigurava da je površina ispod FGV jedinične vrijednosti. Slika 4.6 prikazuje dvije normalne kumulativne funkcije razdiobe sa suprotnim predznacima – jedna monotono rastuća (crvena linija), a druga monotono padajuća (plava linija) te umnožak (zeleno linija) i normalizirani umnožak (crna linija) tih dviju funkcija (razdioba) sa srednjim vrijednostima i standardnim devijacijama naznačenim na slici.



Slika 4.6 Generiranje općenite funkcije gustoće vjerojatnosti.

Određivanje FGV koja zadovoljava određeni broj statističkih momenata definira se kao problem pronalaženja četiri parametra ( $\mu_1$ ,  $\mu_2$ ,  $\sigma_1$  i  $\sigma_2$ ), koji formiraju takvu FGV da su njeni statistički momenti jednaki onima koje treba zadovoljiti. Ako s  $MHR_i$  označimo  $i$ -ti statistički moment oko ishodišta (*eng. raw statistical moment*) funkcije  $H(g)$ , tada matematički izraz za njegovo određivanje glasi:

$$MHR_i = \int_{-\infty}^{\infty} g^i \cdot H(g) dg = \int_{-\infty}^{\infty} g^i \cdot \Phi\left(\frac{g - \mu_1}{\sigma_1}\right) \cdot \Phi\left(\frac{\mu_2 - g}{\sigma_2}\right) dg, \quad i = 0 \dots N_{rsm} \quad (4.40)$$

gdje je  $N_{rsm}$  ukupan broj momenata koje mora zadovoljiti FGV funkcije performanse.

Ove integrale je moguće odrediti koristeći numeričke metode. Međutim, s obzirom da je potrebno definirati granice integracije različite od  $-\infty$  i  $+\infty$ , može se dogoditi da je u integracijskoj točki, koja novo definirani interval dijeli na pola, vrijednost podintegralne funkcije manja od definirane tolerance. U tom slučaju se dobije nekorektna vrijednost integrala, najčešće oko nule. Stoga se u okviru ovog doktorskog rada odredilo analitičke izraze koji predstavljaju rješenja tih integrala. Izvod za  $MHR_0$  i  $MHR_1$  te konačni analitički izrazi za proizvoljni  $MHR_i$  su prikazani u Poglavljima 4.4.1 i 4.4.2.

#### 4.4.1 Izvod i konačni analitički izrazi za nulti i prvi statistički moment oko ishodišta funkcije $H(g)$

U ovom poglavlju su prikazani izvodi za  $MHr_0$  i  $MHr_1$ , dok se jednaka metodologija može primijeniti za proizvoljni  $MHr_i$ .  $MHr_0$  je nulti, a  $MHr_1$  prvi statistički moment oko ishodišta funkcije  $H(g)$ . Fizikalno,  $MHr_0$  predstavlja površinu, dok  $MHr_1$  predstavlja težište površine ispod krivulje funkcije  $H(g)$ .  $MHr_0$  i  $MHr_1$  su definirani sljedećim izrazima koji proizlaze iz izraza (4.40):

$$MHr_0 = \int_{-\infty}^{\infty} H(g) dg = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi\left(\frac{g - \mu_1}{\sigma_1}\right) \cdot \Phi\left(\frac{\mu_2 - g}{\sigma_2}\right) dg \quad (4.41)$$

$$MHr_1 = \int_{-\infty}^{\infty} g \cdot H(g) dg = \int_{-\infty}^{\infty} g \cdot \Phi\left(\frac{g - \mu_1}{\sigma_1}\right) \cdot \Phi\left(\frac{\mu_2 - g}{\sigma_2}\right) dg \quad (4.42)$$

Koristeći metodu parcijalne integracije za koju vrijedi:

$$\int r \cdot ds = r \cdot s - \int s \cdot dr \quad (4.43)$$

pri čemu je u izrazu (4.41):

$$\begin{aligned} r &= \Phi\left(\frac{g - \mu_1}{\sigma_1}\right) & ds &= \Phi\left(\frac{\mu_2 - g}{\sigma_2}\right) dg \\ dr &= \frac{1}{\sigma_1} \cdot \phi\left(\frac{g - \mu_1}{\sigma_1}\right) dg & s &= (g - \mu_2) \cdot \Phi\left(\frac{\mu_2 - g}{\sigma_2}\right) - \sigma_2 \cdot \phi\left(\frac{\mu_2 - g}{\sigma_2}\right) \end{aligned} \quad (4.44)$$

a u izrazu (4.42):

$$\begin{aligned} r &= g \cdot \Phi\left(\frac{g - \mu_1}{\sigma_1}\right) & ds &= \Phi\left(\frac{\mu_2 - g}{\sigma_2}\right) dg \\ dr &= \Phi\left(\frac{g - \mu_1}{\sigma_1}\right) + \frac{g}{\sigma_1} \cdot \phi\left(\frac{g - \mu_1}{\sigma_1}\right) dg & s &= (g - \mu_2) \cdot \Phi\left(\frac{\mu_2 - g}{\sigma_2}\right) - \sigma_2 \cdot \phi\left(\frac{\mu_2 - g}{\sigma_2}\right) \end{aligned} \quad (4.45)$$

za izraze (4.41) i (4.42) vrijedi:

$$\begin{aligned}
 MHR_0 = & \left\{ \Phi\left(\frac{g-\mu_1}{\sigma_1}\right) \cdot \left[ (g-\mu_2) \cdot \Phi\left(\frac{\mu_2-g}{\sigma_2}\right) - \sigma_2 \cdot \phi\left(\frac{\mu_2-g}{\sigma_2}\right) \right] \right\} \Bigg|_{-\infty}^{\infty} - \\
 & \int_{-\infty}^{\infty} \left[ (g-\mu_2) \cdot \Phi\left(\frac{\mu_2-g}{\sigma_2}\right) - \sigma_2 \cdot \phi\left(\frac{\mu_2-g}{\sigma_2}\right) \right] \cdot \left[ \frac{1}{\sigma_1} \cdot \phi\left(\frac{g-\mu_1}{\sigma_1}\right) \right] dg
 \end{aligned} \quad (4.46)$$

$$\begin{aligned}
 MHR_1 = & \left\{ \left[ g \cdot \Phi\left(\frac{g-\mu_1}{\sigma_1}\right) \right] \cdot \left[ (g-\mu_2) \cdot \Phi\left(\frac{\mu_2-g}{\sigma_2}\right) - \sigma_2 \cdot \phi\left(\frac{\mu_2-g}{\sigma_2}\right) \right] \right\} \Bigg|_{-\infty}^{\infty} - \\
 & \int_{-\infty}^{\infty} \left[ (g-\mu_2) \cdot \Phi\left(\frac{\mu_2-g}{\sigma_2}\right) - \sigma_2 \cdot \phi\left(\frac{\mu_2-g}{\sigma_2}\right) \right] \cdot \left[ \Phi\left(\frac{g-\mu_1}{\sigma_1}\right) + \frac{g}{\sigma_1} \cdot \phi\left(\frac{g-\mu_1}{\sigma_1}\right) \right] dg
 \end{aligned} \quad (4.47)$$

gdje je  $\phi(\cdot)$  standardna normalna funkcija gustoće vjerojatnosti (srednja vrijednost jednaka 0, a standardna devijacija jednaka 1).

S obzirom da vrijedi:

$$\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}t^2} \Rightarrow \begin{cases} \phi(-\infty) = 0 \\ \phi(\infty) = 0 \end{cases} \quad (4.48)$$

$$\Phi(t) = \int_{-\infty}^t \phi(t_1) dt_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^t e^{-\frac{1}{2}t_1^2} dt_1 \Rightarrow \begin{cases} \Phi(-\infty) = 0 \\ \Phi(\infty) = 1 \end{cases} \quad (4.49)$$

prvi članovi u izrazima (4.46) i (4.47) iščezavaju, tj. jednaki su nula te se stoga ti izrazi pojednostavljuju:

$$MHR_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \sigma_2 \cdot \phi\left(\frac{\mu_2-g}{\sigma_2}\right) - (g-\mu_2) \cdot \Phi\left(\frac{\mu_2-g}{\sigma_2}\right) \right] \cdot \left[ \frac{1}{\sigma_1} \cdot \phi\left(\frac{g-\mu_1}{\sigma_1}\right) \right] dg \quad (4.50)$$

$$MHR_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \sigma_2 \cdot \phi\left(\frac{\mu_2-g}{\sigma_2}\right) - (g-\mu_2) \cdot \Phi\left(\frac{\mu_2-g}{\sigma_2}\right) \right] \cdot \left[ \Phi\left(\frac{g-\mu_1}{\sigma_1}\right) + \frac{g}{\sigma_1} \cdot \phi\left(\frac{g-\mu_1}{\sigma_1}\right) \right] dg \quad (4.51)$$

Primjenjujući pravilo za integral sume i razlike, izrazi (4.50) i (4.51) postaju:

$$\begin{aligned}
 MHR_0 = & \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \phi\left(\frac{g-\mu_1}{\sigma_1}\right) \cdot \phi\left(\frac{\mu_2-g}{\sigma_2}\right) dg + \frac{\mu_2}{\sigma_1} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \phi\left(\frac{g-\mu_1}{\sigma_1}\right) \cdot \Phi\left(\frac{\mu_2-g}{\sigma_2}\right) dg - \\
 & \frac{1}{\sigma_1} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} g \cdot \phi\left(\frac{g-\mu_1}{\sigma_1}\right) \cdot \Phi\left(\frac{\mu_2-g}{\sigma_2}\right) dg
 \end{aligned} \quad (4.52)$$



$$\begin{aligned}
 MHR_1 = & \frac{\mu_2}{\sigma_1} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} g \cdot \phi\left(\frac{g-\mu_1}{\sigma_1}\right) \cdot \Phi\left(\frac{\mu_2-g}{\sigma_2}\right) dg + \sigma_2 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \Phi\left(\frac{g-\mu_1}{\sigma_1}\right) \cdot \phi\left(\frac{\mu_2-g}{\sigma_2}\right) dg + \\
 & \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} g \cdot \phi\left(\frac{g-\mu_1}{\sigma_1}\right) \cdot \phi\left(\frac{\mu_2-g}{\sigma_2}\right) dg - \frac{1}{\sigma_1} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} g^2 \cdot \phi\left(\frac{g-\mu_1}{\sigma_1}\right) \cdot \Phi\left(\frac{\mu_2-g}{\sigma_2}\right) dg + \quad (4.53) \\
 & \mu_2 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \Phi\left(\frac{g-\mu_1}{\sigma_1}\right) \cdot \Phi\left(\frac{\mu_2-g}{\sigma_2}\right) dg - \int_{-\infty}^{\infty} g \cdot \Phi\left(\frac{g-\mu_1}{\sigma_1}\right) \cdot \Phi\left(\frac{\mu_2-g}{\sigma_2}\right) dg
 \end{aligned}$$

Ako na sljedeći način označimo integrale iz izraza (4.52) i (4.53):

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \phi\left(\frac{g-\mu_1}{\sigma_1}\right) \cdot \phi\left(\frac{\mu_2-g}{\sigma_2}\right) dg \quad (4.54)$$

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \phi\left(\frac{g-\mu_1}{\sigma_1}\right) \cdot \Phi\left(\frac{\mu_2-g}{\sigma_2}\right) dg \quad (4.55)$$

$$I_3 = \int_{-\infty}^{\infty} g \cdot \phi\left(\frac{g-\mu_1}{\sigma_1}\right) \cdot \Phi\left(\frac{\mu_2-g}{\sigma_2}\right) dg \quad (4.56)$$

$$I_4 = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi\left(\frac{g-\mu_1}{\sigma_1}\right) \cdot \phi\left(\frac{\mu_2-g}{\sigma_2}\right) dg \quad (4.57)$$

$$I_5 = \int_{-\infty}^{\infty} g \cdot \phi\left(\frac{g-\mu_1}{\sigma_1}\right) \cdot \phi\left(\frac{\mu_2-g}{\sigma_2}\right) dg \quad (4.58)$$

$$I_6 = \int_{-\infty}^{\infty} g^2 \cdot \phi\left(\frac{g-\mu_1}{\sigma_1}\right) \cdot \Phi\left(\frac{\mu_2-g}{\sigma_2}\right) dg \quad (4.59)$$

te uzimajući u obzir da je u izrazu (4.53) predzadnji integral jednak  $MHR_0$ , vidi izraz (4.41), a zadnji integral jednak  $MHR_1$ , vidi izraz (4.42), za izraze (4.52) i (4.53) vrijedi:

$$MHR_0 = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \cdot I_1 + \frac{\mu_2}{\sigma_1} \cdot I_2 - \frac{1}{\sigma_1} \cdot I_3 \quad (4.60)$$

$$MHR_1 = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{\mu_2}{\sigma_1} \cdot I_3 + \sigma_2 \cdot I_4 + \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \cdot I_5 - \frac{1}{\sigma_1} \cdot I_6 + \mu_2 \cdot MHR_0 \right) \quad (4.61)$$

**Analitički izraz za  $I_1$**

$$I_1 = \frac{\sigma_1 \cdot \sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} \cdot \phi \left( \frac{\mu_2 - \mu_1}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} \right) \quad (4.62)$$

Izvod analitičkog izraza za  $I_1$  je prikazan u Poglavlju 8.1.1.

**Analitički izraz za  $I_2$**

$$I_2 = \sigma_1 \cdot \Phi \left( \frac{\mu_2 - \mu_1}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} \right) \quad (4.63)$$

Izvod analitičkog izraza za  $I_2$  je prikazan u Poglavlju 8.1.2.

**Analitički izraz za  $I_3$**

$$I_3 = \mu_1 \sigma_1 \cdot \Phi \left( \frac{\mu_2 - \mu_1}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} \right) - \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2} \cdot \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} \cdot \phi \left( \frac{\mu_2 - \mu_1}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} \right) \quad (4.64)$$

Izvod analitičkog izraza za  $I_3$  je prikazan u Poglavlju 8.1.3.

**Analitički izraz za  $I_4$**

$$I_4 = \sigma_2 \cdot \Phi \left( \frac{\mu_2 - \mu_1}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} \right) \quad (4.65)$$

Izvod analitičkog izraza za  $I_4$  je prikazan u Poglavlju 8.1.4.

**Analitički izraz za  $I_5$**

$$I_5 = \frac{\mu_1 \sigma_2^2 + \mu_2 \sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \cdot \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} \cdot \phi \left( \frac{\mu_2 - \mu_1}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} \right) \quad (4.66)$$

Izvod analitičkog izraza za  $I_5$  je prikazan u Poglavlju 8.1.5.

### Analitički izraz za $I_6$

$$I_6 = \sigma_1 \cdot \left[ \left( \mu_1^2 + \sigma_1^2 \right) \cdot \Phi \left( \frac{\mu_2 - \mu_1}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} \right) - \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \cdot \left( \mu_1 + \frac{\mu_1 \sigma_2^2 + \mu_2 \sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \right) \cdot \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} \cdot \phi \left( \frac{\mu_2 - \mu_1}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} \right) \right] \quad (4.67)$$

Izvod analitičkog izraza za  $I_6$  je prikazan u Poglavlju 8.1.6.

### Analitički izraz za nulti statistički moment oko ishodišta funkcije $H(g)$

Nakon uvrštavanja konačnih analitičkih izraza za  $I_1$ ,  $I_2$  i  $I_3$ , vidi izraze (4.62), (4.63) i (4.64), u izraz (4.60), konačni analitički izraz za  $MHR_0$  glasi:

$$MHR_0 = (\mu_2 - \mu_1) \cdot \Phi \left( \frac{\mu_2 - \mu_1}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} \right) + \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \cdot \phi \left( \frac{\mu_2 - \mu_1}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} \right) \quad (4.68)$$

### Analitički izraz za prvi statistički moment oko ishodišta funkcije $H(g)$

Nakon uvrštavanja konačnih analitičkih izraza za  $I_3$ ,  $I_4$ ,  $I_5$ ,  $I_6$  i  $MHR_0$ , vidi izraze (4.64), (4.65), (4.66), (4.67) i (4.68), u izraz (4.61), konačni analitički izraz za  $MHR_1$  glasi:

$$MHR_1 = \frac{1}{2} \cdot \left[ \left( \mu_2^2 - \mu_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1^2 \right) \cdot \Phi \left( \frac{\mu_2 - \mu_1}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} \right) + (\mu_1 + \mu_2) \cdot \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \cdot \phi \left( \frac{\mu_2 - \mu_1}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} \right) \right] \quad (4.69)$$

#### 4.4.2 Konačni analitički izraz za proizvoljni statistički moment oko ishodišta funkcije $H(g)$

Primjenjujući istu metodologiju kao kod izvoda analitičkih izraza za  $MHR_0$  i  $MHR_1$ , u okviru ovog doktorskog rada izvedeni su i analitički izrazi za proizvoljni ( $i$ ti) statistički moment oko ishodišta funkcije  $H(g)$  te je ovdje prikazan samo konačan analitički izraz:

$$MHR_i = \frac{1}{i+1} \cdot \left[ A_i \cdot \Phi \left( \frac{\mu_2 - \mu_1}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} \right) + B_i \cdot \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} \cdot \phi \left( \frac{\mu_2 - \mu_1}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} \right) \right] \quad (4.70)$$

gdje su  $A_i$  i  $B_i$  sume definirane sljedećim izrazima:

$$A_i = \sum_{j=0}^{tr[0.5(i+1)]} [C_{j,i} \cdot (\mu_2^{i-2 \cdot j+1} \cdot \sigma_2^{2 \cdot j} - \mu_1^{i-2 \cdot j+1} \cdot \sigma_1^{2 \cdot j})] \quad (4.71)$$

$$B_i = \sum_{j=0}^{tr[0.5i]} \sum_{n=0}^j D_{n,j,i} \cdot \left( \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} \right)^{2n} \quad (4.72)$$

U izrazu (4.72)  $D_{n,j,i}$  također predstavlja sumu koja je definirana sljedećim izrazom:

$$D_{n,j,i} = \sum_{m=0}^{i-2j} \left[ F_{n,m,j,i} \cdot \left( \frac{\mu_1 \sigma_2^2 + \mu_2 \sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \right)^m \cdot \left( \mu_1^{i-2 \cdot j-m} \cdot \frac{\sigma_1^{2(j-n)+1}}{\sigma_2} + \mu_2^{i-2 \cdot j-m} \cdot \frac{\sigma_2^{2(j-n)+1}}{\sigma_1} \right) \right] \quad (4.73)$$

dok u izrazima (4.71) i (4.73),  $C_{j,i}$  i  $F_{n,m,j,i}$  predstavljaju koeficijente koji su definirani sljedećim rekurzivnim formulama:

$$C_{j,i} = \begin{cases} 1 & \text{za } j=0 \\ 0 & \text{za } i < 2 \cdot j - 1 \\ \sum_{k=0}^{i-1} (k+1) & \text{za } j=1 \\ (i-2 \cdot j+2) \cdot C_{j-1,i-1} + C_{j,i-1} & \text{za } j > 1 \end{cases} \quad \left. \begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix} \right\} \begin{matrix} \\ \text{za } i \geq 2 \cdot j - 1 \\ \end{matrix} \quad \left. \begin{matrix} \\ \\ \end{matrix} \right\} \text{za } j \neq 0 \quad (4.74)$$

$$F_{n,m,j,i} = \begin{cases} 0 & \text{za } j < n \\ 0 & \text{za } i < m + 2 \cdot j \\ 1 & \text{za } j=0 \\ C_{n,2-n+m-1} & \text{za } j=n \\ i \cdot F_{n,m,j-1,i-2} + F_{n,m,j,i-1} & \text{za } j \neq n \end{cases} \quad \left. \begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix} \right\} \begin{matrix} \\ \text{za } j \neq 0 \\ \end{matrix} \quad \left. \begin{matrix} \\ \\ \end{matrix} \right\} \text{za } j \geq n \quad (4.75)$$

### 4.4.3 Određivanje parametara funkcije gustoće vjerojatnosti funkcije performanse

Koristeći izraze za  $MHr_i$ , četiri parametra se mogu odrediti iz sljedećeg nelinearnog sustava jednažbi:

$$\frac{MHr_i}{MHr_0} - MGr_i = 0, \quad i = 1 \dots N_{rsm} \quad (4.76)$$

gdje je  $MGr_i$   $i$ ti statistički moment oko ishodišta FGV funkcije performanse (određen metodom smanjenja dimenzionalnosti ili nekom drugom metodom), a  $N_{rsm} \geq 4$  je ukupan broj momenata koje mora zadovoljiti FGV funkcije performanse.

Sustav od  $N_{rsm}$  nelinearnih jednažbi je moguće riješiti koristeći na primjer Levenberg-Marquardtovu numeričku metodu koja koristi Jacobijevu matricu pri traženju rješenja.

### 4.4.4 Određivanje vjerojatnosti oštećenja

Kad je FGV funkcije performanse u potpunosti definirana s četiri parametra ( $\mu_1, \mu_2, \sigma_1$  i  $\sigma_2$ ) tada se aproksimirana vrijednost vjerojatnosti oštećenja određuje integriranjem navedene FGV u području od  $-\infty$  do 0, što je prikazano sljedećim izrazom:

$$P_F \approx \int_{-\infty}^0 f_G(g) dg = \frac{\int_{-\infty}^0 H(g) dg}{\int_{-\infty}^{\infty} H(g) dg} = \frac{1}{MHr_0} \cdot \int_{-\infty}^0 \Phi\left(\frac{g - \mu_1}{\sigma_1}\right) \cdot \Phi\left(\frac{\mu_2 - g}{\sigma_2}\right) dg \quad (4.77)$$

Analitičko rješenje krajnje desnog integrala u izrazu (4.77) nije moguće odrediti te je potrebno koristiti neku od numeričkih metoda.

Na ovaj način se određivanje vrijednosti  $N$ -dimenzionalnog integrala s nelinearnom granicom područja integracije, vidi izraz (2.1), zamijenilo određivanjem jednodimenzionalnog integrala gdje je podintegralna funkcija modelirala cijelu složenu strukturu problema.

## 4.5 Određivanje senzitivnosti i projektne točke

U analizi pouzdanosti, senzitivnost vjerojatnosti oštećenja u odnosu na sve slučajne varijable se označava vektorom  $\boldsymbol{\alpha} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_N\}^T$ . Predložena metoda vektor senzitivnosti određuje koristeći vrijednosti funkcije performanse koje su prethodno određene univarijantnom metodom smanjenja dimenzionalnosti (nema dodatnih evaluacija funkcije performanse) i upotrebom metode konačnih razlika. Izraz za određivanje senzitivnosti vjerojatnosti oštećenja s obzirom na  $i$ tu slučajnu varijablu glasi:

$$\alpha_i = - \frac{\sum_{j=1}^{N_{ip}-1} \frac{G_{i,j+1} - G_{i,j}}{u_{j+1} - u_j}}{\sqrt{\sum_{k=1}^N \left( \sum_{j=1}^{N_{ip}-1} \frac{G_{k,j+1} - G_{k,j}}{u_{j+1} - u_j} \right)^2}} \quad , \quad i = 1, \dots, N \quad (4.78)$$

gdje je  $G_{i,j}$  vrijednost funkcije performanse kad je  $i$ ta slučajna varijabla postavljena u  $j$ tu integracijsku točku, dok su ostale slučajne varijable postavljene u srednju vrijednost;  $u_j$  je  $j$ ta integracijska točka u  $u$ -prostoru;  $N$  je broj slučajnih varijabli, a  $N_{ip}$  broj integracijskih točaka.

Projektna točka (*eng. most probable failure point*)  $\mathbf{u}^* = \{u_1^*, \dots, u_N^*\}^T$ , tj. točka na plohi gdje je funkcija performanse jednaka nuli, a koja je najbliža ishodištu u  $u$ -prostoru, se određuje prema standardnom izrazu:

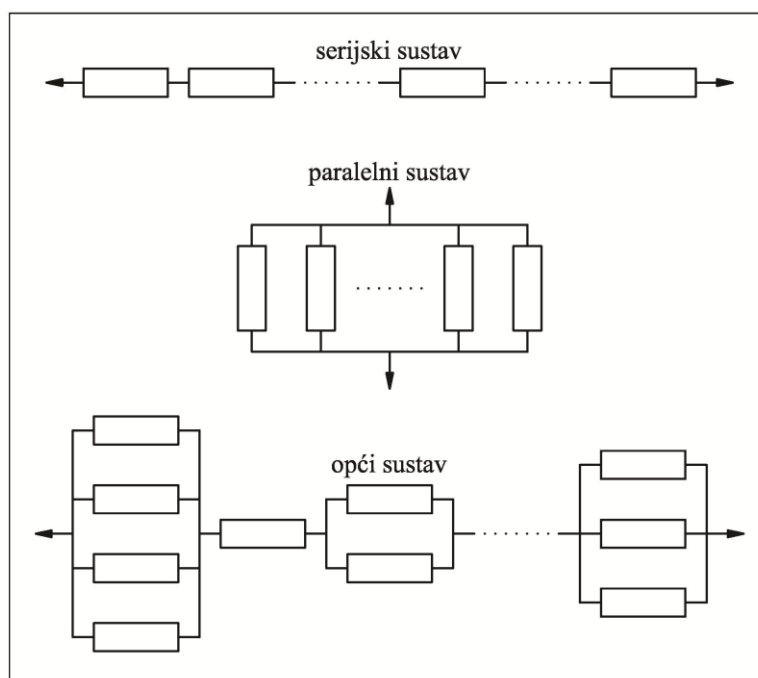
$$u_i^* = \beta \cdot \alpha_i \quad , \quad i = 1, \dots, N \quad (4.79)$$

gdje je  $\beta$  indeks pouzdanosti (*eng. reliability index*) definiran sljedećim izrazom:

$$\beta = -\Phi^{-1}(P_F) \quad (4.80)$$

## 4.6 Sistemska pouzdanost

U prethodnim poglavljima pri analizi pouzdanosti se razmatrao jedan kriterij, tj. jedan oblik oštećenja (*eng. single failure mode*) definiran jednom funkcijom performanse. Međutim, za većinu konstrukcija moguće je nekoliko različitih oblika oštećenja (*eng. multiple failure modes*), tj. postoji mogućnost da konstrukcija bude oštećena na jedan ili više načina te tada govorimo o sistemske pouzdanosti (*eng. system reliability*). Sistem (Slika 4.7) može biti serijski, paralelni ili opći (kombinacija serijskih i paralelnih podsustava).



Slika 4.7 Prikaz različitih grupa sistema.

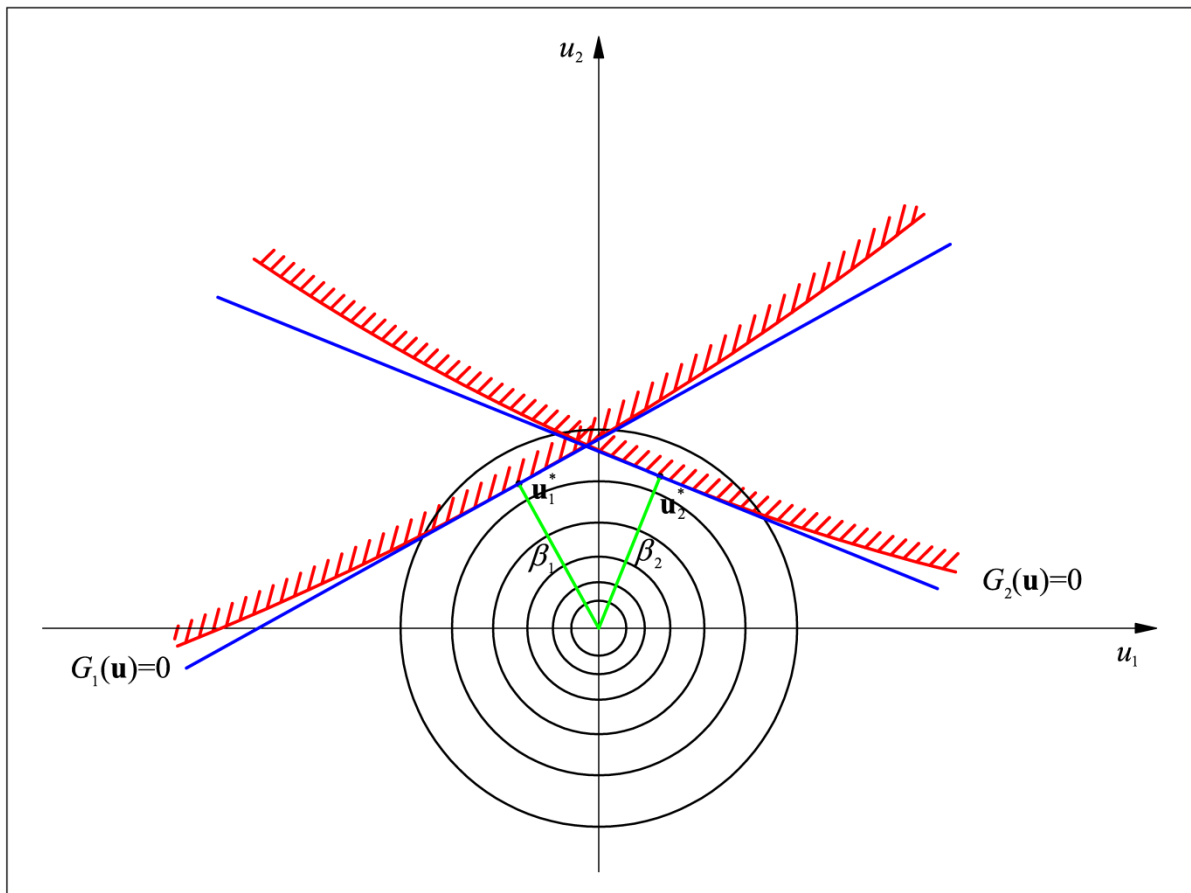
U slučaju sistemske pouzdanosti, važno je odrediti vjerojatnost oštećenja za svaki oblik oštećenja (koristeći predloženu metodu), kao i korelacije između svakog para oblika oštećenja (*eng. modal correlations*) koristeći prethodno određene vrijednosti funkcija performansi.

Kao što je prethodno spomenuto, ukupan broj evaluacija za svaku funkciju performanse pri određivanju statističkih momenata oko ishodišta koristeći univarijatnu metodu smanjenja dimenzionalnosti je jednak  $N \cdot N_{ip} + 1$ , gdje je  $N$  broj slučajnih varijabli,  $N_{ip}$  broj integracijskih točaka, a 1 predstavlja evaluaciju funkcije performanse za slučaj kad su sve slučajne varijable postavljene na srednju vrijednost. Korelacija između  $i$ tog i  $j$ tog oblika oštećenja (funkcije performanse) se može odrediti koristeći sljedeći izraz:

$$\gamma_{ij} = \frac{\sum_{p=1}^N \sum_{r=1}^{N_p} [(G_{i,pr} - \mu_{G_i}) \cdot (G_{j,pr} - \mu_{G_j})]}{\sqrt{\left[ \sum_{p=1}^N \sum_{r=1}^{N_p} (G_{i,pr} - \mu_{G_i})^2 \right] \cdot \left[ \sum_{p=1}^N \sum_{r=1}^{N_p} (G_{j,pr} - \mu_{G_j})^2 \right]}} \quad (4.81)$$

gdje je  $G_{i,pr}$  vrijednost *ite* funkcije performanse za slučaj kad je *pta* slučajna varijabla postavljena u *r*tu integracijsku točku, dok su ostale slučajne varijable postavljene na srednju vrijednost, a  $\mu_{G_i} = G_i(\mu_{X_1}, \dots, \mu_{X_N})$  je vrijednost *ite* funkcije performanse za slučaj kad su sve slučajne varijable postavljene na srednju vrijednost.

Slika 4.8 prikazuje sustav od dvije funkcije performanse  $G_1(\mathbf{U})$  i  $G_2(\mathbf{U})$  (krivulje prikazane crvenom bojom) prikazan u  $u$ -prostoru. U projektnim točkama  $\mathbf{u}_1^*$  i  $\mathbf{u}_2^*$  prikazana je linearizacija funkcija performansi (plave linije). Na slici su naznačeni i indeksi pouzdanosti  $\beta_1$  i  $\beta_2$  koji predstavljaju najkraću udaljenost od ishodišta do prve i druge funkciju performanse (zelene linije).



Slika 4.8 Sistemska pouzdanost.

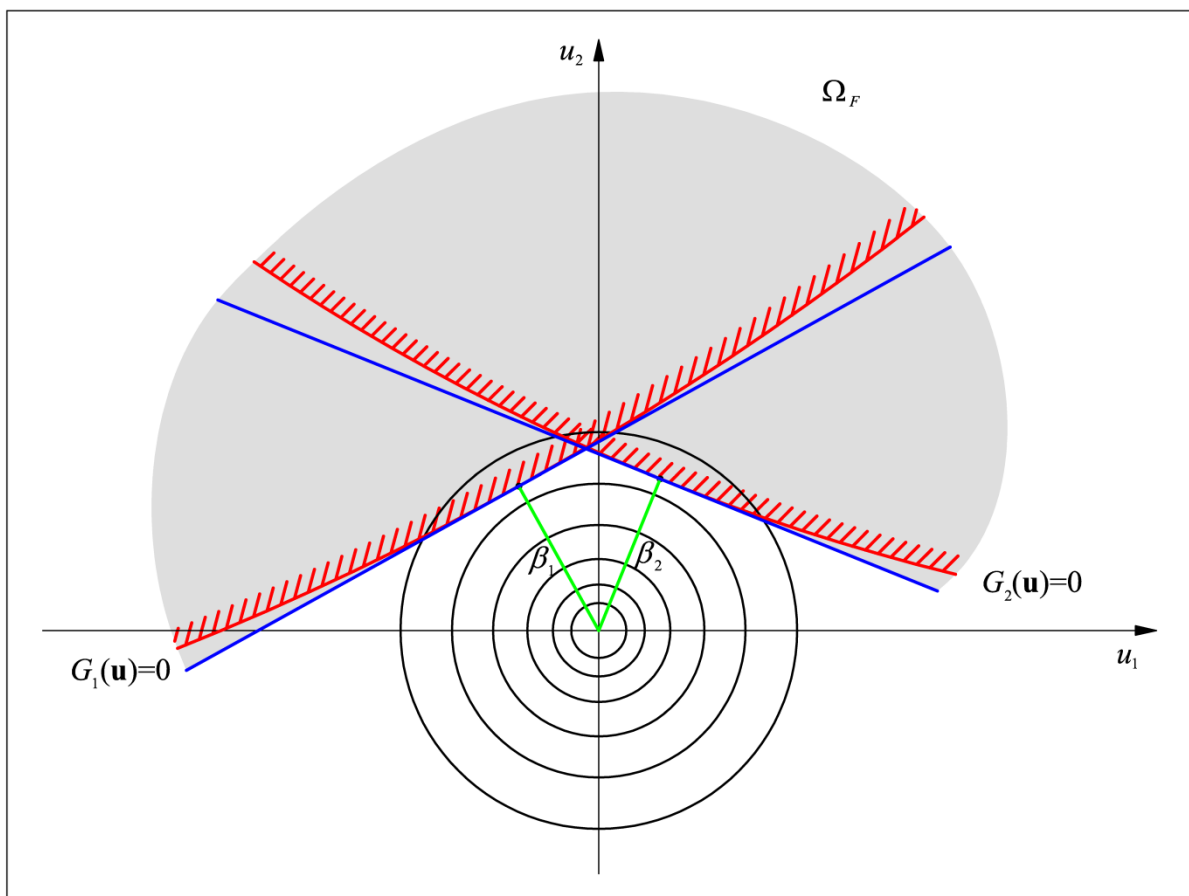


Utjecaj korelacija između pojedinih oblika oštećenja je veoma važan što je prikazano u narednim poglavljima (Poglavlja 4.6.1 i 4.6.2). Naime, korelacije direktno ulaze u izraze za određivanje vjerojatnosti oštećenja kod sistemske pouzdanosti.

#### 4.6.1 Serijski sustav

Kod serijskog sustava, kad govorimo o pouzdanosti konstrukcija, oštećenje jednog elementa konstrukcije uzrokuje oštećenje cijele konstrukcije. Primjer toga je statički određena rešetkasta konstrukcija izrađena od  $N_e$  štapnih elemenata. Pri tome svaki element ima dva moguća oblika oštećenja: popuštanje i izvijanje. Stoga je ukupan broj oblika oštećenja (kriterija, funkcija performanse)  $N_k$  koji čine serijski sustav jednak  $N_k = 2N_e$ . Vjerojatnost oštećenja serijskog sustava od  $N_k$  oblika oštećenja je definirana sljedećim izrazom:

$$P_{Fs} = P\left(\bigcup_{i=1}^{N_k}\{G_i(\mathbf{X}) < 0\}\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{N_k}\{G_i(\mathbf{U}) < 0\}\right) \quad (4.82)$$



Slika 4.9 Grafički prikaz područja oštećenja u  $u$ -prostoru za serijski sustav.

Slika 4.9 prikazuje aproksimirano područje oštećenja  $\Omega_F$  u  $u$ -prostoru za serijski sustav definiran pomoću dvije, u projektnim točkama  $\mathbf{u}_1^*$  i  $\mathbf{u}_2^*$  linearizirane, funkcije performanse (plave linije). Na slici su naznačeni i indeksi pouzdanosti  $\beta_1$  i  $\beta_2$ .

Aproksimirana vrijednost vjerojatnost oštećenja serijskog sustava može se odrediti koristeći izraz za multivarijatnu normalnu razdiobu. Pri tom se u obzir uzimaju samo korelacije između svakog para oblika oštećenja, a granice integracije za  $i$ ti oblik oštećenja su od  $-\infty$  do  $\beta_i$ :

$$P_{Fs} = 1 - \frac{1}{\sqrt{|\Sigma|} \cdot (2\pi)^{N_k}} \cdot \int_{-\infty}^{\beta_1} \int_{-\infty}^{\beta_2} \dots \int_{-\infty}^{\beta_{N_k}} e^{-\frac{1}{2}\theta^T \Sigma^{-1} \theta} d\theta \quad (4.83)$$

gdje je  $N_k$  broj oblika oštećenja (funkcija performanse),  $\beta_i = -\Phi^{-1}(P_{Fi})$ , a  $\Sigma$  je  $N_k \times N_k$  simetrična pozitivno definitna matrica kovarijance.

U okviru ovog rada su prikazani primjeri systemske pouzdanosti serijskog sustava (vidi Poglavlja 6.1.5 i 6.2.2) u kojima se koriste Ditlevsenove granice vjerojatnosti oštećenja (granice drugog reda). Iz tog su razloga ovdje prikazani izrazi za određivanje donje i gornje Ditlevsenove granice vjerojatnosti oštećenja serijskog sustava.

### **Ditlevsenova donja granica**

$$P_{Fs} \geq \Phi(-\beta_1) + \sum_{i=2}^{N_k} \max \left\{ \Phi(-\beta_i) - \sum_{j=1}^{i-1} \Phi_2(-\beta_i, -\beta_j, \gamma_{ij}), 0 \right\} \quad (4.84)$$

### **Ditlevsenova gornja granica**

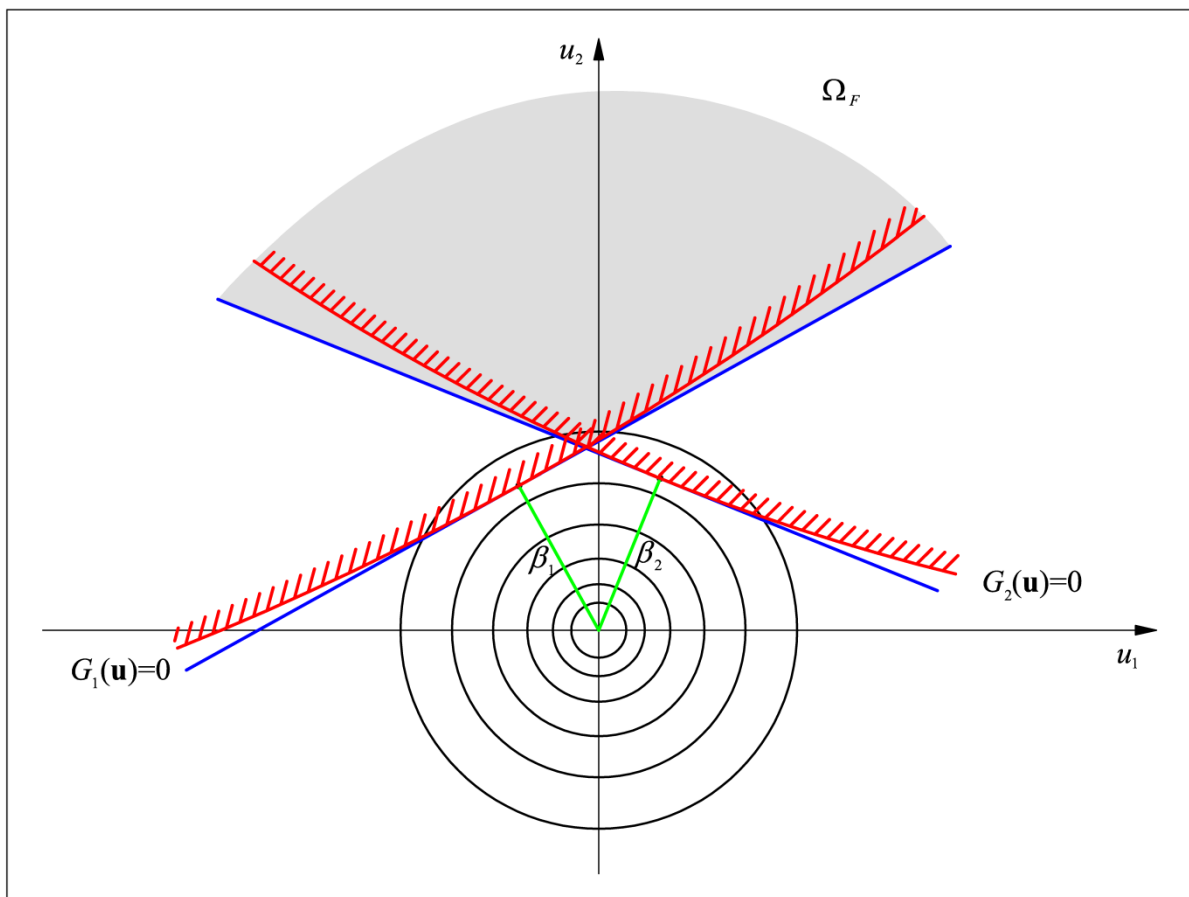
$$P_{Fs} \leq \sum_{i=1}^{N_k} \Phi(-\beta_i) - \sum_{i=2}^{N_k} \max_{j < i} \left\{ \Phi_2(-\beta_i, -\beta_j, \gamma_{ij}) \right\} \quad (4.85)$$

U izrazima (4.84) i (4.85),  $\Phi_2(\cdot, \cdot, \cdot)$  predstavlja integral dvodimenzionalne (bivarijatne) normalne razdiobe.

#### 4.6.2 Paralelni sustav

Kod paralelnog sustava, kad govorimo o pouzdanosti konstrukcija, oštećenje jednog strukturnog elementa ne uzrokuje nužno i oštećenje cijele konstrukcije. Ilustracija toga je statički neodređena rešetkasta konstrukcija koja ima sposobnost prenošenja opterećenja i ako je neki strukturni element oštećen. Razlog tome je što takve konstrukcije imaju sposobnost preraspodjele opterećenja nakon što se neki strukturni element ošteti. Vjerojatnost oštećenja paralelnog sustava od  $N_k$  oblika oštećenja je definirana sljedećim izrazom:

$$P_{Fp} = P\left(\bigcap_{i=1}^{N_k}\{G_i(\mathbf{X}) < 0\}\right) = P\left(\bigcap_{i=1}^{N_k}\{G_i(\mathbf{U}) < 0\}\right) \quad (4.86)$$



Slika 4.10 Grafički prikaz područja oštećenja u  $u$ -prostoru za paralelni sustav.

Slika 4.10 prikazuje aproksimirano područje oštećenja  $\Omega_F$  u  $u$ -prostoru za paralelni sustav definiran pomoću dvije, u projektnim točkama  $\mathbf{u}_1^*$  i  $\mathbf{u}_2^*$  linearizirane, funkcije performanse (plave linije). Na slici su naznačeni i indeksi pouzdanosti  $\beta_1$  i  $\beta_2$ .

Aproksimirana vrijednost vjerojatnost oštećenja paralelnog sustava može se odrediti koristeći izraz za multivarijatnu normalnu razdiobu. Pri tom se u obzir uzimaju samo korelacije između svakog para oblika oštećenja, a granice integracije za  $i$ ti oblik oštećenja su od  $\beta_i$  do  $\infty$ :

$$P_{Fp} = \frac{1}{\sqrt{|\Sigma|} \cdot (2\pi)^{N_k}} \cdot \int_{\beta_1}^{\infty} \dots \int_{\beta_i}^{\infty} \dots \int_{\beta_{N_k}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} \cdot \theta^T \cdot \Sigma^{-1} \cdot \theta} d\theta \quad (4.87)$$

gdje je  $N_k$  broj oblika oštećenja (funkcija performanse),  $\beta_i = -\Phi^{-1}(P_{Fi})$ , a  $\Sigma$  je  $N_k \times N_k$  simetrična pozitivno definitna matrica kovarijance.

## 5 Računalni program za analizu pouzdanosti

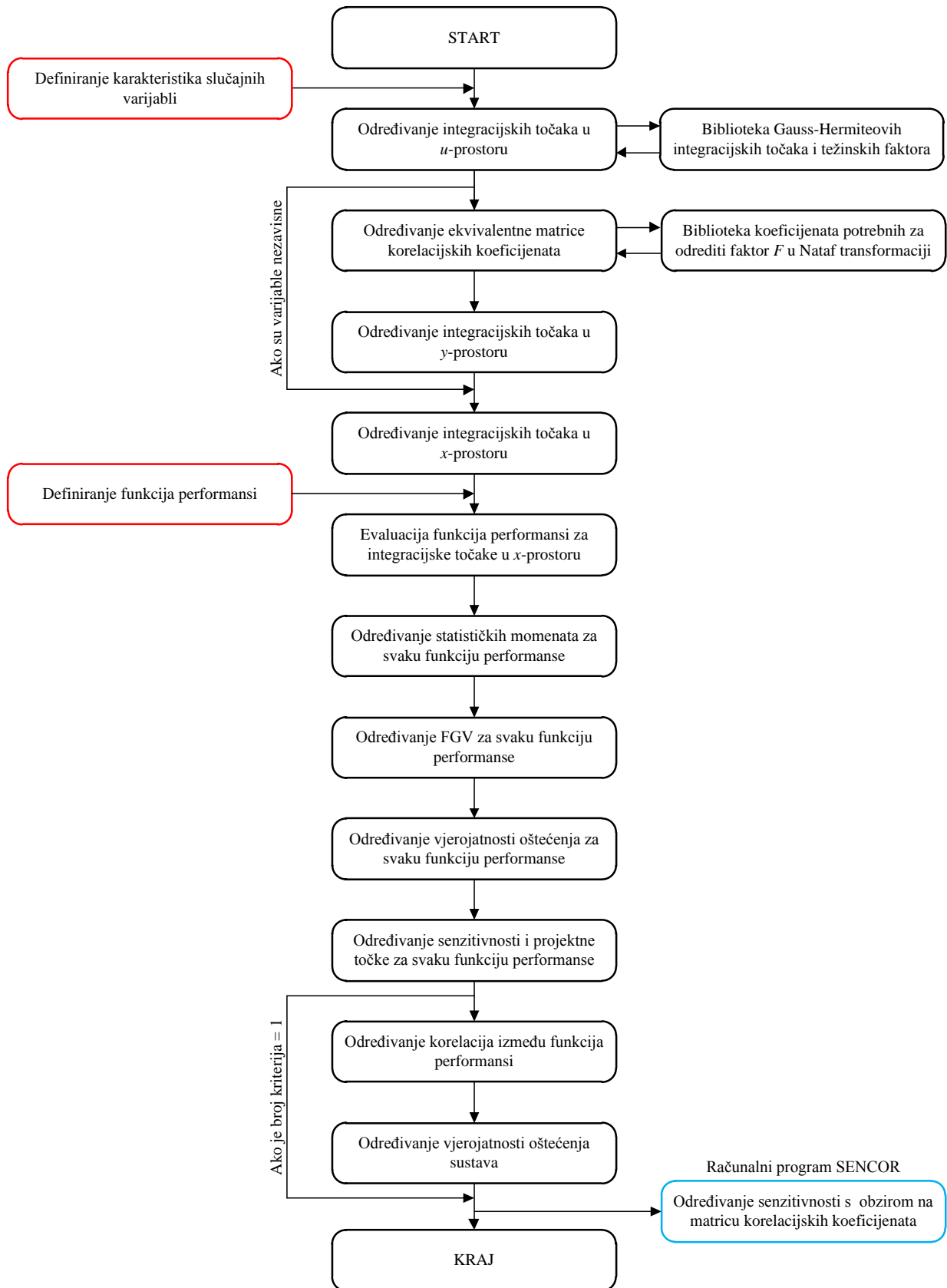
### FASTREL

U okviru ovog doktorskog rada razvijen je računalni program za analizu pouzdanosti FASTREL (*eng. **FAST RELiability***) u kojem je implementirana predložena metodologija za analizu pouzdanosti. Pri tom se koristilo programsko okruženje Microsoft Visual Studio 2008 te programski jezik Intel Fortran Composer XE. Slika 5.1 prikazuje dijagram toka računalnog programa FASTREL.

Računalnom programu FASTREL je potrebno dostaviti podatke kojim se definira problem analize pouzdanosti. Podaci su podijeljeni u dvije cjeline (u dijagramu toka prikazano crvenom bojom): podaci potrebni za definiranje karakteristika slučajnih varijabli (srednja vrijednost, koeficijent varijacije ili srednja vrijednost, vrsta razdiobe, korelacije između slučajnih varijabli) i podaci potrebni za definiranje kriterija (funkcija performansi). Kada su dostavljeni svi podaci, tijekom analize je sljedeći:

- Određuju se integracijske točke u  $u$ -prostoru (Slika 4.4) koristeći biblioteku Gauss-Hermiteovih integracijskih točaka i težinskih faktora (vidi izraz (4.19));
- Ako su slučajne varijable korelirane, određuje se ekvivalentna matrica korelacijskih koeficijenata između slučajnih varijabli u  $y$ -prostoru, koristeći biblioteku koeficijenata uz parametre linearne kombinacije koja aproksimira faktor  $F$  u Nataf transformaciji, vidi Poglavlje 8.4. Zatim se određuju integracijske točke u  $y$ -prostoru, vidi izraz (4.28). Ukoliko su slučajne varijable nekorelirane, one su jednake integracijskim točkama iz  $u$ -prostora;
- Određuju se integracijske točke u  $x$ -prostoru koristeći marginalne transformacije slučajnih varijabli, vidi Poglavlje 8.3;
- Zatim se za sve integracijske točke u  $x$ -prostoru evaluira svaka funkcija performanse;
- Koristeći vrijednosti funkcija performansi određuju se statistički momenti oko ishodišta za svaku funkciju performanse, vidi izraz (4.11);
- Za svaku funkciju performanse se određuju četiri parametra FGV funkcije performanse rješavanjem nelinearnog sustava jednadžbi, vidi izraz (4.76). Pri tom se koristi Levenberg-Marquardtova metoda iz postojećeg Fortranskog potprograma LMDIF1 dostupnog u okviru javne biblioteke MINPACK [44];

- Kad su poznate FGV funkcija performansi, određuju se vjerojatnosti oštećenja za svaku funkciju performanse, vidi izraz (4.77). Pri tom se vrijednost integrala kojem su granice integracije  $-\infty$  do 0 određuje koristeći numeričku metodu za računanje nepravog integrala iz postojećeg Fortranskog potprograma QAGI dostupnog u okviru javne biblioteke QUADPACK [45];
- Za svaku funkciju performanse se određuju senzitivnosti vjerojatnosti oštećenja na sve slučajne varijable, vidi izraz (4.78), te projektna točka, vidi izraz (4.79);
- Ukoliko je broj kriterija (funkcija performansi) veći od jedan određuju se korelacije između funkcija performansi, vidi izraz (4.81);
- Također, ukoliko je broj kriterija veći od jedan, određuje se vjerojatnost oštećenja sustava, vidi izraze (4.83) i (4.87). Pri tom se multivarijatna normalna razdioba određuje koristeći postojeći Fortranski potprogram MVNDST dostupan u okviru javne biblioteke MVNDSTPACK [46];
- Kod provedbe analize senzitivnosti vjerojatnosti oštećenja s obzirom na matricu korelacijskih koeficijenata  $\rho$  (u dijagramu toka prikazano plavom bojom), računalni program FASTREL isporučuje računalnom programu SENCOR (analitički modul unutar projektnog sustava OCTOPUS) informacije o projektnim točkama i indeksima pouzdanosti (za svaku funkciju performanse). Zatim računalni program SENCOR određuje vrijednosti navedenih senzitivnosti prema metodologiji opisanoj u [3].



Slika 5.1 Dijagram toka računalnog programa FASTREL.

## 6 Primjeri

U ovom poglavlju je prikazan niz verifikacijskih primjera te primjeri primjene predložene metode. Pri tom, svaki primjer sadržava sljedeće:

- opis (svrhu) primjera;
- jednu ili više funkcija performansi (ovisno o tome da li se radi o pouzdanosti komponente ili sistemskoj pouzdanosti);
- karakteristike slučajnih varijabli (razdiobu, srednju vrijednost, koeficijent varijacije ili standardnu devijaciju te u slučaju nezavisnih slučajnih varijabli i matricu/e korelacija);
- statističke momenata svih funkcija performansi određene predloženom metodom za analizu pouzdanosti;
- parametre FGV svake funkcije performanse, također određene predloženom metodom za analizu pouzdanosti;
- usporedbu rezultata (procijenjena vjerojatnost oštećenja i broj evaluacija) različitih metoda za analizu pouzdanosti (predložena metoda, FORM, SORM – Breitung i Tvedt, Monte Carlo);
- prikaz FGV svake funkcije performanse;
- zaključak (ocjena brzine i točnosti).

Primjeri u kojima je provedena analiza sistemske pouzdanosti, osim gore navedenog, sadržavaju i usporedbu matrica korelacijskih koeficijenata određenih FORM i predloženom metodom, te usporedbu procijenjenih vjerojatnosti oštećenja sustava određenih različitim metodama za analizu sistemske pouzdanosti (predložena metoda, FORM – Ditlevsenova gornja granica, Monte Carlo).

Za rezultate određene predloženom metodom korišten je računalni program FASTREL, dok je za rezultate ostalih, gore navedenih metoda, korišten računalni program CALREL [27]. U tablicama usporedbe rezultata, važno je napomenuti da broj evaluacija predložene metode treba uspoređivati s brojem evaluacija FORM metode (s obzirom da je FORM metoda najbrža od trenutačno korištenih metoda). S druge pak strane, vjerojatnost oštećenja određenu predloženom metodom, treba uspoređivati s metodom Monte Carlo (s obzirom da je ona najtočnija od svih trenutno korištenih metoda).



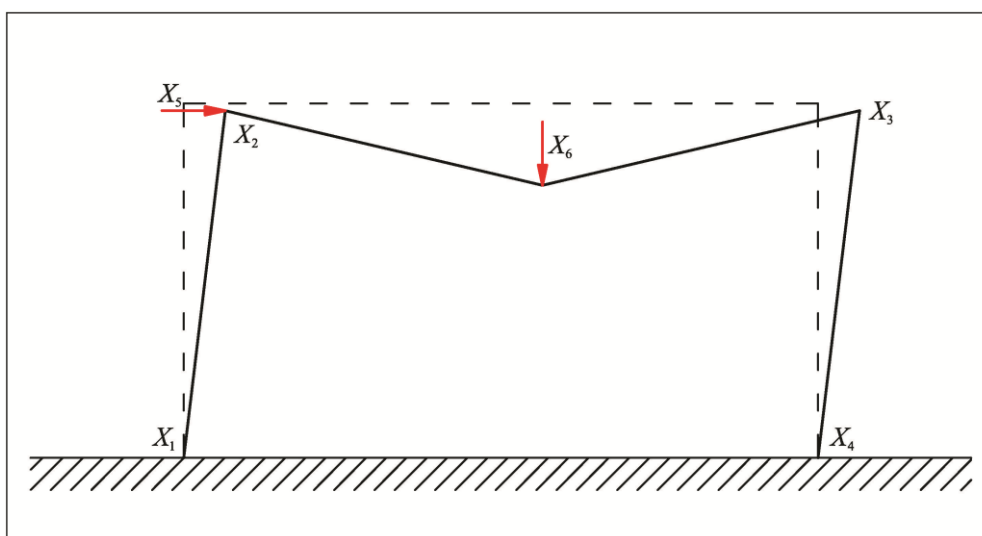
S obzirom da su FORM i SORM iterativne metode za određivanje vjerojatnosti oštećenja, u računalnom programu CALREL je potrebno definirati optimizacijsku proceduru (koja iterativno pronalazi projektnu točku) te parametre konvergencije. U svim narednim primjerima su korištene uobičajene (*eng. default*) postavke definirane u priručniku računalnog programa CALREL [27] (optimizacijska procedura je modificirana metoda HL-RF, maksimalan broj iteracijskih ciklusa je 100, a toleranca konvergencije je 0.001).

## 6.1 Verifikacijski primjeri

### 6.1.1 Primjer 1 – Linearna funkcija performanse

Ocjenjuje se brzina i točnost metode na primjeru linearne funkcije performanse u  $x$ -prostoru, koja predstavlja kriterij za mehanizam plastičnog kolapsa okvira (Slika 6.1), dana je sljedećim izrazom [21]:

$$G(\mathbf{X}) = X_1 + 2 \cdot X_2 + 2 \cdot X_3 + X_4 - 5 \cdot X_5 - 5 \cdot X_6 \quad (6.1)$$



Slika 6.1 Mehanizam plastičnog kolapsa okvira.

Slučajne varijable su nekorelirane, a Tablica 6.1 prikazuje njihove statističke karakteristike (razdiobu, srednju vrijednost i koeficijent varijacije).

Tablica 6.1 Karakteristike slučajnih varijabli za Primjer 1.

Oznaka	Razdioba	$\mu_X$	$COV_X$ [%]
$X_1$	Lognormalna	120	10
$X_2$	Lognormalna	120	10
$X_3$	Lognormalna	120	10
$X_4$	Lognormalna	120	10
$X_5$	Lognormalna	50	30
$X_6$	Lognormalna	40	30

Statističke momente oko ishodišta funkcije performanse i parametre njene FGV prikazuje Tablica 6.2, a određeni su primjenom predložene metode za analizu pouzdanosti.

 Tablica 6.2 Statistički momenti funkcije  $G(\mathbf{X})$  i parametri funkcije  $f_G(g)$  za Primjer 1.

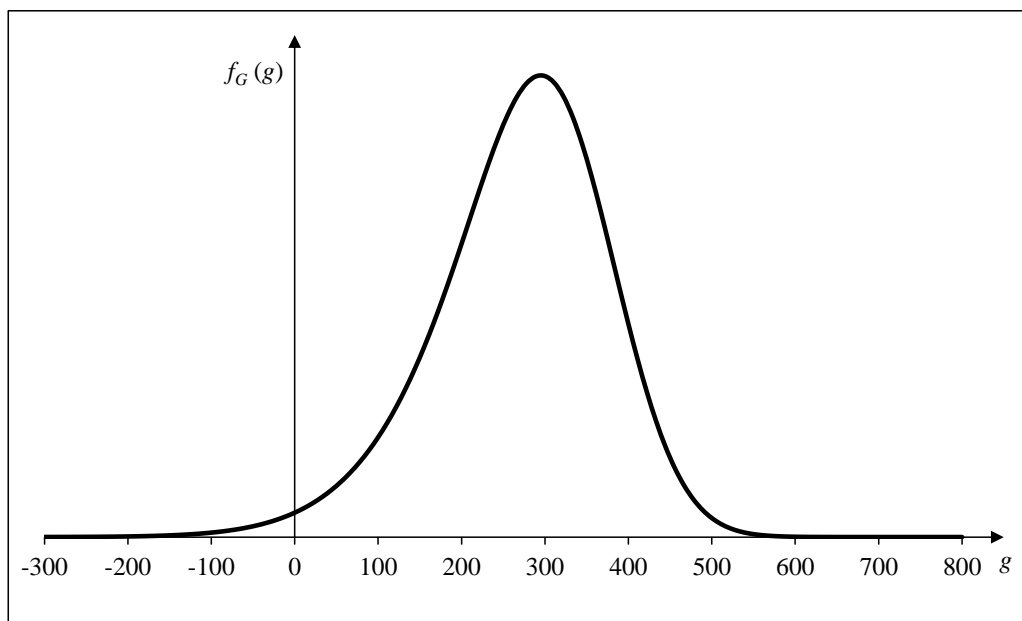
Statistički momenti oko ishodišta funkcije $G(\mathbf{X})$		Parametri funkcije $f_G(g)$	
$MGr_1$	2.700E+02	$\mu_1$	409.69
$MGr_2$	8.356E+04	$\mu_2$	327.75
$MGr_3$	2.774E+07	$\sigma_1$	173.15
$MGr_4$	9.758E+09	$\sigma_2$	74.06

Usporedbu rezultata određenih različitim metodama za analizu pouzdanosti prikazuje Tablica 6.3, dok Slika 6.2 daje prikaz FGV funkcije performanse.

Tablica 6.3 Usporedba rezultata za Primjer 1.

Metoda	Vjerojatnost oštećenja $P_F$	Broj evaluacija funkcije $G(\mathbf{X})$
Predložena metoda	1.267E-02	25
FORM	9.433E-03	156
SORM (Breitung)	1.238E-02	206
SORM (Tvedt)	1.206E-02	206
Monte Carlo	1.240E-02	1 000 000

Iako je funkcija performanse linearna (u  $x$ -prostoru), transformacijom problema u  $u$  – prostor ona postaje nelinearna (zbog lognormalne razdiobe). Iz tog razloga, za ovaj primjer, FORM metodu karakterizira velika greška procjene vjerojatnosti oštećenja. Također je uočljiva značajna razlika u broju evaluacija funkcije performanse između predložene metode te metoda FORM i SORM.



Slika 6.2 FGV funkcije performanse za Primjer 1.

### 6.1.2 Primjer 2 – Nelinearna funkcija performanse

Ocjenjuje se brzina i točnost metode na primjeru nelinearne funkcije performanse u  $x$ -prostoru koja je dana sljedećim izrazom [21]:

$$G(\mathbf{X}) = 1000 \cdot X_1 X_2 - 7.51 \cdot X_1 X_3 + X_1 X_4 + 40 \cdot X_5 - 0.5 \cdot X_3^2 \quad (6.2)$$

Slučajne varijable su nekorelirane, a Tablica 6.4 prikazuje njihove statističke karakteristike (razdiobu, srednju vrijednost i koeficijent varijacije).

Tablica 6.4 Karakteristike slučajnih varijabli za Primjer 2.

Oznaka	Razdioba	$\mu_x$	$COV_x$ [%]
$X_1$	Normalna	1.2	30
$X_2$	Normalna	2.4	3
$X_3$	Normalna	50.0	6
$X_4$	Normalna	25.0	30
$X_5$	Normalna	10.0	50

Statističke momente oko ishodišta funkcije performanse i parametre njene FGV prikazuje Tablica 6.5, a određeni su primjenom predložene metode za analizu pouzdanosti.

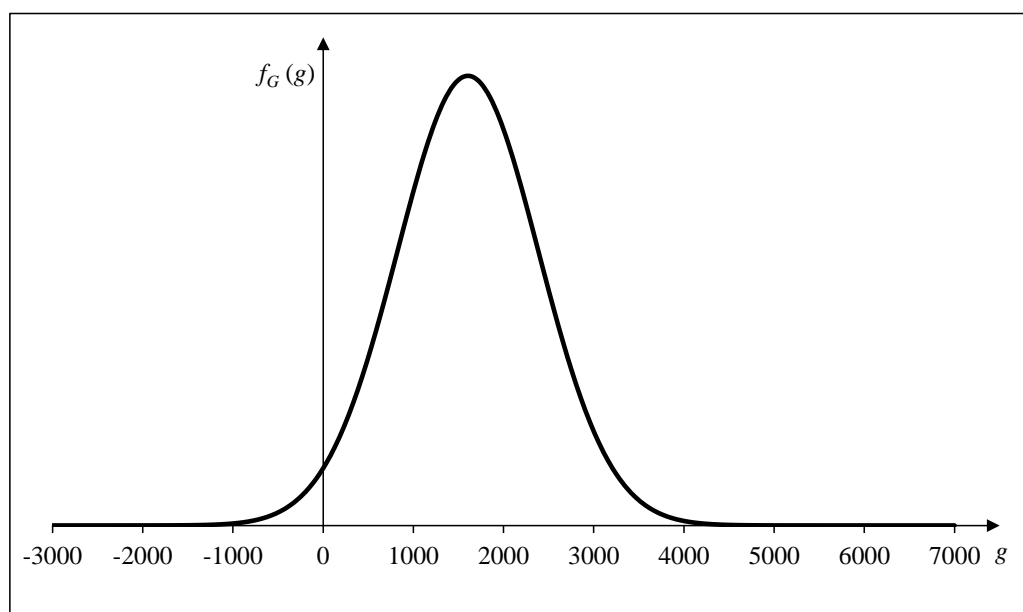
Tablica 6.5 Statistički momenti funkcije  $G(\mathbf{X})$  i parametri funkcije  $f_G(g)$  za Primjer 2.

Statistički momenti oko ishodišta funkcije $G(\mathbf{X})$		Parametri funkcije $f_G(g)$	
$MGr_1$	1.605E+03	$\mu_1$	1033.64
$MGr_2$	3.199E+06	$\mu_2$	2178.00
$MGr_3$	7.134E+09	$\sigma_1$	729.11
$MGr_4$	1.743E+13	$\sigma_2$	727.35

Usporedbu rezultata određenih različitim metodama za analizu pouzdanosti prikazuje Tablica 6.6. Slika 6.3 daje prikaz FGV funkcije performanse.

Tablica 6.6 Usporedba rezultata za Primjer 2.

Metoda	Vjerojatnost oštećenja $P_F$	Broj evaluacija funkcije $G(\mathbf{X})$
Predložena metoda	2.118E-02	21
FORM	1.986E-02	110
SORM (Breitung)	2.031E-02	145
SORM (Tvedt)	2.030E-02	145
Monte Carlo	2.134E-02	1 000 000



Slika 6.3 FGV funkcije performanse za Primjer 2.

### 6.1.3 Primjer 3 – Nelinearna funkcija performanse (dvije projektne točke)

Ocjenjuje se brzina i točnost metode na primjeru parabolične funkcije performanse koja ima dvije projektne točke (Slika 6.5. prikazuje funkciju performanse u  $u$ -prostoru) a koja je dana je sljedećim izrazom [16]:

$$G(\mathbf{X}) = 5 - X_2 - 0.5 \cdot (X_1 - 0.1)^2 \quad (6.3)$$

Slučajne varijable su nekorelirane, a Tablica 6.7 prikazuje njihove statističke karakteristike (razdiobu, srednju vrijednost i standardnu devijaciju).

Tablica 6.7 Karakteristike slučajnih varijabli za Primjer 3.

Oznaka	Razdioba	$\mu_X$	$\sigma_X$
$X_1$	Normalna	0	1
$X_2$	Normalna	0	1

Statističke momente oko ishodišta funkcije performanse i parametre njene FGV prikazuje Tablica 6.8, a određeni su primjenom predložene metode za analizu pouzdanosti.

Tablica 6.8 Statistički momenti funkcije  $G(\mathbf{X})$  i parametri funkcije  $f_G(g)$  za Primjer 3.

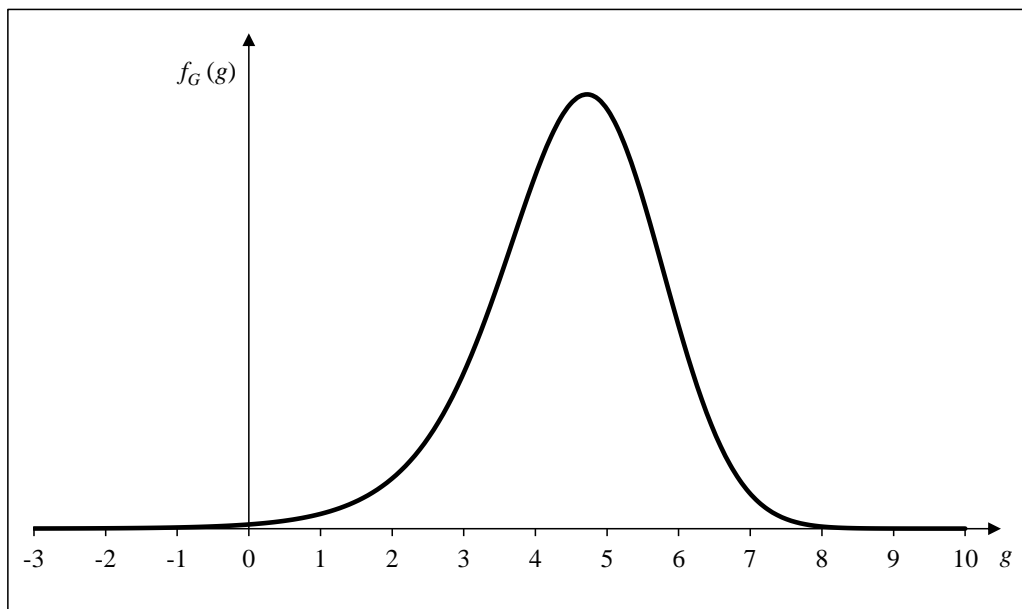
Statistički momenti oko ishodišta funkcije $G(\mathbf{X})$		Parametri funkcije $f_G(g)$	
$MGr_1$	4.495	$\mu_1$	34.90
$MGr_2$	21.715	$\mu_2$	4.38
$MGr_3$	110.154	$\sigma_1$	5.26
$MGr_4$	582.741	$\sigma_2$	0.93

Usporedbu rezultata određenih različitim metodama za analizu pouzdanosti prikazuje Tablica 6.9., dok Slika 6.4 daje prikaz FGV funkcije performanse.

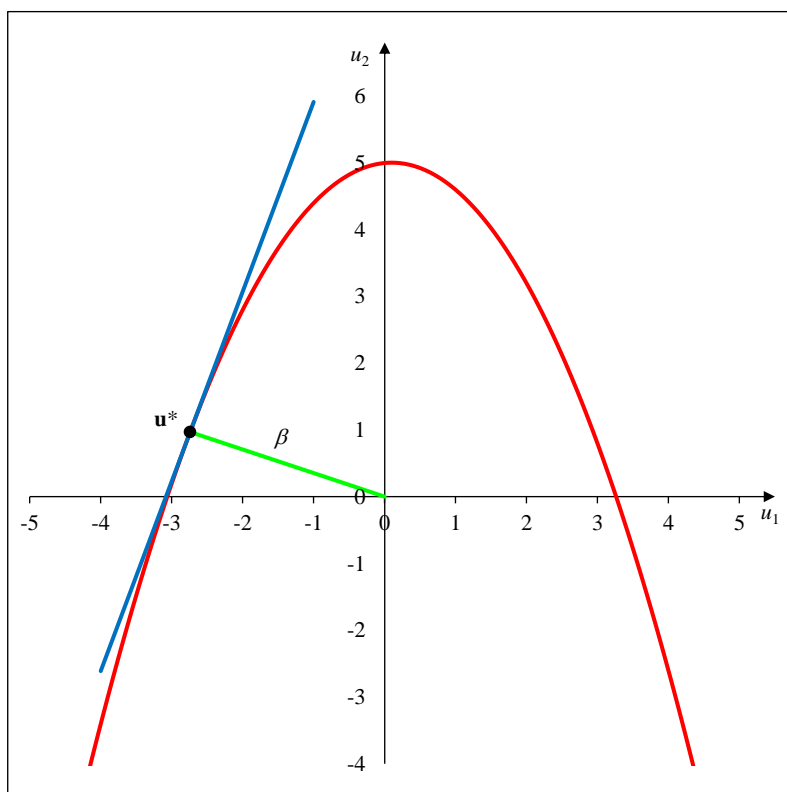
Tablica 6.9 Usporedba rezultata za Primjer 3.

Metoda	Vjerojatnost oštećenja $P_F$	Broj evaluacija funkcije $G(\mathbf{X})$
Predložena metoda	2.523E-03	13
FORM	1.832E-03	50
SORM (Breitung)	1.970E-03	60
SORM (Tvedt)	1.968E-03	60
Monte Carlo	3.073E-03	1 000 000

Ova funkcija performanse ima dvije projektne točke, međutim metodama FORM i SORM može se pronaći samo jedna te se ne zna ništa o drugoj. Iz tog razloga, za ovaj primjer, metode FORM i SORM karakterizira velika greška procjene vjerojatnosti oštećenja.



Slika 6.4 FGV funkcije performanse za Primjer 3.



Slika 6.5 Funkcija performanse u  $u$ -prostoru za Primjer 3.

### 6.1.4 Primjer 4 – Nelinearna funkcija performanse (konkavna)

Ocjenjuje se brzina i točnost metode na primjeru nelinearne (konkavne) funkcije performanse (Slika 6.7. prikazuje funkciju performanse u  $u$ -prostoru) koja je dana sljedećim izrazom [21]:

$$G(\mathbf{X}) = 0.1 \cdot (e^{0.8 \cdot X_1 - 1.2} + e^{0.7 \cdot X_2 - 0.6} - 5) \quad (6.4)$$

Slučajne varijable su nekorelirane, a Tablica 6.10 prikazuje njihove statističke karakteristike (razdiobu, srednju vrijednost i standardnu devijaciju).

Tablica 6.10 Karakteristike slučajnih varijabli za Primjer 4.

Oznaka	Razdioba	$\mu_X$	$\sigma_X$
$X_1$	Normalna	3	0.8
$X_2$	Normalna	3	0.8

Statističke momente oko ishodišta funkcije performanse i parametre njene FGV prikazuje Tablica 6.11, a određeni su primjenom predložene metode za analizu pouzdanosti.

Tablica 6.11 Statistički momenti funkcije  $G(\mathbf{X})$  i parametri funkcije  $f_G(g)$  za Primjer 4.

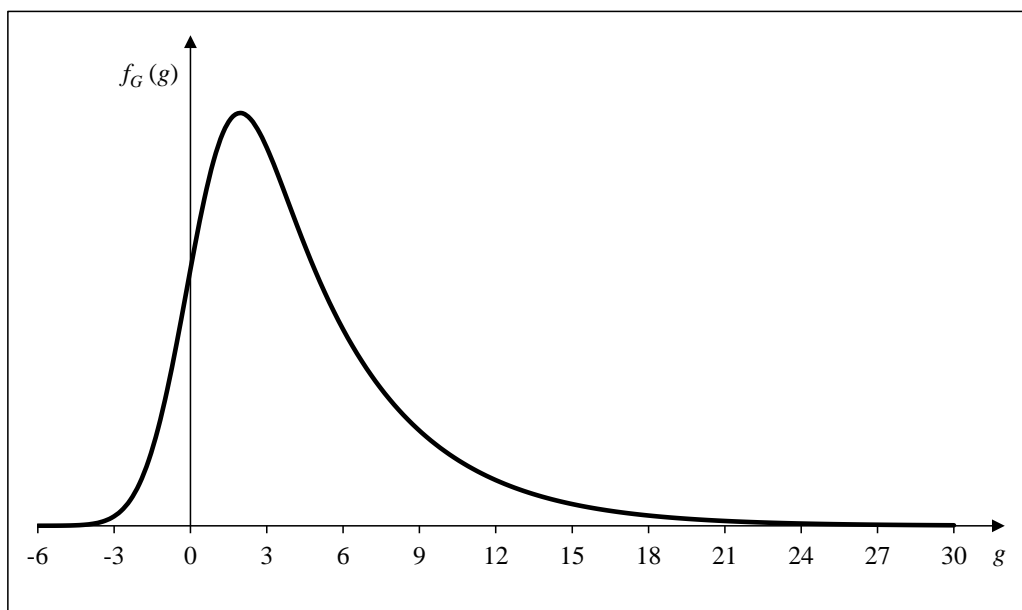
Statistički momenti oko ishodišta funkcije $G(\mathbf{X})$		Parametri funkcije $f_G(g)$	
$MGr_1$	4.317E+00	$\mu_1$	0.710
$MGr_2$	3.717E+01	$\mu_2$	-224.459
$MGr_3$	4.466E+02	$\sigma_1$	1.468
$MGr_4$	7.284E+03	$\sigma_2$	31.240

Usporedbu rezultata određenih različitim metodama za analizu pouzdanosti prikazuje Tablica 6.12, dok Slika 6.6 daje prikaz FGV funkcije performanse.

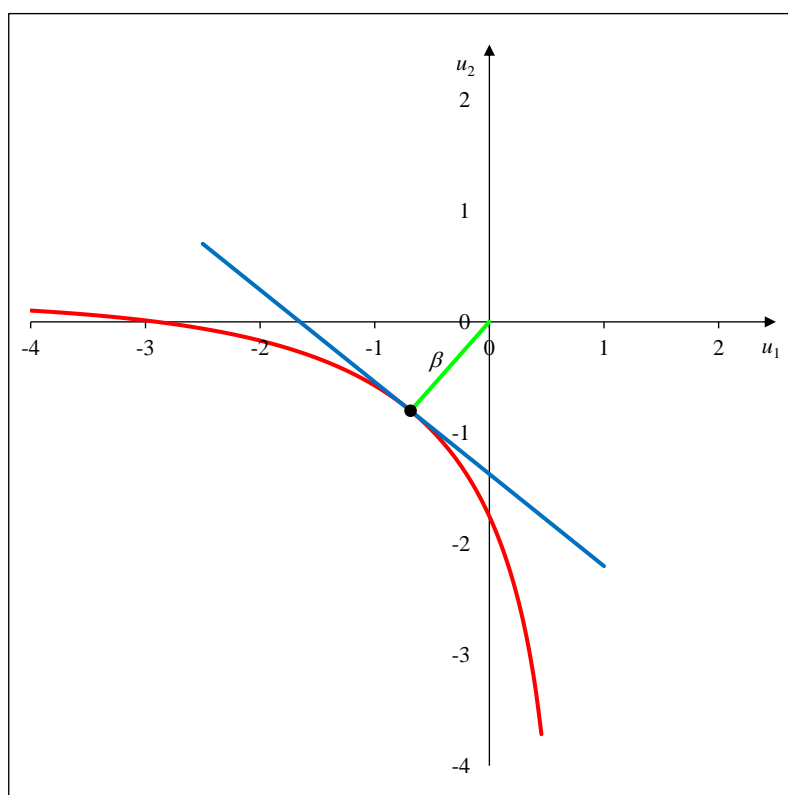
Tablica 6.12 Usporedba rezultata za Primjer 4.

Metoda	Vjerojatnost oštećenja $P_F$	Broj evaluacija funkcije $G(\mathbf{X})$
Predložena metoda	9.634E-02	13
FORM	1.456E-01	45
SORM (Breitung)	1.135E-01	53
SORM (Tvedt)	1.115E-01	53
Monte Carlo	1.111E-01	1 000 000

Ova funkcija performanse je izrazito nelinearna te iz tog razloga FORM metoda daje veliku grešku u procjeni vjerojatnosti oštećenja.



Slika 6.6 FGV funkcije performanse za Primjer 4.



Slika 6.7 Funkcija performanse u  $u$ -prostoru za Primjer 4.



### 6.1.5 Primjer 5 – Sistemska pouzdanost (serijski sustav)

Ocjenjuje se brzina i točnost metode na primjeru određivanja vjerojatnost oštećenja serijskog sustava sastavljenog od sljedeće tri funkcije performanse [27]:

$$\begin{aligned} G_1(\mathbf{X}) &= X_1 + X_2 + X_4 + X_5 - 5 \cdot X_6 \\ G_2(\mathbf{X}) &= X_1 + 2 \cdot X_3 + 2 \cdot X_4 + X_5 - 5 \cdot X_6 - 5 \cdot X_7 \\ G_3(\mathbf{X}) &= X_2 + 2 \cdot X_3 + X_4 - 5 \cdot X_7 \end{aligned} \tag{6.5}$$

Slučajne varijable su korelirane, a Tablica 6.13 prikazuje njihove statističke karakteristike (razdiobu, srednju vrijednost i standardnu devijaciju).

Tablica 6.13 Karakteristike slučajnih varijabli za Primjer 5.

Oznaka	Razdioba	$\mu_X$	$\sigma_X$
$X_1$	Weibull	134	23
$X_2$	Weibull	134	23
$X_3$	Weibull	160	35
$X_4$	Weibull	150	30
$X_5$	Weibull	150	30
$X_6$	Uniformna	65	20
$X_7$	Uniformna	50	15

Matrice korelacijskih koeficijenata između prvih pet i zadnje dvije slučajne varijable su:

$$\mathbf{p}_{15} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.4 & 0.2 & 0.2 & 0.2 \\ 0.4 & 1.0 & 0.4 & 0.2 & 0.2 \\ 0.2 & 0.4 & 1.0 & 0.4 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 0.4 & 1.0 & 0.4 \\ 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.4 & 1.0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_{78} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.4 \\ 0.4 & 1.0 \end{bmatrix} \tag{6.6}$$

Tablica 6.14, Tablica 6.16 i Tablica 6.18 prikazuju statističke momente oko ishodišta za svaku od tri funkcije performanse te parametre njihovih FGV. Usporedbu rezultata za svaku funkcije performanse prikazuju Tablica 6.15, Tablica 6.17 i Tablica 6.19. Slika 6.8, Slika 6.9 i Slika 6.10 daju prikaz FGV za sve tri funkcije performanse.

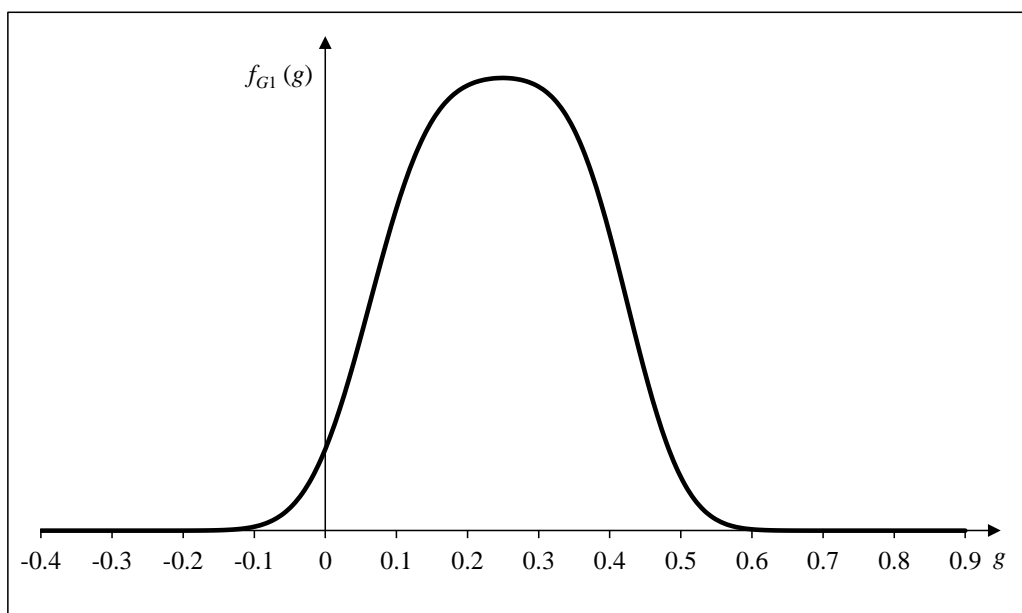
**Rezultati za prvu funkciju performanse**

Tablica 6.14 Statistički momenti funkcije  $G_1(\mathbf{X})$  i parametri funkcije  $f_{G_1}(g)$  za Primjer 5.

Statistički momenti oko ishodišta funkcije $G_1(\mathbf{X})$		Parametri funkcije $f_{G_1}(g)$	
$MGr_1$	2.428E-01	$\mu_1$	0.0627
$MGr_2$	7.421E-02	$\mu_2$	0.4246
$MGr_3$	2.537E-02	$\sigma_1$	0.0683
$MGr_4$	9.372E-03	$\sigma_2$	0.0635

Tablica 6.15 Usporedba rezultata za prvu funkciju performanse za Primjer 5.

Metoda	Vjerojatnost oštećenja $P_{F1}$	Broj evaluacija funkcije $G_1(\mathbf{X})$
Predložena metoda	1.832E-02	43
FORM	2.656E-02	435
SORM (Breitung)	1.868E-02	491
SORM (Tvedt)	1.844E-02	491
Monte Carlo	1.954E-02	1 000 000



Slika 6.8 FGV prve funkcije performanse za Primjer 5.

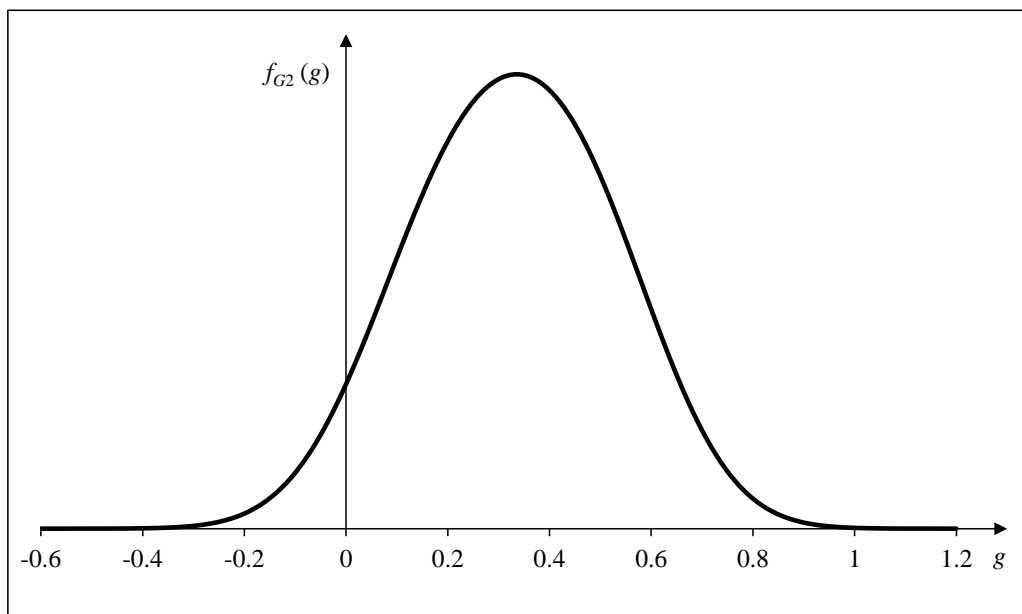
**Rezultati za drugu funkciju performanse**

Tablica 6.16 Statistički momenti funkcije  $G_2(\mathbf{X})$  i parametri funkcije  $f_{G_2}(g)$  za Primjer 5.

Statistički momenti oko ishodišta funkcije $G_2(\mathbf{X})$		Parametri funkcije $f_{G_2}(g)$	
$MGr_1$	3.286E-01	$\mu_1$	0.0838
$MGr_2$	1.499E-01	$\mu_2$	0.5782
$MGr_3$	7.650E-02	$\sigma_1$	0.1511
$MGr_4$	4.320E-02	$\sigma_2$	0.1427

Tablica 6.17 Usporedba rezultata za drugu funkciju performanse za Primjer 5.

Metoda	Vjerojatnost oštećenja $P_{F2}$	Broj evaluacija funkcije $G_2(\mathbf{X})$
Predložena metoda	5.538E-02	43
FORM	6.499E-02	210
SORM (Breitung)	4.778E-02	269
SORM (Tvedt)	4.712E-02	269
Monte Carlo	4.868E-02	1 000 000



Slika 6.9 FGV druge funkcije performanse za Primjer 5.

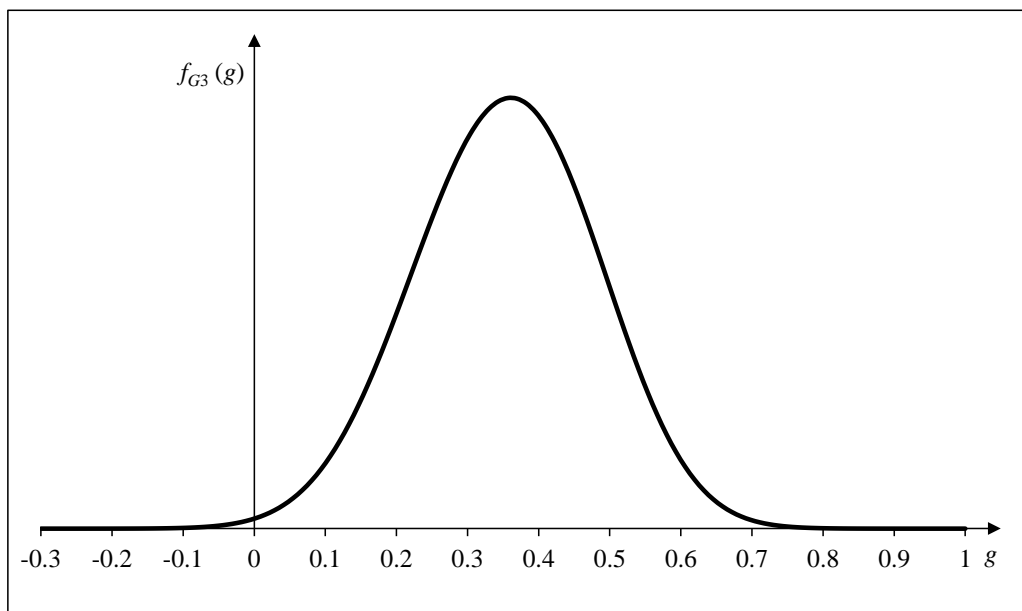
**Rezultati za treću funkciju performanse**

Tablica 6.18 Statistički momenti funkcije  $G_3(\mathbf{X})$  i parametri funkcije  $f_{G_3}(g)$  za Primjer 5.

Statistički momenti oko ishodišta funkcije $G_3(\mathbf{X})$		Parametri funkcije $f_{G_3}(g)$	
$MGr_1$	3.537E-01	$\mu_1$	0.2270
$MGr_2$	1.415E-01	$\mu_2$	0.4885
$MGr_3$	6.145E-02	$\sigma_1$	0.1090
$MGr_4$	2.848E-02	$\sigma_2$	0.0982

Tablica 6.19 Usporedba rezultata za treću funkciju performanse za Primjer 5.

Metoda	Vjerojatnost oštećenja $P_{F3}$	Broj evaluacija funkcije $G_3(\mathbf{X})$
Predložena metoda	2.800E-03	43
FORM	3.481E-03	210
SORM (Breitung)	2.106E-03	266
SORM (Tvedt)	2.076E-03	266
Monte Carlo	2.315E-03	1 000 000



Slika 6.10 FGV treće funkcije performanse za Primjer 5.

## Sistemska pouzdanost

S obzirom da se radi o sistemske pouzdanosti, osim određivanja vjerojatnosti oštećenja za svaku funkciju performanse potrebno je odrediti i matricu korelacijskih koeficijenata između oblika oštećenja (kriterija, funkcija performansi). Tablica 6.20 prikazuje usporedbu matrica korelacijskih koeficijenata izračunatih FORM i predloženom metodom. Usporedbu procijenjenih vjerojatnosti oštećenja serijskog sustava (za tri različite metode analize pouzdanosti) prikazuje Tablica 6.21.

Tablica 6.20 Usporedba matrica korelacijskih koeficijenata između oblika oštećenja za Primjer 5.

FORM		
1.000E+00	8.532E-01	6.056E-01
8.532E-01	1.000E+00	8.417E-01
6.056E-01	8.417E-01	1.000E+00
Predložena metoda		
1.000E+00	8.695E-01	6.395E-01
8.695E-01	1.000E+00	8.926E-01
6.395E-01	8.926E-01	1.000E+00

Tablica 6.21 Usporedba procijenjenih vjerojatnosti oštećenja sustava za Primjer 5.

Metoda	Vjerojatnost oštećenja sustava $P_{Fs}$
Predložena metoda	5.854E-02
FORM (Ditlevsenova gornja granica)	7.100E-02
Monte Carlo	5.464E-02

## 6.2 Primjeri primjene predložene metode

### 6.2.1 Primjer 6 – Uzdužna granična čvrstoća broda za prijevoz kontejnera

U ovom primjeru je prikazana analiza pouzdanosti broda za prijevoz kontejnera *MSC Napoli* u vrijeme nesreće. Naime, katastrofalno oštećenje konstrukcije ovog broda (Slika 6.11) privuklo je veliku pozornost brodograđevne istraživačke zajednice. Provedena su mnoga istraživanja kojim se nastojalo odrediti uzrok nesreće, a najvažniji izvještaj je predstavljen od strane MAIB-a (*eng. Marine Accident Investigation Branch*) [47]. Općenito je zaključeno da se oštećenje pojavilo u pregibu (*eng. hogging*) i to iz razloga neadekvatnog projektiranja pojedinih konstrukcijskih elemenata u području strojarnice broda.



Slika 6.11 Fizičko oštećenje konstrukcije kontejnerskog broda MSC Napoli [48].

Parunov et al. [36] su proveli analizu pouzdanosti s obzirom na kriterij uzdužne granične čvrstoće broskog trupa. Pri tom su kao slučajne varijable razmatrali: ekstremni vertikalni valni moment savijanja  $M_w$ , ekstremni moment savijanja uslijed prolaznih vibracija trupa broda  $M_d$ , te kombinacijski faktor između valnog opterećenja i opterećenja uslijed prolaznih vibracija  $k_d$ . Također su se kao slučajne varijable promatrale nesigurnosti uslijed modeliranja: graničnog momenta savijanja broskog trupa  $\chi_u$ , momenta savijanja na mirnoj vodi  $\chi_{sw}$ , linearnog valnog opterećenja  $\chi_w$ , nelinearnog valnog opterećenja  $\chi_{nl}$  i opterećenja uslijed prolaznih vibracija  $\chi_d$ . Tablica 6.22 prikazuje statističke karakteristike statistički nezavisnih slučajnih varijabli.

Tablica 6.22 Karakteristike slučajnih varijabli za Primjer 6.

Slučajna varijabla	Oznaka	Razdioba	$\mu_X$	$COV_X$ [%]
$\chi_u$	$X_1$	Lognormalna	1.10	10.9
$\chi_{sw}$	$X_2$	Normalna	1.00	5.0
$\chi_w$	$X_3$	Normalna	1.00	1.00
$\chi_{nl}$	$X_4$	Normalna	0.89	15.0
$M_w$ [MNm]	$X_5$	Gumbel (max)	1919.00	7.3
$k_d$	$X_6$	Normalna	0.58	39.7
$\chi_d$	$X_7$	Normalna	1.00	30.0
$M_d$ [MNm]	$X_8$	Gumbel (max)	723.00	14.2

Moment savijanja na mirnoj vodi i granični moment savijanja broskog trupa ( $M_{sw} = 2243$  MNm,  $M_u = 4900$  MNm [36]) su modelirani kao deterministički parametri (uz pripadne neizvjesnosti modeliranja). Pri tom je granični moment savijanja broskog trupa određen inkrementalno-iterativnom metodom analize progresivnog kolapsa (u daljnjem tekstu: PCA metoda [32], [33], [49]) u okviru koje je uključen utjecaj smičnih efekata, a koja je zasnovana na IACS PCA metodi.

Funkcija performanse za koju je provedena analiza pouzdanosti glasi:

$$G(\mathbf{X}) = X_1 M_u - X_2 M_{sw} - X_3 X_4 X_5 - X_6 X_7 X_8 \quad (6.7)$$

Statističke momente oko ishodišta funkcije performanse i parametre njene FGV prikazuje Tablica 6.23, a određeni su primjenom predložene metode za analizu pouzdanosti.

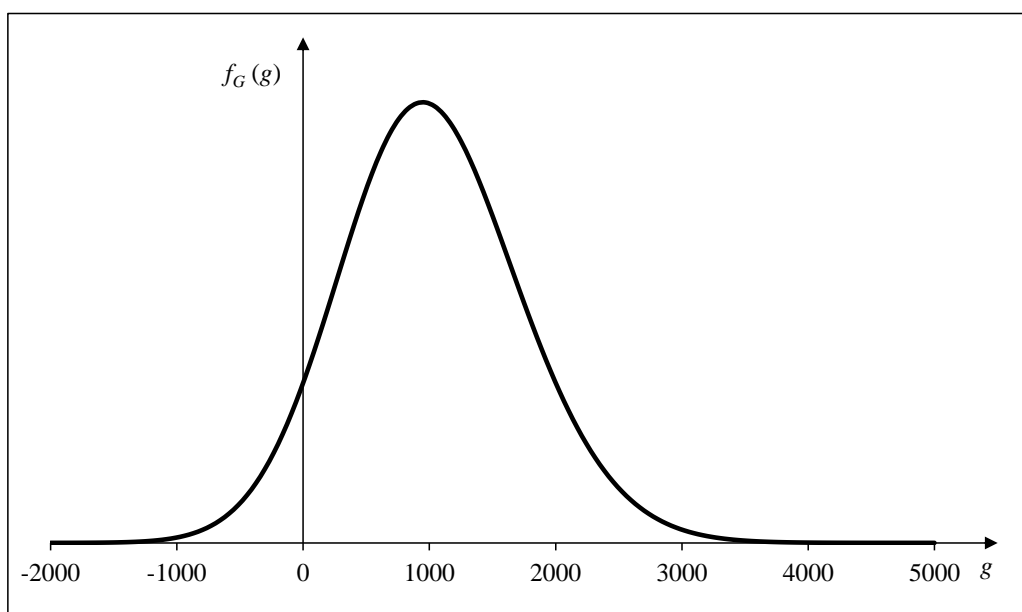
 Tablica 6.23 Statistički momenti funkcije  $G(\mathbf{X})$  i parametri funkcije  $f_G(g)$  za Primjer 6.

Statistički momenti oko ishodišta funkcije $G(\mathbf{X})$		Parametri funkcije $f_G(g)$	
$MGr_1$	1.020E+03	$\mu_1$	533.83
$MGr_2$	1.551E+06	$\mu_2$	1288.74
$MGr_3$	2.688E+09	$\sigma_1$	611.83
$MGr_4$	5.337E+12	$\sigma_2$	788.55

Usporedbu rezultata određenih različitim metodama za analizu pouzdanosti prikazuje Tablica 6.24, projektnu točku i senzitivnost vjerojatnosti oštećenja s obzirom na pojedinu slučajnu varijablu prikazuje Tablica 6.25, dok Slika 6.12 daje prikaz FGV funkcije performanse.

Tablica 6.24 Usporedba rezultata za Primjer 6.

Metoda	Vjerojatnost oštećenja $P_F$	Broj evaluacija funkcije $G(\mathbf{X})$
Predložena metoda	7.105E-02	49
FORM	7.056E-02	119
SORM (Breitung)	7.427E-02	189
SORM (Tvedt)	7.413E-02	189
Monte Carlo	7.487E-02	1 000 000



Slika 6.12 FGV funkcije performanse za Primjer 6.

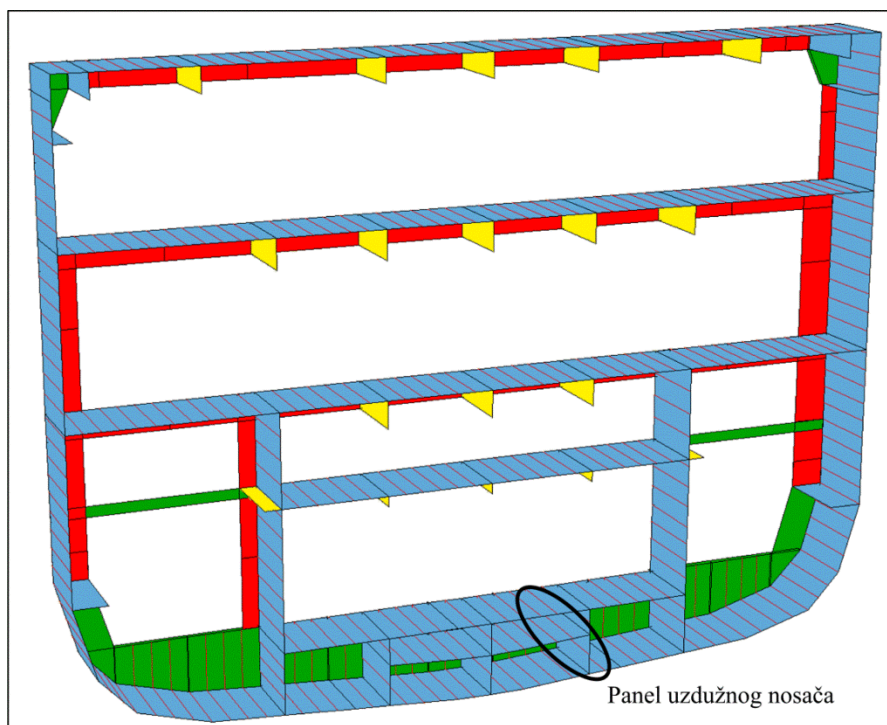
 Tablica 6.25 Projektna točka ( $u$ -prostor) i senzitivnost vjerojatnosti oštećenja s obzirom na pojedinu slučajnu varijablu za Primjer 6.

Slučajna varijabla	Oznaka	FORM		Predložena metoda	
		$u_i^*$	$\alpha_i^2$ [%]	$u_i^*$	$\alpha_i^2$ [%]
$\chi_u$	$X_1$	-1.1133	57.2	-1.2061	67.5
$\chi_{sw}$	$X_2$	0.2419	2.7	0.2299	2.5
$\chi_w$	$X_3$	0.4043	7.5	0.3459	5.6
$\chi_{nl}$	$X_4$	0.5803	15.5	0.5188	12.5
$M_w$	$X_5$	0.3046	4.3	0.2619	3.2
$k_d$	$X_6$	0.3916	7.1	0.3333	5.2
$\chi_d$	$X_7$	0.3126	4.5	0.2518	2.9
$M_d$	$X_8$	0.1539	1.1	0.1251	0.7



## 6.2.2 Primjer 7 – Sistemska pouzdanost ukrepljenog panela

U ovom primjeru je prikazana primjena predložene metodologije u sintezi ukrepljenog panela (uzdužnog nosača dvodna) broda za prijevoz putnika i vozila (ROPAX) [40]. Tablica 6.26 prikazuje kriterije za koje je provedena analiza sistemske pouzdanosti ukrepljenih panela (serijski sustav – 4 kriterija izvijanja klasifikacijskog društva Bureau Veritas [50]). Tablica 6.27 prikazuje statističke karakteristike slučajnih varijabli te razine (3 različite razine srednjih vrijednosti) pojedinih strukturnih slučajnih varijabli pomoću kojih je definiran plan eksperimenata (ortogonalno polje L27). Planom eksperimenata (Tablica 6.28) razmatra se 27 ukrepljenih panela (projekata) različitih dimenzija. Pri tom je  $l$  duljina panela,  $s$  razmak između ukrepa,  $t_p$  debljina oplata,  $h_w$  visina struka ukrepe,  $t_w$  debljina struka ukrepe,  $b_f$  širina pojasa ukrepe,  $t_f$  debljina pojasa ukrepe. Svi ukrepljeni paneli imaju jednake materijalne karakteristike ( $\sigma_y = 235 \text{ N/mm}^2$  i  $E = 210000 \text{ N/mm}^2$ ), te su opterećeni jednakim prosječnim uzdužnim, poprečnim i smičnim silama duž rubova ( $F_x, F_y, F_{xy}$ ). Za sve razmatrane ukrepljene panele je određena vjerojatnost oštećenja sustava (4 kriterija) i to s tri različite metode (FORM+Ditlevsenova gornja granica, Monte Carlo i predložena metoda).



Slika 6.13 Analizirani ukrepljeni panel za Primjer 7.

Tablica 6.26 Kriteriji izvijanja za različite elemente ukrepljenog panela za Primjer 7.

Oznaka kriterija	Opis kriterija i referenca
BV_PP_CB	Izvijanje ravnih ploča (jednoosno ravninsko tlačno i savojno opter.) (BV Rules, Part B, Chapter 7, Section 1, Subsection 5.4.2)
BV_PP_S	Smično izvijanje ravnih ploča (BV Rules, Part B, Chapter 7, Section 1, Subsection 5.4.3)
BV_PP_BACS	Izvijanje ravnih ploča (dvoosno ravninsko tlačno i smično opter.) (BV Rules, Part B, Chapter 7, Section 1, Subsection 5.4.5)
BV_OS_VBM	Izvijanje ukrepa (različite vrste) (BV Rules, Part B, Chapter 7, Section 2, Subsections 4.4.1 & 4.4.2)

Statističke karakteristike slučajnih varijabli (razdioba i koeficijent varijacije), koje se odnose na geometrijske karakteristike panela kao i Youngov modul elastičnosti materijala panela, su uzete prema Downes i Pu [37]. Statističke karakteristike granice tečenja materijala (lognormalna razdioba,  $COV = 8\%$  i  $E[\sigma_Y] = 1.21\sigma_Y$ ) su uzete prema [30].

S obzirom da je ovo ilustrativan primjer primjene novorazvijene metode za analizu pouzdanosti, statističke karakteristike opterećenja (Gumbelova razdioba,  $COV = 15\%$ ) su pretpostavljene na osnovi analize pomorstvenosti (korištenjem računalnih programa HYDROSTAR i WASIM) izvedene u okviru projekta IMPROVE [51].

U projektnoj proceduri, prilikom promjene projektnih varijabli, tj. dimenzija konstruktivnih elemenata, primijenjena je ravnotežna koordinacija u kojoj su čvorne sile slučajne varijable. Njihove srednje vrijednosti se određuju ili direktno ili iz naprezanja (uzeta iz FEM modela razmatranog broda) za svaki projektni slučaj opterećenja. Naprezanja koja ulaze u razmatrane kriterije podobnosti dobivaju se iz navedenih čvornih sila podijeljenih površinom poprečnog presjeka odgovarajućeg ruba panela na koje djeluje opterećenje.

Također se u razmatranje uzelo nesigurnosti uslijed modeliranja: strukturne nosivosti  $\chi_c$ , strukturnog odziva  $\chi_d$  i opterećenja  $\chi_f$ . Statističke karakteristike definiranih nesigurnosti uslijed modeliranja su uzete prema [52].

Funkcije performanse u općem slučaju glase:

$$G_i = \chi_c C_i - \chi_d D_i, \quad i=1, \dots, 4 \quad (6.8)$$

te se pri tom naprezanja koja ulaze u kriterij, a utječu na  $D_i$  određuju prema izrazu:

$$\sigma_j = \frac{\chi_f F_j}{A_j}, \quad j=1, \dots, 3 \quad (6.9)$$

gdje su  $\sigma_j$  naprezanja koja uzrokuju uzdužne, poprečne i smične sile.

Tablica 6.27 Karakteristike slučajnih varijabli za Primjer 7.

Slučajna varijabla	$\mu_X$			$COV_X$ [%]	Razdioba
	Razina 1	Razina 2	Razina 3		
$l$ [mm]	2750.0	2800.0	2850.0	2.0	Normalna
$s$ [mm]	700.0	750.0	800.0	2.0	Normalna
$t_p$ [mm]	13.5	14.0	14.5	1.0	Normalna
$h_w$ [mm]	110.0	115.0	120.0	2.0	Normalna
$t_w$ [mm]	6.0	7.0	8.0	1.0	Normalna
$b_f$ [mm]	18.0	20.0	22.0	2.0	Normalna
$t_f$ [mm]	19.0	20.0	21.0	1.0	Normalna
$E$ [N/mm <sup>2</sup> ]	215040.0			2.0	Normalna
$\sigma_Y$ [N/mm <sup>2</sup> ]	285.0			8.0	Lognormalna
$F_X$ [kN]	-945.0			15.0	Gumbel (max)
$F_Y$ [kN]	-784.0			15.0	Gumbel (max)
$F_{XY}$ [kN]	2744.0			15.0	Gumbel (max)
$\chi_c$ [ / ]	1.0			9.6	Normalna
$\chi_d$ [ / ]	1.0			2.5	Normalna
$\chi_f$ [ / ]	1.0			10.0	Normalna

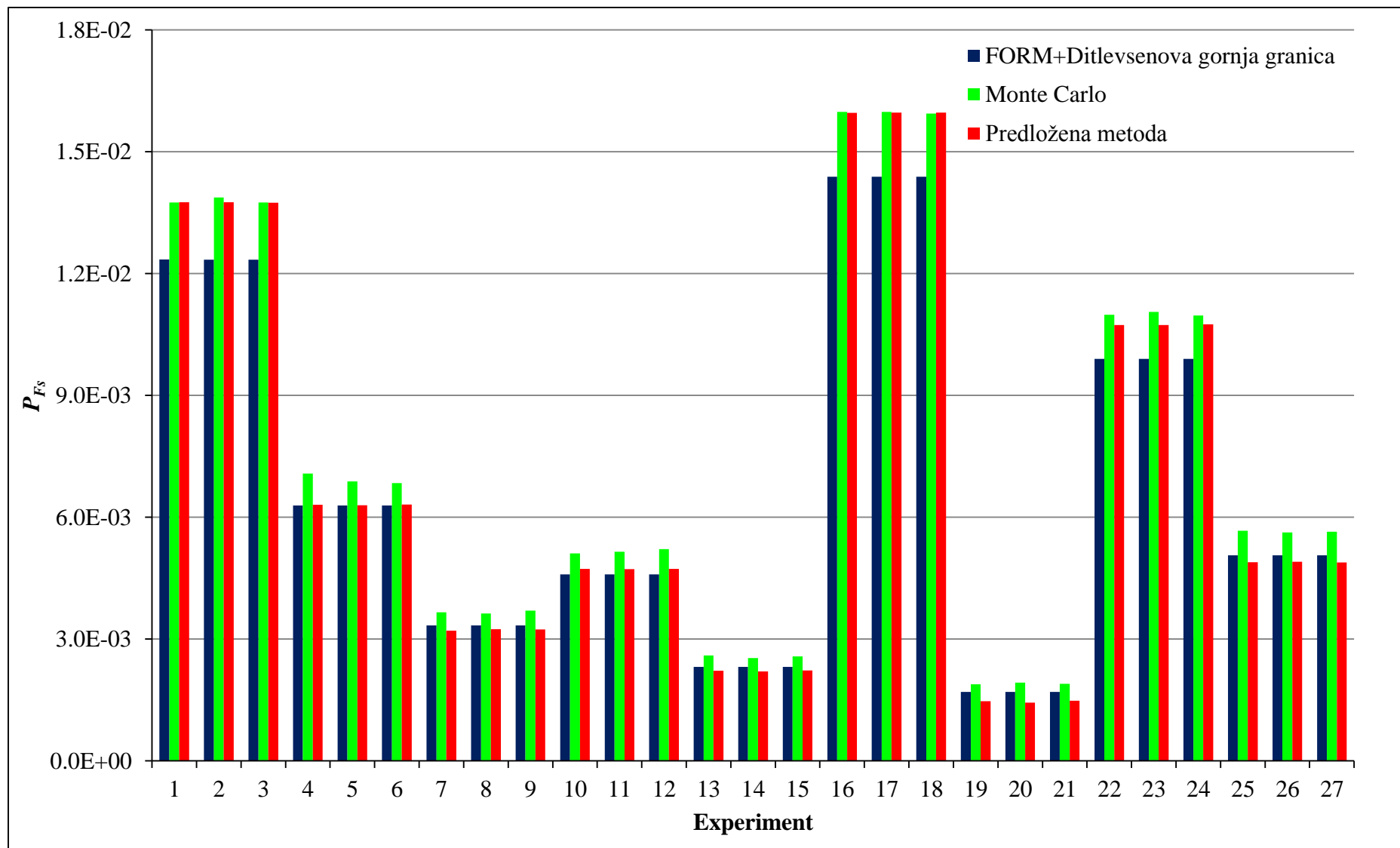
Tablica 6.29 prikazuje volumen  $V$  i vjerojatnost oštećenja sustava  $P_{Fs}$  (4 kriterija izvijanja) za svaki od 27 različitih ukrepljenih panela (projekata). Slika 6.14 grafički prikazuje usporedbu procijenjenih vjerojatnosti oštećenja za tri različite metode za analizu pouzdanosti. Slika 6.15 prikazuje svih 27 projekata u atributnom prostoru  $P_{Fs} - V$ , a s obzirom da su ciljevi minimizacija vjerojatnosti oštećenja i volumena, prikazani su nedominirani projekti (Pareto) spojeni crvenom linijom (projekti 1-10-19).

Tablica 6.28 Plan eksperimenata (ortogonalno polje L27) za Primjer 7.

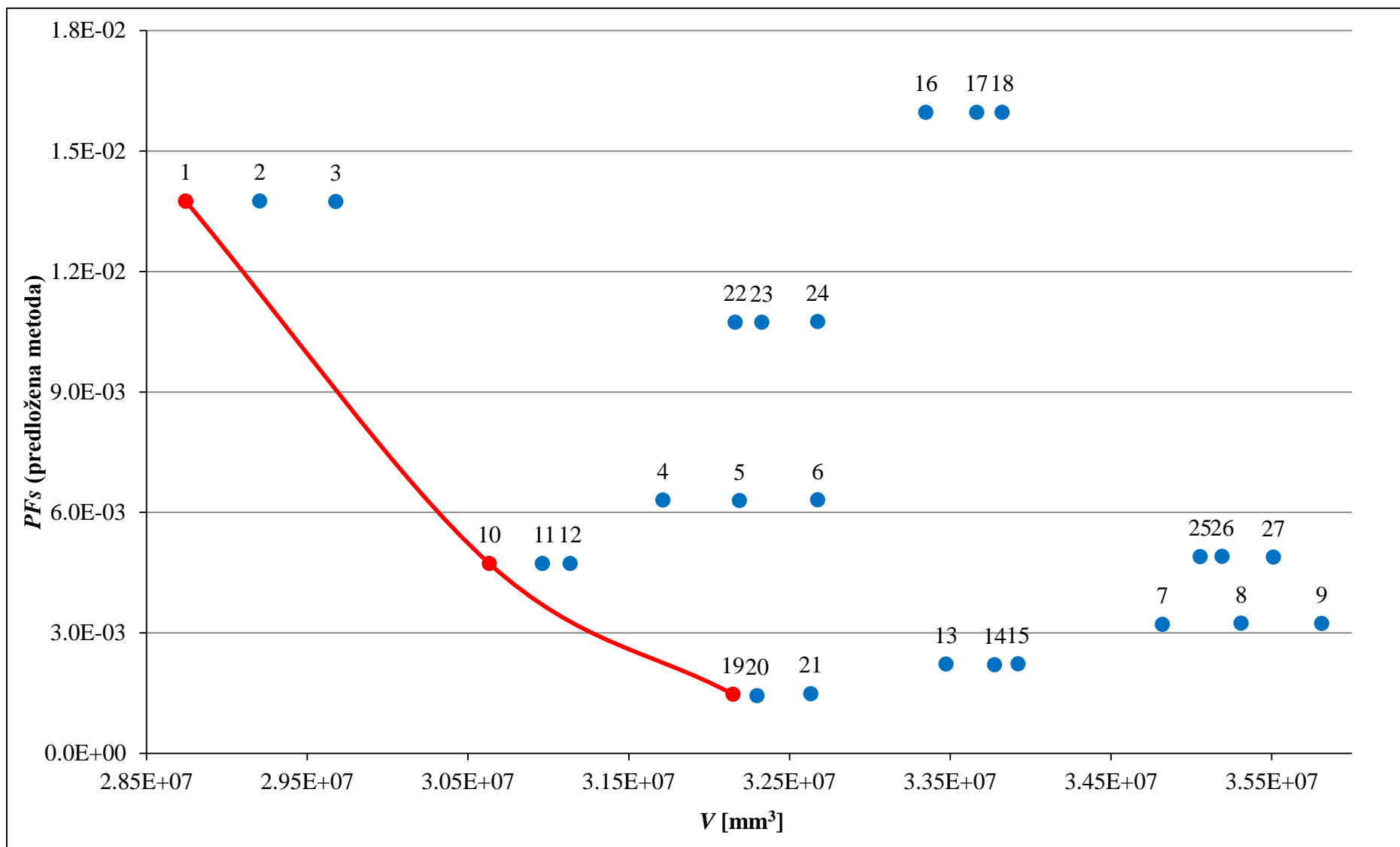
Eksp.	$l$ [mm]	$s$ [mm]	$t_p$ [mm]	$h_w$ [mm]	$t_w$ [mm]	$b_f$ [mm]	$t_f$ [mm]
1	2750	700	13.5	110	6	18	19
2	2750	700	13.5	110	7	20	20
3	2750	700	13.5	110	8	22	21
4	2750	750	14.0	115	6	18	19
5	2750	750	14.0	115	7	20	20
6	2750	750	14.0	115	8	22	21
7	2750	800	14.5	120	6	18	19
8	2750	800	14.5	120	7	20	20
9	2750	800	14.5	120	8	22	21
10	2800	700	14.0	120	6	20	21
11	2800	700	14.0	120	7	22	19
12	2800	700	14.0	120	8	18	20
13	2800	750	14.5	110	6	20	21
14	2800	750	14.5	110	7	22	19
15	2800	750	14.5	110	8	18	20
16	2800	800	13.5	115	6	20	21
17	2800	800	13.5	115	7	22	19
18	2800	800	13.5	115	8	18	20
19	2850	700	14.5	115	6	22	20
20	2850	700	14.5	115	7	18	21
21	2850	700	14.5	115	8	20	19
22	2850	750	13.5	120	6	22	20
23	2850	750	13.5	120	7	18	21
24	2850	750	13.5	120	8	20	19
25	2850	800	14.0	110	6	22	20
26	2850	800	14.0	110	7	18	21
27	2850	800	14.0	110	8	20	19

Tablica 6.29 Usporedba vjerojatnosti oštećenja sustava za Primjer 7.

Eksp.	$V$ [mm <sup>3</sup> ]	FORM	Monte Carlo	Predložena metoda
1	28743000	1.235E-02	1.375E-02	1.376E-02
2	29205000	1.234E-02	1.388E-02	1.376E-02
3	29678000	1.234E-02	1.375E-02	1.374E-02
4	31713000	6.290E-03	7.078E-03	6.307E-03
5	32188750	6.289E-03	6.881E-03	6.293E-03
6	32675500	6.289E-03	6.839E-03	6.312E-03
7	34820500	3.337E-03	3.659E-03	3.208E-03
8	35310000	3.337E-03	3.629E-03	3.239E-03
9	35810500	3.337E-03	3.699E-03	3.236E-03
10	30632000	4.591E-03	5.110E-03	4.728E-03
11	30962400	4.591E-03	5.150E-03	4.723E-03
12	31136000	4.591E-03	5.218E-03	4.727E-03
13	33474000	2.316E-03	2.595E-03	2.221E-03
14	33776400	2.316E-03	2.533E-03	2.201E-03
15	33922000	2.316E-03	2.570E-03	2.225E-03
16	33348000	1.438E-02	1.598E-02	1.596E-02
17	33664400	1.438E-02	1.598E-02	1.596E-02
18	33824000	1.438E-02	1.594E-02	1.596E-02
19	32148000	1.700E-03	1.883E-03	1.471E-03
20	32299050	1.700E-03	1.926E-03	1.431E-03
21	32632500	1.699E-03	1.899E-03	1.481E-03
22	32162250	9.900E-03	1.099E-02	1.073E-02
23	32327550	9.900E-03	1.106E-02	1.073E-02
24	32675250	9.900E-03	1.097E-02	1.075E-02
25	35055000	5.060E-03	5.670E-03	4.894E-03
26	35191800	5.060E-03	5.625E-03	4.902E-03
27	35511000	5.060E-03	5.644E-03	4.885E-03



Slika 6.14 Grafički prikaz procijenjenih vjerojatnosti oštećenja sustava za Primjer 7.



Slika 6.15 Nedominirani projekti za Primjer 7.

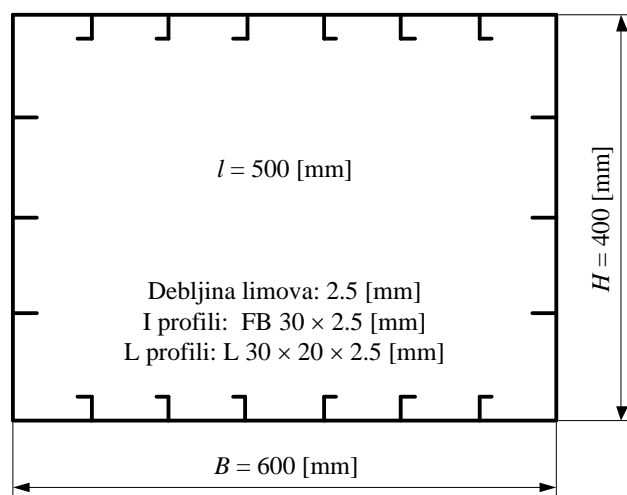
### 6.2.3 Primjer 8 – Uzdužna granična čvrstoća kutijastog nosača

U ovom primjeru su prikazane analize pouzdanosti i senzitivnosti konstrukcije tankostjenog kutijastog nosača, sukladno primjeru kojeg su obradili Downes i Pu [37]. Funkcija performanse za koju je provedena analiza pouzdanosti glasi:

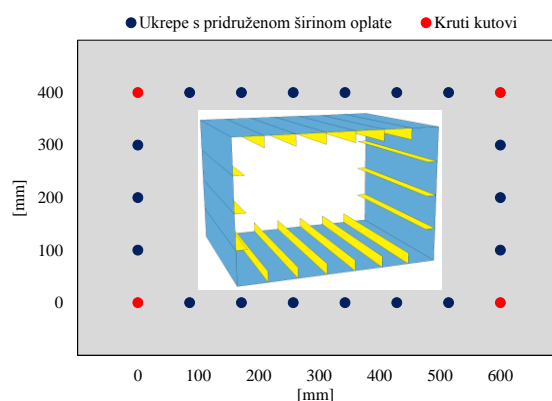
$$G(\mathbf{X}) = M_u - M_t \quad (6.10)$$

gdje je  $M_u$  granični vertikalni moment savijanja kutijastog nosača koji nije zadan kao jedna slučajna varijabla (definirana srednjom vrijednošću, koeficijentom varijacije i razdiobom), već je funkcija niza slučajnih varijabli (geometrijske i materijalne karakteristike konstrukcijskih elemenata), a  $M_t$  ukupni vertikalni moment savijanja kojim je opterećen kutijasti nosač. Pritom su za određivanje  $M_u$  koristili računalni program LR. PASS [53], kojeg su uključili u iterativnu petlju FORM metode. Također su, prije provedbe analize pouzdanosti, navedenim računalnim programom proveli analizu progresivnog kolapsa kutijastog nosača. Rezultate su usporedili s eksperimentalno dobivenim rezultatima (Rackling [54]) te su zaključili da računalni program LR. PASS daje zadovoljavajuće točne rezultate za potrebe analize pouzdanosti. Rackling je eksperimentalno testirao uzdužnu graničnu nosivost navedenog kutijastog nosača (izvorno označen kao Model 23) te njegove rezultate koriste mnogi istraživači u svrhu uspoređivanja (npr. [37], [55], [56]). Kutijasti nosač koji je pri eksperimentalnom testiranju bio podvrgnut čistom vertikalnom savijanju (progib), izrađen je od čelika (granica tečenja  $\sigma_Y = 246 \text{ N/mm}^2$ , Youngov modul elastičnosti  $E = 210000 \text{ N/mm}^2$ ). Slika 6.16 prikazuje dimenzije (širinu  $B$ , visinu  $H$  i razmak između poprečnih okvirnih nosača  $l$ ) te geometriju poprečnog presjeka i karakteristike konstrukcijskih elemenata (debljinu limova i dimenzije uzdužnih ukrepa) kutijastog nosača.

Također je i u ovom primjeru, prije provedbe analize pouzdanosti, provedena IACS PCA implementirana u računalni programi OCTOPUS. Slika 6.17 ilustrira diskretizirani model na kojem je provedena analiza, dok dobivene rezultate u obliku dijagrama moment-zakrivljenost ( $M-\kappa$ ) prikazuje Slika 6.18, gdje je naznačena i usporedba eksperimentalno dobivenog i izračunatog (LR. PASS i OCTOPUS)  $M_u$ .



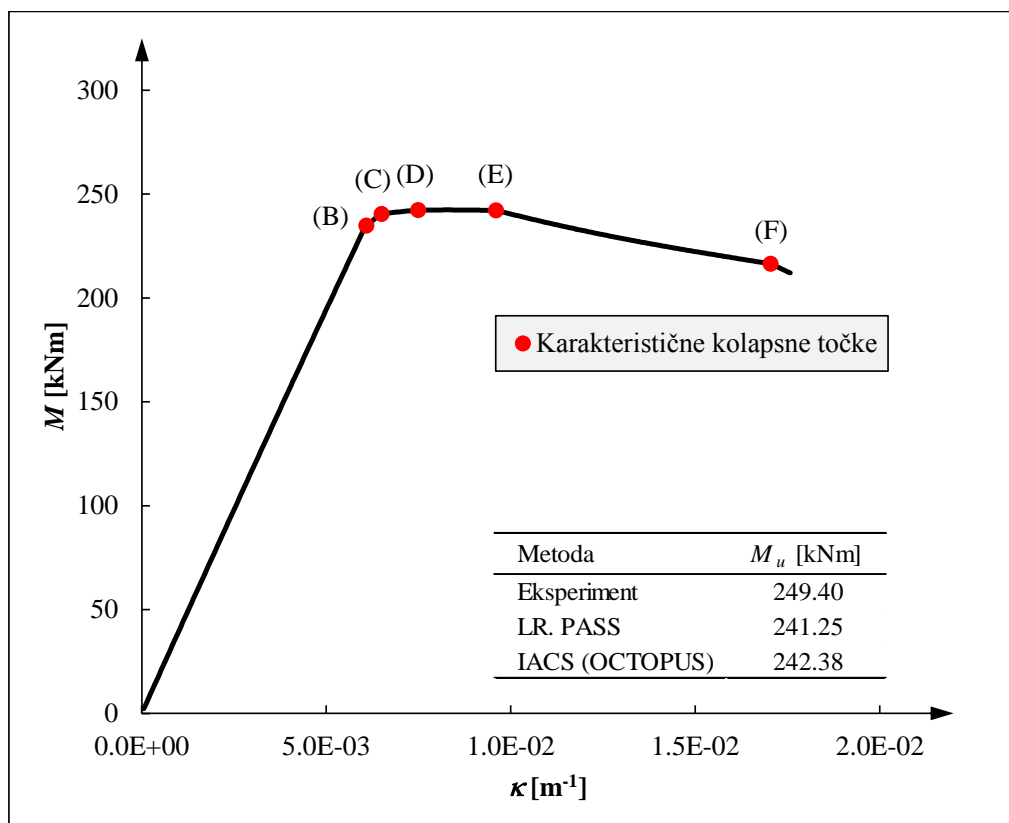
Slika 6.16 Dimenzije, geometrija poprečnog presjeka i karakteristike konstrukcijskih elemenata kutijastog nosača za Primjer 8.



Slika 6.17 Diskretni sastavni elementi kutijastog nosača za Primjer 8.

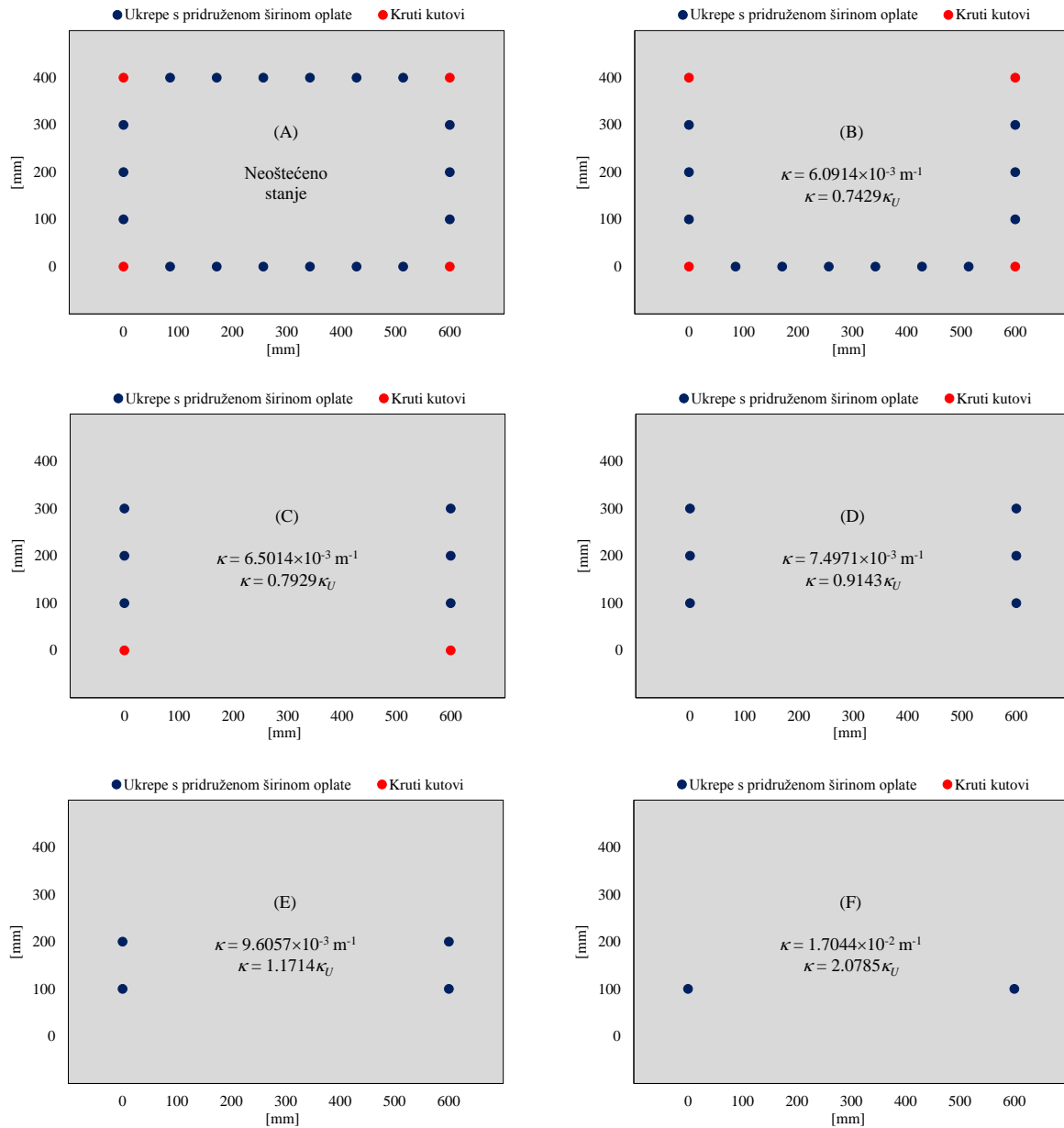
Kolapsnu sekvencu kutijastog nosača određenu IACS PCA metodom prikazuje Slika 6.19. Kolaps svakog diskretnog sastavnog elementa se identificira kao nadilaženje njegove prosječne granične uzdužne deformacije prema odgovarajućoj  $\sigma_{xA}-\varepsilon_{xA}$  krivulji za pripadni način kolapsa (gdje su  $\sigma_{xA}$  i  $\varepsilon_{xA}$  prosječno uzdužno naprezanje i deformacija razmatranog sastavnog diskretnog elementa). Zbog vrlo male razlike u rezultatima dobivenim eksperimentalnim testiranjem i IACS PCA metodom, zaključeno je da se mjera nosivosti konstrukcije ( $M_u$ ) određena IACS PCA metodom može smatrati zadovoljavajuće točnom za analizu pouzdanosti razmatranog kutijastog nosača. Stoga je IACS PCA metoda implementirana u računalni program FASTREL te su sukladno proceduri prikazanoj u [37] provedene analize pouzdanosti i senzitivnosti.



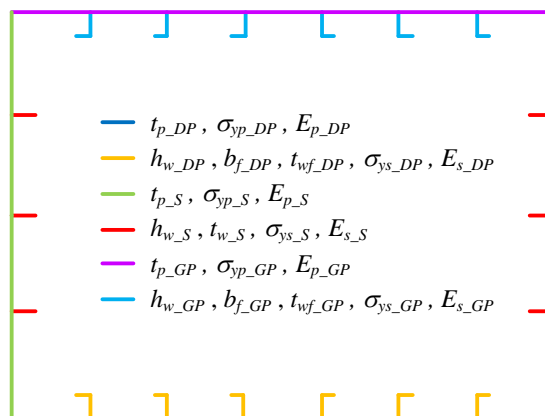

 Slika 6.18  $M - \kappa$  dijagram za Primjer 8.

Downes i Pu [37] su kutijasti nosač podijelili na 26 diskretnih sastavnih elemenata od kojih je svaki opisan s 11 slučajnih varijabli (ukrepi pridružena širina oplata, debljina oplata, visina struka ukrepe, debljina struka ukrepe, širina pojasa ukrepe, debljina pojasa ukrepe, Youngov modul elastičnosti materijala, granica tečenja materijala oplata, granica tečenja materijala struka ukrepe, granica tečenja materijala pojasa ukrepe i zaostala naprezanja).  $M_t$  kojim je opterećen kutijasti nosač Downes i Pu [37] su definirali kao  $0.8 M_u$ , pri čemu su ukupno razmatrali 287 slučajnih varijabli.

U okviru ovog primjera, zbog drugačijeg modeliranja u računalnom programu korištenom za definiciju strukturnog modela (MAESTRO [29]), razmatrane su 24 slučajne varijable. Tablica 6.30 prikazuje statističke karakteristike svih (ukupno 24) statistički nezavisnih slučajnih varijabli. Pri tom je  $t_p$  debljina oplata,  $h_w$  visina struka ukrepe,  $t_w$  debljina struka ukrepe,  $b_f$  širina pojasa ukrepe,  $t_{wf}$  debljina struka i pojasa ukrepe (za L profil),  $\sigma_y$  granica tečenja, a  $E$  Youngov modul elastičnosti materijala ( $p$  je oznaka da se odnosi na oplatu a  $s$  na ukrepu). Oznake  $DP$  (donji pojas),  $S$  (struk) i  $GP$  (donji pojas) označavaju poziciju projektne varijable unutar poprečnog presjeka kutijastog nosača. Slika 6.20 prikazuje pozicije slučajnih varijabli (ukupno 23) kojima su opisane materijalne i geometrijske karakteristike kutijastog nosača.



Slika 6.19 Kolapsna sekvenca kutijastog nosača (progib) za Primjer 8.



Slika 6.20 Prikaz slučajnih varijabli kutijastog nosača za Primjer 8.

Tablica 6.30 Karakteristike slučajnih varijabli za Primjer 8.

Slučajna varijabla	Oznaka	Razdioba	$\mu_X$	$COV_X$ [%]
3 × $t_p$ [mm]	$X_1 - X_3$	Normalna	2.5	1
3 × $h_w$ [mm]	$X_4 - X_6$	Normalna	30.0	2
$t_w$ [mm]	$X_7$	Normalna	2.5	1
2 × $b_f$ [mm]	$X_8 - X_9$	Normalna	20.0	2
2 × $t_{wf}$ [mm]	$X_{10} - X_{11}$	Normalna	2.5	1
6 × $E$ [N/mm <sup>2</sup> ]	$X_{12} - X_{17}$	Normalna	215040.0	2
6 × $\sigma_Y$ [N/mm <sup>2</sup> ]	$X_{18} - X_{23}$	Lognormalna	273.0	7
$M_t$ [kNm]	$X_{24}$	Gumbel (max)	193.0	20

Funkcija performanse za koju je provedena analiza pouzdanosti glasi:

$$G(\mathbf{X}) = M_u(X_1, \dots, X_{23}) - X_{24} \quad (6.11)$$

Statističke momente oko ishodišta funkcije performanse i parametre njene FGV prikazuje Tablica 6.31, a određeni su primjenom predložene metode za analizu pouzdanosti.

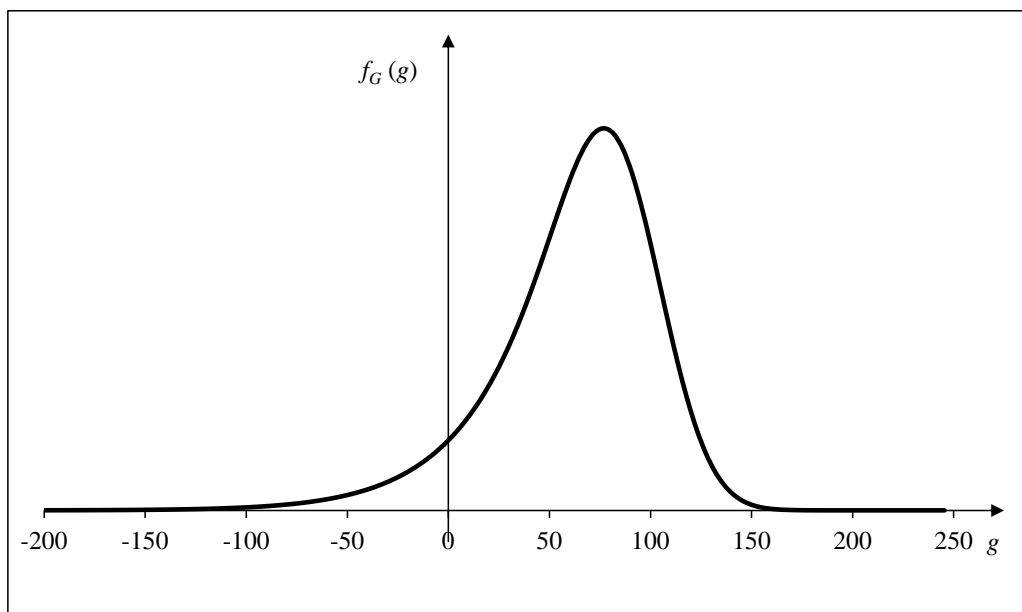
 Tablica 6.31 Statistički momenti funkcije  $G(\mathbf{X})$  i parametri funkcije  $f_G(g)$  za Primjer 8.

Statistički momenti oko ishodišta funkcije $G(\mathbf{X})$		Parametri funkcije $f_G(g)$	
$MGr_1$	6.244E+01	$\mu_1$	611.54
$MGr_2$	5.486E+03	$\mu_2$	85.32
$MGr_3$	4.752E+05	$\sigma_1$	148.16
$MGr_4$	4.884E+07	$\sigma_2$	21.93

Usporedbu rezultata određenih različitim metodama za analizu pouzdanosti prikazuje Tablica 6.32, dok Slika 6.21 daje prikaz FGV funkcije performanse.

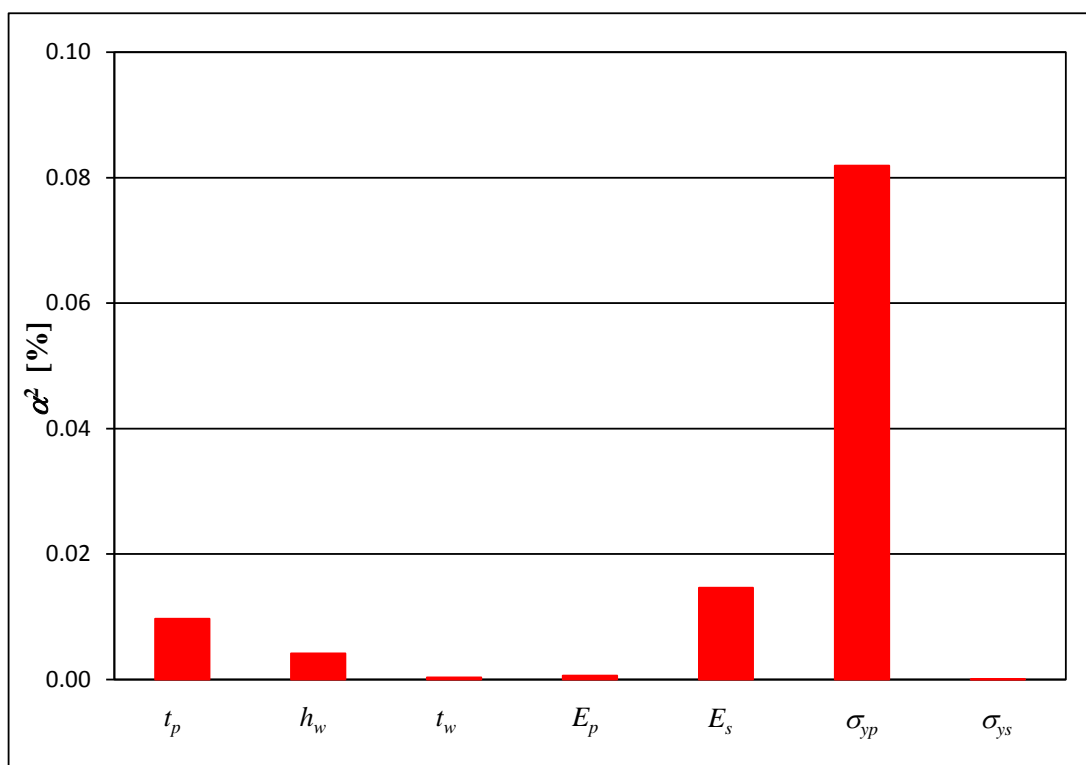
Tablica 6.32 Usporedba rezultata za Primjer 8.

Metoda	Vjerojatnost oštećenja $P_F$	Broj evaluacija funkcije $G(\mathbf{X})$
Predložena metoda	7.191E-02	145
FORM	6.978E-02	539
SORM (Breitung)	7.157E-02	743
SORM (Tvedt)	7.155E-02	743
Monte Carlo	7.176E-02	1 000 000

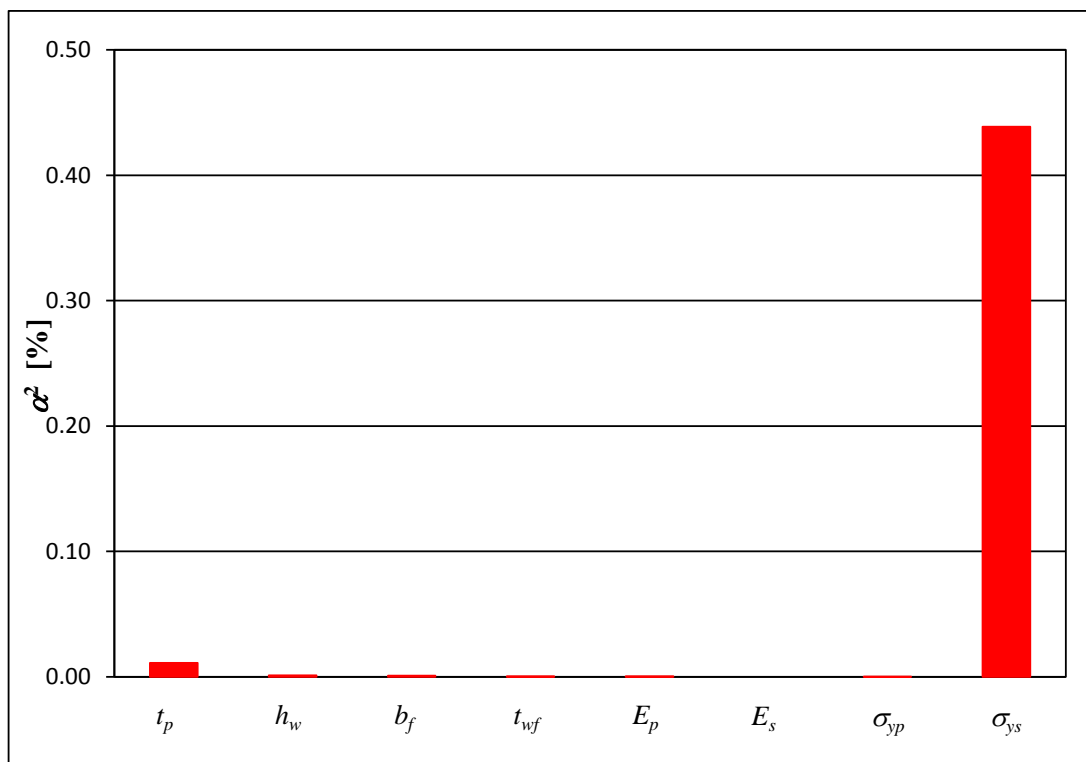


Slika 6.21 FGV funkcije performanse za Primjer 8.

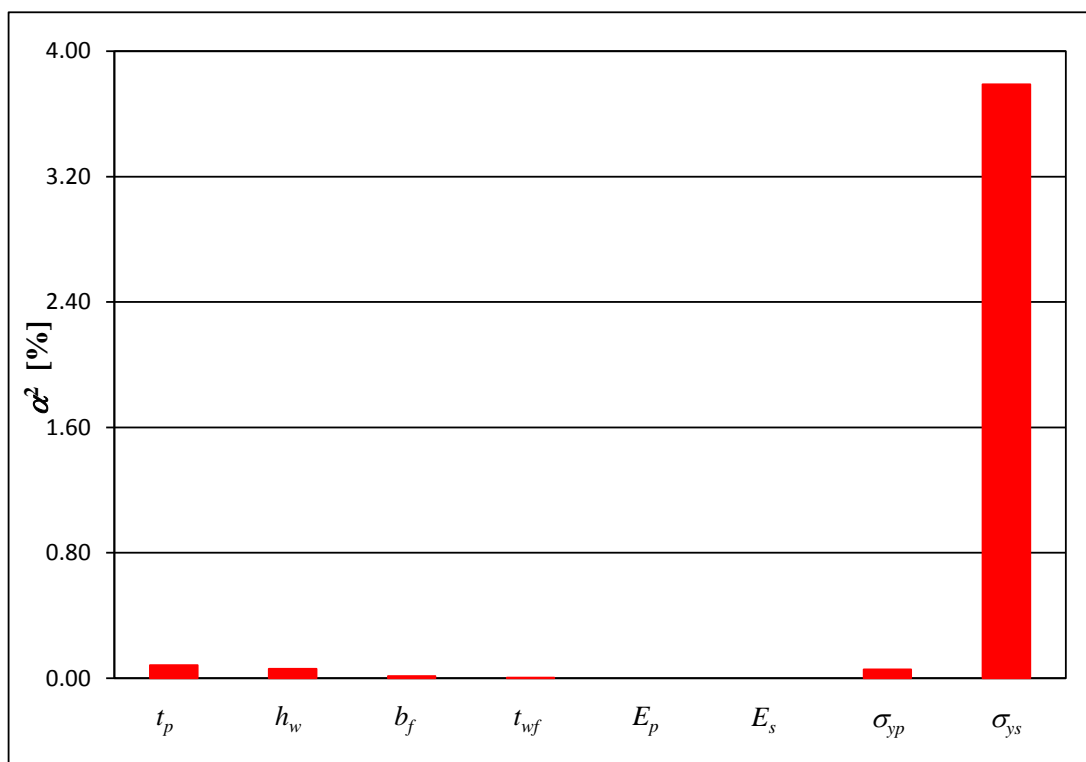
U primjeru je također provedena i analiza senzitivnosti vjerojatnosti oštećenja s obzirom na slučajne varijable. Slika 6.22, Slika 6.23 i Slika 6.24 prikazuju senzitivnosti vjerojatnosti oštećenja s obzirom na materijalne i geometrijske karakteristike strukturnih elemenata, a grupirane su prema poziciji unutar poprečnog presjeka kutijastog nosača.



Slika 6.22 Senzitivnost vjerojatnosti oštećenja s obzirom na varijable struka kutijastog nosača za Primjer 8.



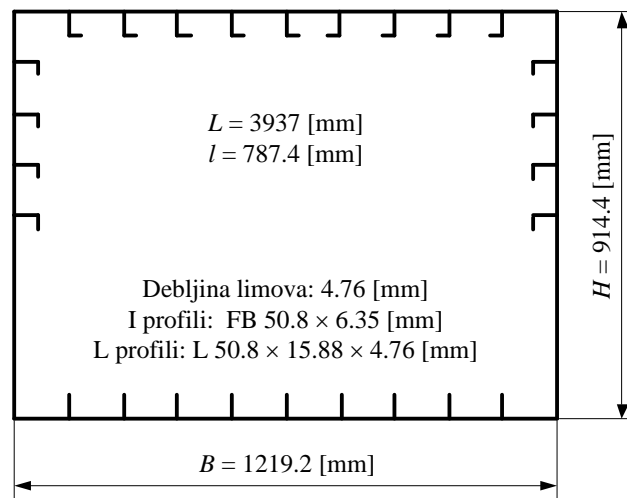
Slika 6.23 Senzitivnost vjerojatnosti oštećenja s obzirom na varijable donjeg pojasa kutijastog nosača za Primjer 8.



Slika 6.24 Senzitivnost vjerojatnosti oštećenja s obzirom na varijable gornjeg pojasa kutijastog nosača za Primjer 8.

### 6.2.4 Primjer 9 – Višekriterijska optimizacija kutijastog nosača

U ovom primjeru je provedena višekriterijska optimizacija kutijastog nosača (Dowling et al. [57], [58]) te je demonstrirano uspješno generiranje Pareto fronte u projektnoj proceduri. Slika 6.25 prikazuje dimenzije (duljinu  $L$ , širinu  $B$ , visinu  $H$  i razmak između poprečnih okvirnih nosača  $l$ ) te geometriju poprečnog presjeka i inicijalne karakteristike konstrukcijskih elemenata kutijastog nosača (debljinu limova i dimenzije uzdužnih ukrepa), dok Slika 6.26 prikazuje njihove materijalne karakteristike (granicu tečenja  $\sigma_Y$  i Youngov modul elastičnosti  $E$ ).



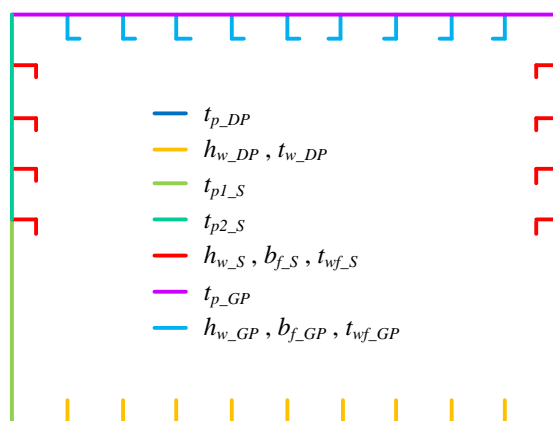
Slika 6.25 Dimenzije, geometrija poprečnog presjeka i karakteristike konstrukcijskih elemenata kutijastog nosača za Primjer 9.

The diagram shows the same box girder cross-section as in Slika 6.25, but with different colors assigned to different parts to represent material properties. A legend table is provided:

	$\sigma_Y$ [N/mm <sup>2</sup> ]	$E$ [N/mm <sup>2</sup> ]
Blue	216.22	208498
Yellow	304.25	206954
Green	281.09	214676
Red	287.26	199231
Purple	220.85	206954

Slika 6.26 Materijalne karakteristike konstrukcijskih elemenata kutijastog nosača za Primjer 9.

Slika 6.27 prikazuje poziciju i oznaku ukupno 12 odabranih projektnih varijabli na poprečnom presjeku kutijastog nosača. Pri tom je  $t_p$  debljina oplata,  $h_w$  visina struka ukrepe,  $t_w$  debljina struka ukrepe,  $b_f$  širina pojasa ukrepe,  $t_{wf}$  debljina struka i pojasa ukrepe (za L profil), a oznake *DP* (donji pojas), *S* (struk) i *GP* (donji pojas) označavaju poziciju projektne varijable unutar poprečnog presjeka kutijastog nosača. Inicijalne, minimalne i maksimalne vrijednosti projektnih varijabli te korak projektne varijable u optimizacijskom algoritmu prikazuje Tablica 6.33.



Slika 6.27 Projektne varijable kutijastog nosača za Primjer 9.

Tablica 6.33 Inicijalne, minimalne i maksimalne vrijednosti projektnih varijabli te korak projektne varijable u optimizacijskom algoritmu za Primjer 9.

Oznaka	Inicijal. [mm]	Min. [mm]	Max. [mm]	Korak [mm]
$t_{p\_DP}$				
$t_{p1\_S}$	4.76	3.5	5.0	0.5
$t_{p2\_S}$				
$t_{p\_GP}$				
$h_{w\_DP}$				
$h_{w\_S}$	50.8	40.0	60.0	1.0
$h_{w\_GP}$				
$b_{f\_S}$	15.88	12.0	19.0	1.0
$b_{f\_GP}$				
$t_{w\_DP}$	6.35	5.0	7.5	0.5
$t_{wf\_S}$	4.76	3.5	5.0	0.5
$t_{wf\_GP}$				

Optimizacija je provedena koristeći MOPSO (*eng. Multi-objective Particle Swarm Optimization*) algoritam te je ukupno generirano 25 000 različitih projekata (100 čestica, 250 iteracija). U primjeru su prikazana dva različita pristupa dobivanja Pareto fronte. Prvim pristupom se prije svega odredila “deterministička“ Pareto fronta ( $\min A_{pp}$ ,  $\max M_{uh}$ ,  $\max M_{us}$ ). Za sva tako dobivena nedominirana rješenja izračunate su i vjerojatnosne mjere sigurnosti  $P_{F\_M_{uh}}$  i  $P_{F\_M_{us}}$  određene analizom pouzdanosti, a zatim je provedeno “vjerojatnosno“ filtriranje tih projekata s ciljevima:  $\min A_{pp}$ ,  $\min P_{F\_M_{uh}}$ ,  $\min P_{F\_M_{us}}$ . Drugim pristupom se odredila “vjerojatnosna“ Pareto fronta gdje su se mjere sigurnosti određene analizom pouzdanosti, razmatrale kao cilj ( $\min A_{pp}$ ,  $\min P_{F\_M_{uh}}$ ,  $\min P_{F\_M_{us}}$ ) tijekom višeciljne optimizacije. Pri tom je  $A_{pp}$  ukupna površina poprečnog presjeka kutijastog nosača (ekvivalentna je masi),  $M_{uh}$  vertikalni granični moment u pregibu,  $M_{us}$  vertikalni granični moment u progibu,  $C$  je kritična ili granična nosivost sastavnih elemenata, a  $P_{F\_M_{uh}}$  i  $P_{F\_M_{us}}$  su vjerojatnosti oštećenja definirane sljedećim izrazima:

$$P_{F\_M_{uh}} = P(M_{uh}(X_1, \dots, X_{22}) - X_{23} < 0) \quad (6.12)$$

$$P_{F\_M_{us}} = P(M_{us}(X_1, \dots, X_{22}) - X_{24} < 0) \quad (6.13)$$

gdje su  $X_1, \dots, X_{24}$  razmatrane slučajne varijable.

Vertikalni granični moment u progibu i pregibu (sukladno modificiranoj Calwellovoj metodi – Paik i Mansour) kao i kritična ili granična nosivost sastavnih elemenata se određuju prema analitičkim izrazima definiranim u [58], a njihove vrijednosti za inicijalni projekt prikazuje Tablica 6.34.

Tablica 6.34 Ukupna površina poprečnog presjeka, vertikalni granični momenti i kritična ili granična nosivost sastavnih elemenata kutijastog nosača za Primjer 9.

$A_{pp\_inic}$	[mm <sup>2</sup> ]	28225
$M_{uh\_inic}$	[kNm]	2314
$M_{us\_inic}$	[kNm]	2439
$C_{DP\_inic}$	[N/mm <sup>2</sup> ]	216.20
$C_S\_inic$	[N/mm <sup>2</sup> ]	152.88
$C_{GP\_inic}$	[N/mm <sup>2</sup> ]	220.85

Tablica 6.35 prikazuje ograničenja (za oba pristupa) optimizacije kutijastog nosača (oznaka *inic* predstavlja oznaku inicijalnog projekta), dok Tablica 6.36 prikazuje ciljeve.



Tablica 6.35 Ograničenja optimizacije kutijastog nosača za Primjer 9.

Ograničenje 1	$M_{uh} \geq M_{uh\_inic}$
Ograničenje 2	$M_{us} \geq M_{us\_inic}$
Ograničenje 3	$C_{DP} \geq C_{DP\_inic}$
Ograničenje 4	$C_S \geq C_{S\_inic}$
Ograničenje 5	$C_{GP} \geq C_{GP\_inic}$
Ograničenje 6	$A_{pp} \leq 30\ 000$

Tablica 6.36 Ciljevi optimizacije kutijastog nosača za Primjer 9.

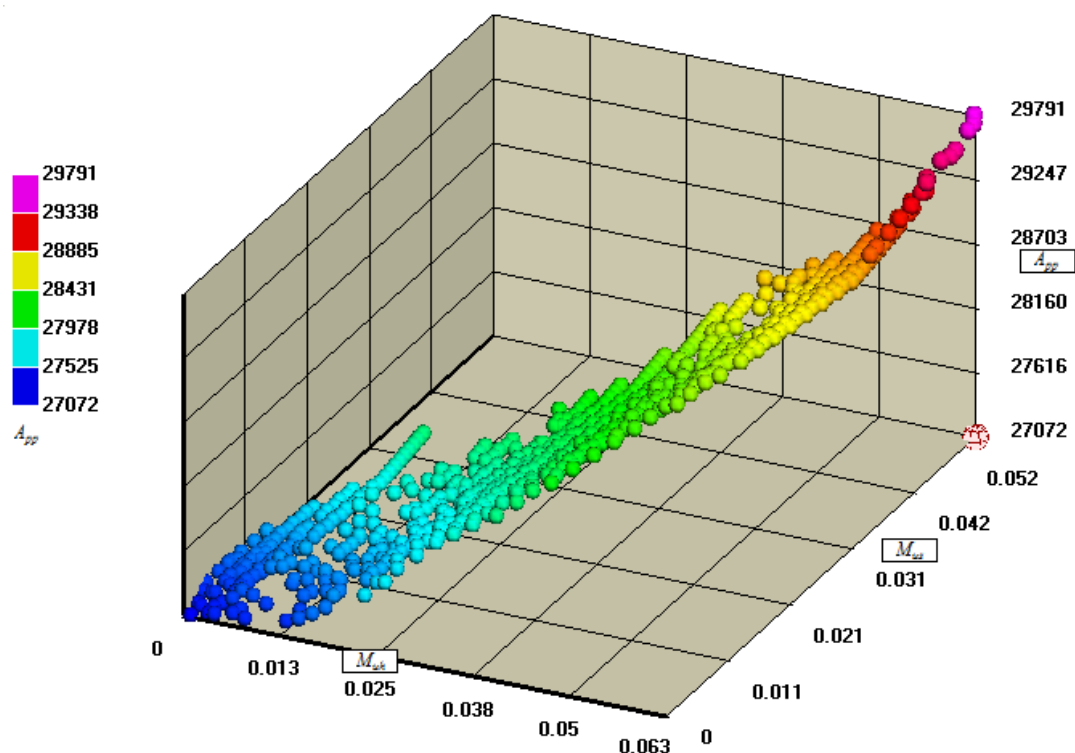
	Prvi pristup		Drugi pristup
	Deterministički	Vjerojatnosno filtriranje	(vjerojatnosno)
Cilj 1	$\min A_{pp}$	$\min A_{pp}$	$\min A_{pp}$
Cilj 2	$\max M_{uh}$	$\min P_{F\_}M_{uh}$	$\min P_{F\_}M_{uh}$
Cilj 3	$\max M_{us}$	$\min P_{F\_}M_{us}$	$\min P_{F\_}M_{us}$

Karakteristike slučajnih varijabli prikazuje Tablica 6.37. Srednje vrijednosti ( $\mu_X$ ) dimenzija konstrukcijskih elemenata različitih projekata kutijastog nosača su generirane optimizacijskim algoritmom, dok su razdiobe i koeficijenti varijacije ( $COV_X$ ) projektnih slučajnih varijabli uzete prema Downes i Pu [37]. Srednja vrijednost Youngovog modula elastičnosti  $E$  (za svaki pojedini materijal kutijastog nosača) je jednaka  $1.025 \cdot E_n$ , gdje su  $E_n$  nominalne vrijednost Youngovog modula elastičnosti pojedinih materijala koje prikazuje Slika 6.26. Također prema Downes i Pu [37], momenti kojima je opterećen kutijasti nosač su definirani kao  $0.8 M_u$  (za pregib  $M_{dh} = 0.8 M_{uh}$ , za progib  $M_{ds} = 0.8 M_{us}$ ). Statističke karakteristike granice tečenja materijala  $\sigma_Y$  (lognormalna razdioba,  $COV = 8\%$  i  $E[\sigma_Y] = 1.21\sigma_{Yn}$ ) su uzete prema [30], gdje su  $\sigma_{Yn}$  nominalne vrijednost granice tečenja pojedinih materijala koje prikazuje Slika 6.26. Korelacijski koeficijenti između debljina različitih konstrukcijskih elemenata su pretpostavljeni ( $\rho_{ij} = 0.8$  za  $i \neq j$ ;  $\rho_{ij} = 1.0$  za  $i = j$ ;  $i, j = 1 \dots 7$ ). Nesigurnosti modeliranja (graničnog momenta i momenta opterećenja) nisu uzete u razmatranje s obzirom da je u optimizacijskom procesu, prilikom generiranja Pareto fronte, bitan samo relativan odnos između projekata (nesigurnosti su jednake za sve projekte).

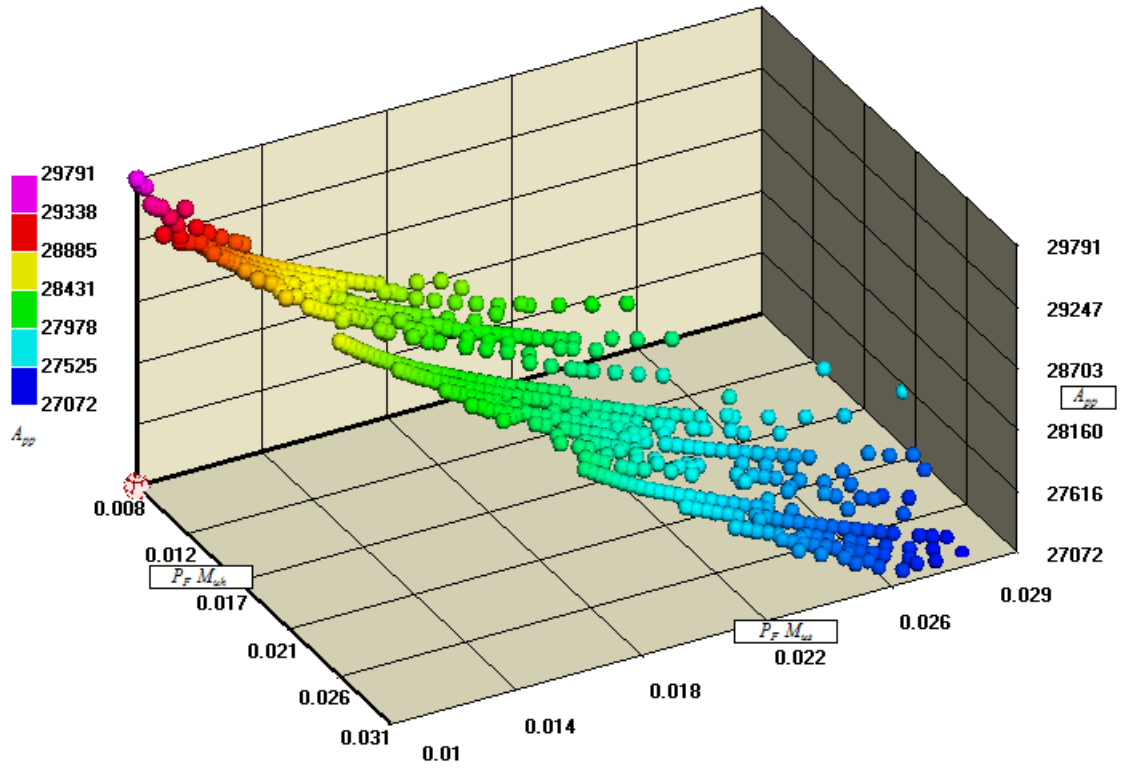
Tablica 6.37 Karakteristike slučajnih varijabli za Primjer 9.

Slučajna varijabla	Oznaka	Razdioba	$\mu_X$	$COV_X$ [%]
4 × $t_p$ [mm]	$X_1 - X_4$	Normalna	Generirano optimizacijskim algoritmom	1.0
$t_w$ [mm]	$X_5$	Normalna		1.0
2 × $t_{wf}$ [mm]	$X_6 - X_7$	Normalna		1.0
3 × $h_w$ [mm]	$X_8 - X_{10}$	Normalna		2.0
2 × $b_f$ [mm]	$X_{11} - X_{12}$	Normalna		2.0
5 × $E$ [N/mm <sup>2</sup> ]	$X_{13} - X_{17}$	Normalna	$1.025 \cdot E_n$	2.0
5 × $\sigma_Y$ [N/mm <sup>2</sup> ]	$X_{18} - X_{22}$	Lognormalna	$1.21 \cdot \sigma_{Yn}$	8.0
$M_{dh}$ [kNm]	$X_{23}$	Gumbel (max)	1851.41	20.0
$M_{ds}$ [kNm]	$X_{24}$	Gumbel (max)	1951.91	20.0

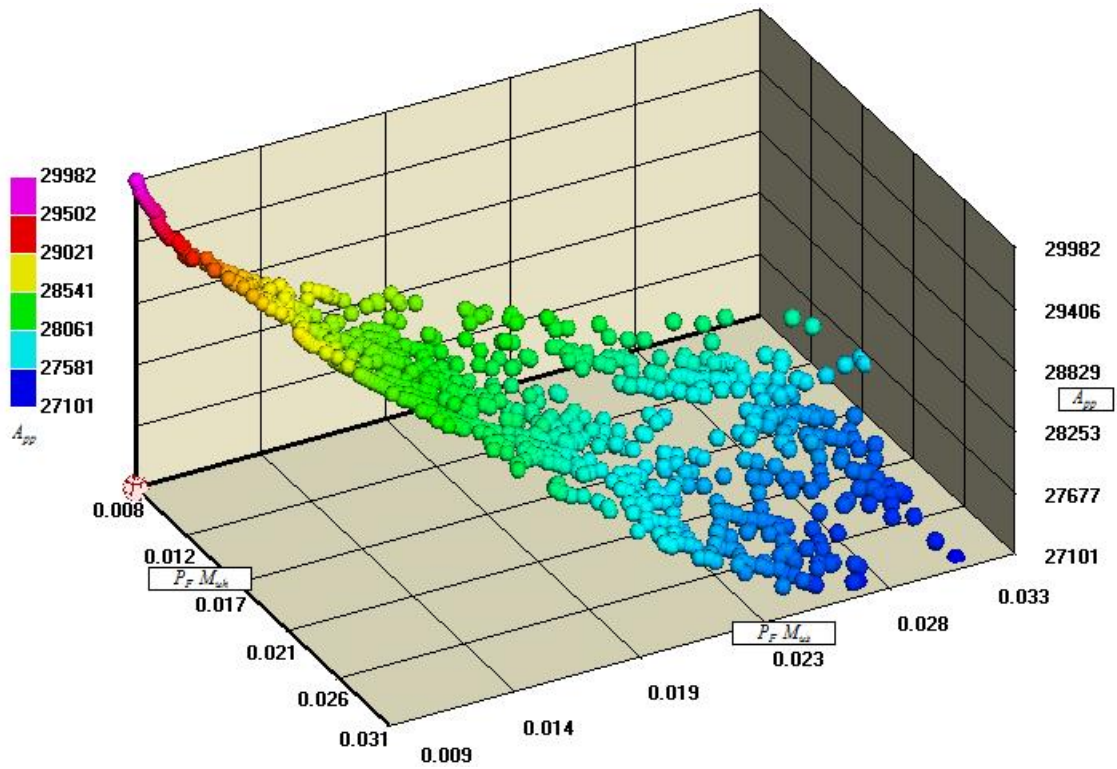
Slika 6.28 prikazuje rezultirajuću Pareto frontu “determinističke“ optimizacije sa 579 nedominiranih projekata, dok Slika 6.29 prikazuje Pareto frontu dobivenu filtriranjem “determinističke“ Pareto fronte korištenjem vjerojatnosnih mjera (ostalo je 509 nedominiranih projekata). Drugim pristupom je dobivena Pareto fronta koja se sastoji od 706 nedominiranih projekata (Slika 6.30).



Slika 6.28 “Deterministička“ Pareto fronta prvog pristupa za Primjer 9.



Slika 6.29 “Vjerojatnosno“ filtrirana “deterministička“ Pareto fronta prvog pristupa za Primjer 9.



Slika 6.30 “Vjerojatnosna“ Pareto fronta drugog pristupa za Primjer 9.

Tablica 6.38 prikazuje područje projektnih varijabli i atributa za nedominirane projekte “vjerojatnosnih“ Pareto fronti (Slika 6.29 i Slika 6.30). Usporedbom rezultata dvaju prikazanih pristupa može se zaključiti da ne postoji značajna razlika u kvaliteti rezultata. Očekivano, drugi pristup, u kojem su vjerojatnosne mjere sigurnosti korištene kao cilj tijekom optimizacijskog procesa, je rezultirao s nešto većom širinom Pareto fronte po tim ciljevima. Također je pronađeno oko 40% više nedominiranih projekata. Ipak, ti rezultati ostvareni su uz veliku cijenu utrošenih računalnih resursa s obzirom da drugi pristup traje 19 minuta i 40 sekundi, dok je ukupno proračunsko vrijeme prvog pristupa 32 sekunde. S obzirom na kvalitetu rješenja dobivenim prvim pristupom, mogla bi se predložiti proširena verzija prvog pristupa u kojoj bi se osim samog filtriranja zapravo provelo nekoliko dodatnih ciklusa optimizacije s determinističkim mjerama sigurnosti. Ukupno vrijeme takvog “hibridnog“ pristupa zacijelo bi bilo značajno manje od čistog “vjerojatnosnog“ pristupa, dok bi kvaliteta rješenja bila podjednaka.

Tablica 6.38 Područje projektnih varijabli i atributa nedominiranih projekata dviju različitih “vjerojatnosnih“ Pareto fronti za Primjer 9.

		Prvi pristup		Drugi pristup	
		Min.	Max.	Min.	Max.
Atributi	$A_{pp}$	27072	29791	27101	29982
	$P_F M_{uh}$	0.00777	0.03052	0.00751	0.03073
	$P_F M_{us}$	0.00956	0.02949	0.00898	0.03283
Projektne varijable	$t_{p\_DP}$	4.0	5.0	4.0	5.0
	$t_{p1\_S}$	5.0	5.0	5.0	5.0
	$t_{p2\_S}$	3.5	4.0	3.5	3.5
	$t_{p\_GP}$	5.0	5.0	4.5	5.0
	$h_{w\_DP}$	54.0	60.0	52.0	60.0
	$h_{w\_S}$	40.0	55.0	40.0	60.0
	$h_{w\_GP}$	51.0	60.0	52.0	60.0
	$b_{f\_S}$	12.0	12.0	12.0	18.0
	$b_{f\_GP}$	12.0	19.0	12.0	19.0
	$t_{w\_DP}$	6.5	7.5	6.0	7.5
	$t_{wf\_S}$	3.5	4.5	3.5	4.5
	$t_{wf\_GP}$	4.0	5.0	3.5	5.0

Kad se u projektnoj proceduri odabere određeni projekt za njega je potrebno provesti analizu pouzdanosti te bi se u obzir trebale uzeti i nesigurnosti modeliranja (graničnog momenta i momenta opterećenja). Na taj bi se način točnije odredila vjerojatnost oštećenja. Analiza pouzdanosti se tada može provesti i Monte Carlo metodom s obzirom da sada govorimo o jednom projektu. Također je potrebno provesti i analizu senzitivnosti vjerojatnosti oštećenja.

## 7 Zaključak

Ovim radom razvijena je nova metoda za analizu pouzdanosti koja se temelji na određivanju FGV funkcije performanse. Metoda se odvija u dva glavna koraka. U prvom se, metodom smanjenja dimenzionalnosti, odrede statistički momenti oko ishodišta FGV funkcije performanse. Zatim se u drugom koraku odredi oblik FGV koji zadovoljava tako određene statističke momente. Osim opisane, potpuno nove metodologije određivanja vjerojatnosti oštećenja, izvorni doprinos ovog rada je i modifikacija metode smanjenja dimenzionalnosti te razvoj procedure za određivanje oblika FGV koja zadovoljava proizvoljni broj statističkih momenata. Modifikacijom se umjesto korištenjem formula numeričke kvadrature u kojima figuriraju statistički momenti, integracijske točke i težinske faktore za svaku slučajnu varijablu, određuje korištenjem Gauss-Hermiteove integracije standardne normalne razdiobe, te transformiranjem te točke u realan prostor. Integrirajući na ovaj način nema potrebe za rješavanjem linearnog sustava jednadžbi i pronalaženjem korijena jednadžbe polinoma prilikom određivanja integracijskih točaka i njihovih odgovarajućih težinskih faktora (kao što je to slučaj kod formula numeričke kvadrature u kojima figuriraju statistički momenti), a uz to je postignut i stabilan algoritam. Najvažnija pretpostavka kod određivanja oblika FGV funkcije performanse je da se ona može prikazati kao normalizirani umnožak dvije normalne kumulativne funkcije razdiobe. S obzirom da tako pretpostavljena FGV mora zadovoljiti proizvoljni broj statističkih momenata određenih modificiranom metodom smanjenja dimenzionalnosti, u ovom radu su izvedeni analitički izrazi za određivanje proizvoljnog statističkog momenta oko ishodišta tako pretpostavljene FGV. Oblik FGV je u potpunosti definiran s četiri parametra koja se određuju iz nelinearnog sustava jednadžbi u kojem figuriraju gore navedeni analitički izrazi.

O okviru ovog rada je razvijen računalni program FASTREL u kojem je implementirana predložena metoda za analizu pouzdanosti. Računalni program (a samim tim i predložena metoda) je validiran i verificiran na nizu primjera, te se može zaključiti da je modifikacijom metode smanjenja dimenzionalnosti u kombinaciji s predloženom metodom za određivanje FGV, moguće uza zadovoljavajuću točnost procjene vjerojatnosti oštećenja značajno smanjiti potrebno računalno vrijeme za analizu pouzdanosti u odnosu na trenutačno korištene metode. Smanjenje računalnog vremena, u odnosu na trenutačno korištene metode (FORM, SORM), još više dolazi do izražaja što je veći broj slučajnih varijabli.

Sukladno tome može se zaključiti da se korištenjem navedene metode može omogućiti razmatranje sigurnosti u kontekstu projektnih ograničenja i/ili cilja višekriterijske optimizacije u konceptualnoj fazi projektiranja.

U okviru budućih istraživanja moglo bi se razmotriti i druge načine aproksimacije funkcije performanse pomoću koje će se, u metodi smanjenja dimenzionalnosti, dobiti točniji izrazi za određivanje statističkih momenata oko ishodišta FGV funkcije performanse. Ukoliko se metoda koristi u optimizaciji, mogao bi se razmotriti novi način određivanja broja integracijskih točaka. U predloženoj metodi se broj integracijskih točaka (za slučaj upotrebe u optimizaciji) određuje na način da se za određenu funkciju performanse odredi vjerojatnost oštećenja metodom Monte Carlo. Zatim se odredi minimalan broj integracijskih točaka kojim će predložena metoda odrediti vjerojatnost oštećenja dovoljno točno u usporedbi s Monte Carlo metodom. U slučaju analize konstrukcija kad nije toliko bitna brzina može se koristiti veći broj točaka, npr. 8 ili 10. Također bi bilo zanimljivo izvesti analitičke izraze za određivanje četiri parametra koja definiraju FGV funkcije performanse, jer bi se na taj način dodatno dobilo na brzini metode, s obzirom da u tom slučaju ne bi bilo potrebe za rješavanjem nelinearnog sustava jednadžbi. Osim toga, mogao bi se izvesti analitički izraz za određivanje vjerojatnosti oštećenja, s obzirom da se integral FGV funkcije performanse (u području od  $-\infty$  do 0) određuje koristeći numeričku metodu.

## Literatura

- [1] Zanic V., Kitarovic S., Prebeg P.: "Safety as Objective in Multicriterial Structural Optimization", Proceedings of the ASME 2010, 29th International Conference on Ocean, Offshore and Arctic Engineering, Shanghai, China, 2010, pp. 899-910.
- [2] Zanic V., Das P.K., Pu Y., Faulkner D.: "Multiple criteria synthesis techniques applied to reliability-based design of SWATH ship structure", Proceedings of the Congress Integrity of Offshore Structures, EMAS Scientific Publications, pp. 387-415, Glasgow 1993.
- [3] Zanic V., Stipevic M.: "Sensitivity of Reliability-Based Designs to Correlation Structure of the Input Variables", 2nd ASRANet Colloquium, Barcelona, 2004, pp. 1-8.
- [4] Lee I., Choi K.K., Du L., Gorsich D.: "Dimension reduction method for reliability-based robust design optimization", Computers and Structures 86 (2008), pp. 1550-1562.
- [5] Madsen H.O., Krenk S., Lind N.C.: "Methods of Structural Safety", Prentice-Hall Inc, Englewood Cliffs, 1986.
- [6] Pu Y.: "Monte Carlo Simulation Method for Structural Reliability", Structural Risk & Reliability Course, Lecture 7, 17-19 October 2011, Glasgow.
- [7] Press W.H., Teukolsky S.A., Vetterling W.T. and Flannery B.P.: "Numerical Recipes in C", Cambridge University Press, 1992.
- [8] Limić N.: "Monte Carlo simulacije slučajnih veličina, nizova i procesa", Element, Zagreb 2002.
- [9] Melchers R.: "Structural reliability analysis and prediction", Ellis Horwood/Wiley, Chichester, UK, 1987.
- [10] Engelund S. and Rackwitz R.: "Benchmark study on importance sampling techniques in structural reliability", Structural Safety, 12(4), pp. 255-276, 1993.
- [11] Ship Structural Committee: "An Introduction to Structural Reliability Theory", Technical Report SSC-351, 1990.
- [12] Das P.K.: "Structural Reliability Analysis – I&II", Structural Risk & Reliability Course, Lecture 5&6, 17-19 October 2011, Glasgow.



- [13] Du X.: "First Order and Second Reliability Methods", Probabilistic Engineering Design, Chapter 7, University of Missouri-Rolla, September 2005.
- [14] Lebrun R. and Dutfoy A.: "Do Rosenblatt and Nataf isoprobabilistic transformations really differ?", Probabilistic Engineering Mechanics, 24(2009): pp. 577-584.
- [15] Zhao Y.-G., Ono T.: "New approximations for SORM: Parts 1 and 2 ", Journal of the Engineering Mechanics, 1990, Vol. 125, No. 1, pp. 79-93.
- [16] Der Kiureghian A., Dakessian T.: "Multiple design points in first and second-order reliability", Structural Safety 20, pp. 37-49, 1998.
- [17] Zhao YG., Ono T.: "Moment methods for structural reliability", Structural Safety 23 (2001), pp. 47-75.
- [18] Ticky M.: "First-order third-moment reliability method", Structural Safety 16 (1994), pp. 189-200.
- [19] Rahman S., Xu H.: "A univariate dimension-reduction method for multi-dimensional integration in stochastic mechanics", Probabilistic Engineering Mechanics 19 (2004), pp. 393-408.
- [20] Xu H., Rahman S.: "Decomposition methods for structural reliability analysis", Probabilistic Engineering Mechanics 20 (2005), pp. 239-250.
- [21] Li G., Zhang K.: "A combined reliability analysis approach with dimension reduction method and maximum entropy method", Structural Multidisciplinary Optimization (2011) 43: pp. 121-134.
- [22] Sorensen J.D.: "Structural Reliability Theory and Risk Analysis", Aalborg, February 2004.
- [23] Blagojević B.: "Modeliranje strukturnih sustava broda događajima", Doktorski rad, Zagreb 2005.
- [24] Thoft-Christensen P., Murotsu Y.: "Application of Structural System Reliability Theory", 1986.
- [25] Piric, K.: "Reliability analysis based on the statistical moments calculation and fitting of the performance function's probability density function", Proceedings of the ASRANet Conference, London, 2012.

- [26] Liu P.-L., Der Kiureghian: "A. multivariate distribution models with prescribed marginals and covariances", *Probab Eng Mech*, 1986, 1(2): pp. 105-112.
- [27] Liu P.-L., Lin H.-Z., Der Kiureghian A.: "CalREL User Manual", August 1989-Last Revised on September 1992.
- [28] OCTOPUS: "Software documentation", University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and naval Architecture, Zagreb, Croatia, 2009.
- [29] MAESTRO: "Software documentation", DRS-C3 Advanced Technology Center, Stevensville, MD, USA, 2007.
- [30] Hughes O.F., Paik J.K.: "Ship structural analysis and design", The Society of Naval Architects and Marine Engineers, 2010.
- [31] ISSC Technical Committee III.1: "Ultimate strength", *Proceedings of the 17th International Ship and Offshore Structures Congress*, Seoul, 2009, Vol.1.
- [32] IACS: "Common structural rules for bulk carriers", 2012.
- [33] IACS: "Common structural rules for double hull oil tankers", 2012.
- [34] Det Norske Veritas, Classification Notes No. 30.6.: "Structural Reliability Analysis of Marine Structures", July, 1992.
- [35] Friis Hansen P.: "Reliability Analysis of a Midship Section", PhD Thesis, Department of Naval Architecture and Offshore Engineering, Technical University of Denmark, January 1994.
- [36] Parunov J., Andric J., Corak M., Kitarovic S.: "Structural reliability assessment of containership at time of accident", *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part M - Journal of Engineering for the Maritime Environment*, 2014.
- [37] Downes J., Pu Y.: "Reliability-based Sensitivity Analysis of Ships", *Proc. IMechE, Part M, Journal of Engineering for Maritime Environment*, March 2005, Vol. 219, Issue 1, pp. 11-23.
- [38] Okasha Nader M., Frangopol Dan M.: "Efficient Method Based on Optimization and Simulation for the Probabilistic Strength Computation of the Ship Hull", *Journal of Ship Research*, December 2010, Vol. 54, No. 4, pp. 244-256.
- [39] Teixeira A.P., Soares C.G.: "Reliability analysis of a tanker subjected to combined sea states", *Probabilistic Engineering Mechanics*, 2009, 24: pp. 493-503.

- [40] Zanic V., Piric K., Kitarovic S.: "Reliability and robustness based design attributes for multi-criteria decision making", Proceedings of the ASME 2013, 30th International Conference on Ocean, Offshore and Arctic Engineering, Nantes, France, June 2013.
- [41] Noh Y., Choi K.K., Du L.: "New Transformation of Dependent Input Variables Using Copula for RBDO", 7<sup>th</sup> World Congresses of Structural and Multidisciplinary Optimization, COEX Seoul, Korea, 2007.
- [42] [http://www.efunda.com/math/num\\_integration/findgausshermite.cfm](http://www.efunda.com/math/num_integration/findgausshermite.cfm)
- [43] Ditlevsen O., Madsen H.O.: "Structural Reliability Methods", Internet edition 2.2.5, <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.121.3682&rep=rep1&type=pdf>, July, 2005.
- [44] [http://people.sc.fsu.edu/~%20jburkardt/f77\\_src/minpack/minpack.f](http://people.sc.fsu.edu/~%20jburkardt/f77_src/minpack/minpack.f)
- [45] [http://people.sc.fsu.edu/~%20jburkardt/f\\_src/quadpack/quadpack.f90](http://people.sc.fsu.edu/~%20jburkardt/f_src/quadpack/quadpack.f90)
- [46] <http://www.math.wsu.edu/faculty/genz/software/fort77/mvndstpack.f>
- [47] Marine Accident Investigation Branch (MAIB): "Report on the investigation of the structural failure of MSC Napoli", Report no. 9, 2008.
- [48] <http://officerofthewatch.com/2012/10/29/msc-napoli-structural-failure/>
- [49] Kitarovic S, Andric J, Zanic V: "Extended IACS incremental-iterative method for calculation of hull girder ultimate strength in analysis and design", Proceedings of International workshop - Advanced Ship Design for Pollution Prevention (ed Soares C.G., Parunov J.), Split, Croatia, 2009, pp. 103-112, London: Taylor & Francis.
- [50] ...Rules for the Classification of Steel Ships, Part B, Chapter 7. Bureau Veritas, July 2013.
- [51] Khalid H., Olcer A., Turan O., "Seakeeping Analysis Report of ROPAX", part of Deliverable D.7.1, EU FP6 project IMPROVE, <http://www.improve-project.eu/>, 2009.
- [52] Leheta H.W., Mansour A.E.: "Reliability-based Method for Optimal Structural Design of Stiffened Panels", Marine Structures 10 (1997), pp. 323-352.
- [53] Lloyd's Register of Shipping: "LR.PASS Personal Computer Programs User's Manual: Vol 2., Direct Calculations, London: Lloyd's Register of Shipping, 1997.
- [54] ISSC: "Report of Committee II.2 on Non-Linear Structural Response", 7th International Ship Structures Congress, Paris, 1979.

- [55] Dow R.S., Hugill R.C., Clark J.D., Smith C.S.: "Evaluation of Ultimate Ship Hull Strength", Proceedings of Extreme Loads Response Symposium, pp.133-148, Arlington 1981.
- [56] Frieze P.A., Lin Y.-T.: "Ship Longitudinal Strength Modeling for Reliability Analysis", Proceedings of Marine Structural Inspection, Maintenance and Monitoring Symposium, Arlington 1991.
- [57] Dowling P.J., Chatterjee S., Frieze P.A., Moolani F.M.: "Experimental and predicted collapse behavior of rectangular steel box girders", Proceedings of the International Conference on Steel Box Girder Bridges, Institution of Civil Engineers, London, 1973.
- [58] Ship Structure Committee: "Assessment of Reliability of Ship Structures", SSC-398, 1997.

## Životopis

Karlo Pirić, dipl.ing.brodogradnje rođen je 23. studenog 1983. godine u Splitu, gdje je završio osnovnu školu. 2002. godine završio je III. gimnaziju u Splitu, a 2007. godine i studij brodogradnje na Fakultetu strojarstva i brodogradnje Sveučilišta u Zagrebu. Dobitnik je “Top stipendije“ tjednika Nacional, prestižne stipendije u Republici Hrvatskoj 2006. godine. Poslijediplomski doktorski studij brodogradnje, smjer brodogradnja i pomorska tehnika upisao je 2008. godine. Od iste godine zaposlen je na Fakultetu strojarstva i brodogradnje Sveučilišta u Zagrebu na radnom mjestu znanstvenog novaka (suradničko zvanje asistent) na Zavodu za brodogradnju i pomorsku tehniku, Katedra za konstrukciju plovniha objekata. Učestvuje u nastavi iz redovitih kolegija Konstrukcija broda I i Čvrstoća broda te izbornog kolegija Podobnost i pouzdanost konstrukcija. Područje znanstveno-istraživačkog rada vezano je uz teoriju pouzdanosti konstrukcija. Koautor je devet međunarodno recenziranih, objavljenih i prezentiranih konferencijskih radova te je izlagao i/ili učestvovao u radu nekoliko međunarodnih skupova. Učestvovao je u nekoliko domaćih i međunarodnih znanstvenih i tehnologijskih projekata: Višekriterijski projektni modeli u osnivanju i konstrukciji broda i zrakoplova (2007–2012, znanstveni projekt MZOS-a); Design of improved and innovative products using integrated decision support system for ship production and operation – IMPROVE (2006–2009, EU FP6 STREP); CREST CSR(T/BC) Računalni programi za evaluaciju konstrukcije tankera i brodova za prijevoz rasutog tereta prema pravilima IACS-a (2009, projekt HRB-a). Izvrsno se služi engleskim jezikom u čitanju, pisanju i govoru. Oženjen.

## Curriculum Vitae

Karlo Pirić was born on November 23rd 1983 in Split (Republic of Croatia), where he attended comprehensive school. He finished IIIrd Gymnasium in Split in 2002 and in 2007 graduated on the study of Naval Architecture at the University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture. He was awarded with “Top grant” of journal Nacional, prestige grant in Republic of Croatia, in 2006. In 2008 he enrolled in the postgraduate study of Naval Architecture at the same institution. During the same year he was employed by the Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture as a research assistant at the Department of Naval Architecture and Ocean engineering, Chair of Ship Structure Design. He participates in exercise lectures of the courses in Ship Structure I, Ship Structural Strength, Feasibility and Reliability of Structures. His scientific research work is generally related to the field of structural reliability theory. He is co-author of nine internationally reviewed and published conference papers and he participated in a several domestic and international symposiums. He participated in several domestic and international projects: Multiple criteria design models in ship and aircraft structural design (2007–2012, RC MSES project); Design of improved and innovative products using integrated decision support system for ship production and operation – IMPROVE (2006–2009, EU FP6 STREP); CREST CSR(T/BC) Software for ship structural evaluation according to IACS CSR (2009, CRS project). He is fluent in spoken and written English. Married.

## 8 Prilozi

### 8.1 Izvodi i konačni analitički izrazi integrala $I_k$

#### 8.1.1 Integral $I_1$

Integral  $I_1$ , vidi izraz (4.54), je dan sljedećim izrazom:

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \phi\left(\frac{g - \mu_1}{\sigma_1}\right) \cdot \phi\left(\frac{\mu_2 - g}{\sigma_2}\right) dg \quad (8.1)$$

Koristeći izraz (4.48) vrijedi:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{g-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2} \right) \cdot \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\mu_2-g}{\sigma_2}\right)^2} \right) dg \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{g-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{\mu_2-g}{\sigma_2}\right)^2\right]} dg \end{aligned} \quad (8.2)$$

Izraz u uglatim zagradama se može napisati kao:

$$\begin{aligned} \left(\frac{g - \mu_1}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{\mu_2 - g}{\sigma_2}\right)^2 &= \frac{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) \cdot g^2 - 2 \cdot (\mu_1 \sigma_2^2 + \mu_2 \sigma_1^2) \cdot g + \mu_1^2 \sigma_2^2 + \mu_2^2 \sigma_1^2}{\sigma_1^2 \sigma_2^2} \\ &= \frac{g^2 - 2 \cdot \frac{\mu_1 \sigma_2^2 + \mu_2 \sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \cdot g + \frac{\mu_1^2 \sigma_2^2 + \mu_2^2 \sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}{\frac{\sigma_1^2 \sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} \\ &= \left( \frac{g - \frac{\mu_1 \sigma_2^2 + \mu_2 \sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}{\frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}} \right)^2 + \left( \frac{\mu_2 - \mu_1}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} \right)^2 \end{aligned} \quad (8.3)$$

Uvrštavanjem izraza (8.3) u izraz (8.2) dobiva se:

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{\mu_2 - \mu_1}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} \right)^2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{g - \frac{\mu_1 \cdot \sigma_2^2 + \mu_2 \cdot \sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} - \frac{\sigma_1 \cdot \sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} \right)^2} dg \\
 &= \phi \left( \frac{\mu_2 - \mu_1}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} \right) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{g - \frac{\mu_1 \cdot \sigma_2^2 + \mu_2 \cdot \sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} - \frac{\sigma_1 \cdot \sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} \right)^2} dg
 \end{aligned} \tag{8.4}$$

Uvođenjem supstitucije:

$$t = \frac{g - \frac{\mu_1 \cdot \sigma_2^2 + \mu_2 \cdot \sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}{\frac{\sigma_1 \cdot \sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}}, \quad dt = \frac{1}{\frac{\sigma_1 \cdot \sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}} \cdot dg \Rightarrow dg = \frac{\sigma_1 \cdot \sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} \cdot dt \tag{8.5}$$

pri čemu su donja i gornja granica također  $-\infty$  i  $\infty$ , izraz (8.4) postaje:

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \frac{\sigma_1 \cdot \sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} \cdot \phi \left( \frac{\mu_2 - \mu_1}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} \right) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} t^2} dt \\
 &= \frac{\sigma_1 \cdot \sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} \cdot \phi \left( \frac{\mu_2 - \mu_1}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} \right) \cdot \Phi(\infty)
 \end{aligned} \tag{8.6}$$

a prema izrazu (4.49) konačni analitički izraz za  $I_1$  glasi:

$$I_1 = \frac{\sigma_1 \cdot \sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} \cdot \phi \left( \frac{\mu_2 - \mu_1}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} \right) \tag{8.7}$$

### 8.1.2 Integral $I_2$

Integral  $I_2$ , vidi izraz (4.55), je dan sljedećim izrazom:

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \phi \left( \frac{g - \mu_1}{\sigma_1} \right) \cdot \Phi \left( \frac{\mu_2 - g}{\sigma_2} \right) dg \tag{8.8}$$

Primjenom teorema o deriviranju integrala po parametru, gdje se  $I_2$  parcijalno derivira po parametru  $\mu_2$ , dobiva se:



$$\partial_{\mu_2} I_2 = \frac{1}{\sigma_2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \phi\left(\frac{g - \mu_1}{\sigma_1}\right) \cdot \phi\left(\frac{\mu_2 - g}{\sigma_2}\right) dg \quad (8.9)$$

S obzirom da je integral u gornjem izrazu jednak  $I_1$ , vidi izraz (8.1), uvrštavanjem njegovog konačnog analitičkog izraza, vidi izraz (8.7), u izraz (8.9) dobiva se:

$$\partial_{\mu_2} I_2 = \frac{\sigma_1}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} \cdot \phi\left(\frac{\mu_2 - \mu_1}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}\right) \quad (8.10)$$

Sada se integriranjem izraza (8.10) dobiva:

$$I_2 = \frac{\sigma_1}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} \cdot \int \phi\left(\frac{\mu_2 - \mu_1}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}\right) d\mu_2 \quad (8.11)$$

Uvođenjem supstitucije:

$$t = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}, \quad dt = \frac{d\mu_2}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} \quad (8.12)$$

za izraz (8.11) vrijedi:

$$I_2 = \sigma_1 \cdot \int \phi(t) dt \quad (8.13)$$

odnosno koristeći izraze (4.49) i (8.12):

$$I_2 = \sigma_1 \cdot \Phi\left(\frac{\mu_2 - \mu_1}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}\right) + C \quad (8.14)$$

Iz uvjeta  $\lim_{\mu_2 \rightarrow -\infty} I_2 = 0$  slijedi da je konstanta integracije  $C = 0$  te konačni analitički izraz za  $I_2$  glasi:

$$I_2 = \sigma_1 \cdot \Phi\left(\frac{\mu_2 - \mu_1}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}\right) \quad (8.15)$$

### 8.1.3 Integral $I_3$

Integral  $I_3$ , vidi izraz (4.56), je dan sljedećim izrazom:

$$I_3 = \int_{-\infty}^{\infty} g \cdot \phi\left(\frac{g - \mu_1}{\sigma_1}\right) \cdot \Phi\left(\frac{\mu_2 - g}{\sigma_2}\right) dg \quad (8.16)$$

Koristeći metodu parcijalne integracije, vidi izraz (4.43), pri čemu je:

$$\begin{aligned} r &= \Phi\left(\frac{\mu_2 - g}{\sigma_2}\right) & ds &= g \cdot \phi\left(\frac{g - \mu_1}{\sigma_1}\right) dg \\ dr &= -\frac{1}{\sigma_2} \cdot \phi\left(\frac{\mu_2 - g}{\sigma_2}\right) dg & s &= \mu_1 \sigma_1 \cdot \Phi\left(\frac{g - \mu_1}{\sigma_1}\right) - \sigma_1^2 \cdot \phi\left(\frac{g - \mu_1}{\sigma_1}\right) \end{aligned} \quad (8.17)$$

izraz za  $I_3$  se može napisati kao:

$$\begin{aligned} I_3 &= \left\{ \Phi\left(\frac{\mu_2 - g}{\sigma_2}\right) \cdot \left[ \mu_1 \sigma_1 \cdot \Phi\left(\frac{g - \mu_1}{\sigma_1}\right) - \sigma_1^2 \cdot \phi\left(\frac{g - \mu_1}{\sigma_1}\right) \right] \right\} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \\ &\int_{-\infty}^{\infty} \left[ \mu_1 \sigma_1 \cdot \Phi\left(\frac{g - \mu_1}{\sigma_1}\right) - \sigma_1^2 \cdot \phi\left(\frac{g - \mu_1}{\sigma_1}\right) \right] \cdot \left[ -\frac{1}{\sigma_2} \cdot \phi\left(\frac{\mu_2 - g}{\sigma_2}\right) \right] dg \end{aligned} \quad (8.18)$$

S obzirom da prema izrazima (4.48) i (4.49) prvi član u izrazu (8.18) iščezava, izraz za  $I_3$  se pojednostavljuje:

$$I_3 = -\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \phi\left(\frac{g - \mu_1}{\sigma_1}\right) \cdot \phi\left(\frac{\mu_2 - g}{\sigma_2}\right) dg + \frac{\mu_1 \sigma_1}{\sigma_2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \Phi\left(\frac{g - \mu_1}{\sigma_1}\right) \cdot \phi\left(\frac{\mu_2 - g}{\sigma_2}\right) dg \quad (8.19)$$

Uzimajući u obzir da je u izrazu (8.19) prvi integral jednak  $I_1$ , vidi izraz (8.1), a drugi  $I_4$ , vidi izraz (8.22), izraz za  $I_3$  glasi:

$$I_3 = -\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2} \cdot I_1 + \frac{\mu_1 \sigma_1}{\sigma_2} \cdot I_4 \quad (8.20)$$

Nakon uvrštavanja konačnih analitičkih izraza za  $I_1$  i  $I_4$ , vidi izraze (8.7) i (8.29), konačni analitički izraz za  $I_3$  glasi:

$$I_3 = \mu_1 \sigma_1 \cdot \Phi\left(\frac{\mu_2 - \mu_1}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}\right) - \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2} \cdot \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} \cdot \phi\left(\frac{\mu_2 - \mu_1}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}\right) \quad (8.21)$$

### 8.1.4 Integral $I_4$

Integral  $I_4$ , vidi izraz (4.57), je dan sljedećim izrazom:

$$I_4 = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi\left(\frac{g - \mu_1}{\sigma_1}\right) \cdot \phi\left(\frac{\mu_2 - g}{\sigma_2}\right) dg \quad (8.22)$$

Primjenom teorema o deriviranju integrala po parametru, gdje se  $I_4$  parcijalno derivira po parametru  $\mu_1$ , dobiva se:

$$\partial_{\mu_1} I_4 = -\frac{1}{\sigma_1} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \phi\left(\frac{g - \mu_1}{\sigma_1}\right) \cdot \phi\left(\frac{\mu_2 - g}{\sigma_2}\right) dg \quad (8.23)$$

S obzirom da je integral u gornjem izrazu jednak  $I_1$ , vidi izraz (8.1), uvrštavanjem njegovog konačnog analitičkog izraza, vidi izraz (8.7), u izraz (8.23) dobiva se:

$$\partial_{\mu_1} I_4 = -\frac{\sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} \cdot \phi\left(\frac{\mu_2 - \mu_1}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}\right) \quad (8.24)$$

Sada se integriranjem izraza (8.24) dobiva:

$$I_4 = -\frac{\sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} \cdot \int \phi\left(\frac{\mu_2 - \mu_1}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}\right) d\mu_1 \quad (8.25)$$

Uvođenjem supstitucije:

$$t = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}, \quad dt = -\frac{d\mu_1}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} \quad (8.26)$$

za izraz (8.25) vrijedi:

$$I_4 = \sigma_2 \cdot \int \phi(t) dt \quad (8.27)$$

odnosno koristeći izraze (4.49) i (8.26):

$$I_4 = \sigma_2 \cdot \Phi\left(\frac{\mu_2 - \mu_1}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}\right) + C \quad (8.28)$$

Iz uvjeta  $\lim_{\mu_1 \rightarrow \infty} I_4 = 0$  slijedi da je konstanta integracije  $C = 0$  te konačni analitički izraz za  $I_4$  glasi:

$$I_4 = \sigma_2 \cdot \Phi \left( \frac{\mu_2 - \mu_1}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} \right) \quad (8.29)$$

### 8.1.5 Integral $I_5$

Integral  $I_5$ , vidi izraz (4.58), je dan sljedećim izrazom:

$$I_5 = \int_{-\infty}^{\infty} g \cdot \phi \left( \frac{g - \mu_1}{\sigma_1} \right) \cdot \phi \left( \frac{\mu_2 - g}{\sigma_2} \right) dg \quad (8.30)$$

Koristeći metodu parcijalne integracije, vidi izraz (4.43), pri čemu je:

$$\begin{aligned} r &= \phi \left( \frac{\mu_2 - g}{\sigma_2} \right) & ds &= g \cdot \phi \left( \frac{g - \mu_1}{\sigma_1} \right) dg \\ dr &= \frac{\mu_2 - g}{\sigma_2^2} \cdot \phi \left( \frac{\mu_2 - g}{\sigma_2} \right) dg & s &= \mu_1 \sigma_1 \cdot \Phi \left( \frac{g - \mu_1}{\sigma_1} \right) - \sigma_1^2 \cdot \phi \left( \frac{g - \mu_1}{\sigma_1} \right) \end{aligned} \quad (8.31)$$

izraz za  $I_5$  se može napisati kao:

$$\begin{aligned} I_5 &= \left\{ \phi \left( \frac{\mu_2 - g}{\sigma_2} \right) \cdot \left[ \mu_1 \sigma_1 \cdot \Phi \left( \frac{g - \mu_1}{\sigma_1} \right) - \sigma_1^2 \cdot \phi \left( \frac{g - \mu_1}{\sigma_1} \right) \right] \right\} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \\ &\int_{-\infty}^{\infty} \left[ \mu_1 \sigma_1 \cdot \Phi \left( \frac{g - \mu_1}{\sigma_1} \right) - \sigma_1^2 \cdot \phi \left( \frac{g - \mu_1}{\sigma_1} \right) \right] \cdot \left[ \frac{\mu_2 - g}{\sigma_2^2} \cdot \phi \left( \frac{\mu_2 - g}{\sigma_2} \right) \right] dg \end{aligned} \quad (8.32)$$

S obzirom da prema (4.48) i (4.49) prvi član u izrazu (8.32) iščezava, izraz za  $I_5$  se pojednostavljuje:

$$\begin{aligned} I_5 &= \frac{\mu_2 \sigma_1^2}{\sigma_2^2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \phi \left( \frac{g - \mu_1}{\sigma_1} \right) \cdot \phi \left( \frac{\mu_2 - g}{\sigma_2} \right) dg - \frac{\mu_1 \mu_2 \sigma_1}{\sigma_2^2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \Phi \left( \frac{g - \mu_1}{\sigma_1} \right) \cdot \phi \left( \frac{\mu_2 - g}{\sigma_2} \right) dg - \\ &\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} g \cdot \phi \left( \frac{g - \mu_1}{\sigma_1} \right) \cdot \phi \left( \frac{\mu_2 - g}{\sigma_2} \right) dg + \frac{\mu_1 \sigma_1}{\sigma_2^2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} g \cdot \Phi \left( \frac{g - \mu_1}{\sigma_1} \right) \cdot \phi \left( \frac{\mu_2 - g}{\sigma_2} \right) dg \end{aligned} \quad (8.33)$$

Ako u izrazu (8.33) zadnji integral označimo sa  $I_7$  (izvod analitičkog izraza za  $I_7$  je prikazan u Poglavlju 8.1.7):

$$I_7 = \int_{-\infty}^{\infty} g \cdot \Phi\left(\frac{g - \mu_1}{\sigma_1}\right) \cdot \phi\left(\frac{\mu_2 - g}{\sigma_2}\right) dg \quad (8.34)$$

te uzimajući u obzir da je prvi integral jednak  $I_1$ , vidi izraz (8.1), drugi integral jednak  $I_4$ , vidi izraz (8.22), a treći integral jednak  $I_5$ , vidi izraz (8.30), izraz za  $I_5$  glasi:

$$I_5 = \frac{1}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \cdot (\mu_2 \sigma_1^2 \cdot I_1 - \mu_1 \mu_2 \sigma_1 \cdot I_4 + \mu_1 \sigma_1 \cdot I_7) \quad (8.35)$$

Nakon uvrštavanja konačnih analitičkih izraza za  $I_1$ ,  $I_4$  i  $I_7$ , vidi izraze (8.7), (8.29) i (8.48), konačni analitički izraz za  $I_5$  glasi:

$$I_5 = \frac{\mu_1 \sigma_2^2 + \mu_2 \sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \cdot \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} \cdot \phi\left(\frac{\mu_2 - \mu_1}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}\right) \quad (8.36)$$

### 8.1.6 Integral $I_6$

Integral  $I_6$ , vidi izraz (4.59), je dan sljedećim izrazom:

$$I_6 = \int_{-\infty}^{\infty} g^2 \cdot \phi\left(\frac{g - \mu_1}{\sigma_1}\right) \cdot \Phi\left(\frac{\mu_2 - g}{\sigma_2}\right) dg \quad (8.37)$$

Koristeći metodu parcijalne integracije, vidi izraz (4.43), pri čemu je:

$$\begin{aligned} r &= \Phi\left(\frac{\mu_2 - g}{\sigma_2}\right) & ds &= g^2 \cdot \phi\left(\frac{g - \mu_1}{\sigma_1}\right) dg \\ dr &= -\frac{1}{\sigma_2} \cdot \phi\left(\frac{\mu_2 - g}{\sigma_2}\right) dg & s &= \sigma_1 \cdot (\mu_1^2 + \sigma_1^2) \cdot \Phi\left(\frac{g - \mu_1}{\sigma_1}\right) - \sigma_1^2 \cdot (g + \mu_1) \cdot \phi\left(\frac{g - \mu_1}{\sigma_1}\right) \end{aligned} \quad (8.38)$$

izraz za  $I_6$  se može napisati kao:

$$\begin{aligned} I_6 &= \left\{ \Phi\left(\frac{\mu_2 - g}{\sigma_2}\right) \cdot \left[ \sigma_1 \cdot (\mu_1^2 + \sigma_1^2) \cdot \Phi\left(\frac{g - \mu_1}{\sigma_1}\right) - \sigma_1^2 \cdot (g + \mu_1) \cdot \phi\left(\frac{g - \mu_1}{\sigma_1}\right) \right] \right\} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \\ &\int_{-\infty}^{\infty} \left[ \sigma_1 \cdot (\mu_1^2 + \sigma_1^2) \cdot \Phi\left(\frac{g - \mu_1}{\sigma_1}\right) - \sigma_1^2 \cdot (g + \mu_1) \cdot \phi\left(\frac{g - \mu_1}{\sigma_1}\right) \right] \cdot \left[ -\frac{1}{\sigma_2} \cdot \phi\left(\frac{\mu_2 - g}{\sigma_2}\right) \right] dg \end{aligned} \quad (8.39)$$

S obzirom da prema (4.48) i (4.49) prvi član u izrazu (8.39) iščezava, izraz za  $I_6$  se pojednostavljuje:

$$\begin{aligned}
 I_6 = & -\frac{\mu_1 \sigma_1^2}{\sigma_2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \phi\left(\frac{g - \mu_1}{\sigma_1}\right) \cdot \phi\left(\frac{\mu_2 - g}{\sigma_2}\right) dg + \frac{\sigma_1(\mu_1^2 + \sigma_1^2)}{\sigma_2} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi\left(\frac{g - \mu_1}{\sigma_1}\right) \cdot \phi\left(\frac{\mu_2 - g}{\sigma_2}\right) dg \\
 & - \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} g \cdot \phi\left(\frac{g - \mu_1}{\sigma_1}\right) \cdot \phi\left(\frac{\mu_2 - g}{\sigma_2}\right) dg
 \end{aligned} \tag{8.40}$$

Uzimajući u obzir da je prvi integral jednak  $I_1$ , vidi izraz (8.1), drugi integral jednak  $I_4$ , vidi izraz (8.22), a treći integral jednak  $I_5$ , vidi izraz (8.30), izraz za  $I_6$  glasi:

$$I_6 = -\frac{\mu_1 \sigma_1^2}{\sigma_2} \cdot I_1 + \frac{\sigma_1 \cdot (\mu_1^2 + \sigma_1^2)}{\sigma_2} I_4 - \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2} \cdot I_5 \tag{8.41}$$

Nakon uvrštavanja konačnih analitičkih izraza za  $I_1$ ,  $I_4$  i  $I_5$ , vidi izraze (8.7), (8.29) i (8.36), konačni analitički izraz za  $I_6$  glasi:

$$\begin{aligned}
 I_6 = & \sigma_1 \cdot \left[ (\mu_1^2 + \sigma_1^2) \cdot \Phi\left(\frac{\mu_2 - \mu_1}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}\right) - \right. \\
 & \left. \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \cdot \left( \mu_1 + \frac{\mu_1 \sigma_2^2 + \mu_2 \sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \right) \cdot \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} \cdot \phi\left(\frac{\mu_2 - \mu_1}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}\right) \right]
 \end{aligned} \tag{8.42}$$

### 8.1.7 Integral $I_7$

Integral  $I_7$ , vidi izraz (8.34), je dan sljedećim izrazom:

$$I_7 = \int_{-\infty}^{\infty} g \cdot \Phi\left(\frac{g - \mu_1}{\sigma_1}\right) \cdot \phi\left(\frac{\mu_2 - g}{\sigma_2}\right) dg \tag{8.43}$$

Koristeći metodu parcijalne integracije, vidi izraz (4.43), pri čemu je:

$$\begin{aligned}
 r = \Phi\left(\frac{g - \mu_1}{\sigma_1}\right) & \quad ds = g \cdot \phi\left(\frac{\mu_2 - g}{\sigma_2}\right) dg \\
 dr = \frac{1}{\sigma_1} \cdot \phi\left(\frac{g - \mu_1}{\sigma_1}\right) dg & \quad s = -\mu_2 \sigma_2 \cdot \Phi\left(\frac{\mu_2 - g}{\sigma_2}\right) - \sigma_2^2 \cdot \phi\left(\frac{\mu_2 - g}{\sigma_2}\right)
 \end{aligned} \tag{8.44}$$

izraz za  $I_7$  se može napisati kao:

$$I_7 = \left\{ \Phi\left(\frac{g - \mu_1}{\sigma_1}\right) \cdot \left[ -\mu_2 \sigma_2 \cdot \Phi\left(\frac{\mu_2 - g}{\sigma_2}\right) - \sigma_2^2 \cdot \phi\left(\frac{\mu_2 - g}{\sigma_2}\right) \right] \right\} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \left[ -\mu_2 \sigma_2 \cdot \Phi\left(\frac{\mu_2 - g}{\sigma_2}\right) - \sigma_2^2 \cdot \phi\left(\frac{\mu_2 - g}{\sigma_2}\right) \right] \cdot \left[ \frac{1}{\sigma_1} \cdot \phi\left(\frac{g - \mu_1}{\sigma_1}\right) \right] dg \quad (8.45)$$

S obzirom da prema (4.48) i (4.49) prvi član u izrazu (8.45) iščezava, izraz za  $I_7$  se pojednostavljuje:

$$I_7 = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \phi\left(\frac{g - \mu_1}{\sigma_1}\right) \cdot \phi\left(\frac{\mu_2 - g}{\sigma_2}\right) dg + \frac{\mu_2 \sigma_2}{\sigma_1} \int_{-\infty}^{\infty} \phi\left(\frac{g - \mu_1}{\sigma_1}\right) \cdot \Phi\left(\frac{\mu_2 - g}{\sigma_2}\right) dg \quad (8.46)$$

Uzimajući u obzir da je prvi integral jednak  $I_1$ , vidi izraz (8.1), a drugi integral jednak  $I_2$ , vidi izraz (8.8), izraz za  $I_7$  glasi:

$$I_7 = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1} \cdot I_1 + \frac{\mu_2 \sigma_2}{\sigma_1} I_2 \quad (8.47)$$

Nakon uvrštavanja konačnih analitičkih izraza za  $I_1$  i  $I_2$ , vidi izraze (8.7) i (8.15), konačni analitički izraz za  $I_7$  glasi:

$$I_7 = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1} \cdot \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} \cdot \phi\left(\frac{\mu_2 - \mu_1}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}\right) + \mu_2 \sigma_2 \cdot \Phi\left(\frac{\mu_2 - \mu_1}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}\right) \quad (8.48)$$

## 8.2 Karakteristike različitih razdioba vjerojatnosti

Tablica 8.1 Funkcije gustoće vjerojatnosti i kumulativne funkcije razdiobe.

Razdioba	$f_X(x)$	$F_X(x)$	Argument razdiobe	Parametri razdiobe
Normalna	$\frac{1}{\delta \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\alpha}{\delta}\right)^2}$	$\Phi\left(\frac{x-\alpha}{\delta}\right)$	$x \in R$	$\alpha \in R$ $\delta > 0$
Lognormalna	$\frac{1}{\delta \cdot \sqrt{2\pi} \cdot x} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x - \alpha}{\delta}\right)^2}$	$\Phi\left(\frac{\ln x - \alpha}{\delta}\right)$	$x > 0$	$\alpha \in R$ $\delta > 0$
Gamma	$\frac{\delta^\alpha \cdot x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \cdot e^{-\delta \cdot x}$	$\frac{\gamma(\alpha, \delta \cdot x)}{\Gamma(\alpha)}$	$x > 0$	$\alpha > 0$ $\delta > 0$
Eksponencijalna	$\delta \cdot e^{-\delta(x-\alpha)}$	$1 - e^{-\delta(x-\alpha)}$	$x \geq \alpha$	$\alpha \in R$ $\delta > 0$
Rayleigh	$\frac{x-\alpha}{\delta^2} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\alpha}{\delta}\right)^2}$	$1 - e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\alpha}{\delta}\right)^2}$	$x \geq \alpha$	$\alpha \in R$ $\delta > 0$
Uniformna	$\frac{1}{\delta - \alpha}$	$\frac{x-\alpha}{\delta - \alpha}$	$\alpha \leq x \leq \delta$	$\alpha \in R$ $\delta \in R$
Gumbel (max)	$\delta \cdot e^{-\delta(x-\alpha) - e^{-\delta(x-\alpha)}}$	$e^{-e^{-\delta(x-\alpha)}}$	$x \in R$	$\alpha \in R$ $\delta > 0$
Gumbel (min)	$\delta \cdot e^{\delta(x-\alpha) - e^{\delta(x-\alpha)}}$	$1 - e^{-e^{\delta(x-\alpha)}}$	$x \in R$	$\alpha \in R$ $\delta > 0$
Frechet (max)	$\frac{\delta}{\alpha} \cdot \left(\frac{\alpha}{x}\right)^{\delta+1} \cdot e^{-\left(\frac{\alpha}{x}\right)^\delta}$	$e^{-\left(\frac{\alpha}{x}\right)^\delta}$	$x > 0$	$\alpha > 0$ $\delta > 0$
Weibull (min)	$\frac{\delta}{\alpha} \cdot \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\delta-1} \cdot e^{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^\delta}$	$1 - e^{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^\delta}$	$x \geq 0$	$\alpha > 0$ $\delta > 0$

$\Gamma(\alpha)$  i  $\gamma(\alpha, \delta \cdot x)$  su potpuna i donja nepotpuna gamma funkcija,  $\Phi(\cdot)$  je standardna normalna kumulativna funkcija razdiobe.



Tablica 8.2 Srednja vrijednost i standardna devijacija kao funkcija parametara razdiobe.

Razdioba	$\mu_X$	$\sigma_X$
Normalna	$\alpha$	$\delta$
Lognormalna	$e^{\alpha + \frac{\delta^2}{2}}$	$e^{\frac{\delta^2}{2}} \cdot \sqrt{e^{\delta^2} - 1}$
Gamma	$\frac{\alpha}{\delta}$	$\frac{\sqrt{\alpha}}{\delta}$
Eksponecijalna	$\alpha + \frac{1}{\delta}$	$\frac{1}{\delta}$
Rayleigh	$\alpha + \delta \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}}$	$\delta \cdot \sqrt{2 - \frac{\pi}{2}}$
Uniformna	$\frac{\alpha + \delta}{2}$	$\frac{\delta - \alpha}{2 \cdot \sqrt{3}}$
Gumbel (max)	$\alpha + \frac{0.5772}{\delta}$	$\frac{\pi}{\delta \cdot \sqrt{6}}$
Gumbel (min)	$\alpha - \frac{0.5772}{\delta}$	$\frac{\pi}{\delta \cdot \sqrt{6}}$
Frechet (max)	$\alpha \cdot \Gamma\left(1 - \frac{1}{\delta}\right)$	$\alpha \cdot \sqrt{\Gamma\left(1 - \frac{2}{\delta}\right) - \Gamma^2\left(1 - \frac{1}{\delta}\right)}$
Weibull (min)	$\alpha \cdot \Gamma\left(1 + \frac{1}{\delta}\right)$	$\alpha \cdot \sqrt{\Gamma\left(1 + \frac{2}{\delta}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{\delta}\right)}$

Tablica 8.3 Parametri razdiobe kao funkcija srednje vrijednosti i standardne devijacije.

Razdioba	$\alpha$	$\delta$
Normalna	$\mu_X$	$\sigma_X$
Lognormalna	$\ln(\mu_X) - \frac{1}{2} \cdot \ln \left[ 1 + \left( \frac{\sigma_X}{\mu_X} \right)^2 \right]$	$\sqrt{\ln \left[ 1 + \left( \frac{\sigma_X}{\mu_X} \right)^2 \right]}$
Gamma	$\left( \frac{\mu_X}{\sigma_X} \right)^2$	$\frac{\mu_X}{\sigma_X^2}$
Eksponecijalna	$\mu_X - \sigma_X$	$\frac{1}{\sigma_X}$
Rayleigh	$\mu_X - \sigma_X \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{4-\pi}}$	$\sigma_X \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4-\pi}}$
Uniformna	$\mu_X - \sigma_X \cdot \sqrt{3}$	$\mu_X + \sigma_X \cdot \sqrt{3}$
Gumbel (max)	$\mu_X - \frac{\sigma_X \cdot 0.5772 \cdot \sqrt{6}}{\pi}$	$\frac{\pi}{\sigma_X \cdot \sqrt{6}}$
Gumbel (min)	$\mu_X + \frac{\sigma_X \cdot 0.5772 \cdot \sqrt{6}}{\pi}$	$\frac{\pi}{\sigma_X \cdot \sqrt{6}}$
Frechet (max)	vidi izraz (8.49)	vidi izraz (8.50)
Weibull (min)	vidi izraz (8.51)	vidi izraz (8.52)

### **Frechetova razdioba (max)**

Parametar razdiobe  $\delta$  se, s obzirom da se ne može napraviti separacija varijabli, određuje iz sljedećeg izraza koristeći neku od numeričkih metoda za određivanje nultočke jednadžbe (bisekcija, metoda sekante, itd.):

$$\frac{\mu_x}{\sigma_x} - \frac{\Gamma\left(1 - \frac{1}{\delta}\right)}{\sqrt{\Gamma\left(1 - \frac{2}{\delta}\right) - \Gamma^2\left(1 - \frac{1}{\delta}\right)}} = 0 \quad (8.49)$$

dok se parametar  $\alpha$  određuje prema sljedećem izrazu:

$$\alpha = \frac{\mu_x}{\Gamma\left(1 - \frac{1}{\delta}\right)} \quad (8.50)$$

### **Weibullova razdioba (min)**

Parametar razdiobe  $\delta$  se, s obzirom da se ne može napraviti separacija varijabli, određuje iz sljedećeg izraza koristeći neku od numeričkih metoda za određivanje nultočke jednadžbe (bisekcija, metoda sekante, itd.):

$$\frac{\mu_x}{\sigma_x} - \frac{\Gamma\left(1 + \frac{1}{\delta}\right)}{\sqrt{\Gamma\left(1 + \frac{2}{\delta}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{\delta}\right)}} = 0 \quad (8.51)$$

dok se parametar  $\alpha$  određuje prema sljedećem izrazu:

$$\alpha = \frac{\mu_x}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{\delta}\right)} \quad (8.52)$$

### 8.3 Marginalna transformacija

Marginalna transformacija slučajne varijable  $X$  u normalno distribuiranu slučajnu varijablu  $Y$  koja ima srednju (očekivanu) vrijednost 0, a standardnu devijaciju 1, se određuje iz izraza (4.26). Ovisno o razdiobi slučajne varijable  $X$ , vidi Poglavlje 8.2, Tablica 8.4 prikazuje konačne analitičke izraze:

Tablica 8.4 Marginalne transformacije.

Razdioba	Marginalna transformacija
Normalna	$x = \alpha + \delta \cdot y$
Lognormalna	$x = e^{\alpha + \delta \cdot y}$
Gamma	vidi izraz (8.53)
Eksponecijalna	$x = \alpha - \frac{1}{\delta} \cdot \ln[\Phi(-y)]$
Rayleigh	$x = \alpha + \delta \cdot \sqrt{-2 \cdot \ln[\Phi(-y)]}$
Uniformna	$x = \alpha + (\delta - \alpha) \cdot \Phi(y)$
Gumbel (max)	$x = \alpha - \frac{1}{\delta} \cdot \ln\{-\ln[\Phi(y)]\}$
Gumbel (min)	$x = \alpha + \frac{1}{\delta} \cdot \ln\{-\ln[\Phi(-y)]\}$
Frechet (max)	$x = \alpha \cdot \{-\ln[\Phi(y)]\}^{-\frac{1}{\delta}}$
Weibull (min)	$x = \alpha \cdot \{-\ln[\Phi(-y)]\}^{\frac{1}{\delta}}$

### **Gamma razdioba**

S obzirom da nije moguće napraviti separaciju varijabli, za odrediti  $x$  je potrebno koristiti neku od numeričkih metoda (bisekcija, metoda sekante, itd.) za odrediti nultočku sljedeće jednadžbe:

$$\gamma(\alpha, \delta \cdot x) - \Gamma(\alpha) \cdot \Phi(y) = 0 \quad (8.53)$$

gdje su  $\Gamma(\alpha)$  i  $\gamma(\alpha, \delta x)$  potpuna i donja nepotpuna gamma funkcija.

## 8.4 Određivanje faktora $F$ u Nataf transformaciji

Omjer  $F = \rho_{ij}^e / \rho_{ij} \geq 1$  korelacijskih koeficijenata iz izraza (4.37) koji se koristi u Nataf transformaciji može se odrediti egzaktno ili približno rješavajući jednadžbu (4.36) u kojoj je potrebno odrediti  $\rho_{ij}^e$  za zadani  $\rho_{ij}$ . U konačnici se mora dobiti ekvivalentna matrica korelacijskih koeficijenata  $\rho^e$  koja je pozitivno definitna da bi Nataf transformacija bila valjana.

Sljedeće tablice prikazuju rezultate uzete iz [43] gdje su prikazane i greške aproksimacije. Tablice su podijeljene u dvije kategorije ovisno o kategorizaciji razmatranih marginalnih razdioba. U prvu kategoriju spadaju razdiobe koje se određenom transformacijom slučajne varijable mogu prikazati u standardnoj bezparametarskoj formi ( $F$  ne ovisi o  $COV_{X_i}$  i  $COV_{X_j}$ ). U drugu kategoriju spadaju razdiobe koje nisu u prvoj kategoriji.

Tablica 8.5 i Tablica 8.6 prikazuju sve razmatrane razdiobe i njihove oznake koje su korištene u ostalim tablicama.

Tablica 8.5 Razdiobe prve kategorije.

Razdioba	Oznaka
Normalna	N
Eksponencijalna	SE
Rayleigh	SR
Uniformna	U
Gumbel (max.)	GL
Gumbel (min.)	GS

Tablica 8.6 Razdiobe druge kategorije.

Razdioba	Oznaka
Lognormalna	LN
Gamma	$\Gamma$
Frechet (max.)	F
Weibull (min.)	W

Između mogućih kombinacija parova razdioba, za samo tri para se faktor  $F$  može odrediti eksplicitno i to:

$$(X_i, X_j) \in (N, N): F = 1 \quad (8.54)$$

$$(X_i, X_j) \in (N, LN): F = \frac{COV_{X_j}}{\sqrt{\log(1 + COV_{X_j}^2)}} \quad (8.55)$$

$$(X_i, X_j) \in (LN, LN): F = \frac{\log(1 + \rho_{ij} \cdot COV_{X_i} \cdot COV_{X_j})}{\rho_{ij} \cdot \sqrt{\log(1 + COV_{X_i}^2) \cdot \log(1 + COV_{X_j}^2)}} \quad (8.56)$$

Faktor  $F$  je nezavisan o  $\rho_{ij}$  kad je  $X_i \in N$ . Pod tom pretpostavkom, Tablica 8.7 prikazuje vrijednosti faktora  $F$  kad je  $X_j$  iz prve kategorije razdioba, dok Tablica 8.8. prikazuje koeficijente uz parametre linearne kombinacije koja aproksimira faktor  $F$  kad je  $X_j$  iz druge kategorije razdioba.

Tablica 8.7  $F$  kad je  $X_i$  normalno distribuirana a  $X_j$  iz prve kategorije razdioba.

$(X_i, X_j)$	(N,U)	(N,SE)	(N,SR)	(N,GL)	(N,GS)
$F$	1.023	1.107	1.014	1.031	1.031

Tablica 8.8 Koeficijenti uz parametre linearne kombinacije koja aproksimira  $F$  kad je  $X_i$  normalno distribuirana a  $X_j$  iz druge kategorije razdioba.

$(X_i, X_j)$	1	$COV_{X_j}$	$COV_{X_j}^2$
(N, $\Gamma$ )	1.001	-0.007	0.118
(N,F)	1.030	0.238	0.364
(N,W)	1.031	-0.195	0.328

Tablica 8.9, Tablica 8.10 i Tablica 8.11 prikazuju koeficijente uz parametre linearne kombinacije koja aproksimira faktor  $F$  za različite kombinacije razdioba slučajnih varijabli  $X_i$  i  $X_j$ .

Na primjer, faktor  $F$  za slučaj kad je  $X_i$  (LN,  $COV_{X_i} = 25\%$ ),  $X_j$  ( $\Gamma$ ,  $COV_{X_j} = 15\%$ ), a  $\rho_{ij} = 0.1$  se određuje na sljedeći način (vidi Tablica 8.11):

$$\begin{aligned}
 F = & 1.001 + 0.033 \cdot \rho_{ij} + 0.002 \cdot \rho_{ij}^2 + 0.004 \cdot COV_{X_i} + 0.223 \cdot COV_{X_i}^2 - 0.016 \cdot COV_{X_j} + \\
 & 0.130 \cdot COV_{X_j}^2 - 0.104 \cdot \rho_{ij} \cdot COV_{X_i} - 0.441 \cdot \rho_{ij} \cdot COV_{X_j} + 0.029 \cdot COV_{X_i} \cdot COV_{X_j} \quad (8.57) \\
 = & 1.011
 \end{aligned}$$

Tablica 8.9 Koeficijenti uz parametre linearne kombinacije koja aproksimira  $F$  kad su  $X_i$  i  $X_j$  iz prve kategorije razdioba.

$(X_i, X_j)$	1	$\rho_{ij}$	$\rho_{ij}^2$
(U,U)	1.047	-	-0.047
(U,SE)	1.133	-	0.029
(U,SR)	1.038	-	-0.008
(U,GL)	1.055	-	0.015
(U,GS)	1.055	-	0.015
(SE,SE)	1.229	-0.367	0.153
(SE,SR)	1.123	-0.100	0.021
(SE,GL)	1.142	-0.154	0.031
(SE,GS)	1.142	0.154	0.031
(SR,SR)	1.028	-0.029	-
(SR,GL)	1.046	-0.045	0.006
(SR,GS)	1.046	0.045	0.006
(GL,GL)	1.064	-0.069	0.005
(GL,GS)	1.064	0.069	0.005
(GS,GS)	1.064	-0.069	0.005



Tablica 8.10 Koeficijenti uz parametre linearne kombinacije koja aproksimira  $F$  kad je  $X_i$  iz prve a  $X_j$  iz druge kategorije razdioba.

$(X_i, X_j)$	(U, LN)	(SE, LN)	(SR, LN)	(GL, LN)	(GS, LN)
1	1.019	1.098	1.011	1.029	1.029
$\rho_{ij}$	-	0.003	0.001	0.001	-0.001
$\rho_{ij}^2$	0.010	0.025	0.004	0.004	0.004
$COV_{X_j}$	0.014	0.019	0.014	0.014	0.014
$COV_{X_j}^2$	0.249	0.303	0.231	0.233	0.233
$\rho_{ij}COV_{X_j}$	-	-0.437	-0.130	-0.197	0.197
$(X_i, X_j)$	(U, $\Gamma$ )	(SE, $\Gamma$ )	(SR, $\Gamma$ )	(GL, $\Gamma$ )	(GS, $\Gamma$ )
1	1.023	1.104	1.014	1.031	1.031
$\rho_{ij}$	-	0.003	0.001	0.001	-0.001
$\rho_{ij}^2$	0.002	0.014	0.002	0.003	0.003
$COV_{X_j}$	-0.007	-0.008	-0.007	-0.007	-0.007
$COV_{X_j}^2$	0.127	0.173	0.120	0.131	0.131
$\rho_{ij}COV_{X_j}$	-	-0.296	-0.090	-0.132	0.132
$(X_i, X_j)$	(U, F)	(SE, F)	(SR, F)	(GL, F)	(GS, F)
1	1.033	1.109	1.036	1.056	1.056
$\rho_{ij}$	-	-0.152	-0.038	-0.060	0.060
$\rho_{ij}^2$	0.074	0.130	0.028	0.020	0.020
$COV_{X_j}$	0.305	0.361	0.266	0.263	0.263
$COV_{X_j}^2$	0.405	0.455	0.383	0.383	0.383
$\rho_{ij}COV_{X_j}$	-	-0.728	-0.229	-0.332	0.332
$(X_i, X_j)$	(U, W)	(SE, W)	(SR, W)	(GL, W)	(GS, W)
1	1.061	1.147	1.047	1.064	1.064
$\rho_{ij}$	-	0.145	0.042	0.065	-0.065
$\rho_{ij}^2$	-0.005	0.010	-	0.003	0.003
$COV_{X_j}$	-0.237	-0.271	-0.212	-0.210	-0.210
$COV_{X_j}^2$	0.379	0.459	0.353	0.356	0.356
$\rho_{ij}COV_{X_j}$	-	-0.467	-0.136	-0.211	0.211

Tablica 8.11 Koeficijenti uz parametre linearne kombinacije koja aproksimira  $F$  kad su  $X_i$  i  $X_j$  iz druge kategorije razdioba.

$(X_i, X_j)$	(LN, $\Gamma$ )	(LN,F)	(LN,W)	( $\Gamma$ , $\Gamma$ )	( $\Gamma$ ,F)	( $\Gamma$ ,W)	(F,F)	(F,W)	(W,W)
1	1.001	1.026	1.031	1.002	1.029	1.032	1.086	1.065	1.063
$\rho_{ij}$	0.033	0.082	0.052	0.022	0.056	0.034	0.054	0.146	-0.004
$\rho_{ij}^2$	0.002	0.018	0.002	0.001	0.012	-	-0.055	0.013	-0.001
$\rho_{ij}^3$	-	-	-	-	-	-	-0.020	-	-
$COV_{X_i}$	0.004	-0.019	0.011	-0.012	-0.030	-0.007	0.104	0.241	-0.200
$COV_{X_i}^2$	0.223	0.288	0.220	0.125	0.174	0.121	0.662	0.372	0.337
$COV_{X_j}$	-0.016	0.222	-0.210	-0.012	0.225	-0.202	0.104	-0.259	-0.200
$COV_{X_j}^2$	0.130	0.379	0.350	0.125	0.379	0.339	0.662	0.435	0.337
$\rho_{ij}COV_{X_i}$	-0.104	-0.441	0.005	-0.077	-0.313	-0.006	-0.570	0.005	0.007
$\rho_{ij}COV_{X_j}$	-0.441	-0.277	-0.174	-0.077	-0.182	-0.111	-0.570	-0.481	0.007
$COV_{X_i}COV_{X_j}$	0.029	0.126	0.009	0.014	0.075	0.003	0.203	0.034	-0.007
$COV_{X_i}^3+COV_{X_j}^3$	-	-	-	-	-	-	-0.218	-	-
$\rho_{ij}(COV_{X_i}^2+COV_{X_j}^2)$	-	-	-	-	-	-	-0.371	-	-
$\rho_{ij}^2(COV_{X_i}+COV_{X_j})$	-	-	-	-	-	-	0.257	-	-
$COV_{X_i}COV_{X_j}(COV_{X_i}+COV_{X_j})$	-	-	-	-	-	-	0.141	-	-