

# Algebarski pristup estimaciji stanja i poremećaja autonomnih letjelica

---

**Pranjić, Marko**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2019**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:235:242123>

*Rights / Prava:* [Attribution 4.0 International](#)/[Imenovanje 4.0 međunarodna](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-04-02**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# **DIPLOMSKI RAD**

**Marko Pranjić**

Zagreb, 2019.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# **DIPLOMSKI RAD**

Mentor:  
Prof. dr. sc. Josip Kasać

Student:  
Marko Pranjić

Zagreb, 2019.

Izjavljujem da sam ovaj rad izradio samostalno koristeći znanja stečena tijekom studija i navedenu literaturu.

Zahvaljujem se mentoru Prof. dr. sc. Josipu Kasaću na pomoći i korisnim savjetima tijekom izrade i pisanja ovoga rada.

Marko Pranjić



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE



Središnje povjerenstvo za završne i diplomske ispite  
Povjerenstvo za diplomske radove studija strojarstva za smjerove:  
proizvodno inženjerstvo, računalno inženjerstvo, industrijsko inženjerstvo i menadžment,  
inženjerstvo materijala te mehatronika i robotika

Sveučilište u Zagrebu Fakultet strojarstva i brodogradnje	
Datum:	Prilog:
Klasa:	
Ur. broj:	

## DIPLOMSKI ZADATAK

Student: **MARKO PRANJIĆ** Mat. br.: **0035195807**

Naslov rada na hrvatskom jeziku: **Algebarski pristup estimaciji stanja i poremećaja autonomnih letjelica**

Naslov rada na engleskom jeziku: **Algebraic approach to state and disturbance estimation of unmanned aerial vehicles**

Opis zadatka:

Autonomne letjelice opisane su nelinearnim dinamičkim modelima s dvanaest varijabli stanja od kojih linearne i kutne brzine obično nisu direktno mjerljive. Također, nepoznati vanjski poremećaji poput udara vjetra nisu direktno mjerljivi i moraju se estimirati preko mjerljivih varijabli stanja kao što su linearne i kutne pozicije letjelice. U ovom radu razmatraju se algebarski estimatori stanja i poremećaja koji, za razliku od konvencionalnih estimatora, omogućuju gotovo trenutnu konvergenciju estimiranih varijabli prema realnim vrijednostima.

U radu je potrebno:


- Izvesti i implementirati klasični linearni observer stanja za linearizirani model letjelice.
- Izvesti i implementirati algebarski observer stanja primjenom metode algebarskih derivacija.
- Izvesti i implementirati algebarski observer stanja primjenom metode frekvencijskog pomaka.
- Provesti usporedbu performansi implementiranih observera stanja.
- Izvesti klasični linearni i algebarski prošireni observer stanja i poremećaja te ih implementirati na nelinearnom modelu letjelice s vanjski poremećajima.
- Provesti simulacijsku analizu utjecaja parametara i oblika vanjskih poremećaja na performanse linearnih i algebarskih observera stanja i poremećaja.

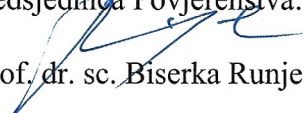
U radu je potrebno navesti korištenu literaturu i eventualno dobivenu pomoć.

Zadatak zadan:  
26. rujna 2019.

Rok predaje rada:  
28. studenog 2019.

Predvideni datum obrane:  
04. prosinca 2019.  
05. prosinca 2019.  
06. prosinca 2019.

Zadatak zadao:  
  
prof. dr. sc. Josip Kasac

Predsjednica Povjerenstva:  
  
prof. dr. sc. Biserka Runje

**SADRŽAJ**

SADRŽAJ .....	I
POPIS SLIKA .....	II
POPIS TABLICA.....	VI
POPIS OZNAKA .....	VII
SAŽETAK.....	IX
SUMMARY .....	X
1. Uvod.....	1
2. Dinamički model bespilotne letjelice .....	2
3. Upravljanje bespilotne letjelice .....	5
3.1. PD regulator sa mjerenjem pozicije i brzine letjelice .....	5
3.2. PD regulator sa estimatorom brzine .....	7
4. Adaptivno upravljanje bespilotnom letjelicom .....	12
4.1. Adaptivni regulator sa mjerenjem brzine letjelice .....	12
4.2. Adaptivni regulator sa estimatorom brzine .....	15
5. ADB observer stanja .....	18
5.1. Sinteza ADB observera stanja.....	18
5.2. Simulacijski rezultati - ADB observer stanja.....	20
6. FSB observer stanja.....	23
6.1. Sinteza FSB observera stanja .....	23
6.2. Simulacijski rezultati - FSB observer stanja .....	27
7. Estimator vanjskih poremećaja .....	31
7.1. Linearni prošireni observer stanja.....	31
7.1.1. Sinteza linearnog proširenog observera stanja.....	31
7.1.2. Simulacijski rezultati - Linearni prošireni observer stanja .....	32
7.2. Prošireni ADB observer stanja (ADB-ESO).....	40
7.2.1. Sinteza proširenog ADB observera stanja .....	40
7.2.2. Simulacijski rezultati - prošireni ADB observer stanja .....	42
7.3. Prošireni FSB observer stanja (FSB-ESO) .....	48
7.3.1. Sinteza proširenog FSB observera stanja.....	48
7.3.2. Simulacijski rezultati - Prošireni FSB observer stanja.....	54
8. Zaključak.....	60
LITERATURA.....	61
PRILOZI.....	63

## POPIS SLIKA

Slika 1.	Potpuno aktuirani dron sa nagnutim rotorima [1] .....	2
Slika 2.	Pozicije letjelice $x(t)$ i $y(t)$ sa šumom mjerenja .....	6
Slika 3.	Referentne trajektorije i odzivi sustava u slučaju sa šumom mjerenja .....	6
Slika 4.	Upravljačke varijable regulatora u slučaju mjerenja pozicije i brzine letjelice .....	7
Slika 5.	Estimirane pozicije i brzine letjelice Luenberger observerom ( $x(0)=y(0)=0$ m) .....	9
Slika 6.	Referentne trajektorije i odzivi sustava u slučaju Luenbereger observera ( $x(0)=y(0)=0$ m) .....	9
Slika 7.	Upravljačke varijable regulatora u slučaju korištenja Luenberger observera ( $x(0)=y(0)=0$ m) .....	10
Slika 8.	Estimirane pozicije i brzine u slučaju korištenja Luenberger observera ( $x(0)=y(0)=0.5$ m) .....	10
Slika 9.	Uvećani prikaz početnog odstupanja estimiranih brzina Luenbereger observerom ( $x(0)=y(0)=0.5$ m) .....	10
Slika 10.	Referentne trajektorije i odzivi sustava u slučaju korištenja Luenbereger observera ( $x(0)=y(0)=0.5$ m) .....	11
Slika 11.	Upravljačke varijable regulatora u slučaju korištenja Luenbereger observera ( $x(0)=y(0)=0.5$ m) .....	11
Slika 12.	Uvećani prikaz početnih vrijednosti regulatora ( $x(0)=y(0)=0.5$ m) .....	11
Slika 13.	Referentne trajektorije i odzivi sustava u slučaju korištenja adaptivnog regulatora bez šuma mjerenja (brzina se mjeri) .....	14
Slika 14.	Upravljačke varijable regulatora u slučaju korištenja adaptivnog regulatora bez šuma mjerenja (brzina se mjeri) .....	14
Slika 15.	Estimirani parametar u slučaju bez i sa šumom mjerenja (brzina letjelice se mjeri) .....	14
Slika 16.	Apsolutna pogreška estimacije parametra mase bez šuma mjerenja .....	15
Slika 17.	Estimirane vrijednosti pozicije i brzine u slučaju adaptivnog regulatora i Luenberger observera .....	16
Slika 18.	Estimirani parametar mase i apsolutna pogreška estimacije u slučaju adaptivnog regulatora i Luenberger observera .....	16
Slika 19.	Referentne trajektorije i odzivi sustava u slučaju adaptivnog regulatora i Luenberger observera .....	17

Slika 20. Upravljačke varijable regulatora u slučaju adaptivnog regulatora i Luenberger observera.....	17
Slika 21. Trajektorija letjelice (adaptivni regulator sa Luenberger observerom stanja) .....	17
Slika 22. Estimirane pozicije i brzine u slučaju sa šumom mjerenja (ADB observer) .....	20
Slika 23. Uvećani prikaz estimiranih brzina u slučaju sa šumom mjerenja (ADB observer)21	
Slika 24. Apsolutna pogreška estimacije pozicije i brzine Luenberger i ADB estimatora u slučaju sa šumom mjerenja.....	21
Slika 25. Referentne trajektorije i odzivi sustava u slučaju sa šumom mjerenja (ADB observer) .....	21
Slika 26. Upravljačke varijable regulatora u slučaju sa šumom mjerenja i korištenjem ADB estimatora.....	22
Slika 27. Varijable stanja ADB estimatora u slučaju sa šumom mjerenja .....	22
Slika 28. Estimirane vrijednosti pozicije i brzine letjelice FSB observerom u slučaju sa šumom mjerenja.....	28
Slika 29. Referentne trajektorije i odziv sustava u slučaju sa šumom mjerenja i korištenjem FSB observera.....	28
Slika 30. Upravljačke varijable regulatora u slučaju sa šumom mjerenja i korištenjem FSB observera.....	28
Slika 31. Trajektorija letjelice u x-y ravnini (PD regulator sa unaprijednom kompenzacijom + FSB observer).....	29
Slika 32. Apsolutne pogreške estimacije pozicije i brzine FSB i ADB observera za translacijsku dinamiku x-osi .....	29
Slika 33. Varijable stanja FSB observera u slučaju sa šumom mjerenja .....	30
Slika 34. Odziv letjelice u slučaju bez estimacije i kompenzacije vanjskog poremećaja $d_{ext}(t)$ (lijevo), i prikaz poremećaja (udar vjetra) u obliku gauss-ove funkcije (desno).....	33
Slika 35. Odziv letjelice u slučaju sa ADRC kompenzacijom vanjskog poremećaja (lijevo), i vrijednosti apsolutne pogreške stvarne i referentne pozicije (desno) .....	34
Slika 36. Estimirani vanjski poremećaj proširenim Luenberger observerom 5. reda (lijevo), i vrijednosti apsolutne pogreške estimacije poremećaja (desno).....	34
Slika 37. Iznosi ograničene upravljačke varijable ADRC-a .....	34
Slika 38. Estimirane vrijednosti pozicije (lijevo) i estimirane vrijednosti brzine drona (desno) proširenim Luenberger observerom.....	35
Slika 39. Utjecaj normalno distribuiranog šuma na vrijednosti estimiranog poremećaja i upravljačke varijable regulatora za ESO 5. reda (bez filtriranja) .....	35



Slika 40.	Odziv letjelice u slučaju ADRC kompenzacije perzistentnog poremećaja (lijevo), i vrijednosti apsolutne pogreške stvarne i referentne pozicije (desno).....	36
Slika 41.	Estimirani vanjski perzistentni poremećaj proširenim Luenberger observerom 5. reda (lijevo), i vrijednosti apsolutne pogreške estimacije poremećaja (desno).....	36
Slika 42.	Iznosi ograničene upravljačke varijable ADRC-a u slučaju perzistentnog poremećaja .....	37
Slika 43.	Estimirane vrijednosti pozicije (lijevo) i estimirane vrijednosti brzine drona (desno) proširenim Luenberger observerom 5. reda u slučaju perzistentnog poremećaja .....	37
Slika 44.	Odziv letjelice u slučaju bez estimacije i kompenzacije konstantnog poremećaja $d_{ext}(t)$ (lijevo), i prikaz apsolutne pogreške slijeđenja referentne trajektorije (desno) .....	38
Slika 45.	Odziv letjelice sa kompenzacijom konstantnog vanjskog poremećaja sa ADRC 1. reda (lijevo), i apsolutna pogreška slijeđenja referentne trajektorije (desno).....	38
Slika 46.	Estimirani konstantni poremećaj proširenim Luenberger observerom 1. reda (lijevo), i apsolutna pogreška estimacije vanjskog poremećaja (desno).....	39
Slika 47.	Vrijednosti upravljačke varijable regulatora za ADRC 1. reda .....	39
Slika 48.	Estimirane vrijednosti pozicije (lijevo) i estimirane vrijednosti brzine drona (desno) proširenim Luenberger observerom 1. reda u slučaju konstantnog poremećaja .....	39
Slika 49.	Odziv letjelice sa kompenzacijom konstantnog vanjskog poremećaja sa proširenim ADB observerom 3. reda (lijevo), i apsolutna pogreška slijeđenja referentne trajektorije (desno).....	43
Slika 50.	Estimirani konstantni poremećaj proširenim ADB observerom 3. reda (lijevo), i apsolutna pogreška estimacije vanjskog poremećaja (desno) .....	43
Slika 51.	Vrijednosti upravljačke varijable regulatora sa kompenzacijom konstantnog poremećaja proširenim ADB observerom 3. reda .....	43
Slika 52.	Estimirane vrijednosti pozicije (lijevo) i estimirane vrijednosti brzine drona (desno) proširenim ADB observerom 3. reda u slučaju konstantnog poremećaja ..	44
Slika 53.	Varijable stanja proširenog ADB observera 3. reda .....	44
Slika 54.	Odziv letjelice sa kompenzacijom vremenski promjenjivog vanjskog poremećaja sa proširenim FSB observerom 3. reda (lijevo), i odziv letjelice bez kompenzacije vanjskog poremećaja (desno) .....	54

---

Slika 55. Estimirani vremenski promjenjiv poremećaj proširenim FSB observerom 3. reda (lijevo), i apsolutna pogreška estimacije vanjskog poremećaja (desno).....	55
Slika 56. Vrijednosti upravljačke varijable regulatora sa kompenzacijom vremenski promjenjivog poremećaja proširenim FSB observerom 3. reda .....	55
Slika 57. Estimirane vrijednosti pozicije (lijevo) i estimirane vrijednosti brzine drona (desno) proširenim FSB observerom 3. reda u slučaju vremenski promjenjivog poremećaja .....	55
Slika 58. Varijable stanja proširenog FSB observera 3. reda.....	56

**POPIS TABLICA**

Tablica 1. Usporedba relativnih pogrešaka estimacije FSB i ADB observera u vremenskom trenutku $t_f = 10$ s.....	30
Tablica 2. Usporedba linearnog ESO-a (LADRC) sa ADB algebarskim ESO za slučaj konstantnog vanjskog poremećaja $d(t) = 30$ N, i početni uvjet $x(0) = -5$ m .....	45
Tablica 3. Usporedba linearnog ESO-a (LADRC) sa ADB algebarskim ESO za slučaj vanjskog poremećaja $d(t) = 50e^{-0,6(t-5)^2}$ N, i početni uvjet $x(0) = -5$ m .....	47
Tablica 4. Usporedba linearnog ESO-a (LADRC) sa FSB algebarskim ESO za slučaj konstantnog vanjskog poremećaja $d(t) = 30$ N, i početni uvjet $x(0) = -5$ m .....	56
Tablica 5. Usporedba linearnog ESO-a (LADRC) sa FSB algebarskim ESO za slučaj vanjskog poremećaja $d(t) = 50e^{-0,6(t-5)^2}$ , i početni uvjet $x(0) = -5$ m .....	58

## POPIS OZNAKA

Oznaka	Jedinica	Opis
<b>A</b>	-	Matrica koeficijenata
<b>B</b>	-	Matrica ulaza
$\hat{\mathbf{B}}$	-	Estimirana matrica ulaza
<b>C</b>	-	Matrica izlaza
$d_{ext}(t)$	N	Vanjski poremećaj
$\hat{d}_{ext}(t)$	N	Estimirani vanjski poremećaj
$e(t)$	m	Greška regulacije ili estimacije
<b>F</b>	N	Vektor upravljačkih varijabli
$F_x$	N	Upravljačka varijabla za x-os
$F_y$	N	Upravljačka varijabla za y-os
$g$	m/s <sup>2</sup>	Gravitacijsko ubrzanje
$I_B$	kg/m <sup>2</sup>	Dijagonalna matrica inercijskih momenata
$k$	kg <sup>-1</sup>	Masa letjelice (1/m)
$K_P$	-	Proporcionalno pojačanje regulatora
$K_D$	-	Derivacijsko pojačanje regulatora
$K$	-	Pojačanje adaptivnog regulatora
<b>L</b>	-	Matrica pojačanja Luenberger observera
$m$	kg	Masa letjelice
$\hat{m}$	kg	Estimirana masa letjelice
<b>p</b>	-	Vektor željenih polova Luenberger observera
$R(s)$	-	Polinom ovisan o početnim uvjetima sustava
$\mathbf{R}(\eta)$	-	Rotacijska matrica
$t$	s	Vrijeme
<b>u</b>	-	Vektor ulaznih veličina u ADB/FSB estimator
<b>v</b>	m/s	Vektor linearnih brzina drona
$V$	-	Ljapunovljeva funkcija
$q$	-	Parametar FSB estimatora (realni frekvencijski pomak)
<b>x</b>	-	Vektor varijabli stanja
$\hat{\mathbf{x}}$	-	Vektor estimiranih varijabli stanja
$x(t)$	m	Pozicija letjelice u x-osi

$x_d(t)$	-	Referentna trajektorija $x$ -osi
$x_m(t)$	m	Mjerena pozicija letjelice sa šumom na $x$ -osi
$\tilde{x}$	m	Greška regulacije pozicije na $x$ -osi
$\hat{x}(t)$	m	Estimirana pozicija letjelice ( $x$ -os)
$\hat{\dot{x}}(t)$	m/s	Estimirana brzina letjelice ( $x$ -os)
$y(t)$	m	Pozicija letjelice u $y$ -osi
$y_d(t)$	-	Referentna trajektorija $y$ -osi
$y_m(t)$	m	Mjerena pozicija letjelice sa šumom na $y$ -osi
$\mathbf{y}$	-	Vektor izlaznih veličina iz ADB/FSB estimatora
$\gamma$	-	Parametar adaptivnog regulatora
$\delta_q$	-	Operator konačne razlike
$\varepsilon$	s	Vrijeme uključenja ADB/FSB estimatora
$\boldsymbol{\eta}$	°	Vektor Euler-ovih kutova
$\theta$	°	Euler-ov kut (prevrtanje)
$\lambda$	Hz	Granična frekvencija niskopropusnog filtra
$\xi(t)$	-	Gauss-ov šum
$\boldsymbol{\tau}$	Nm	Vektor upravljačkih momenata
$\phi$	°	Euler-ov kut (valjanje)
$\psi$	°	Euler-ov kut (zakretanje)
$\Omega_B$	-	Transformacijska matrica
$\boldsymbol{\omega}$	rad/s	Vektor kutnih brzina

## SAŽETAK

U ovom radu razmatra se upravljanje autonomnim letjelicama zasnovano na algebarskim estimatorima stanja i poremećaja. Algebarski estimatori omogućuju gotovo trenutnu konvergenciju estimiranih varijabli prema realnim vrijednostima, bez tranzijenata koji ovise o početnim uvjetima sustava. Izvedena su dva proširena algebarska observera stanja koji omogućuju estimaciju stanja i vanjskih poremećaja. Prvi observer zasnovan je na konvencionalnoj metodi algebarskih derivacija, dok je drugi zasnovan na novoj metodi frekvencijskog pomaka. Simulacijskim rezultatima ilustrirane su performanse navedenih algebarskih estimatora.

Ključne riječi: Autonomna letjelica, upravljanje, algebarska estimacija, estimacija poremećaja

## **SUMMARY**

In this paper, a control of unmanned aerial vehicles based on algebraic state and disturbance estimators is being considered. Algebraic estimators provide almost instantaneous convergence of estimated variables toward real values, without transients that depend on system initial values. The two algebraic extended state observers are presented that provide state and external disturbance estimation. The first observer is based on conventional algebraic derivative method, and the other is based on new frequency shifting method. The algebraic estimators performances are illustrated by simulation examples.

Key words: UAV, drone, control, algebraic state estimation, algebraic disturbance estimation

## 1. Uvod

U ovome radu ispitati će se performanse klasičnih estimatora parametara i varijabli stanja na multivarijabilnom sustavu. Za preciznu regulaciju sustava višeg reda, potrebno je poznavati sva stanja sustava. Podatke o varijablama stanja možemo dobiti mjerenjem sensorima, ali ako imamo mnogo varijabli stanja, pojavljuje se i potreba za većim brojem senzora što u praksi nije prihvatljivo zbog troškova. Neke varijable stanja je teško ili nije moguće mjeriti. Zbog toga se koriste estimatori varijabli stanja (observeri). Estimatori varijabli stanja su algoritmi koji na temelju približnog poznavanja modela sustava i poznavanja jedne varijable koja se mjeri sensorom, mogu sa visokom preciznošću procijeniti ostale varijable stanja koje se ne mjere. Prednost primjene estimatora naspram senzora je i manja mogućnost kvara na realnim sustavima. Također, za što bolju sintezu regulatora i observera, potrebno je poznavati parametre sustava. U tu svrhu se koriste razne metode estimacije parametara. Identifikacija parametara reguliranog sustava je potrebna ukoliko se parametri sustava tijekom rada značajno mijenjaju. Nekom proizvodu se parametri sustava mogu promijeniti nakon duljeg vijeka trajanja, zbog čega bi se pogoršale i performanse regulatora.

Viševarijabilni sustav koji će se ovdje promatrati je bespilotna letjelica (dron) sa šest stupnjeva slobode gibanja. Želi se pokazati kako različite metode estimacije parametara i varijabli stanja utječu na regulaciju gore navedenog sustava. Biti će poznata samo informacija o poziciji drona koja se mjeri sensorom, dok će se njegova brzina estimirati. Zadatak će biti slijeđenje vremenski promjenjive referentne trajektorije.

U poglavlju 2. prikazan je linearizirani dinamički model drona na temelju kojeg će se raditi sinteza observera. Prvo će se pretpostaviti idealan slučaj kada poznajemo model sustava i imamo mjerenje brzine u potpoglavlju 3.1., a rezultati regulacije služiti će za ocjenu efikasnosti kasnije implementiranog observera varijabli stanja i njegovih rezultata regulacije. Ovdje će se ispitati Luenbergerov observer varijabli stanja koji će se prezentirati u potpoglavlju 3.2.. Nakon toga će se pretpostaviti da su parametri sustava nepoznati, i imamo mjerenje brzine drona, gdje će se adaptivnim regulatorom estimirati nepoznati parametri (potpoglavlje 4.1.). Zatim će se isti adaptivni regulator implementirati sa Luenberger estimatorom stanja i izvršiti regulacija (potpoglavlje 4.2.). Prezentirati će se i novije algebarske metode estimacije varijabli stanja, koje za razliku od klasičnih observera imaju neasimptotsku konvergenciju ka pravim vrijednostima stanja, i robusne su s obzirom na početne uvjete sustava. U poglavlju 6. će se prezentirati najbolja algebarska metoda estimacije varijabli stanja, tzv. metoda frekvencijskog pomaka. U poglavlju 7. testirati će se kako vanjski poremećaji (poput udara vjetra) utječu na dinamiku letjelice, i prezentirati će se noviji pristup estimaciji vanjskih poremećaja.



## 2. Dinamički model bespilotne letjelice

Bespilotna letjelica u ovom slučaju je dron sa šest rotora nagnutih pod fiksnim kutom, kao što je prikazano na slici 1. Nagnuti rotori omogućavaju pomake letjelice u ravnini, odnosno upravljanje pomacima po  $x$  i  $y$  osi [1]. Zbog toga dobivamo šest stupnjeva slobode gibanja drona.

Dinamičke jednadžbe koje opisuju gibanje drona jednake su jednadžbama kojima bi opisali rotirajuće kruto tijelo sa šest stupnjeva slobode gibanja [2]. Jednadžbe rotacijske kinematike krutog tijela jesu

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = \boldsymbol{\Omega}_B \boldsymbol{\omega}, \quad (1)$$

gdje je  $\boldsymbol{\eta} = [\phi \ \theta \ \psi]^T$  jednaka Euler-ovim kutovima definiranih u  $xyz$  koordinatnom sustavu, vektor kutnih brzina je  $\boldsymbol{\omega} = [p \ q \ r]^T$ , a  $\boldsymbol{\Omega}_B$  je transformacijska matrica koja prebacuje veličine koordinatnog sustava drona u inercijski (bazni) koordinatni sustav i iznosi

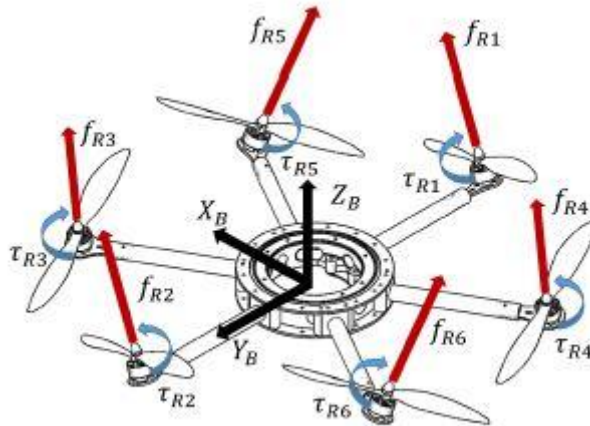
$$\boldsymbol{\Omega}_B = \frac{1}{c_\theta} \begin{bmatrix} c_\theta & s_\phi s_\theta & c_\phi s_\theta \\ 0 & c_\phi c_\theta & -s_\phi c_\theta \\ 0 & s_\phi & c_\phi \end{bmatrix},$$

gdje su  $c_{\eta_i} \equiv \cos(\eta_i)$  i  $s_{\eta_i} \equiv \sin(\eta_i)$ , za  $i = 1, 2, 3$ , gdje su  $\eta_i$  elementi vektora  $\boldsymbol{\eta} = [\phi \ \theta \ \psi]^T$ . Translacijska kinematika krutog tijela dana je jednadžbama

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{R}(\boldsymbol{\eta}) \mathbf{v}, \quad (2)$$

gdje je  $\mathbf{x} = [x \ y \ z]^T$  vektor translacijskih pozicija u inercijskom koordinatnom sustavu,  $\mathbf{v} = [u \ v \ w]^T$  je vektor linearnih brzina u koordinatnom sustavu drona, a  $\mathbf{R}(\boldsymbol{\eta})$  je rotacijska matrica iz koordinatnog sustava drona u inercijski koordinatni sustav i iznosi

$$\mathbf{R}(\boldsymbol{\eta}) = \begin{bmatrix} c_\theta c_\psi & c_\psi s_\phi s_\theta - c_\phi s_\psi & s_\phi s_\psi + c_\phi c_\psi s_\theta \\ c_\theta s_\psi & c_\phi c_\psi + s_\phi s_\psi s_\theta & c_\phi s_\psi s_\theta - c_\psi s_\phi \\ -s_\theta & c_\theta s_\phi & c_\theta c_\phi \end{bmatrix},$$



Slika 1. Potpuno aktivirani dron sa nagnutim rotorima [2]

Rotacijska kinematika krutog tijela može se prikazati i korištenjem rotacijske matrice

$$\dot{\mathbf{R}}(\boldsymbol{\eta}) = \mathbf{R}(\boldsymbol{\eta}) \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}), \quad (3)$$

gdje je

$$\mathbf{S}(\mathbf{a}) = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4)$$

za neki  $\mathbf{a} = [a_1 \ a_2 \ a_3]^T$ .

Rotacijska dinamika krutog tijela s obzirom na referentni koordinatni sustav tog tijela prikazana je jednadžbom [2]

$$\mathbf{I}_B \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{I}_B \boldsymbol{\omega}) = \boldsymbol{\tau}, \quad (5)$$

gdje je  $\mathbf{I}_B = \text{diag}\{I_x, I_y, I_z\}$  dijagonalna inercijska matrica, a  $\boldsymbol{\tau} = [\tau_x \ \tau_y \ \tau_z]^T$  je vektor upravljačkih momenata za pojedinu os.

Model translacijske dinamike krutog tijela prikazan je jednadžbom [2]

$$m[\dot{\mathbf{v}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}] = \mathbf{F} - mg\mathbf{R}(\boldsymbol{\eta})^T \mathbf{e}_3, \quad (6)$$

gdje je  $\mathbf{F}$  vektor upravljačkih sila aktuatora,  $g$  je gravitacijsko ubrzanje,  $\mathbf{e}_3 = [0 \ 0 \ 1]^T$ , i masa letjelice sa oznakom  $m$ . Drugi izraz na desnoj strani jednadžbe (6) je projekcija sile gravitacije u koordinatnom sustavu krutog tijela.

Koristeći matrični prikaz vektorskog produkta  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{S}(\mathbf{a})\mathbf{b}$ , gdje je  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ , i  $\mathbf{S}(\mathbf{a})$  definiran u (4), dinamika krutog tijela se može napisati kao

$$\mathbf{I}_B \dot{\boldsymbol{\omega}} + \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega})\mathbf{I}_B \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\tau}, \quad (7)$$

$$m[\dot{\mathbf{v}} + \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega})\mathbf{v}] = \mathbf{F} - mg\mathbf{R}(\boldsymbol{\eta})^T \mathbf{e}_3, \quad (8)$$

Sile i momenti dinamičkog modela (7) i (8) dobivaju se kao projekcije sila potisaka propelera preko odgovarajuće alokacijske matrice [3, 4].

Smatra se da pri srednjim brzinama letjelice, kutovi prevrtanja (*roll*) i naginjanja (*pitch*) su približno jednaki nuli [2], što omogućava da se matrica  $\Omega_B$  aproksimira jediničnom matricom. Vektor derivacija Euler-ovih kutova  $\dot{\boldsymbol{\eta}}$  onda se može aproksimirati vektorom kutnih brzina  $\boldsymbol{\omega}$ . Pod ovim pretpostavkama, rotacijska dinamika letjelice (7) može se reducirati i linearizirati na jednadžbu

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = \mathbf{I}_B^{-1} \boldsymbol{\tau}, \quad (9)$$

Deriviranjem jednadžbe (2), i koristeći izraze (3) i (8), može se dobiti translacijska dinamika drugog reda

$$\ddot{\mathbf{x}} = \frac{1}{m} \mathbf{R}(\boldsymbol{\eta})\mathbf{F} - g\mathbf{e}_3 . \quad (10)$$

U ovom radu smatra se da je koordinatni sustav letjelice ujedno i bazni koordinatni sustav, isto tako regulacija pozicije letjelice će se vršiti u  $x$ - $y$  ravnini, pa stoga dobivamo reducirani oblik translacijske dinamike drona

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} = \frac{1}{m} \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix} . \quad (11)$$

Time se ukupno dobiva šest diferencijalnih jednadžbi drugog reda, odnosno model dinamike drona je ukupno 12. reda. Kako je već rečeno, ovdje će biti zadatak voditi letjelicu u  $x$ - $y$  ravnini, a smatra se da regulator orijentacije održava sve kutove jednake nuli. Na temelju toga se za daljnju sintezu regulatora koriste samo jednadžbe pod (11). Sve simulacije provesti će se u programskom paketu Matlab.

### 3. Upravljanje bespilotne letjelice

#### 3.1. PD regulator sa mjerenjem pozicije i brzine letjelice

Pokazati će se vođenje letjelice u  $x$ - $y$  ravnini za vremenski promjenjivu referentnu trajektoriju

$$x_d(t) = (9 - 8e^{-0.2t})\sin((2 - e^{-t})t), \quad (12)$$

$$y_d(t) = (9 - 8e^{-0.2t})\cos((2 - e^{-t})t). \quad (13)$$

Za asimptotsko slijeđenje vremenski promjenjive referentne trajektorije, implementirati će se PD regulator sa unaprijednom (*feedforward*) kompenzacijom za poništavanje trajne regulacijske pogreške. Sinteza regulatora provesti će se po dinamici  $x$ -osi letjelice, a identična sinteza vrijedit će i za dinamiku  $y$ -osi. Iz (11) izdvajamo diferencijalnu jednadžbu drugog reda koja opisuje dinamiku pozicije letjelice za  $x$ -os

$$\ddot{x} = kF_x, \quad (14)$$

gdje je  $k = 1/m$ , poznati parametar modela. Za potrebe regulacije uvodi se varijabla pogreške  $e$ , koju je potrebno svesti na nulu kada  $t \rightarrow \infty$ ,

$$e(t) = x(t) - x_d(t), \quad (15)$$

gdje je  $x(t)$  mjerena pozicija. Željena dinamika pogreške se zapisuje kao

$$a_2\ddot{e} + a_1\dot{e} + a_0e = 0. \quad (16)$$

Parametri  $(a_2, a_1, a_0) > 0$ , moraju biti veći od nule kako bi sustav bio globalno asimptotski stabilan. Iz (15) se može zapisati sljedeće

$$\begin{aligned} x(t) &= e(t) + x_d(t), \\ \dot{x} &= \dot{e} + \dot{x}_d, \\ \ddot{x} &= \ddot{e} + \ddot{x}_d, \end{aligned} \quad (17)$$

te se posljednja jednadžba iz (17) uvrsti u (14), i dobije

$$\ddot{e} + \ddot{x}_d = kF_x. \quad (18)$$

Potrebno je odabrati upravljačku varijablu  $F_x$  s kojom će se dobiti željena dinamika pogreške iz (16)

$$F_x = \frac{1}{k}(\ddot{x}_d - K_d\dot{e} - K_p e), \quad (19)$$

te se uvrštavanjem jednadžbe (19) u (18) dobije

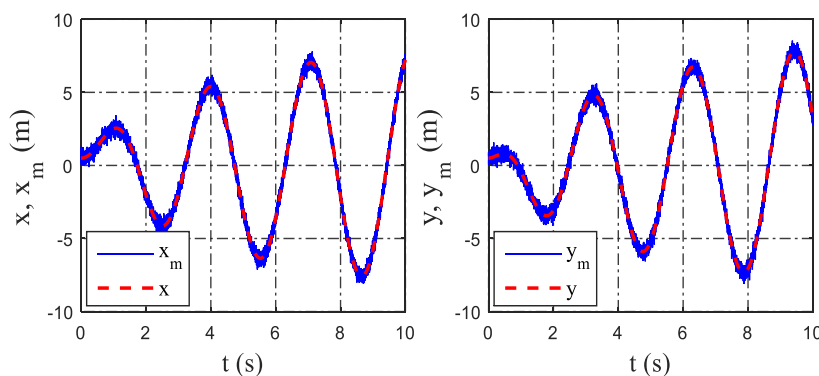
$$\ddot{e} + K_d\dot{e} + K_p e = 0, \quad (20)$$

iz čega se zaključuje, da parametri regulatora moraju biti veći od nule ( $K_d, K_p > 0$ ). Parametri regulatora preuzeti su iz [2],  $K_d = 5, K_p = 6$ , a parametar  $k = 2 \text{ kg}^{-1}$ . Simulacije su provedene za početne uvjete:  $x(0) = y(0) = 0.5 \text{ m}, \dot{x}(0) = \dot{y}(0) = 0$ .

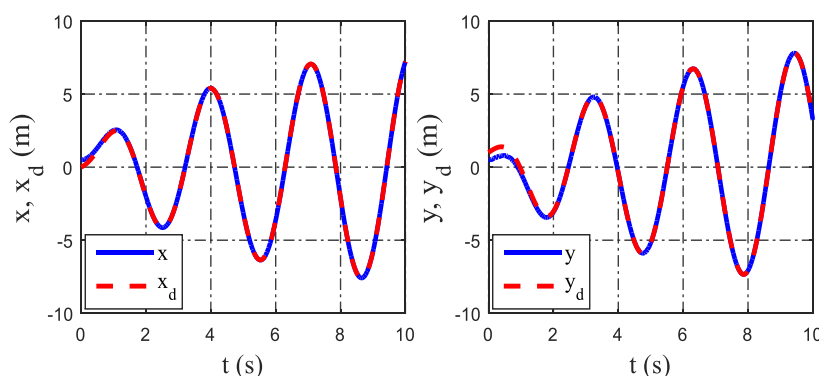
Na rezultate mjerenja pozicije i brzine dodati će se šum mjernja koji je često prisutan u realnim uvjetima, i može utjecati na kvalitetu regulacije. Na slici 2. prikazane su mjerene pozicije  $x_m(t) = x(t) + 0.5\xi(t)$  i  $y_m(t) = y(t) + 0.5\xi(t)$ , gdje je  $\xi(t)$  Gauss-ov šum standardne normalne raspodjele  $N(0,1)$ .

Mjerene veličine sa šumom biti će ulazi za regulator. Na slici 3. prikazan je odziv sustava u odnosu na referentnu trajektoriju. Iz odziva se vidi da imamo asimptotsko slijeđenje referentne trajektorije, i da letjelica vrlo brzo „uhvati“ željenu trajektoriju, što je razlog poznavanja parametra sustava i mjerenih veličina.

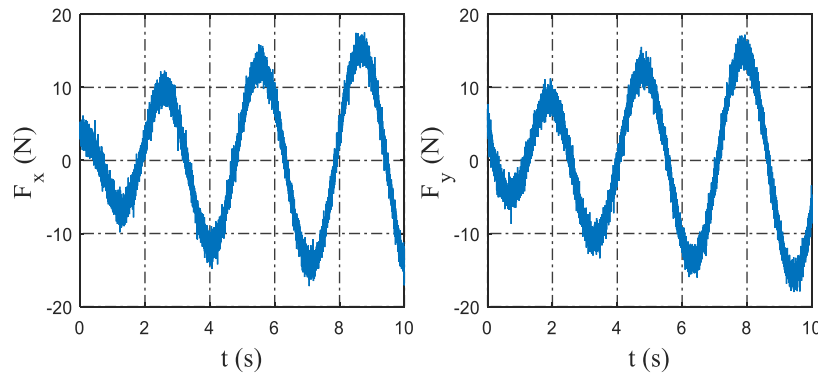
Iznosi upravljačkih varijabli prikazani su na slici 4. Može se vidjeti da su signali upravljačkih varijabli također zašumljeni, jer su mjerene veličine sa šumom ulazi u regulator.



**Slika 2. Pozicije letjelice  $x(t)$  i  $y(t)$  sa šumom mjerenja**



**Slika 3. Referentne trajektorije i odzivi sustava u slučaju sa šumom mjerenja**



**Slika 4. Upravljačke varijable regulatora u slučaju mjerenja pozicije i brzine letjelice**

### 3.2. PD regulator sa estimatorom brzine

Sada će se pogledati slučaj kada imamo mjerenje pozicije letjelice, ali ne i mjerenje brzine. Brzina će se estimirati na temelju mjerenja pozicije Luenberger observerom stanja. Ovaj observer je zapravo kopija modela sustava, zbog čega točnost estimacije jako ovisi o poznavanju parametara sustava. Kao što je metoda separacije vrijedila pri sintezi regulatora zbog potpuno aktuiranog sustava, isto će vrijediti i za sintezu estimatora. Provesti će se sinteza estimatora za dinamiku  $x$  osi, a isto će vrijediti i za dinamiku  $y$  osi. Jednadžba (14) zapisati će se u prostoru stanja

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}F_x, \quad (21)$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x}, \quad (22)$$

gdje  $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2]^T$  predstavlja vektor varijabli stanja pozicije i brzine. Matrica koeficijenata označena je sa  $\mathbf{A} = [0 \ 1; 0 \ 0]$ , matrica ulaza je  $\mathbf{B} = [0 \ k]^T$ , matrica izlaza je  $\mathbf{C} = [1 \ 0]$ , a  $y$  predstavlja izlaznu veličinu koja se mjeri. U ovom slučaju izlazna veličina je  $x$ -pozicija letjelice. Luenberger-ov estimator ima sljedeću jednadžbu stanja

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}F_x + \mathbf{L}(y - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}), \quad (23)$$

$$\hat{y} = \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}, \quad (24)$$

gdje je  $\hat{\mathbf{x}} = [\hat{x}_1 \ \hat{x}_2]^T$  vektor estimirane pozicije i brzine letjelice, a  $\mathbf{L}$  je matrica pojačanja estimatora koju je potrebno izračunati. Odstupanje varijabli stanja estimatora od varijabli stanja linearnog sustava je

$$\mathbf{e} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}, \quad (25)$$

$$\dot{\mathbf{e}} = \dot{\mathbf{x}} - \dot{\hat{\mathbf{x}}}. \quad (26)$$

Uvrštavanjem jednadžbi (21) i (23) u jednadžbu (26), dobiva se dinamika odstupanja varijabli stanja estimatora od varijabli stanja linearnog sustava

$$\dot{\mathbf{e}} = (\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C})\mathbf{e}. \quad (27)$$

Da bi dinamika pogreške bila stabilna, treba pronaći matricu pojačanja  $\mathbf{L}$ , koja će postaviti polove dinamike pogreške na lijevu stranu kompleksne ravnine. Matrica  $\mathbf{L}$  se može izračunati u programu Matlab pomoću sljedeće naredbe

$$\mathbf{L}^T = \text{place}(\mathbf{A}^T, \mathbf{C}^T, \mathbf{p}), \quad (28)$$

gdje je  $\mathbf{p}$  vektor željenih polova estimatora. Polovi estimatora moraju biti oko pet puta više udaljeni na lijevu stranu kompleksne ravnine od polova regulatora, jer dinamika estimatora mora biti brža od dinamike regulatora. Iz tog razloga, sinteza regulatora se može provesti neovisno o estimatoru, jer te dvije dinamike ne utječu jedna na drugu.

Vrijednosti parametara regulatora ostaju iste kao u prethodnom slučaju, a polovi estimatora odabrani su sa vrijednostima  $\mathbf{p} = [-10 - 15]$ . Parametar modela i dalje je poznat ( $k = 2 \text{ kg}^{-1}$ ). Ulaz u estimator biti će mjerene pozicije sa šumom mjerenja kao u prethodnom slučaju. Prvo će se provesti simulacija kada su u početnom trenutku ( $t = 0$ ) sve varijable stanja sustava, i varijable stanja estimatora jednake nuli.

Na slici 5. mogu se vidjeti estimirane pozicije i brzine letjelice sa Luenberger-ovim estimatorom. Razlog zbog kojeg nema odstupanja između estimiranih i stvarnih veličina je taj što su početni uvjeti sustava i estimatora jednaki, te zato što egzaktno poznajemo model sustava. Može se vidjeti da su odzivi sustava prikazani na slici 6. jednako dobri, kao i u prethodnom slučaju sa mjerenjem brzine.

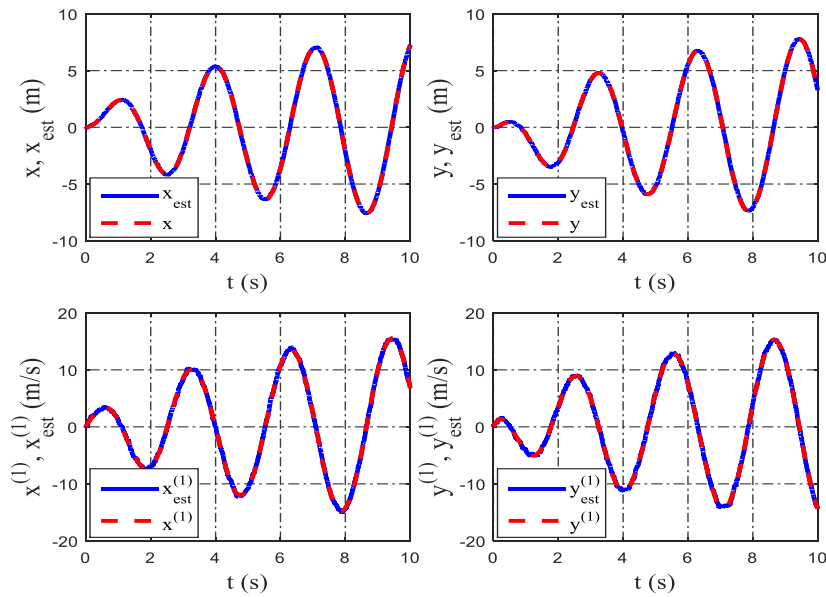
Upravljačke varijable regulatora prikazane su na slici 7. Šum mjerenja se je malo preslikao na upravljačke varijable, ali ne u tolikoj mjeri zbog dobro estimiranih varijabli stanja. Šum se može otkloniti korištenjem niskopropusnog filtra, kroz koji bi prolazila mjerena veličina.

Performanse estimatora potrebno je ispitati i za različite početne uvjete sustava. Sada će se uzeti početni uvjeti pozicije  $x(0) = y(0) = 0.5 \text{ m}$ , dok će sve druge varijable stanja u početku biti jednake nuli. Na slici 8. može se vidjeti, da se razlika u početnim uvjetima odrazila na estimirane brzine. Odstupanje estimiranih brzina na početku se dogodio zbog početne krive pretpostavke estimiranih varijabli stanja, ali se to nije odrazilo na odzive sustava koji su prikazani na slici 10. Dinamika estimatora je dovoljno brza da ispravi početno odstupanje.

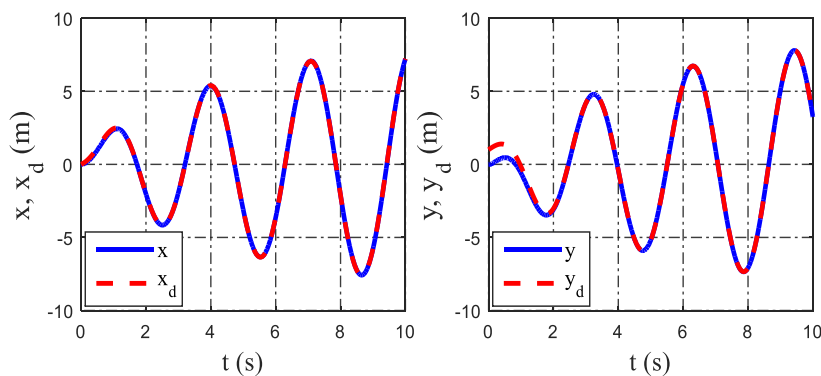
Treba obratiti pozornost na početno forsiranje upravljačkih varijabli koje su prikazane na slici 11. To se događa zbog početnog odstupanja estimiranih varijabli stanja, ponajviše estimirane brzine od referentne vrijednosti. U ovom slučaju početno forsiranje upravljačkih varijabli nije tako veliko, ali se za drugačije početne uvjete može dogoditi, da vrijednosti regulatora narastu iznad dozvoljenih vrijednosti koji su prihvatljivi za realne aktuatora. Iz toga razloga na izlaz iz regulatora obično se postavlja saturacijski element koji ograničava izlaznu vrijednost regulatora.

Slika 12. prikazuje detaljniji prikaz početnih vrijednosti regulatora, dok se na slici 9. nalazi uvećani prikaz početnih odstupanja estimiranih brzina za promijenjene početne uvjete. Može se zaključiti da će Luenberger-ov estimator dati dobre rezultate pri estimaciji varijabli stanja linearnih sustava, ukoliko se dobro poznaju parametri sustava, unatoč nerobusnosti na početne uvjete. Kada bi se parametri sustava mijenjali značajnije tijekom rada, Luenberger-ov estimator u kombinaciji sa neadaptivnim upravljanjem ne bi dao dobre rezultate. U sljedećem

poglavlju pokazati će se performanse ovoga observera u kombinaciji sa adaptivnim regulatorom, koji će estimirati nepoznati parametar mase letjelice.

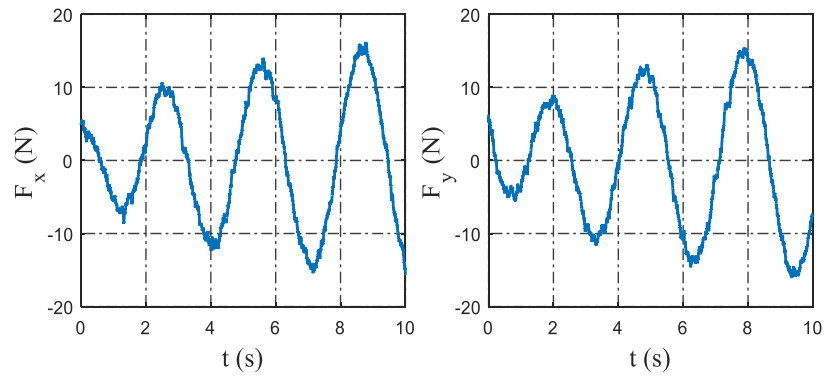


**Slika 5. Estimirane pozicije i brzine letjelice Luenberger observerom ( $x(0)=y(0)=0$  m)**

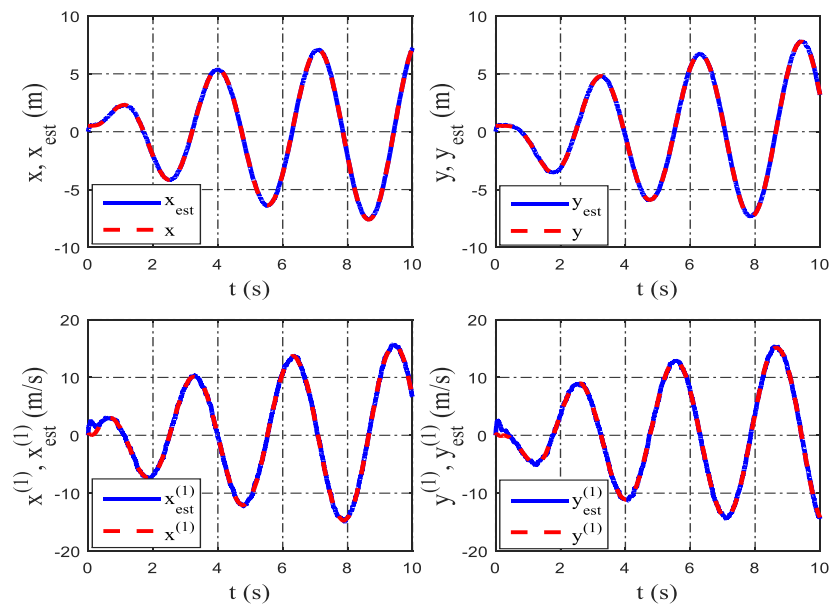


**Slika 6. Referentne trajektorije i odzivi sustava u slučaju Luenbereger observera ( $x(0)=y(0)=0$  m)**

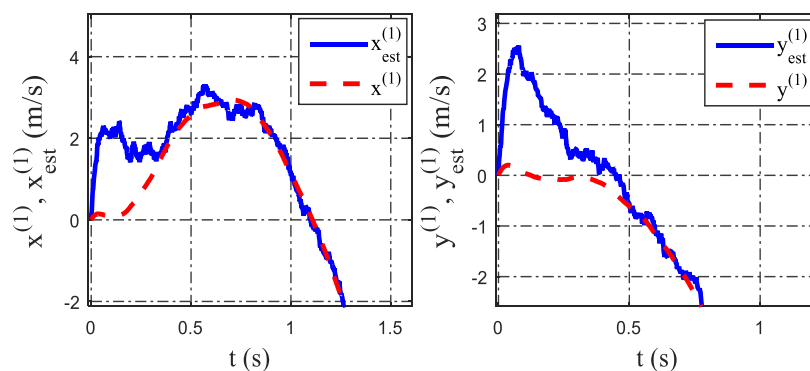




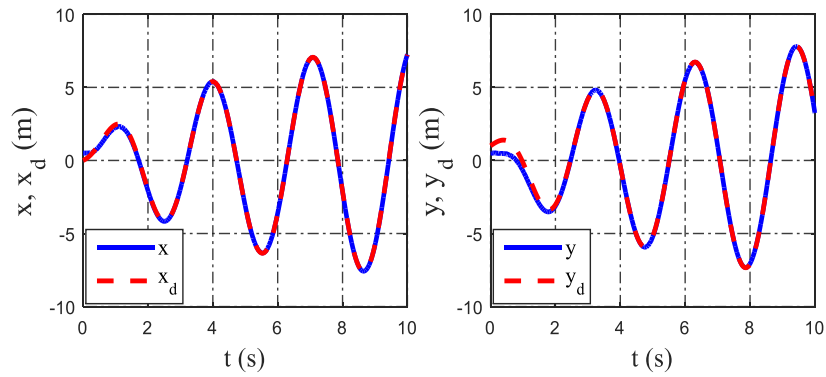
**Slika 7. Upravljačke varijable regulatora u slučaju korištenja Luenberger observera ( $x(0)=y(0)=0$  m)**



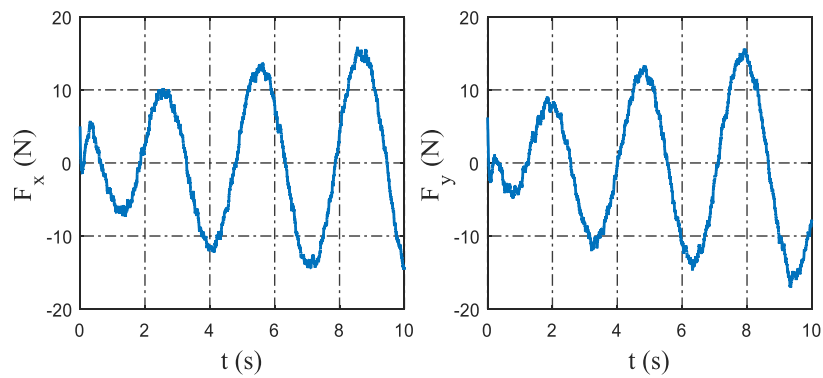
**Slika 8. Estimirane pozicije i brzine u slučaju korištenja Luenberger observera ( $x(0)=y(0)=0.5$  m)**



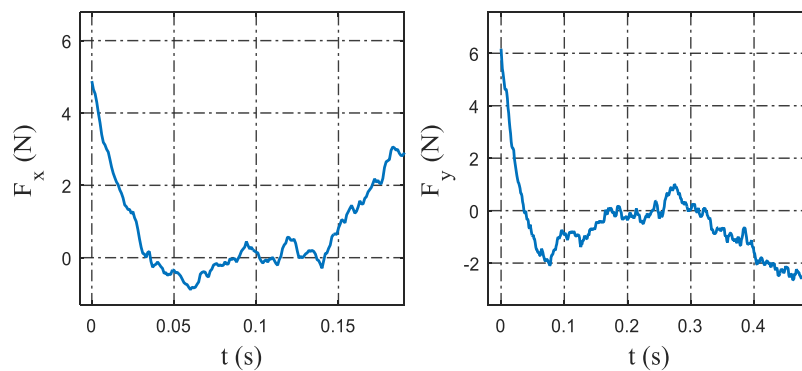
**Slika 9. Uvećani prikaz početnog odstupanja estimiranih brzina Luenberger observerom ( $x(0)=y(0)=0.5$  m)**



**Slika 10. Referentne trajektorije i odzivi sustava u slučaju korištenja Luenbereger observera ( $x(0)=y(0)=0.5$  m)**



**Slika 11. Upravljačke varijable regulatora u slučaju korištenja Luenbereger observera ( $x(0)=y(0)=0.5$  m)**



**Slika 12. Uvećani prikaz početnih vrijednosti regulatora ( $x(0)=y(0)=0.5$  m)**

## 4. Adaptivno upravljanje bespilotnom letjelicom

U ovom poglavlju pokazati će se rezultati adaptivnog upravljanja letjelicom. Adaptivno upravljanje je potrebno kada se tijekom vremena parametri sustava značajno mijenjaju. Na primjeru drona, to će biti nepoznata masa tereta koju dron mora nositi. Prvo će se pokazati rezultati simulacije kada imamo mjerenje brzine letjelice, a zatim slučaj kada se brzina estimira.

### 4.1. Adaptivni regulator sa mjerenjem brzine letjelice

Ukoliko se nepoznati parametri pojavljuju linearno u dinamičkom modelu, može se primijeniti adaptivno upravljanje [5]. Sinteza regulatora ponovno će se provesti za translacijsku dinamiku  $x$  osi, a isto će vrijediti i za translacijsku dinamiku  $y$  osi. Jednadžba (14) zapisati će se, sa masom letjelice na lijevoj strani jednadžbe

$$m\ddot{x} = F_x . \quad (29)$$

Definiramo odstupanje varijable stanja od željene referentne trajektorije označene pod (12)

$$\tilde{x} = x - x_d(t) , \quad (30)$$

$$\ddot{x} = \ddot{\tilde{x}} + \ddot{x}_d(t) , \quad (31)$$

tako da uvrštavanjem (31) u jednadžbu (29) dobivamo jednadžbu pogreške

$$m\ddot{\tilde{x}} + m\ddot{x}_d = F_x . \quad (32)$$

Provodimo korak kojemu je cilj redukcija reda sustava na sustav prvog reda. Uvodimo novu varijablu

$$r = \ddot{\tilde{x}} + \lambda\dot{\tilde{x}} , \quad (33)$$

gdje je  $\lambda$  pozitivni skalar, odakle slijedi

$$\ddot{\tilde{x}} = \dot{r} - \lambda\dot{\tilde{x}} . \quad (34)$$

Uvrštavanjem (34) u jednadžbu pogreške (32), dobiva se

$$m\dot{r} + m(\dot{x}_d - \lambda\dot{\tilde{x}}) = F_x . \quad (35)$$

Uvedemo li pomoćnu oznaku

$$\dot{x}_r = \dot{x}_d - \lambda\dot{\tilde{x}} , \quad (36)$$

prethodna diferencijalna jednadžba postaje

$$m\dot{r} + m\dot{x}_r = F_x . \quad (37)$$

Zakon upravljanja pretpostavljamo u obliku

$$F_x = \hat{m}\dot{x}_r - Kr , \quad (38)$$

gdje je  $\hat{m}$  estimirana vrijednost nepoznatog parametra mase letjelice, a  $K$  je pozitivno pojačanje regulatora. Kada se uvrsti navedeni zakon upravljanja u diferencijalnu jednadžbu (37), dobiva se

$$m\dot{r} + Kr + \tilde{m}\ddot{x}_r = 0, \quad (39)$$

gdje je  $\tilde{m} = m - \hat{m}$ , odstupanje estimirane vrijednosti od stvarne vrijednosti parametra. Za sintezu adaptivnog zakona upravljanja koristi se Lyapunovljeva metoda analize stabilnosti. Formira se Lyapunovljeva funkcija

$$V(r, \tilde{m}) = \frac{1}{2}mr^2 + \frac{1}{2}\gamma\tilde{m}^2, \quad (40)$$

gdje je  $\gamma$  neki pozitivni parametar. Derivacija Lyapunovljeve funkcije je

$$\dot{V} = mr\dot{r} + \gamma\tilde{m}\dot{\tilde{m}}. \quad (41)$$

Uvrštavanjem derivacije pomoćne varijable  $r$  u prethodni izraz, dobiva se

$$\dot{V} = -Kr^2 + \tilde{m}(\gamma\dot{\tilde{m}} - r\ddot{x}_r). \quad (42)$$

Derivacija Lyapunovljeve funkcije će biti negativno semidefinitna

$$\dot{V} = -Kr^2, \quad (43)$$

ukoliko je izraz u zagradi jednak nuli, odnosno

$$\gamma\dot{\tilde{m}} - r\ddot{x}_r = 0. \quad (44)$$

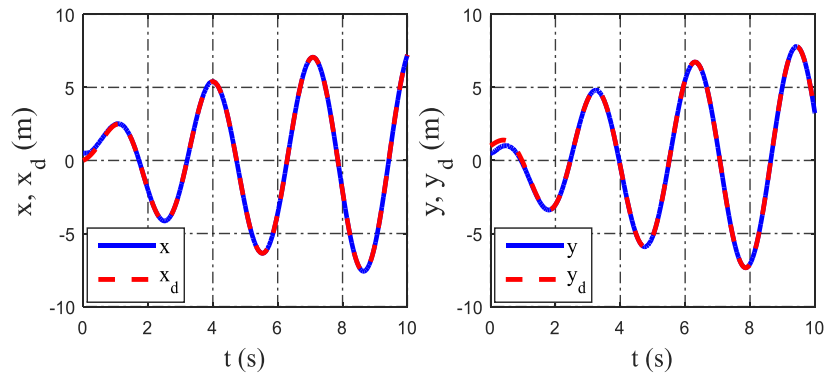
Smatramo da je prava vrijednost nepoznatog parametra konstantna u vremenu, stoga imamo sljedeći zakon estimacije nepoznatog parametra mase letjelice

$$\dot{\hat{m}} = -\frac{1}{\gamma}r\ddot{x}_r, \quad (45)$$

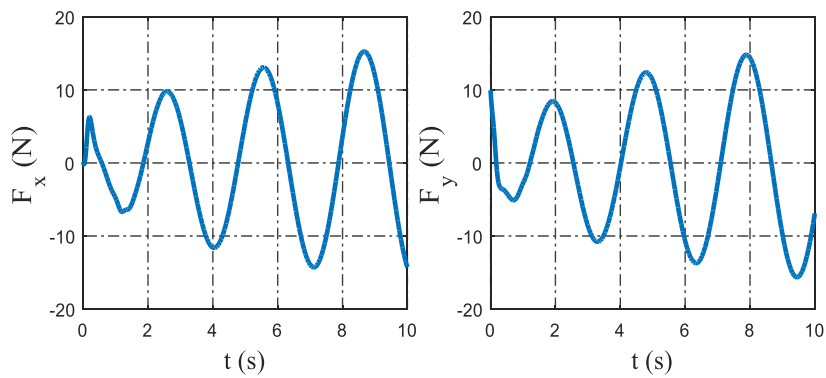
koji zajedno sa upravljačkom varijablom (38) čini konačni zakon adaptivnog upravljanja.

Simulacija je provedena za početne uvjete pozicije drona  $x(0) = y(0) = 0.5$  m, te za početnu vrijednost estimirane mase drona  $\hat{m}(0) = 0.2$  kg, dok su početne vrijednosti brzine jednake nuli. Prava vrijednost mase drona je  $m = 0.5$  kg. Odabrani parametri regulatora su:  $K = 3$ ,  $\lambda = 3$ ,  $\gamma = 0.7$ . Parametar  $\gamma$  utječe na dinamiku estimacije nepoznatog parametra, dok pojačanja  $K$  i  $\lambda$ , utječu na dinamiku estimacije parametra i kvalitetu slijeđenja referentne trajektorije.

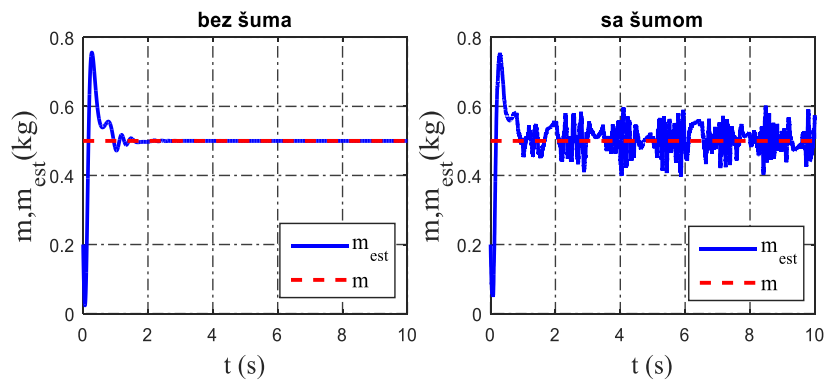
Odzivi sustava prikazani su na slici 13. U ovom slučaju nije postavljen šum na mjerene veličine. Može se vidjeti da adaptivni regulator omogućava asimptotsko slijeđenje referentne trajektorije, i da je slijeđenje referentne trajektorije  $y$  osi nešto bolje nego kod prethodnog PD regulatora sa unaprijednom kompenzacijom. Na slici 14. prikazane su vrijednosti upravljačkih varijabli.



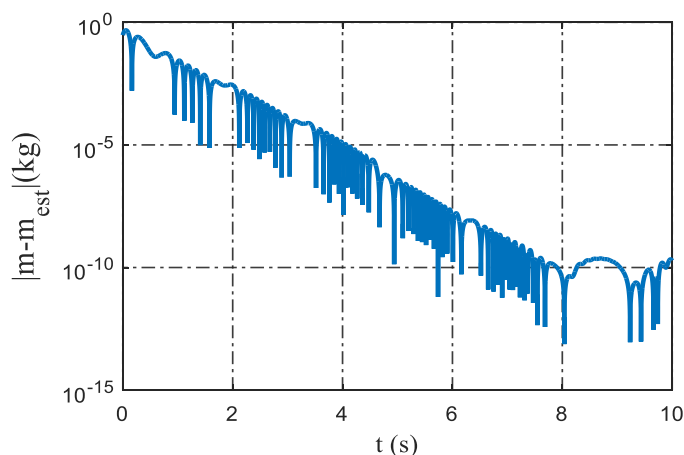
**Slika 13. Referentne trajektorije i odzivi sustava u slučaju korištenja adaptivnog regulatora bez šuma mjerenja (brzina se mjeri)**



**Slika 14. Upravljačke varijable regulatora u slučaju korištenja adaptivnog regulatora bez šuma mjerenja (brzina se mjeri)**



**Slika 15. Estimirani parametar u slučaju bez i sa šumom mjerenja (brzina letjelice se mjeri)**



**Slika 16. Apsolutna pogreška estimacije parametra mase bez šuma mjerenja**

Na slici 15. može se vidjeti da ukoliko nema šuma mjerenja, estimirani parametar će asimptotski konvergirati prema točnoj vrijednosti parametra. Slika 16. prikazuje apsolutnu pogrešku estimacije parametra koja s vremenom konvergira u nulu.

Također, na slici 15. je prikazana estimacija parametra kada je prisutan šum mjerenja pozicije i brzine. Primijenjena je amplituda šuma pet puta manja nego u prethodnim slučajevima. Vidi se da je dinamika estimacije parametra adaptivnog regulatora nerobusna i za male vrijednosti šuma, i nije u stanju konvergirati ka pravoj vrijednosti parametra.

#### 4.2. Adaptivni regulator sa estimatorom brzine

Luenberger-ov estimator varijabli stanja koji je prikazan u poglavlju 3.2., sada će se implementirati sa adaptivnim regulatorom. Ulaz u adaptivni regulator sada su estimirane pozicije i brzine, pa pomoćne varijable (33) i (36) sada postaju

$$r = \hat{x} - \dot{x}_d + \lambda(\hat{x} - x_d), \quad (46)$$

$$\dot{x}_r = \dot{x}_d - \lambda(\hat{x} - x_d). \quad (47)$$

Model estimatora varijabli stanja sada sadrži estimirani parametar mase, pa izraz (23) sada postaje

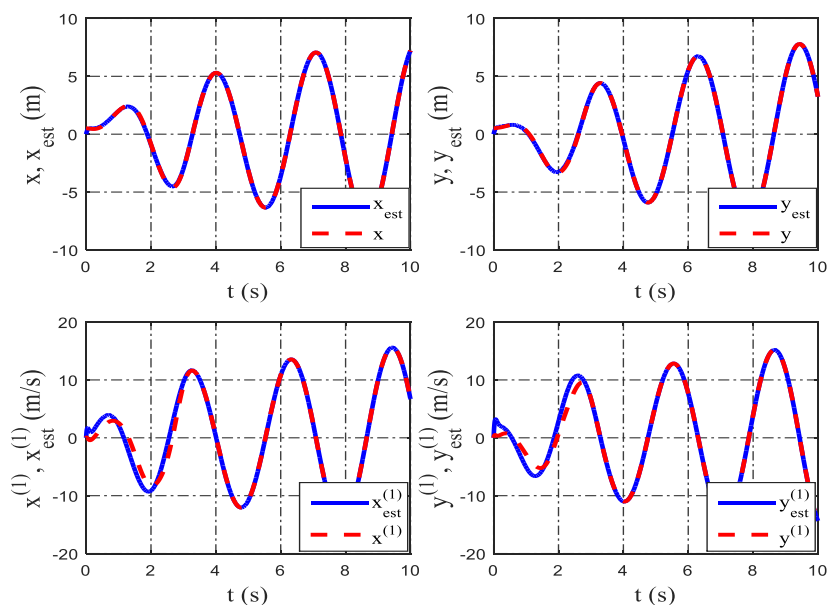
$$\dot{\hat{x}} = \mathbf{A}\hat{x} + \widehat{\mathbf{B}}F_x + \mathbf{L}(y - \mathbf{C}\hat{x}), \quad (48)$$

gdje je  $\widehat{\mathbf{B}} = [0 \quad 1/\widehat{m}]^T$ . Sintaza observera provodi se na isti način kao u poglavlju 3.2.

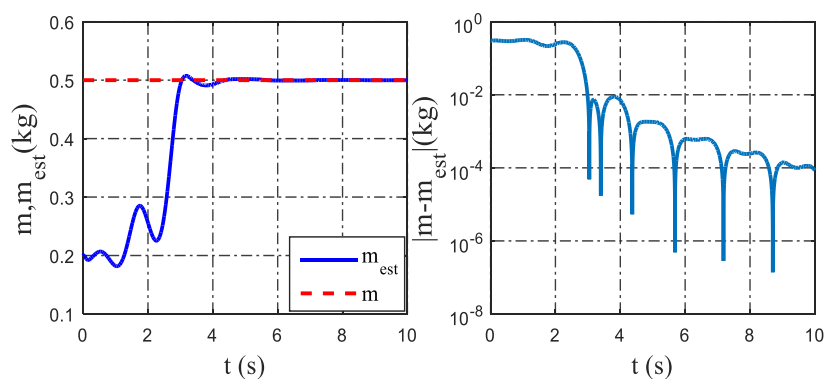
Simulacija će se provesti za jednake početne uvjete kao za prethodni slučaj:  $x(0) = y(0) = 0.5$  m i  $\widehat{m}(0) = 0.2$  kg. Odabrani parametri regulatora su:  $K = 3$ ,  $\lambda = 3$ ,  $\gamma = 80$ . U ovom slučaju, slijeđenje referentne trajektorije se može jedino postići usporavanjem dinamike estimacije nepoznatog parametra koja je prikazana jendadžbom (45). To je razlog odabira velike vrijednosti za parametar  $\gamma$ . Ukoliko se odabere brža dinamika estimacije parametra, pogreška estimacije brzine će se jako odraziti na dinamiku estimacije parametra, a u konačnici i na odziv sustava, gdje letjelica neće biti u stanju pratiti zadanu trajektoriju. Šum mjerenja se

neće uzeti u obzir, jer se u prethodnom slučaju moglo vidjeti da je adaptivni regulator nerobustan na šum mjerenja.

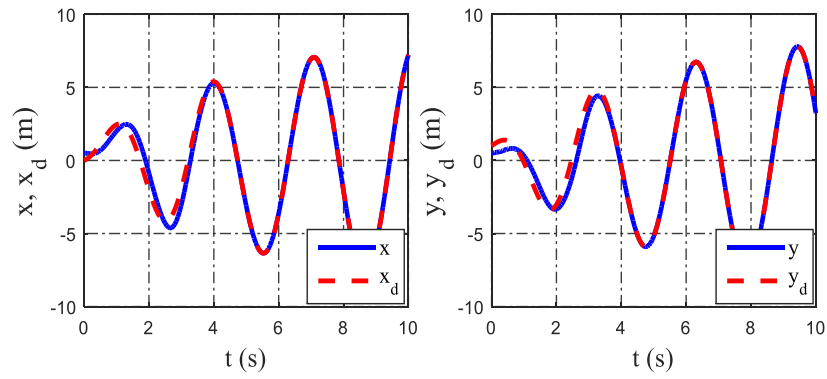
Slika 17. prikazuje estimirane pozicije i brzine. U početku postoji značajnije odstupanje estimirane brzine od stvarne vrijednosti. Asimptotska konvergencija estimiranog parametra ka pravoj vrijednosti, kao i apsolutna pogreška estimacije parametra prikazani su na slici 18. Slika 19. pokazuje odzive sustava, dok je na slici 21. prikazano slijeđenje referentne trajektorije u  $x$ - $y$  ravnini. Vrijednosti upravljačkih varijabli prikazani su na slici 20.



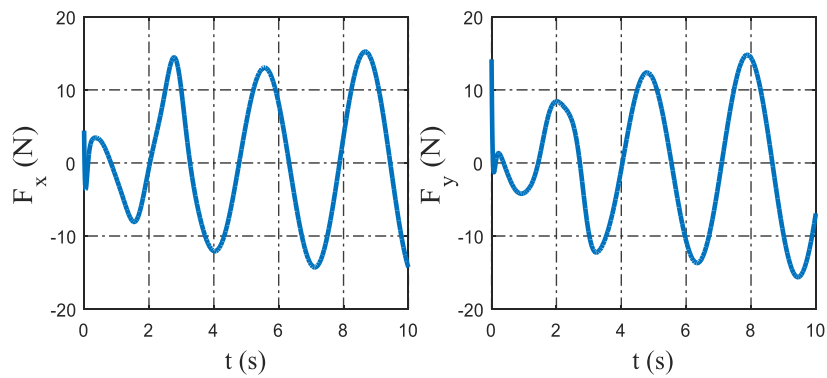
**Slika 17. Estimirane vrijednosti pozicije i brzine u slučaju adaptivnog regulatora i Luenberger observera**



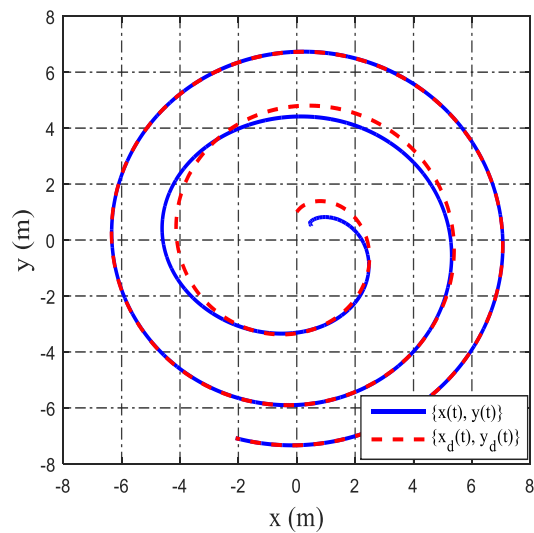
**Slika 18. Estimirani parametar mase i apsolutna pogreška estimacije u slučaju adaptivnog regulatora i Luenberger observera**



**Slika 19. Referentne trajektorije i odzivi sustava u slučaju adaptivnog regulatora i Luenberger observera**



**Slika 20. Upravljačke varijable regulatora u slučaju adaptivnog regulatora i Luenberger observera**



**Slika 21. Trajektorija letjelice (adaptivni regulator sa Luenberger observerom stanja)**



## 5. ADB observer stanja

### 5.1. Sinteza ADB observera stanja

Estimator varijabli stanja zasnovan na metodi algebarskog deriviranja (*Algebraic Derivative Based*) ima neasimptotsku, gotovo trenutnu konvergenciju estimiranih varijabli ka pravim vrijednostima. Estimacija varijabli stanja zasniva se na računanju konačnog broja vremenskih derivacija izlaza sustava (veličine koja se mjeri) [6]. Prednost ADB observera je i robusnost s obzirom na početne uvjete sustava, koji se eliminiraju prilikom sinteze ADB observera stanja. Prvi puta, ova metoda je predložena u radu [7].

U ovom poglavlju usporediti će se performanse ADB observera sa Luenberger observerom stanja prikazanim u poglavlju 3.2. Koristiti će se isti PD regulator sa unaprijednom kompenzacijom

$$F_x = \left(\frac{1}{k}\right) [\ddot{x}_d - K_d(\dot{\hat{x}} - \dot{x}_d) - K_p(\hat{x} - x_d)], \quad (49)$$

$$F_y = \left(\frac{1}{k}\right) [\ddot{y}_d - K_d(\dot{\hat{y}} - \dot{y}_d) - K_p(\hat{y} - y_d)]. \quad (50)$$

Sinteza ADB observera stanja provesti će se za translacijsku dinamiku  $x$  osi, a jednako će vrijediti i za dinamiku  $y$  osi. Jednadžba (14) zapisati će se u domeni kompleksne varijable

$$s^2 x(s) - k F_x(s) = R(s), \quad (51)$$

gdje je  $R(s) = x_0 s + v_0$ ,  $x_0$  je početna pozicija i  $v_0$  je nepoznata početna brzina. Deriviranjem izraza (51) dva puta po kompleksnoj varijabli  $s$ , dobiva se sustav slobodan početnih uvjeta

$$s^2 \frac{d^2 x(s)}{ds^2} + 4s \frac{dx(s)}{ds} + 2x(s) - k \frac{d^2 F_x(s)}{ds^2} = 0. \quad (52)$$

Integriranjem prethodne jednadžbe u vremenskoj domeni, odnosno množenjem sa  $s^{-1}$  i  $s^{-2}$ , dobivaju se dvije algebarske jednadžbe

$$s \frac{d^2 x(s)}{ds^2} + 4 \frac{dx(s)}{ds} + 2s^{-1} x(s) - ks^{-1} \frac{d^2 F_x(s)}{ds^2} = 0, \quad (53)$$

$$\frac{d^2 x(s)}{ds^2} + 4s^{-1} \frac{dx(s)}{ds} + 2s^{-2} x(s) - ks^{-2} \frac{d^2 F_x(s)}{ds^2} = 0. \quad (54)$$

Ako se jednadžba (54) zapiše u obliku

$$\frac{1}{s} \left[ 4 \frac{dx(s)}{ds} + \frac{1}{s} (2x(s) - k \frac{d^2 F_x(s)}{ds^2}) \right] + \frac{d^2 x(s)}{ds^2} = 0, \quad (55)$$

iz jednadžbe (55), mogu se izlučiti dvije varijable stanja observera u kompleksnoj domeni

$$x_1(s) = \frac{1}{s} (2x(s) - k \frac{d^2 F_x(s)}{ds^2}), \quad (56)$$

$$x_2(s) = \frac{1}{s} \left( 4 \frac{dx(s)}{ds} + x_1(s) \right). \quad (57)$$

Transformacijom izraza (56) i (57) u vremensku domenu, dobivaju se jednačbe ADB observera zapisane u prostoru stanja

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 2x(t) - kt^2 F_x(t), \\ \dot{x}_2 &= x_1 - 4tx(t), \end{aligned} \quad (58)$$

gdje su  $x_1$  i  $x_2$  varijable stanja ADB estimatora. Još je potrebno odrediti jednačbe izlaza. Izraz (55) može se napisati kao

$$\frac{d^2 x(s)}{ds^2} = -x_2(s). \quad (59)$$

Transformacijom prethodne jednačbe u vremensku domenu, dobiva se izraz za estimiranu poziciju drona

$$\hat{x}(t) = -\frac{1}{t^2} x_2. \quad (60)$$

Ako se jednačba (53) zapiše u sljedećem obliku

$$s \frac{d^2 x(s)}{ds^2} + 4 \frac{dx(s)}{ds} + \frac{1}{s} (2x(s) - k \frac{d^2 F_x(s)}{ds^2}) = 0, \quad (61)$$

transformacija prethodne jednačbe u vremensku domenu će biti

$$\frac{d}{dt} (t^2 x(t)) - 4tx(t) + x_1(t) = 0, \quad (62)$$

gdje se deriviranjem prvog člana dobiva

$$2tx(t) + t^2 \dot{x}(t) - 4tx(t) + x_1(t) = 0. \quad (63)$$

Iz jednačbe (63) može se izlučiti izraz za estimiranu brzinu drona, čime se dobiva i druga jednačba izlaza

$$\hat{\dot{x}} = \frac{2}{t} \hat{x}(t) - \frac{1}{t^2} x_1, \quad (64)$$

gdje je  $\hat{x}(t)$  estimirana pozicija, a varijabla  $\hat{\dot{x}}(t)$  je estimirana brzina. Sustav (58), (60) i (64) se može zapisati u matičnoj formi prostora stanja, gdje su

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & -kt^2 \\ -4t & 0 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{C} &= -\frac{1}{t^2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2/t \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

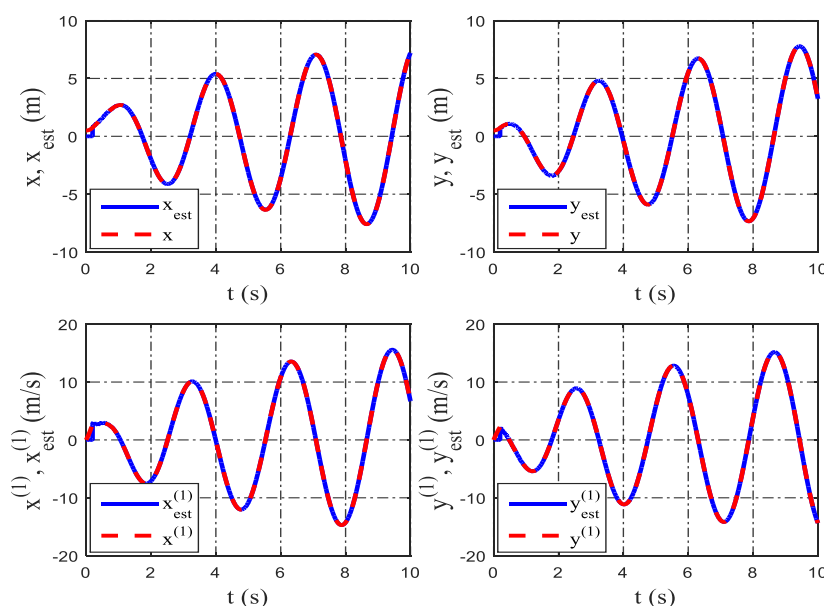
Može se zaključiti da je ADB observer opisan prostorom stanja nestabilan, što se vidi iz matrice  $\mathbf{A}$ , gdje je dvostruki pol u  $s = 0$ . Elementi matrice  $\mathbf{B}$ ,  $b_{12}(t) = -kt^2$  i  $b_{21}(t) = -4t$  su neograničene funkcije vremena, što znači da bi i varijable stanja estimatora s vremenom rasle u beskonačnost. Iz tog razloga potrebno je svakih  $\varepsilon$  sekundi resetirati estimator, ukoliko se želi implementirati u realni sustav, gdje je  $\varepsilon$  jako mali pozitivan broj. Iz (60) se može vidjeti da je sustav singularan u trenutku  $t = 0$  s, zbog čega se ADB estimator mora uključiti nakon kratkog vremena  $\varepsilon$ .

## 5.2. Simulacijski rezultati - ADB observer stanja

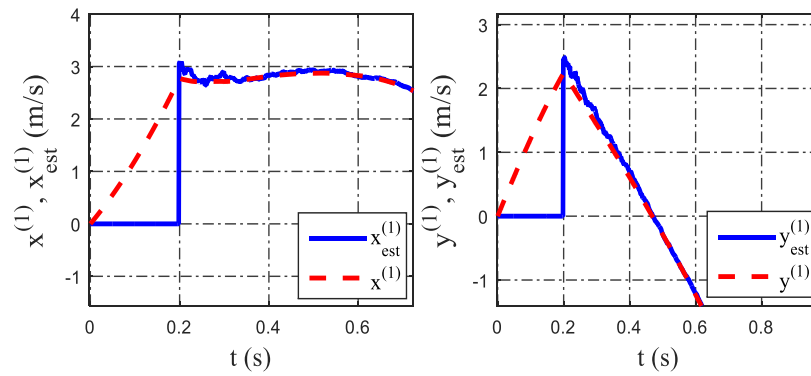
Simulacije su provedene za sljedeće početne uvjete  $x(0) = y(0) = 0.5$  m. Parametar mase letjelice  $k$  se smatra poznatim. Na mjerene veličine pozicije letjelice  $x(t)$  i  $y(t)$  je postavljen šum standardne normalne raspodjele  $N(0,1)$ , koji su ulazi u estimacijski filter. Vrijeme uključenja ADB estimatora je  $\varepsilon = 0.2$  s.

Slika 22. prikazuje estimirane pozicije i brzine letjelice po  $x$  i  $y$  osi. Može se vidjeti da ADB observer ima neasimptotsku konvergenciju estimiranih pozicija ka pravim vrijednostima, međutim ukoliko je uključen šum mjerenja, konvergencija estimiranih brzina biti će asimptotske prirode. Na slici 23. dan je uvećani prikaz konvergencije estimiranih brzina ka pravim vrijednostima.

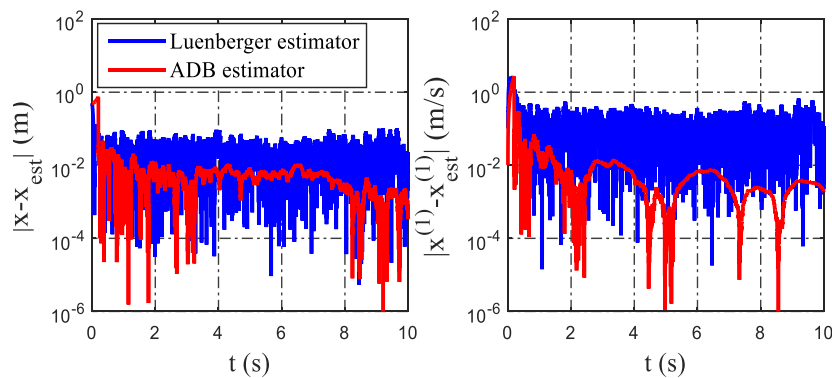
Odzivi sustava s obzirom na referentne trajektorije dani su na slici 25. Letjelica u ovom slučaju bolje prati referentnu trajektoriju nego u poglavlju 3.2., zbog brže i točnije estimiranih varijabli stanja. Vrijednosti upravljačkih varijabli prikazani su slikom 26. Šum mjerenja se manje preslikava na upravljačke varijable kod ADB estimatora, nego kod Luenberger estimatora stanja. Na slici 24. može se vidjeti da je apsolutna pogreška estimacije varijabli stanja ADB observera manja od pogreške estimacije koju čini Luenberger observer stanja.



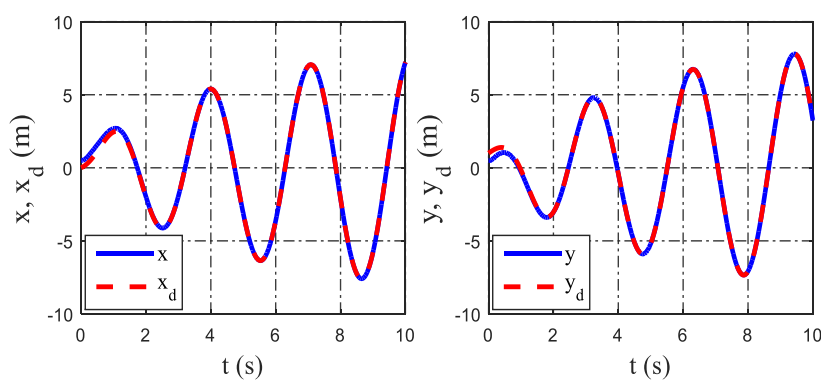
Slika 22. Estimirane pozicije i brzine u slučaju sa šumom mjerenja (ADB observer)



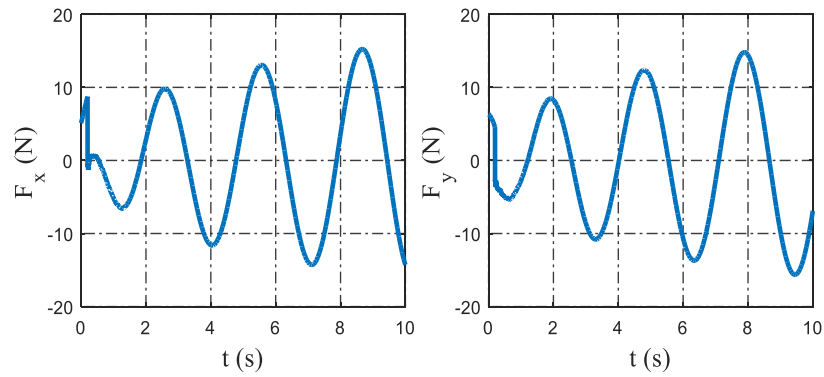
**Slika 23.** Uvećani prikaz estimiranih brzina u slučaju sa šumom mjerenja (ADB observer)



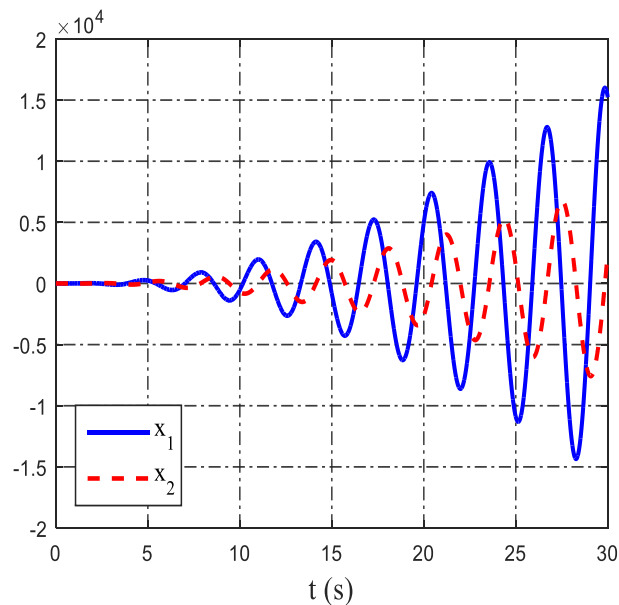
**Slika 24.** Apsolutna pogreška estimacije pozicije i brzine Luenberger i ADB estimatora u slučaju sa šumom mjerenja



**Slika 25.** Referentne trajektorije i odzivi sustava u slučaju sa šumom mjerenja (ADB observer)



**Slika 26. Upravljačke varijable regulatora u slučaju sa šumom mjerenja i korištenjem ADB estimatora**



**Slika 27. Varijable stanja ADB estimatora u slučaju sa šumom mjerenja**

Slika 27. prikazuje negativnu stranu ADB estimatora, čije varijable stanja rastu s vremenom u beskonačnost, što otežava implementaciju ovakvih algoritama u realne sustave. Iz toga razloga u sljedećem poglavlju prezentirati će se nova metoda estimacije varijabli stanja sustava koja nema taj nedostatak.

## 6. FSB observer stanja

### 6.1. Sinteza FSB observera stanja

FSB metoda je prvi puta predložena u radu [8] na primjeru neasimptotske identifikacije parametara linearnih sustava. Algebarska metoda frekvencijskog pomaka ili FSB (*Frequency shifting based*) metoda omogućava i estimaciju nepoznatih varijabli stanja, koja za razliku od ADB metode ima stabilan model estimacijskog filtra. Razlog tomu je korištenje operatora konačne razlike u kompleksnoj domeni za poništavanje početnih uvjeta, umjesto korištenja operatora derivacije. Za razliku od asimptotskih algebarskih estimatora derivacija signala [9], FSB observer predložen u [2] ima neasimptotsku konvergenciju, odnosno, estimirane varijable konvergiraju realnim vrijednostima gotovo trenutno.

Sinteza FSB observera stanja provesti će se za translacijsku dinamiku  $x$  osi, a jednako će vrijediti i za dinamiku  $y$  osi. Ponovno se kreće od jednadžbe (14) i zapisuje se u kompleksnoj domeni

$$s^2 x(s) - k F_x(s) = R(s), \quad (65)$$

gdje je  $R(s) = x_0 s + v_0$ ,  $x_0$  je početna pozicija i  $v_0$  je nepoznata početna brzina. Prvi korak sinteze je poništavanje početnih uvjeta, odnosno eliminiranje polinoma  $R(s)$ . Operator konačne razlike  $\delta_q$  u kompleksnoj domeni snižava red polinoma, a definiran je kao [2]

$$\delta_q f(s) = f(s + q) - f(s). \quad (66)$$

Operator  $\delta_q$  se može prikazati kao

$$\delta_q = e^{q \frac{d}{ds}} - 1, \quad (67)$$

gdje  $e^{q \frac{d}{ds}}$  predstavlja operator pomaka sa svojstvom  $e^{q \frac{d}{ds}} f(s) = f(s + q)$ . Napisati će se sljedeći izrazi koji će biti korisni

$$\delta_q^2 = \left( e^{q \frac{d}{ds}} - 1 \right)^2 = e^{2q \frac{d}{ds}} - 2e^{q \frac{d}{ds}} + 1, \quad (68)$$

odnosno izraz (68) primijenjen na neku funkciju će biti

$$\delta_q^2 f(s) = f(s + 2q) - 2f(s + q) + f(s). \quad (69)$$

Operator razlike snižava red polinoma za jedan stupanj, stoga se na polinom  $R(s)$  mora primijeniti dva puta

$$\delta_q R(s) = R(s + q) - R(s) = x_0 q, \quad (70)$$

$$\delta_q^2 R(s) = R(s + 2q) - 2R(s + q) + R(s) = 0. \quad (71)$$

Nakon primijene operatora  $\delta_q^2$  na jednadžbu (65), dobiva se

$$z_2(s) - kz_0(s) = 0, \quad (72)$$

gdje je

$$z_0(s) = F_x(s + 2q) - 2F_x(s + q) + F_x(s), \quad (73)$$

a funkcija  $z_2(s)$  će se prikazati u polinomskoj formi

$$z_2(s) = (s + 2q)^2 x(s + 2q) - 2(s + q)^2 x(s + q) + s^2 x(s) \quad (74)$$

$$\begin{aligned} z_2(s) &= s^2[x(s + 2q) - 2x(s + q) + x(s)] \\ &\quad + s[4qx(s + 2q) - 4qx(s + q)] \\ &\quad + [4q^2x(s + 2q) - 2q^2x(s + q)] \\ &= s^2w_1(s) + sw_2(s) + w_3(s), \end{aligned} \quad (75)$$

gdje je

$$w_1(s) = x(s + 2q) - 2x(s + q) + x(s), \quad (76)$$

$$w_2(s) = 4q[x(s + 2q) - x(s + q)], \quad (77)$$

$$w_3(s) = 2q^2[2x(s + 2q) - x(s + q)]. \quad (78)$$

Sada se izraz (72) može zapisati kao

$$s^2w_1(s) + sw_2(s) + w_3(s) - kz_0(s) = 0. \quad (79)$$

Kako bi se prigušili efekti visokofrekventnog šuma prilikom mjerenja izlazne varijable stanja moraju se izbjeći derivacije izlazne varijable, koje su označene sa  $s^l w_j(s)$  u jednadžbi (79). Zbog toga se izraz (79) množi sa prijenosnom funkcijom niskopropusnog invarijantnog filtera sa graničnom frekvencijom  $\lambda > 0$

$$G(s) = \frac{1}{s + \lambda}. \quad (80)$$

Sljedeći izrazi biti će korisni kasnije

$$sG(s) = 1 - \lambda G(s), \quad (81)$$

$$sG(s)^2 = G(s)[1 - \lambda G(s)] = G(s) - \lambda G(s)^2, \quad (82)$$

$$s^2G(s)^2 = [1 - \lambda G(s)]^2 = 1 - 2\lambda G(s) + \lambda^2 G(s)^2. \quad (83)$$

Množenjem izraza (79) sa  $G(s)^2$  dobiva se

$$s^2G(s)^2w_1(s) + sG(s)^2w_2(s) + G(s)^2[w_3(s) - kz_0(s)] = 0, \quad (84)$$

odnosno

$$[1 - 2\lambda G(s) + \lambda^2 G(s)^2]w_1(s) + [G(s) - \lambda G(s)^2]w_2(s) + G(s)^2\tilde{w}_3(s) = 0, \quad (85)$$

gdje je  $\tilde{w}_3(s) = w_3(s) - kz_0(s)$ .

Algebarskom manipulacijom iz jednadžbe (85) izdvojiti će se varijabla  $w_1(s)$

$$w_1(s) = G(s)\{[2\lambda w_1(s) - w_2(s)] + G(s)[- \lambda^2 w_1(s) + \lambda w_2(s) - \tilde{w}_3(s)]\}. \quad (86)$$

Nadalje, množenjem izraza (79) sa  $G(s)$  dobiva se

$$sG(s)w_1^{(1)}(s) + sG(s)w_2(s) + G(s)\tilde{w}_3(s) = 0, \quad (87)$$

odnosno

$$[1 - \lambda G(s)]w_1^{(1)}(s) + [1 - \lambda G(s)]w_2(s) + G(s)\tilde{w}_3(s) = 0, \quad (88)$$

gdje se uvodi oznaka  $w_1^{(1)}(s) = sw_1(s)$ . Nakon algebarske manipulacije izdvaja se varijabla

$$w_1^{(1)}(s) = \lambda G(s)w_1^{(1)}(s) - w_2(s) + G(s)[\lambda w_2(s) - \tilde{w}_3(s)]. \quad (89)$$

Kako vrijedi da je

$$G(s)w_1^{(1)}(s) = G(s)sw_1(s) = [1 - \lambda G(s)]w_1(s) = w_1(s) - \lambda G(s)w_1(s), \quad (90)$$

konačno se dobiva

$$w_1^{(1)}(s) = \lambda w_1(s) - w_2(s) + G(s)[- \lambda^2 w_1(s) + \lambda w_2(s) - \tilde{w}_3(s)]. \quad (91)$$

Na temelju izraza (86) mogu se izdvojiti dvije varijable stanja FSB observera

$$x_1(s) = G(s)[2\lambda w_1(s) - w_2(s) + x_2(s)], \quad (92)$$

$$x_2(s) = G(s)[- \lambda^2 w_1(s) + \lambda w_2(s) - \tilde{w}_3(s)], \quad (93)$$

tako da izrazi (86) i (91) postaju

$$w_1(s) = x_1(s), \quad (94)$$

$$w_1^{(1)}(s) = \lambda w_1(s) - w_2(s) + x_2(s). \quad (95)$$

Za pretvorbu izraza u vremensku domenu uvesti će se pomoćna varijabla  $h(t)$

$$h(t) = 1 - e^{-qt}, \quad (96)$$

$$h(t)^2 = 1 - 2e^{-qt} + e^{-2qt}. \quad (97)$$

Pomoću prethodnih izraza jednadžbe (73) i (76)-(78) se zapisuju u vremenskoj domeni



$$z_0(t) = h(t)^2 F_x, \quad (98)$$

$$w_1(t) = h(t)^2 x(t), \quad (99)$$

$$w_2(t) = 4q[e^{-2qt} - e^{-qt}]x(t), \quad (100)$$

$$w_3(t) = 2q^2[2e^{-2qt} - e^{-qt}]x(t). \quad (101)$$

U vremenskoj domeni izrazi (92) i (93) postaju skup stabilnih linearnih diferencijalnih jednadžbi u Jordan-ovoj kanonskoj formi

$$\dot{x}_1 = -\lambda x_1 + x_2 + 2\lambda w_1(t) - w_2(t), \quad (102)$$

$$\dot{x}_2 = -\lambda x_2 - \lambda^2 w_1(t) + \lambda w_2(t) - w_3(t) + kh(t)^2 F_x,$$

a (94) i (95) postaju

$$w_1(t) = x_1(t), \quad (103)$$

$$w_1^{(1)}(t) = \lambda w_1(t) - w_2(t) + x_2(t). \quad (104)$$

U posljednjem koraku sinteze observera moraju se izvesti eksplicitni izrazi estimirane pozicije i estimirane brzine iz jednadžbi (103) i (104), i pomoću već definiranih izraza (96)-(101). Iz (103) i (99) slijedi da je

$$\hat{x}(t) = \frac{1}{h(t)^2} x_1(t), \quad (105)$$

gdje je  $\hat{x}(t)$  oznaka sa estimiranu poziciju  $x(t)$ . Singularnost gornjeg izraza u vremenskom trenutku  $t = 0$  može se izbjeći uključenjem estimacijskog filtra u trenutku  $t \geq \varepsilon > 0$ , gdje je  $\varepsilon$  neki mali pozitivan parametar.

Vrijedi da je  $w_1^{(1)}(t) = \frac{dw_1(t)}{dt}$ , pa slijedi

$$w_1^{(1)}(t) = 2qe^{-qt}h(t)x(t) + h(t)^2 x^{(1)}(t). \quad (106)$$

Uvrštavanjem izraza (106) i (96)-(101) u izraz (104), i poslije algebarske manipulacije jednadžbom, dobiva se eksplicitni izraz za estimiranu brzinu

$$\hat{x}^{(1)}(t) = \lambda \hat{x}(t) + \frac{1}{h(t)^2} [x_2(t) + 2qe^{-qt}h(t)\hat{x}(t)], \quad (107)$$

koja bi se također trebala računati u vremenu  $t \geq \varepsilon > 0$ . Estimacijski filter (102) može se prikazati u prostoru stanja na sljedeći način

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}, \quad \mathbf{y} = \mathbf{C}(t)\mathbf{x},$$

gdje je  $\mathbf{x} = [x_1 \quad x_2]^T$ ,  $\mathbf{u} = [x(t) \quad F_x]^T$ , i  $\mathbf{y} = [\hat{x}(t) \quad \hat{x}^{(1)}(t)]^T$ .

Matrice  $\mathbf{A}$  i  $\mathbf{B}(t)$  su

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ 0 & -\lambda \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}(t) = \begin{bmatrix} b_{11}(t) & 0 \\ b_{21}(t) & b_{22}(t) \end{bmatrix},$$

a iz (102) proizlazi da je

$$\begin{aligned} b_{11}(t) &= (2\lambda - 4q)e^{-2qt} + (4q - 4\lambda)e^{-qt} + 2\lambda, \\ b_{21}(t) &= (4q\lambda - 4q^2 - \lambda^2)e^{-2qt} + (2q^2 + 2\lambda^2 - 4q\lambda)e^{-qt} - \lambda^2, \\ b_{22}(t) &= kh(t)^2. \end{aligned}$$

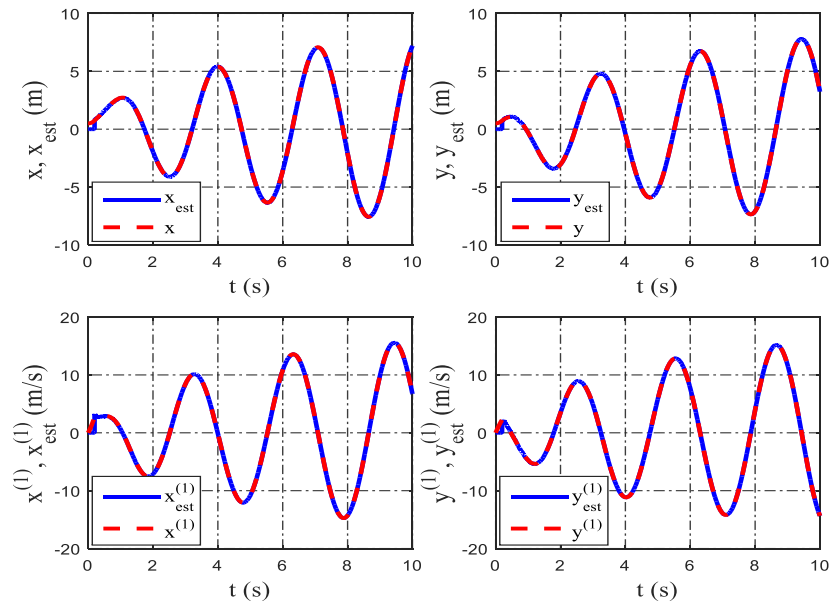
Matrica  $\mathbf{C}(t)$  ima istu strukturu kao i matrica  $\mathbf{B}(t)$ , a elementi su  $c_{11}(t) = c_{22}(t) = h(t)^{-2}$  i  $c_{21}(t) = h(t)^{-2}[\lambda + 2qh(t)^{-1}e^{-qt}]$ . Može se primjetiti da matrica  $\mathbf{C}(t)$  neće biti nul-matrica samo u vremenu  $t \geq \varepsilon > 0$ .

Kako je matrica koeficijentata  $\mathbf{A}$  zapisana u kanonskoj formi, direktno iz nje može se zaključiti da je model estimacijskog filtra stabilan, jer imamo dva pola u  $s = -\lambda$ , gdje je  $\lambda > 0$ . Uz to, i svi elementi matrice  $\mathbf{B}(t)$  su ograničene funkcije vremena.

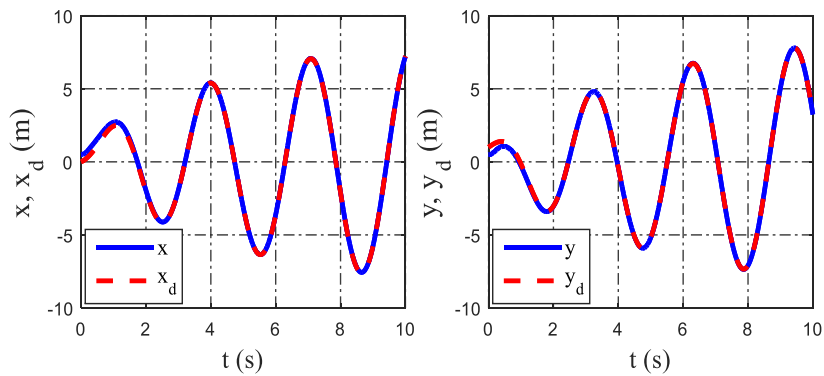
## 6.2. Simulacijski rezultati - FSB observer stanja

Zadatak je slijeđenje neperiodične vremenski promjenjive referentne trajektorije (12)-(13), a upravljački zakon koji se koristi je (49)-(50), kao i u prethodnim primjerima. Simulacije su provedene za sljedeće početne uvjete  $x(0) = y(0) = 0.5$  m. Parametar mase letjelice  $k$  se smatra poznatim. Na mjerene veličine pozicije letjelice  $x(t)$  i  $y(t)$  je postavljen šum standardne normalne raspodjele  $N(0,1)$ , koji su ulazi u estimacijski filter. Vrijeme uključenja FSB estimatora je  $\varepsilon = 0.2$  s. Primjenom niskopropusnog filtra sa višestrukim polom, postoje samo dva podesiva parametra observera. Podesivi parametri estimacijskog filtra su  $\lambda = 2$  i  $q = \lambda/2$  [2].

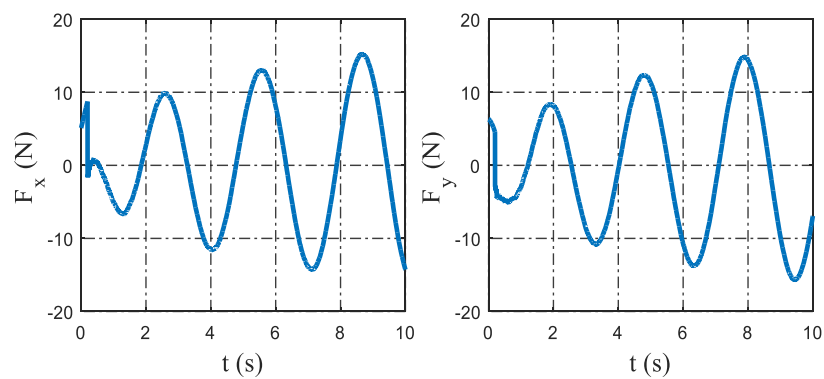
Estimirane vrijednosti pozicija i brzina letjelice prikazane su na slici 28. Može se vidjeti da je rezultat sličan kao i sa prethodnim ADB observerom. Estimiranim signalima pozicije i brzine dobro je prigušen šum zbog niskopropusnog invarijantnog filtriranja. Slika 29. prikazuje odziv letjelice na slijeđenje referentnih trajektorija u  $x$  i  $y$  smjeru, dok slika 31. pokazuje trajektoriju letjelice u  $x$ - $y$  ravnini. Vrijednosti upravljačkih varijabli regulatora dane su na slici 30. Usporedba FSB i ADB observera dana je na slici 32. gdje se može vidjeti da su estimacijske pogreške oba estimatora dosta slične. Radi još detaljnije usporedbe ova dva observera, u tablici 1. dane su relativne pogreške estimacije pozicija i brzina letjelice u vremenskom trenutku  $t = 10$  s. Ono što FSB observer čini boljim je stabilnost modela filtra i ograničene vrijednosti varijabli stanja, dok su kod ADB observera vrijednosti varijabli stanja divergirale. Varijable stanja FSB observera prikazane su na slici 33.



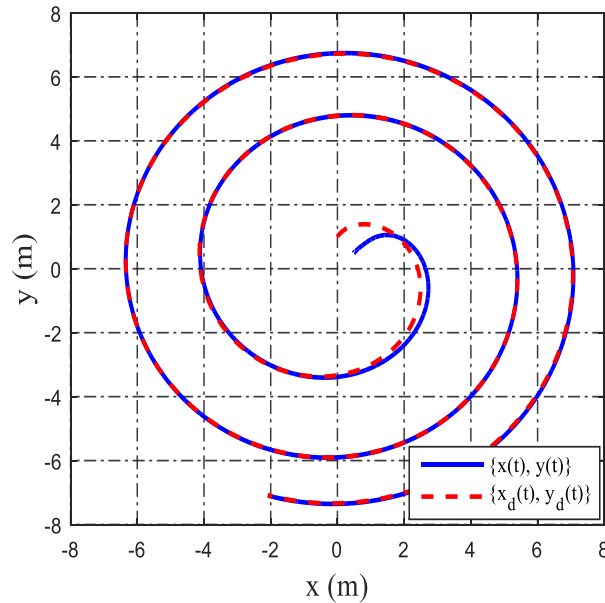
**Slika 28. Estimirane vrijednosti pozicije i brzine letjelice FSB observerom u slučaju sa šumom mjerenja**



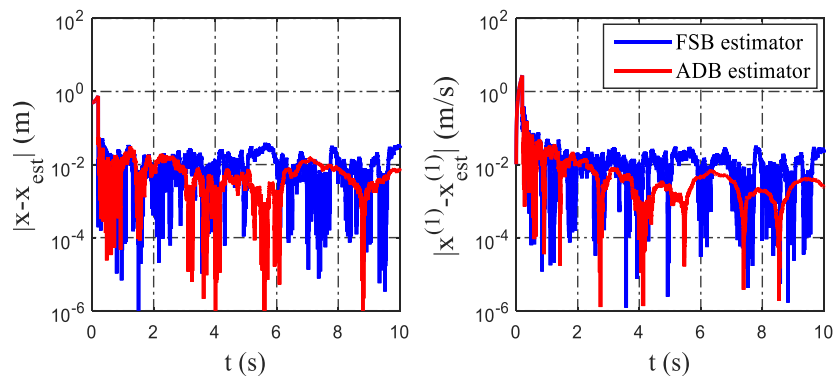
**Slika 29. Referentne trajektorije i odziv sustava u slučaju sa šumom mjerenja i korištenjem FSB observera**



**Slika 30. Upravljačke varijable regulatora u slučaju sa šumom mjerenja i korištenjem FSB observera**



**Slika 31. Trajektorija letjelice u x-y ravnini (PD regulator sa unaprijednom kompenzacijom + FSB observer)**

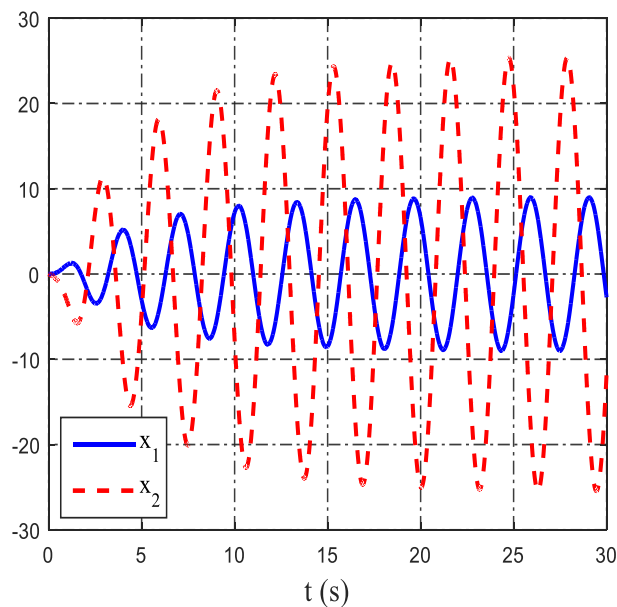


**Slika 32. Apsolutne pogreške estimacije pozicije i brzine FSB i ADB observera za translacijsku dinamiku x-osi**

Sa slike 32. može se vidjeti da su rezultati estimacije pozicije i brzine letjelice dosta slični kod FSB i ADB observera. Usporedba je također prikazana u tablici 1. Varijable stanja FSB observera prikazane slikom 33. su ograničene u vremenu, zbog čega nije potrebno resetiranje estimacijskog algoritma kao što je to bilo potrebno kod ADB observera.

**Tablica 1. Usporedba relativnih pogrešaka estimacije FSB i ADB observera u vremenskom trenutku  $t_f = 10$  s**

FSB estimator	Stvarna vrijednost	Estimirana vrijednost	Relativna pogreška (%)
$x(t_f), \text{ m}$	7,2365	7,2375	0,014
$y(t_f), \text{ m}$	3,2600	3,2540	0,1834
$\dot{x}(t_f), \text{ m/s}$	6,6368	6,6437	0,1041
$\dot{y}(t_f), \text{ m/s}$	-14,3656	-14,3583	-0,0513
ADB estimator	Stvarna vrijednost	Estimirana vrijednost	Relativna pogreška (%)
$x(t_f), \text{ m}$	7,2194	7,2240	0,0634
$y(t_f), \text{ m}$	3,2374	3,2386	0,0362
$\dot{x}(t_f), \text{ m/s}$	6,6681	6,6678	0,0045
$\dot{y}(t_f), \text{ m/s}$	-14,3732	-14,3704	-0,0199



**Slika 33. Varijable stanja FSB observera u slučaju sa šumom mjerenja**

## 7. Estimator vanjskih poremećaja

Do sada je bilo uzeto u obzir upravljanje i estimacija stanja autonomne letjelice u nesmetanim uvjetima, što nije čest slučaj u realnim prilikama. U stvarnosti su uglavnom prisutni vanjski poremećaji na sustave upravljanja koje je potrebno kompenzirati. U kontekstu upravljanja drona vanjski poremećaji mogu biti naleti vjetra koji mogu destabilizirati letjelicu. Takve poremećaje nije lako modelirati, pa su se razvile razne metode kompenzacije vanjskih poremećaja. Jedna od metoda je korištenje robusnih regulatora kod kojih je obećana robusnost na nesigurnosti u modelu postignuta pod cijenu degradirane nominalne kvalitete regulacije. Takvi regulatori potiskuju poremećaje putem povratne veze, što može voditi do spore kompenzacije vanjskih poremećaja, i zato spadaju u grupu pasivnih kompenzatora poremećaja [10].

Postoje i aktivni kompenzatori vanjskih smetnji čija se dinamika u kaskadu dodaje na dinamiku zatvorenog kruga regulatora. U ovom poglavlju prezentirati će se noviji pristupi aktivne kompenzacije poremećaja, a zasnovani su na proširenom observeru stanja (ESO – *extended state observer*). U prvom dijelu poglavlja opisati će se ESO sa linearnim observerom koji ima naziv ADRC (*active disturbance rejection control*), gdje će se opisati performanse ADRC-a s obzirom na različite vanjske poremećaje. Isto će se učiniti u potpoglavlju 7.2. i 7.3. sa proširenim algebarskim ADB i FSB observerom stanja.

### 7.1. Linearni prošireni observer stanja

#### 7.1.1. Sinteza linearnog proširenog observera stanja

ADRC (*active disturbance rejection control*) je metoda aktivne kompenzacije vanjskih poremećaja, a zasnovana je na proširenom observeru stanja [10, 11]. U ovom slučaju koristi se linearni Luenberger observer stanja koji je opisan u potpoglavlju 3.2. Sinteza proširenog observera stanja opisati će se na jednadžbi dinamike drugog reda. Dron je potpuno aktuiran, pa vrijedi pravilo separacije, te će se provesti regulacija i estimacija svih stanja za dinamiku  $x$  osi letjelice. Kreće se od jednadžbe (14) kojoj je u ovom slučaju dodan i vanjski poremećaj  $d_{ext}(t)$

$$\ddot{x} = kF_x + d_{ext}(t). \quad (108)$$

Za razliku od metoda kompenzacije poremećaja koje su zasnovane na principu internog modela, poput [12], ADRC metoda ne zahtijeva poznavanje internog modela poremećaja. Postupak je da se uz varijable stanja pozicije i brzine letjelice, i vanjski poremećaj proglašuje varijablom stanja  $x_3 = d_{ext}(t)$ . To znači da bi sustav i Luenberger observer u matricnoj formi proširili na 3. red. Problem uvođenja samo jedne virtualne varijable stanja je što takav observer može potpuno kompenzirati samo poremećaje koji su konstantni u vremenu, odnosno čija je prva derivacija jednaka nuli. Ukoliko se želi estimirati poremećaji koji su funkcije vremena višega reda kao npr.  $d_{ext}(t) = d_0 + d_1t + d_2t^2 + \dots + d_{m-1}t^{m-1}$ , trebao bi se koristiti poopćeni ADRC ili GADRC (*generalized active disturbance rejection control*). Glavna ideja je „proširivanje proširenog stanja“, gdje se jedan integrator proširenog stanja  $\dot{x}_3 = \dot{d}(t)$  zamjenjuje sa  $m$  integratora  $x_3^{(m)} = d^{(m)}(t)$ . Što je veći red observera  $m$ , točnije će se estimirati vanjski

poremećaj. Ako se metoda GADRC primijeni na dinamiku  $x$  osi letjelice (108), i uzme red observera  $m = 5$  (u nastavku će se objasniti zašto), zapis u prostoru stanja biti će

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}F_x + \mathbf{E}h, \\ y &= \mathbf{C}\mathbf{x},\end{aligned}\tag{109}$$

gdje je  $x_1 = x, x_2 = \dot{x}, x_3 = d(t), x_4 = \dot{d}(t), \dots, x_7 = d^{(4)}(t), h = d^{(5)}(t)$ , a matrice su

$$\mathbf{A}_{[7 \times 7]} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_{[7 \times 1]} = \begin{bmatrix} 0 \\ k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{E}_{[7 \times 1]} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{C}_{[1 \times 7]} = [1 \quad 0 \quad \dots \quad 0].$$

Zapis proširenog Luenberger observera u prostoru stanja je

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}F_x + \mathbf{L}(y - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}),\tag{110}$$

$$\hat{y} = \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}},\tag{111}$$

gdje je  $\hat{\mathbf{x}}_{[7 \times 1]} = [\hat{x}_1 \quad \dots \quad \hat{x}_7]^T$ , a matrica pojačanja observera je  $\mathbf{L}_{[7 \times 1]} = [\lambda_1 \quad \dots \quad \lambda_7]^T$ . Pojačanja matrice  $\mathbf{L}$  u Matlab-u se mogu dobiti metodom smještanja polova

$$\mathbf{L} = \text{acker}(\mathbf{A}^T, \mathbf{C}^T, \mathbf{p})^T,$$

gdje je  $\mathbf{p}_{[1 \times 7]}$  vektor željenih polova estimatora. Problem metode smještanja polova je što nije numerički pouzdana, te podizanjem reda estimatora  $m$ , generirati će se sve veća pojačanja matrice  $\mathbf{L}$ . Zato je izabran estimator 5. reda ( $m = 5$ ) koji daje zadovoljavajuću točnost, a najveći iznosi pojačanja matrice  $\mathbf{L}$  su reda  $10^5$  za višestruki pol  $n = -6$ , što je prihvatljivo. Zakon upravljanja uz stabilizaciju sustava sada sadrži i član koji kompenzira vanjski poremećaj

$$F_x = \left(\frac{1}{k}\right) [\ddot{x}_d - K_d(\hat{x} - \dot{x}_d) - K_p(\hat{x} - x_d) - \hat{x}_3],\tag{112}$$

gdje je  $\hat{x}_3 = \hat{d}(t)$ , estimirani vanjski poremećaj. U nastavku će se testirati ADRC metoda na dva različita vanjska poremećaja za koje će se dati simulacijski rezultati. Kao poremećaji će se promatrati udar vjetera aproksimiran Gauss-ovom funkcijom, te nagli i perzistentni poremećaji (stalni udari vjetera).

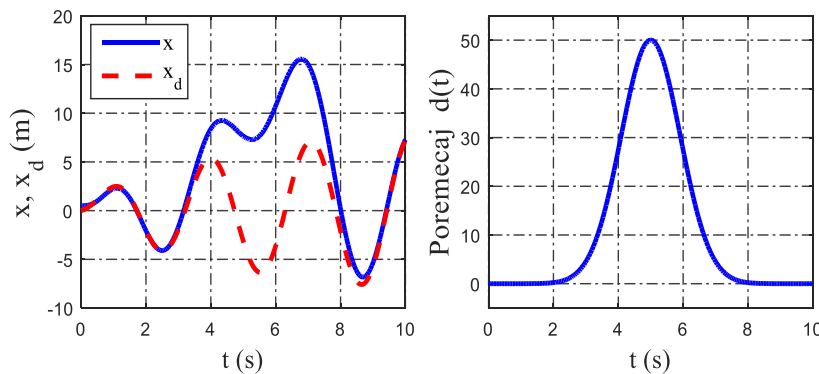
### 7.1.2. Simulacijski rezultati - Linearni prošireni observer stanja

Testirati će se ADRC metoda na upravljanju drona u  $x$  ravnini, na kojeg će djelovati vanjski poremećaj  $d_{ext}(t)$ . Promatrana dinamika prikazana je jednadžbom (108), prošireni Luenberger observer jednadžbom (110), i zakon upravljanja izrazom (112) koji zajedno čine ADRC. Vanjski poremećaj biti će udar vjetera opisan gauss-ovom funkcijom

$$d_{ext}(t) = 50e^{-0,6(t-5)^2}.\tag{113}$$

Kao što je već spomenuto, odabran je estimator 5. reda ( $m = 5$ ) sa odabranim višestrukim polom u  $n = -6$ , gdje je  $\mathbf{p} = [-6, -6, -6, -6, -6, -6]$ . Parametri regulatora su ostavljeni jednaki kao u prošlim simulacijama  $K_p = 6, K_d = 5$ . Ovdje ćemo se baviti samo estimacijom stanja i poremećaja, pa će se parametar drona smatrati poznatim  $k = 2 \text{ kg}^{-1}$ . Simulacije će se provesti bez dodanog šuma na mjerenu veličinu pozicije drona. Početni uvjeti su  $x(0) = 0,5 \text{ m}, \dot{x}(0) = 0$ . Referentna trajektorija u  $x$  ravnini koja se želi slijediti jednaka je kao pod (12).

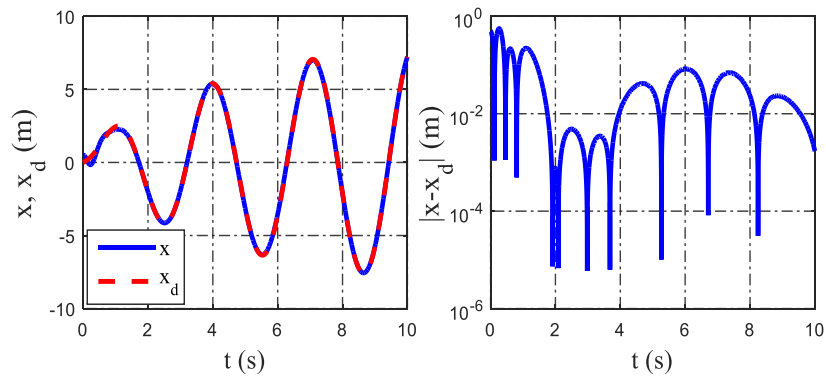
U početku, na slici 34. dan je prikaz upravljanja letjelice u slučaju kada nema estimacije i kompenzacije vanjskog poremećaja (113). Može se vidjeti da PD regulator bez kompenzacije vanjskog poremećaja ne može zadržati letjelicu na traženoj referentnoj trajektoriji. Odstupanje je najveće oko  $t = 5 \text{ s}$ , kada je udar vjetra najsnažniji.



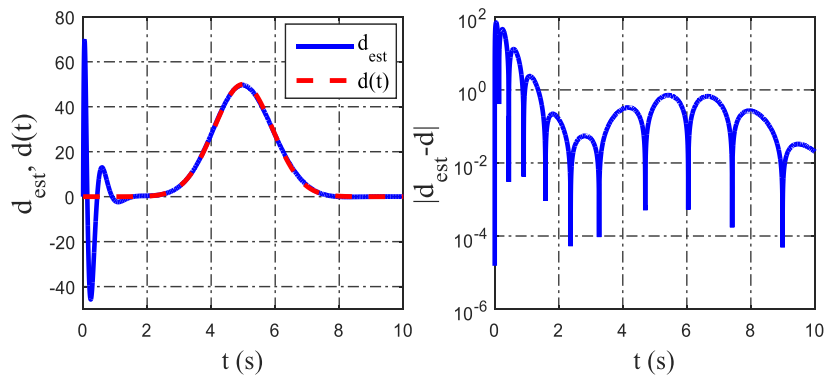
**Slika 34. Odziv letjelice u slučaju bez estimacije i kompenzacije vanjskog poremećaja  $d_{\text{ext}}(t)$  (lijevo), i prikaz poremećaja (udar vjetra) u obliku gauss-ove funkcije (desno)**

Slika 35. prikazuje odziv letjelice u slučaju kompenzacije vanjskog poremećaja proširenim Luenberger observerom i upravljačkim zakonom (112). Dron brzo uhvati željenu trajektoriju, i vidi se da ADRC dobro potiskuje vanjski poremećaj udara vjetra. Estimirani poremećaj udara vjetra prikazan je na slici 36. Iznosi ograničene upravljačke varijable dane su na slici 37. Za ADRC metodu je karakteristično da upravljačke varijable na početku imaju visoke vršne vrijednosti (*peaking phenomena*). Pojava oscilatornih visokoamplitudnih tranzijenata postaje još izraženija kada se početni uvjeti sustava i linearnog observera razlikuju. Ukoliko su takve vršne vrijednosti nepogodne za aktuator, potrebno je ograničiti izlazne vrijednosti regulatora. Estimirane vrijednosti pozicije i brzine letjelice prikazani su na slici 38.

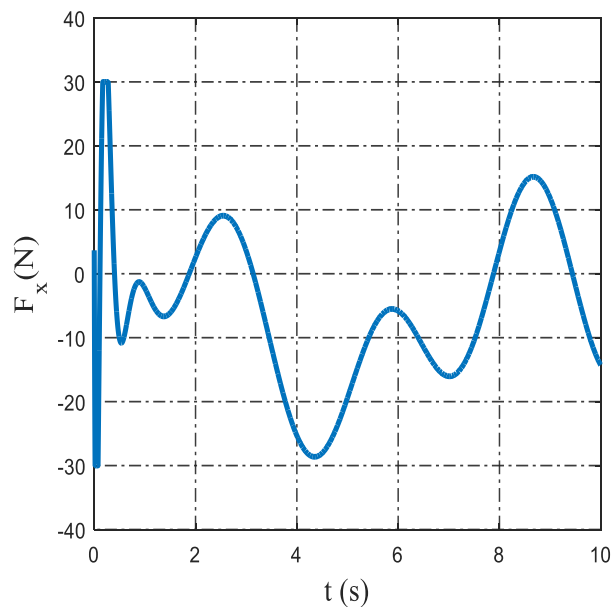




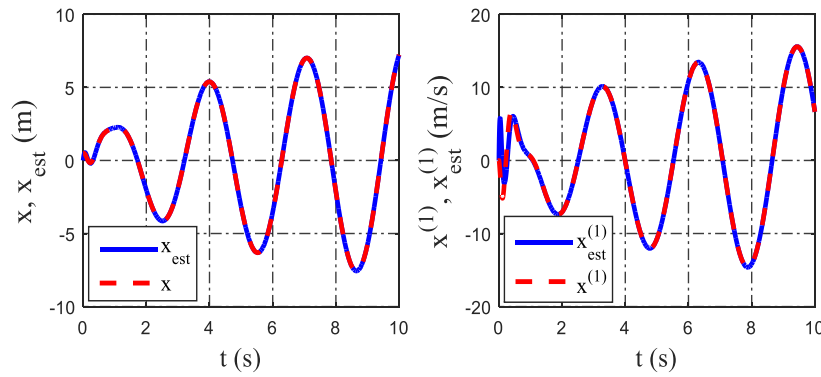
Slika 35. Odziv letjelice u slučaju sa ADRC kompenzacijom vanjskog poremećaja (lijevo), i vrijednosti apsolutne pogreške stvarne i referentne pozicije (desno)



Slika 36. Estimirani vanjski poremećaj proširenim Luenberger observerom 5. reda (lijevo), i vrijednosti apsolutne pogreške estimacije poremećaja (desno)

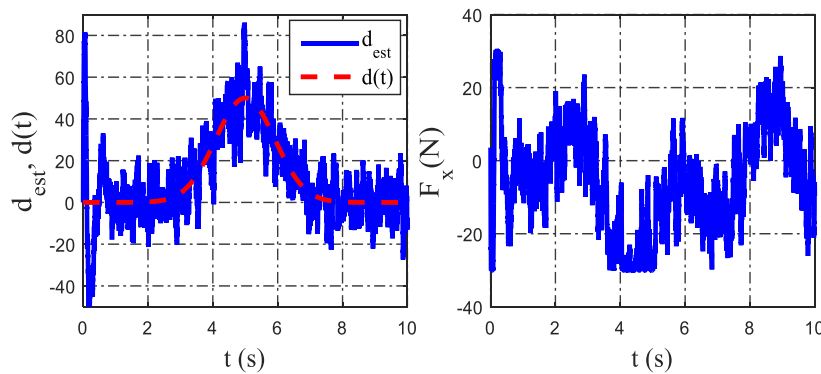


Slika 37. Iznosi ograničene upravljačke varijable ADRC-a



**Slika 38. Estimirane vrijednosti pozicije (lijevo) i estimirane vrijednosti brzine drona (desno) proširenim Luenberger observerom**

Šum može imati velik utjecaj na ADRC, stoga će se taj slučaj prikazati zasebno. Na slici 39. pokazano je kako šum može imati velik utjecaj na vrijednosti estimiranog poremećaja i upravljačke varijable regulatora ukoliko se ne filtrira. Dodan je šum na mjerenu poziciju standardne normalne raspodjele  $N(0,1)$  i amplitude  $a = 0,5$ . Ovdje odabrani red observera također igra ulogu. Ako se odabere viši red observera, dobiti će se i veća pojačanja matrice Luenberger observera, koji će pojačavati utjecaj šuma. Stoga se na utjecaj šuma kod ADRC-a može utjecati snižavanjem reda observera, i odabirom niže vrijednosti višestrukog pola observera. Naravno, za kvalitetne podatke potrebno je mjerenu veličinu „provući“ i kroz niskopropusni filter.

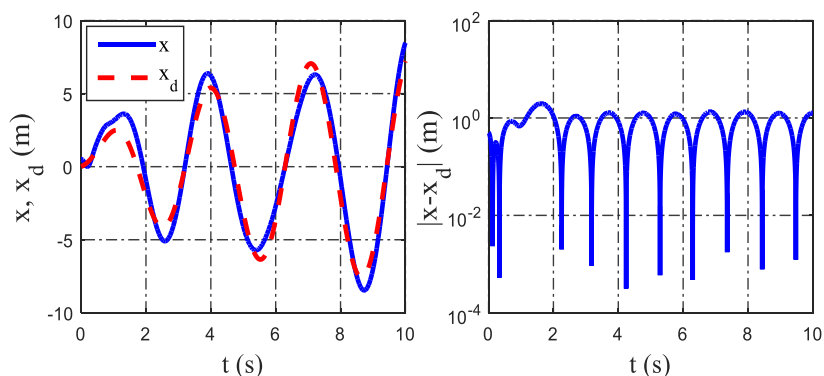


**Slika 39. Utjecaj normalno distribuiranog šuma na vrijednosti estimiranog poremećaja i upravljačke varijable regulatora za ESO 5. reda (bez filtriranja)**

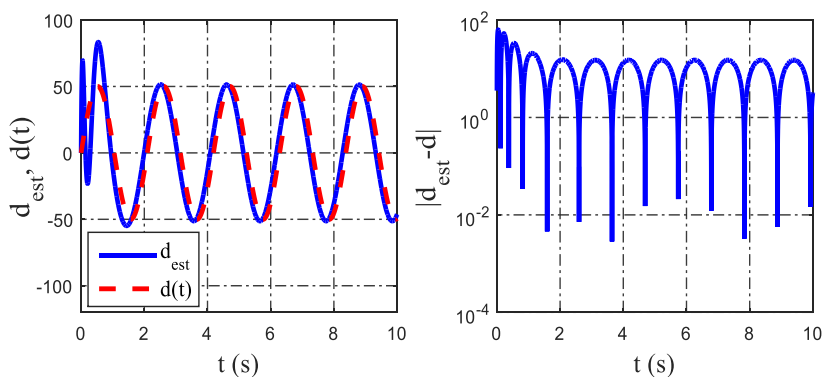
Sada će se testirati kako nagli i perzistentni poremećaji utječu na ADRC metodu. Takvi poremećaji mogu biti stalni udari vjetrova koji će ovdje biti opisani sinusnom funkcijom

$$d_{ext}(t) = 50 \sin(3t). \quad (114)$$

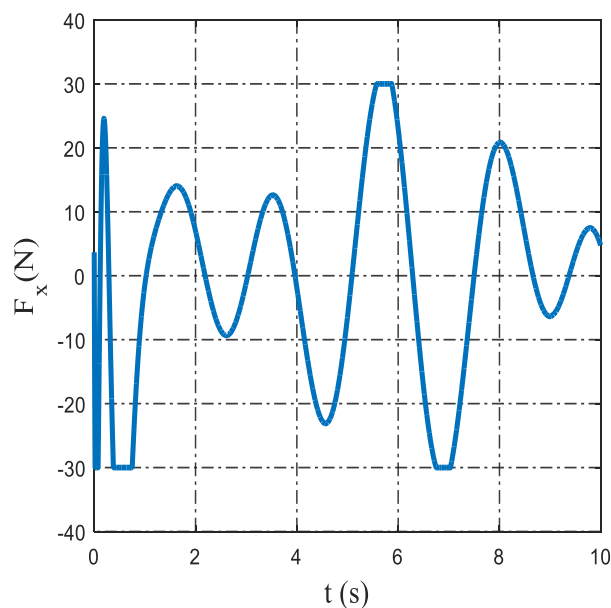
Dakle, u ovom slučaju mijenja se samo oblik vanjskog poremećaja u jednažbi (108). Odziv letjelice u slučaju perzistentnog poremećaja (114) prikazan je na slici 40. Slika 41. pokazuje estimirani poremećaj ADRC metodom. Oblik ograničene upravljačke varijable nalazi se na slici 42. I na kraju, estimirana pozicija i brzina letjelice prikazani su na slici 43.



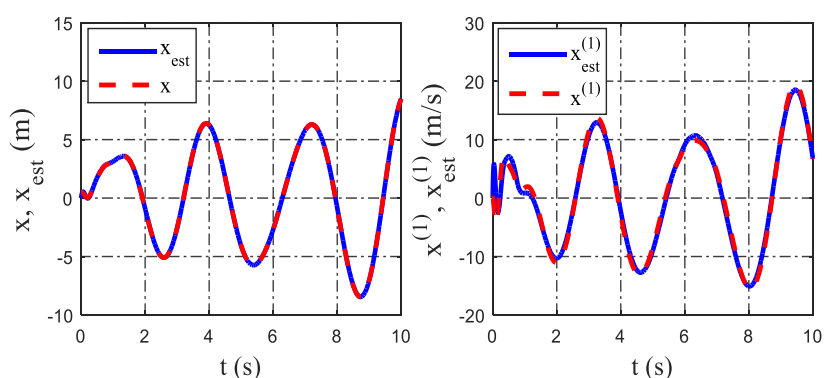
**Slika 40.** Odziv letjelice u slučaju ADRC kompenzacije perzistentnog poremećaja (lijevo), i vrijednosti apsolutne pogreške stvarne i referentne pozicije (desno)



**Slika 41.** Estimirani vanjski perzistentni poremećaj proširenim Luenberger observerom 5. reda (lijevo), i vrijednosti apsolutne pogreške estimacije poremećaja (desno)



**Slika 42.** Iznosi ograničene upravljačke varijable ADRC-a u slučaju perzistentnog poremećaja



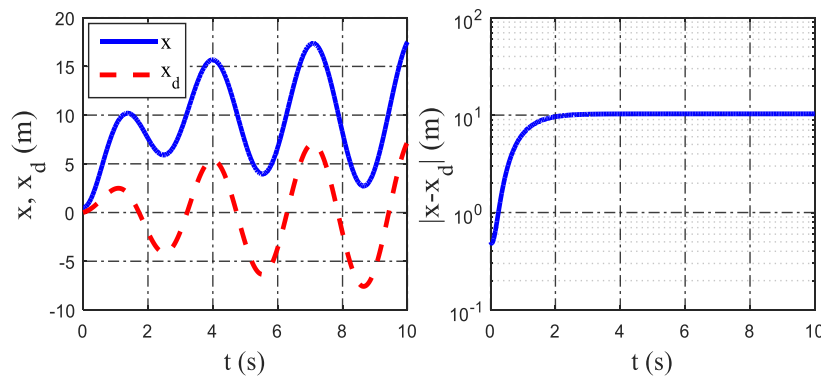
**Slika 43.** Estimirane vrijednosti pozicije (lijevo) i estimirane vrijednosti brzine drona (desno) proširenim Luenberger observerom 5. reda u slučaju perzistentnog poremećaja

Može se primijetiti da ADRC nije u stanju precizno estimirati nagle i perzistentne poremećaje, što se manifestira na praćenju željene trajektorije. Apsolutna pogreška slijeđenja referentne trajektorije se kreće oko 1 metra, što nije zanemarivo.

Na kraju će se pokazati kako prošireni Luenberger observer 1. reda ( $m = 1$ ) estimira konstantan poremećaj u vremenu. Sada umjesto 5 virtualnih varijabli stanja imamo 1 virtualnu varijablu stanja, koja predstavlja vanjski poremećaj. Konstantni poremećaj koji će se promatrati je

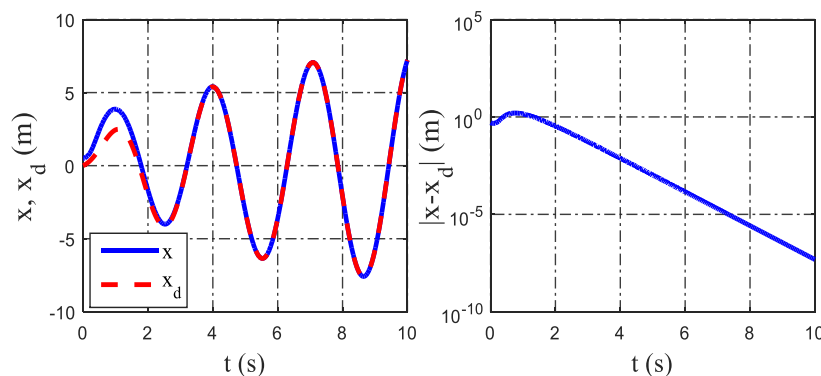
$$d_{ext}(t) = 30, \text{ za } (t \geq 0). \quad (115)$$

Slika 44. prikazuje odziv letjelice u slučaju bez kompenzacije konstantnog poremećaja.

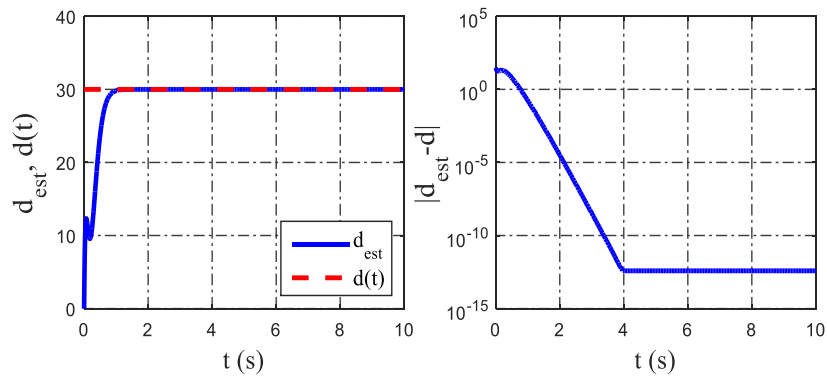


**Slika 44. Odziv letjelice u slučaju bez estimacije i kompenzacije konstantnog poremećaja  $d_{ext}(t)$  (lijevo), i prikaz apsolutne pogreške slijedenja referentne trajektorije (desno)**

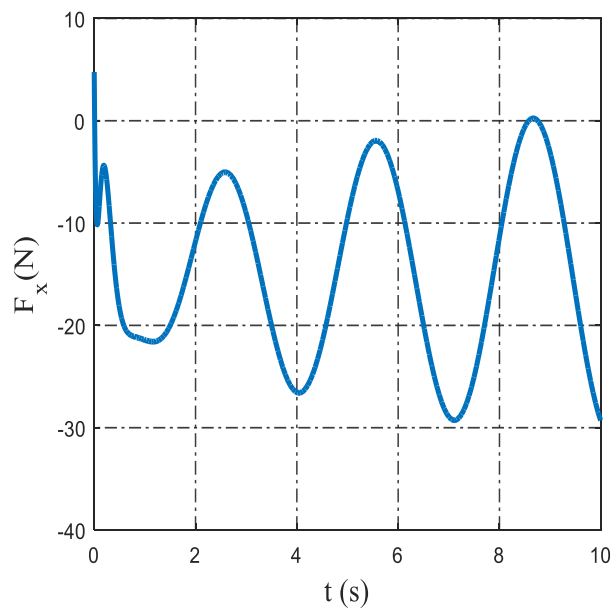
Odziv letjelice u slučaju kompenzacije konstantnog poremećaja prikazan je na slici 45. Estimirani vanjski poremećaj proširenim Luenberger observerom 1. reda prikazan je na slici 46. Vrijednosti upravljačke varijable ADRC-a dane su na slici 47. I na kraju, estimirana pozicija i brzina drona prikazani su na slici 48.



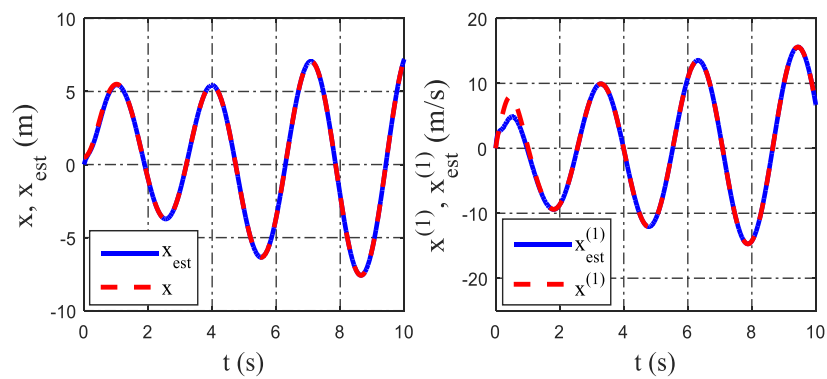
**Slika 45. Odziv letjelice sa kompenzacijom konstantnog vanjskog poremećaja sa ADRC 1. reda (lijevo), i apsolutna pogreška slijedenja referentne trajektorije (desno)**



Slika 46. Estimirani konstantni poremećaj proširenim Luenberger observerom 1. reda (lijevo), i apsolutna pogreška estimacije vanjskog poremećaja (desno)



Slika 47. Vrijednosti upravljačke varijable regulatora za ADRC 1. reda



Slika 48. Estimirane vrijednosti pozicije (lijevo) i estimirane vrijednosti brzine drona (desno) proširenim Luenberger observerom 1. reda u slučaju konstantnog poremećaja

## 7.2. Prošireni ADB observer stanja (ADB-ESO)

### 7.2.1. Sinteza proširenog ADB observera stanja

ADB observer iz poglavlja 5. sada će se proširiti za jedan red kako bi mogli estimirati vanjski poremećaj. Sinteza proširenog ADB observera jednaka je kao u 5. poglavlju, osim što se ovdje kreće od jednadžbe koja uključuje vanjski poremećaj

$$\ddot{x} = kF_x + d_{ext}(t) . \quad (116)$$

Red estimatora se proširuje tako što se derivira prethodna jednadžba, te se dobiva

$$\ddot{x} = k\dot{F}_x + h(t) , \quad (117)$$

gdje je  $h(t) = \dot{d}_{ext}(t)$ . Smatrati će se da je  $h(t) = 0$ , što znači da imamo

$$\ddot{x} = k\dot{F}_x . \quad (118)$$

Jednadžba (118) mora se transformirati u domenu kompleksne varijable

$$s^3x(s) - ksF_x(s) = R(s) , \quad (119)$$

gdje je  $R(s) = c_2s^2 + c_1s + c_0$  polinom drugog reda ovisan o početnim uvjetima sustava. Želimo da estimator bude robusan s obzirom na početne uvjete sustava, stoga jednadžbu (119) deriviramo tri puta po kompleksnoj varijabli  $s$ . Jednostavne operacije deriviranja ovdje će biti izostavljene, i napisati će se krajnji oblik jednadžbe slobodan početnih uvjeta

$$s^3 \frac{d^3x(s)}{ds^3} + 9s^2 \frac{d^2x(s)}{ds^2} + 18s \frac{dx(s)}{ds} + 6x(s) - 3k \frac{d^2F_x(s)}{ds^2} - ks \frac{d^3F_x(s)}{ds^3} = 0 . \quad (120)$$

Izraz (120) množi se redom sa  $s^{-1}$ ,  $s^{-2}$  i  $s^{-3}$ , čime se dobivaju redom tri jednadžbe

$$s^2 \frac{d^3x(s)}{ds^3} + 9s \frac{d^2x(s)}{ds^2} + 18 \frac{dx(s)}{ds} + 6s^{-1}x(s) - 3ks^{-1} \frac{d^2F_x(s)}{ds^2} - k \frac{d^3F_x(s)}{ds^3} = 0 . \quad (121)$$

$$s \frac{d^3x(s)}{ds^3} + 9 \frac{d^2x(s)}{ds^2} + 18s^{-1} \frac{dx(s)}{ds} + 6s^{-2}x(s) - 3ks^{-2} \frac{d^2F_x(s)}{ds^2} - ks^{-1} \frac{d^3F_x(s)}{ds^3} = 0 . \quad (122)$$

$$\frac{d^3x(s)}{ds^3} + 9s^{-1} \frac{d^2x(s)}{ds^2} + 18s^{-2} \frac{dx(s)}{ds} + 6s^{-3}x(s) - 3ks^{-3} \frac{d^2F_x(s)}{ds^2} - ks^{-2} \frac{d^3F_x(s)}{ds^3} = 0 . \quad (123)$$

Jednadžba (123) može se napisati i u sljedećem obliku

$$\frac{1}{s} \left\{ 9 \frac{d^2x(s)}{ds^2} + \frac{1}{s} \left[ 18 \frac{dx(s)}{ds} - k \frac{d^3F_x(s)}{ds^3} + \frac{1}{s} (6x(s) - 3k \frac{d^2F_x(s)}{ds^2}) \right] \right\} + \frac{d^3x(s)}{ds^3} = 0 . \quad (124)$$

Na taj način se iz izraza (124) mogu izvući tri varijable stanja proširenog ADB observera

$$x_1(s) = \frac{1}{s} \left( 6x(s) - 3k \frac{d^2 F_x(s)}{ds^2} \right), \quad (125)$$

$$x_2(s) = \frac{1}{s} \left( 18 \frac{dx(s)}{ds} - k \frac{d^3 F_x(s)}{ds^3} + x_1(s) \right), \quad (126)$$

$$x_3(s) = \frac{1}{s} \left( 9 \frac{d^2 x(s)}{ds^2} + x_2(s) \right). \quad (127)$$

Zapis izraza (125), (126) i (127) u vremenskoj domeni glasi

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 6x(t) - 3kt^2 F_x(t), \\ \dot{x}_2 &= x_1(t) - 18tx(t) + kt^3 F_x(t), \\ \dot{x}_3 &= x_2(t) + 9t^2 x(t). \end{aligned} \quad (128)$$

Sada se jednačba (124) može napisati kao

$$\begin{aligned} \frac{d^3 x(s)}{ds^3} &= -x_3(s) \quad / \int^{-1} \\ -t^3 x(t) &= -x_3(t), \\ \hat{x}(t) &= \frac{1}{t^3} x_3(t), \end{aligned} \quad (129)$$

gdje izraz (129) predstavlja estimiranu poziciju drona. Jednačba (122) se može napisati na sljedeći način

$$\begin{aligned} s \frac{d^3 x(s)}{ds^3} + 9 \frac{d^2 x(s)}{ds^2} + x_2(s) &= 0 \quad / \int^{-1} \\ \frac{d}{dt} (-t^3 x(t)) + 9t^2 x(t) + x_2(t) &= 0, \end{aligned} \quad (130)$$

te deriviranjem prvog člana u izrazu (130), i sređivanjem jednačbe dobije se izraz za estimaciju brzine drona

$$\hat{\dot{x}}(t) = \frac{6}{t} \hat{x}(t) + \frac{1}{t^3} x_2(t). \quad (131)$$

Isto tako, jednačba (121) se može napisati u obliku

$$\begin{aligned} s^2 \frac{d^3 x(s)}{ds^3} + 9s \frac{d^2 x(s)}{ds^2} + 18 \frac{dx(s)}{ds} - k \frac{d^3 F_x(s)}{ds^3} + x_1(s) &= 0 \quad / \int^{-1} \\ \frac{d^2}{dt^2} (-t^3 x(t)) + 9 \frac{d}{dt} (t^2 x(t)) - 18tx(t) + kt^3 F_x(t) + x_1(t) &= 0. \end{aligned} \quad (132)$$



Sređivanjem izraza (132), može se izlučiti izraz za estimaciju druge derivacije

$$\ddot{\hat{x}}(t) = \frac{3}{t} \dot{\hat{x}}(t) - \frac{6}{t^2} \hat{x}(t) + kF_x(t) + \frac{1}{t^3} x_1(t). \quad (133)$$

Iz jednadžbe (116) onda slijedi da je izraz za estimaciju vanjskog poremećaja jednak

$$\begin{aligned} \hat{d}_{ext}(t) &= \ddot{\hat{x}}(t) - kF_x(t), \\ \hat{d}_{ext}(t) &= \frac{3}{t} \dot{\hat{x}}(t) - \frac{6}{t^2} \hat{x}(t) + \frac{1}{t^3} x_1(t). \end{aligned} \quad (134)$$

Estimacijski filter (128) može se prikazati u prostoru stanja na sljedeći način

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}, \quad \mathbf{y} = \mathbf{C}(t)\mathbf{x},$$

gdje je  $\mathbf{x} = [x_1 \quad x_2 \quad x_3]^T$ ,  $\mathbf{u} = [x(t) \quad F_x]^T$ , i  $\mathbf{y} = [\hat{x}(t) \quad \hat{x}^{(1)}(t) \quad \hat{d}_{ext}(t)]^T$ .

Matrice  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}(t)$  i  $\mathbf{C}(t)$  su

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}(t) = \begin{bmatrix} 6 & -3kt^2 \\ -18t & kt^3 \\ 9t^2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}(t) = \frac{1}{t^3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 6 \\ 1 & \frac{3}{t} & \frac{18t-6}{t^2} \end{bmatrix}.$$

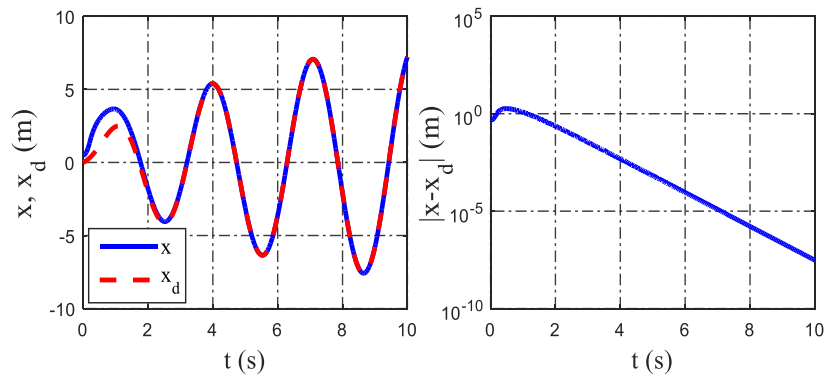
### 7.2.2. Simulacijski rezultati - prošireni ADB observer stanja

Testirati će se performanse algebarskog observera stanja i poremećaja, i usporediti će se sa linearnim ADRC estimatorom. Na dinamiku drona biti će primijenjen vanjski poremećaj konstantan u vremenu

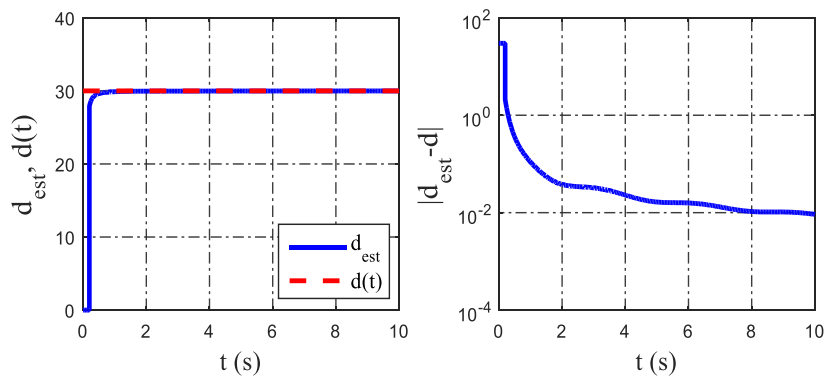
$$d_{ext}(t) = 30, \text{ za } (t \geq 0).$$

Parametri regulatora su ostavljeni jednaki kao u prošlim simulacijama  $K_p = 6, K_d = 5$ . Ovdje ćemo se baviti samo estimacijom stanja i poremećaja, pa će se parametar drona smatrati poznatim  $k = 2 \text{ kg}^{-1}$ . Simulacije će se provesti bez dodanog šuma na mjerenu veličinu pozicije drona. Početni uvjeti su  $x(0) = 0,5 \text{ m}$ ,  $\dot{x}(0) = 0$ . Referentna trajektorija u  $x$  ravnini koja se želi slijediti jednaka je kao pod (6).

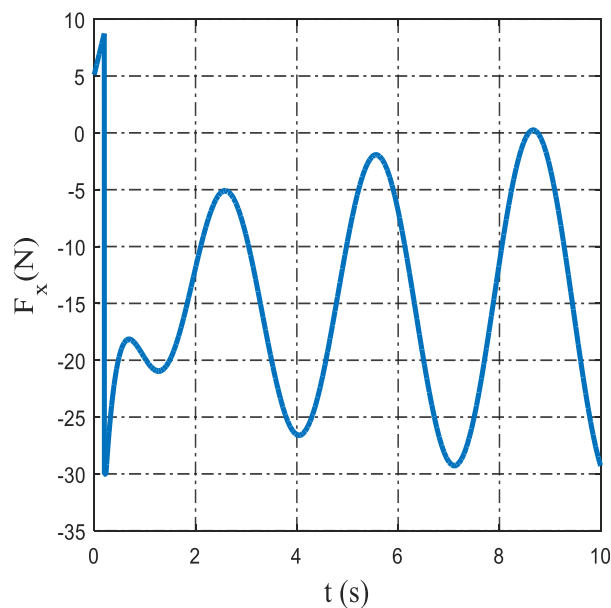
Praćenje referentne trajektorije letjelice prikazano je slikom 49. Estimirani poremećaj proširenim ADB estimatorom prikazan je na slici 50. Vrijednosti upravljačke varijable prikazane su slikom 51. Estimirana pozicija i brzina drona nalazi se na slici 52. I na kraju na slici 53. dane su vrijednosti varijabli stanja proširenog ADB estimatora.



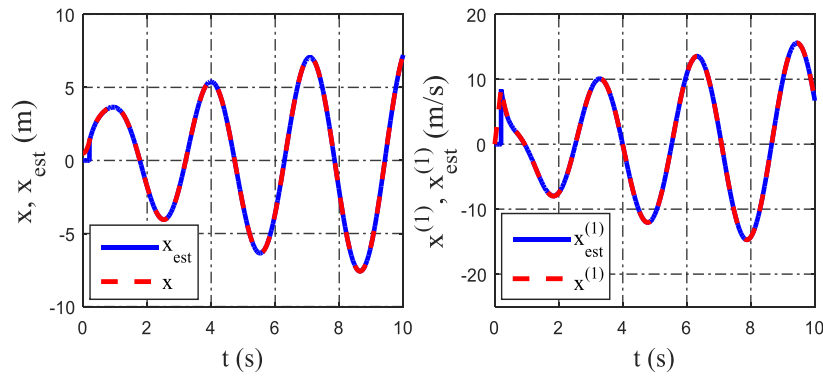
**Slika 49.** Odziv letjelice sa kompenzacijom konstantnog vanjskog poremećaja sa proširenim ADB observerom 3. reda (lijevo), i apsolutna pogreška slijeđenja referentne trajektorije (desno)



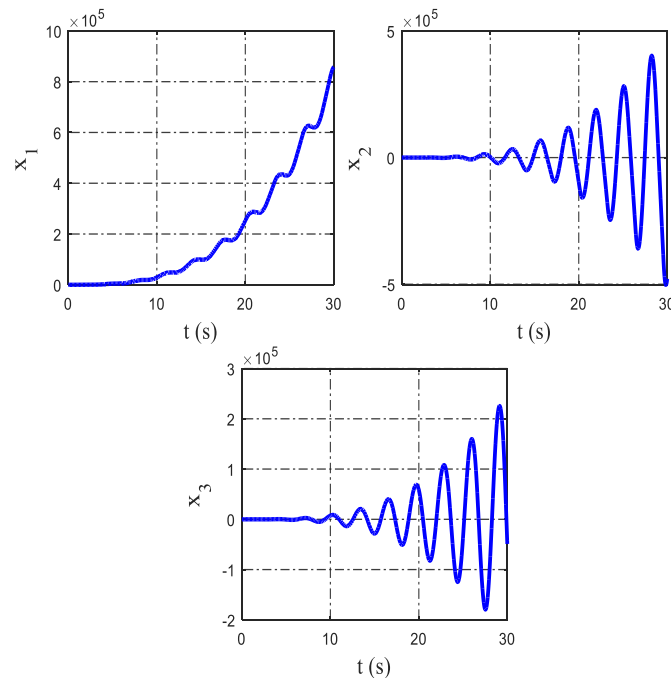
**Slika 50.** Estimirani konstantni poremećaj proširenim ADB observerom 3. reda (lijevo), i apsolutna pogreška estimacije vanjskog poremećaja (desno)



**Slika 51.** Vrijednosti upravljačke varijable regulatora sa kompenzacijom konstantnog poremećaja proširenim ADB observerom 3. reda



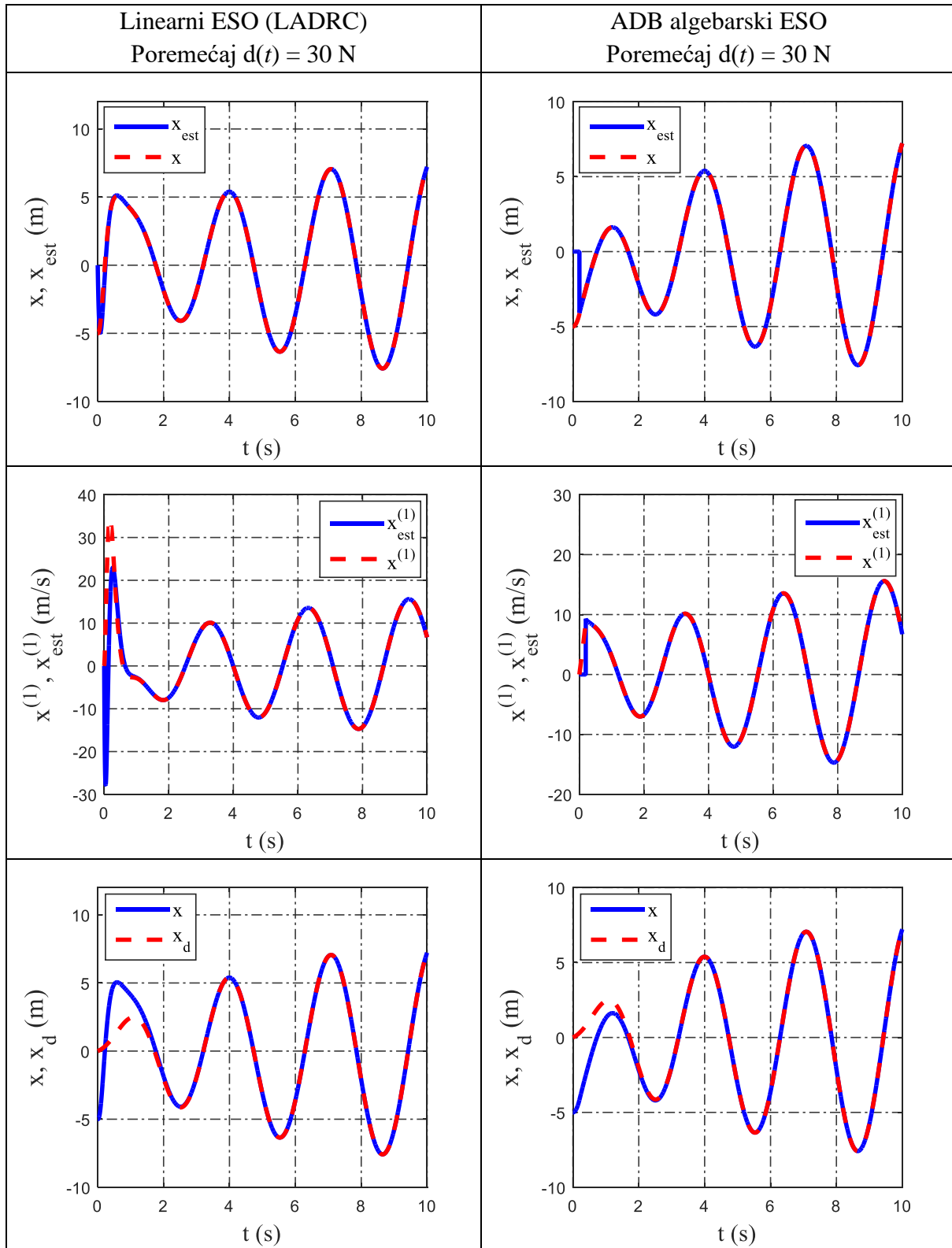
**Slika 52. Estimirane vrijednosti pozicije (lijevo) i estimirane vrijednosti brzine drona (desno) proširenim ADB observerom 3. reda u slučaju konstantnog poremećaja**

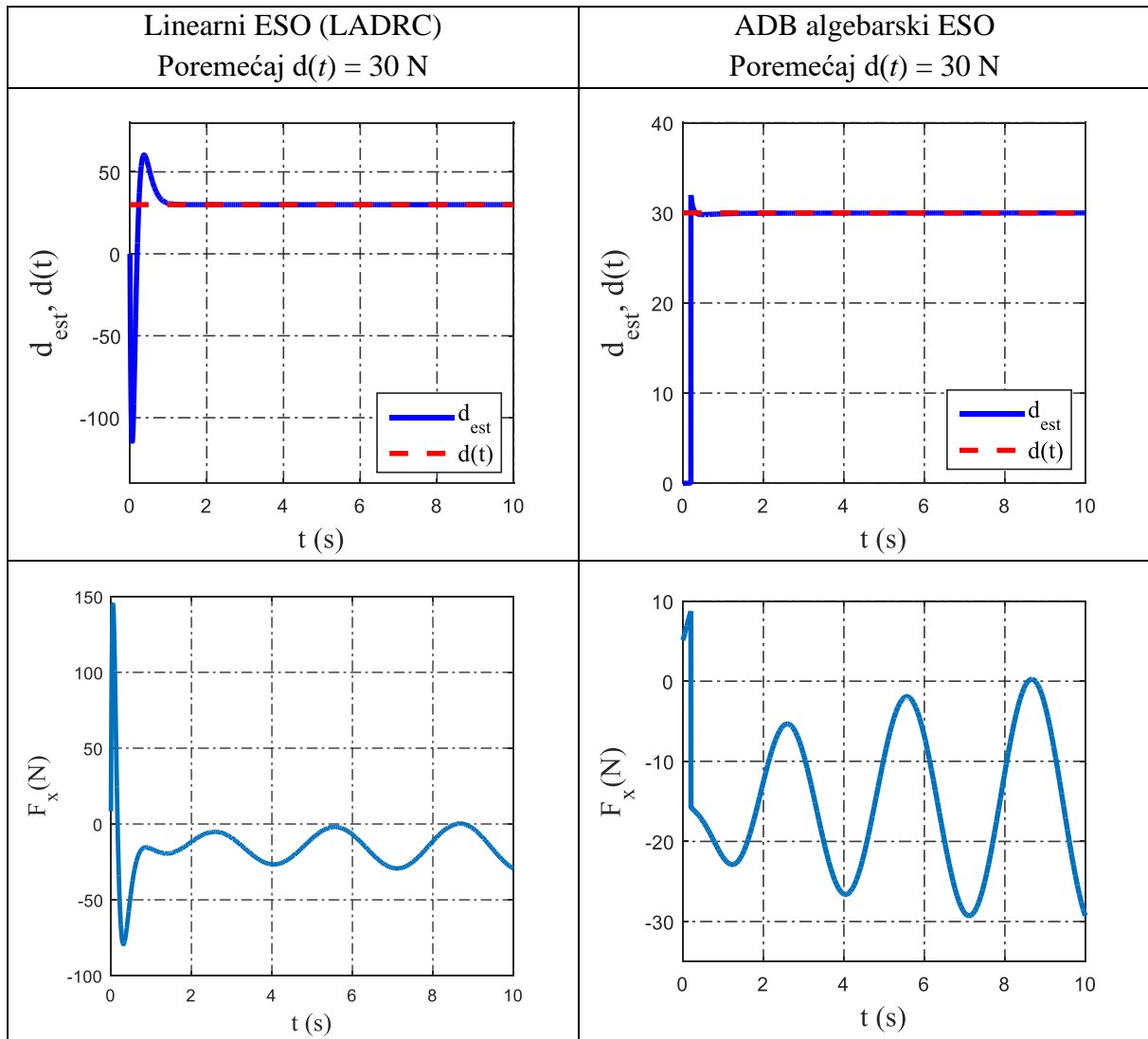


**Slika 53. Varijable stanja proširenog ADB observera 3. reda**

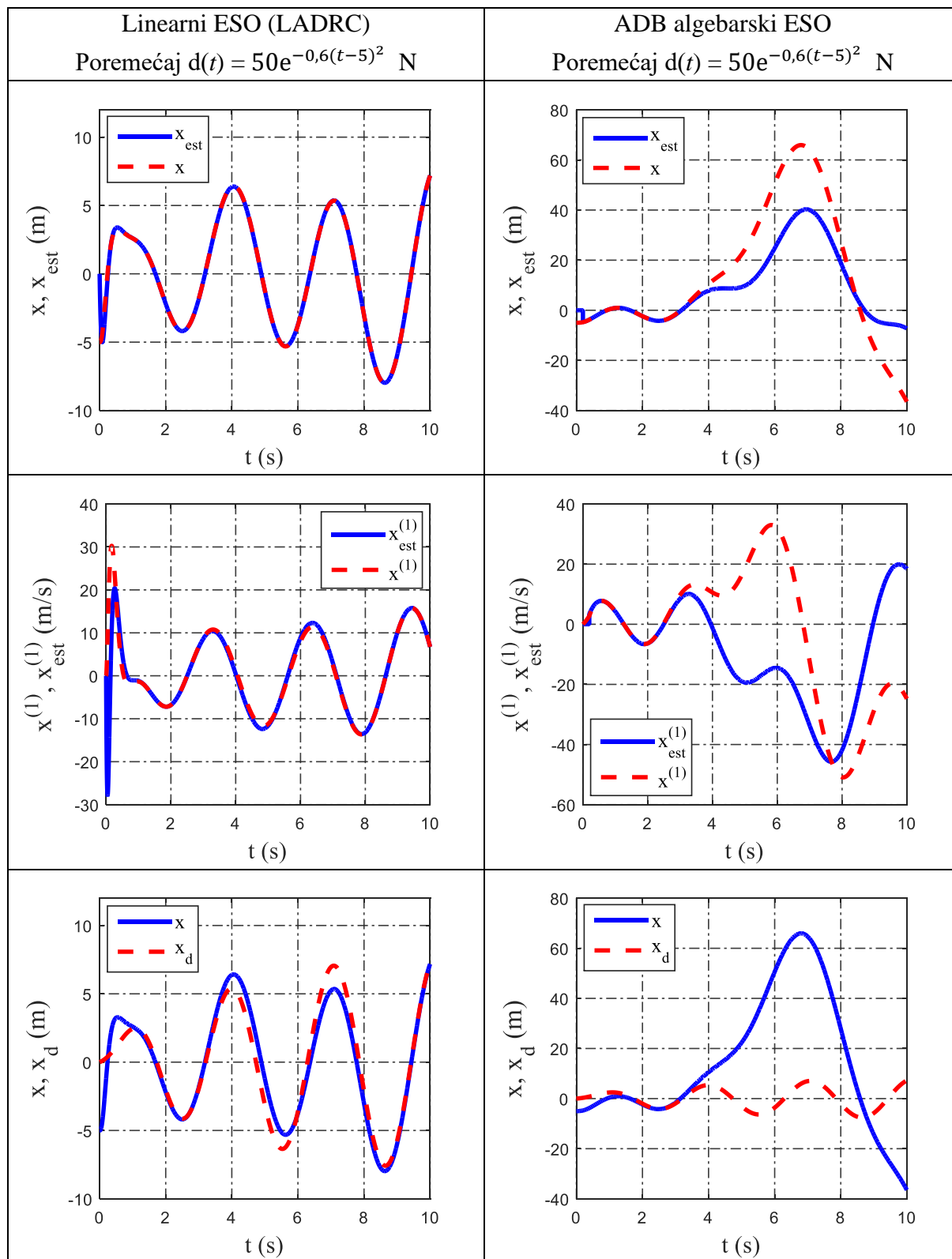
Iz simulacija se može vidjeti da algebarski ESO brzo, gotovo trenutno estimira konstantan vanjski poremećaj, dok je linearni ADRC imao sporiju konvergenciju. Prednost algebarskog estimatora je i u tome što povećavanje reda estimatora neće uzrokovati njegovu destabilizaciju kao što je to bio slučaj kod linearnog ADRC-a. Nedostatak proširenog ADB estimatora se vidi na slici 53., gdje varijable stanja estimatora diskonvergiraju, pa bi se za korištenje u realnim uvjetima, estimator morao resetirati svakih  $\varepsilon$  sekundi, gdje je  $\varepsilon$  jako mali pozitivan broj. U tablici 2. i tablici 3. prikazane su jasne usporedbe linearnog i ADB algebarskog ESO-a za slučaj konstantnog, odnosno vremenski promjenjivog vanjskog poremećaja.

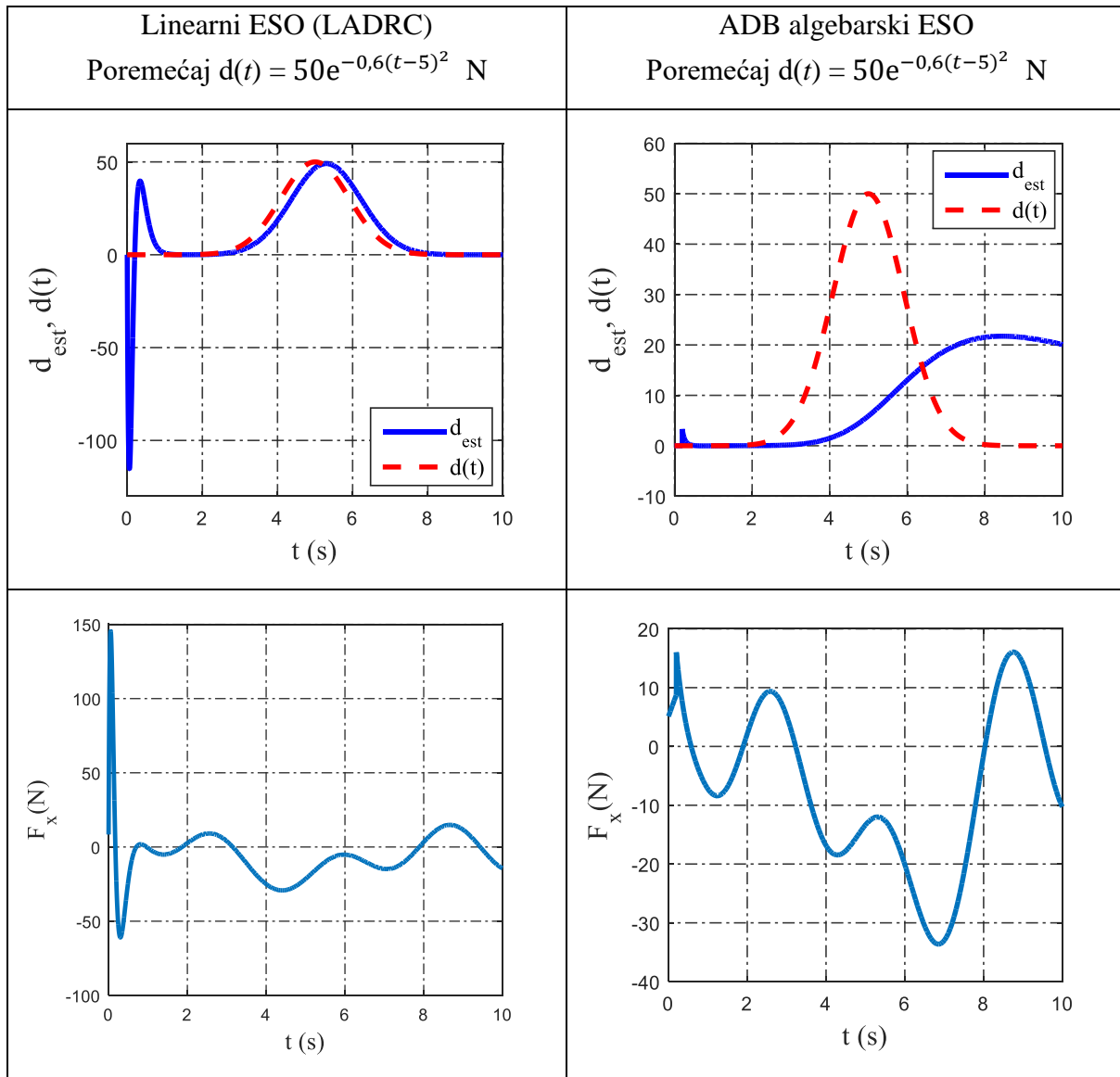
**Tablica 2. Usporedba linearnog ESO-a (LADRC) sa ADB algebrajskim ESO za slučaj konstantnog vanjskog poremećaja  $d(t) = 30$  N, i početni uvjet  $x(0) = -5$  m**





**Tablica 3. Usporedba linearnog ESO-a (LADRC) sa ADB algebrajskim ESO za slučaj vanjskog poremećaja  $d(t) = 50e^{-0,6(t-5)^2}$  N, i početni uvjet  $x(0) = -5$  m**





Iz simulacija se vidi da je LADRC bolji u estimiranju vremenski promjenjivog poremećaja od ADB algebarskog proširenog estimatora.

### 7.3. Prošireni FSB observer stanja (FSB-ESO)

#### 7.3.1. Sinteza proširenog FSB observera stanja

FSB estimator iz poglavlja 6. sada će se proširiti za jedan red kako bi mogli estimirati vanjski poremećaj. Sinteza proširenog FSB estimatora jednaka je kao u 6. poglavlju, osim što se ovdje kreće od jednačbe koja uključuje vanjski poremećaj

$$\ddot{x} = kF_x + d_{ext}(t) . \quad (135)$$

Red estimatora se proširuje tako što se derivira prethodna jednačba, te se dobiva

$$\ddot{x} = k\dot{F}_x + h(t), \quad (136)$$

gdje je  $h(t) = \dot{d}_{ext}(t)$ . Smatrati će se da je  $h(t) = 0$ , što znači da imamo

$$\ddot{x} = k\dot{F}_x. \quad (137)$$

Jednadžba (137) mora se transformirati u domenu kompleksne varijable

$$s^3x(s) - ksF_x(s) = R(s), \quad (138)$$

gdje je  $R(s) = c_2s^2 + c_1s + c_0$  polinom drugog reda ovisan o početnim uvjetima sustava. Prvi korak sinteze je poništavanje početnih uvjeta, odnosno eliminiranje polinoma  $R(s)$ . Operator konačne razlike  $\delta_q$  (67) snižava red polinoma za jedan stupanj, stoga se na polinom  $R(s)$  mora primijeniti tri puta

$$\delta_q^3 = e^{3q\frac{d}{as}} - 3e^{2q\frac{d}{as}} + 3e^{q\frac{d}{as}} - 1, \quad (139)$$

$$\delta_q^3 R(s) = R(s + 3q) - 3R(s + 2q) + 3R(s + q) - R(s) = 0. \quad (140)$$

Nakon primijene operatora  $\delta_q^3$  na jednadžbu (138), dobiva se

$$z_3(s) - kz_0(s) = 0. \quad (141)$$

Funkcija  $z_0(s)$  će se prikazati u polinomskoj formi

$$\begin{aligned} z_0(s) &= (s + 3q)F_x(s + 3q) - 3(s + 2q)F_x(s + 2q) + 3(s + q)F_x(s + q) - sF_x(s), \\ z_0(s) &= s[F_x(s + 3q) - 3F_x(s + 2q) + 3F_x(s + q) - F_x(s)] \\ &\quad + 3q[F_x(s + 3q) - 2F_x(s + 2q) + F_x(s + q)] \\ &= s\xi_1(s) + \xi_2(s), \end{aligned} \quad (142)$$

gdje je

$$\xi_1(s) = F_x(s + 3q) - 3F_x(s + 2q) + 3F_x(s + q) - F_x(s), \quad (143)$$

$$\xi_2(s) = 3q[F_x(s + 3q) - 2F_x(s + 2q) + F_x(s + q)]. \quad (144)$$

Funkcija  $z_3(s)$  mora se isto prikazati u polinomskoj formi

$$\begin{aligned} z_3(s) &= (s + 3q)^3x(s + 3q) - 3(s + 2q)^3x(s + 2q) + 3(s + q)^3x(s + q) - s^3x(s), \\ z_3(s) &= s^3[x(s + 3q) - 3x(s + 2q) + 3x(s + q) - x(s)] \\ &\quad + s^2[9qx(s + 3q) - 18qx(s + 2q) + 9qx(s + q)] \\ &\quad + s[27q^2x(s + 3q) - 36q^2x(s + 2q) + 9q^2x(s + q)] \end{aligned}$$



$$+ [27q^3x(s+3q) - 24q^3x(s+2q) + 3q^3x(s+q)]$$

odnosno

$$z_3(s) = s^3w_1(s) + s^2w_2(s) + sw_3(s) + w_4(s), \quad (145)$$

gdje je

$$w_1(s) = x(s+3q) - 3x(s+2q) + 3x(s+q) - x(s), \quad (146)$$

$$w_2(s) = 9q[x(s+3q) - 2x(s+2q) + x(s+q)], \quad (147)$$

$$w_3(s) = 9q^2[3x(s+3q) - 4x(s+2q) + x(s+q)], \quad (148)$$

$$w_4(s) = 3q^3[9x(s+3q) - 8x(s+2q) + x(s+q)]. \quad (149)$$

Sada se izraz (141) može zapisati kao

$$s^3w_1(s) + s^2w_2(s) + s\tilde{w}_3(s) + \tilde{w}_4(s) = 0, \quad (150)$$

gdje je

$$\tilde{w}_3(s) = w_3(s) - k\xi_1(s),$$

$$\tilde{w}_4(s) = w_4(s) - k\xi_2(s).$$

Kako bi se prigušili efekti visokofrekventnog šuma prilikom mjerenja izlazne varijable stanja moraju se izbjeći derivacije izlazne varijable, koje su označene sa  $s^i w_j(s)$  u jednadžbi (150). Zbog toga se izraz (150) množi sa prijenosnom funkcijom niskopropusnog invarijantnog filtera sa graničnom frekvencijom  $\lambda > 0$

$$G(s) = \frac{1}{s+\lambda}. \quad (151)$$

Sljedeći izrazi biti će korisni kasnije

$$sG(s) = 1 - \lambda G(s),$$

$$sG(s)^2 = G(s)[1 - \lambda G(s)] = G(s) - \lambda G(s)^2,$$

$$s^2G(s)^2 = [1 - \lambda G(s)]^2 = 1 - 2\lambda G(s) + \lambda^2 G(s)^2,$$

$$s^3G(s)^3 = 1 - 3\lambda G(s) + 3\lambda^2 G(s)^2 - \lambda^3 G(s)^3,$$

$$s^2G(s)^3 = G(s) - 2\lambda G(s)^2 + \lambda^2 G(s)^3,$$

$$sG(s)^3 = G(s)^2 - \lambda G(s)^3.$$

Množenjem izraza (150) sa  $G(s)^3$  dobiva se

$$s^3 G(s)^3 w_1(s) + s^2 G(s)^3 w_2(s) + s G(s)^3 \tilde{w}_3(s) + G(s)^3 \tilde{w}_4(s) = 0, \quad (152)$$

odnosno

$$[1 - 3\lambda G(s) + 3\lambda^2 G(s)^2 - \lambda^3 G(s)^3]w_1(s) + [G(s) - 2\lambda G(s)^2 + \lambda^2 G(s)^3]w_2(s) + [G(s)^2 - \lambda G(s)^3]\tilde{w}_3(s) + G(s)^3 \tilde{w}_4(s) = 0. \quad (153)$$

Iz jednadžbe (153) izdvojiti će se varijabla  $w_1(s)$  i prikazati u ulančanom obliku

$$w_1(s) = G(s)\{3\lambda w_1(s) - w_2(s) + G(s)[-3\lambda^2 w_1(s) + 2\lambda w_2(s) - \tilde{w}_3(s) + G(s)(\lambda^3 w_1(s) - \lambda^2 w_2(s) + \lambda \tilde{w}_3(s) - \tilde{w}_4(s))]\}. \quad (154)$$

Sada se iz jednadžbe (154) mogu izvući tri varijable stanja proširenog FSB estimatora

$$x_3(s) = G(s)(\lambda^3 w_1(s) - \lambda^2 w_2(s) + \lambda \tilde{w}_3(s) - \tilde{w}_4(s)), \quad (155)$$

$$x_2(s) = G(s)(-3\lambda^2 w_1(s) + 2\lambda w_2(s) - \tilde{w}_3(s) + x_3(s)), \quad (156)$$

$$x_1(s) = G(s)(3\lambda w_1(s) - w_2(s) + x_2(s)). \quad (157)$$

Iz (153) i (157) proizlazi da je

$$w_1(s) = x_1(s), \quad (158)$$

pa se množenjem jednadžbe (158) sa  $G(s)^{-1}$  dobiva  $w_1^{(1)}(s)$

$$(s + \lambda)w_1(s) = 3\lambda w_1(s) - w_2(s) + x_2(s),$$

odnosno

$$w_1^{(1)}(s) = 2\lambda w_1(s) - w_2(s) + x_2(s). \quad (159)$$

Izraz (156) se uvrsti u (159), a (159) se množi sa  $G(s)^{-1}$  da se dobije  $w_1^{(2)}(s)$

$$(s + \lambda)w_1^{(1)}(s) = (s + \lambda)2\lambda w_1(s) - (s + \lambda)w_2(s) - 3\lambda^2 w_1(s) + 2\lambda w_2(s) - \tilde{w}_3(s) + x_3(s),$$

odnosno

$$w_1^{(2)}(s) = \lambda w_1^{(1)}(s) - \lambda^2 w_1(s) - w_2^{(1)}(s) + \lambda w_2(s) - \tilde{w}_3(s) + x_3(s). \quad (160)$$

Za pretvorbu izraza u vremensku domenu uvesti će se pomoćna varijabla  $h(t)$

$$h(t) = e^{-qt} - 1, \quad (161)$$

$$h(t)^2 = e^{-2qt} - 2e^{-qt} + 1, \quad (162)$$

$$h(t)^3 = e^{-3qt} - 3e^{-2qt} + 3e^{-qt} - 1. \quad (163)$$

Pretvorba izraza (143) - (144) i (146) - (149) u vremensku domenu će biti

$$\xi_1(t) = h(t)^3 F_x, \quad (164)$$

$$\xi_2(t) = 3qe^{-qt}h(t)^2 F_x, \quad (165)$$

$$w_1(t) = h(t)^3 x(t), \quad (166)$$

$$w_2(t) = 9q(e^{-3qt} - 2e^{-2qt} + e^{-qt})x(t), \quad (167)$$

$$w_3(t) = 9q^2(3e^{-3qt} - 4e^{-2qt} + e^{-qt})x(t), \quad (168)$$

$$w_4(t) = 3q^3(9e^{-3qt} - 8e^{-2qt} + e^{-qt})x(t). \quad (169)$$

Dinamika estimacijskog filtra (155) - (157) u vremenskoj domeni će biti

$$\dot{x}_1 = -\lambda x_1 + x_2 + 3\lambda w_1(t) - w_2(t),$$

$$\dot{x}_2 = -\lambda x_2 + x_3 - 3\lambda^2 w_1(t) + 2\lambda w_2(t) - w_3(t) + k\xi_1(t), \quad (170)$$

$$\dot{x}_3 = -\lambda x_3 + \lambda^3 w_1(t) - \lambda^2 w_2(t) + \lambda w_3(t) - w_4(t) - \lambda k\xi_1(t) + k\xi_2(t).$$

U posljednjem koraku sinteze moraju se izvesti eksplicitni izrazi fizikalnih veličina koji se estimiraju. Izrazi (158), (159) i (160) u vremenskoj domeni su

$$w_1(t) = x_1(t), \quad (171)$$

$$w_1^{(1)}(t) = 2\lambda w_1(t) - w_2(t) + x_2(t), \quad (172)$$

$$w_1^{(2)}(t) = \lambda w_1^{(1)}(t) - \lambda^2 w_1(t) - w_2^{(1)}(t) + \lambda w_2(t) - w_3(t) + x_3(t) + k\xi_1(t), \quad (173)$$

gdje je

$$w_2^{(1)}(t) = (-27q^2 e^{-3qt} + 36q^2 e^{-2qt} - 9q^2 e^{-qt})x(t) + (9qe^{-3qt} - 18qe^{-2qt} + 9qe^{-qt})\dot{x}(t).$$

Iz (166) i (171) slijedi da je

$$\hat{x}(t) = \frac{1}{h(t)^3} x_1(t), \quad (174)$$

gdje je  $\hat{x}(t)$  oznaka za estimiranu poziciju letjelice. Kako bi dobili eksplicitni izraz estimirane brzine drona, mora se izračunati

$$w_1^{(1)}(t) = \frac{dw_1(t)}{dt} = -3qe^{-qt}h(t)^2 x(t) + h(t)^3 \dot{x}(t). \quad (175)$$

Jednadžba (175) se uvrsti u (172), i nakon sređivanja može se izvući

$$\dot{\hat{x}}(t) = 2\lambda \hat{x}(t) + \frac{1}{h(t)^3} [x_2(t) - 6qe^{-qt}h(t)^2 \hat{x}(t)], \quad (176)$$

gdje je  $\hat{x}(t)$  oznaka za estimiranu brzinu letjelice. Zadnje što treba je izraz za estimaciju nepoznatog vanjskog poremećaja, a za to je potrebno poznavati estimaciju druge derivacije pozicije, pa se stoga računa

$$w_1^{(2)}(t) = \frac{d^2 w_1(t)}{dt^2} = (3q^2 e^{-qt} h(t)^2 + 6q^2 e^{-2qt} h(t))x(t) - 6q e^{-qt} h(t)^2 \dot{x}(t) + h(t)^3 \ddot{x}(t). \quad (177)$$

Jednadžba (177) se uvrsti u (173), i nakon sređivanja se može izvući

$$\begin{aligned} \ddot{x}(t) = & \left( \frac{6q\lambda e^{-qt}}{h(t)} - \frac{3q^2 e^{-qt}}{h(t)} - \lambda^2 - \frac{6q^2 e^{-2qt}}{h(t)^2} \right) \hat{x}(t) + \\ & + \left( \lambda - \frac{3q e^{-qt}}{h(t)} \right) \dot{\hat{x}}(t) + \frac{x_3(t)}{h(t)^3} + kF_x, \end{aligned} \quad (178)$$

gdje je  $\ddot{x}(t)$  oznaka za estimaciju druge derivacije pozicije letjelice. Iz (135) proizlazi da se estimacija vanjskog poremećaja može izračunati kao

$$\hat{d}_{ext}(t) = \ddot{x}(t) - kF_x, \quad (179)$$

gdje je  $\hat{d}_{ext}(t)$  oznaka za estimaciju vanjskog poremećaja. Dinamika estimacijskog filtra (172) može se prikazati u prostoru stanja

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\mathbf{u},$$

gdje su matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}(t) = \begin{bmatrix} b_{11}(t) & 0 \\ b_{21}(t) & b_{22}(t) \\ b_{31}(t) & b_{32}(t) \end{bmatrix},$$

uz  $\mathbf{x} = [x_1 \quad x_2 \quad x_3]^T$  i  $\mathbf{u} = [x(t) \quad F_x]^T$ . Elementi matrice  $\mathbf{B}(t)$  su

$$b_{11}(t) = (3\lambda - 9q)e^{-3qt} + (18q - 9\lambda)e^{-2qt} + (9\lambda - 9q)e^{-qt} - 3\lambda,$$

$$b_{21}(t) = (18\lambda q - 3\lambda^2 - 27q^2)e^{-3qt} + (9\lambda^2 - 36\lambda q + 36q^2)e^{-2qt} + (18\lambda q - 9\lambda^2 - 9q^2)e^{-qt} + 3\lambda^2,$$

$$b_{31}(t) = (\lambda^3 - 9\lambda^2 q + 27\lambda q^2 - 27q^3)e^{-3qt} + (18\lambda^2 q - 3\lambda^3 - 36\lambda q^2 + 24q^3)e^{-2qt} + (3\lambda^3 - 9\lambda^2 q + 9\lambda q^2 - 3q^3)e^{-qt} - \lambda^3,$$

$$b_{22}(t) = kh(t)^3,$$

$$b_{32}(t) = -\lambda kh(t)^3 + 3kqe^{-qt}h(t)^2.$$

Iz matrice  $\mathbf{A}$  može se zaključiti da je dinamika FSB-ESO estimacijskog filtra stabilna, dok su i članovi matrice  $\mathbf{B}(t)$  ograničene funkcije vremena.

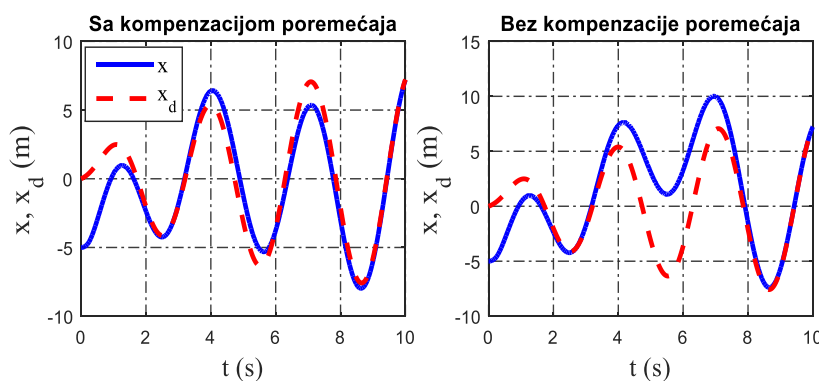
### 7.3.2. Simulacijski rezultati - Prošireni FSB observer stanja

Testirati će se performanse FSB-ESO algebarskog observera stanja i poremećaja, i usporediti će se sa linearnim proširenim observerom. Na dinamiku drona biti će primijenjen vremenski promjenjiv vanjski poremećaj

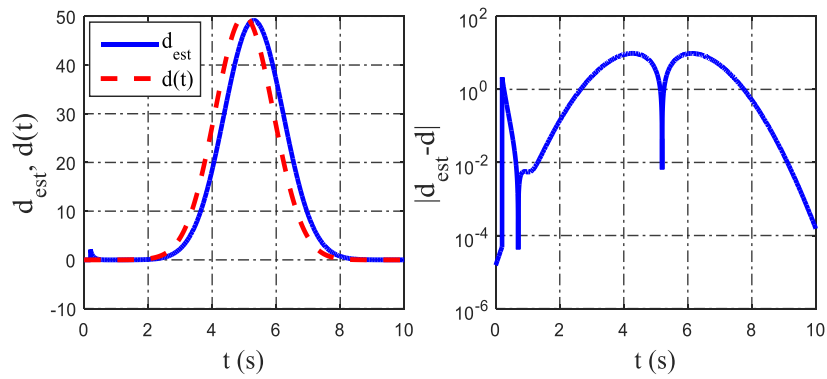
$$d_{ext}(t) = 50e^{-0,6(t-5)^2}.$$

Parametri regulatora su ostavljeni jednaki kao u prošlim simulacijama  $K_p = 6, K_d = 5$ . Ovdje ćemo se baviti samo estimacijom stanja i poremećaja, pa će se parametar drona smatrati poznatim  $k = 2 \text{ kg}^{-1}$ . Simulacije će se provesti bez dodanog šuma na mjerenu veličinu pozicije drona. Početni uvjeti su  $x(0) = -5 \text{ m}, \dot{x}(0) = 0$ . Referentna trajektorija u  $x$  ravnini koja se želi slijediti jednaka je kao pod (12). Odabran je višestruki pol  $\lambda = 10, q = \lambda/2$ , tako da odgovara višestrukim polovima Luenberger observera  $\mathbf{p} = [-10 \quad -10 \quad -10]$ . Ova dva observera je moguće uspoređivati na taj način jer FSB observer asimptotski konvergira Luenbergerovom observeru.

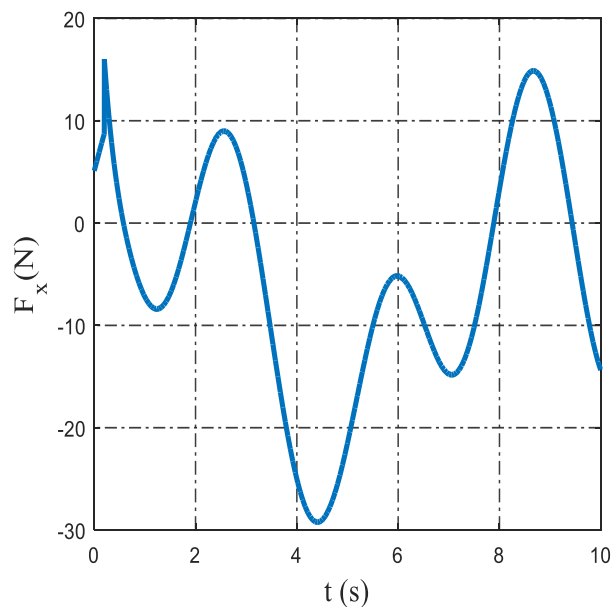
Praćenje referentne trajektorije letjelice prikazano je slikom 54. Estimirani poremećaj proširenim FSB estimatorom prikazan je na slici 55. Vrijednosti upravljačke varijable prikazane su slikom 56. Estimirana pozicija i brzina drona nalazi se na slici 57. I na kraju na slici 58. dane su vrijednosti varijabli stanja proširenog FSB estimatora.



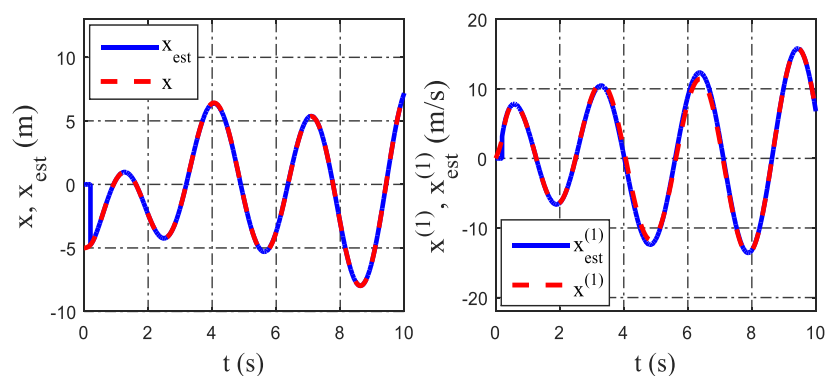
**Slika 54. Odziv letjelice sa kompenzacijom vremenski promjenjivog vanjskog poremećaja sa proširenim FSB observerom 3. reda (lijevo), i odziv letjelice bez kompenzacije vanjskog poremećaja (desno)**



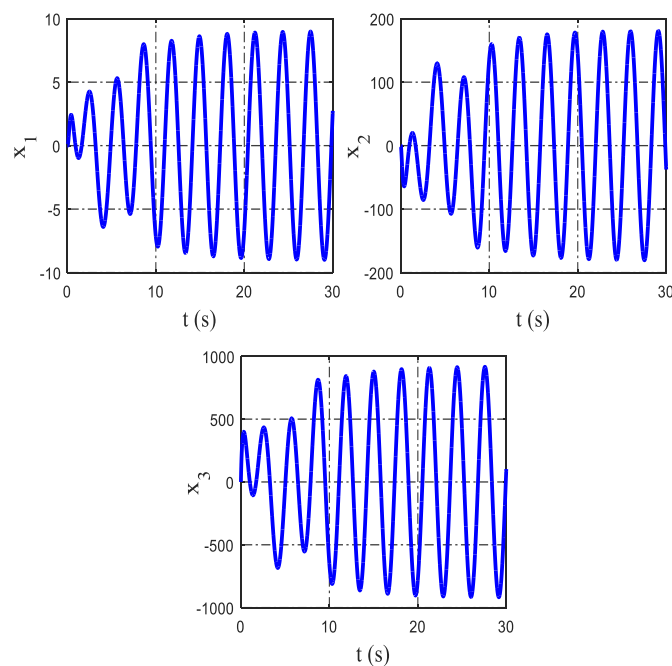
**Slika 55.** Estimirani vremenski promjenjiv poremećaj proširenim FSB observerom 3. reda (lijevo), i apsolutna pogreška estimacije vanjskog poremećaja (desno)



**Slika 56.** Vrijednosti upravljačke varijable regulatora sa kompenzacijom vremenski promjenjivog poremećaja proširenim FSB observerom 3. reda



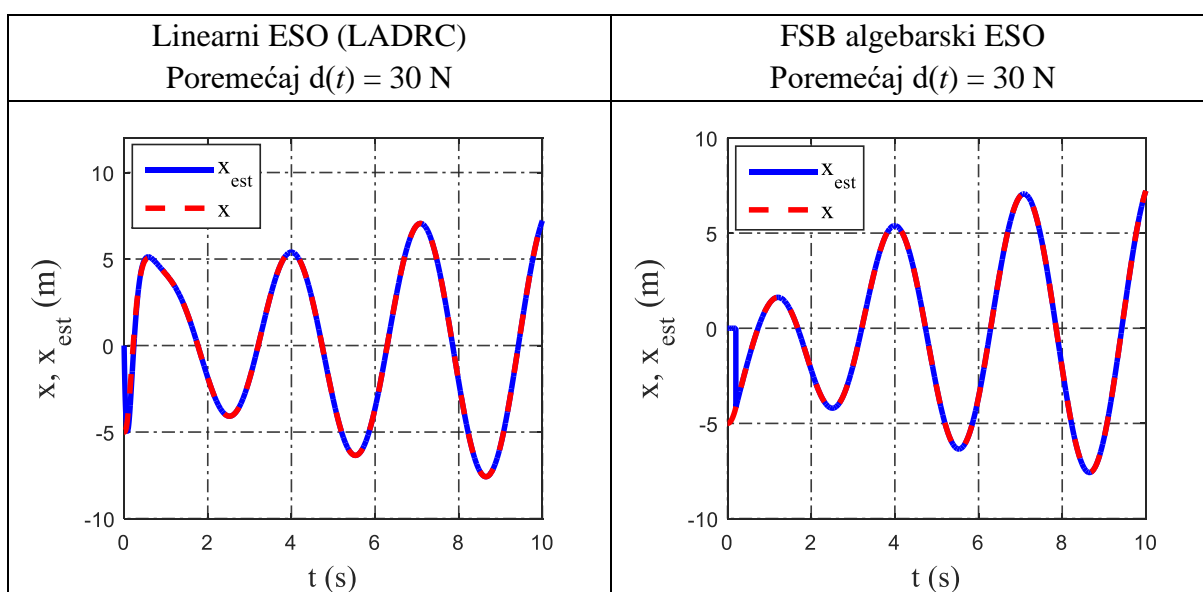
**Slika 57.** Estimirane vrijednosti pozicije (lijevo) i estimirane vrijednosti brzine drona (desno) proširenim FSB observerom 3. reda u slučaju vremenski promjenjivog poremećaja

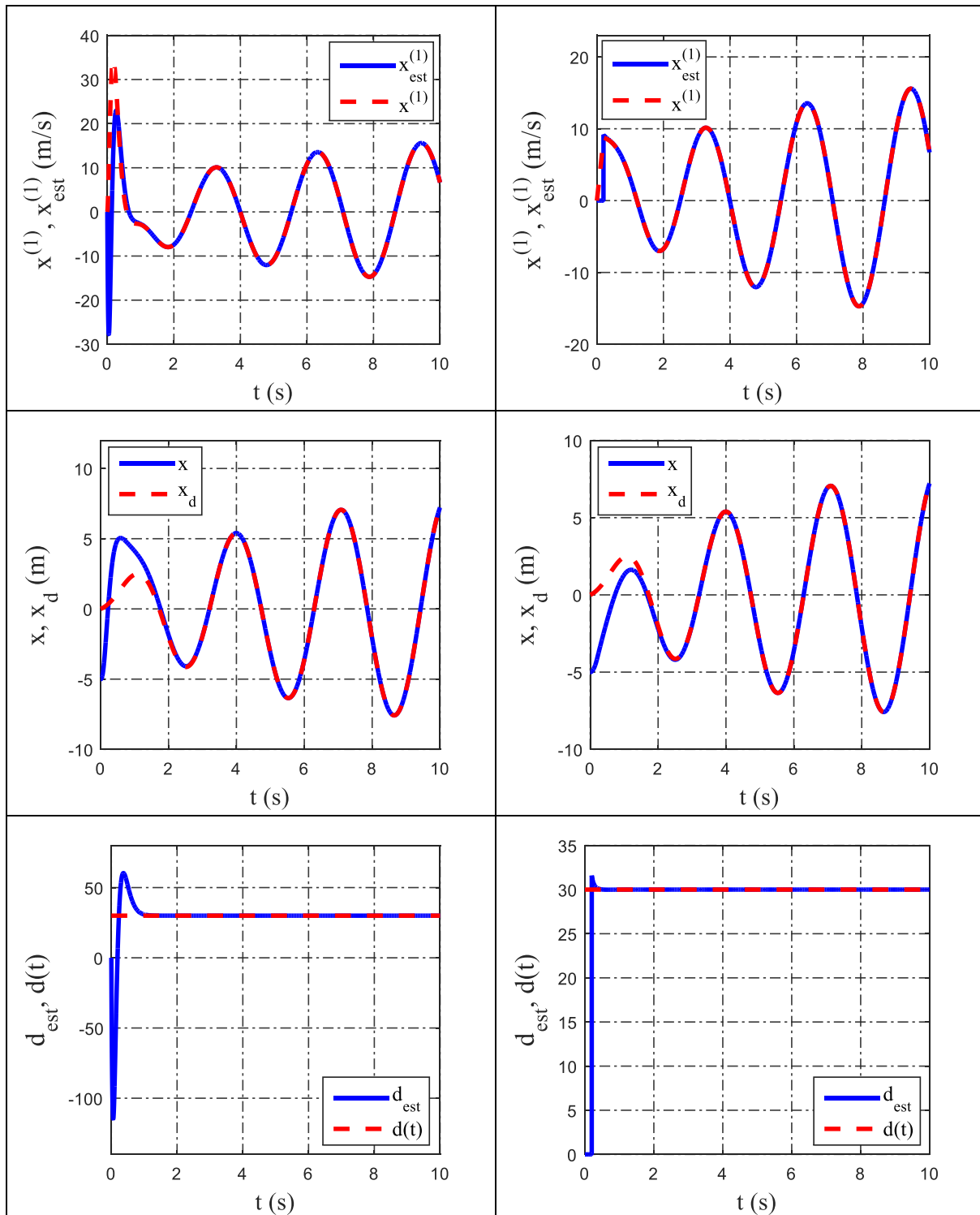


**Slika 58. Varijable stanja proširenog FSB observera 3. reda**

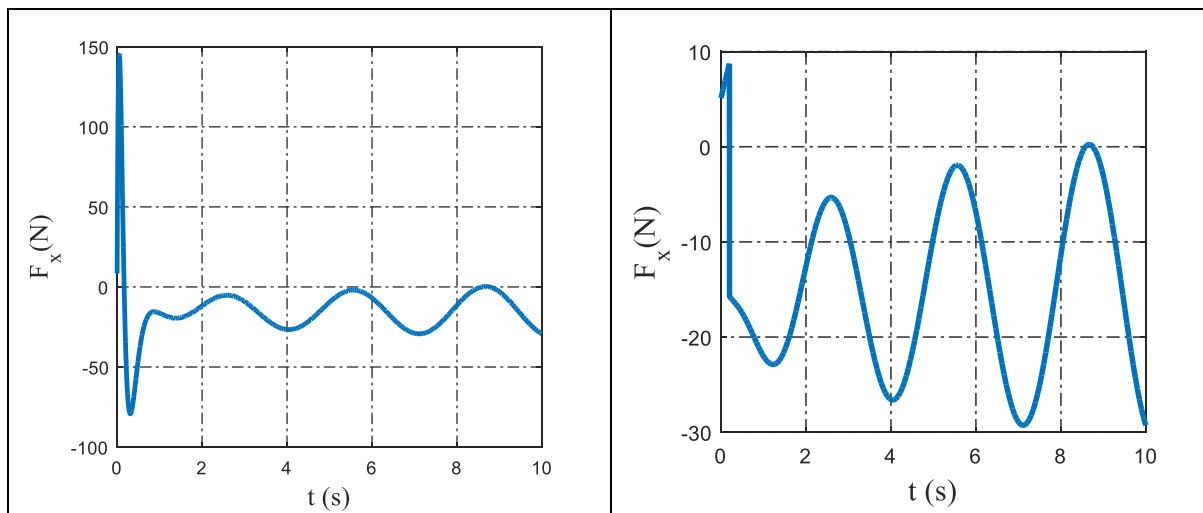
Iz simulacija se vidi da FSB-ESO dobro estimira vremenski promjenjiv poremećaj, a rezultat bi bio još bolji uz povećanje vrijednosti višestrukog pola  $\lambda$ . U tablici 4. i tablici 5. prikazane su usporedbe linearnog ADRC-a sa FSB-ESO observerom za slučaj konstantnog odnosno vremenski promjenjivog poremećaja.

**Tablica 4. Usporedba linearnog ESO-a (LADRC) sa FSB algebarskim ESO za slučaj konstantnog vanjskog poremećaja  $d(t) = 30$  N, i početni uvjet  $x(0) = -5$  m**

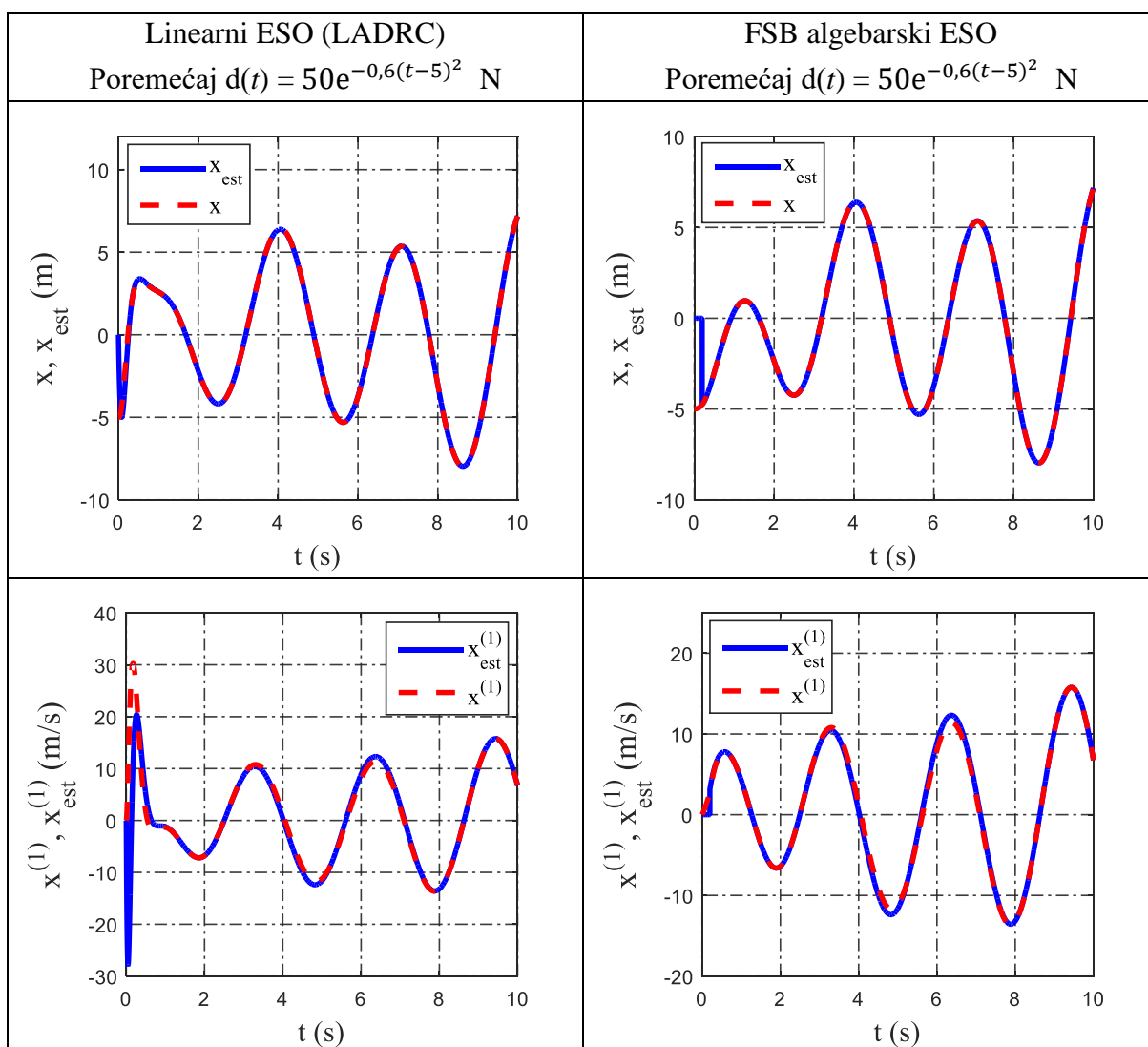


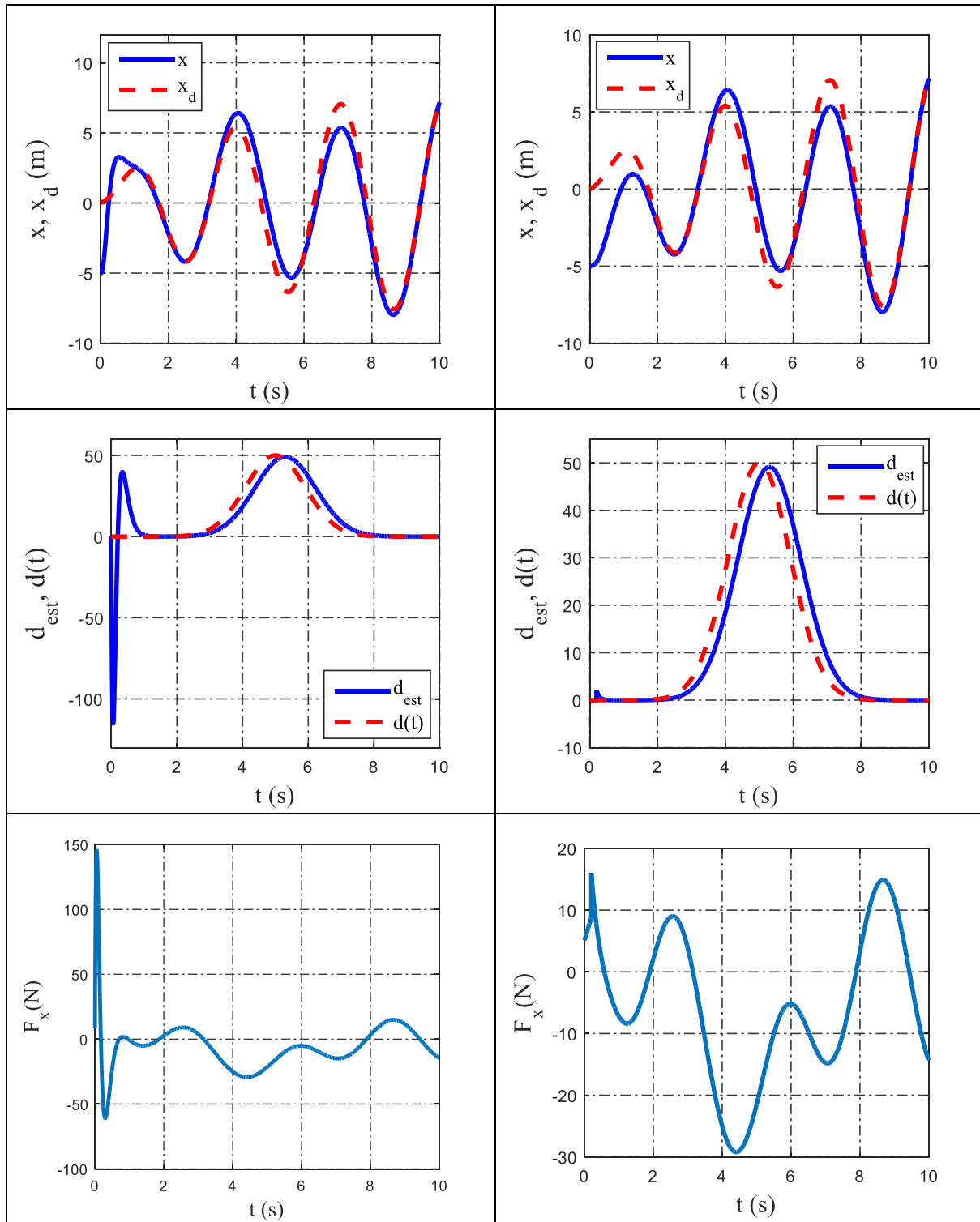






**Tablica 5. Usporedba linearnog ESO-a (LADRC) sa FSB algebarskim ESO za slučaj vanjskog poremećaja  $d(t) = 50e^{-0,6(t-5)^2}$ , i početni uvjet  $x(0) = -5$  m**





Može se zaključiti da za jednake višestruke polove, FSB-ESO daje bolje rezultate od linearnog ADRC-a zbog robusnosti na početne uvjete sustava. Kod LADRC-a se u početku upravljačke akcije pojavljuju visoke vršne vrijednosti zbog nerobusnosti na početne uvjete, a još se više pojačavaju postavljanjem viših vrijednosti višestrukog polova. FSB-ESO nema taj problem, daljnim povećanjem vrijednosti višestrukog pola estimacija stanja i poremećaja će biti bolja, a neće biti negativnog utjecaja na upravljačku varijablu regulatora.

## 8. Zaključak

U ovom radu ispitale su se karakteristike različitih metoda upravljanja bespilotnom letjelicom sa šest stupnjeva slobode gibanja. Dana je usporedba Luenberger observera stanja i observera stanja zasnovanog na metodi algebarskog deriviranja (ADB observer). ADB observer pokazao je manju pogrešku estimacije varijabli stanja i robusnost na početne uvjete sustava. Šum mjerenja može utjecati na ADB estimator stanja, zbog čega konvergencija estimiranih brzina letjelice postaje asimptotske prirode. Provedeno je upravljanje letjelice i adaptivnim regulatorom. Pokazalo se da adaptivni regulator ima asimptotsku konverenciju estimiranog parametra ka pravoj vrijednosti. Također je pokazano, da je moguće vođenje bespilotne letjelice adaptivnim regulatorom u kombinaciji sa Luenbergerovim observerom stanja. U konačnici se prezentirala najbolja algebarska metoda estimacije varijabli stanja, tzv. metoda frekvencijskog pomaka. Prednost FSB observera je stabilna realizacija modela estimacijskog filtra, kao i ograničene vrijednosti varijabli stanja observera, što nismo imali u slučaju ADB observera. Estimacija nepoznatih veličina je neasimptotska, gotovo trenutna. Za estimaciju nepoznatih vanjskih poremećaja testirale su se ADB i FSB algebarske metode zasnovane na observeru sa proširenim stanjem. Najbolje rezultate pokazao je FSB-ESO (*frequency shifting based-extended state observer*) koji ima bolje performanse od linearnog ADRC-a sa Luenbergerovim observerom zbog robusnosti na početne uvjete sustava i šum mjerenja.

## LITERATURA

- [1] D. Kotarski, P. Piljek, H. Brezak, J. Kasać. Design of a fully actuated passively tilted multirotor UAV with decoupling control system, 8th International Conference on Mechanical and Aerospace Engineering, Prague, Czech Republic, pp. 385-390, 2017.
- [2] J. Kasać, D. Kotarski, P. Piljek, Frequency-Shifting-Based Algebraic Approach to Stable On-Line Parameter Identification and State Estimation of Multirotor UAV. Asian Journal of Control, vol. 21, no. 4, pp. 1619-1629, 2019.
- [3] J. Kasać, S. Stevanović, T. Žilić, J. Stepanić. Robust Output Tracking Control of a Quadrotor in the Presence of External Disturbances. Transactions of Famena, vol. 37, no. 4, pp. 29-42, 2013.
- [4] D. Kotarski, P. Piljek, H. Brezak, J. Kasać. Chattering free tracking control of a fully actuated multirotor with passively tilted rotors, Transactions of FAMENA, vol. 42, no. 1, pp. 1-14, 2018.
- [5] D. Majetić, J. Kasać, D. Brezak, Zbirka zadataka iz teorije automatskog upravljanja- Viševarijabilni sustavi, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb, 2016.
- [6] H. Sira-Ramirez, C. G. Rodriguez, J. C. Romero, A. L. Juarez, Algebraic Identification and Estimation Methods in Feedback Control Systems, John Wiley & Sons, Chichester, West Sussex, 2014.
- [7] M. Fliess, H. Sira-Ramirez, An algebraic framework for linear identification, ESAIM Control Optimisation and Calculus of Variations, vol. 9, pp. 151-168, 2003.
- [8] J. Kasać, T. Žilić, V. Milić, A. Jokić, Frequency-shifting-based stable on-line algebraic parameter identification of linear systems, Journal of the Franklin Institute, vol. 355, no. 18, pp. 9224-9244, 2018.
- [9] J. Kasać, D. Majetić, D. Brezak. An algebraic approach to on-line signal denoising and derivatives estimation. Journal of the Franklin Institute, vol. 355, no. 15, pp. 7799-7825, 2018.
- [10] S. Li, J. Yang, W. H. Chen, X. Chen, Disturbance Observer-Based Control-Methods and Applications, CRC Press-Taylor & Francis group, Boca Raton, 2014.
- [11] Y. Huang, W. Xue, Active disturbance rejection control: Methodology and theoretical analysis, ISA Transactions, vol. 53, pp. 963-976, 2014.

- [12] J. Kasać, B. Novaković, V. Milić. On Equivalence Between Internal and External Model-Based Repetitive Learning Controllers for Nonlinear Passive Systems. *Asian Journal of Control*, vol. 13, no. 1, 15-24, 2011.

## **PRILOZI**

I. CD-R disc