

Numeričko modeliranje dinamičkih procesa deformiranja tankih bakrenih limova

Jovanović, Ivana

Master's thesis / Diplomski rad

2019

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:235:932376>

Rights / Prava: [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2025-02-20**

Repository / Repozitorij:

[Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

DIPLOMSKI RAD

Ivana Jovanović

Zagreb, 2019.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

DIPLOMSKI RAD

**Numeričko modeliranje dinamičkog procesa deformiranja tankih
bakrenih limova**

Mentor:
Prof. dr. sc. Zdenko Tonković

Student:
Ivana Jovanović

Zagreb, 2019.

Izjavljujem da sam ovaj rad radila samostalno, služeći se stečenim znanjem i navedenom literaturom.

Rad je izrađen u suradnji s tvrtkom Yazaki Europe Limited.

Zahvaljujem se mentoru prof. dr. sc. Zdenku Tonkoviću na stručnom vođenju, savjetima i potpori tijekom izrade ovog rada. Također mu se zahvaljujem na prenesenom znanju tijekom studiranja te što je kroz svoje kolegije ulagao veliki trud da objasni probleme numeričke mehanike.

Zahvaljujem se Anti Bubalu, mag. ing. mech. na uloženom trudu i nesebično pruženoj pomoći tijekom izrade ovog rada te ustupljenim materijalima iz svojih znanstvenih istraživanja na kojima se ovaj diplomski rad i temelji.

Zahvaljujem se tvrtki Yazaki na pruženoj prilici za suradnju kroz ovaj rad i studentsku praksu.

Zahvaljujem se roditeljima Daliboru i Mariji na bezuvjetnoj ljubavi i podršci te sestrama, prijateljima i bližnjima koji su bili uz mene tijekom studija.

Ivana Jovanović



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE



Središnje povjerenstvo za završne i diplomske ispite
Povjerenstvo za diplomske ispite studija strojarstva za smjerove:
procesno-energetski, konstrukcijski, brodstrojarski i inženjersko modeliranje i računalne simulacije

Sveučilište u Zagrebu Fakultet strojarstva i brodogradnje	
Datum	Prilog
Klasa:	
Ur.broj:	

DIPLOMSKI ZADATAK

Student: **Ivana Jovanović**

Mat. br.: 0035196339

Naslov rada na
hrvatskom jeziku:

**Numeričko modeliranje dinamičkih procesa deformiranja tankih
bakrenih limova**

Naslov rada na
engleskom jeziku:

**Numerical modeling of dynamic deformation processes of thin copper
sheets**

Opis zadatka:

Bakrene legure povećane čvrstoće imaju veliku primjenu u proizvodnji elektrovodljivih komponenti u automobilima. Tako i tvrtka Yazaki Europe Limited proizvodi terminale upravo iz bakrenih legura, kako bi se postigla veća čvrstoća uz dobru električnu vodljivost. Za provedbu numeričkih simulacija potrebno je provesti niz eksperimentalnih ispitivanja na vlačnim i tlačnim uzorcima.

Diplomski rad će istražiti utjecaj brzine deformiranja na elasto-plastično ponašanje bakrene legure CuFe2P, te validirati numerički model na procesu deformiranja tankih limenih ploča. Na temelju navedenih činjenica, u radu je potrebno napraviti:

1. Proučiti dostupnu literaturu o termo-elasto-plastičnom ponašanju materijala.
2. Na temelju rezultata vlačnih testova pri različitim brzinama ispitivanja potrebno je odrediti parametre materijala u elasto-plastičnom konstitutivnom modelu. Pritom uzeti u obzir anizotropno ponašanje materijala dobiveno na epruvetama uzetim u tri pravca, pod 0° , 45° i 90° u odnosu na smjer valjanja lima.
3. Provesti numeričko modeliranje dinamičkog procesa deformiranja uzoraka izrađenih iz bakrenih limova dimenzija $17,5 \times 7,5 \times 0,8$ mm uslijed tlačenja na servohidrauličkoj kraljici.
4. Numerički model deformiranja tankih limenih ploča validirati s eksperimentalnim rezultatima pri čemu su raspodjele pomaka i temperatura na površini uzoraka mjerene optičkim mjernim sustavom ARAMIS 4M temeljen na korelaciji digitalne slike te infracrvenom termografskom kamerom.

Potrebni podaci i literatura se mogu dobiti kod mentora. U radu treba navesti korištenu literaturu i eventualno dobivenu pomoć.

Zadatak zadan:

Rok predaje rada:

Predvideni datumi obrane:

26. rujna 2019.

28. studeni 2019.

2.-6. prosinac 2019.

Zadatak zadao:

Predsjednica Povjerenstva:


Prof. dr. sc. Zdenko Tonković


Prof. dr. sc. Tanja Jurčević Lulić

Sadržaj

Sadržaj	II
Popis slika	IV
Popis oznaka	V
Sažetak	VII
Summary	VIII
1 Uvod	1
1.1 Cilj rada	2
2 Termo-elastoplastično ponašanje materijala	3
2.1 Utjecaj brzine deformiranja i temperature	3
2.2 Prvi zakon termodinamike	3
2.3 Drugi zakon termodinamike	3
2.4 Prvi zakon termodinamike za slučaj jednoosnog opterećenja	4
3 Mehanika anizotropnih elastoplastičnih materijala	8
3.1 Plastično deformiranje pri troosnom stanju naprezanja [4]	8
3.1.1 Druckerov postulat	9
3.1.2 Plastični potencijal i asocirani zakon tečenja	12
3.2 Tenzor elastičnosti	13
3.3 Lankfordov parametar [5]	14
3.4 Anizotropne funkcije tečenja [5]	16
3.5 Modeliranje anizotropije u programskom paketu Abaqus[6]	19
3.5.1 Definiranje izotropne elastičnosti	19
3.5.2 Definiranje ortotropne elastičnosti određivanjem inženjerskih konstanti	19
3.5.3 Definiranje transverzalno izotropne elastičnosti	20
3.5.4 Definiranje ortotropne elastičnosti kod ravninskog naprezanja	21
3.5.5 Definiranje ortotropne elastičnosti određivanjem parametara elastične matrice krutosti	21
3.5.6 Definiranje potpuno anizotropne elastičnosti	22
4 Numeričko modeliranje dinamičkog procesa deformiranja	23
4.1 Numeričko modeliranje dinamike deformabilnih tijela	23
4.1.1 Implicitna integracija	24
4.1.2 Eksplicitna integracija	24

4.2	Konačni elementi za spregnutu toplinsko-mehaničku analizu [7]	25
5	Modeliranje kontakta [8]	27
6	Eksperimentalni model dinamičkog procesa deformiranja taknih bakrenih limova	29
7	Numerički model dinamičkog procesa deformiranja taknih bakrenih limova	33
7.1	3D numerički model	36
7.1.1	Analiza rezultata	37
7.2	2D numerički model	42
7.3	Usporedba rezultata	43
8	Zaključak	45
	LITERATURA	46
	PRILOZI	47

Popis slika

1.1	Prikaz zakrimpanih terminala širine 9,5 i 0,63 mm[1]	1
2.1	Dijagram stvarno naprezanje- stvarna deformacija za brzinu deformiranja 10 mm/s	5
2.2	Dijagram stvarno naprezanje- plastične deformacija za brzinu deformiranja 10 mm/s	5
2.3	Dijagram temperatura- vrijeme za brzinu deformiranja 10 mm/s	6
2.4	Dijagram stvarno naprezanje- stvarna deformacija za brzinu deformiranja 50 mm/s	6
2.5	Dijagram stvarno naprezanje- plastične deformacija za brzinu deformiranja 50 mm/s	7
2.6	Dijagram temperatura- vrijeme za brzinu deformiranja 50 mm/s	7
3.1	Definicija aktivnog, pasivnog i neutralnog opterećenja [4]	9
3.2	Četri vrste dijagrama ovisnosti naprezanja o deformaciji: a) i b) stabilni materijali, c) nestabilan materijal, d) hipotetički nestabilan materijal [4]	10
3.3	Objašnjenje Druckerova postulata [4]	10
3.4	Konveksnost plohe tečenja: a) konveksna ploha tečenja, b) konkavna ploha tečenja je u suprotnosti s Druckerovim postulatom [2]	11
3.5	Gradijentnost prirasta plastične deformacije: a) u regularnoj točki prirast je okomit na krivulju tečenja, b) u singularnoj točki prirast leži u kutu (stošcu) koji određuju normale na glatke plohe koje se sastaju u toj točki [4]	12
3.6	Vektor prirasta plastične deformacije u singularnoj točki C leži unutar trokuta koji određuju normale \mathbf{n}^1 i \mathbf{n}^2 na krivulje $f_1 = 0$ i $f_2 = 0$ [4]	12
3.7	a) Ortotropan, b) transverzalno izotropan materijal	14
3.8	Osi ortotropije lima	15
4.1	2D konačni element prvog reda	25
4.2	Prizmastični konačni element prvog reda	26
6.1	Eksperimentalni model[9]	30
6.2	Mjerenje temperature infracrvenom termografskom kamerom[9]	30
6.3	Mjerenje pomaka optičkim mjernim sustavom ARAMIS 4M[9]	31
6.4	Bakreni limovi nakon deformiranja[9]	31
6.5	Dijagrami sila- pomak za brzinu deformiranja 10 mm/s	32
6.6	Dijagrami sila- pomak za brzinu deformiranja 50 mm/s	32
7.1	Dijagram naprezanje-deformacija za brzinu deformiranja 10mm/s	33
7.2	Dijagram naprezanje-deformacija za brzinu deformiranja 50mm/s	34
7.3	Dijagram naprezanje-plastična deformacija za brzinu deformiranja 10mm/s	35
7.4	Dijagram naprezanje-plastična deformacija za brzinu deformiranja 50mm/s	35

7.5	3D numerički model s rubnim uvjetima	36
7.6	3D numerički model diskretiziran s 49272 konačnih elemenata	37
7.7	Pomaci za brzinu deformiranja 10mm/s	37
7.8	Pomaci za brzinu deformiranja 50mm/s	38
7.9	Temperatura za brzinu deformiranja 10mm/s	39
7.10	Temperatura izmjerena IR kamerom za brzinu deformiranja 10mm/s [9] . . .	39
7.11	Temperatura za brzinu deformiranja 50mm/s	40
7.12	Temperatura izmjerena IR kamerom za brzinu deformiranja 50mm/s [9] . . .	40
7.13	Ekvivalentna plastična deformacija za brzinu deformiranja 10 mm/s	41
7.14	Ekvivalentna plastična deformacija za brzinu deformiranja 50 mm/s	41
7.15	2D numerički model	42
7.16	2D numerički model diskretiziran s 5950 konačnih elemenata	42
7.17	Dijagram sila-pomak 10mm/s	43
7.18	Dijagram sila-pomak 50mm/s	44
7.19	Raspored temperature po duljini lima	44

Popis oznaka

Oznaka	Jedinica	Opis
$A, B, C, F, G, H, L, M, N$		parametri anizotropije
b	[m]	širina uzorka
c	[J/kgK]	specifični toplinski kapacitet
C	-	matrica ograničenja
C_{ijkl}, D_{ijkl}	-	tenzor elastičnosti
f	-	funkcija tečenja
g	-	funkcija ograničenja
g	-	plastični potencijal
\mathbf{K}	-	matrica krutosti
K	-	prostorni modul elastičnosti
k	W/mK	konduktivnost (toplinska provodljivost)
l	[m]	duljina uzorka
Q	-	vektor konstanti ograničenja
Q	[J]	toplina
\mathbf{R}	-	vektor vanjskih čvornih sila
r_θ	-	Lankfordov parametar
\bar{r}	-	parametar normalne anizotropije
Δr	-	parametar ravninske anizotropije
q_j	[J/m ²]	gustoća toplinskog toka
s		specifična entropija
S_{ijkl}	-	tenzor podatljivosti
T	[K]	temperatura
T	[°C]	temperatura
ΔT	[K]	prirast temperature
t	[s]	vrijeme
t	[m]	debljina uzorka
Δt	[s]	inkrement vremena
u		specifična unutarnja energija
\mathbf{V}	-	vektor čvornih pomaka
W	[J]	rad
ΔW	[J]	rad dodatnog opterećenja
x_j		vektor položaja
x, y, z	-	Kartezijeve koordinate
α	[K ⁻¹]	koeficijent toplinske istezljivosti
$\boldsymbol{\alpha}$		matrica penalty brojeva
β	-	dio rada brzine plastične deformacije pretvoren

Oznaka	Jedinica	Opis
		u termoplastičnu toplinu
γ	-	kutna deformacija
$\boldsymbol{\varepsilon}$	-	tenzor deformacije
ε_{ij}^{el}	-	tenzor elastične deformacije
ε_{ij}^{pl}	-	tenzor plastične deformacije
$d\varepsilon_{ij}$	-	inkrement ukupne deformacije
$d\varepsilon_{ij}^{el}$	-	inkrement elastične deformacije
$d\varepsilon_{ij}^{pl}$	-	inkrement plastične deformacije
$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$	-	tenzor brzine deformacije
θ	[°]	kut valjanja
κ	-	Parametar očvršćenja
λ	-	Langrangeov multiplikator
λ, G	-	Lameove konstante
μ	[kg/m ³]	
ν	-	Poissonov faktor
π	-	potencijalna energija
ρ	[kg/m ³]	gustoća
$\boldsymbol{\sigma}, \sigma_{ij}$	[N/m ²]	tenzor naprezanja
$d\sigma_{ij}$	[N/m ²]	inkrement naprezanja
ω	-	vlastita frekvencija sustava

Sažetak

Krimpanje je postupak spajanja žica i konektora koji se ostvaruje deformiranjem konektora u kojem se pojavljuju plastične deformacije. Eksperimentalno modeliranje procesa krimpanja vrlo je složeno, te je zbog toga u radu provedeno eksperimentalno modeliranje procesa deformiranja bakrenih limova. U radu je izvršeno numeričko modeliranje dinamičkih procesa deformiranja tankih bakrenih limova u programskom paketu Abaqus/CAE. Izvršeno je numeričko modeliranje tlačnog procesa deformiranja šest bakrenih limova koji su u međusobnom kontaktu. Numerički model je validiran eksperimentom kod kojeg je mjerena raspodjela pomaka optičkim mjernim sustavom ARAMIS 4M i raspored temperature IR kamerom. Nakon analize rezultata primjećeno je da su poklapanja dobra, s tim da bi se točnost numeričkog modela povećala kada bi se bakreni limovi modelirali kao anizotropni.

Rad je konceptualno podijeljen u dva dijela i osam poglavlja. U prvom dijelu rada dane su teorijske osnove, dok je u drugom dijelu prikazan eksperimentalni i numerički model.

U prvom poglavlju dan je kratak uvod u rad, te njegov cilj. U drugom poglavlju prikazane su teorijske osnove termo-elastoplastičnog ponašanja materijala. U trećem poglavlju detaljno je prikazana mehanika plastičnog deformiranja te mehanika anizotropnih materijala. U četvrtom poglavlju objašnjene su osnove dinamičkog procesa deformiranja, te opisani korišteni konačni elementi. U petom poglavlju prikazane su teorijske osnove modeliranja kontakta. U šestom poglavlju prikazan je eksperimentalni model dinamičkog procesa deformiranja tankih bakrenih limova, dok je u sedmom poglavlju prikazano numeričko modeliranje te je dana usporedba numeričkih i eksperimentalnih rezultata. U osmom poglavlju dan je kratak zaključak rada.

Ključne riječi: krimpanje, bakreni limovi, metoda konačnih elemenata, dinamičko deformiranje, kontakt

Summary

Crimping is a wire and connector connecting procedure that is achieved by deforming the connector in which the plastic deformation appears. Experimental modeling of the crimping process is very complex, which is why experimental modeling of the copper sheet deformation process was carried out. In this thesis dynamic deformation processes of thin copper sheets were numerically modelled in Abaqus/CAE. Numerical model of the compressive deformation process of six copper sheets in contact was made. Numerical model is validated by experiment in which the displacement is measured with optical measuring system ARAMIS 4M and temperature field is measured with IR camera. After analysis of the results, it was observed that the matches were good, but the accuracy of the numerical model would increase if the copper sheets were modeled as anisotropic.

The thesis is divided in two parts and eight chapters. In the first part theoretical foundations are given, while in the second part experimental and numerical model is shown.

In the first chapter a brief introduction and thesis aim are presented. The second chapter deals with the theoretical fundamentals of thermo-elastoplastic material behaviour. Mechanics of plastic deformations and anisotropic materials are given in the third chapter. The fourth chapter explains dynamic deformation process foundations, and describes used finite elements. The fifth chapter deals with the theoretical fundamentals of contact modeling. In the sixth chapter experimental model of dynamic deformation processes of thin copper sheets is shown, while in the seventh chapter numerical model and results are given. The eighth chapter is brief conclusion of the thesis.

Key words: crimping, copper sheets, finite element analysis, dynamic deformation, contact

1 Uvod

Proces krimpavanja žice je postupak spajanja električnog vodiča (bakrene žice) i terminala (metalni konektor) bez lemljenja ili zavarivanja. Kontaktno područje između žica i konektora ima ključnu ulogu u električnom provođenju i vlačnoj čvrstoći. Slabi kontakt uzrokuje izvlačenje žica iz konektora, dok prečvrst kontakt uzrokuje velike deformacije žice zbog koje se također smanjuje vlačna čvrstoća. Tijekom postupka krimpavanja materijal ulazi u plastično područje te se trajno deformira u željeni oblik. Velike brzine deformiranja uzrokuju oslobađanje toplinske energije uslijed pojave plastične deformacije u materijalu. Unutar materijala generira se toplinski tok te dolazi do lokalnog porasta temperature. Uslijed razlike temperatura unutar materijala dolazi do provođenja topline. Toplina se također oslobađa uslijed trenja između bakrenih žica te između žica i terminala tijekom tlačenja. Kako se proces krimpavanja odvija u kratkom vremenu, može se pretpostaviti da je proces adijabatski. Za rješavanje navedenih problema te za definiranje konačnog oblika zakrimpanog terminala i smanjenje troškova razvoja i proizvodnje, u zadnje vrijeme primjenjuje se metoda konačnih elemenata (MKE) čime se numeričkom simulacijom nastoji zamijeniti, odnosno nadopuniti skupi eksperiment. Značajan utjecaj na točnost numeričkog postupka ima odabir konačnih elemenata, formuliranje konstitutivnih modela s pripadnim parametrima materijala te opisivanje rubnih uvjeta, dinamičkih efekata, geometrijske nelinearnosti, trenja, elastičnog povrata, prijenosa topline i velikih kontaktnih pritisaka, koji uzrokuju velike distorzije konačnih elemenata i nefizikalno ponašanje numeričkog modela. Za što realnije modeliranje ponašanja materijala i validaciju numeričkih modela neophodno je provesti eksperimentalna istraživanja. Terminali se obično proizvode iz legiranih bakrenih traka koje se postupkom valjanja stanjuju na željenu debljinu. Osim promjene debljine, valjanje uzrokuje promjenu čvrstoće, duktilnosti i anizotropije materijala. [1]



Slika 1.1: Prikaz zakrimpanih terminala širine 9,5 i 0,63 mm[1]

Eksperimentalno modeliranje procesa krimpanja vrlo je složeno, te je zbog toga provedeno eksperimentalno modeliranje procesa deformiranja bakrenih limova. Tijekom deformiranja dolazi do gnječenja bakrenih limova što je slično gnječenju bakrenih žica tijekom deformiranja konektora. Za eksperimentalna mjerenja korištene su bezkontaktne metode mjerenja optičkim mjernim sustavom ARAMIS i termografskom kamerom.

1.1 Cilj rada

Da bih se došlo do uspješnog modeliranja postupka krimpanja, ali i drugih postupaka oblikovanja deformiranjem potrebno je točno modelirati nešto jednostavnije slučajeve kod kojih dolazi do velikih nelinearnih elastoplastičnih deformacija. Kod takvih procesa potrebno je također uzeti u obzir brzine deformacije, nelinearnost materijala, izmjenu topline i trenje. S obzirom da su limovi u međusobnom kontaktu računalno vrijeme i kompleksnost simulacije je znatno povećana. Cilj ovog rada je validirati 3D i 2D numerički model procesa deformiranja bakrenih limova s eksperimentalnim rezultatima.

Rad je konceptualno podijeljen u dva dijela i osam poglavlja. U prvom dijelu rada dane su teorijske osnove, dok je u drugom dijelu prikazan eksperimentalni i numerički model.

U prvom poglavlju dan je kratak uvod u rad, te njegov cilj. U drugom poglavlju prikazane su teorijske osnove termo-elastoplastičnog ponašanja materijala. U trećem poglavlju detaljno je prikazana mehanika plastičnog deformiranja te mehanika anizotropnih materijala. U četvrtom poglavlju objašnjene su osnove dinamičkog procesa deformiranja, te opisani korišteni konačni elementi. U petom poglavlju prikazane su teorijske osnove modeliranja kontakta. U šestom poglavlju prikazan je eksperimentalni model dinamičkog procesa deformiranja tankih bakrenih limova, dok je u sedmom poglavlju prikazano numeričko modeliranje te je dana usporedba numeričkih i eksperimentalnih rezultata. U osmom poglavlju dan je kratak zaključak rada.

2 Termo-elastoplastično ponašanje materijala

2.1 Utjecaj brzine deformiranja i temperature

Na elastoplastično ponašanje metalnih materijala znatan utjecaj imaju brzina deformiranja i temperatura. S porastom brzine deformiranja raste granica tečenja i općenito čvrstoća metala, dok duktilnost opada. Slučaj kada se opterećenja povećava polagano od nule do svog konačnog iznosa (vrlo niske brzine deformacije) nazivamo monotono odnosno kvazistatičko opterećenje (opterećenja s bezinom deformiranja manjom od 10^{-4}).

S povećanjem temperature pojačava se difuzija i rekristalizacija pa je očvršćenje metala deformiranjem smanjeno. Metal koji je krhak kod sobne temperature postaje duktilan kod vrlo visokih temperatura.

Kod vrlo malih brzina deformiranja (kvazistatički proces) prisutan je izotermni termodinamički proces kod kojeg toplina nastala disipacijom mehaničke energije neposredno odlazi u okolinu. Porastom brzine deformiranja proces postaje neizotermni jer se toplina nastala disipacijom ne može u potpunosti prenijeti na okolinu te u materijalu dolazi do povećanja temperature. Kod većih brzina deformiranja termodinamički proces postaje adijabatski. [2]

2.2 Prvi zakon termodinamike

Prvi zakon termodinamike odnosno zakon očuvanja energije

$$\rho du = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} + r - q_{j,j}, \quad (2.1)$$

pokazuje da do povećanja unutarnje energije du dolazi uslijed: povećanja mehaničkog rada vanjskog opterećenja $\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}$, gustoća toplinskog izvora r i toplinskog protoka $q_{j,j}$. U izrazu q predstavlja gustoću materijala.

Gustoću toplinskog toka q_j jednaka je toplini koja u jediničnom vremenu prođe kroz jediničnu površinu. Pravac vektora q_j podudara se s pravcem najbrže promjene temperature, tj. s pravcem temperaturnoga gradijenta $\text{grad}T = \Delta T$. Pri tome toplina prolazi od područja više prema području niže temperature. Stoga Fourierov zakon provođenja glasi

$$q_j = -k \text{grad}T = -k \Delta T = -k \frac{\partial T}{\partial x_j}. \quad (2.2)$$

2.3 Drugi zakon termodinamike

Nije moguć nikakav proces koji bi imao kao jedinu posljedicu odvođenje topline iz jednog izvora uz vršenje ekvivalentne količine rada.

Kod drugog zakona termodinamike susrećemo se s pojmovima povrativog i nepovrativog procesa, odnosno entropijom. Povrativi ili reverzibilni procesi jesu takvi procesi koji se sami

po sebi mogu odvijati u oba smjera. Nužan uvjet da proces bude reverzibilan jest da je stalno u mehaničkoj i toplinskoj ravnoteži unutar sebe, kao i sa svojim okolišem. Nepovrativi ili ireverzibilni procesi mogu se sami po sebi odvijati u jednom smjeru. Nepovratnost različitih procesa možemo izraziti pomoću entropije. Entropija definira prirast dovedene topline u odnosu na apsolutnu temperaturu. Iz drugog zakona termodinamike slijedi:

$$\frac{ds}{dt} \geq \frac{r}{T} - \frac{1}{\rho} \left(\frac{q_j}{T} \right)_{,j}, \quad (2.3)$$

gdje je s specifična entropija, r gustoća snage toplinskih izvora, q_j vektor toplinskog toka.

2.4 Prvi zakon termodinamike za slučaj jednoosnog opterećenja

Prvi zakon termodinamike za slučaj jednoosnog opterećenja glasi

$$\rho c \dot{T} - k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \beta \sigma \dot{\varepsilon}^p - \alpha E T \dot{\varepsilon}^e, \quad (2.4)$$

gdje je T temperatura, σ naprezanje, ε^e elastična deformacija, ε^p plastična deformacija, ρ gustoća, c specifični toplinski kapacitet, k konduktivnost, α koeficijent toplinskog rastezanja, E modul elastičnosti. β je dio rada brzine plastične deformacije $\dot{W}^p = \sigma \dot{\varepsilon}^p$ pretvoren u termoplastičnu toplinu $\dot{Q}^p = \beta \sigma \dot{\varepsilon}^p$. [3]

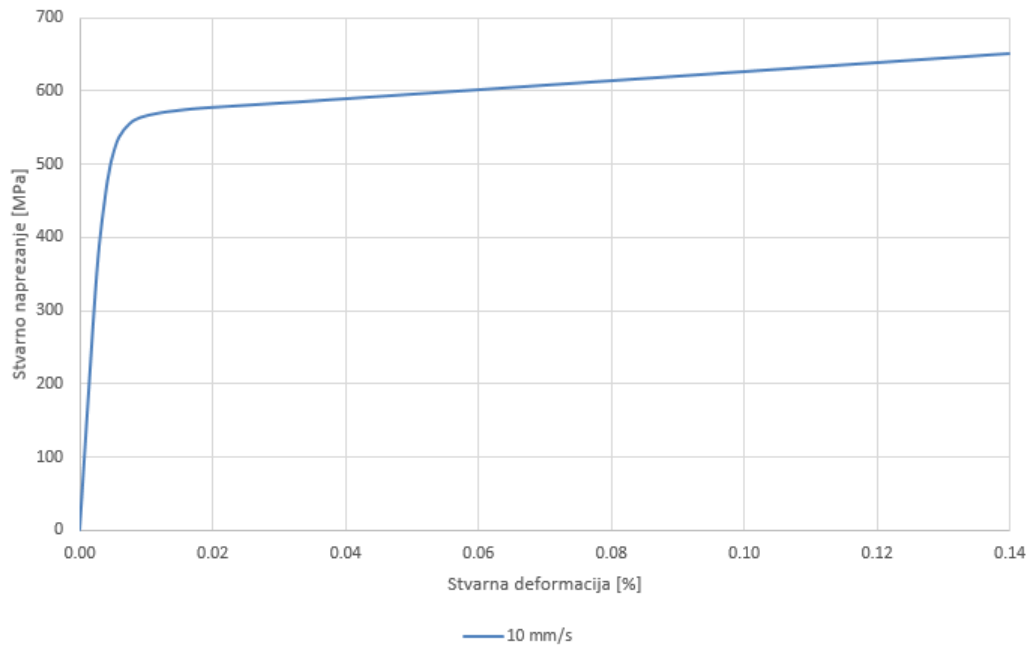
Ako pretpostavimo da je proces adijabatski i da je termoelastična toplina $\dot{Q}^e = \alpha E T \dot{\varepsilon}^e$ zanemariva u usporedbi s termoplastičnom toplinom dobijemo

$$\rho c_v \dot{T} = \beta \sigma \dot{\varepsilon}^p, \quad (2.5)$$

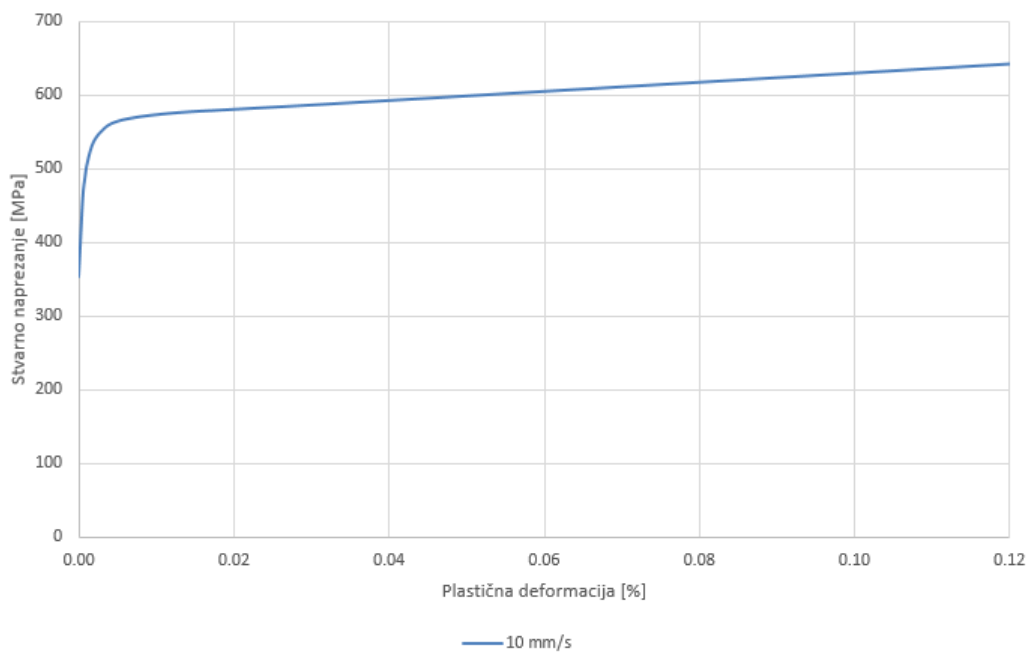
(ovdje koristimo c_v jer je plastično tečenje u pravilu izohorno). Daljnjim sređivanjem

$$\beta = \frac{\rho c_v \dot{T}}{\sigma \dot{\varepsilon}^p} = \frac{\dot{Q}^p}{\dot{W}^p} = \frac{\rho c_v \Delta T}{\int_0^{\varepsilon^p} \sigma d\varepsilon^p} \quad (0,5 - 0,9). \quad (2.6)$$

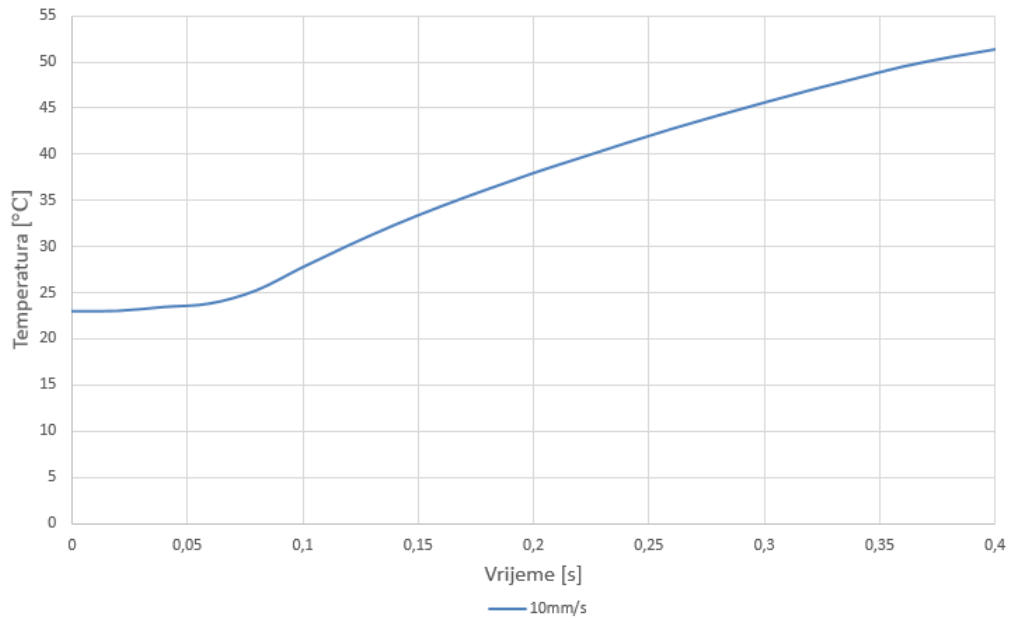
$\int_0^{\varepsilon^p} \sigma d\varepsilon^p$ predstavlja površinu ispod dijagrama stvarno naprezanje- plastična deformacija. Izračunat ćemo β za vlačni test kod bakrenih limova pri brzini deformiranja $10 \frac{\text{mm}}{\text{s}}$ i $50 \frac{\text{mm}}{\text{s}}$. Iz dijagrama stvarno naprezanje- stvarna deformacija dobivamo dijagram stvarno naprezanje- plastična deformacija iz kojega računamo rad plastične deformacija. Prirast temperature računamo iz dijagrama temperatura- vrijeme. Bakreni limovi imaju gustoću $\rho = 8900 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, te toplinski kapacitet $c_v = 380 \frac{\text{J}}{\text{kgK}}$.



Slika 2.1: Dijagram stvarno naprezanje- stvarna deformacija za brzinu deformiranja 10 mm/s

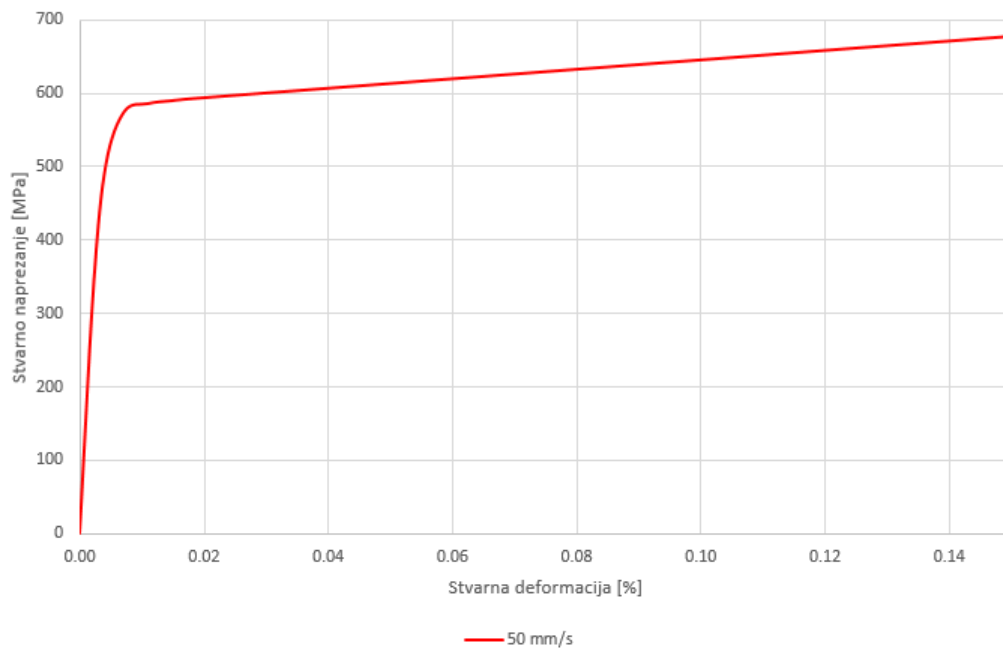


Slika 2.2: Dijagram stvarno naprezanje- plastične deformacija za brzinu deformiranja 10 mm/s

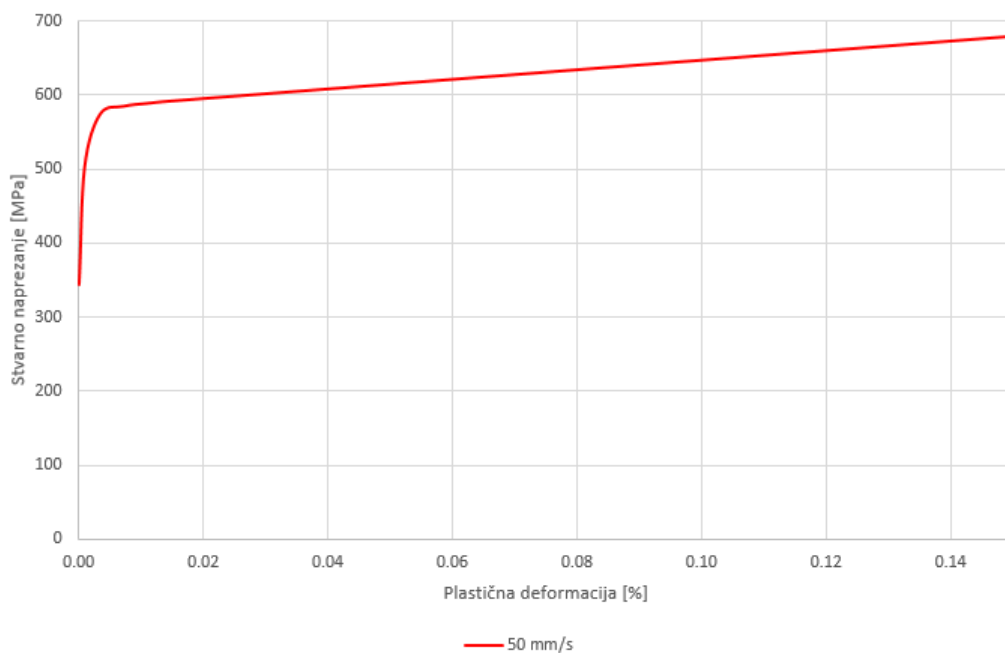


Slika 2.3: Dijagram temperatura- vrijeme za brzinu deformiranja 10 mm/s

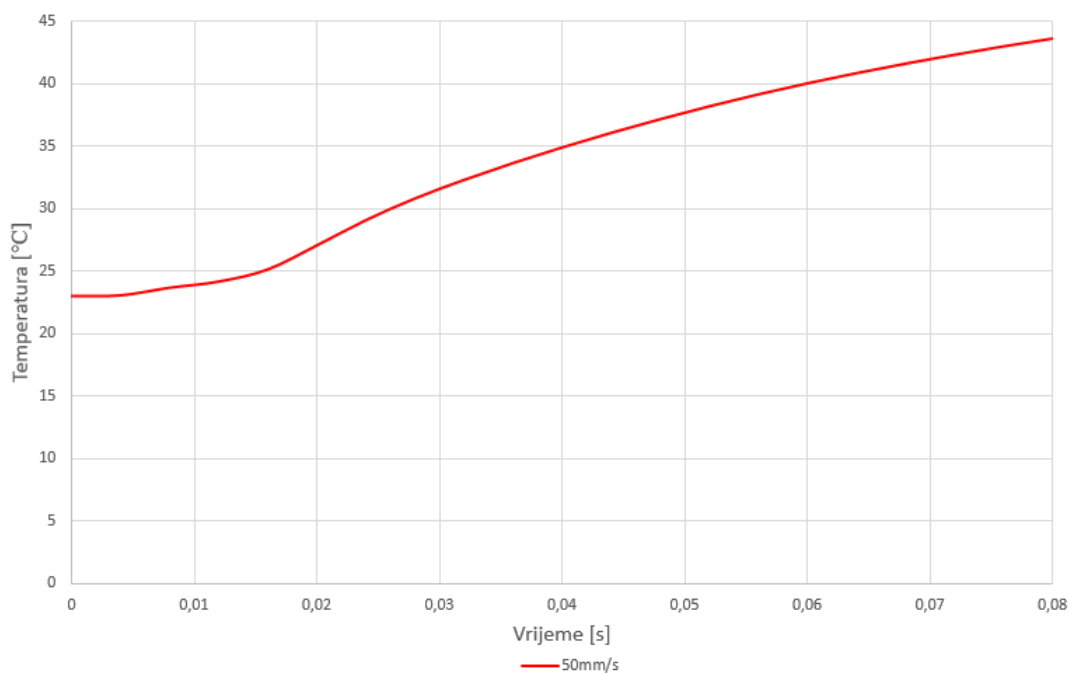
$$\beta_{10\text{mm/s}} = 0,89 \quad (2.7)$$



Slika 2.4: Dijagram stvarno naprezanje- stvarna deformacija za brzinu deformiranja 50 mm/s



Slika 2.5: Dijagram stvarno naprežanje- plastične deformacija za brzinu deformiranja 50 mm/s



Slika 2.6: Dijagram temperatura- vrijeme za brzinu deformiranja 50 mm/s

$$\beta_{50\text{mm/s}} = 0,89 \quad (2.8)$$

3 Mehanika anizotropnih elastoplastičnih materijala

3.1 Plastično deformiranje pri troosnom stanju napreznja [4]

Da bismo riješili elastoplastične probleme potrebno je poznavati:

- Kakvo stanje napreznja uvjetuje pojavu plastičnih deformacija, tj. treba odrediti **uvjet tečenja** (koji u jednoosnom napreznju predstavlja granica tečenja)?
- Kakva je veza između prirasta plastične deformacije i napreznja, tj. konstitutivne jednačbe (u elastičnom području im odgovara Hookeov zakon)?
- Kakvo se mijenja uvjet tečenja zbog očvršćenja materijala plastičnim deformiranjem?

Ukupna deformacija se može rastaviti na elastični ε^e i plastični dio ε^p

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p, \quad (3.1)$$

što također vrijedi i za brzinu deformacije

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^e + \dot{\varepsilon}_{ij}^p. \quad (3.2)$$

Ulogu koju pri jednoosnom napreznju ima granica tečenja pri troosnom stanju napreznja ima skalarna funkcija f , odnosno **funkcija tečenja** tj. **funkcija opterećenja**. Funkcija tečenja f ovisi o napreznju σ_{ij} , o plastičnoj deformaciji ε_{ij}^p , te o povjesti plastične deformacije koja se izražava parametrom κ , tj. **parametrom očvršćenja**.

U šestodimenzijском faznom prostoru, u kojem su koordinate osi šest komponenti napreznja, jednačba

$$f = f(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p, \kappa) = 0, \quad (3.3)$$

jest implicitna jednačba zatvorene hiperbole koja se naziva **ploha tečenja** tj. **ploha opterećenja**. Ako se točka, kojom je određeno stanje napreznja, nalazi unutar plohe tečenja, tj. ako je $f < 0$, materijal se nalazi u elastičnom stanju. Plastična deformacija može nastupiti samo ako je $f = 0$. Stanje $f > 0$ nema značenje i ne može u stvarnosti nastupiti.

Također je potrebno znati da li opterećujemo ($d\sigma_{ij} > 0$) ili rasterećujemo ($d\sigma_{ij} < 0$) materijal, što se može formulirati matematički

$$df = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{ij}^p} d\varepsilon_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \kappa} d\kappa. \quad (3.4)$$

Razlikujemo tri slučaja

1.) aktivno opterećenje

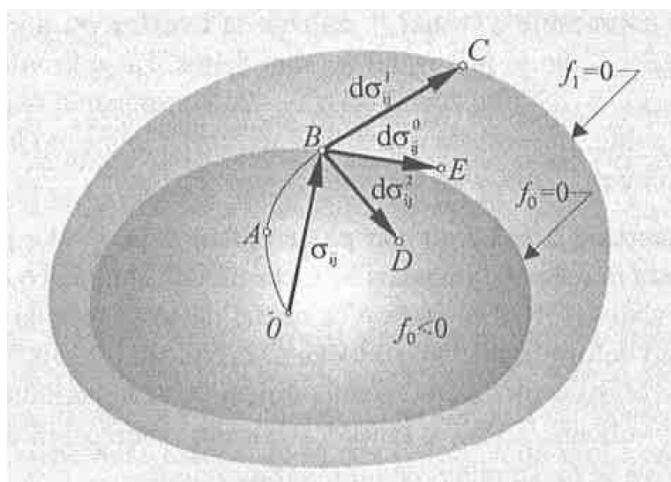
$$f = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} > 0, \quad (3.5)$$

2.) neutralno opterećenje

$$f = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} = 0, \quad (3.6)$$

3.) pasivno opterećenje

$$f = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} < 0. \quad (3.7)$$



Slika 3.1: Definicija aktivnog, pasivnog i neutralnog opterećenja [4]

3.1.1 Druckerov postulat

Druckerov postulat nam pomaže opisati očvršćenje materijala pri troosnom stanju napreznja. Za njegovo razumjevanje potrebno je objasniti pojam stabilnog i nestabilnog materijala. Kod stabilnog materijala dopunsko napreznje izaziva dopunsku deformaciju

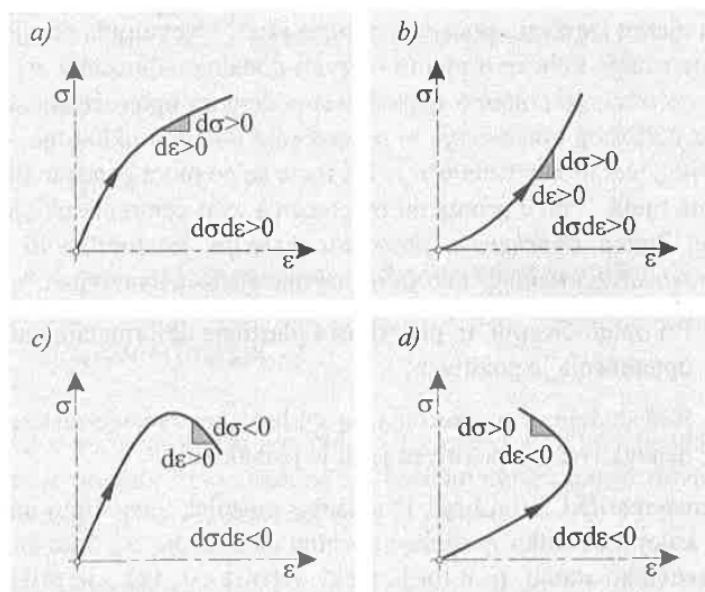
$$d\sigma d\epsilon > 0. \quad (3.8)$$

Kod nestabilnog materijala

$$d\sigma d\epsilon < 0. \quad (3.9)$$

Prema Druckerovu postolatu materijal je stabilan i plastično-očvršćujući ako su ispunjena slijedeća dva uvijeta:

1. Pri opterećivanju, tj. pri porastu plastične deformacije rad dodatnog opterećenja je pozitivan.



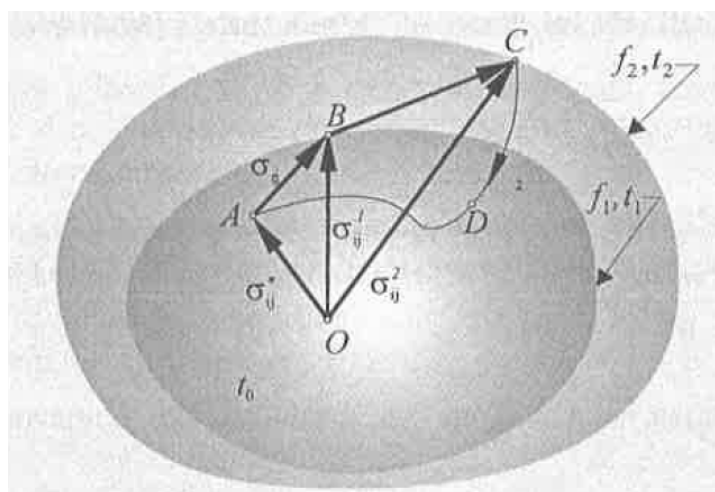
Slika 3.2: Četri vrste dijagrama ovisnosti naprezanja o deformaciji: a) i b) stabilni materijali, c) nestabilan materijal, d) hipotetički nestabilan materijal [4]

- Rad dodatnog opterećenja na ciklusu opterećenje-rasterećenje jest nenegativan, tj. pozitivan je ili je jednak nuli.

Matematičkom formulacijom Druckerovog postulata dobijemo

$$\Delta W = (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*)d\varepsilon_{ij}^p \leq 0, \quad (3.10)$$

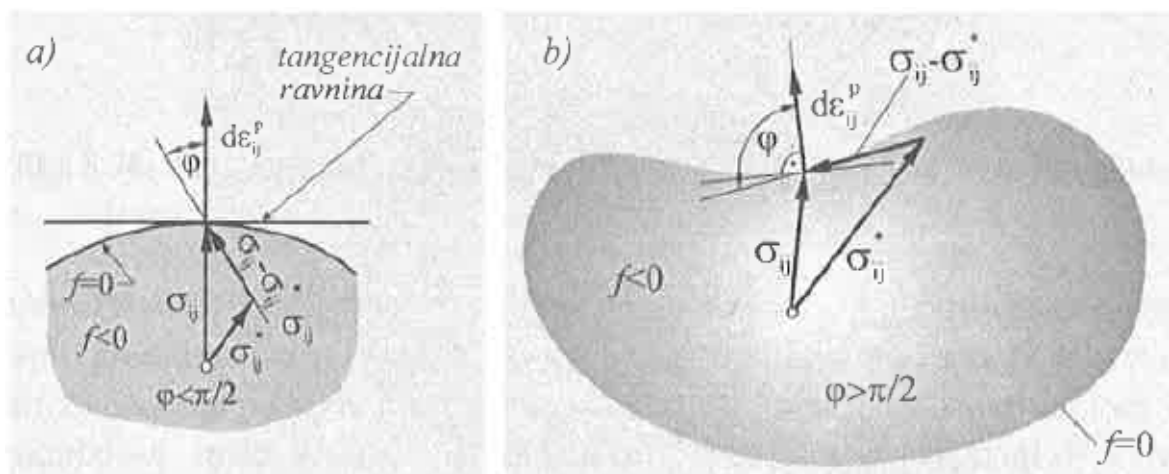
gdje je σ_{ij} puno naprezanje, σ_{ij}^* dodatno naprezanje i ΔW rad dodatnog opterećenja. Na



Slika 3.3: Objašnjenje Druckerova postulata [4]

temelju Druckerovog postulata mogu se izvesti tri teorema: o konveksnosti plohe tečenja, o gradijentalnosti prirasta plastične deformacije i o maksimumu rada plastičnog deformiranja.

Teorem o konveksnosti plohe tečenja Krivulja (ploha) tečenja ne smije ni na jednom dijelu biti udubljena (konkavna). Ona na svim dijelovima mora biti ispupčena (konveksna) ili mora biti ravna crta.



Slika 3.4: Konveksnost plohe tečenja: a) konveksna ploha tečenja, b) konkavna ploha tečenja je u suprotnosti s Druckerovim postulatom [2]

Teorija o maksimumu rada plastičnog deformiranja Pri proizvoljnom prirastu plastične deformacije $d\varepsilon_{ij}^p$, rad plastičnog deformiranja stvarnih napreznja σ_{ij} veći je od rada bilo kojeg drugog napreznja σ_{ij}^* na istom prirastu plastične deformacije ako to proizvoljno napreznje zadovoljava uvjet $f(\sigma_{ij}^*) < 0$.

$$\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p > \sigma_{ij}^* d\varepsilon_{ij}^p \quad (3.11)$$

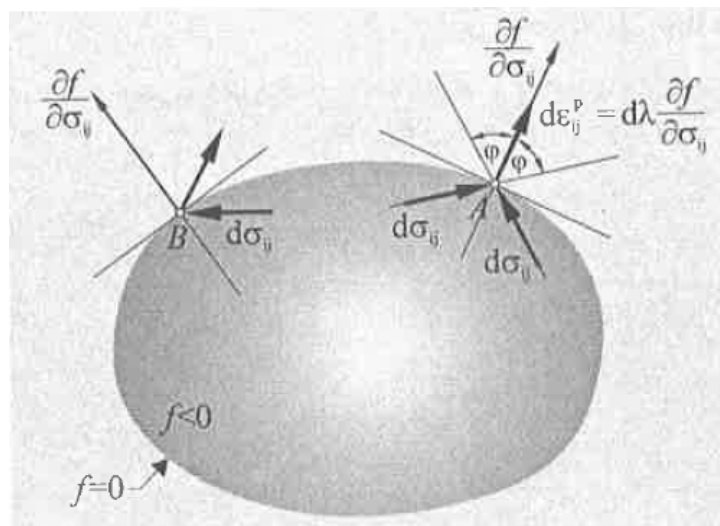
Teorem o gradijentnosti deformacije U regularnoj točki prirast plastične deformacije $d\varepsilon_{ij}^p$ je okomit na krivulju tečenja, a u singularnoj točki prirast leži u kutu (stošcu) koji određuju normale na glatke plohe koje se sastaju u toj točki. Nužan uvjet da rad plastičnog deformiranja $\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p$ ima vezan ekstrem jest

$$\frac{\partial}{\partial \sigma_{ij}} [\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p - \lambda f(\sigma_{ij})] = 0, \quad (3.12)$$

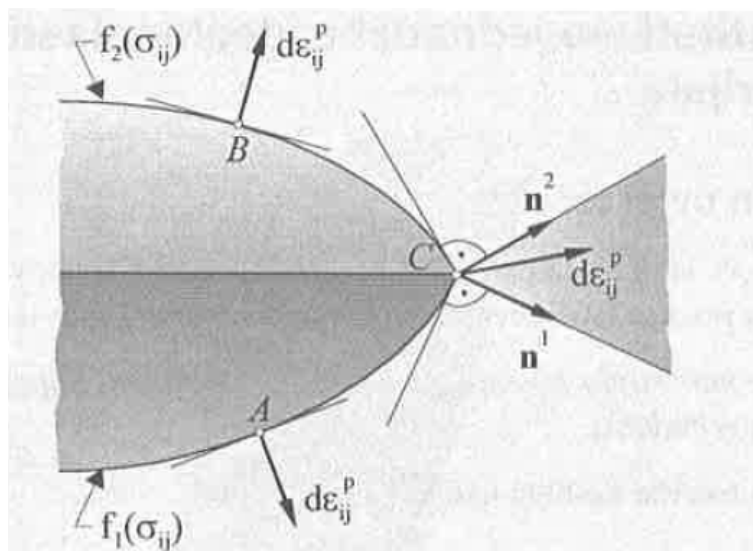
gdje je λ Langrangeov multiplikator.

U hiperprostoru može se u jednoj singularnoj točki sastati m hiperploha. Tada uvjet vezanog ekstrema daje

$$d\varepsilon_{ij}^p = \sum_{k=1}^m \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial \sigma_{ij}}. \quad (3.13)$$



Slika 3.5: Gradijentnost prirasta plastične deformacije: a) u regularnoj točki prirast je okomit na krivulju tečenja, b) u singularnoj točki prirast leži u kutu (stošcu) koji određuju normale na glatke plohe koje se sastaju u toj točki [4]



Slika 3.6: Vektor prirasta plastične deformacije u singularnoj točki C leži unutar trokuta koji određuju normale \mathbf{n}^1 i \mathbf{n}^2 na krivulje $f_1 = 0$ i $f_2 = 0$ [4]

3.1.2 Plastični potencijal i asocirani zakon tečenja

Plastični potencijal je sklarna funkcija komponenta napreznaja σ_{ij} , tj.

$$g = g(\sigma_{ij}), \quad (3.14)$$

koja ima svojstvo da je

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}}. \quad (3.15)$$

Plastični potencijal je hiperbola u prostoru napreznaja. Najjednostavniji slučaj plastičnog

potencijale je kad se on poklapa s funkcijom tečenja, u tom slučaju imamo

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}. \quad (3.16)$$

Gornji izraz se naziva asocirani (pridruženi) zakon tečenja jer je zakon tečenja pridružen uvjetu tečenja. Ako je $f(\sigma_{ij}) \neq g(\sigma_{ij})$, onda se naziva neasocirani zakon tečenja. Primjena neasociranog zakona tečenja zahtjeva preispitivanje osnovnih postulata klasične teorije plastičnosti na temelju kojih je izvedena pretpostavka o asociranom zakonu tečenja.

3.2 Tenzor elastičnosti

Poopćeni Hookeov zakon

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad (3.17)$$

vrijedi za opće anizotropne materijale. On izražava činjenicu da svaka komponenta naprežanja σ_{ij} ovisi o svakoj komponenti deformacije ε_{km} i obratno. Tenzor četvrtog reda C_{ijkl} je tenzor elastičnosti i ima 81 komponentu. Zbog uvjeta simetričnosti tenzora naprežanja i deformacije broj komponenti se smanjuje na 36. Daljnim dokazom simetričnosti samog tenzora elastičnosti broj komponenti se smanji na 21 neovisnu konstantu elastičnosti.

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}, \quad \varepsilon_{km} = \varepsilon_{mk} \quad (3.18)$$

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} = C_{jilk} = C_{ijkm} = C_{kmi} \quad (3.19)$$

Inverzni oblik Hookeova zakona glasi

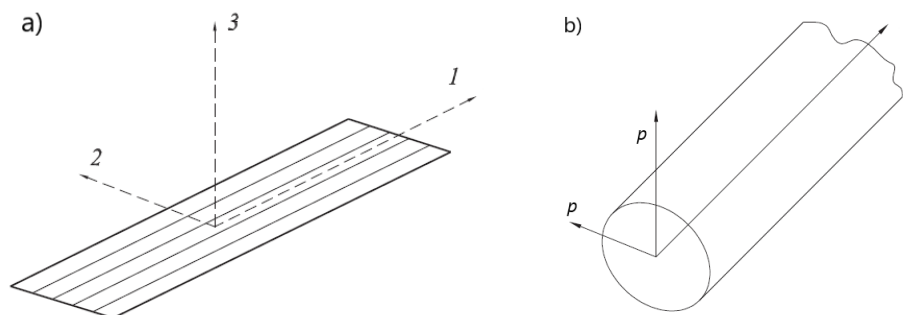
$$\varepsilon_{ij} = S_{ijkl} \sigma_{kl}, \quad (3.20)$$

gdje je S_{ijkl} tenzor podatljivosti, također tenzor četvrtog reda za kojeg vrijede jednaki uvjeti simetrije kao i za tenzor elastičnosti C_{ijkl} .

Ortotropan materijal Posebna vrsta anizotropnih materijala koji imaju tri međusobno okomite ravnine elastične simetrije nazivaju se ortotropni materijali. Za neki materijal kažemo da ima ravninu elastične simetrije ako se pri refleksiji (zrcaljenju) koordinatnog sustava na toj ravnini ne mijenjaju komponente tenzora elastičnosti C_{ijkl} , odnosno tenzora podatljivosti S_{ijkl} . Ti materijali imaju devet međusobno neovisnih konstanti elastičnosti. Kada se radi o ravnoj ploči u kojoj vlada ravninsko stanje naprežanja, u tom slučaju imamo samo četiri neovisne konstante elastičnosti.

Transverzalno izotropan materijal Transverzalno izotropni materijal predstavlja poseban slučaj ortotropnog materijala, te je opisan s pet međusobno neovisnih konstanti

elastičnosti.



Slika 3.7: a) Ortotropan, b) transverzalno izotropan materijal

Izotropni linearno elastični materijali U Hookeovu zakonu koji vrijedi za izotropne materijale pojavljuju se samo dvije konstante elastičnosti: λ i μ koje se nazivaju Laméove konstante elastičnosti.

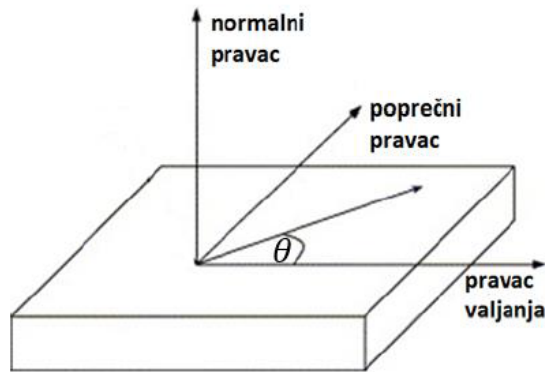
$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (3.21)$$

U tehničkoj literaturi rabe se četiri konstante elastičnosti: modul elastičnosti E , Poissonov faktor ν , modul smičnosti G i prostorni modul elastičnosti K . Prve dvije konstante E i ν određuju se u vlačnom testu, treća G u smičnom testu i četvrta K u testu hidrostatičkog tlačenja. Dvije od spomenute četiri konstante mogu se odabrati kao neovisne, a preostale dvije izraziti pomoću njih.

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} = \mu, \quad K = \frac{E}{3(1 - 2\nu)} \quad (3.22)$$

3.3 Lankfordov parametar [5]

Oblikovanje odnosno plastično deformiranje polikristalnih materijala u hladnom stanju rezultira usmjerenim izduživanjem zrna u pravcu intenzivnog tečenja što uzrokuje pojavu orijentirane (usmjerene) strukture koja se naziva tekstura. Tekstura se u materijalu razvija za vrijeme procesa obrade a najizraženija je u postupku hladnog valjanja limova te kod istiskivanja i provlačenja. Ovisna je o kemijskom sastavu kao i o mehaničkim te toplinskim postupcima a osim postupkom deformacije, tekstura može nastati i kao posljedica rekristalizacije nastale tijekom ili nakon procesa valjanja. Kod limova s naglašenom teksturom, kao posljedica javlja se orijentacijska ovisnost mehaničkih svojstava materijala koja se naziva anizotropija. Kod limova anizotropija je ortotropna s osima simetrije postupka valjanja kako je prikazano na slici



Slika 3.8: Osi ortotropije lima

Anizotropija plastičnih svojstava, kao što su naprezanje tečenja σ_y te mjera plastičnog toka, je izražena kod limova. S druge strane anizotropija elastičnih svojstava može se zanemariti tako da se elastično ponašanje limova može smatrati izotropnim. Plastična svojstva materijala u pokusu jednoosnog rastezanja materijala ovisna su o kutu θ koji os uzorka lima zatvara s referentnim pravcem (najčešće pravac valjanja). Mjera anizotropije plastičnog toka predstavljena je Lankfordovim parametrom r_θ , poznatim još i kao parametar plastične anizotropije. Lankfordovim parametrom opisuje se otpor materijala stanjivanju ili lokalizaciji deformacije koja prethodi lomu kod rastezanja uzoraka lima. Definira se kao omjer logaritamske mjere stvarne plastične deformacije na pravcu širine ε_{22}^p i debljine uzorka ε_{33}^p u jednoosnom testu rastezanja prema izrazu

$$r_\theta = \frac{\varepsilon_{22}^p}{\varepsilon_{33}^p} \Big|_\theta = \frac{\ln\left(\frac{b}{b_0}\right)}{\ln\left(\frac{t}{t_0}\right)} \Big|_\theta, \quad (3.23)$$

gdje su b i b_0 odnosno t i t_0 konačna i početna širina odnosno debljina uzorka. Zbog poteškoća pri mjerenju debljine uzorka i na temelju uvjeta plastične nestlačivosti $\varepsilon_{11}^p + \varepsilon_{22}^p + \varepsilon_{33}^p = 0$, izraz se prevodi u

$$r_\theta = \frac{\varepsilon_{22}^p}{-(\varepsilon_{22}^p + \varepsilon_{11}^p)} \Big|_\theta = \frac{\ln\left(\frac{b}{b_0}\right)}{-\left(\ln\left(\frac{b}{b_0}\right) + \ln\left(\frac{l}{l_0}\right)\right)} \Big|_\theta, \quad (3.24)$$

gdje su l i l_0 konačna i početna mjerna duljina uzorka a ε_{11}^p logaritamska mjera stvarne plastične deformacije na pravcu duljine uzorka. Uobičajeno je da se ispitivanje anizotropije lima provodi rastezanjem uzoraka gdje se pri produljenju od 15% mjeri postignuta duljina i širina uzorka. Kako se anizotropna plastična svojstva razlikuju za različite smjerove, može se dobiti orijentacijska ovisnost naprezanja tečenja i Lankfordova parametra u odnosu na pravac valjanja. Nadalje, ako su vrijednosti Lankfordova parametra za uzorke svih orijen-

tacija približno jednake ali ipak različite od jedan, stanje se naziva tzv. stanje normalne anizotropije. Pritom se parametar normalne anizotropije \bar{r} računa pomoću izraza

$$\bar{r} = \frac{r_0 + 2r_{45} + r_{90}}{4}, \quad (3.25)$$

gdje r_0 , r_{45} i r_{90} predstavljaju vrijednosti Lankfordova parametra za uzorke lima rezane pod kutovima 0° , 45° i 90° u odnosu na pravac valjanja. Ukoliko se promjena vrijednosti Lankfordova parametra ne može zanemariti, radi se o stanju tzv. ravninske anizotropije pri čemu se promjena Lankfordova parametra često opisuje parametrom ravninske anizotropije Δr definiranom prema izrazu

$$\Delta r = \frac{r_0 - 2r_{45} + r_{90}}{2}. \quad (3.26)$$

Za anizotropne materijale vrijedi $\bar{r} \leq 0$ i $\Delta r \leq 0$. Ukoliko se radi o izotropnom materijalu, vrijednosti deformacije na pravcu širine i pravcu debljine su jednake, stoga za sve vrijednosti kuta θ prema izrazu vrijedi $r_\theta = \bar{r} = 1$ tj. $\Delta r = 0$.

Lankfordov parametar se računa kao konstanta ili kao inkrementalna veličina. Prijedlog je da se za određeni inkrement uzdužne plastične deformacije vrši linearna regresija na uskom području između dvije granice pri čemu se iz nagiba pravca računa inkrementalna vrijednost Lankfordova parametra. Ovakav pristup uzima u obzir promjenu Lankfordova parametra s napredovanjem plastične deformacije. Ako se linearna regresija vrši na cijelom području deformacije, iz nagiba pravca dobije se konstantna vrijednost Lankfordova parametra za cijelo područje.

3.4 Anizotropne funkcije tečenja [5]

Hill-1948.

Jedan od prvih fenomenoloških anizotropnih uvjeta tečenja prikladan za limove te ujedno i jedan od najčešće korištenih zbog svoje jednostavnosti je kvadratičan Hill (1948) uvjet tečenja nastao je poopćenjem Huber-Mises-Henckey uvjeta tečenja. Hill (1948) uvjet tečenja može se zapisati u obliku

$$\sigma_y^2 = F(\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + G(\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + H(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 2L\sigma_{yz}^2 + 2M\sigma_{xz}^2 + 2N\sigma_{xy}^2, \quad (3.27)$$

gdje su F , G , H , L , M i N parametri anizotropije, σ_y za rezarentni pravac dok x , y i z označavaju pravce materijalne simetrije. Za ravninsko stanje naprezanja izraz se prevodi u

$$\sigma_y^2 = (G + H)\sigma_{xx}^2 + (H + F)\sigma_{yy}^2 - 2H\sigma_{xx}\sigma_{yy} + 2N\sigma_{xy}^2. \quad (3.28)$$

Parametri funkcije tečenja F , G , H i N mogu se odrediti na temelju skupa vrijednosti $(\sigma_0, \sigma_{45}, \sigma_{90}, \sigma_b)$, gdje su σ_0 , σ_{45} , σ_{90} vrijednosti naprezanja tečenja za uzorke orijentacije 0° , 45°

i 90° u odnosu na pravac valjanja dok je σ_b vrijednost ujednačanog dvoosnog naprezanja tečenja ($\sigma_b = \sigma_{xx} = \sigma_{yy}$, $\sigma_{xy} = 0$). Također, parametri se mogu odrediti i na temelju vrijednosti Lankfordova parametra za orijentacije 0° , 45° i 90° u odnosu na pravac valjanja te vrijednosti naprezanja tečenja za pravac valjanja (σ_0 , r_0 , r_{45} , r_{90}). Zbog jednostavnosti, Hill(1948) uvjet tečenja za ravninsko stanje naprezanja često se koristi u obliku

$$\sigma_y = \sqrt{\lambda_1 \sigma_{xx}^2 + \lambda_2 \sigma_{yy}^2 - 2\nu \sigma_{xx} \sigma_{yy} + 2\rho \sigma_{xy}^2} \quad (3.29)$$

gdje su λ_1 , λ_2 , ν i ρ parametri koji opisuju anizotropno ponašanje materijala te vrijedi

$$\lambda_1 = G + H, \quad \lambda_2 = H + F, \quad \nu = H, \quad \rho = N. \quad (3.30)$$

U konstitutivnom modelu temeljenom na nepridruženom pravilu tečenja, anizotropna Hill (1948) funkcija kalibrirana na temelju naprezanja tečenja može se koristiti kao funkcija tečenja a Hill (1948) funkcija kalibrirana na temelju Lankfordova parametra kao plastični potencijal.

Hill (1948) funkcija jedna je od rijetko dostupnih anizotropnih funkcija tečenja u komercijalnim programima za analizu konačnim elementima.

Hill-1979.

Hill (1979) predlaže nekvadratični uvjet tečenja uz pretpostavku da se pravci glavnih naprezanja podudaraju s osima materijalne simetrije

$$\sigma_y^m = F|\sigma_{yy} - \sigma_{zz}|^m + G|\sigma_{zz} - \sigma_{xx}|^m + H|\sigma_{xx} - \sigma_{yy}|^m + A|2\sigma_{xx} - \sigma_{yy} - \sigma_{zz}|^m + B|2\sigma_{yy} - \sigma_{xx} - \sigma_{zz}|^m + C|2\sigma_{zz} - \sigma_{yy} - \sigma_{xx}|^m, \quad (3.31)$$

gdje su F , G , H , A , B i C parametri anizotropije a m necjelobrojni eksponent. Eksponent m može se odrediti iz nelinearne veze kada se pretpostavi dvoosno stanje naprezanja ($\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_b$, $\sigma_{zz} = 0$) tako da se izraz pretvori u

$$\left(\frac{\sigma_b}{\sigma_0}\right)^m = \frac{1}{2}(1 + \bar{r}) \left(1 + \frac{(2^{m-1} - 2)(A - C)}{A + C2^{m-1} + F}\right). \quad (3.32)$$

Hill (1979) uvjet tečenja ne uključuje posmična naprezanja a zbog necjelobrojnog eksponenta m , zahtjeva numerički postupak.

Hill-1990.

Hill izvodi poopćenje svog uvjeta iz 1979. godine koji za ravninsko stanje naprezanja glasi

$$(2\sigma_b)^m = |\sigma_{xx} + \sigma_{yy}|^m + \left(\frac{\sigma_b}{\tau_y}\right)^m |(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\sigma_{xy}^2|^{\frac{m}{2}} + |\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 + 2\sigma_{xy}^2|^{\frac{m}{2}-1} (B(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 - 2A(\sigma_{xx}^2 - \sigma_{yy}^2)) \quad (3.33)$$

pri čemu je σ_b ujednačeno dvoosno naprezanje tečenja, a τ_y naprezanje tečenja u testu čistog smicanja. Parametar m računa se prema izrazu

$$\left(\frac{2\sigma_b}{\sigma_{45}}\right)^m = 2(1 + r_{45}) \quad (3.34)$$

dok se parametri A i B računaju na temelju vrijednosti naprezanja tečenja ($\sigma_0, \sigma_{45}, \sigma_{90}, \sigma_b$) ili Lankfordova parametra (r_0, r_{45}, r_{90}).

Uz zadržavanje prednosti koje je imao i Hill (1979) uvjet tečenja, Hill (1990) uvjet uključuje posmična naprezanja.

Hill-1993.

Hill proširuje uvjet tečenja iz 1979. godine u obliku

$$\left(\frac{\sigma_{xx}}{\sigma_0}\right)^2 - C \frac{\sigma_{xx}\sigma_{yy}}{\sigma_0\sigma_{90}} + \left(\frac{\sigma_{yy}}{\sigma_{90}}\right)^2 + \left((P + Q) - \frac{P\sigma_{xx} + Q\sigma_{yy}}{\sigma_b}\right) \frac{\sigma_{xx}\sigma_{yy}}{\sigma_0\sigma_{90}} = 1 \quad (3.35)$$

gdje su C , P i Q materijalni parametri određeni izrazima

$$C = \sigma_0\sigma_{90} \left(\frac{1}{\sigma_0^2} + \frac{1}{\sigma_{90}^2} - \frac{1}{\sigma_b^2}\right), \quad (3.36)$$

$$P = \left(\frac{2r_0(\sigma_b - \sigma_{90})}{(1 + r_{90})\sigma_{90}^2} - \frac{2r_{90}\sigma_b}{(1 + r_{90})\sigma_{90}^2} + \frac{C}{\sigma_0}\right) \frac{1}{\frac{1}{\sigma_0} + \frac{1}{\sigma_{90}} - \frac{1}{\sigma_b}}, \quad (3.37)$$

$$Q = \left(\frac{2r_{90}(\sigma_b - \sigma_{90})}{(1 + r_{90})\sigma_{90}^2} - \frac{2r_0\sigma_b}{(1 + r_0)\sigma_0^2} + \frac{C}{\sigma_{90}}\right) \frac{1}{\frac{1}{\sigma_0} + \frac{1}{\sigma_{90}} - \frac{1}{\sigma_b}}. \quad (3.38)$$

Uvjet je razvijen za ravninsko stanje naprezanja a kalibracija parametara vrši se na temelju pet podataka $r_0, r_{90}, \sigma_0, \sigma_{90}$ i σ_b koji se mogu dobiti iz jednoosnog testa rastezanja kao i ujednačenog dvoosnog testa razvlačenja. Unatoč tome što može opisati nepravilna ponašanja materijala, Hill (1993) uvjet tečenja ne uključuje posmična naprezanja te ne može opisati ravninsku anizotropiju.

3.5 Modeliranje anizotropije u programskom paketu Abaqus[6]

U programskom paketu Abaqus/CAE ovisno o broju ravnina elastične simetrije možemo definirati izotropan, ortotropan, transversalno izotropan i anizotropan materijal. Linearno elastičan materijal mora zadovoljiti uvjete stabilnosti ili Druckerove stabilnosti. Stabilnost zahtjeva da tenzor elastičnosti bude pozitivno definitan, iz čega slijede određena ograničenja vrijednosti konstanti elastičnosti.

3.5.1 Definiranje izotropne elastičnosti

Najjednostavniji oblik linearne elastičnosti imamo kod izotropnog materijala. Elastična svojstva su potpuno opisana zadavanjem Youngova modula elastičnosti E i Poissonov faktor ν , iz kojih se može izračunati smični modul G . Također je moguće zadati da su konstante ovisne o temperaturi i/ili drugim definiranim poljima.

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{11} \\ \gamma_{22} \\ \gamma_{33} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{pmatrix} \quad (3.39)$$

Uvjet stabilnosti zahtjeva da je $E > 0$ i $-1 < \nu < 0,5$.

3.5.2 Definiranje ortotropne elastičnosti određivanjem inženjerskih konstanti

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{11} \\ \gamma_{22} \\ \gamma_{33} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{pmatrix} \quad (3.40)$$

Linearna elastičnost kod ortotropnog materijala se najčešće definira zadavanjem inženjerskih konstanti: tri modula elastičnosti E_1 , E_2 , E_3 , tri Poissonova koeficijenta ν_{12} , ν_{13} , ν_{23} , te tri smična modula G_{12} , G_{13} , G_{23} . Također je moguće zadati da su konstante ovisne o temperaturi i/ili drugim definiranim poljima.

Materijalna stabilnost zahtijeva:

$$E_1, E_2, E_3, G_{12}, G_{13}, G_{23} > 0, \quad (3.41)$$

$$|\nu_{12}| < \left(\frac{E_1}{E_2}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad (3.42)$$

$$|\nu_{13}| < \left(\frac{E_1}{E_3}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad (3.43)$$

$$|\nu_{23}| < \left(\frac{E_2}{E_3}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad (3.44)$$

$$1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{31}\nu_{13} - 2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13} > 0. \quad (3.45)$$

3.5.3 Definiranje transverzalno izotropne elastičnosti

Kod transverzalno izotropne elastičnosti $E_1 = E_2 = E_p$, $\nu_{31} = \nu_{32} = \nu_{tp}$, $\nu_{13} = \nu_{23} = \nu_{pt}$, $G_{12} = G_{13} = G_t$, te je $G_p = \frac{E_p}{2(1+\nu_p)}$.

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{11} \\ \gamma_{22} \\ \gamma_{33} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_p} & -\frac{\nu_p}{E_p} & -\frac{\nu_{tp}}{E_t} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_p}{E_p} & \frac{1}{E_p} & -\frac{\nu_{tp}}{E_t} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{pt}}{E_p} & -\frac{\nu_{pt}}{E_p} & \frac{1}{E_t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_p} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_t} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{pmatrix} \quad (3.46)$$

Materijalna stabilnost zahtijeva:

$$E_p, E_t, G_p, G_t > 0, \quad (3.47)$$

$$|\nu_p| < 1, \quad (3.48)$$

$$|\nu_{pt}| < \left(\frac{E_p}{E_t}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad (3.49)$$

$$|\nu_{tp}| < \left(\frac{E_t}{E_p}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad (3.50)$$

$$1 - \nu_p^2 - 2\nu_{tp}\nu_{pt} - 2\nu_p\nu_{tp}\nu_{pt} > 0. \quad (3.51)$$

3.5.4 Definiranje ortotropne elastičnosti kod ravninskog napreznja

Pri uvjetima ravninskog stanja napreznja, kao kod ljuskastih elemenata, možemo pojednostaviti optotropnu elastičnost.

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & 0 \\ -\frac{\nu_{21}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \quad (3.52)$$

3.5.5 Definiranje ortotropne elastičnosti određivanjem parametara elastične matrice krutosti

Ortotropna elastičnost se također može definirati zadavanjem parametara matrice krutosti na način

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{1111} & D_{1122} & D_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ & D_{2222} & D_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ & & D_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ & & & D_{1212} & 0 & 0 \\ & sim & & & D_{1313} & 0 \\ & & & & & D_{2323} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{11} \\ \gamma_{22} \\ \gamma_{33} \end{Bmatrix} = [D^{el}] \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{11} \\ \gamma_{22} \\ \gamma_{33} \end{Bmatrix}. \quad (3.53)$$

Parametri su definirani preko konstantni elastičnosti kao

$$D_{1111} = E_1(1 - \nu_{23}\nu_{32})\Upsilon, \quad (3.54)$$

$$D_{2222} = E_2(1 - \nu_{13}\nu_{31})\Upsilon, \quad (3.55)$$

$$D_{3333} = E_3(1 - \nu_{12}\nu_{21})\Upsilon, \quad (3.56)$$

$$D_{1122} = E_1(\nu_{21} + \nu_{31}\nu_{23})\Upsilon = E_2(\nu_{12} + \nu_{32}\nu_{13})\Upsilon, \quad (3.57)$$

$$D_{1133} = E_1(\nu_{31} + \nu_{21}\nu_{32})\Upsilon = E_3(\nu_{13} + \nu_{12}\nu_{23})\Upsilon, \quad (3.58)$$

$$D_{2233} = E_2(\nu_{32} + \nu_{12}\nu_{31})\Upsilon = E_3(\nu_{23} + \nu_{21}\nu_{13})\Upsilon, \quad (3.59)$$

$$D_{1212} = G_{12}, \quad (3.60)$$

$$D_{1313} = G_{13}, \quad (3.61)$$

$$D_{2323} = G_{23}, \quad (3.62)$$

gdje je

$$\Upsilon = \frac{1}{1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{31}\nu_{13} - 2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13}}. \quad (3.63)$$

Materijalna stabilnost zahtijeva:

$$D_{1111}, D_{2222}, D_{3333}, D_{1212}, D_{1313}, D_{2323} > 0, \quad (3.64)$$

$$|D_{1122}| < (D_{1111}D_{2222})^{\frac{1}{2}}, \quad (3.65)$$

$$|D_{1133}| < (D_{1111}D_{3333})^{\frac{1}{2}}, \quad (3.66)$$

$$|D_{2233}| < (D_{2222}D_{3333})^{\frac{1}{2}}, \quad (3.67)$$

$$\det(D^{el}) > 0, \quad (3.68)$$

$$D_{1111}D_{2222}D_{3333} + 2D_{1122}D_{1133}D_{2233} - D_{2222}D_{1133}^2 - D_{1111}D_{2233}^2 - D_{3333}D_{1122}^2 > 0. \quad (3.69)$$

Kod ovakvog načuna definiranja materijala Abaqus nameće uvjet da je $\sigma_{33} = 0$ za slučaj ravninskog napreznja da bi se reducirala matrica krutosti.

3.5.6 Definiranje potpuno anizotropne elastičnosti

Za slučaj potpune anizotropije potrebno je poznavati 21 konstantu elastičnosti.

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} D_{1111} & D_{1122} & D_{1133} & D_{1112} & D_{1113} & D_{1123} \\ & D_{2222} & D_{2233} & D_{2212} & D_{2213} & D_{2223} \\ & & D_{3333} & D_{3312} & D_{3313} & D_{3323} \\ & & & D_{1212} & D_{1213} & D_{1223} \\ & sim & & & D_{1313} & D_{1323} \\ & & & & & D_{2323} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{11} \\ \gamma_{22} \\ \gamma_{33} \end{pmatrix} = [D^{el}] \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{11} \\ \gamma_{22} \\ \gamma_{33} \end{pmatrix} \quad (3.70)$$

4 Numeričko modeliranje dinamičkog procesa deformiranja

Rješavanje većine fizikalnih problema svodi se na rješavanje diferencijalnih jednačbi čije je tačno analitičko rješenje moguće dobiti samo za jednostavnije proračunske modele. Stoga se koriste približne numeričke metode koje se temelje na diskretizaciji kontinuiranog sustava gdje se diferencijalne jednačbe zamjenjuju sustavom algebarskih jednačbi. Jedna od najčešće korištenih numeričkih metoda je metoda konačnih elemenata koja se temelji na fizičkoj diskretizaciji kontinuuma. Realna konstrukcija, koja ima beskonačno stupnjeva slobode, zamjenjuje se s diskretiziranim modelom koji se sastoji od konačnih elemenata i ima konačni broj stupnjeva slobode. Za pravilno postavljanje numeričkog modela nužno je dobro poznavanje teorije konačnih elemenata i fizike sustava. U ovom radu numeričko modeliranje dinamičkog procesa deformiranja je provedeno u računalnom paketu Abaqus/CAE 6.13 koji se temelji na metodi konačnih elemenata.

4.1 Numeričko modeliranje dinamike deformabilnih tijela

Za rješavanje problema čvrstoće može se koristiti linearna i nelinearna analiza. Linearna analiza čvrstoće se koristi kada se javljaju mali pomaci, a ravnoteža se razmatra na nedeformiranom obliku. Također, opterećenje ne mijenja smjer, ponašanje materijala je linearno elastično, eventualne nehomogenosti i anizotropija u materijalu nisu funkcija opterećenja, linearna je veza između deformacije i pomaka. Jednačba sustava diskretiziranog linearnim konačnim elementima može se prikazati u obliku

$$\mathbf{KV} = \mathbf{R}, \quad (4.1)$$

gdje je \mathbf{K} matrica krutosti diskretiziranog sustava, \mathbf{V} vektor pomaka, \mathbf{R} vektor čvornih sila. Pronalaskom inverza matrice krutosti \mathbf{K}^{-1} dobiva se vektor pomaka \mathbf{V} iz kojeg se računaju naprezanja i deformacije. Ako koji uvjet linearne analize čvrstoće nije ispunjen, tada se radi o nelinearnom ponašanju. Razlikuje se geometrijska i materijalna nelinearnost. Kod geometrijske nelinearnosti ravnoteža sustava se postavlja na deformiranom obliku. Materijalna nelinearnost je uvjetovana neelastičnim ponašanjem materijala. Dinamički proces deformiranja je nelinearan problem metode konačnih elemenata koji uključuje velike pomake, velike deformacije i materijalnu nelinearnost. Za rješavanje se koristi inkrementalna formulacija jednačbi gibanja. Nelinearna formulacija se za statičku i dinamičku analizu izvodi na principima mehanike kontinuuma. Postoje dva različita pristupa u rješavanju inkrementalne nelinearne analize metode konačnih elemenata. Prvi pristup je Eulerov pristup kod kojeg su sve kinematičke veličine opisane u trenutnoj konfiguraciji. Ovakav pristup je pogodan za mehaniku fluida gdje se ne prati čestica fluida, već se razmatra lokalni utjecaj strujanja fluida

na konstrukciju. Kod nelinearne dinamičke analize je mnogo pogodniji Lagrangianov pristup kod kojeg su sve kinematičke veličine opisane u odnosu na početnu konfiguraciju. Ovakvim se pristupom kontinuum prati od početne nedeformirane konfiguracije, pa sve do krajnje deformirane konfiguracije mjereći pomake i naprezanja u svakom inkrementu vremena.

4.1.1 Implicitna integracija

Implicitna metoda za određivanje nepoznatih veličina u vremenu $t + \Delta t$ koristi poznate veličine iz vremena t i nepoznatih veličina u vremenu Δt . Zasniva se na zadovoljenju diferencijalnih jednadžbi s unaprijed zadanom točnošću. Rješava se iterativno, a jedna od najčešće korištenih implicitnih metoda je Newmark-ova metoda. Implicitna metoda je bezuvjetno stabilna te može koristiti veći vremenski inkrement u odnosu na eksplicitnu metodu. Odabir vremenskog koraka vezan je za željenu točnost rješenja. Rješava se iterativno, a može imati kvadratičnu konvergenciju za analize kod kojih se ne uzima u obzir kontakt i trenje klizanja. Ukoliko se javlja kontakt i trenje, konvergencija može biti jako loša odnosno ne mora se ni postići. Kod takvih analiza najčešće se koristi eksplicitna metoda. Računalni paket Abaqus/Standard kod implicitne metode koristi automatski postupak vremenske integracije koji se temelji na Newtonovoj iterativnoj metodi.

4.1.2 Eksplicitna integracija

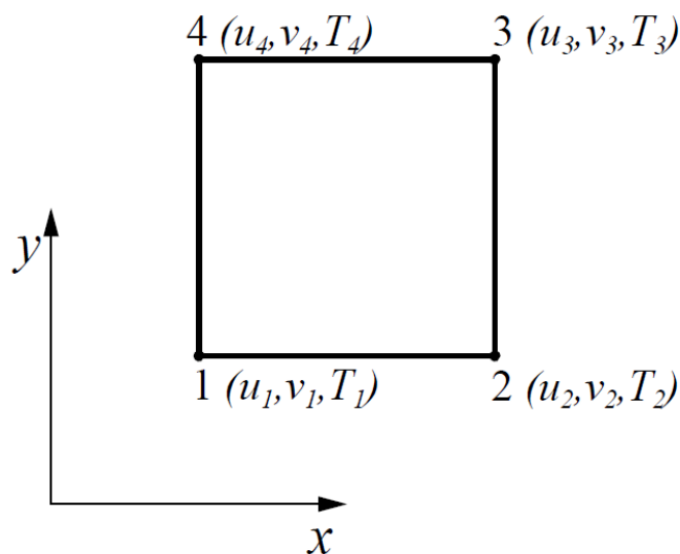
Eksplicitna metoda za određivanje nepoznatih veličina u trenutku $t + \Delta t$ koristi veličine i njihove derivacije u trenutku t . Aproksimacija vremenske derivacije pomaka koristi metodu središnjih razlika, gdje se čvorne brzine izračunavaju na pola koraka, a naprezanja, pomaci i ubrzanja na kraju koraka. Veličina koraka integracije mora biti dovoljno mala kako bi analiza bila stabilna. Stabilni vremenski korak definiran je u ovisnosti o najvišoj vlastitoj frekvenciji sustava jednadžbom

$$\Delta t_{stabilno} = \frac{2}{\omega_{max}}, \quad (4.2)$$

što znači da je potrebno provesti analizu vlastitih vrijednosti prije rješavanja dinamičkih problema eksplicitnom metodom. Gustoća mreže konačnih elemenata je vrlo važna jer manji konačni elementi uzrokuju manji stabilni vremenski korak. Eksplicitne metode su namijenjene za rješavanje dinamičkih problema kod kojih inercijske sile imaju značajnu ulogu, uz pojavu kontakta i trenja klizanja. Ukoliko je trajanje simulacije dugo, odnosno ako je problem kvazistatičan, primjena eksplicitne metode je neisplativa zbog malog vremenskog koraka i velikog broja iteracija. Abaqus/Explicit primjenjuje automatsko određivanje vremenskog inkrementa u tijeku analize tako da su svi inkrementi stabilni $\Delta t < \Delta t_{stabilno}$.

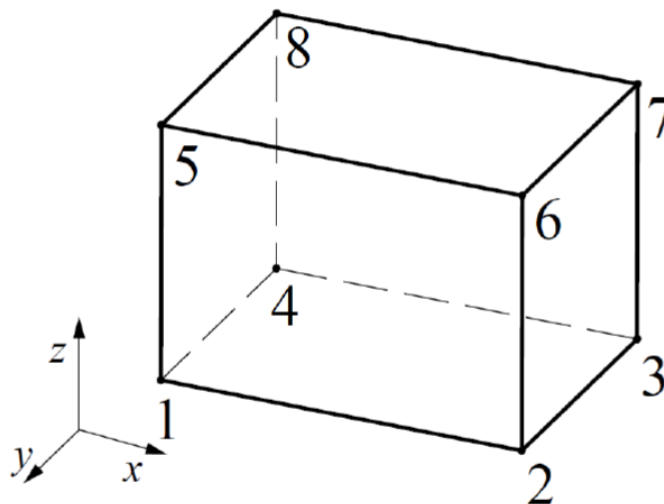
4.2 Konačni elementi za spregnutu toplinsko-mehaničku analizu [7]

Prethodno opisane jednačbe konačnih elemenata za toplinsku i mehaničku analizu vrijede za sve vrste elemenata. U okviru ovog rada korišteni su 2D i 3D konačni elementi za spregnutu toplinsko-mehaničku. 2D konačni elementi se koriste za diskretizaciju membrana opterećenih u srednjoj ravnini. Geometrija se opisuje referentnom površinom. Na slici je prikazan 2D konačni element prvog reda.



Slika 4.1: 2D konačni element prvog reda

2D konačni elementi, s obzirom na stanje naprezanja i deformacija, dijele se na elemente za ravninsko stanje naprezanja i ravninsko stanje deformacije. Elementi za ravninsko stanje deformacije i ravninsko stanje naprezanja imaju isti broj čvorova, iste čvorne veličine i pomaci su im opisani istim interpolacijskim funkcijama. Prema slici 4.1. može se vidjeti da 2D konačni element ima četiri čvora u vrhovima, a u svakom čvoru tri stupnja slobode. Stupnjevi slobode su pomaci i temperatura u čvorovima. Ima četiri točke integracije, a reduciranom integracijom se smanjuje na jednu točku integracije. Temperature i naprezanja se računaju u integracijskim točkama nakon čega se ekstrapoliraju u čvorove. U okviru ovog rada su korišteni 2D elementi za ravninsko stanje naprezanja i ravninsko stanje deformacije koji se mogu naći u Abaqusu pod nazivom CPS4RT i CPE4RT. Opisuju linearnu raspodjelu naprezanja, deformacija i temperatura. 3D konačni elementi su izvedeni za opisivanje 3D stanja naprezanja te su računalno najskuplji. S obzirom na geometriju elementa dijele se na tetraedarske i prizmatične konačne elemente. Kod spregnute toplinsko-mehaničke analize, prizmatični konačni elementi prvog reda imaju linearnu raspodjelu temperature, naprezanja i deformacija.



Slika 4.2: Prizmatični konačni element prvog reda

Prema slici može se vidjeti da prizmatični konačni element prvog reda ima osam čvorova u vrhovima, a u svakom čvoru četiri stupnja slobode: tri komponente pomaka i temperatura. Kao i kod 2D elemenata, za izbjegavanje pojave locking efekta poput shear lockinga i volumetric lockinga koristi se reducirana integracija. Kod reduciranje integracije se smanjuje broj točaka integracije s osam točaka na jednu točku integracije. Koristi se samo za računanje matrice krutosti, dok se za računanje matrice mase, provođenja i toplinskog kapaciteta koristi potpuna integracija. Uključivanjem reducirane integracije može se pojaviti problem hourglassinga jer se javljaju dodatne nulte vlastite vrijednosti matrice krutosti. Prepoznaje se po treperenju mreže konačnih elemenata, a rješava se hourglassing controlom. Kod pojave velikih plastičnih deformacija preporuča se korištenje konačnog elementa prvog reda s reduciranom integracijom uz hourglassing control. U ovom radu je korišten 3D konačni element koji se može naći u Abaqusu pod nazivom C3D8TR koji koristi reduciranu integraciju. [7]

5 Modeliranje kontakta [8]

Za numeričku analizu složene konstrukcije potrebno je definirati veze između pojedinih dijelova. Veze koje se definiraju u numeričkom modelu predstavljaju mehaničko međudjelovanje između konstrukcijskih komponenti. Dva dijela u numeričkom modelu mogu doći u kontakt i klizati jedan po drugom. Kontakt je izrazito nelinearno ponašanje sustava te uzrokuje nelinearne vremenski ovisne rubne uvjete.

Kinematska ograničenja služe za nametanje ograničenja na stupnjeve slobode. Opći oblik jednadžbe ograničenja

$$\mathbf{C}\mathbf{V} - \mathbf{Q} = \mathbf{0}, \quad (5.1)$$

gdje je \mathbf{C} matrica reda $m \times n$, m je broj jednadžbi ograničenja, a n je broj globalnih stupnjeva slobode vektora \mathbf{V} . \mathbf{Q} je vektor konstanti.

Metode za nametanje ograničenja na globalni sustav jednadžbi $\mathbf{K}\mathbf{V} = \mathbf{R}$ su:

1. Metoda Lagrangeovih multiplikatora (ograničenja se nameću egzaktno),
2. Penalty metoda (ograničenja se nameću aproksimativno).

Metoda Lagrangeovih multiplikatora

Kod ove metode se uvode Lagrangeovi multiplikatori kao dodatne varijable

$$\boldsymbol{\lambda} = [\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \lambda_3 \quad \dots \quad \lambda_n]. \quad (5.2)$$

Svaka jednažba s kinematskim ograničenjima zapisuje se u homogenom obliku i množi s pripadnim multiplikatorom λ_i

$$\boldsymbol{\lambda}^T(\mathbf{C}\mathbf{V} - \mathbf{Q}) = \mathbf{0}. \quad (5.3)$$

Računamo ukupnu potencijalnu energiju bez kinematskih ograničenja:

$$\pi = \frac{1}{2}\mathbf{V}^T\mathbf{K}\mathbf{V} - \mathbf{V}^T\mathbf{R}. \quad (5.4)$$

Potencijalnu energiju modificiramo dodajući kinematsko ograničenje:

$$\pi^* = \frac{1}{2}\mathbf{V}^T\mathbf{K}\mathbf{V} - \mathbf{V}^T\mathbf{R} + \boldsymbol{\lambda}^T(\mathbf{C}\mathbf{V} - \mathbf{Q}). \quad (5.5)$$

Sustav je u ravnoteži kada je prva varijacija ukupne potencijalne energije jednaka nuli:

$$\delta\pi^* = \delta\mathbf{V}^T\mathbf{K}\mathbf{V} - \delta\mathbf{V}^T\mathbf{R} + \delta\mathbf{V}^T\mathbf{C}^T\boldsymbol{\lambda} + \delta\boldsymbol{\lambda}^T(\mathbf{C}\mathbf{V} - \mathbf{Q}) = 0, \quad (5.6)$$

iz čega slijedi:

$$\mathbf{K}\mathbf{V} + \mathbf{C}^T\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{R}, \quad (5.7)$$

$$\mathbf{CV} - \mathbf{Q} = \mathbf{0}, \quad (5.8)$$

što se u matricnoj formi zapisuje

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{C}^T \\ \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} \\ \mathbf{Q} \end{bmatrix}. \quad (5.9)$$

Nedostaci metode su dodatni utrošak vremena za rješavanje jednažbi i potencijalni problemi povezani s konvergencijom.

Penalty metoda

Jednažba $\mathbf{CV} - \mathbf{Q} = \mathbf{0}$ se modificira u oblik

$$\mathbf{CV} - \mathbf{Q} = \mathbf{t}, \quad (5.10)$$

tako da $\mathbf{t} = \mathbf{0}$ podrazumjeva zadovoljavanje kinematskog ograničenja. Modificirana ukupna potencijalna energija s kinematskim ograničenjima glasi:

$$\pi^* = \frac{1}{2} \mathbf{V}^T \mathbf{K} \mathbf{V} - \mathbf{V}^T \mathbf{R} + \frac{1}{2} \mathbf{t}^T \boldsymbol{\alpha} \mathbf{t}, \quad (5.11)$$

gdje je

$$\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \dots \quad \alpha_n], \quad (5.12)$$

matrica penalty brojeva.

Sustav je u ravnoteži kada je prva varijacija ukupne potencijalne energije jednaka nuli:

$$\delta \pi^* = \delta \mathbf{V}^T \mathbf{K} \mathbf{V} - \delta \mathbf{V}^T \mathbf{R} + \delta \mathbf{V}^T \mathbf{C}^T \boldsymbol{\alpha} (\mathbf{CV} - \mathbf{Q}) = 0, \quad (5.13)$$

iz čega slijedi

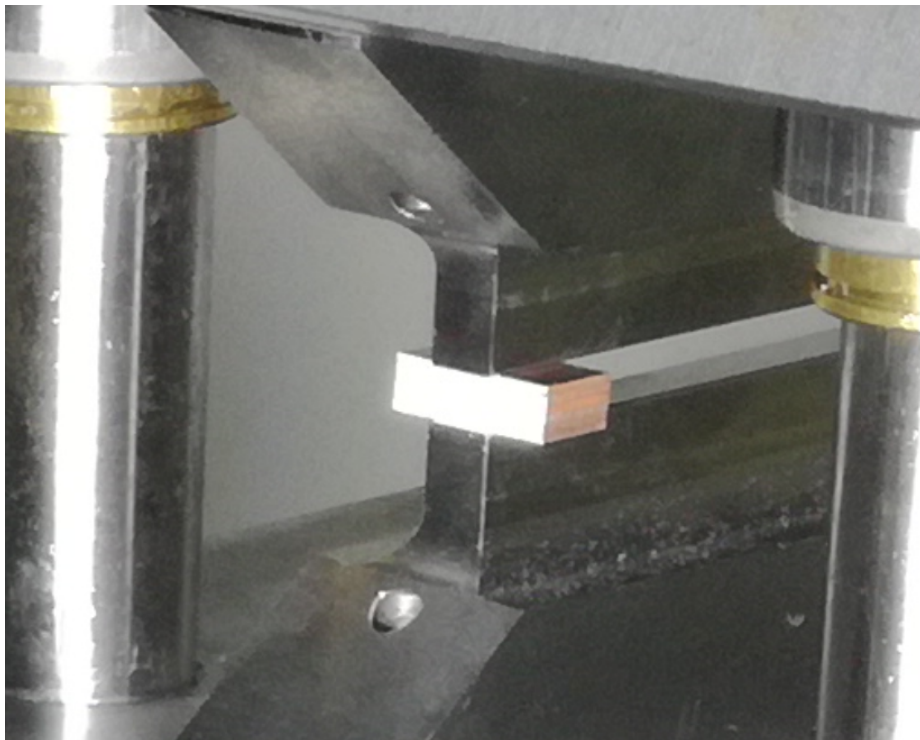
$$[\mathbf{K} + \mathbf{C}^T \boldsymbol{\alpha} \mathbf{C}] \mathbf{V} = \mathbf{R} + \mathbf{C}^T \boldsymbol{\alpha} \mathbf{Q}, \quad (5.14)$$

gdje je $\mathbf{C}^T \boldsymbol{\alpha} \mathbf{C}$ penalty matrica. Kako α postaje veći, kinematska ograničenja su bolje ispunjena. Preveliki iznosi penalty brojeva mogu uzrokovati slabu uvjetovanost sustava, što vodi nerealnim rezultatima. Za razliku od metode Lagrangeovih multiplikatora ima dobru brzinu konvergencije i bolje performanse rješavača jednažbi. Nedostaci su joj mali iznos prodiranja i prilagođavanje penalty krutosti.

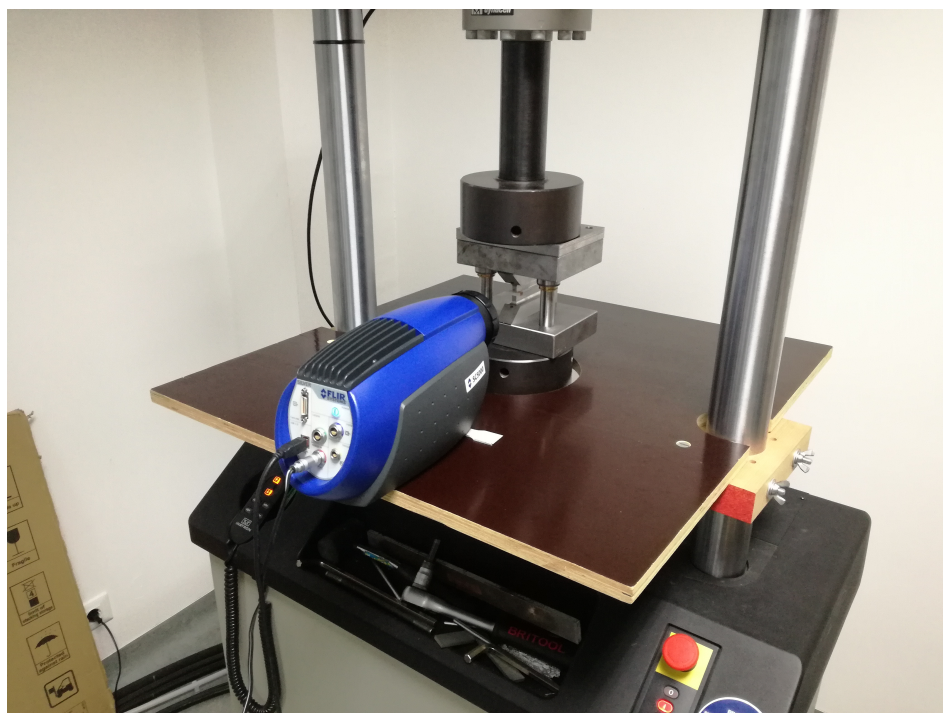
6 Eksperimentalni model dinamičkog procesa deformiranja taknih bakrenih limova

Rezultate dobivene u programskom paketu Abaqus/CAE, rješene numeričkom metodom konačnih elemenata, validirat ćemo eksperimentalnim rezultatima. Eksperimentalni model se sastoji od šest bakrenih limova dimenzija 17,5x7,5x0,8mm koji se tlače na servohidrauličkoj kidalici. Primjenom klasičnih metoda mjerenja deformacije između dvije točke na epruveti za vrijeme vlačnog testa materijala, kao što su mjerenja mehaničkim ili optičkim ekstenzometrima, dobivaju se pouzdani rezultati za modul elastičnosti i pripadnu deformaciju. No, za realnije opisivanje ponašanja materijala, ukupna deformacija između razmatrane dvije točke nije dovoljna. Kako bi što točnije opisali konstitutivni model materijala potrebno je poznavati lokalne vrijednosti deformacije na mjernom području epruvete uslijed vlačnog opterećenja. U ovom radu za određivanje lokalnih deformacija korišten je optički sustav Aramis 4M, koji snima pomake točaka na plohi mjernog uzorka te izračunava deformacije. Na taj način, upotrebom optičkog mjernog sustava i metode digitalne korelacije slike (DIC) moguće je odrediti lokalne vrijednosti deformacije uslijed stvaranja vrata i pred sam lom epruvete. Osim toga, korištena je i druga optička metoda mjerenja primjenom infracrvene (IR) termografije, gdje termalna kamera mjeri promjene temperature na površini materijala. Isto kao i DIC metoda, IR metoda je također beskontaktna. [1] Navedena eksperimentalna istraživanja provedena su na Fakultetu elektrotehnike, strojarstva i brodogradnje (FESB) Sveučilišta u Splitu, na Zavodu za strojarstvo i brodogradnju, u suradnji s prof. dr. sc. Lovrom Krstulović-Oparom.

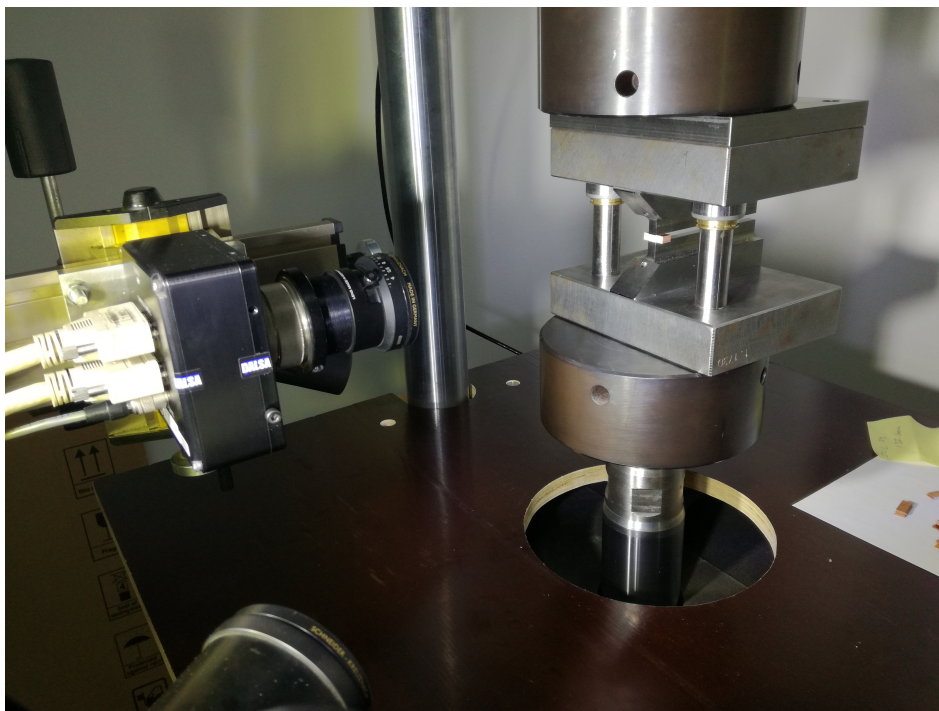
Bakreni limovi se tlače preko čeličnih prizmatičnih blokova između čeljusti kidalice. Gornji čelični blok je pomičan, dok je donji nepomičan.



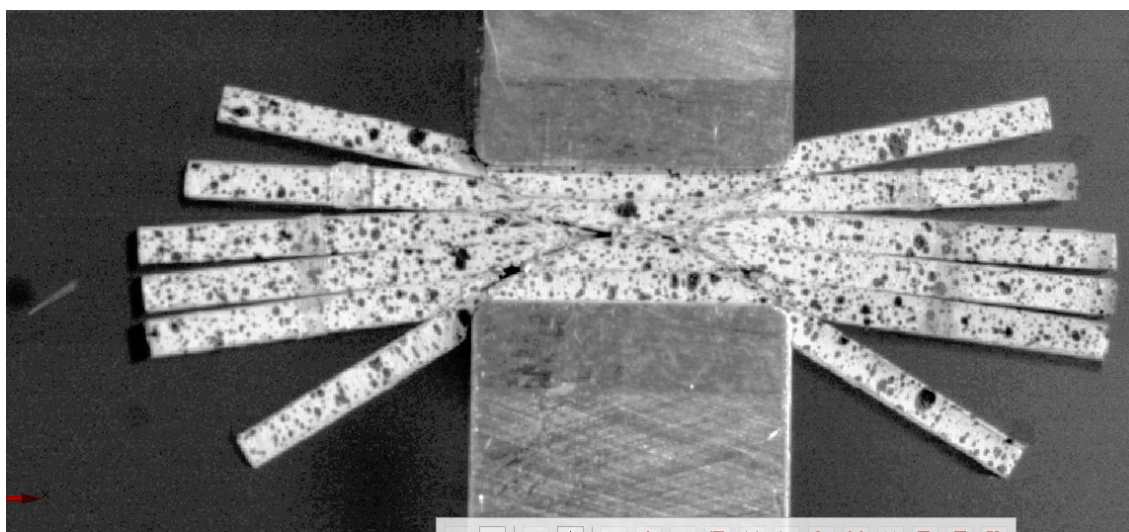
Slika 6.1: Eksperimentalni model[9]



Slika 6.2: Mjerenje temperature infracrvenom termografskom kamerom[9]



Slika 6.3: Mjerenje pomaka optičkim mjernim sustavom ARAMIS 4M[9]

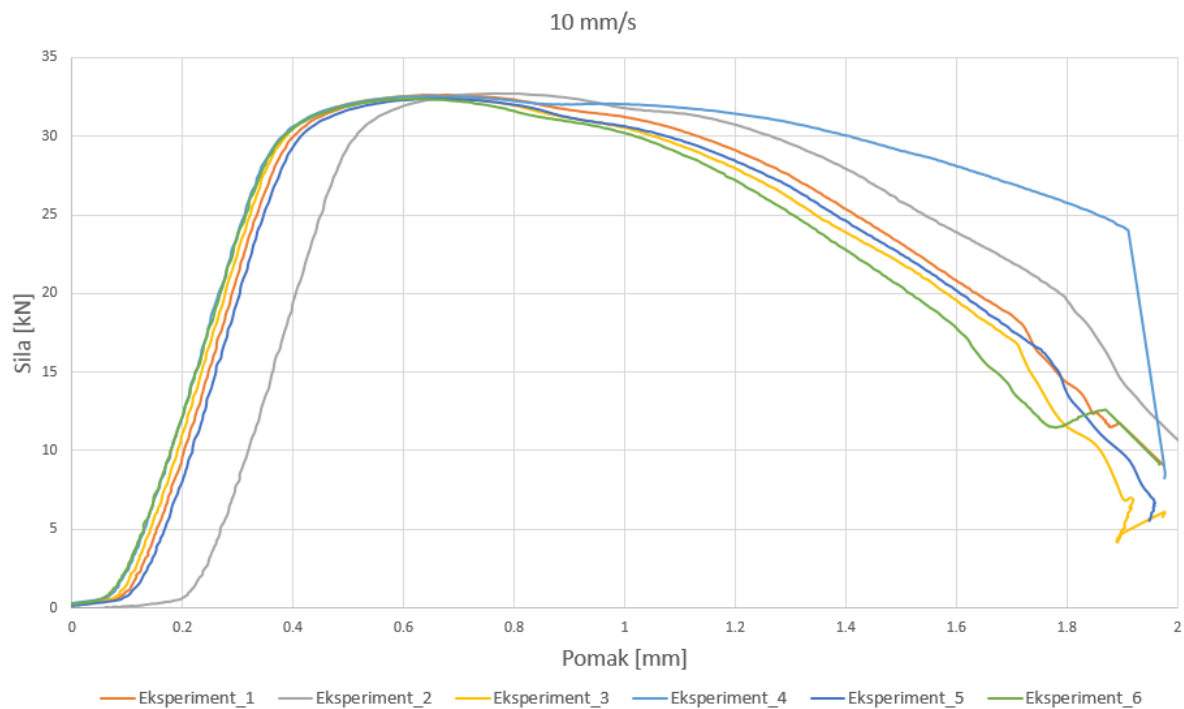


Slika 6.4: Bakreni limovi nakon deformiranja[9]

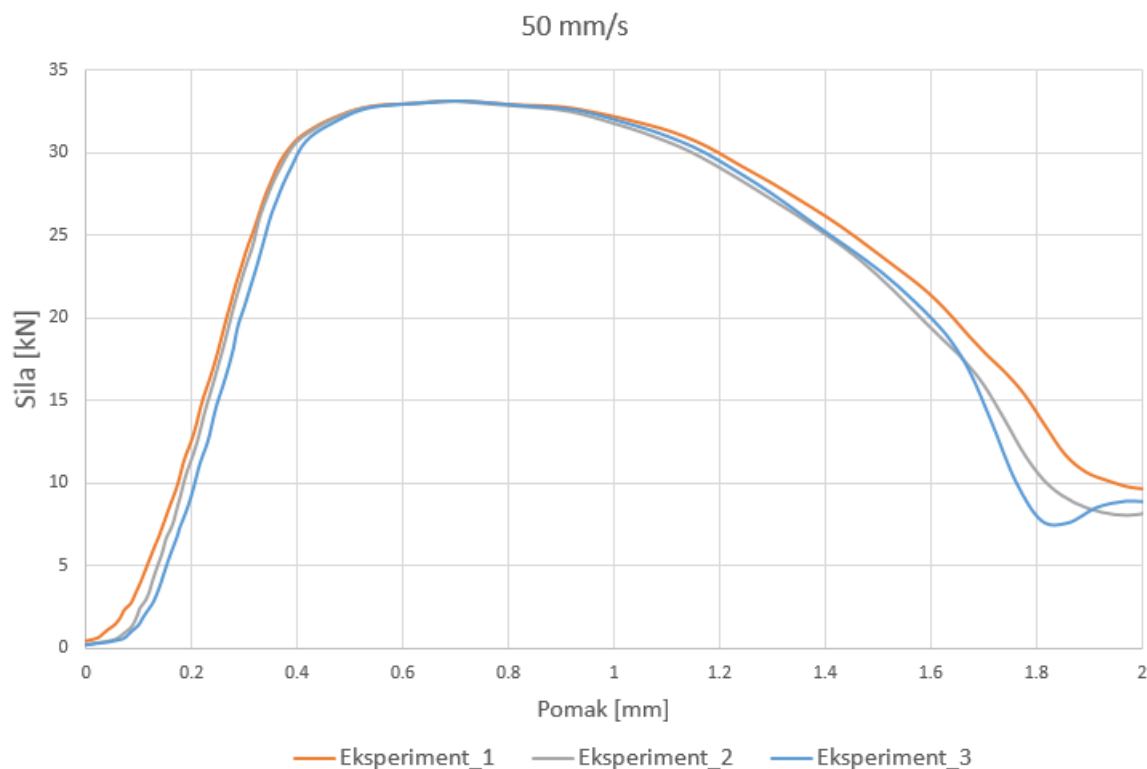
Deformiranje bakrenih limova provedeno je pri dvije različite brzine deformiranja od 10 mm/s i 50 mm/s. Vertikalni pomak čeličnog prizmatičnog bloka iznosi 2 mm.

Pri brzini deformiranja od 10 mm/s provedeno je 6 eksperimenata. Rezultati ovisnosti opterećenja o pomaku prikazani su na slici 6.5.

Pri brzini deformiranja od 50 mm/s provedena su 3 eksperimenata. Rezultati ovisnosti opterećenja o pomaku prikazani su na slici 6.6.



Slika 6.5: Dijagrami sila- pomak za brzinu deformiranja 10 mm/s



Slika 6.6: Dijagrami sila- pomak za brzinu deformiranja 50 mm/s

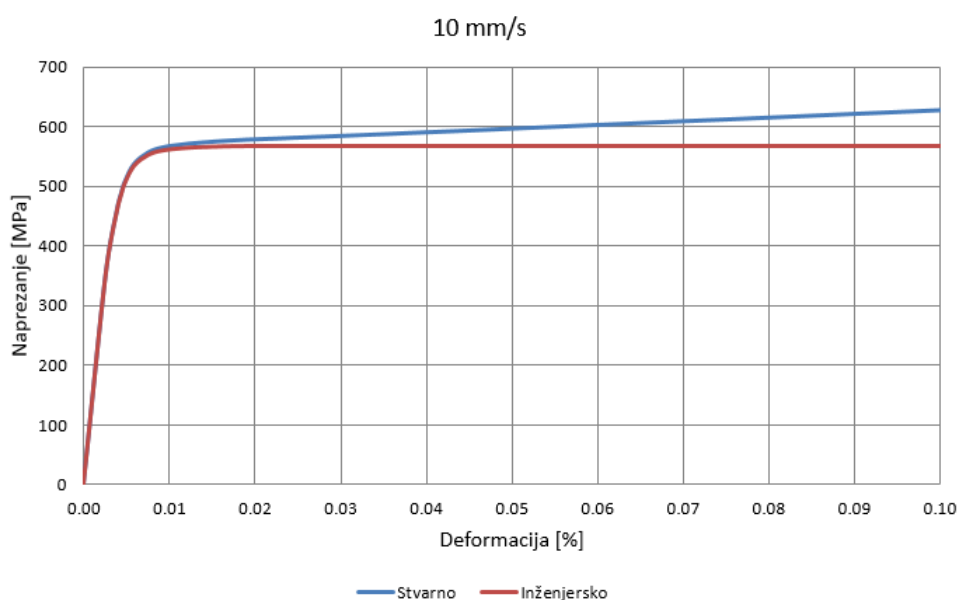
7 Numerički model dinamičkog procesa deformiranja taknih bakrenih limova

Materijal bakrenih limova je legura tvorničke oznake CuFe2P, u čijem se kemijskom sastavu osim bakra nalaze i željezo (2,1-2,6 %), cink (0,05-0,2 %), magnezij (max. 0,1%) i uključine (max. 0,2%). Limovi su proizvedeni tehnologijom valjanja. Za korišteni materijal gustoća je $\rho = 8900 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, koeficijent toplinskog rastezanja $\alpha = 16,3 \cdot 10^{-6} \text{K}^{-1}$, konduktivnost (toplinska provodljivost) $k = 262 \frac{\text{W}}{\text{mK}}$, specifični toplinski kapacitet $380 \frac{\text{J}}{\text{kgK}}$, te Poissonov koeficijent $\nu = 0,33$. Youngov modul elastičnosti iznosi 136 GPa.. Početna temperatura ploča iznosi $T_0 = 23^\circ\text{C}$.

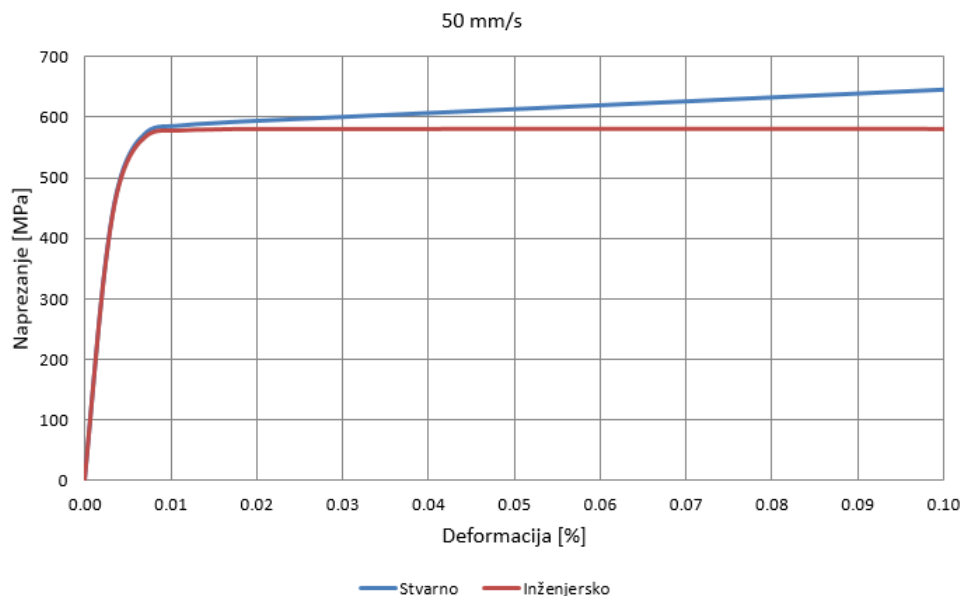
Za brzine deformiranja od 10 mm/s i 50 mm/s, vlačnim testom standardne epruvete izrađene od korištene bakrene legure, dobiveni su konvencijalni (inženjerski) dijagrami naprezanje deformacija. Konvencijalni dijagram razvlačenja se može koristiti za male deformacije, ali kod pojave velikih deformacija ne opisuje dovoljno dobro mehanička svojstva zbog smanjenja poprečnog presjeka epruvete. Stvarno naprezanje koje se javlja u epruveti opisuje stvarni dijagram razvlačenja koji se računa iz konvencijalnog dijagrama razvlačenja jednadžbama:

$$\sigma_T = \sigma(1 + \varepsilon), \quad (7.1)$$

$$\varepsilon_T = \ln(1 + \varepsilon). \quad (7.2)$$



Slika 7.1: Dijagram naprezanje-deformacija za brzinu deformiranja 10mm/s



Slika 7.2: Dijagram naprezanje-deformacija za brzinu deformiranja 50mm/s

Na slikama 7.1 i 7.2 su prikazani dijagrami naprezanje- deformacija za brzine deformiranja 10 mm/s i 50 mm/s.

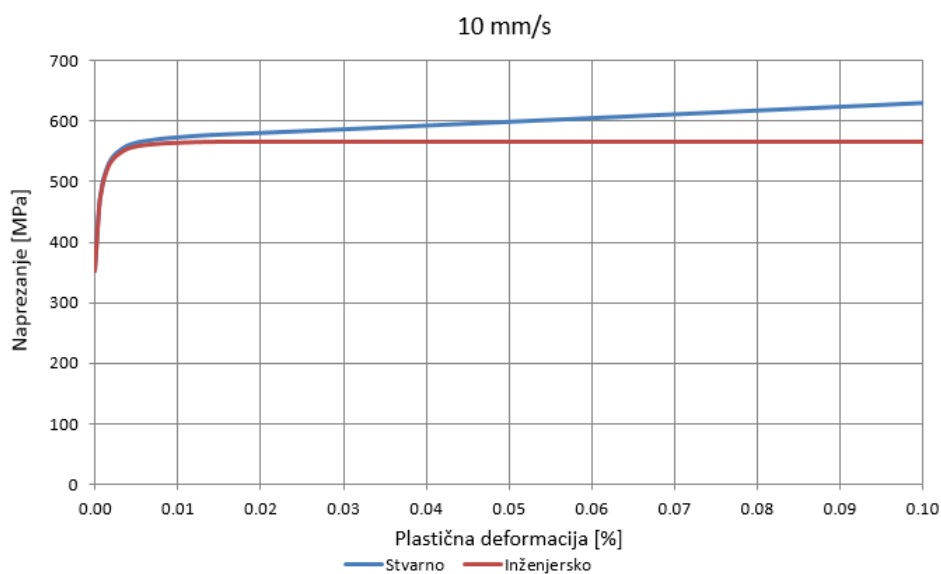
Iz dijagrama naprezanje- deformacija se dobiva dijagram naprezanje- plastična deformacija prema jednadžbi

$$\varepsilon_{pl} = \varepsilon_{uk} - \varepsilon_{el}, \quad (7.3)$$

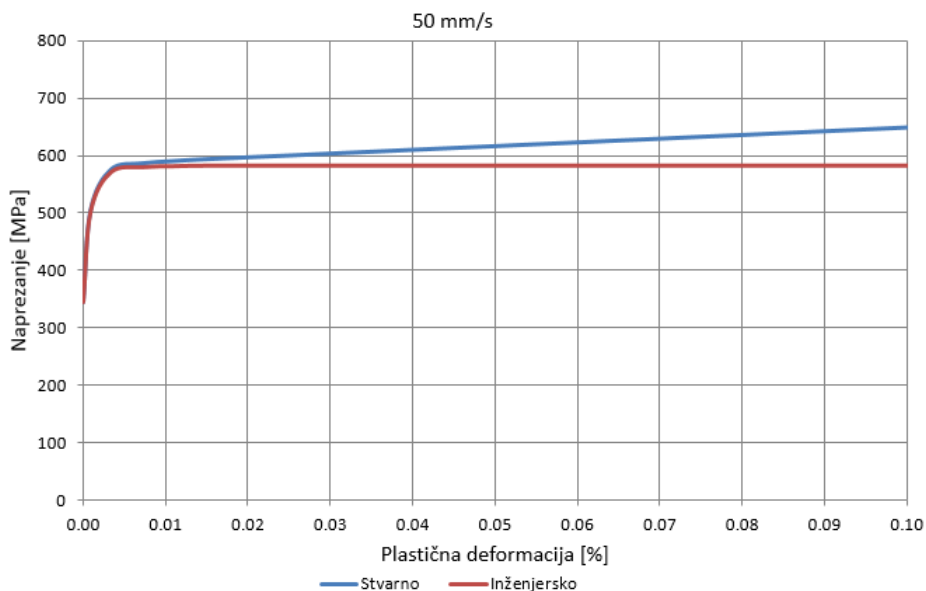
gdje je

$$\varepsilon_{el} = \frac{\sigma}{E}. \quad (7.4)$$

Na slikama 7.3 i 7.4 prikazani su dijagrami naprezanje-plastična deformacija za brzine deformiranja 10 mm/s i 50 mm/s. Kod definiranja materijala u programskom paketu Abaqus koristimo podatke iz dijagrama stvarno naprezanje- plastična deformacija.



Slika 7.3: Dijagram naprezanje-plastična deformacija za brzinu fedormiranja 10mm/s



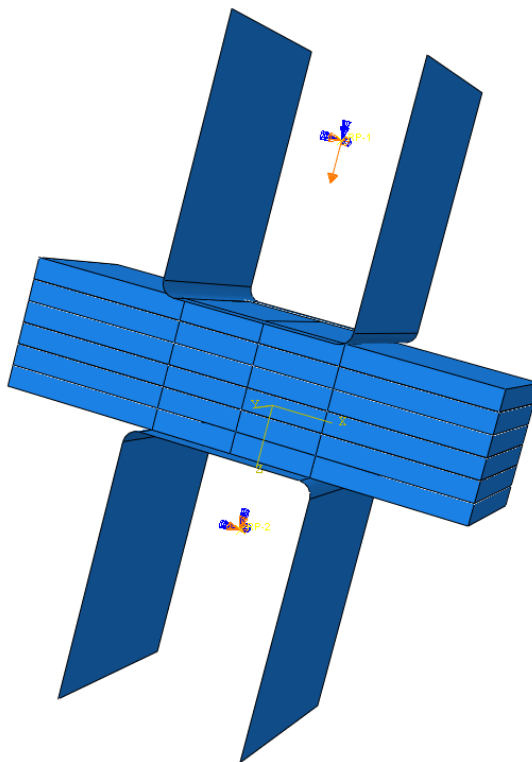
Slika 7.4: Dijagram naprezanje-plastična deformacija za brzinu deformiranja 50mm/s

7.1 3D numerički model

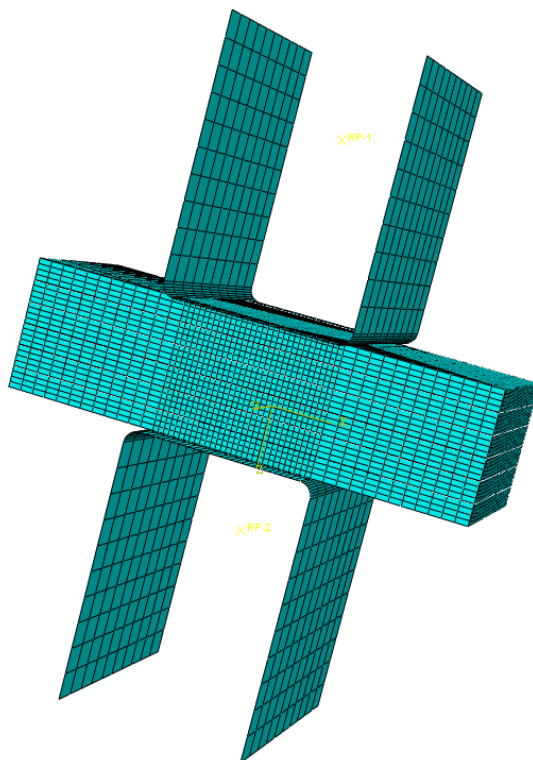
Čelični prizmatični blok kojim kidalica deformira bakrene limove mnogo je krući od bakrenih limova te se zbog pojednostavljenja modela i kraćeg računalnog vremena modelira kao kruto tijelo, te diskretizira krutim konačnim elementima R3D4. Bakreni limovi su modelirani kao deformabilno izotropno tijelo s izotropnim plastičnim očvšćenjem, te su diskretizirani tro-dimenzijskim konačnim elementima C3D8RT. Za simulaciju deformiranja bakrenih limova korištena je potpuno spregnuta dinamičko-toplinska analiza u Abaqus/Explicit. Faktor trenja između alata i bakrenih limova, te bakrenih limova međusobno iznosi 0,15. Sva energija trenja prelazi u toplinsku energiju. Zbog kratkog vremena deformiranja nije definirano hlađenje između okoliša i bakrenih limova, već je definirana kondukcija između bakrenih limova koji su u međusobnom kontaktu. Kontakt je definiran surface-to-surface kontaktnim algoritmom koji za nametanje ograničenja koristi Penalty metodu. Definiranja je početna temperatura limova od 23°C. Brzine deformiranja iznose 10mm/s i 50mm/s, a pomak gornjeg pomičnog čeličnog prizmatičnog bloka iznosi 2 mm.

Gornji i donji blokovi alata su povezani s referentnim točkama preko koji su nametnuti rubni uvjeti. Donji blok je uklješten, tj. zabranjena su mu sva tri pomaka i zakreta, dok je gornjem bloku nametnut pomak od 2 mm.

Na slici 7.5 je prikazan numerički model s nametnutim rubnim uvjetima, a na slici 7.6 numerički model je diskretiziran s 49272 konačna elementa.



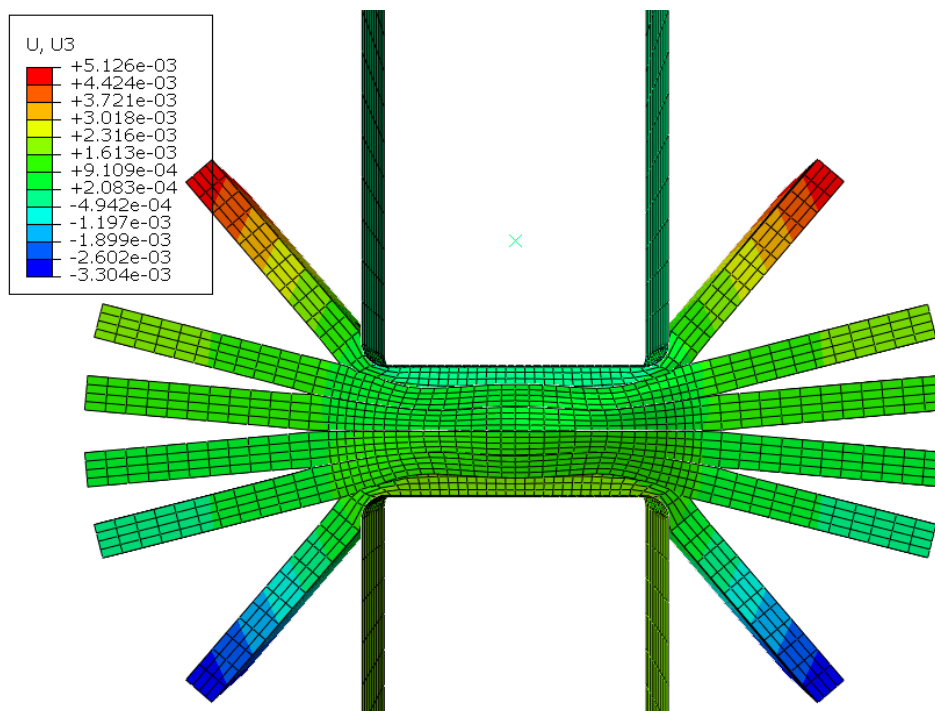
Slika 7.5: 3D numerički model s rubnim uvjetima



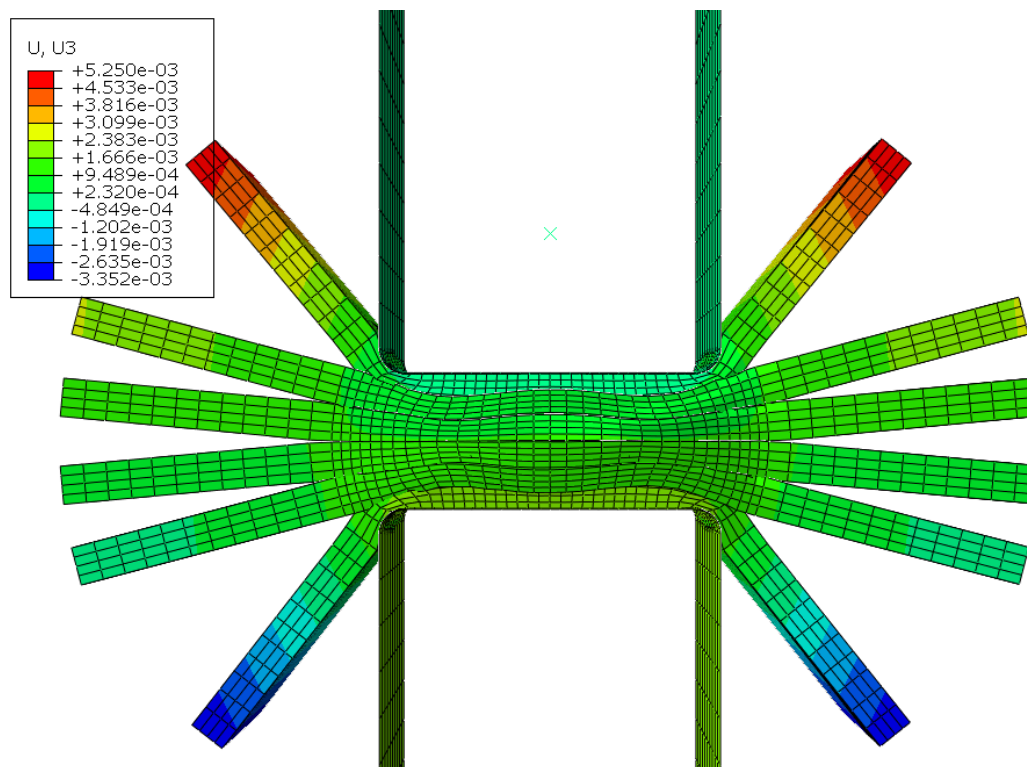
Slika 7.6: 3D numerički model diskretiziran s 49272 konačnih elemenata

7.1.1 Analiza rezultata

Nakon provedene analize dobiveni su rezultati numeričke simulacije.



Slika 7.7: Pomaci za brzinu deformiranja 10mm/s

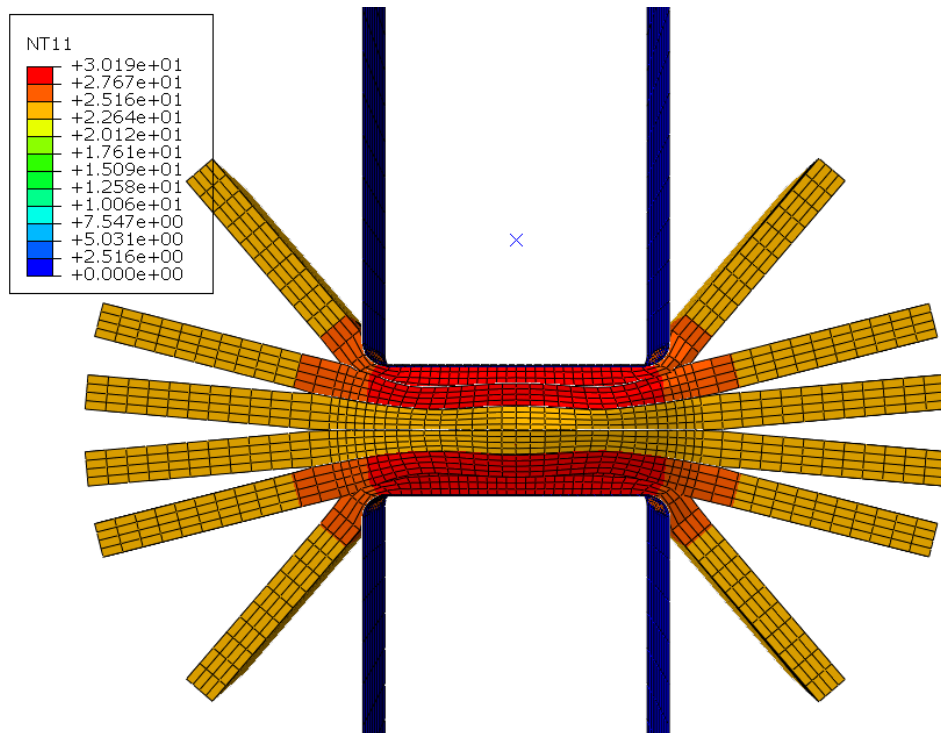


Slika 7.8: Pomaci za brzinu deformiranja 50mm/s

Na slici 7.7 prikazani su rezultati pomaka u smjeru deformiranja za brzinu deformiranja 10mm/s, odnosno na slici 7.8 za brzinu deformiranja 50 mm/s. Kod brzine deformiranja 10 mm/s najveći pomak iznosi 5,126 mm, dok kod brzine deformiranja 50 mm/s najveći pomak iznosi 5,25 mm.

Na slici 7.9 prikazan je raspored temperature za brzinu deformiranja 10 mm/s. Kod brzine deformiranja 10 mm/s najveća temperatura iznosi 30,19°C. Na slici 7.10 prikazan je raspored temperature za brzinu deformiranja 10 mm/s izmjeren infracrvenom termografskom kamerom. Na slici 7.11 prikazan je raspored temperature za brzinu deformiranja 50 mm/s. Kod brzine deformiranja 10 mm/s najveća temperatura iznosi 39,54°C. Na slici 7.12 prikazan je raspored temperature za brzinu deformiranja 50 mm/s izmjeren infracrvenom termografskom kamerom.

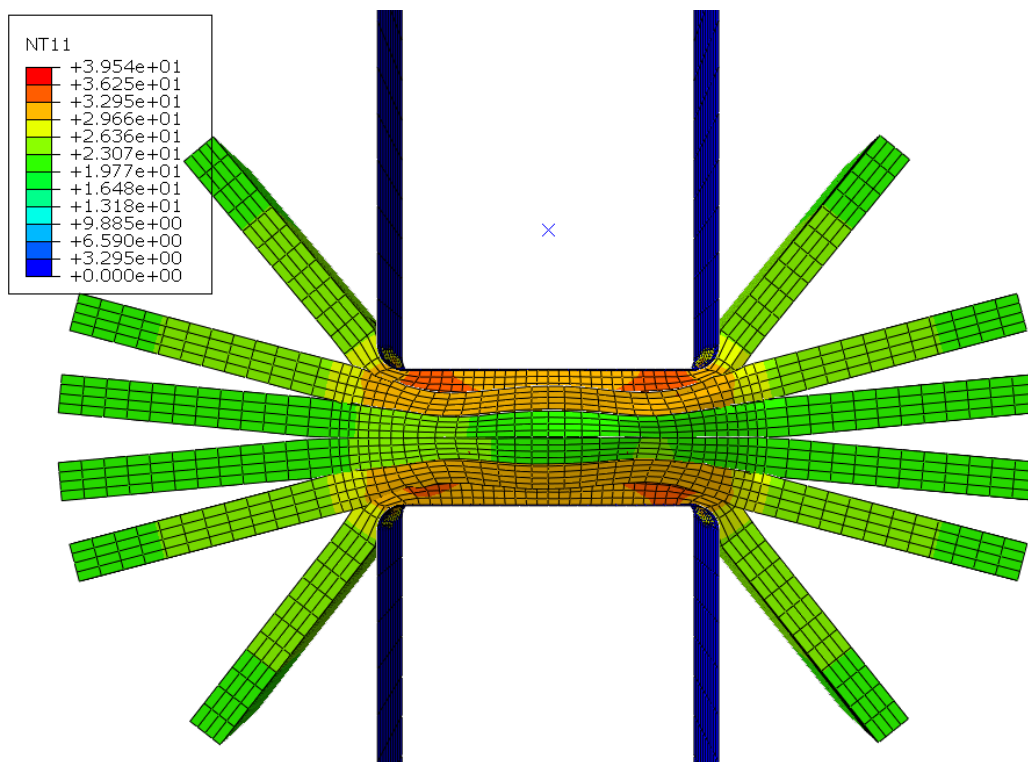
Najveća temperatura kod numeričke simulacije je u području kontakta između čeličnog bloka i bakrenog lima. Treba uzeti u obzir da kod numeričke simulacije nije moguća kondukcija između čeličnog bloka i lima jer je blok modeliran kao kruto tijelo koje nema kao stupan slobode temperaturu. Usporedbom rezultata numeričke simulacije i IR kamere vidljivo je da je raspored temperatura jako sličan, te da također kod brzine deformiranja 50 mm/s imamo nešto više temperature u odnosu na brzinu deformiranja 10 mm/s.



Slika 7.9: Temperatura za brzinu deformiranja 10mm/s



Slika 7.10: Temperatura izmjerena IR kamerom za brzinu deformiranja 10mm/s [9]

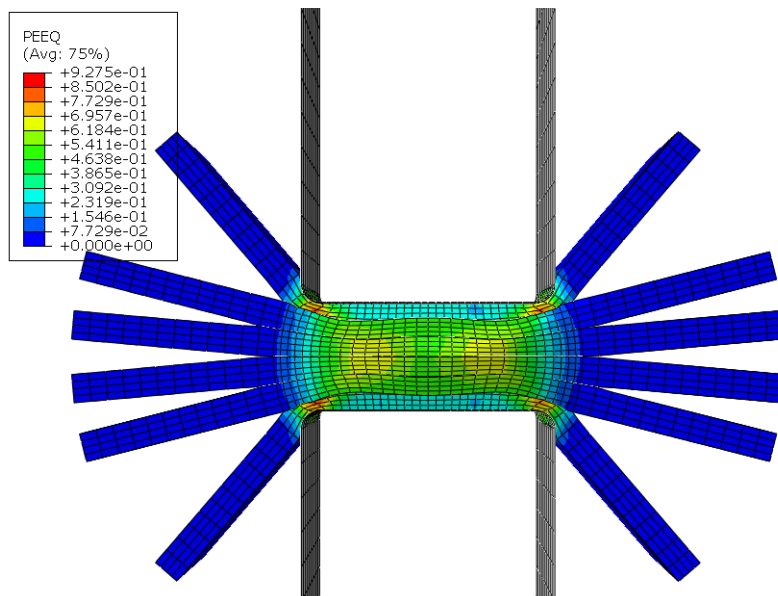


Slika 7.11: Temperatura za brzinu deformiranja 50mm/s

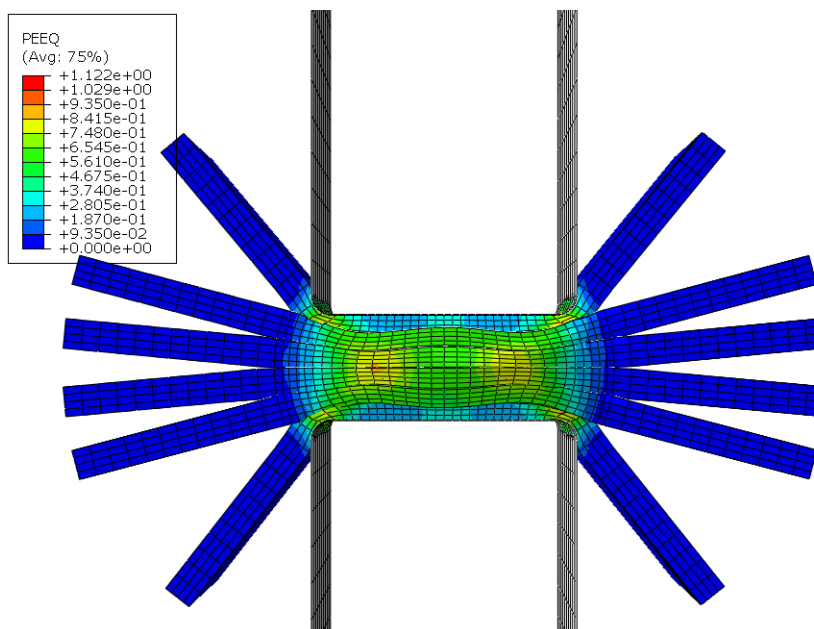


Slika 7.12: Temperatura izmjerena IR kamerom za brzinu deformiranja 50mm/s [9]

Na slici 7.13 prikazan je raspored ekvivalentne plastične deformacije za brzinu deformiranja 10 mm/s. Najveća plastična deformacija iznosi 0,93%. Na slici 7.14 prikazan je raspored ekvivalentne plastične deformacije za brzinu deformiranja 50 mm/s. Najveća plastična deformacija iznosi 1,122%.



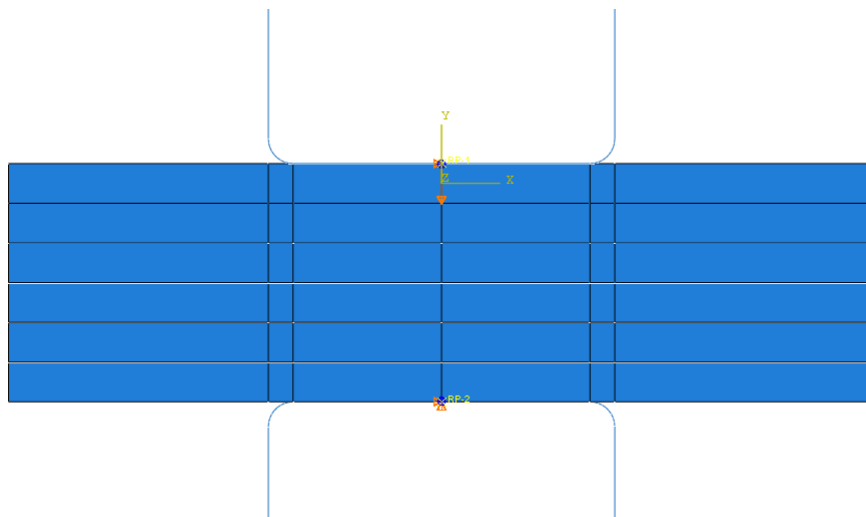
Slika 7.13: Ekvivalentna plastična deformacija za brzinu deformiranja 10 mm/s



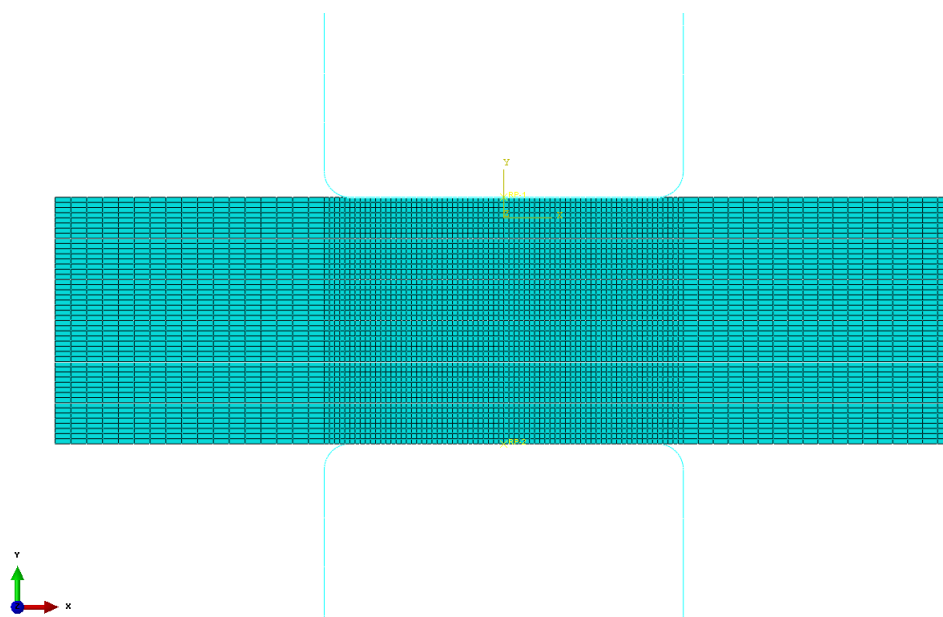
Slika 7.14: Ekvivalentna plastična deformacija za brzinu deformiranja 50 mm/s

7.2 2D numerički model

2D numerički model dinamičkog procesa deformiranja bakrenih limova diskretiziran je 2D konačnim elementima. Debljina numeričkog modela je jedinična. Čelični prizmatični blokovi su diskretizirani krutim grednim konačnim elementima R2D2, dok su limovi diskretizirani 2D elementima za ravninsko stanje naprezanja CPS4RT.



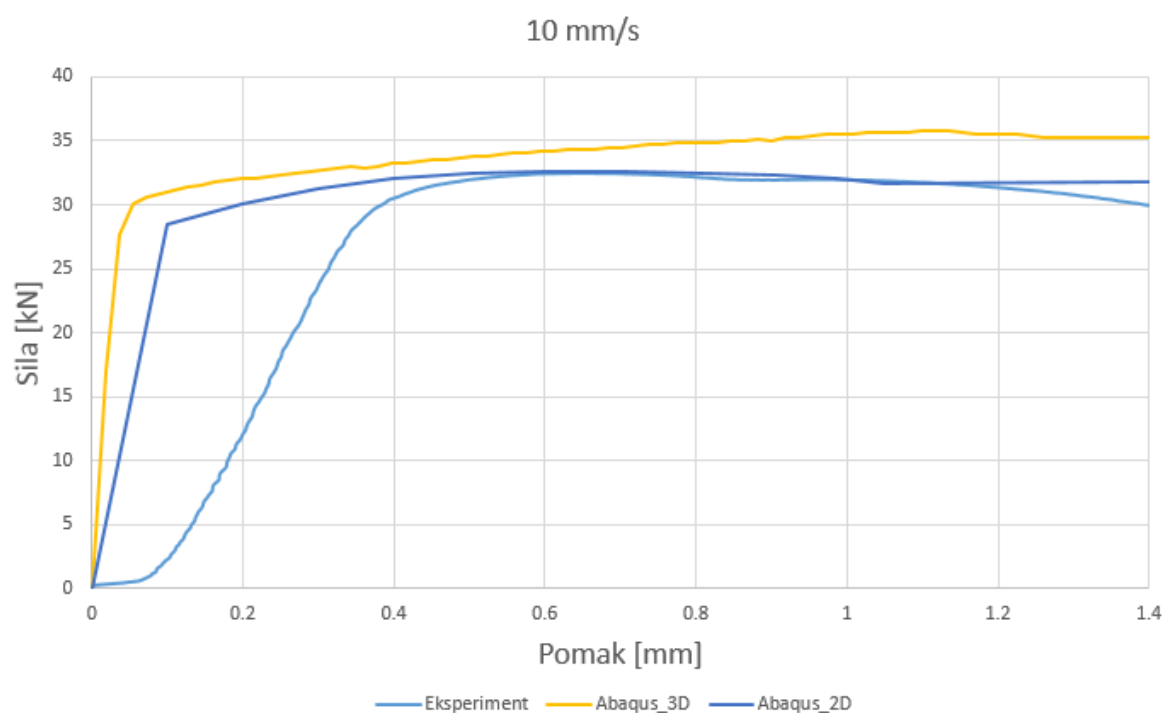
Slika 7.15: 2D numerički model



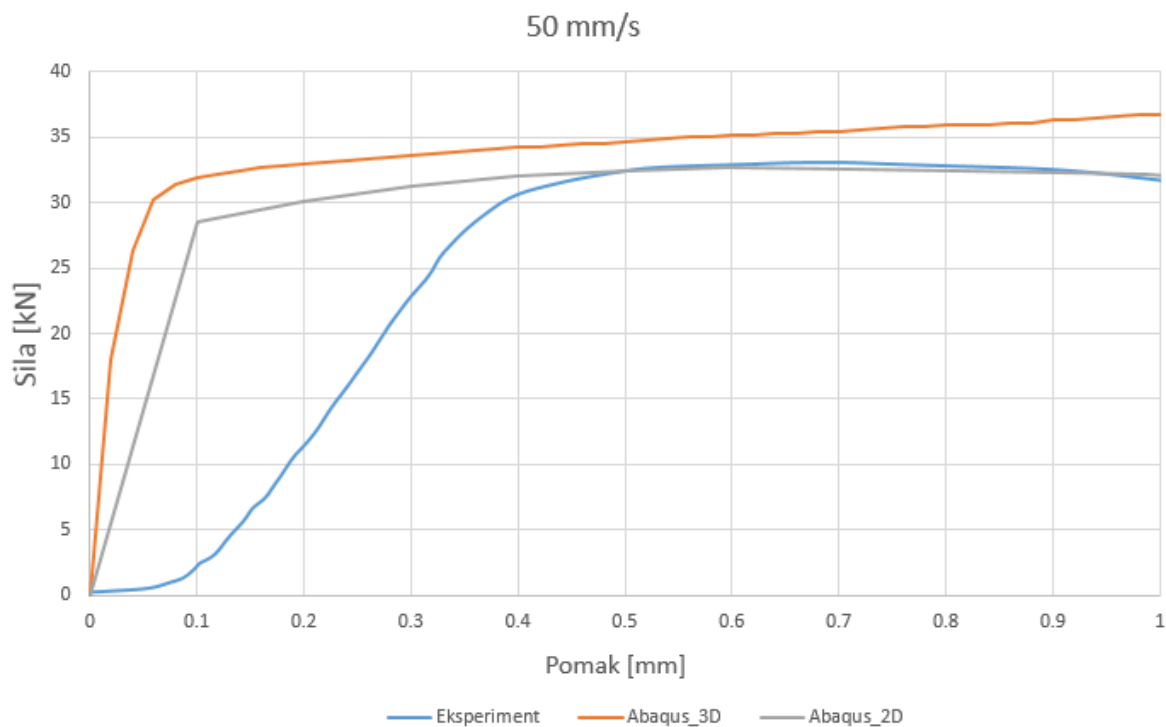
Slika 7.16: 2D numerički model diskretiziran s 5950 konačnih elemenata

7.3 Usporedba rezultata

Uspoređeni su rezultati 2D i 3D numeričke simulacije i eksperimenta ovisnosti sile o pomaku za brzine deformiranja 10 mm/s i 50 mm/s. Iz dijagrama prikazanim na slikama 7.17 i 7.18 je vidljiva znatna razlika u modulu elastičnosti što je posljedica toga da je u numeričkoj simulaciji alat modeliran kao kruto tijelo dok u stvarnosti to nije slučaj. Također kod eksperimenta sila, prije nego uđe u područje linearne elastične deformacije, u početku ima mali nelinearni porast koji predstavlja dio popunjavanja zračnosti između alata i bakrenih limova, te limova međusobno dok kod numeričke simulacije nema tih zračnosti. Maksimalne sile su jako slične za sva tri slučaja s tim da je poklapanje puno bolje kod 2D analize i eksperimenta. Važno je napomenuti da kod eksperimenta nakon određenog pomaka imamo pad sile što je posljedica pojave pukotina kod limova što nije slučaj kod numeričke simulacije jer oštećenja nisu modelirana.

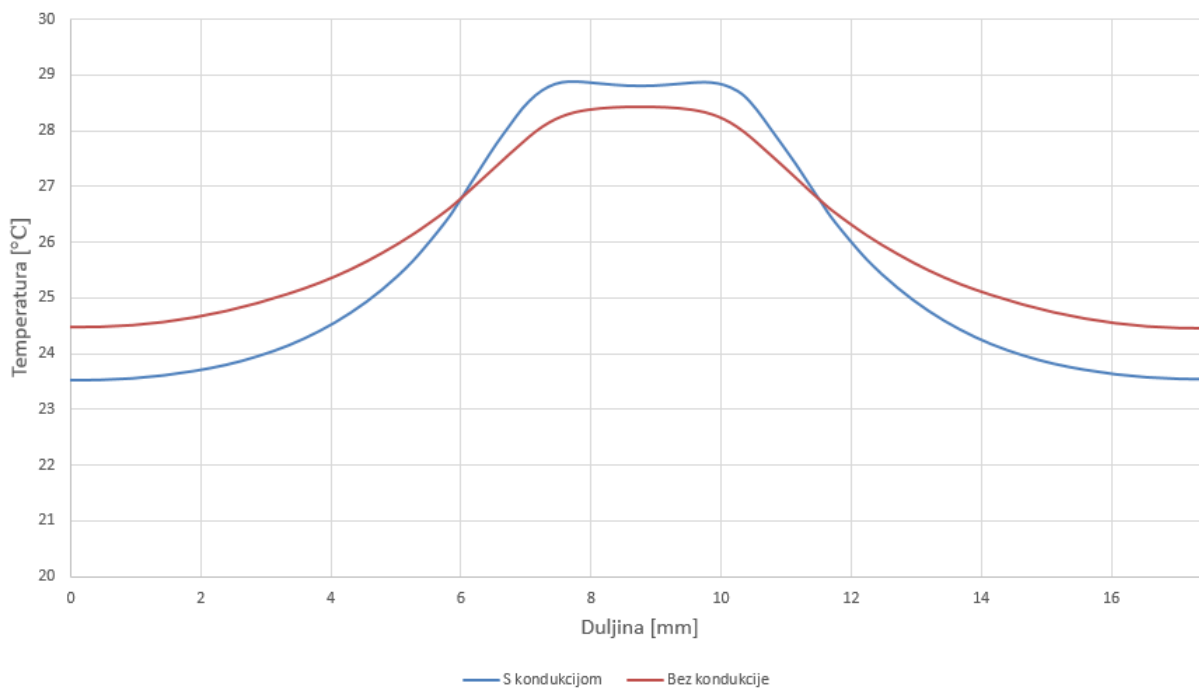


Slika 7.17: Dijagram sila-pomak 10mm/s



Slika 7.18: Dijagram sila-pomak 50mm/s

Također je provedena i simulacija kojoj kod kontakta nije definirana kondukcija između bakrenih limova. Kod takve analize primjetna je znatna razlika u rasporedu temperature. Na slici 7.19 prikazane su raspodjele temperature za analizu s i bez kondukcije.



Slika 7.19: Raspored temperature po duljini lima

8 Zaključak

U radu je prikazano numeričko modeliranje procesa deformiranja bakrenih limova u računalnom paketu Abaqus koji se temelji na metodi konačnih elemenata. Točnost numeričkog modela je validirana na način da su rezultati uspoređeni s eksperimentom. Bakreni limovi koje se proizvode postupkom valjanja imaju izraženu anizotropiju mehaničkih svojstava. Nakon procesa valjanja, veličina kristalnih zrna je smanjena i rastegnuta u smjeru valjanja. Novi uzorak zrna dovodi do razlika u modulu elastičnosti, vlačnoj čvrstoći, granici tečenja i ukupnoj istezljivosti materijala u različitim smjerovima. Brzina deformiranja ima značajan utjecaj na ponašanje materijala, jer s povećanjem brzine deformiranja povećava se vlačna čvrstoća i ukupna istezljivost.

Provedene su analize na 2D i 3D numeričkom modelu za dvije brzine deformiranja od 10 mm/s i 50 mm/s. Čeljusti kidalice modelirane su kao kruto tijelo, dok su bakreni limovi modelirani kao izotropno deformabilno tijelo. Zbog kratkog vremena deformiranja nije definirano hlađenje između okoliša i bakrenih limova. Rezultati numeričke simulacije su uspoređeni s eksperimentalnim rezultatima dobivenim beskontaktnim metodama mjerenja, optičkim mjernim sustavom ARAMIS 4M i IR kamerom.

Nakon analize rezultata je zaključeno da:

- kod numeričke simulacije i IR kamere raspored temperatura je jako sličan, te da također kod brzine deformiranja 50 mm/s imamo nešto više temperature u odnosu na brzinu deformiranja 10 mm/s,
- maksimalne sile su jako slične za sva tri slučaja s tim da je poklapanje puno bolje kod 2D analize i eksperimenta,
- točnost numeričke simulacije je smanjena jer je alat modeliran kao kruto tijelo, te su bakreni limovi modelirani kao izotropni materijal.

Da bi se povećala točnost numeričke simulacije potrebno je:

- modelirati bakrene limove kao ortotropan materijal,
- modelirati alat kao realno deformabilno tijelo,
- kod modeliranja uzeti u obzir i oštećenja koja se javljaju tijekom deformiranja.

Dinamički proces deformiranja kod kojeg dolazi do pojave velikih elastoplastičnih deformacija je izrazito kompleksan i nelinearan fizikalni problem koji je svakodnevna pojava u strojarскоj industriji. Iako je kod numeričkog modela materijalni model pojednostavljen računalno vrijeme simulacija je jako dugo. Numeričke simulacije koje bi zamjenile skupa eksperimentalna mjerenja još su u razvoju. Plan daljnjih istraživanja je modeliranje složenijeg anizotropnog materijalnog modela.

LITERATURA

- [1] Bubalo, A. i ostali, Eksperimentalno ispitivanje utjecaja brzine deformiranja na mehaničko ponašanje anizotropne CuFe2P legure Zagreb, 2019.
- [2] Tonković, Z., Izvod konačnog elementa za analizu elastoplastičnog ponašanja ljuskastih konstrukcija, Doktorska disertacija, FSB, Zagreb, 1998.
- [3] Tonković, Z. i ostali, Experimental and Numerical Modelling of Deformation Processes of Nodular Cast Iron
- [4] Alfirević, I., Uvod u tenzore i mehaniku kontinuuma, Golden marketing, Zagreb, 2003.
- [5] Džoja, M., Pregled razvoja i primjene anizotropnih elasto-plastičnih modela za limove, FESB, Split, 2018.
- [6] Abaqus Documentation
- [7] Pevec, D., Diplomski rad, FSB, Zagreb, 2016.
- [8] Tonković, Z., Numerička analiza konstrukcija, Zagreb, 2011.
- [9] Bubalo, A., Rezultati eksperimentalnih istraživanja u okviru doktorske disertacije „Numeričko i eksperimentalno modeliranje procesa krimpanja žica“, 2019.

PRILOZI

- [1] CD-R disc