

# Postupak proračuna općeg slučaja jednodimenzijskog stlačivog podzvučnog strujanja

---

**Smiljan, Matija**

**Undergraduate thesis / Završni rad**

**2019**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:235:033894>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-10-20**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# ZAVRŠNI RAD

**Matija Smiljan**

Zagreb , 2019.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# ZAVRŠNI RAD

Mentor:

Dr.sc. Severino Krizmanić

Student:

Matija Smiljan

Zagreb , 2019.

Izjavljujem da sam ovaj rad izradio samostalno koristeći znanja stečena tijekom studija te koristeći navedenu literaturu.

Ovim putem se zahvaljujem mentoru, dr. sc. Severinu Krizmaniću na danom povjerenju te strpljenju, savjetima, uputama i preporukama tijekom izrade rada. Zahvaljujem se i svojoj obitelji, prvenstveno roditeljima i sestrama koji su stajali uz mene tokom cijelog studija, prijateljima, djevojci i kolegama koji su mi pomogli u studiranju, ali i izradi ovog rada.

Matija Smiljan



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
**FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE**



Središnje povjerenstvo za završne i diplomske ispite  
Povjerenstvo za završne ispite studija strojarstva za smjerove:  
procesno-energetski, konstrukcijski, brodstrojarski i inženjersko modeliranje i računalne simulacije

Sveučilište u Zagrebu Fakultet strojarstva i brodogradnje	
Datum	Prilog
Klasa:	
Ur.broj:	

## ZAVRŠNI ZADATAK

Student: Matija Smiljan

Mat. br.: 0035197084

Naslov rada na hrvatskom jeziku: **Postupak proračuna općeg slučaja jednodimenzijskog stlačivog podzvučnog strujanja.**

Naslov rada na engleskom jeziku: **A calculation procedure for general one-dimensional compressible subsonic flow.**

Opis zadatka:

U slučaju jednodimenzijskog stlačivog strujanja savršenog plina, rješenja osnovnih jednadžbi strujanja poznata su zasebno za slučajeve promjene poprečnog presjeka strujne cijevi bez ostalih efekata, te slučajeve dovođenja rada, topline i strujanja u prisustvu trenja u cijevima konstantnog poprečnog presjeka. Ovi su slučajevi poznati kao izentropsko strujanje u kanalima promjenjivog poprečnog presjeka odnosno Rayleighovo i Fannoovo strujanje u cijevima konstantnog poprečnog presjeka.

U ovome radu potrebno je zasnovati postupak za proračun jednodimenzijskog stlačivog strujanja u slučaju istodobnog prisustva promjene poprečnog presjeka, dovođenja topline i trenja, u proizvoljnim iznosima.

Kako su jednadžbe općeg slučaja jednodimenzijskog strujanja stlačivog plina zadane običnim diferencijalnim jednadžbama, potrebno je primijeniti metode numeričke integracije, gdje se preporučuje primjena gotovih biblioteka u sklopu programskog paketa Octave.

Rad treba sadržavati:

- uvod,
- opis problema i metoda primjenjenih za njihovo rješavanje,
- odgovarajući programski kod,
- usporedbu rješenja dobivenih numeričkim postupkom s poznatim analitičkim rješenjima,
- zaključke.

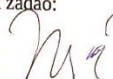
U radu je potrebno navesti korištenu literaturu i eventualno dobivenu pomoć.

Zadatak zadan:  
6. svibnja 2019.

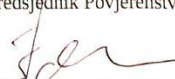
Rok predaje rada:  
**2. rok (izvanredni):** 28. lipnja 2019.  
**3. rok:** 20. rujna 2019.

Predviđeni datumi obrane:  
**2. rok (izvanredni):** 2.7. 2019.  
**3. rok:** 23.9. - 27.9. 2019.

Zadatak zadao:

  
Doc. dr. sc. Severino Krizmanić

Predsjednik Povjerenstva:

  
Prof. dr. sc. Igor Balen

**SADRŽAJ**

SADRŽAJ.....	I
POPIS SLIKA I TABLICA.....	II
POPIS OZNAKA.....	III
SAŽETAK.....	V
SUMMARY.....	VI
1. UVOD.....	1
2. TEORIJSKE OSNOVE.....	2
2.1 Integralni oblici osnovnih zakona.....	2
2.2 Termodinamičke i konstitutivne jednačbe.....	4
2.3 Brzina zvuka i Machov broj.....	6
2.4 Veličine stanja u strujanju.....	7
3. OPĆI SLUČAJ JEDNODIMENZIJSKOG PODZVUČNOG STLAČIVOG STRUJANJA.....	8
3.1 Priprema jednačbi općeg slučaja jednodimenzijuskog stlačivog strujanja za simulaciju.....	13
4. RAČUNALNI PROGRAM „OCTAVE“.....	16
4.1 Funkcija „ode45“.....	16
4.2 Dormand – Prince metoda.....	16
5. SIMULACIJA STRUJANJA.....	18
5.1 Računalni kod simulacije.....	18
5.2 Izentropsko strujanje u cijevi promjenjive površine poprečnog presjeka.....	19
5.3 Fannovo strujanje u cijevi konstantnog poprečnog presjeka.....	24
5.4 Rayleighovo strujanje u cijevi konstantnog poprečnog presjeka.....	30
5.5 Riješenje problema općeg slučaja stlačivog strujanja.....	35
6. ZAKLJUČAK.....	42
7. LITERATURA.....	43
8. PRILOZI.....	45

## POPIS SLIKA I TABLICA

Slika 1.	Kontrolni volumen elementarne cijevi.....	2
Slika 2.	Ilustracija uz objašnjenje veličina stanja u strujanju.....	7
Slika 3.	Kontrolni volumen infinitezimalnog elementa strujne cijevi.....	8
Slika 4.	Definicija vektora naprezanja po površini $dS^w$ .....	9
Slika 5.	Uz opis Runge-Kutta metode.....	16
Slika 6.	Konvergentni kanal.....	19
Slika 7.	Analitička rješenja za izentropsko strujanje.....	21
Slika 8.	Usporedba analitičkih rješenja i rješenja simulacije.....	22
Slika 9.	Razlika analitičkih rješenja i rješenja simulacije.....	23
Slika 10.	Relativna greška – izentropsko strujanje.....	24
Slika 11.	Kritična duljina.....	24
Slika 12.	Analitička rješenja – Fannovo strujanje.....	27
Slika 13.	Usporedba analitičkih rješenja i rješenja simulacije – Fannovo strujanje.....	28
Slika 14.	Razlika analitičkih rješenja i rješenja simulacije – Fannovo strujanje.....	29
Slika 15.	Relativna greška - Fannovo strujanje.....	30
Slika 16.	Analitička rješenja – Rayleighovo strujanje.....	32
Slika 17.	Usporedba analitičkih rješenja i rješenja simulacije-Rayleighovo strujanje....	33
Slika 18.	Relativna greška – Rayleighovo strujanje.....	34
Slika 19.	Problem općeg slučaja stlačivog strujanja.....	35
Slika 20.	Promjena Machovog broja duž mlaznice.....	37
Slika 21.	Promjena statičkog tlaka duž mlaznice.....	38
Slika 22.	Promjena statičke temperature duž mlaznice.....	39
Slika 23.	Usporedba Machovih brojeva duž mlaznice za tri slučaja.....	40
Slika 24.	Usporedba statičkog tlaka duž mlaznice za tri slučaja.....	41
Slika 25.	Usporedba statičke temperature duž mlaznice za tri slučaja.....	42
Tablica 1.	Rezultati simulacije za tri slučaja.....	39

**POPIS OZNAKA**

<b>Oznaka</b>	<b>Jedinica</b>	<b>Opis</b>
$A$	$[m^2]$	Površina
$A^u$	$[m^2]$	Ulazna površina
$A^i$	$[m^2]$	Izlazna površina
$c$	$[m/s]$	Brzina zvuka
$c_p$	$[J/kgK]$	Specifični toplinski kapacitet pri konstantnom tlaku
$c_v$	$[J/kgK]$	Specifični toplinski kapacitet pri konstantnom volumenu
$d$	$[m]$	Promjer
$D$	$[-]$	Determinanta
$D_e$	$[m]$	Efektivni promjer
$F$	$[N]$	Sila
$h$	$[J/kg]$	Specifična entalpija
$k$	$[-]$	Koeficijent
$L_{kr}$	$[m]$	Kritična duljina
$M$	$[-]$	Machov broj
$\dot{m}$	$[kg/s]$	Maseni protok
$N$	$[-]$	Kvadrirani Machov broj
$n$	$[-]$	Normala
$O$	$[m]$	Opseg
$p$	$[Pa]$	Statički tlak
$p_0$	$[Pa]$	Totalni tlak
$\dot{Q}$	$[W]$	Toplinski tok
$R$	$[J/kgK]$	Plinska konstanta
$S^w$	$[m]$	Površina plašta
$s$	$[J/kgK]$	entropija



---

$T$	[K]	Statička temperatura
$T_0$	[K]	Totalna temperatura
$T_{kr}$	[K]	Kritična temperatura
$t$	[s]	Vrijeme
$u$	[J/kg]	Specifična unutarnja energija
$V$	[m <sup>3</sup> ]	Volumen
$v$	[m/s]	Brzina
$x$	[m]	Koordinata u Kartezijevom koordinatnom sustavu
$y$	[m]	Koordinata u Kartezijevom koordinatnom sustavu
$\alpha$	[-]	Koeficijent
$\beta$	[-]	Koeficijent
$\varepsilon$	[-]	Tolerancija
$\kappa$	[-]	Izentropski eksponent
$\lambda$	[-]	Koeficijent trenja
$\rho$	[kg/m <sup>3</sup> ]	Gustoća
$\sigma$	[Pa]	Normalno naprezanje
$\tau$	[Pa]	Smično naprezanje
$\varphi$	[-]	Veličina u strujanju

## SAŽETAK

U radu se analizira jednodimenzijско, podzvučno, stlačivo strujanje plina te se daje postupak proračuna istog. Kako su jednađbe koje opisuju takvo strujanje diferencijalnog tipa, u općem slučaju nemaju analitičko rješenje te se stoga trebaju rješavati numeričkim metodama. U ovome radu koristi se računalni program „Octave“ odnosno njegova funkcija („ode45“) numeričkog rješavanja diferencijalnih jednađbi kako bi se došlo do rješenja.

Prikazan je izvod jednađbi stlačivog strujanja te su zatim jednađbe pripremljene za unos u računalni kod. Prije samih rezultata simulacije, opisana je funkcija „ode45“ odnosno metoda numeričke integracije (Dormand-Prince metoda) sadržana u algoritmu funkcije. Točnost simulacije provjerena je na primjerima posebnih slučajeva stlačivog strujanja za koje su dobro poznata analitička rješenja. Adijabatsko strujanje u cijevi promjenive površine poprečnog presjeka (izentropsko strujanje) te strujanje uz utjecaj trenja (Fannoovo strujanje) i strujanje uz izmjenu topline (Rayleighovo strujanje) kroz cijev konstantne površine poprečnog presjeka, primjeri su strujanja za koja su poznata analitička rješenja. Na kraju rada riješen je problem općeg slučaja strujanja za koji ne postoje analitička rješenja te su prikazani utjecaji efekata (promjena površine poprečnog presjeka, trenje, izmjena topline) na promjenu veličina u strujanju plina.

Postupak proračuna jednodimenzijskog, podzvučnog stlačivog strujanja opisan u ovome radu pokazao se iznimno točnim u slučajevima izentropskog, Fannovog i Rayleighovog strujanja.

Ključne riječi: simulacija, jednodimenzijско strujanje, stlačivo strujanje, podzvučno strujanje, izentropsko strujanje, Fannoovo strujanje, Rayleighovo strujanje, „Octave“, „ode45“

## **SUMMARY**

This paper analyzes one-dimensional, subsonic, compressible gas flow and gives a procedure for calculating it. Since the equations describing such a flow are of a differential type, they generally do not have an analytical solution and therefore need to be solved by numerical methods. This paper uses the computer program "Octave", that is, its function ("ode45") for numerically solving differential equations to arrive at a solution.

The derivatives of the compression flow equations are presented and the equations are then prepared to be entered into the computer code. Before the simulation results, the "ode45" function is described, that is, the numerical integration method (Dormand-Prince method) contained in the function algorithm. The accuracy of the simulation has been verified by examples of special cases of compressible flow for which analytical solutions are well known. Adiabatic flow in a variable cross-section tube (isentropic flow) and friction flow (Fanno flow) and heat-exchange flow (Rayleigh flow) through a constant-cross-section tube are examples of known analytical solutions. At the end of the paper, the problem of the general case of flow for which there are no analytical solutions is solved, and the contributions of effects (change in cross-sectional area, friction, heat exchange) on the change of flow quantities are presented.

The calculation procedure for one-dimensional, subsonic compressible flow described in this paper proved to be extremely accurate in the case of isentropic, Fanno and Rayleigh flows.

Keywords: simulation, one-dimensional flow, compressible flow, subsonic flow, isentropic flow, Fanno flow, Rayleigh flow, "Octave", "ode45"

## **1. UVOD**

U prirodi su svi fluidi manje ili više stlačivi odnosno promjena gustoće se manje ili više manifestira pri promjeni tlaka. Pojam stlačivosti odnosno nestlačivosti vezan je stoga na strujanje. Ukoliko je promjena gustoće u strujanju zanemariva, takvo strujanje zvat ćemo nestlačivim dok za nestlačivo strujanje vrijedi da se promjena gustoće ne može zanemariti. Velik broj inženjerskih problema vezanih za strujanje fluida takve je prirode da se strujanje mora smatrati stlačivim. Nužno je, stoga, poznavati matematičke odnose koji opisuju ponašanje fluida kada se strujanje smatra stlačivim. Budući su jednadžbe koje opisuju stlačivo strujanje diferencijalne prirode, njihovo analitičko rješenje za opći slučaj ne postoji. U tom slučaju jednadžbe je moguće riješiti numeričkim metodama uz određenu točnost.

U ovom radu pokušat će se riješiti navedeni problem simulacijom strujanja koristeći numeričku metodu Runge-Kutta sadržanu u programskom paketu Octave. Točnost proračuna provjerit će se prvo na zasebnim slučajevima stlačivog strujanja za koja su dobro poznata analitička rješenja. Strujanje uz promjenu poprečne površine strujne cijevi bez ostalih efekata te slučajevi dovodjenja rada i topline i strujanje uz prisutnost trenja u cijevima konstantne površine poprečnog presjeka duž cijevi, upravo su takvi primjeri stlačivog strujanja. Poznati su kao izentropsko strujanje u kanalima promjenjivog poprečnog presjeka te Rayleighovo i Fannovo strujanje u kanalima konstantnog poprečnog presjeka.

Nakon usporedbe proračuna s analitičkim rješenjima, riješit će se problem općeg slučaja jednodimenzijskog stlačivog podzvučnog strujanja te će usporediti utjecaj određenog efekta na promjene veličina u strujanju.

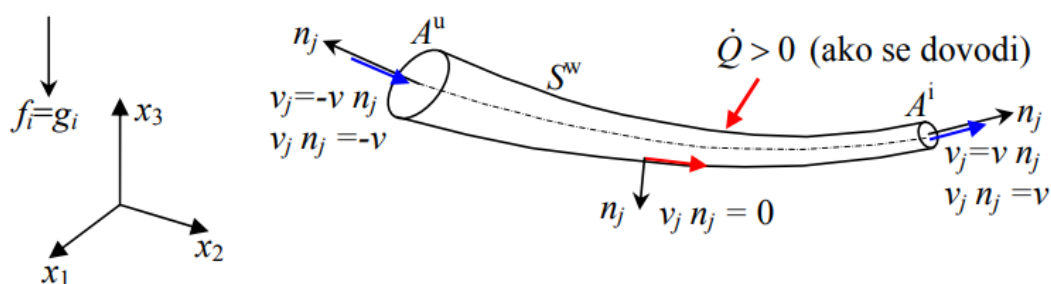
## 2. TEORIJSKE OSNOVE

Da bi pristupili rješavanju problema općeg slučaja jednodimenzijuskog stlačivog strujanja, nužno je početi od osnovnih fizikalnih zakona koji opisuju isti. U ovom poglavlju izvest će se jednadžbe osnovnih zakona dinamike fluida te će se iste dovesti u oblik pogodan za računalnu simulaciju u programu „Octave“. Također će se opisati numerička metoda korištena pri simulaciji odnosno funkcija u programu kojom se izračun vrši.

Za razliku od nestlačivog strujanja, gdje je volumen čestice konstantan odnosno ne postoji mehanizam izmjene mehaničkog rada, u slučaju stlačivog strujanja mora se uzeti u obzir promjena unutarnje energije u energijskoj jednadžbi. Iz tog razloga osnovni zakoni dinamike fluida korišteni za opis strujanja su: zakon održanja mase ili jednadžba kontinuiteta, zakon održanja količine gibanja, zakon održanja energije ili energijska jednadžba, Gibbsova relacija te jednadžba stanja savršenog plina.

### 2.1 Integralni oblici osnovnih zakona za jednodimenzijusko stacionarno stlačivo strujanje

U realnim cijevima strujanje ćemo smatrati jednodimenzijuskim ako je duljina cijevi puno veća od njenog promjera, ako nema naglih promjena poprečnog presjeka i ako je zakrivljenost mala (radijus zakrivljenosti cijevi puno veći od promjera). Za izvod koristiti će se stroga definicija jednodimenzijuskog strujanja koja kaže kako je strujanje jednodimenzijusko ukoliko govorimo o elementarnoj strujnoj cijevi.



Slika 1. Kontrolni volumen elementarne cijevi

Da bi izveli integralne oblike osnovnih zakona za cijev (kontrolni volumen omeđen kontrolnom površinom koja se sastoji od ravnih ulaza  $A^u$  i izlaza  $A^i$  te površine plašta  $S^w$ ) prikazanu na slici 1 prije svega treba navesti pretpostavke korištene prilikom izvoda te one glase:

1. vektori brzine okomiti su na poprečne presjeke,
2. sve veličine po presjeku su jednolike (kada pričamo o brzini strujanja fluida u slučaju viskoznog strujanja profil brzine zamijeniti ćemo jednolikom srednjom brzinom po presjeku te zanemariti faktore ispravka količine gibanja i kinetičke energije),
3. zanemaruje se izmjena topline na ulaznom i izlaznom presjeku,
4. na ulaznom i izlaznom presjeku zanemaruju se viskozne sile (njihovi momenti i snaga) odnosno od vektora naprezanja ostaje  $\sigma_i = -pn_i$
5. masene sile su sile gravitacije  $f_i = -g\delta_{i3}$ , odnosno specifična potencijalna energija je  $e_p = gx_3$ .

### Zakon očuvanja mase ili jednadžba kontinuiteta

$$\frac{d}{dt} \int_{V_{KV}} \rho dV + \int_{A^u + A^i + S^w} \rho v_j n_j dS = 0 \quad (1)$$

Strujanje je stacionarno stoga je prvi integral jednak nuli, dok je drugi integral po površini  $S^w$  također jednak nuli zbog nepromočivosti površine ( $v_j n_j = 0$ ). Iz jednadžbe se stoga može zaključiti da je maseni protok kroz ulazni presjek jednak masenom protoku fluida kroz izlazni presjek. Budući su presjeci (ulazni i izlazni) odabrani proizvoljno može se tvrditi da je maseni protok u stacionarnom stlačivom strujanju fluida kroz bilo koji poprečni presjek konstantan.

$$\dot{m} = \rho v A = \text{konst.} \quad (2)$$

### Zakon očuvanja količine gibanja

$$\frac{d}{dt} \int_{V_{KV}} \rho v_i dV + \int_{A^u + A^i + S^w} \rho v_i (v_j n_j) dS = \underbrace{\int_{V_{KV}} \rho g_i dV}_{\text{sila težine } G_i} - \underbrace{\int_{A^u + A^i} (\rho n_i + \sigma_i^f) dS}_{\int_{S_{KV}} \sigma_i dS} + \underbrace{\int_{S^w} \sigma_i dS}_{\text{ukupna površinska sila na } S^w = -F_i^w} \quad (3)$$

Uz navedene pretpostavke iz gornje jednadžbe proizlazi da je ukupna površinska sila na plašt kontrolne površine kako slijedi:

$$F_i^w = G_i - \left[ n_i (\rho v^2 + p) A \right]^u - \left[ n_i (\rho v^2 + p) A \right]^i \quad (4)$$

Zakon očuvanja energije

Integral jednadžbe energije (varijanta s uključenom unutarnjom energijom) glasi:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_{KV}} \rho \left( \frac{v^2}{2} + u + e_p \right) dV + \int_{A^u + A^i + S^w} \rho \left( \frac{v^2}{2} + u + e_p \right) v_j n_j dS =$$

$$= \int_{A^u + A^i + S^w} (-pn_i + \sigma_i^f) v_i dS - \underbrace{\int_{A^u + A^i + S^w} q_j n_j dS}_{\text{brzina izmjene topline} \cdot \dot{Q}} \quad (5)$$

Integriranjem pojedinih članova u gornjoj jednadžbi, uzimajući da je  $e_p = gx_3$ , te dijeljenjem s masenim protokom dobije se specifični oblik energijske jednadžbe za stlačivo strujanje koji glasi:

$$\left( u + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gx_3 \right)^i = \left( u + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gx_3 \right)^u + \frac{\dot{Q}}{\dot{m}} + \frac{P_{\text{kompresora}}}{\dot{m}} - \frac{P_{\text{turbine}}}{\dot{m}} \quad (6)$$

Na desnoj strani dodani su članovi snage strojeva kada bi između izlaznog i ulaznog presjeka postojali takvi strojevi. U sljedećim poglavljima ti članovi će biti nula budući nećemo analizirati takav tip problema te će na desnoj strani ostati samo prva dva člana gornje jednadžbe. Jednadžba (6) u fizikalnom smislu govori da je snaga fluida na izlazu jednaka snazi fluida na ulazu uvećanoj za dovedeni toplinski tok (i/ili snagu kompresora odnosno umanjena za snagu turbine).

**2.2 Termodinamičke i konstitutivne jednadžbe**

Kao što je već naglašeno, pri promatranju stlačivog strujanja mora se uzeti u obzir i unutarnja energija. Kako ne možemo tvrditi da je kontrolni volumen u ravnotežnom stanju budući se pojavljuju gradijenti tlaka i temperature u strujanju, sve termodinamičke relacije, koje vrijede za isključivo ravnotežna stanja, primjenjivati će se na česticu fluida. Za česticu kao kontrolni volumen možemo tvrditi da je u svakom trenutku u ravnotežnom stanju budući je njen volumen infinitezimalno malen te se tada smije pretpostaviti da će veličine stanja u tako malom volumenu ostati konstante u svakom trenutku.

Relacije za savršeni plin

Idealnim plinom smijemo smatrati većinu realnih plinova pri okolišnom tlaku te za njih tada možemo tvrditi da slijede plinsku jednadžbu stanja koja glasi:

$$p = \rho RT \quad (7)$$

$R$  predstavlja plinsku konstantu odnosno omjer opće plinske konstante i molarne mase plina. Slijedeća jednažba koju slijedi idealni plin naziva se kalorička jednažba stanja te glasi:

$$du = c_v dT \quad (8)$$

Iz jednažbe je vidljivo kako je unutarnja energija funkcija samo temperature.  $c_v$  je specifični toplinski kapacitet pri konstantnom volumenu. Entalpija savršenog plina također je funkcija samo temperature te vrijedi:

$$dh = c_p dT = d\left(\frac{p}{\rho} + u\right) \quad (9)$$

gdje je  $c_p$  specifični toplinski kapacitet pri konstantnom tlaku. Veličine  $c_p$  i  $c_v$  su za idealni plin konstantne te vrijede slijedeće relacije:

$$R = c_p - c_v, \quad \kappa = \frac{c_p}{c_v}, \quad c_p = \frac{\kappa}{\kappa - 1} R \quad \text{i} \quad c_v = \frac{1}{\kappa - 1} R \quad (10)$$

U kojima je  $\kappa$  izentropski eksponent.

Gibbsova relacija govori o promjeni entropije te glasi:

$$du = Tds - pd\left(\frac{1}{\rho}\right) = Tds + RT \frac{d\rho}{\rho} \quad (11)$$

Integracijom od stanja 0 do bilo kojeg drugog stanja dobije se:

$$s - s_0 = c_v \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) + R \ln\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right) = c_v \ln\left[\left(\frac{T}{T_0}\right)\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{(\kappa-1)}\right] \quad (12)$$



## 2.3 Brzina zvuka i Machov broj

Zvuk je zapravo tlačni poremećaj u fluidu. Postavlja se pitanje koja je brzina širenja takvog poremećaja. Rušenje domino pločica čiji je razmak manji od njihove pojedinačne visine služi kao dobra analogija širenja zvuka kroz fluid. Jasno je da će brzina rušenja pločica biti veća ako je razmak između njih manji odnosno ako usporedimo takvu situaciju s mirujućim fluidom, brzina širenja tlačnog poremećaja očito će ovisiti o „blizini“ atoma i molekula. Jednako kao i kod domino pločica, poremećaj je taj koji napreduje kroz strukturu dok će pločice odnosno atomi i molekule ostati na približno istom mjestu.

Brzinu zvuka možemo shvatiti kao omjer promjene tlaka i gustoće pri konstantnoj entropiji te vrijedi:

$$c^2 = \left. \frac{dp}{d\rho} \right|_{s=\text{konst}} \quad (13)$$

Dok za idealni plin pri izentropskom procesu vrijede relacije:

$$\frac{p}{\rho^\kappa} = C = \text{konst.} \quad \text{odnosno} \quad p = C\rho^\kappa \quad (14)$$

Kombinacijom jednadžbi (13) i deriviranom jednadžbom (14) dobije se:

$$c_0 = \sqrt{\frac{\kappa p_0}{\rho_0}} = \sqrt{\kappa R T_0} \quad (15)$$

Indeks 0 uz veličine označuje da ih možemo smatrati konstantnima (poremećaji tlaka su mali). Jednadžba (15) vrijedila bi za mirujući idealni plin budući je njegova totalna temperatura tada jednaka statičkoj. Budući je jasno da brzina zvuka ovisi o temperaturi plina, za slučaj fluida kojemu totalna temperatura i statička temperatura nisu jednake, te u slučajevima tlačnih poremećaja konačnog intenziteta, jednadžba brzine zvuka glasi:

$$c = \sqrt{\kappa R T} \quad (16)$$

Razliku između totalnih i statičkih veličina stanja dodatno objašnjava slijedeće poglavlje.

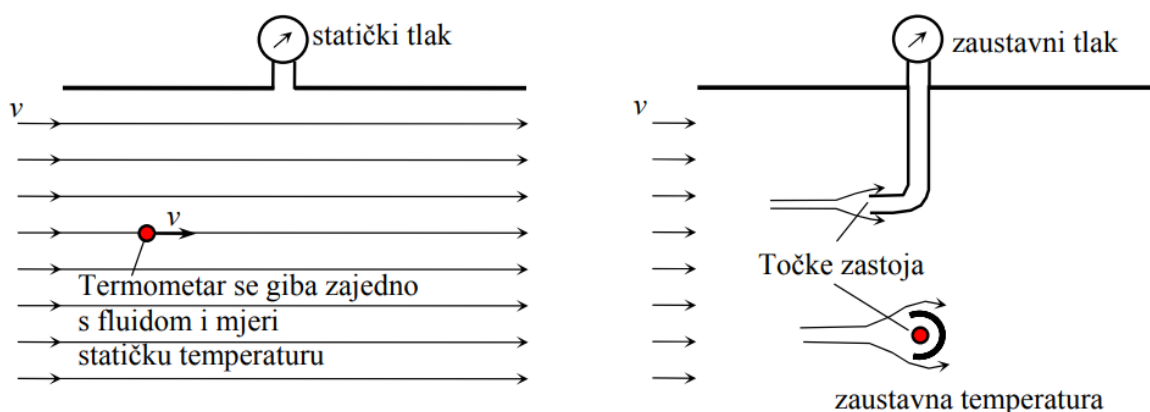
Machov broj definiran je kao omjer brzine strujanja i brzine zvuka.

$$M = \frac{v}{c} \quad (17)$$

Iznos Machovog broja reći će nam o kakvom se strujanju radi u kontekstu brzine odnosno širenja poremećaja u fluidu. U slučaju kada je Machov broj veći od 1 govorimo o nadzvučnom strujanju odnosno kada je Machov broj manji od 1 strujanje je podzvučno. Za ovaj rad strujanje će uvijek biti podzvučno pa će Machov broj pri simulaciji uvijek biti između nula i 1.

## 2.4 Veličine stanja u strujanju

U prošlom poglavlju naglašena je razlika između totalne i statičke temperature. I ostale veličine stanja treba razlikovati na isti način koji će sada biti pojašnjen. Za ilustraciju razlike poslužit će slijedeća slika.



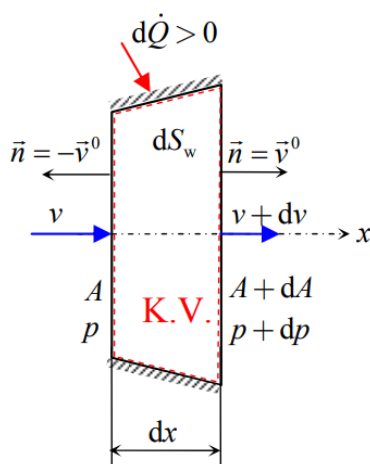
**Slika 2.** Ilustracija uz objašnjenje veličina stanja u strujanju

Zamislimo umjesto crvene točkice termometar. Budući se na lijevoj slici giba zajedno s fluidom mjeri temperaturu jedno te iste čestice stoga mjeri statičku temperaturu. Manometar na lijevoj slici također mjeri statičku veličinu stanja iako ne mjeri tlak jedno te istoj čestici. Ako je strujanje stacionarno, a takvima se u ovom radu i bavimo, svaka čestica kojoj će izmjeriti tlak pokazivati će istu vrijednost pa stoji tvrdnja da je tlak koji se mjeri „statički“. U točkama zastoja na desnoj slici brzina strujanja je nula pa su veličine stanja u takvim uvjetima „zaustavne“. Definicije su stoga:

1. Statičke veličine stanja osjeća promatrač koji se giba zajedno s fluidom
2. Totalne veličine stanja su one koje bi vladale u fluidu kada bi ga se povratnim, izentroskim procesom dovelo u stanje mirovanja
3. Dinamičke veličine stanja predstavljaju razliku između totalnih i statičkih veličina stanja
4. Zaustavne veličine stanja su one koje vladaju u točki zastoja. U izentropskom strujanju jednake su totalnim veličinama stanja
5. Kritične veličine stanja vladaju u točki u kojoj je brzina strujanja jednaka brzini zvuka ( $M=1$ ).

### 3. OPĆI SLUČAJ JEDNODIMENZIJSKOG PODZVUČNOG STLAČIVOG STRUJANJA

Sve veličine stanja smatrat ćemo funkcijom samo uzdužne koordinate, u smjeru osi strujne cijevi. Također je važno naglasiti da u viskoznom strujanju, zbog činjenice da je brzina strujanja nula na stijenama te maksimalna u središnjoj osi strujne cijevi, govorimo o srednjoj brzini strujanja te će se proračun i odnositi na tako definiranu brzinu. Prilikom izvoda jednadžbi primijeniti će se integralni oblici zakona na element strujne cijevi infinitezimalne duljine  $dx$  stoga će za promjenu svake veličine stanja (za bilo koju vrijedi  $\varphi(x, t)$ ) vrijediti da je također infinitezimalna.



$$S_{KV} = A + (A + dA) + dS_w$$

**Slika 3.** Kontrolni volumen infinitezimalnog elementa strujne cijevi

Prepostavke:

1. Strujanje je stacionarno;  $\varphi(x)$ .
2. Govorimo o idealnom plinu.
3. Vektor brzine je okomit na poprečni presjek.
4. Sve su veličine jednake po presjeku, dok u slučaju viskoznog strujanja govorimo o srednjoj brzini strujanja (koeficijente ispravka količine gibanja i kinetičke energije smatramo jednakim jedan).
5. Zanemarene su masene sile.
6. Postoji dovođenje topline.

Imajući u vidu navedene pretpostavke osnovni zakoni postavljeni za kontrolni volumen sa slike 3 glase:

### Jednadžba kontinuiteta

Ako logaritmiramo te diferenciramo jednadžbu kontinuiteta,  $m = \rho v A = \text{konst.}$ , dobije se:

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dv}{v} + \frac{dA}{A} = 0 \quad (18)$$

### Jednadžba količine gibanja

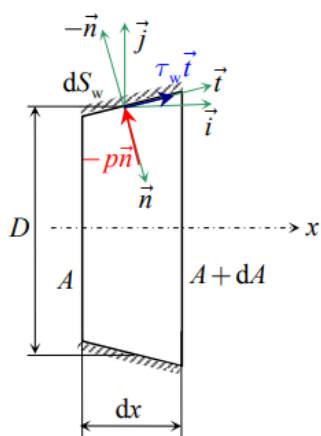
Izraz za ukupnu silu na stjenku između dva presjeka definirat ćemo pomoću jediničnog vektora brzine,  $\vec{v}^0 = \frac{\vec{v}}{v}$ , uzimajući da je na ulazu  $\vec{n} = -\vec{v}^0$ , a na izlazu  $\vec{n} = \vec{v}^0$  pa vrijedi:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{v}_2^0 [(\rho v^2 + p)A]_2 + \vec{v}_1^0 [(\rho v^2 + p)A]_1 \quad (19)$$

Kako je za kontrolni volumen na slici  $\vec{v}^0 = \vec{v}_1^0 = \vec{v}_2^0$ , skalarnim množenjem gornje jednadžbe s  $\vec{v}^0$  dobije se izraz za silu u smjeru osi x kako glasi:

$$dF = -\rho v A dv - p dA - dp A \quad (20)$$

Sila fluida na stjenku cijevi definirana je integralom vektora naprezanja po površini  $dS^w$  kako prikazuje slijedeća slika. Vektor se može napisati kao zbroj sile tlaka i viskoznih sila te se može pretpostaviti da je smično naprezanje tangencijalno na stijenku.



$$dS_w \vec{n} \cdot \vec{i} = dA$$

$$dS_w \vec{t} \cdot \vec{i} = -dS_w \vec{n} \cdot \vec{j} = O dx = D\pi dx$$

$O$  je oplakani opseg (za okrugle cijevi  $O = D\pi$ )

$$\vec{\sigma} = -p\vec{n} + \tau_w \vec{t}$$

Slika 4. Definicija vektora naprezanja po površini  $dS^w$

Vrijedi dakle:

$$dF = \vec{i} \cdot \int_{dS_w} (-p\vec{n} + \tau_w\vec{t})dS = -pdA + \tau_w Odx \quad (21)$$

Izjednačavanjem jednadžbi (20) i (21) dobije se:

$$-\rho vAdv - dpA = \tau_w Odx \quad (22)$$

Ako izrazimo smično naprezanje preko faktora trenja  $\lambda$  koji se koristi u Darcy-Weissbachovom izrazu za pad tlaka u cijevima konstantnog poprečnog presjeka  $D$  (strujanje je naravno stacionarno te s izobraženim profilom brzine) možemo pisati:

$$\tau_w = \frac{\lambda}{8} \rho v^2 \quad (23)$$

Uvrštavanjem izraza (23) u jednadžbu (22) te ako uvedemo ekvivalentni promjer  $D_e = 4 \frac{A}{O}$ , uz sređivanje dobijemo:

$$\frac{dv}{v} + \frac{1}{\kappa M^2} \frac{dp}{p} + \frac{1}{2} \lambda \frac{dx}{D_e} = 0 \quad (24)$$

### Energijska jednadžba

Do promjene totalne temperature dolazi samo pri izmjeni topline od stanja 1 do stanja 2 i to ako se toplina dovodi totalna temperatura raste, a pada u slučaju odvođenja topline što je i jasno iz jednadžbe:

$$c_p dT_0 = c_p dT + vdv = \frac{d\dot{Q}}{\dot{m}} \quad (25)$$

Dijeljenjem gornje jednadžbe s  $c_p T$  te nakon uvođenja termodinamičkih relacija i sređivanja dobije se:

$$\frac{dT}{T} + (\kappa - 1)M^2 \frac{dv}{v} = \frac{d\dot{Q}}{\dot{m}c_p T} \quad (26)$$

Gibbsova relacija

Ako podijelimo Gibbsovu relaciju s  $c_p T$  te uvedemo termodinamičke relacije vrijedi:

$$\frac{ds}{c_p} = \frac{dT}{T} - \frac{\kappa - 1}{\kappa} \frac{dp}{p} \quad (27)$$

Jednadžba stanja idealnog plina

Odnos,  $p = \rho RT$ , nakon logaritmiranja i diferenciranja glasi:

$$\frac{dp}{p} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dT}{T} \quad (28)$$

Korisno je još jednom prikazati jednadžbe koje opisuju promjene veličina stanja u stacionarnom jednodimenzijском strujanju duž cijevi promjenjive površine poprečnog presjeka te uz izmjenu topline i prisutnost trenja.

Jednadžba kontinuiteta: 
$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dv}{v} + \frac{dA}{A} = 0,$$

Jednadžba količine gibanja: 
$$\frac{dv}{v} + \frac{1}{\kappa M^2} \frac{dp}{p} + \frac{1}{2} \lambda \frac{dx}{D_e} = 0,$$

Energijska jednadžba: 
$$\frac{dT}{T} + (\kappa - 1) M^2 \frac{dv}{v} = \frac{d\dot{Q}}{\dot{m} c_p T},$$

Gibbsova relacija: 
$$\frac{ds}{c_p} = \frac{dT}{T} - \frac{\kappa - 1}{\kappa} \frac{dp}{p},$$

Jednadžba stanja idealnog plina: 
$$\frac{dp}{p} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dT}{T}.$$

Gornji sustav jednadžbi može se dodatno pojednostaviti budući je jednadžba entropije zavisna jednadžba (ovisi samo o ostalim veličinama stanja) te koristeći jednadžbu (28) može se iz jednadžbe (26) eliminirati temperatura T. Tada nam ostaje sustav tri jednadžbe s tri nepoznanice ako pretpostavimo da su promjena poprečnog presjeka po osi x,  $A(x)$ , faktor trenja  $\lambda$  te brzina izmjene topline  $\dot{Q}(x)$ , zadani. Uvođenjem relacije  $N = M^2$  sustav se može napisati u tabličnom obliku kako slijedi:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{\kappa N} \\ -1 & (\kappa-1)N & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{d\rho}{\rho} \\ \frac{dv}{v} \\ \frac{dp}{p} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{dA}{A} \\ \frac{1}{2} \lambda \frac{dx}{D_e} \\ \frac{d\dot{Q}}{\dot{m}c_p T} \end{bmatrix} \quad (29)$$

Ukoliko gornji sustav shvatimo kao sustav triju linearnih jednadžbi, moguće ga je riješiti koristeći Cramerovo pravilo.

Rješenje n-te nepoznanice dobije se kao omjer determinante  $D_n$  i determinante sustava  $D$  koja glasi:

$$D = \frac{N-1}{\kappa N} \quad (30)$$

Determinantu  $D_n$  dobijemo tako da se n-ti stupac u matrici zamijeni desnom stranom sustava jednadžbi.

Za prvu nepoznanicu,  $\frac{d\rho}{\rho}$ , determinanta  $D_1$  glasi:

$$D_1 = \begin{vmatrix} -\frac{dA}{A} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} \lambda \frac{dx}{D_e} & 1 & \frac{1}{\kappa N} \\ \frac{d\dot{Q}}{\dot{m}c_p T} & (\kappa-1)N & 1 \end{vmatrix} = -\frac{dA}{A} - \frac{d\dot{Q}}{\dot{m}c_p T} \frac{1}{\kappa N} + \frac{dA}{A} \frac{(\kappa-1)N}{\kappa} + \frac{1}{2} \lambda \frac{dx}{D_e} \quad (31)$$

Rješenje je stoga:

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{D_1}{D} = \frac{N}{1-N} \frac{dA}{A} - \frac{1}{1-N} \frac{d\dot{Q}}{\dot{m}c_p T} - \frac{1}{2} \frac{\kappa N}{1-N} \lambda \frac{dx}{D_e} \quad (32)$$

U nastavku su dane gotove jednadžbe rješenja druge i treće nepoznanice dobivene istim postupkom.

Rješenje za drugu nepoznanicu glasi:

$$\frac{dv}{v} = \frac{D_2}{D} = \frac{1}{1-N} \frac{dA}{A} + \frac{1}{1-N} \frac{d\dot{Q}}{\dot{m}c_p T} + \frac{1}{2} \frac{\kappa N}{1-N} \lambda \frac{dx}{D_e} \quad (33)$$

Za zadnju nepoznanicu rješenje je:

$$\frac{dp}{p} = \frac{D_3}{D} = \frac{\kappa N}{1-N} \frac{dA}{A} - \frac{\kappa N}{1-N} \frac{d\dot{Q}}{\dot{m}c_p T} - \frac{\kappa N [1 + (\kappa - 1)N]}{2(1-N)} \lambda \frac{dx}{D_e} \quad (34)$$

Jasno je da se sada mogu izvesti i jednačbe za ostale veličine stanja iz prije navedenih relacija te su u ovom trenutku dane gotove jednačbe promjene ostalih veličina stanja.

Gotova jednačba promjene statičke temperature po osi x glasi:

$$\frac{dT}{T} = \frac{dp}{p} - \frac{d\rho}{\rho} = \frac{(\kappa - 1)N}{1-N} \frac{dA}{A} + \frac{1 - \kappa N}{1-N} \frac{d\dot{Q}}{\dot{m}c_p T} - \frac{\kappa(\kappa - 1)N^2}{2(1-N)} \lambda \frac{dx}{D_e} \quad (35)$$

Za promjenu entropije vrijedi:

$$\frac{ds}{c_p} = \frac{dT}{T} - \frac{\kappa - 1}{\kappa} \frac{dp}{p} = \frac{d\dot{Q}}{\dot{m}c_p T} + \frac{(\kappa - 1)N}{2} \lambda \frac{dx}{D_e} \quad (36)$$

Jednačba promjene totalne temperature po osi x glasi:

$$\frac{dT_0}{T_0} = \frac{T}{T_0} \frac{d\dot{Q}}{\dot{m}c_p T} = \frac{1}{1 + \frac{\kappa - 1}{2} N} \frac{d\dot{Q}}{\dot{m}c_p T} \quad (37)$$

Totalni tlak mijenja se po osi x kako slijedi:

$$\frac{dp_0}{p_0} = \frac{dp}{p} + \frac{\kappa}{\kappa - 1} \left( \frac{dT_0}{T_0} - \frac{dT}{T} \right) = \frac{-\kappa N}{2 \left[ 1 + \frac{(\kappa - 1)}{2} N \right]} \frac{d\dot{Q}}{\dot{m}c_p T} - \frac{\kappa N}{2} \lambda \frac{dx}{D_e} \quad (38)$$

### 3.1 Priprema jednačbi općeg slučaja jednodimenzijskog stlačivog strujanja za simulaciju

Izvedeni sustav jednačbi nema analitičko rješenje ako govorimo o strujanju kroz cijev promjenjivog poprečnog presjeka uz izmjenu topline i prisutnost trenja. Već je ranije naglašeno da se bilo koja veličina koja se pojavljuje u strujanju može prikazati kao  $\varphi(x)$  odnosno vrijedi:

$$d\varphi = \frac{d\varphi}{dx} dx \quad (39)$$



Iz tog razloga dijeljenjem izvedenih jednadžbi s  $dx$  sustav možemo shvatiti kao sustav običnih diferencijalnih jednadžbi (sve veličine su funkcija jedne koordinate – osi  $x$ ) i vrlo

efikasno ga se može riješiti koristeći numeričke metode. U ovom je radu korištena metoda Runge-Kutta sadržana u programskom paketu „Octave“ koja će u slijedećem poglavlju biti detaljnije analizirana.

Podijeli li se dakle jednadžba promjene gustoće s  $dx$  dobije se:

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dx} = \frac{N}{(1-N)A} \frac{dA}{dx} - \frac{1}{(1-N)\dot{m}c_p T} \frac{d\dot{Q}}{dx} - \frac{\kappa N}{2(1-N)D_e} \lambda \quad (40)$$

Te sređivanjem lijeve strane dobijemo:

$$\frac{d\rho}{dx} = \left[ \frac{N}{(1-N)A} \frac{dA}{dx} - \frac{1}{(1-N)\dot{m}c_p T} \frac{d\dot{Q}}{dx} - \frac{\kappa N}{2(1-N)D_e} \lambda \right] \rho \quad (41)$$

Jednadžba (41) dovedena je u oblik pogodan za unos u programski kod simulacije. I ostale jednadžbe istim su postupkom dovedene u pogodan oblik te glase:

Promjena brzine:

$$\frac{dv}{dx} = \left[ -\frac{1}{(1-N)A} \frac{dA}{dx} + \frac{1}{(1-N)\dot{m}c_p T} \frac{d\dot{Q}}{dx} + \frac{\kappa N}{2(1-N)D_e} \lambda \right] v \quad (42)$$

Promjena statičkog tlaka:

$$\frac{dp}{dx} = \left\{ \frac{\kappa N}{(1-N)A} \frac{dA}{dx} - \frac{\kappa N}{(1-N)\dot{m}c_p T} \frac{d\dot{Q}}{dx} - \frac{\kappa N[1 + (\kappa - 1)N]}{2(1-N)D_e} \lambda \right\} p \quad (43)$$

Promjena statičke temperature:

$$\frac{dT}{dx} = \left[ \frac{(\kappa - 1)N}{(1-N)A} \frac{dA}{dx} + \frac{1 - \kappa N}{(1-N)\dot{m}c_p T} \frac{d\dot{Q}}{dx} - \frac{\kappa(\kappa - 1)N^2}{2(1-N)D_e} \lambda \right] T \quad (44)$$

Promjena totalnog tlaka:

$$\frac{dp_0}{dx} = \left\{ \frac{-\kappa N}{2 \left[ 1 + \frac{(\kappa-1)}{2} N \right] \dot{m} c_p T} \frac{d\dot{Q}}{dx} - \frac{\kappa N}{2 D_e} \lambda \right\} p_0 \quad (45)$$

Promjena totalne temperature:

$$\frac{dT_0}{dx} = \left[ \frac{1}{\left( 1 + \frac{\kappa-1}{2} N \right) \dot{m} c_p T} \frac{d\dot{Q}}{dx} \right] T_0 \quad (46)$$

Promjena entropije:

$$\frac{ds}{dx} = \left[ \frac{1}{\dot{m} c_p T} \frac{d\dot{Q}}{dx} + \frac{(\kappa-1)N}{2 D_e} \lambda \right] c_p \quad (47)$$

Zgodno je također izvesti jednadžbu promjene Machovog broja odnosno veličine  $N$  koja predstavlja kvadrirani Machov broj. Budući je Machov broj omjer brzine i brzine zvuka (funkcija temperature) lako se izvede jednadžba iz već poznatih jednadžbi promjene brzine i promjene temperature pa vrijedi:

$$\frac{dN}{dx} = \left[ -\frac{2 \left( 1 + \frac{\kappa-1}{2} N \right)}{(1-N)A} \frac{dA}{dx} + \frac{1 + \kappa N}{(1-N)\dot{m} c_p T} \frac{d\dot{Q}}{dx} + \frac{\kappa N \left( 1 + \frac{\kappa-1}{2} N \right)}{(1-N)D_e} \lambda \right] N \quad (48)$$

## 4. RAČUNALNI PROGRAM „OCTAVE“

Octave je zapravo razvijeni programski jezik primarno namijenjen za numeričke izračune. Program je besplatan te slobodno dostupan. Specifičan je po tome što služi kao odlična i besplatna zamjena za najpoznatiji i najkorišteniji program „MatLab“. Velika većina funkcija kompatibilna je s Matlabom te su osnovni algoritmi jednaki ili jako slični. Funkcija koja je korištena u ovom radu za izračun sustava običnih diferencijalnih jednadžbi, „ode45“, razvijena je za Matlab, no u potpunosti je kompatibilna s Octaveom.

### 4.1 Funkcija „ode45“

Već je ranije naglašeno kako će se izvedeni sustav jednadžbi rješavati numeričkom metodom Runge-Kutta. Algoritam funkcije „ode45“ spada u familiju upravo Runge-Kutta metoda. Namijenjen je za rješavanje problema početnih uvjeta običnih diferencijalnih jednadžbi (engl. *Ordinary Differential Equation* – ® *ODE*) kakav je i problem analiziran u ovome radu. Baziran je na Dormand-Prince metodi (spada u familiju Runge-Kutta metoda) koja koristi varijabilni korak.

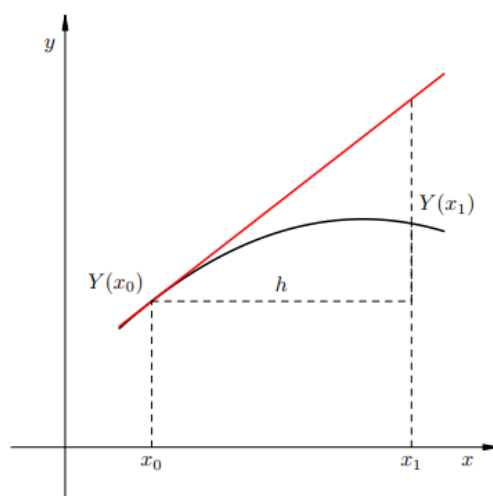
### 4.2 Dormand – Prince metoda

Runge-Kutta metode općenito imaju oblik:

$$y_{n+1} = y_n + \sum_{i=1}^p w_i k_i \quad (49)$$

Gdje su  $w_i$  konstante, a za  $k_i$  vrijedi:

$$k_i = h_n f \left( x_n + \alpha_i h_n, y_n + \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij} k_j \right) \quad (50)$$



Slika 5. Uz opis Runge-Kutta metode

pri čemu je  $\alpha_1 = 0$  dok se ostali koeficijenti biraju na način da formula što bolje aproksimira rješenje diferencijalne jednadžbe. U nastavku je prikazan jedan korak Dormand-Prince metode.

$$\begin{aligned}
 k_1 &= hf(t_n, y_n), \\
 k_2 &= hf\left(t_n + \frac{1}{5}h, y_n + \frac{1}{5}k_1\right), \\
 k_3 &= hf\left(t_n + \frac{3}{10}h, y_n + \frac{3}{40}k_1 + \frac{9}{40}k_2\right), \\
 k_4 &= hf\left(t_n + \frac{4}{5}h, y_n + \frac{44}{45}k_1 - \frac{56}{15}k_2 + \frac{32}{9}k_3\right), \\
 k_5 &= hf\left(t_n + \frac{8}{9}h, y_n + \frac{19372}{6561}k_1 - \frac{25360}{2187}k_2 + \frac{64448}{6561}k_3 - \frac{212}{729}k_4\right), \\
 k_6 &= hf\left(t_n + h, y_n + \frac{9017}{3168}k_1 - \frac{355}{33}k_2 - \frac{46732}{5247}k_3 + \frac{49}{176}k_4 - \frac{5103}{18656}k_5\right), \\
 k_7 &= hf\left(t_n + h, y_n + \frac{35}{384}k_1 + \frac{500}{1113}k_3 + \frac{125}{192}k_4 - \frac{2187}{6784}k_5 + \frac{11}{84}k_6\right).
 \end{aligned}$$

Vrijednost sljedećeg koraka se tada računa kao:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{35}{348}k_1 + \frac{500}{1113}k_3 + \frac{125}{192}k_4 - \frac{2187}{6784}k_5 + \frac{11}{84}k_6$$

Ovaj postupak predstavlja Runge-Kutta metodu četvrtog reda. Zatim se računa vrijednost istog koraka, no ovog puta metodom petog reda kako slijedi:

$$z_{n+1} = y_n + \frac{5179}{57600}k_1 + \frac{7571}{16695}k_3 + \frac{393}{640}k_4 - \frac{92097}{339200}k_5 + \frac{187}{2100}k_6 + \frac{1}{40}k_7$$

Zatim se izračuna vrijednost pogreške koja je definirana odnosom  $|z_{n+1} - y_{n+1}|$  te se potom može izračunati optimalni korak koji će se koristiti u sljedećem koraku prema jednadžbi:

Gdje je  $s$  (epsilon u jednadžbi je tolerancija koju zadaje korisnik):

$$s = \left( \frac{\epsilon h}{2|z_{n+1} - y_{n+1}|} \right)^{\frac{1}{5}}$$

## 5. SIMULACIJA STRUJANJA

Potrebno je prije svega navesti vrstu plina te početne uvjete kako bi bilo moguće provesti simulaciju strujanja. Zrak je izabran za vrstu plina te su njegove konstante:

$$R = 287.1 \left[ \frac{\text{J}}{\text{kgK}} \right],$$

$$\kappa = 1.4,$$

$$c_p = 1005 \left[ \frac{\text{J}}{\text{kgK}} \right]$$

Početni uvjeti te maseni protok proizvoljno su izabrani te glase:

$$\dot{m} = 1 \left[ \frac{\text{kg}}{\text{s}} \right],$$

$$(\rho)_0 = 3.447 \left[ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right],$$

$$(v)_0 = 9.233 \left[ \frac{\text{m}}{\text{s}} \right],$$

$$(p)_0 = 300000 \text{ [Pa]},$$

$$(T)_0 = 303.1 \text{ [K]},$$

$$(p_0)_0 = 300100 \text{ [Pa]},$$

$$(T_0)_0 = 303.2 \text{ [K]}$$

### 5.1 Računalni kod simulacije

Simulacija je izvedena u dvije skripte, u prvoj, strujanje\_ode, napisana je funkcija ode45 koja rješava ranije izveden sustav diferencijalnih jednačbi, dok su same jednačbe te sve potrebne konstante napisane u drugoj skripti, dif\_jednačbe, koja se poziva unutar funkcije ode45. U nastavku će biti uspoređeni rezultati simulacije posebnih slučajeva podzvučnog strujanja, te će prilikom svakog od njih skripte biti uređene kako zahtijeva određeni tip strujanja.

## 5.2 Izentropsko strujanje u cijevi promjenjive površine poprečnog presjeka

U ovom posebnom slučaju stlačivog strujanja jednadžbe općeg slučaja prelaze u puno jednostavniji oblik koji je moguće analitički riješiti. Budući pri izentropskom strujanju zanemarujemo izmjenu topline i utjecaj trenja, ostaje samo prvi član u jednadžbama, vezan uz promjenu površine poprečnog presjeka po osi  $x$ . Lako se tada dolazi do analitičkog rješenja za, npr., kritičnu površinu pri određenom Machovom broju kako slijedi:

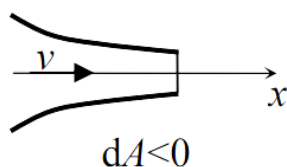
$$\frac{A}{A_{kr}} = \frac{1}{M} \left[ \frac{2 \left( 1 + \frac{\kappa - 1}{2} M^2 \right)}{\kappa + 1} \right]^{\frac{\kappa + 1}{2(\kappa - 1)}}$$

Za statički tlak pri određenom Machovom broju jednadžba glasi:

$$\frac{p_0}{p} = \left( 1 + \frac{\kappa - 1}{2} M^2 \right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}}$$

Pretpostavimo u ovom trenutku konvergentni kanal početnog promjera  $d = 0.2$  m odnosno početne površine poprečnog presjeka  $A = \frac{d^2 \pi}{4} = 0.031416 \text{ m}^2$  lako možemo izračunati kritičnu površinu budući je Machov broj u početnom položaju  $M_1 = \frac{9.233}{\sqrt{1.4 \cdot 287.1 \cdot 303.1}} = 0.026453$

KONVERGENTNI  
KANAL



$$A_{kr} = \frac{0.03142}{0.026453} \left[ \frac{2 \left( 1 + \frac{1.4 - 1}{2} 0.026453^2 \right)}{1.4 + 1} \right]^{\frac{1.4 + 1}{2(1.4 - 1)}}$$

$$A_{kr} = 0.0014356 \text{ m}^2$$

Slika 6. Konvergentni kanal

Funkcija promjene promjera po osi x glasi:  $d(x) = \left| \frac{1}{x+5} \right|$ , pa ako izračunamo kritični promjer  $d_{kr} = \sqrt{\frac{4A_{kr}}{\pi}} = 0.042754\text{m}$ , možemo izračunati vrijednost x odnosno kritičnu duljinu cijevi do koje ćemo provesti simulaciju te ona glasi  $x_{kr} = \frac{1}{d_{kr}} - 5 = 18.390\text{ m}$ .

Skripta strujanje\_ode će dakle u slučaju izentropskog strujanje kroz cijev promjenjive površine poprečnog presjeka biti provedena do duljine cijevi od 18.390 m. te je njen kod napisan kako slijedi:

```

1 %strujanje_ode.m - ode45 solver-izentropsko strujanje
2 clear all
3 clc
4
5 R_zr=287.1; %J/kgK
6 iz_eks=1.4;
7
8 x=[0:0.01:18.390];
9 pocetni_uvjeti=[3.447;9.233;300000;303.1;300100;303.2];
10
11 [x,y]=ode45(@dif_jednadzbe , x , pocetni_uvjeti);
12
13 d=abs(1./(x+5));
14 A=((d.^2)*3.1416)/4;
15 M=y(:,2)./sqrt(iz_eks*R_zr.*y(:,4));
16
17 for k=1:length(M)
18
19     A_kroz_Akr(:,k)=(((2*(1+((1.4-1)/2).*(M(k).*M(k)))/(1.4+1)).^((1.4+1)/(2*(1.4-1))))*(1/M(k)));
20
21 end

```

Funkcija „for“ na kraju skripte služi za računanje analitičkih rješenja. Kao što je već rečeno i jasno vidljivo iz koda, poziva se funkcija dif\_jednadzbe te njen kod u slučaju izentropskog strujanja glasi:

```

1 function dfi=dif_jednadzbe(x , y)
2 % konstante
3 m=1; %kg/s
4 iz_eks=1.4;
5 cp=1005; % J/kgK
6 R_zr=287.1; % J/kgK
7 d=abs(1/(x+5));
8 A=((d.^2)*3.1416)/4;
9 De=4*A/(d*3.1416); % m - efektivni promjer za trenje
10 M=y(2)/(sqrt(R_zr*iz_eks*y(4)));
11 N=M*M;
12 % zadane derivacije funkcija promjene velicina po x-u i koef.trenja
13 A_der=(-3.1416/(2*(5+x).^3));
14 Q_der=0; %W/m
15 lamda=0;

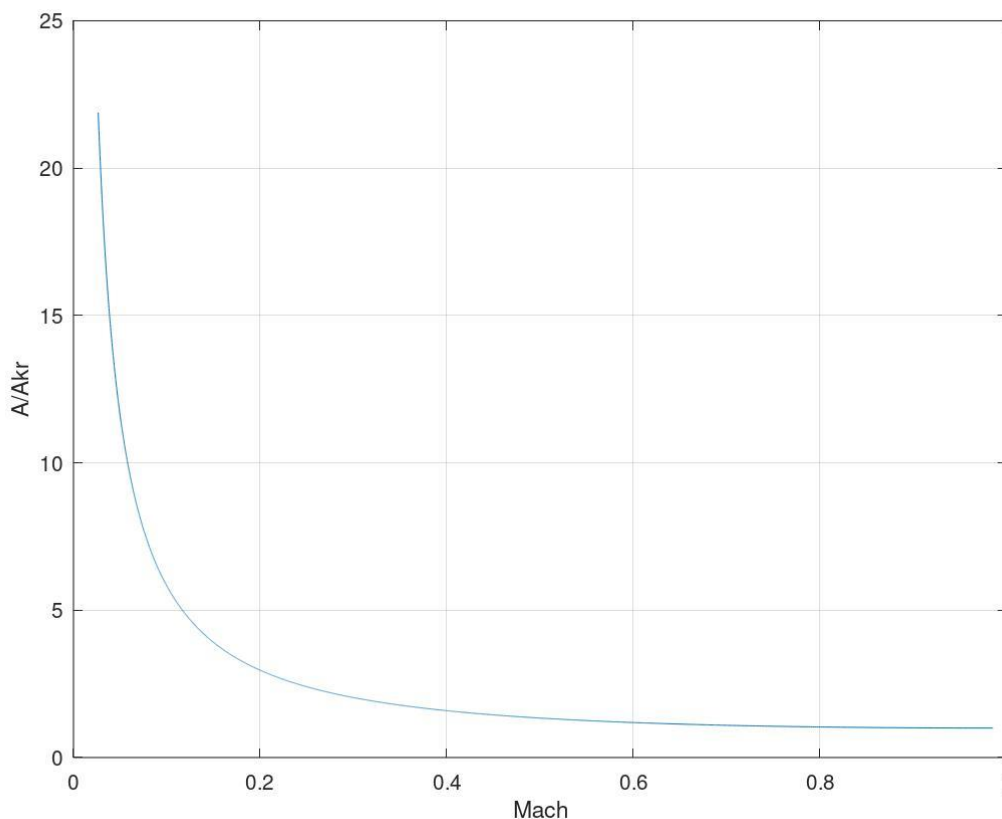
```

```

16 % obicne diferencijalne jednadzbe dinamike plina
17 dfi(1)=((N/(A*(1-N)))*A_der)-((1/((1-N)*m*cp*y(4)))*Q_der)-((0.5*iz_eks*N/((1-N)*De))*
lamda))*y(1);
18 % gustoca
19 dfi(2)=-((1/(A*(1-N)))*A_der)+((1/((1-N)*m*cp*y(4)))*Q_der)+((0.5*iz_eks*N/((1-N)*De))*
lamda))*y(2);
20 % brzina
21 dfi(3)=(((iz_eks*N)/(A*(1-N)))*A_der)-((iz_eks*N/((1-N)*m*cp*y(4)))*Q_der)-((iz_eks*N*(1
+(iz_eks-1)*N)/(2*(1-N)*De))*lamda))*y(3);
22 % staticki tlak
23 dfi(4)=(((iz_eks-1)*N)/(A*(1-N)))*A_der)+((1-iz_eks*N/((1-N)*m*cp*y(4)))*Q_der)-((0.5
*iz_eks*N.^2*(iz_eks-1)/((1-N)*De))*lamda))*y(4);
24 % staticka temperatura
25 dfi(5)=-(((iz_eks*N)/(2*(1+(iz_eks-1)/2)*N))*m*cp*y(4))*Q_der)-(((iz_eks*N)/(2*De))*
lamda))*y(5);
26 % totalni tlak
27 dfi(6)=((1/((1+(iz_eks-1)/2)*N))*m*cp*y(4))*Q_der)*y(6);
28 % totalna temperatura
29
30 dfi=dfi(:);
31 end

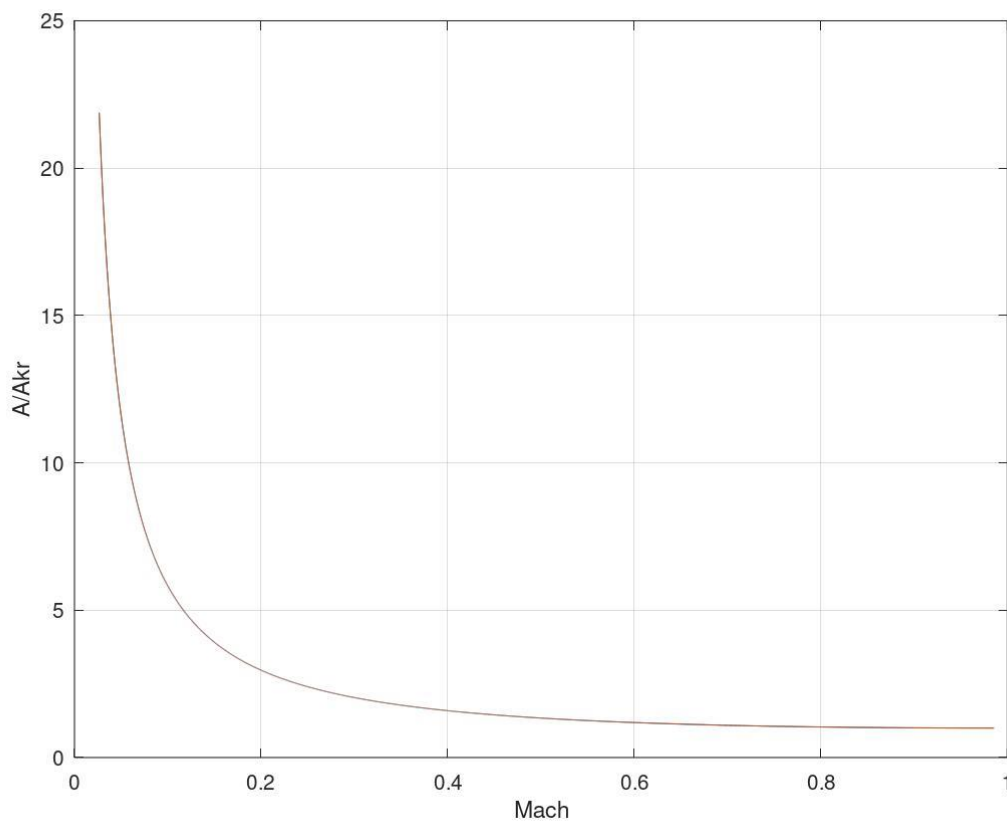
```

Rješenja simulacije te analitička rješenja za određeni Machov broj prikazana su u istom dijagramu no zbog velike podudarnosti rezultata svrsi je shodno prikazati ih u 3 koraka.



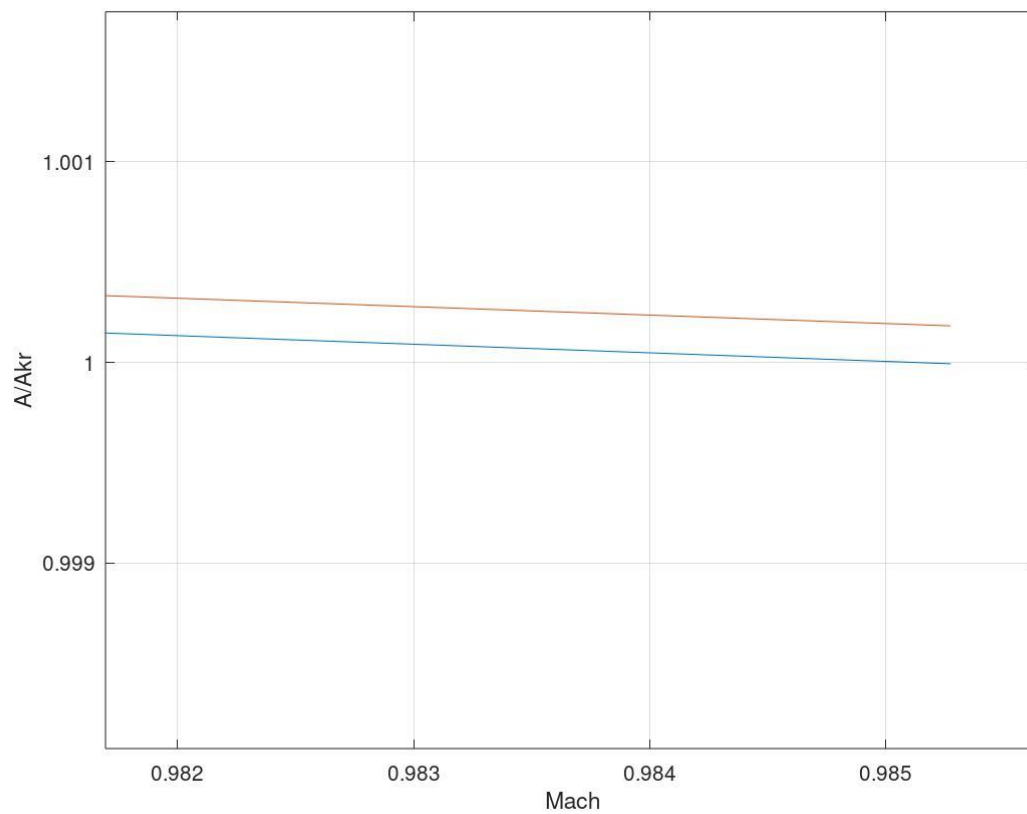
**Slika 7.** Analitička rješenja za izentropsko strujanje





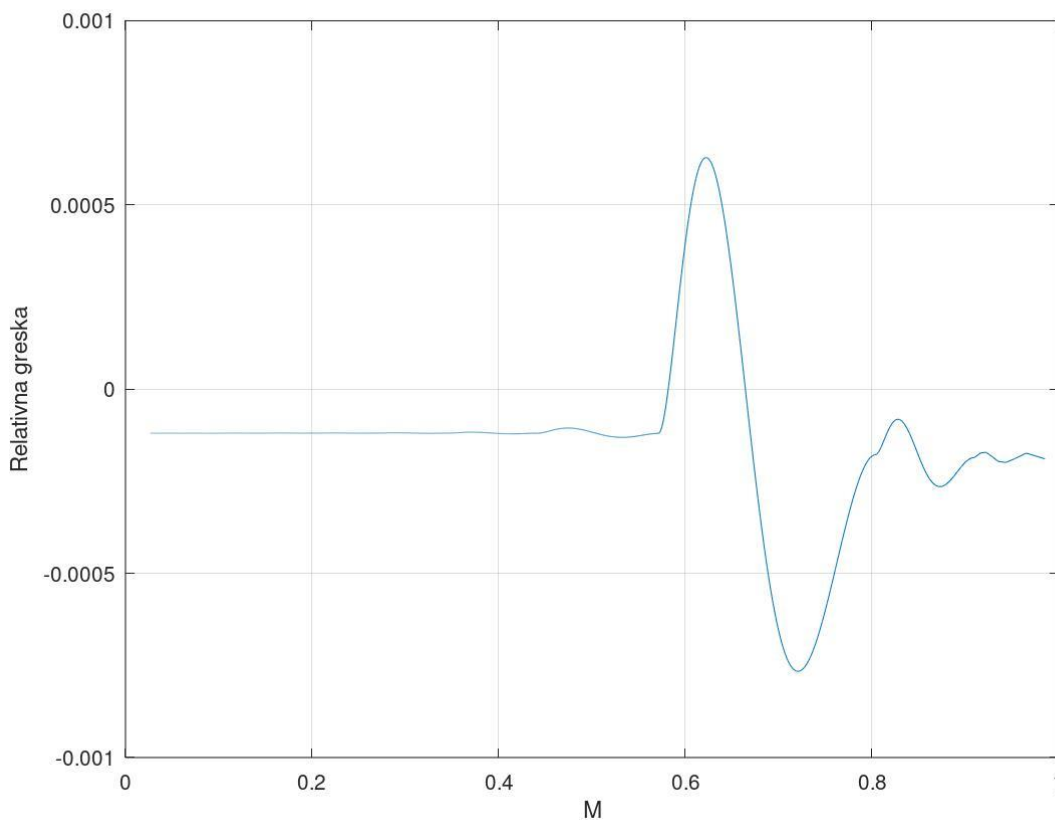
**Slika 8.** Usporedba analitičkih rješenja i rješenja simulacije

Na slici 8 rješenja simulacije prikazana su crvenom krivuljom, no zbog male greške krivulje je teško razlikovati. Sljedeća slika prikazuje približavanje Machovom broju jedan te se lako mogu razlikovati plava (analitička rješenja) od crvene (simulacija) krivulje.



**Slika 9.** Razlika analitičkih rješenja i rješenja simulacije

Nakon male, ali jasne razlike u rješenjima svrsi je shodno prikazati relativnu grešku prilikom simulacije. Na sljedećoj slici prikazana je relativna greška koja je definirana kao razlika rješenja podijeljena s analitičkim rješenjem. Greška će biti prikazana i za svaki sljedeći slučaj strujanja.

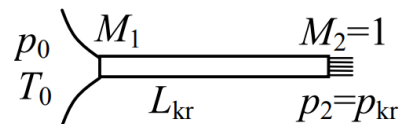


**Slika 10.** Relativna greška – izentropsko strujanje

### 5.3 Fannovo strujanje u cijevi konstantnog poprečnog presjeka

Prisutnost trenja jedini je efekt koji se promatra pri Fannovom strujanju. Budući su promjena površine poprečnog presjeka i izmjena topline jednaki nula, postoje analitička rješenja i za ovaj slučaj strujanja.

Da bi znali do koje duljine cijevi treba provesti simulaciju potrebno je izračunati kritičnu duljinu  $L_{kr}$ .



**Slika 11.** Kritična duljina

Pretpostavimo koeficijent trenja  $\lambda = 0.0163$  te promjer  $d = 0.2$  m odnosno tada vrijedi:

$$D_e = \frac{4 \cdot 0.2^2 \pi}{0.2\pi} = d = 0.2 \text{ m}$$

Sada možemo doći do kritične duljine iz jednadžbe:

$$\lambda \frac{L_{kr}}{D_e} = \frac{1 - M^2}{\kappa M^2} + \frac{(\kappa + 1)}{2\kappa} \ln \left[ \frac{(\kappa + 1)M^2}{2 \left( 1 + \frac{\kappa - 1}{2} M^2 \right)} \right]$$

te uz početni Machov broj  $M_1 = \frac{31.76}{\sqrt{1.4 \cdot 287.1 \cdot 302.7}} = 0.0910465$  kritična duljina je jednaka:

$$L_{kr} = 1000 \text{ m}$$

Početna brzina u Fannovom strujanju te temperatura namjerno su izabrane 31.76 m/s odnosno 302.7 K kako bi kritična duljina ispala 1000 m zbog lakšeg crtanja grafova u programu.

Skriptu „strujanje\_ode“ treba prilagoditi Fannovom strujanju pa kod izgleda kako slijedi:

```

1 %strujanje_ode.m - ode45 solver-Fannovo strujanje
2 clear all
3 clc
4
5 R_zr=287.1; %J/kgK
6 iz_eks=1.4;
7
8 x=[0:1000];
9 pocetni_uvjeti=[1.002;31.76; 87090;302.7; 87600;303.2];
10
11 [x,y]=ode45(@dif_jednadzbe , x , pocetni_uvjeti);
12
13 M=y(:,2)./sqrt(iz_eks*R_zr.*y(:,4));

```

Također je potrebno prilagoditi i kod skripte „dif\_jednadzbe“ te on za Fannovo strujanje glasi kako slijedi:

```

1 function dfi=dif_jednadzbe(x , y)
2 % konstante
3 m=1; %kg/s
4 iz_eks=1.4;
5 cp=1005; % J/kgK
6 R_zr=287.1; % J/kgK
7 d=0.2;
8 A=((d^2)*3.1416)/4;

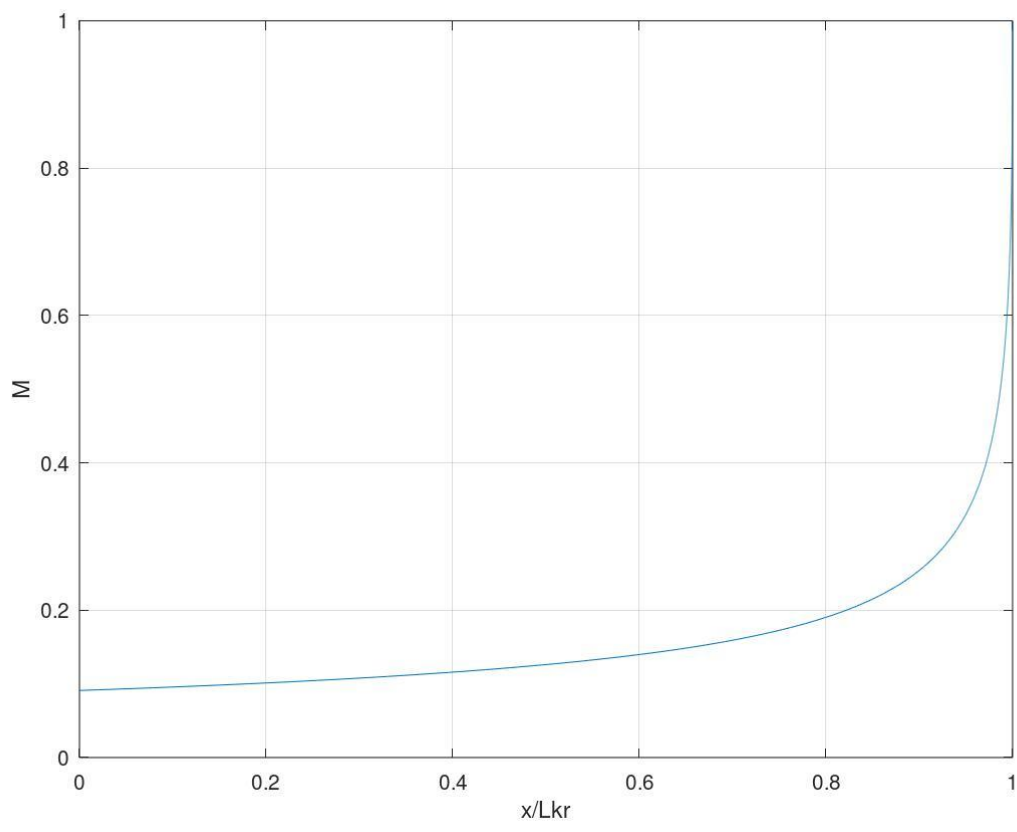
```

```

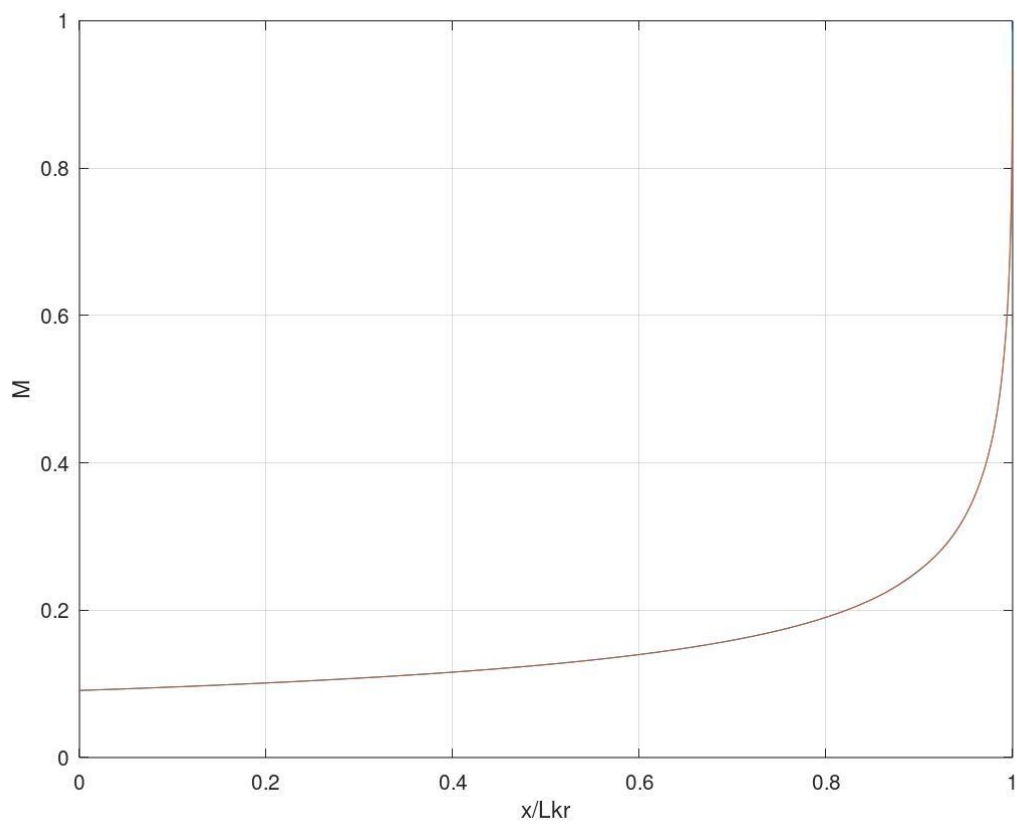
9 De=4*A/(d*3.1416); % m - efektivni promjer za trenje
10 M=y(2)/(sqrt(R_zr*iz_eks*y(4)));
11 N=M*M;
12 % zadane derivacije funkcija promjene velicina po x-u i koef.trenja
13 A_der=0;
14 Q_der=0; % W/m
15 lamda=0.0163;
16 % obicne diferencijalne jednadzbe dinamike plina
17 dfi(1)=[((N/(A*(1-N)))*A_der)-((1/((1-N)*m*cp*y(4)))*Q_der)-((0.5*iz_eks*N/((1-N)*De))*lam
da)]*y(1);
18 % gustoca
19 dfi(2)=[-((1/(A*(1-N)))*A_der)+((1/((1-N)*m*cp*y(4)))*Q_der)+((0.5*iz_eks*N/((1-N)*De))*la
mda)]*y(2);
20 % brzina
21 dfi(3)=[(((iz_eks*N)/(A*(1-N)))*A_der)-((iz_eks*N/((1-N)*m*cp*y(4)))*Q_der)-((iz_eks*N*(1+
(iz_eks-1)*N)/(2*(1-N)*De))*lamda)]*y(3);
22 % staticki tlak
23 dfi(4)=[(((iz_eks-1)*N)/(A*(1-N)))*A_der]+(((1-iz_eks*N/((1-N)*m*cp*y(4)))*Q_der)-(((0.5
*iz_eks*(iz_eks-1)*N.^2)/((1-N)*De))*lamda)]*y(4);
24 % staticka temperatura
25 dfi(5)=[-(((iz_eks*N)/(2*(1+((iz_eks-1)/2)*N))*m*cp*y(4)))*Q_der]-(((iz_eks*N)/(2*De))*la
mda)]*y(5);
26 % totalni tlak
27 dfi(6)=[(1/(((1+((iz_eks-1)/2)*N))*m*cp*y(4)))*Q_der]*y(6);
28 % totalna temperatura
29
30 dfi=dfi(:);
31 end

```

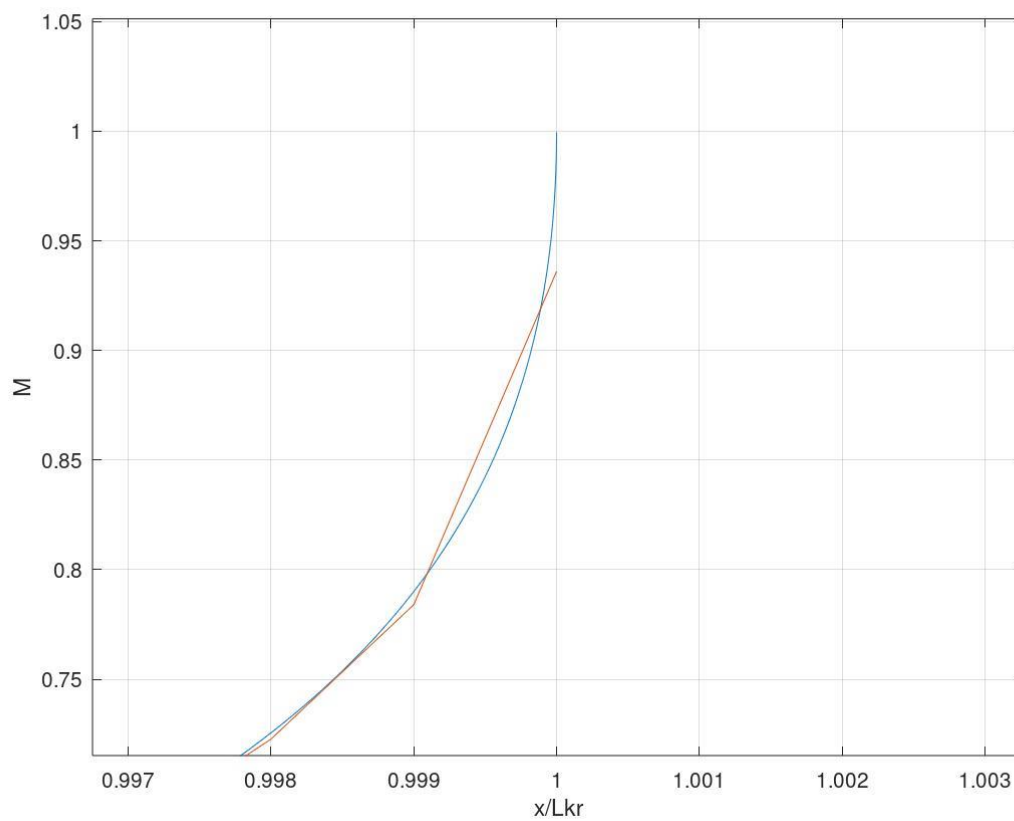
Kao i kod izentropskog strujanja rješenja su prikazana u istom dijagramu te kao i prošli put zbog podudarnosti prikazana su u nekoliko koraka. Prva slika prikazuje analitička rješenja krivuljom plave boje, dok je na drugoj slici dodana krivulja rješenja simulacije – crvenom bojom. Jasno je vidljivo da je ponovno točnost velika, no u okolini Machovog broja jedan postoji odstupanje koje je zorno prikazano trećom slikom.



Slika 12. Analitička rješenja – Fannovo strujanje

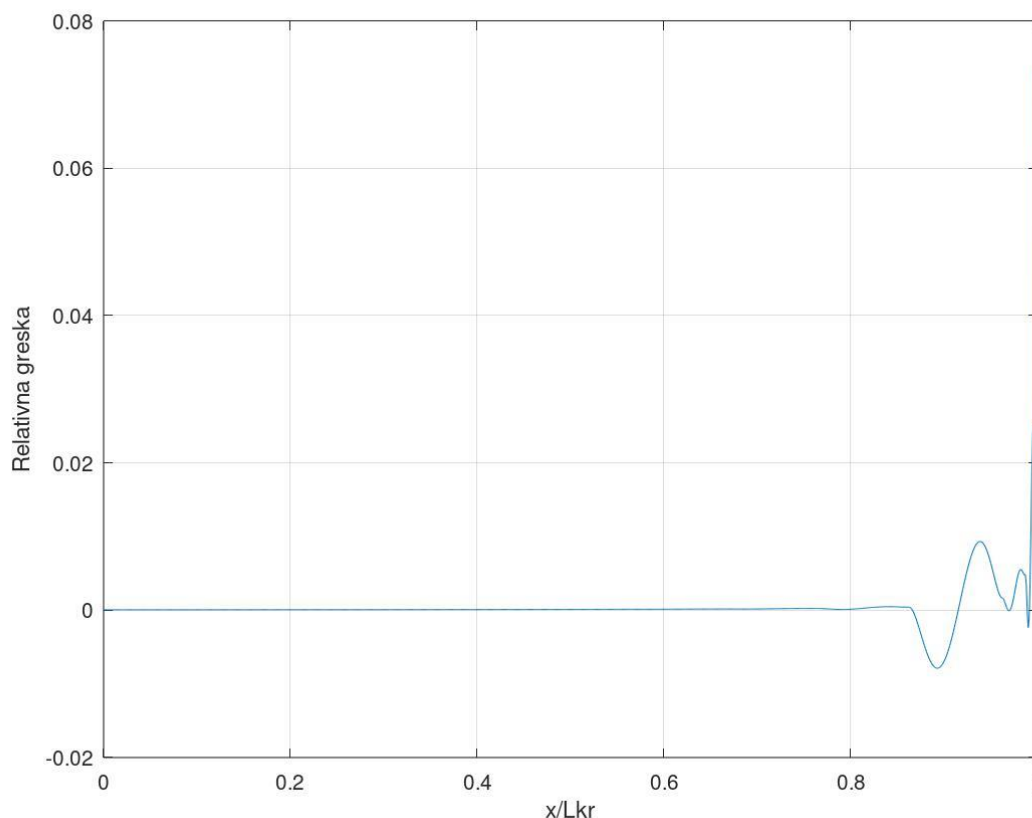


**Slika 13.** Usporedba analitičkih rješenja i rješenja simulacije – Fannovo strujanje



**Slika 14.** Razlika analitičkih rješenja i rješenja simulacije – Fannovo strujanje





Slika 15. Relativna greška - Fannovo strujanje

#### 5.4 Rayleighovo strujanje u cijevi konstantnog poprečnog presjeka

Rayleighovo strujanje karakterizira izmjena topline duž strujne cijevi konstantnog poprečnog presjeka uz zanemiravanje efekata vezanih uz trenje. To je ponovno slučaj za koji postoje analitička rješenja općih jednadžbi stlačivog strujanja.

Pretpostavimo li u ovom slučaju početnu veličinu Machovog broja 0.5 lako možemo izračunati kolika je kritična temperatura ako grijemo struju plina.

$$\frac{T}{T_{kr}} = \frac{(1 + \kappa)^2 N}{(1 + \kappa N)^2}$$

$T_{kr}$  je prema gornjoj jednadžbi za Mach=0.5 i jednaku početnu temperaturu kao i kod Fannovog strujanja jednaka:

$$T_{kr} = 383.1 \text{ K}$$

Isto kao i do sada potrebno je urediti kodove skripti za simulaciju te skripta „strujanje\_ode“ glasi:

```

1 %strujanje_ode.m - ode45 solver-Rayleighovo strujanje
2 clear all
3 clc
4
5 R_zr=287.1; %J/kgK
6 iz_eks=1.4;
7
8 x=[0:50];
9 pocetni_uvjeti=[0.1825;174.4;15860;302.7;18810;317.8];
10
11 [x,y]=ode45(@dif_jednadzbe , x , pocetni_uvjeti);
12
13 M=y(:,2)./sqrt(iz_eks*R_zr.*y(:,4));

```

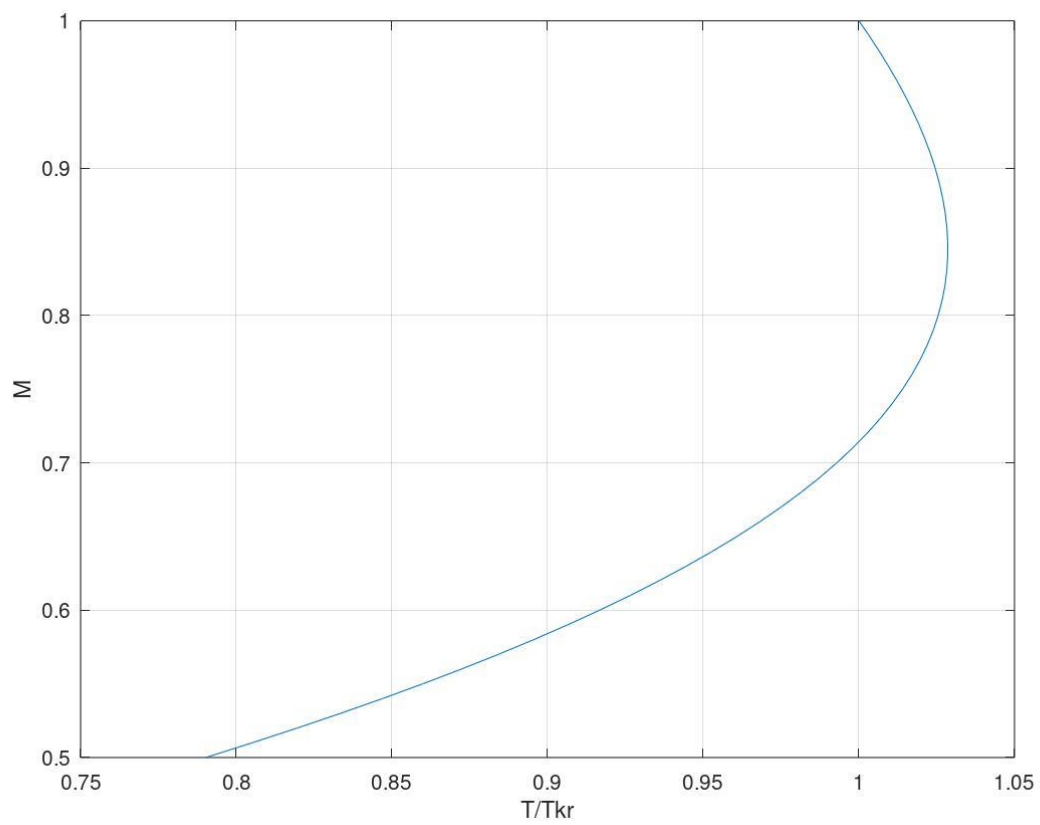
Skripta „dif\_jednadzbe“ glasi:

```

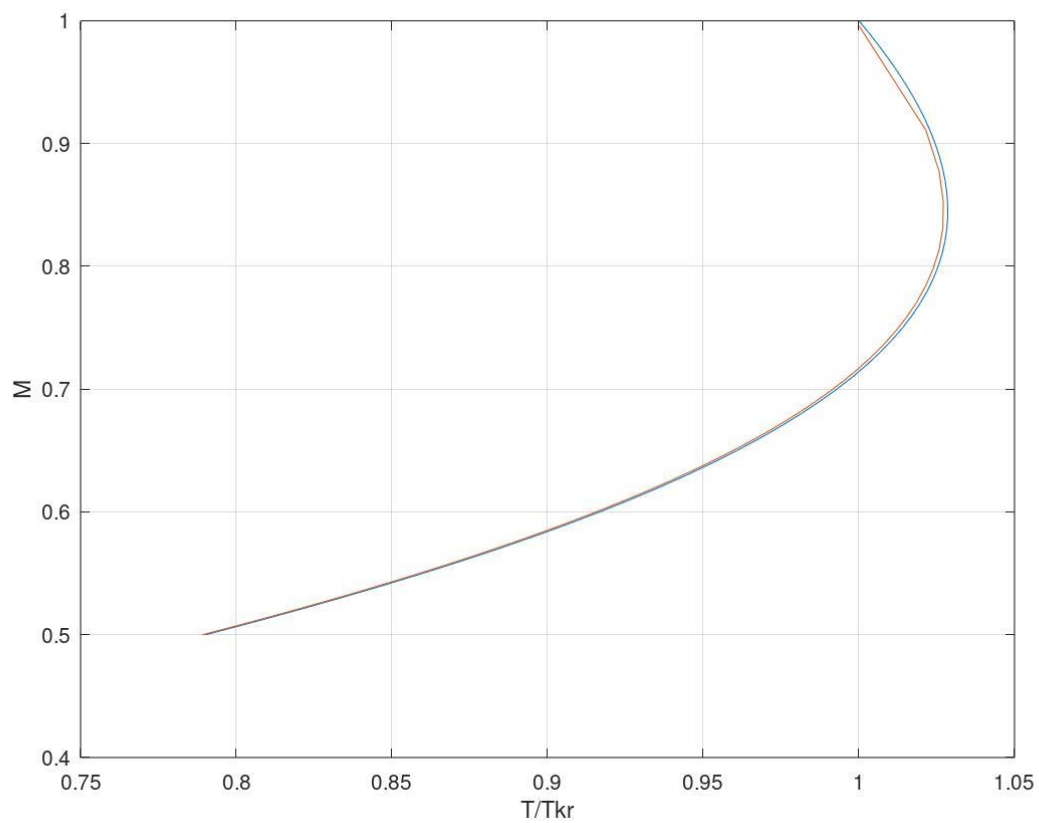
1 function dfi=dif_jednadzbe(x , y)
2 % konstante
3 m=1; %kg/s
4 iz_eks=1.4;
5 cp=1005; % J/kgK
6 R_zr=287.1; % J/kgK
7 d=0.2;
8 A=((d^2)*3.1416)/4;
9 De=4*A/(d*3.1416); % m - efektivni promjer za trenje
10 M=y(2)/(sqrt(R_zr*iz_eks*y(4)));
11 N=M*M;
12 % zadane derivacije funkcija promjene velicina po x-u i koef.trenja
13 A_der=0;
14 Q_der=2852.2; % W/m
15 lamda=0;
16 % obicne diferencijalne jednadzbe dinamike plina
17 dfi(1)=[(((N/(A*(1-N))) * A_der) - ((1/((1-N)*m*cp*y(4))) * Q_der) - ((0.5*iz_eks*N/((1-N)*De)) * lamda)) * y(1);
18 % gustoca
19 dfi(2)=[(-(1/(A*(1-N))) * A_der) + ((1/((1-N)*m*cp*y(4))) * Q_der) + ((0.5*iz_eks*N/((1-N)*De)) * lamda)) * y(2);
20 % brzina
21 dfi(3)=[(((iz_eks*N)/(A*(1-N))) * A_der) - ((iz_eks*N/((1-N)*m*cp*y(4))) * Q_der) - ((iz_eks*N*(1+(iz_eks-1)*N)/(2*(1-N)*De)) * lamda)) * y(3);
22 % staticki tlak
23 dfi(4)=[(((iz_eks-1)*N)/(A*(1-N))) * A_der + (((1-iz_eks*N)/((1-N)*m*cp*y(4))) * Q_der) - (((1-iz_eks*(iz_eks-1)*N.^2)/((1-N)*De)) * lamda)) * y(4);
24 % staticka temperatura
25 dfi(5)=[(-(((iz_eks*N)/(2*(1+((iz_eks-1)/2)*N)) * m*cp*y(4))) * Q_der) - (((iz_eks*N)/(2*De)) * lamda)) * y(5);
26 % totalni tlak
27 dfi(6)=[(1/((1+((iz_eks-1)/2)*N)) * m*cp*y(4)) * Q_der] * y(6);
28 % totalna temperatura
29
30 dfi=dfi(:);
31 end

```

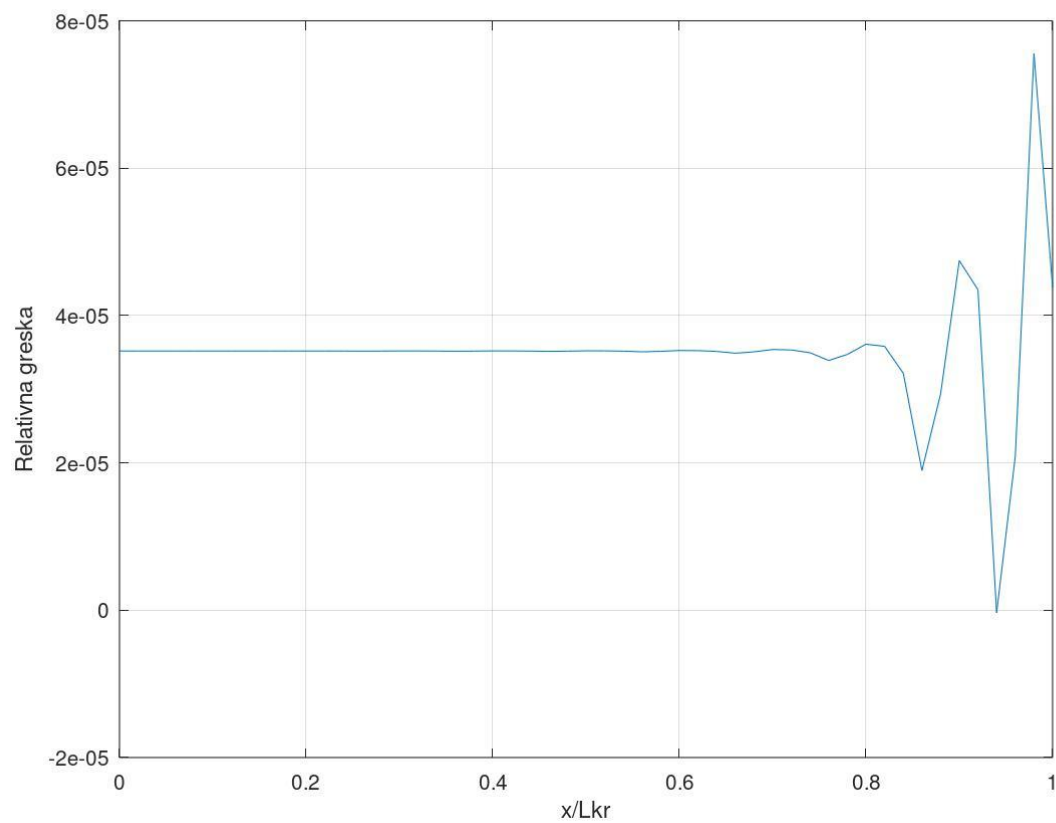
Riješenja su prikazanu u nastavku kao i u prethodna dva slučaja. Plava krivulja na prvoj slici predstavlja analitička rješenja, dok je crvena krivulja rješenje simulacije.



Slika 16. Analitička rješenja – Rayleighovo strujanje



**Slika 17.** Usporedba analitičkih rješenja i rješenja simulacije – Rayleighovo strujanje



**Slika 18.** Relativna greška – Rayleighovo strujanje

## 5.5 Riješenje problema općeg slučaja stlačivog strujanja

Nakon što je prošlim primjerima potvrđena velika točnost simulacije riješit će se problem u kojem svi efekti igraju ulogu. Zadatak je dan kao primjer u **LITERATURA** te glasi:

### EXAMPLE 11.1

Air enters a conical combustion chamber at a Mach number of 0.22, a pressure of 2200 kPa, and a temperature of 475°C. The combustion chamber is 0.8 m long and has an inlet diameter of 0.3 m and an exit diameter of 0.25 m. As a result of the combustion, the stagnation temperature increases by 450°C across the chamber. It can be assumed that the rate of increase of stagnation temperature is constant. The friction factor can be assumed to be 0.004. Find the exit Mach number, pressure, and temperature. Assume the gas has the properties of air and that the flow is steady and one-dimensional.

### Solution

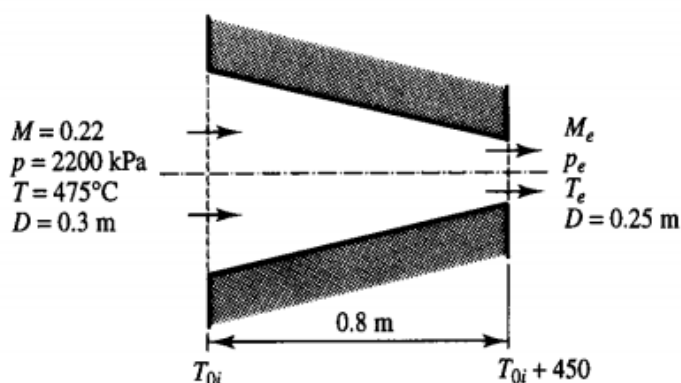


FIGURE E11.1

Slika 19. Problem općeg slučaja stlačivog strujanja

Promjena promjera po osi x glasi:  $d(x) = 0.3 - 0.0625x$ .

Kod skripti simulacije jest:

```

1 %opci slucaj stlacivog strujanja-strujanje_ode.m
2 clear all
3 clc
4
5 R_zr=287.1; %J/kgK
6 iz_eks=1.4;
7
8 x=[0:0.001:0.8];
9 pocetni_uvjeti=[0;120.61;2200000;748;0;0];
10
11 [x,y]=ode45(@dif_jednadzbe , x , pocetni_uvjeti);
12
13 M=y(:,2)./sqrt(iz_eks*R_zr.*y(:,4));

```

```

1 function dfi=dif_jednadzbe(x , y)
2 % konstante
3 m=1; %kg/s
4 iz_eks=1.4;
5 cp=1005; % J/kgK
6 R_zr=287.1; % J/kgK
7 d=0.3-0.0625*x;
8 A=((d^2)*pi)/4;
9 De=4*A/(d*pi); % m - efektivni promjer za trenje
10 M=y(2)/(sqrt(R_zr*iz_eks*y(4)));
11 N=M*M;
12 % zadane derivacije funkcija promjene velicina po x-u i koef.trenja
13 A_der=0.006136*x-0.0295;
14 Q_der=565312.5; %W/m
15 lamda=0.004;
16 % obicne diferencijalne jednadzbe dinamike plina
17 dfi(1)=-(((N/(A*(1-N)))*A_der)-((1/((1-N)*m*cp*y(4)))*Q_der)-((0.5*iz_eks*N/((1-N)*De))*lam
da))*y(1);
18 % gustoca
19 dfi(2)=-((1/(A*(1-N)))*A_der)+((1/((1-N)*m*cp*y(4)))*Q_der)+((0.5*iz_eks*N/((1-N)*De))*la
mda))*y(2);
20 % brzina
21 dfi(3)=-(((iz_eks*N)/((1-N)*A))*A_der)-((iz_eks*N/((1-N)*m*cp*y(4)))*Q_der)-((iz_eks*N*(
1+(iz_eks-1)*N)/(2*(1-N)*De))*lamda))*y(3);
22 % staticki tlak
23 dfi(4)=-((((iz_eks-1)*N)/(A*(1-N)))*A_der)+(((1-iz_eks*N)/((1-N)*m*cp*y(4)))*Q_der)-(((0.5
*iz_eks*(iz_eks-1)*N.^2)/((1-N)*De))*lamda))*y(4);
24 % staticka temperatura
25 dfi(5)=-(((iz_eks*N)/(2*(1+(iz_eks-1)/2)*N))*m*cp*y(4))*Q_der)-(((iz_eks*N)/(2*De))*la
mda))*y(5);
26 % totalni tlak
27 dfi(6)=-((1/((1+(iz_eks-1)/2)*N))*m*cp*y(4))*Q_der))*y(6);
28 % totalna temperatura
29
30 dfi=dfi(:);
31 end

```

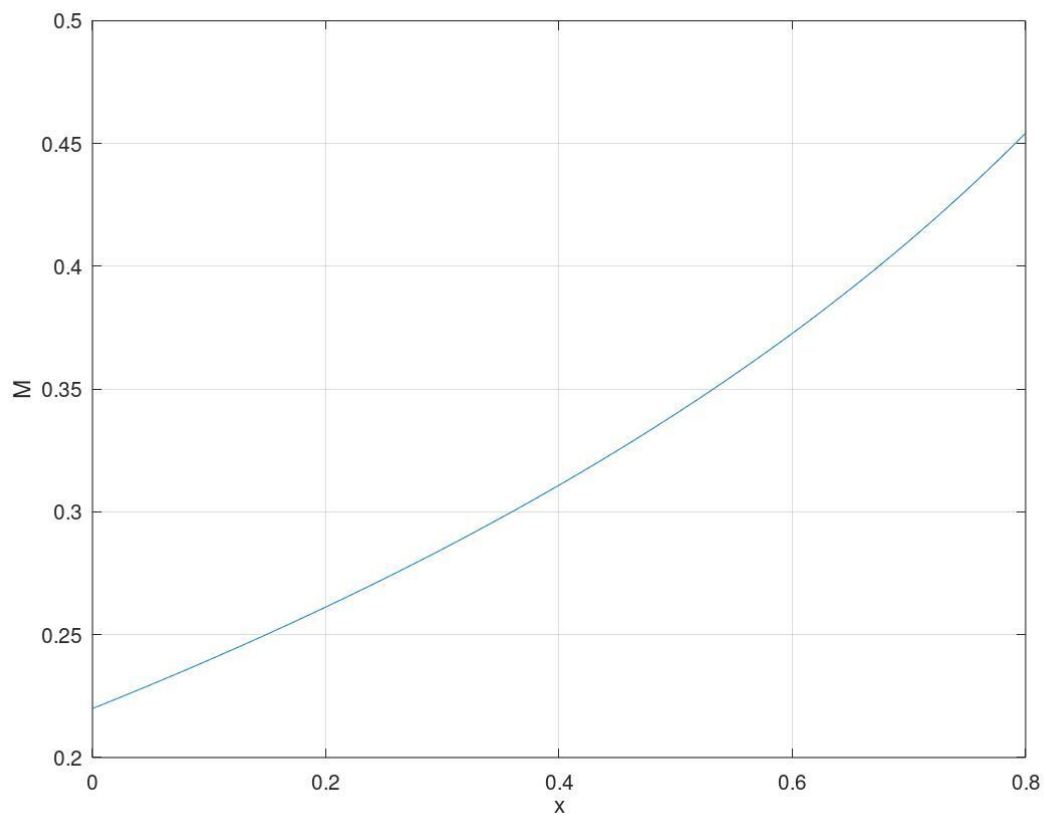
Riješenja zadatka glase:

$$\text{Izlazni Machov broj : } M_{\text{izlaz}} = 0.4543$$

$$\text{Izlazni statički tlak: } p_{\text{izlaz}} = 1909329.06\text{Pa}$$

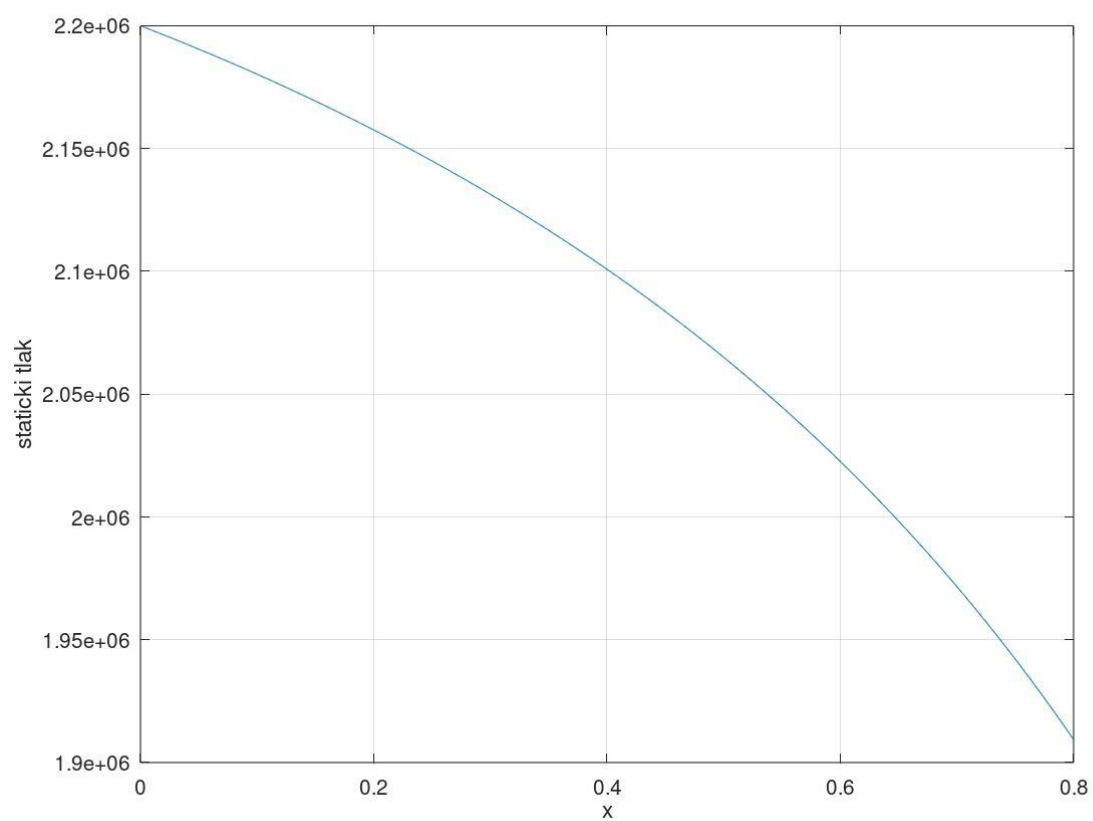
$$\text{Izlazna statička temperatura: } T_{\text{izlaz}} = 1157.46\text{K} = 884.31\text{°C}$$

U nastavku su prikazane promjene riješenja uzduž osi x odnosno duljine cijevi.

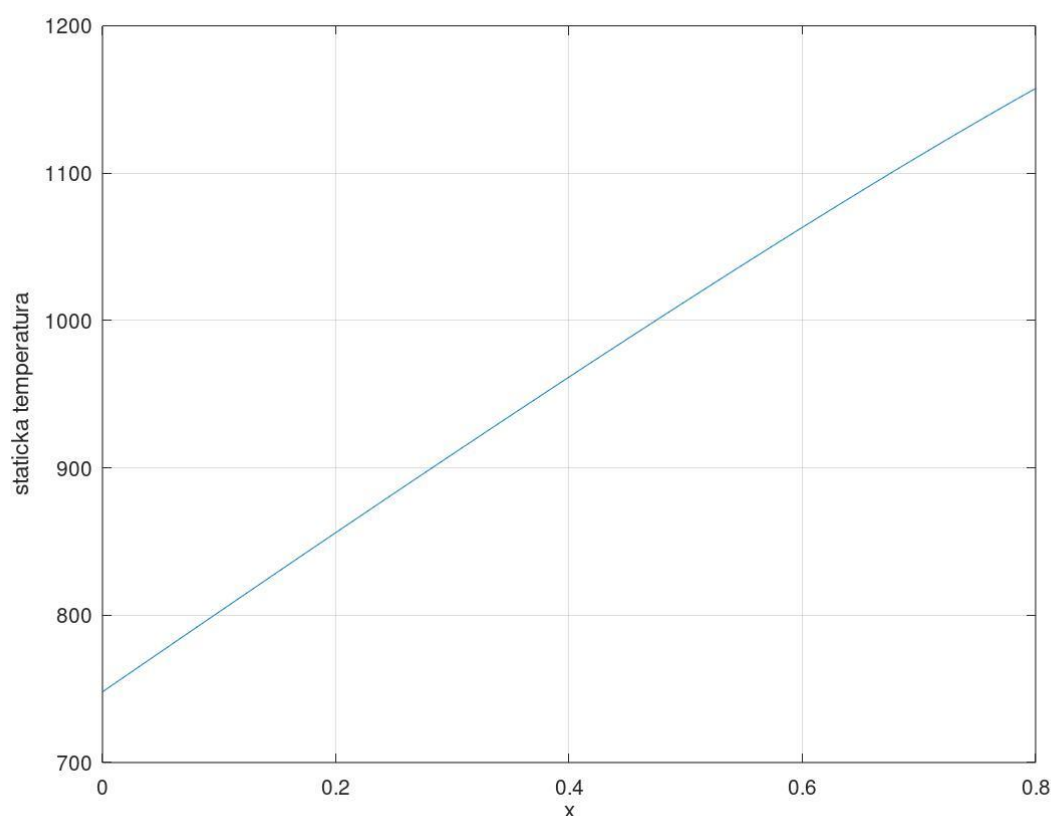


**Slika 20.** Promjena Machovog broja duž mlaznice





**Slika 21.** Promjena statičkog tlaka duž mlaznice

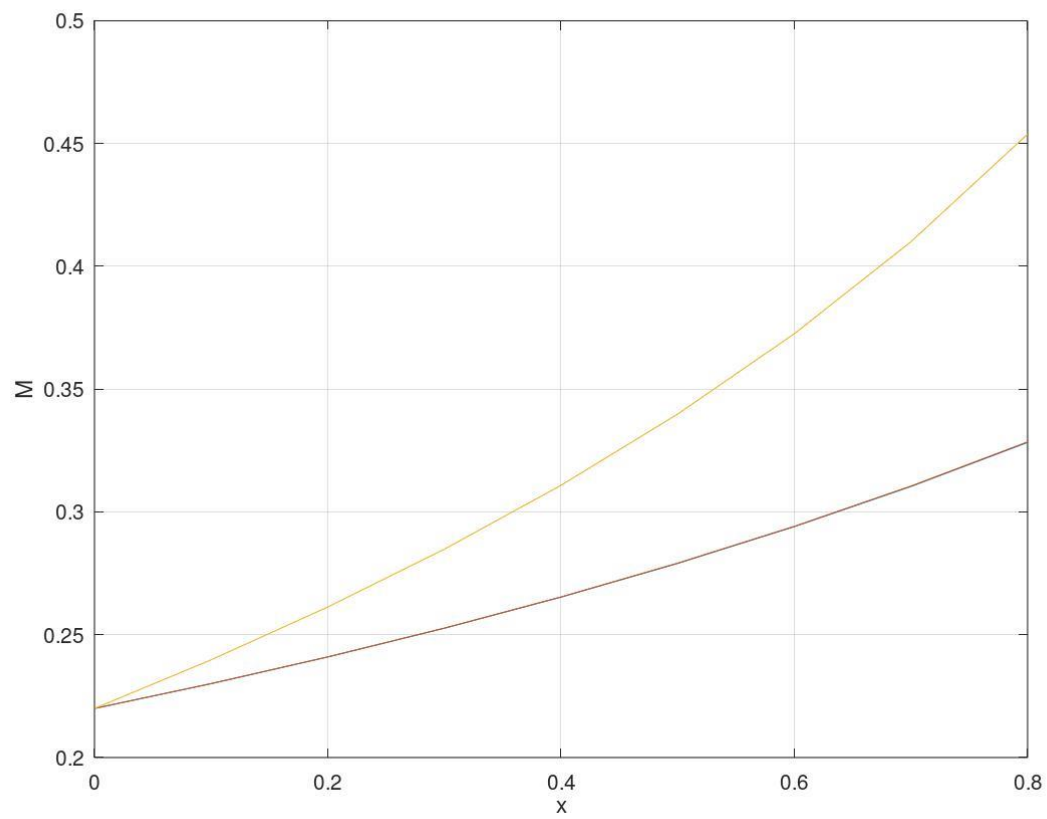


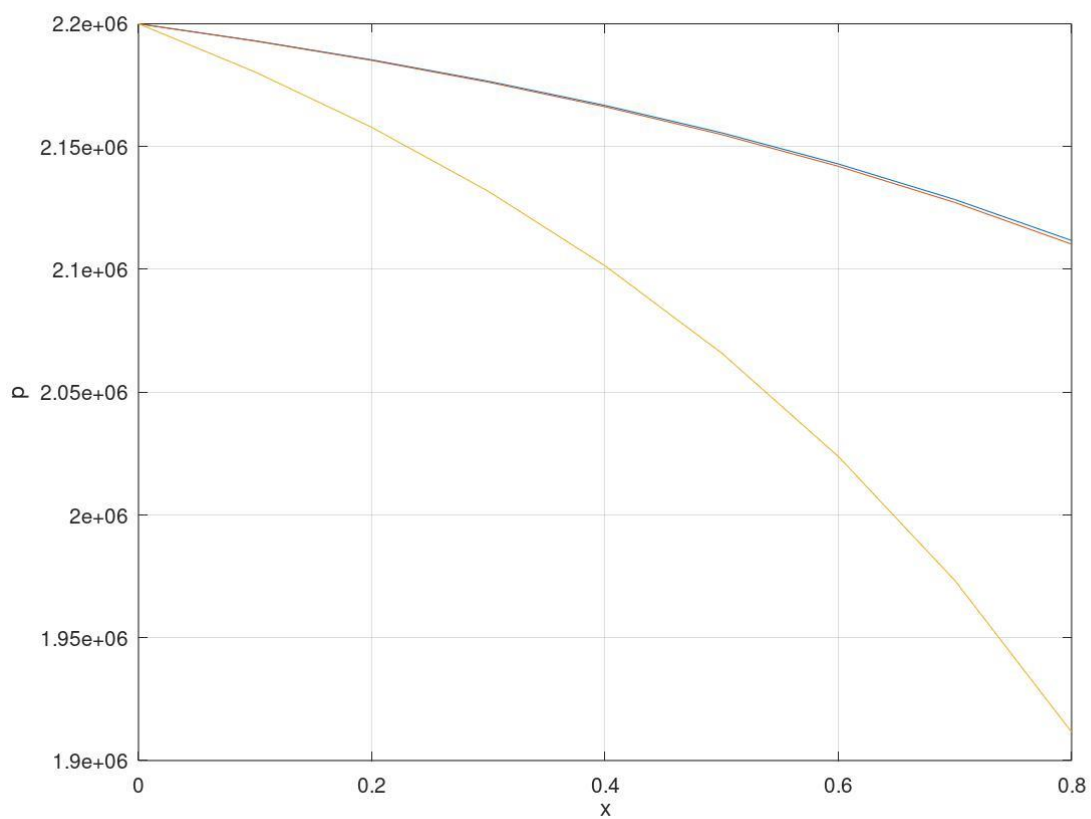
**Slika 22.** Promjena statičke temperature duž mlaznice

Također je zanimljivo usporediti rezultate za slučajeve sa zanemarenim određenim efektom ili efektima. Provest će se simulacija još jednom za slučajeve:

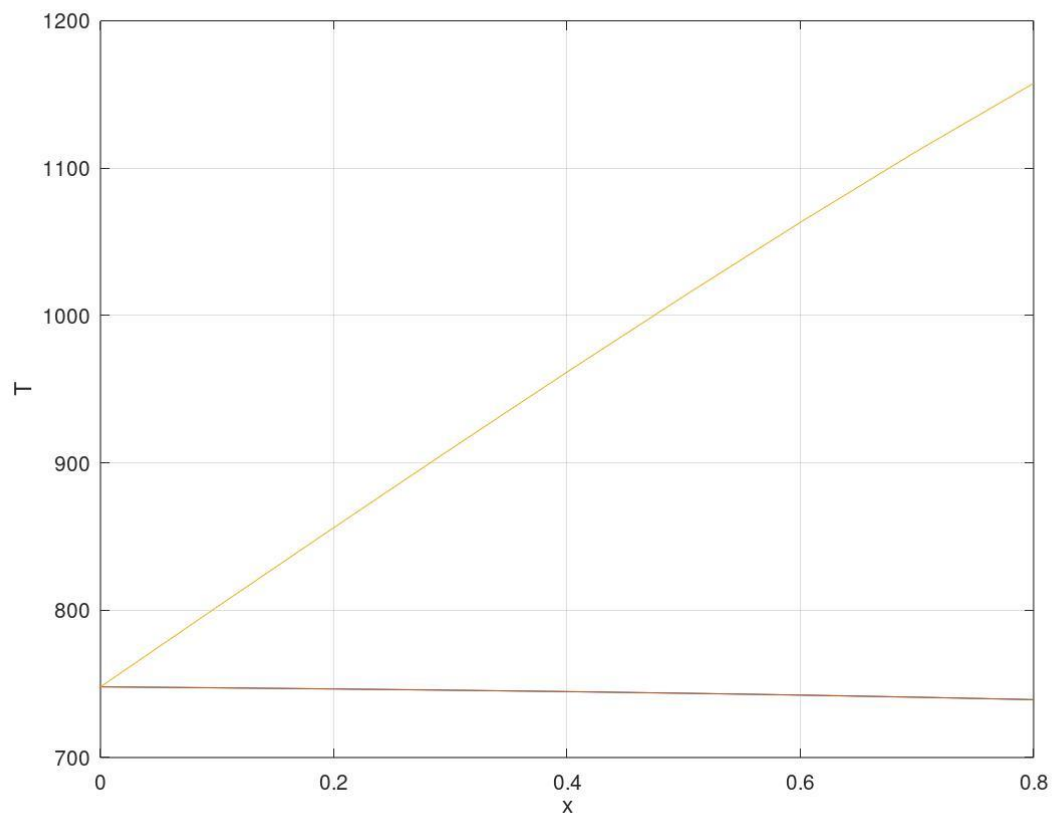
1. Izentropsko strujanje uz promjenu poprečnog presjeka bez ostalih efekata.
2. Strujanje uz promjenu poprečnog presjeka i trenje, no bez dovođenja topline.
3. Strujanje uz promjenu poprečnog presjeka i dovođenje topline, bez trenja.

	1. slučaj			2. slučaj			3. slučaj		
x [m]	M	p [Pa]	T [K]	M	p [Pa]	T [K]	M	p [Pa]	T [K]
0	0.22	2200000	748	0.22	2200000	748	0.22	2200000	748
0.1	0.2301	2193082.1	747.33	0.23011	2192969.13	747.33	0.23979	2180381.44	802.26
0.2	0.24096	2185328.21	746.57	0.24098	2185087.96	746.57	0.26131	2157837.04	856.05
0.3	0.25267	2176608.57	745.72	0.25271	2176224.25	745.72	0.28487	2131783.35	909.23
0.4	0.26533	2166767.65	744.75	0.2654	2166219.53	744.75	0.31088	2101472.37	961.65
0.5	0.27907	2155617.73	743.66	0.27917	2154882.44	743.65	0.33987	2065923.39	1013.1
0.6	0.29403	2142930.3	742.4	0.29416	2141979.93	742.39	0.37258	2023813.17	1063.2
0.7	0.31038	2128424.47	740.96	0.31055	2127225.33	740.95	0.41005	1973287.25	1111.6
0.8	0.32833	2111751	739.3	0.32855	2110261.98	739.28	0.45385	1911606.98	1157.6

**Tablica 1.** Rezultati simulacije za tri slučaja**Slika 23.** Usporedba Machovih brojeva duž mlaznice za tri slučaja



**Slika 24.** Usporedba statičkog tlaka duž mlaznice za tri slučaja



**Slika 25.** Usporedba statičke temperature duž mlaznice za tri slučaja

## **6. ZAKLJUČAK**

U ovome radu zasnovan je postupak proračuna jednodimenzijuskog stlačivog poodzvučnog strujanja za slučaj istodobnog prisustva promjene poprečnog presjeka, trenja i izvora toplinske snage. Izložen je opis matematičkog modela općeg slučaja jednodimenzijuskog stlačivog strujanja idealnog plina, njegov zapis u obliku sustava običnih diferencijalnih jednadžbi i računalni postupak za njihovo rješavanje.

Rezultati simulacije izentropskog, Fannovog te Rayleighovog strujanja uspoređeni su sa rezultatima dobivenim iz analitičkih relacija. Numeričko rješavanje problema stlačivog strujanja u programu „Octave“ pokazalo se iznimno točnim za izentropsko strujanje kroz cijev promjenjive površine poprečnog presjeka te za Fannovo i Rayleighovo strujanje kroz cijev konstantnog promjera. Problem općeg slučaja jednodimenzijuskog stlačivog strujanja poslužio je kao dobar primjer ilustracije utjecaja pojedinog efekta na promjene veličina plina u strujanju.

Kratka mlaznica rezultirala je jako malim utjecajem trenja u strujanju što je i logično budući se Fannovim strujanjem proračunavaju padovi tlaka u duljim cijevovodima. Korisnost ovog postupka ogleda se i u činjenici da je njime moguće proračunavati slučajeve u kojima se promjene poprečnog presjeka, trenje i toplinska snaga pojavljuju istodobno.

## **7. LITERATURA**

- [1] Džijan, I.; Šavar, M.; Virag, Z.: Mehanika fluida II., Fakultet strojarstva i brodogradnje, 2014.
- [2] Z. Virag, Dinamika plinova, Predavanja
- [3] Antun Galović: Termodinamika I, Fakultet strojarstva i brodogradnje, 2013.
- [4] URL izvor: <https://www.gnu.org/software/octave/about.html>
- [5] URL izvor: [http://depa.fquim.unam.mx/amyd/archivero/DormandPrince\\_19856.pdf](http://depa.fquim.unam.mx/amyd/archivero/DormandPrince_19856.pdf)
- [6] P. H. Oosthuizen; W.E. Carscallen: Compressible Fluid Flow, 1997.

## **8. PRILOZI**

[1.] CD-R disk