

# Aerodinamička optimizacija oblika pomoću površinske osjetljivosti korištenjem jednadžbi kontinuiranog adjointa

---

Lisjak, Nikola

Master's thesis / Diplomski rad

2016

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:235:771980>

Rights / Prava: [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom](#).

Download date / Datum preuzimanja: **2025-03-31**

Repository / Repozitorij:

[Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

## DIPLOMSKI RAD

Nikola Lisjak

ZAGREB, 2016.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# DIPLOMSKI RAD

AERODYNAMIC SHAPE OPTIMISATION  
BASED ON  
ADJOINT SURFACE SENSITIVITIES

Mentor:  
prof. dr. sc. Hrvoje Jasak

Student:  
Nikola Lisjak

ZAGREB, 2016.

## **Zahvala**

Zahvaljujem se svom mentoru prof. dr. sc. Hrvoju Jasaku što mi je povjerio ovu zahtjevnu ali veoma zanimljivu temu te na ukazanoj pomoći i strpljenju.

Nadalje zahvaljujem se kolegi Krunoslavu Šešetu i dr. sc. Mirzi Popovcu na pomoći pri razjašnjavanju izvoda te objašnjenjima i na korisnim prijedlozima.

Zahvaljujem se asistentima profesora Jasaka, kata, Vuku Vukčeviću, Tessi Uroić, Vanji Škuriću, Innu Gatinu te Gregoru Cvijetiću na nesebičnoj pomoći i podršci tokom obavljanja ovog zadatka te ostalim kolegama s 8. kata na odličnoj radnoj atmosferi.

Naposljetku, zahvaljujem se svojim roditeljima Antunu i Mihaeli na neprestanoj podršci i strpljenju koje su mi pružali tokom godina obrazovanja.

## **Izjava**

Izjavljujem da sam ovaj rad radio samostalno koristeći znanja stečena tijekom studija i navedenu literaturu.



Sveučilište u Zagrebu Fakultet strojarstva i brodogradnje	
Datum	Prilog
Klasa:	
Ur.broj:	

## DIPLOMSKI ZADATAK

Student: **Nikola Lisjak**

Mat. br.: 0035173388

Naslov rada na hrvatskom jeziku: **Aerodinamička optimizacija oblika pomoću površinske osjetljivosti korištenjem jednadžbi kontinuiranog adjointa**

Naslov rada na engleskom jeziku: **Aerodynamic Shape Optimisation Based on Adjoint Surface Sensitivities**

Opis zadatka:

Jedan od glavnih izazova u slobodnoj optimizaciji geometrijskog oblika usisnika ili aerodinamičkog tijela je odgovarajuća parametrizacija površine koju se optimira. S jedne strane, parametrizacija mora biti dovoljno slobodna kako bi optimizacijski algoritam pronašao pravi optimalni oblik u prostoru dostupne varijacije geometrije, dok s druge strane, broj parametara kojim optimizacijski algoritam kontrolira oblik tijela mora biti minimalan. Kod izračuna površinske osjetljivosti korištenjem jednadžbi kontinuiranog adjointa, moguće je dobiti informacije o optimalnom smjeru optimizacije aerodinamičke površine bez prethodne parametrizacije, i onda direktno koristiti površinsku osjetljivost (gradijent) u optimizaciji oblika.

Kandidat će izvršiti sljedeće zadatke tokom izrade rada:

- izvršiti pregled literature vezane uz izvod i formulaciju matematičkog modela i rubnih uvjeta jednadžbi kontinuiranog adjointa. Opisati način korištenja površinske osjetljivosti u optimizaciji;
- opisati tipične funkcije cilja optimizacije koji se koriste s jednadžbama kontinuiranog adjointa;
- izabrati 2 tipa geometrije usisnog cjevovoda kružnog poprečnog presjeka uvinuta u 2 ili 3 prostorne dimenzije. Za izabrane geometrije, pripremiti proračunsku mrežu i izvršiti proračun stacionarnog turbulentnog strujanja;
- postaviti za kriterij optimizacije minimum disipacije i prikazati rubne uvjete za adjoint model. Na temelju adjoint rješenja, izračunati površinsku osjetljivost.
- korištenjem alata automatske deformacije mreže, izvršiti modifikaciju geometrije prema izračunatoj površinskoj osjetljivosti i prikazati promjenu vrijednosti kriterija optimizacije. Po mogućnosti, prikazati kako se oblik cjevovoda i vrijednost kriterija optimizacije mijenjaju kroz nekoliko iteracija optimizacijskog algoritma;
- opisati rezultate ostvarene u diplomskom radu.

U radu navesti korištenu literaturu i eventualno dobivenu pomoć.

Zadatak zadan:

10. ožujka 2016.

Rok predaje rada:

12. svibnja 2016.

Predviđeni datumi obrane:

18., 19. i 20. svibnja 2016.

Zadatak zadao:

Izv. prof. dr. sc. Hrvoje Jasak

Predsjednik Povjerenstva:

  
Prof. dr. sc. Ivica Smojver

# Sažetak

U sklopu ovog diplomskog rada izvedene su kontinuirane adjungirane jednačbe iz jednačbi stacionarnog nestlačivog turbulentnog strujanja s  $k - \varepsilon$  modelom turbulencije. Opisane su najčešće korištene funkcije cilja u industriji te su opisani adjungirani rubni uvjeti. Za područje uz zid korištene su adjungirane zidne funkcije.

Provedena je simulacija nestlačivog stacionarnog strujanja kroz cijev savinutu u dvije i tri dimenzije s  $k - \varepsilon$  modelom turbulencije. Izračunate su osjetljivosti površine modela na ciljnu funkciju smanjenja pada energije kroz domenu. Površinske osjetljivosti korištene su kao ulayni parametar za rješavač za pomicanje mreže, dok je za izračun osjetljivosti primijenjena kontinuirana formulacija adjungiranih jednačbi. Također ukratko prikazano automatsko pomicanje mreže pomoću rješavača koji rješava Laplace-ovu jednačbu metodom konačnih elemenata na točkama mreže. Rješenja na početnoj i pomaknutoj mreži su uspoređena.

**Ključne riječi:** gradijentna optimizacija, pomicanje mreže, Lagrange-ovi multiplikatori, kontinuirane adjungirane jednačbe, optimizacija oblika.

# Summary

In this thesis continuous adjoint equations are derived from corresponding flow equations for stationary incompressible turbulent flow with  $k - \varepsilon$  turbulence model and are presented in detail. Several commonly used objective functions are described along with boundary conditions corresponding to objective function for total pressure loss minimization.

An incompressible stationary flow simulation through two and three dimensionally bent pipe is conducted with  $k - \varepsilon$  turbulence model and ran with adjoint solver afterwards. Surface sensitivities are calculated, which served as an input for wall displacement and solved with automatic mesh motion solver based on Laplacian equation with finite element method. A comparison of primal flow quality is assessed for original and modified configuration.

**Keywords:** gradient optimisation, mesh motion, continuous adjoint, lagrange multipliers, shape optimisation, fluid dynamics.



# Sadržaj

<b>Sažetak</b>	<b>I</b>
<b>Summary</b>	<b>II</b>
<b>Popis slika</b>	<b>V</b>
<b>Popis oznaka</b>	<b>VI</b>
<b>1 Uvod</b>	<b>1</b>
1.1 Pozadina problema . . . . .	1
1.2 Prethodna i vezana istraživanja . . . . .	2
1.3 Kratki pregled . . . . .	3
<b>2 Matematička podloga</b>	<b>4</b>
2.1 Matematički model nestlačivog strujanja . . . . .	4
2.2 Početne jednačbe za izvod adjungiranog modela . . . . .	6
2.3 Varijacija po konstrukcijskoj varijabli $b_m$ . . . . .	7
2.4 Parcijalna integracija . . . . .	8
2.4.1 Konvekcijski član . . . . .	8
2.4.2 Difuzijski član . . . . .	10
2.4.3 Jednačba kontinuiteta . . . . .	11
2.4.4 Turbulentni članovi . . . . .	12
2.4.5 Tenzor naprezanja . . . . .	13
2.5 Izvedene adjungirane jednačbe . . . . .	14
2.5.1 Adjungirane jednačbe unutarnje domene . . . . .	14
2.5.2 Adjungirane jednačbe granica . . . . .	15
2.5.3 Adjungirane zidne funkcije . . . . .	16
2.6 Tipične funkcije cilja . . . . .	16

---

2.7	Kriterij za minimizaciju disipacije . . . . .	17
2.7.1	Adjungirani rubni uvjeti . . . . .	18
2.7.2	Adjungirane zidne funkcije . . . . .	19
2.8	Pomicanje mreže . . . . .	20
<b>3</b>	<b>Numerički model</b>	<b>21</b>
<b>4</b>	<b>Testni primjeri</b>	<b>23</b>
4.1	2D-savinuta cijev . . . . .	24
4.1.1	Geometrija . . . . .	24
4.1.2	Proračunska mreža . . . . .	25
4.1.3	Površinske osjetljivosti . . . . .	25
4.1.4	Konvergencija . . . . .	27
4.2	3D-savinuta cijev . . . . .	27
4.2.1	Geometrija . . . . .	28
4.2.2	Proračunska mreža . . . . .	29
4.2.3	Površinske osjetljivosti . . . . .	30
4.2.4	Konvergencija . . . . .	31
4.2.5	Pomak površine . . . . .	32
<b>5</b>	<b>Zaključak</b>	<b>33</b>

# Popis slika

4.1.1 Geometrija 2D savinute cijevi. . . . .	24
4.1.2 S-zavoj, mreža . . . . .	25
4.1.3 Površinske osjetljivosti 2D savinute cijevi sa strane. . . . .	26
4.1.4 Površinske osjetljivosti 2D savinute cijevi s gornje strane. . . . .	26
4.1.5 Dijagrami konvergencije adjungiranih veličina za 2D savinutu cijev. . . . .	27
4.2.1 Geometrija 3D savinute cijevi . . . . .	28
4.2.2 Mreža 3D-savinute cijevi. . . . .	29
4.2.3 Vrijednosti bezdimenzijske udaljenosti $y^+$ od stijenke cijevi . . . . .	29
4.2.4 Površinske osjetljivosti 3D savinute cijevi. . . . .	30
4.2.5 Reziduali adjungiranih značajki. . . . .	31
4.2.6 Polje totalnog tlaka na 3D savinutoj cijevi. . . . .	32

# Popis oznaka

## Izrazi i konstante

Oznaka	Izraz
$\nu_t$	$C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}$
$P$	$\left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$
$p_{\text{eff}}$	$p + \frac{2}{3}k$
$P_k$	$\tau_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$
$\tau_{ij}$	$\nu_t \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$
$\nu_{\text{eff}}$	$\nu + \nu_t$
$v^+$	$\frac{v_t}{v_\tau}$
$v_\tau^2$	$(\nu + \nu_t) \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) n_j t_t$
$y^+$	$\frac{\Delta v_\tau}{\nu}$

## Grčke oznake

Oznaka	Opis	Jedinica
$\Gamma$	površinska domena	$\text{m}^2$
$\nu$	kinematička viskoznost	$\text{m}^2\text{s}^{-1}$
$\nu_t$	turbulentna kinematička viskoznost	$\text{m}^2\text{s}^{-1}$

$\Omega$	prostorna domena	$\text{m}^3$
$\tau_{ij}$	tenzor naprezanja	$\text{m}^2\text{s}^{-2}$
$\varepsilon$	disipacija turbulentne kinetičke energije	$\text{m}^2\text{s}^{-3}$
$\varepsilon_a$	adjungirana disipacija turbulentne kinetičke energije.	$\text{m}^2\text{s}^{-3}$

### Latinične oznake

Oznaka	Opis	Jedinica
$b_m$	konstrukcijska varijabla	m
$D^{\varepsilon_a}$	adjungirana površinska transportna jednađžba za $\varepsilon_a$	$\text{m}^3\text{s}^{-4}$
$Dg^{\varepsilon_a}$	transportna jednađžba za $\varepsilon$	$\text{m}^3\text{s}^{-4}$
$Dg^{k_a}$	transportna jednađžba za $\varepsilon$	$\text{m}^3\text{s}^{-4}$
$Dg_i^u$	transportna jednađžba za $\varepsilon$ s pripisanom varijablom $\frac{\partial v_i}{\partial b_m}$	$\text{m}^3\text{s}^{-4}$
$D^{k_a}$	adjungirana površinska transportna jednađžba za $k_a$ s pripisanom varijablom $\frac{\partial v_i}{\partial b_m}$	$\text{m}^3\text{s}^{-3}$
$D^q$	adjungirana površinska jednađžba kontinuiteta s pripisanom varijablom $\frac{\partial v_i}{\partial b_m}$	$\text{ms}^{-1}$
$D_i^u$	adjungirana površinska momentna jednađžba s pripisanom varijablom $\frac{\partial v_i}{\partial b_m}$	$\text{m}^2\text{s}^{-2}$
$J$	funkcija cilja	-
$L$	funkcija cilja proširena s ograničenjima u vidu jednađžbi strujanja	-
$k$	turbulentna kinetička energija	$\text{m}^2\text{s}^{-2}$
$k_a$	adjungirana turbulentna kinetička energija	$\text{m}^2\text{s}^{-2}$

$p$	tlak podijeljen s gustoćom	$\text{m}^2\text{s}^{-2}$
$p_{\text{eff}}$	efektivni tlak	$\text{m}^2\text{s}^{-2}$
$P_k$	tenzor naprezanja	$\text{m}^2\text{s}^{-2}$
$q$	adjungirani tlak	$\text{m}^2\text{s}^{-2}$
$R^{\varepsilon_a}$	adjungirana volumna transportna jednađba za $\varepsilon_a$ s pripisanom varijablom $\frac{\partial \varepsilon}{\partial b_m}$	$\text{m}^2\text{s}^{-4}$
$R^\varepsilon$	transportna jednađba za disipaciju turbulentne kinetičke energije $\varepsilon$	$\text{m}^2\text{s}^{-4}$
$R^{k_a}$	adjungirana volumna transportna jednađba za $k_a$ s pripisanom varijablom $\frac{\partial k}{\partial b_m}$	$\text{m}^2\text{s}^{-3}$
$R^k$	transportna jednađba za turbulentnu kinetičku energiju $k$	$\text{m}^2\text{s}^{-3}$
$R^p$	jednađba kontinuiteta u implicitnom obliku	$\text{s}^{-1}$
$R^q$	adjungirana volumna jednađba kontinuiteta s pripisanom varijablom $\frac{\partial p}{\partial b_m}$	$\text{s}^{-1}$
$R_i^u$	adjungirana volumna momentna jednađba s pripisanom varijablom $\frac{\partial v_i}{\partial b_m}$	$\text{ms}^{-2}$
$R_i^v$	momentna jednađba strujanja u implicitnom obliku	$\text{ms}^{-2}$
$u_i$	adjungirana brzina strujanja	$\text{ms}^{-1}$
$v_i$	brzina strujanja	$\text{ms}^{-1}$
$v_t$	tangencijalna komponenta brzine uz zid	$\text{ms}^{-1}$
$v_\tau$	brzina trenja	$\text{ms}^{-1}$
$x_i$	prostorna koordinata	$\text{m}$

# Poglavlje 1

## Uvod

### 1.1 Pozadina problema

U današnje vrijeme u inženjerstvu naglasak se s epohalnih otkrića preselio u neprestano poboljšavanje već otkrivenih principa i uređaja. Tome shodno dolazi optimizacija u općem pogledu. Njome se svojstva proizvoda i postupaka poboljšavaju. omogućava nam da uz manje truda, odnosno s manjom potrošnjom postizemo isti, ako ne i bolji rezultat.

Optimizacija ima više razina od kojih za svaku postoji odgovarajući pristup. Rješenja postoje na globalnoj i na lokalnoj razini. Globalna razina optimizacije dolazi u obzir pri projektiranju i odlučivanju oko primjerice najbolje kombinacije svojstava odnosno o osnovnim principima rada. Tipični pristupi traženju globalnih rješenja su razni evolucijski algoritmi, prekaljivanje, optimizacija rojeva i ostale metode. Lokalna optimizacija dolazi u obzir u slučajevima kad smo se već približili konačnom izgledu rješenja ili proizvoda ali želimo povećati njegovu učinkovitost odnosno iskoristivost. U tim slučajevima koristimo gradijentne metode čijih osnovno svojstvo je da pokazuju u smjeru kretanja prema najboljem rješenju, pa samim time zaobilaze dugotrajno ispitivanje različitih varijanti.

Ovaj diplomski rad se bavi gradijentnom optimizacijom u vidu optimizacije oblika izračunom površinskih osjetljivosti korištenjem adjungiranih jednadžbi strujanja izvedenih pomoću Lagrange-ovih multiplikatora. S druge strane, postoji i izravan pristup izračunavanja osjetljivosti pomoću Jakobijana, Stück [1].

Adjungirane jednadžbe korištene u ovom radu su kontinuirane što znači da su izvedene iz nediskretiziranih jednadžbi strujanja (za razliku od diskretiziranih adjungiranih jednadžbi koje

su izvedene iz diskretiziranih jednadžbi strujanja). Izvori koji govore o razlikama, prednostima i nedostacima mogu se naći u [1].

Rješenjem odgovarajućih jednadžbi dobiju se površinske osjetljivosti koje daju informaciju o promjeni geometrije s obzirom na funkciju cilja.

Kako bi se izbjegla skupa ponovna izrada mreže pomicanje površine zajedno s mrežom vrši se pomoću rješavača za pomicanje mreže čija je zadaća da ćelije nepotrebno ne gube na kvaliteti (neortogonalnost, izvitoperenost... ).

Takva kombinacija izračuna osjetljivosti i pomicanja mreže mogla bi omogućiti brzu i učinkovitu optimizaciju oblika, no potpuna automatska optimizacija još je uvijek osjetljivo pitanje zbog nužnog kompromisa između više različitih ciljeva koji su najčešće u sukobu. Stoga je još uvijek nužno posredovanje inženjera kako traženje željenog rješenja ne bi išlo predaleko i smanjilo kvalitetu drugog potrebnog svojstva.

## 1.2 Prethodna i vezana istraživanja

Giles i Pierce [2] razmatra adjungirane jednadžbe, njihove rubne uvjete te te njihov fizikalni značaj. Opisani su također primjeri konkretne primjene adjungiranih jednadžbi u poboljšanju konstruiranja mlaznih aviona. A.S. Zymaris i Othmer [3] uvode jednadžbe kontinuiranog adjointa za Spalart-Almaras model turbulencije. A.S. Zymaris i Othmer [4] uvodi adjungirane zidne funkcije s  $k-\varepsilon$  modelom turbulencije. U [5] proučavano je ponašanje izraza adjungiranih jednadžbi i provedeno poboljšanje stabilnosti sustava jednadžbi.

U Rusche i Reichl [6] je raspravljeno o implementaciji adjungiranih transportnih jednadžbi turbulentnih veličina. Analiza ponašanja raznih članova adjungiranih jednadžbi kao i implementacija u rješavač opće namjene na osnovu diskretizacije konačnim volumenima Tuković [7]. Ukazano je na nestabilnost kontinuiranih adjungiranih jednadžbi kao njihov značajan problem.

Stück [1] je opisao diskretizaciju članova adjungiranih jednadžbi. Proveden izračun površinskih osjetljivosti kroz 3D savinutu cijev pomoću adjungiranog Willcox-ovog  $k-\omega$  modela turbulencije [8] sa zidnim funkcijama za niski i visoki Reynoldsov broj. Provedena je bila deformacija mreže u nekoliko iteracija te je približavanje optimumu funkcije cilja uspoređeno s metodom konačnih razlika (Finite Differencing).



U [9] bila je provedena simulacija strujanja te primjenjen rješavač adjungiranih jednažbi i izračunate površinske osjetljivosti za 2D slučaj profila turbine.

### 1.3 Kratki pregled

U drugom poglavlju objašnjen je matematički model i predstavlja polazne jednažbe za rješavanje stacionarnog, nestlačivog strujanja te dodatne jednažbe  $k - \varepsilon$  modela sa zidnim funkcijama. Prikazane su početne jednažbe za izvod adjungiranog turbulentnog strujanja  $k - \varepsilon$  modela te je prikazan detaljan izvod članova adjungiranog sustava jednažbi. Opisanih je također nekoliko najčešće korištenih funkcija cilja te su pokazani adjungirani rubni uvjeti zajedno s adjungiranim zidnim funkcijama za funkciju cilja za smanjenje disipacije. Naveden je i rješavač korišten za pomicanje mreže.

Treće poglavlje ugrubo opisuje postavke numeričkog modela te postupke rješavanja osnovnih i adjungiranih jednažbi.

Četvrto poglavlje opisuje dobivene rezultate te ih ocjenjuje i raspravlja.

# Poglavlje 2

## Matematička podloga

U ovom su poglavlju opisani principi i alati potrebni za izvođenje jednadžbi kontinuiranog adjungiranog modela. Opisane su jednadžbe korištene za rješavanje stacionarnog nestlačivog turbulentnog strujanja,  $k - \varepsilon$  model turbulencije koje su ujedno i polazne jednadžbe za izvođenje adjungiranih jednadžbi. Opisan je također sustav adjungiranih jednadžbi te su prikazani standardni rubni uvjeti.

### 2.1 Matematički model nestlačivog strujanja

Za rješavanje nestlačivog stacionarnog i turbulentnog strujanja koriste se jednadžbe redom, jednadžba kontinuiteta te jednadžba očuvanja količine gibanja:

$$\frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial (v_j v_i)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (\nu + \nu_t) \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right] - \frac{\partial p_{\text{eff}}}{\partial x_i} \quad (2.2)$$

gdje je  $v$  polje brzine,  $p_{\text{eff}}$  polje efektivnog tlaka izraženog kao  $p + \frac{2}{3}k$ ,  $p = \frac{P}{\rho}$ ,  $\nu$  je kinematička viskoznost a  $\nu_t$  turbulentna kinematička viskoznost. Turbulencija je modelirana sa široko primijenjenim  $k - \varepsilon$  modelom [10]:

$$\frac{\partial (v_j k)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \nu - \frac{\nu_t}{Pr_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + P_k - \varepsilon \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial (v_j \varepsilon)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \nu - \frac{\nu_t}{Pr_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] + c_1 P_k \frac{\varepsilon}{k} - c_2 \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (2.4)$$

gdje  $k$  predstavlja polje turbulentne kinetičke energije,  $\varepsilon$  polje disipacije turbulentne kinetičke energije, a konstante modela su:

$$c_\mu = 0.09, c_1 = 1.44, c_2 = 1.92, Pr_k = 1.0, Pr_\varepsilon = 1.3$$

Primjenjene su također sljedeće zidne funkcije:

$$\begin{array}{cccc} y^+ & v^+ & k_P & \varepsilon_P \\ \geq y_c^+ & \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + B & \frac{v_\tau^2}{\sqrt{c_\mu}} & \frac{v_\tau^3}{\kappa \Delta} \end{array} \quad (2.5)$$

$$\begin{array}{cccc} < y_c^+ & y^+ & \frac{v_\tau^2}{\sqrt{c_\mu}} \left( \frac{y^+}{y_c^+} \right) & 2 k_P^{\frac{3}{2}} \frac{1 + \frac{5.3y}{\sqrt{k_P} \Delta}}{\kappa c_\mu^{\frac{3}{4}} \Delta} \end{array} \quad (2.6)$$

gdje je  $y^+$  bezdimenzijska udaljenost od zida definirana kao  $y^+ = \frac{\Delta v_\tau}{\nu}$ ,  $v^+$  bezdimenzijska brzina definirana kao  $\frac{v_t}{v_\tau}$ ,  $v_\tau$  je brzina trenja definirana kao  $(\nu + \nu_t) \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) n_j t_t$ ,  $v_t$  je tangencijalna komponenta brzine s obzirom na površinu stijenke dok je  $\Delta$  udaljenost do zida.  $\kappa = 0.41$   $B = 5.1$  su konstante zidnih funkcija.

## 2.2 Početne jednadžbe za izvod adjungiranog modela

Za izvođenje kontinuirane formulacije adjungiranih jednadžbi korištene su osnovne jednadžbe strujanja u vidu ograničenja te su iz tog razloga zapisane u implicitnom obliku, u nekonzervativnoj formi za potrebe izvođenja:

$$R_i^v = v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial p_{\text{eff}}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (\nu + \nu_t) \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right] = 0, \quad (2.7)$$

$$R^p = \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0, \quad (2.8)$$

$$R^k = v_j \frac{\partial k}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \nu + \frac{\nu_t}{Pr_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] - P_k + \varepsilon = 0, \quad (2.9)$$

$$R^\varepsilon = v_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \nu + \frac{\nu_t}{Pr_k} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] - c_1 P_k \frac{\varepsilon}{k} + c_2 \frac{\varepsilon^2}{k} = 0. \quad (2.10)$$

gdje su redom  $R_i^v$  jednadžba očuvanja količine gibanja,  $R^p$  jednadžba kontinuiteta te  $R^k$  i  $R^\varepsilon$  transportne jednadžbe za  $k$  i  $\varepsilon$ . Svakoj od ovih jednadžbi odnosno ograničenja pripisan je vlastiti Lagrange-ov multiplikator. Vrijednosti tih Lagrange-ovih multiplikatora dobivaju se raspisivanjem i rješavanjem sustava adjungiranih jednadžbi. Pošto Lagrange-ovi multiplikatori po jedinicama odgovaraju značajkama strujanja oni se shodno tome nazivaju adjungiranim značajkama strujanja: adjungirana brzina  $u_i$ , adjungirani tlak  $q$ , adjungirana turbulentna kinetička energija  $k_a$  i adjungirana disipacija turbulentne kinetičke energije  $\varepsilon_a$ .

## 2.3 Varijacija po konstrukcijskoj varijabli $b_m$

Adjungirane jednadžbe izvode se tako da se jednadžbama ograničenja pripišu vlastiti Lagrange-ovi multiplikatori te se nakon primjene Leibnizovog pravila za integrale te parcijalne integracije izdvoje derivacije značajki strujanja  $(v, p, k, \varepsilon)$  po konstrukcijskoj varijabli  $b_m$ , koja u ovom slučaju predstavlja površinu domene.

Definirana je proširena funkcija cilja  $L$  koja je sastavljena od funkcije cilja  $J$  i zbroja članova koji su definirani umnoškom jednadžbi ograničenja  $R_i^n$  s pripadajućim Lagrangeovim multiplikatorima  $n_i$ :

$$L = J + \int_{\Omega} n_i R_i^n \, d\Omega \quad (2.11)$$

U ovom radu  $n$  predstavlja:

- adjungiranu brzinu  $u_i$  koja ide uz momentnu jednadžbu  $R_i^v$
- adjungirani tlak  $q$  koji ide uz jednadžbu kontinuiteta  $R^p$
- adjungiranu turbulentnu kinetičku energiju  $k_a$  koja ide uz transportnu jednadžbu za turbulentnu kinetičku energiju  $R^k$
- adjungiranu disipaciju turbulentne kinetičke energije  $\varepsilon_a$  koja ide uz transportnu jednadžbu za disipaciju turbulentne kinetičke energije  $R^\varepsilon$

Na sljedećoj stranici je raspisana derivacija jednadžbi turbulentnog strujanja po konstrukcijskoj varijabli  $b_m$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_i^v}{\partial b_m} = & \frac{\partial v_j}{\partial b_m} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial v_i}{\partial b_m} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial p_{\text{eff}}}{\partial b_m} \right) - \\ & - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \frac{\partial \nu_t}{\partial b_m} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right] - \\ & - \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ (\nu + \nu_t) \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial v_i}{\partial b_m} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial v_j}{\partial b_m} \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial R^p}{\partial b_m} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial v_j}{\partial b_m} \right) \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial R^k}{\partial b_m} = & \frac{\partial v_j}{\partial b_m} \frac{\partial k}{\partial x_j} + v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial k}{\partial b_m} \right) - \\ & - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \nu + \frac{\nu_t}{Pr_k} \right) \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial k}{\partial b_m} \right) \right] - \frac{1}{Pr_k} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial \nu_t}{\partial b_m} \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) - \\ & - \frac{\partial P_k}{\partial b_m} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial b_m} \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial R^\varepsilon}{\partial b_m} = & \frac{\partial v_j}{\partial b_m} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} + v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial b_m} \right) - \\ & - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \nu + \frac{\nu_t}{Pr_\varepsilon} \right) \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial b_m} \right) \right] - \frac{1}{Pr_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial \nu_t}{\partial b_m} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) - \\ & - c_1 \frac{\partial P_k}{\partial b_m} \frac{\varepsilon}{k} - c_1 P_k \frac{1}{k} \frac{\partial \varepsilon}{\partial b_m} + c_1 P_k \frac{\varepsilon}{k^2} \frac{\partial k}{\partial b_m} + 2c_2 \frac{\varepsilon}{k} - c_2 \frac{\varepsilon^2}{k^2} \frac{\partial k}{\partial b_m} \end{aligned} \quad (2.15)$$

## 2.4 Parcijalna integracija

U sljedećem su potpoglavlju raspisani članovi iz derivacije implicitnog oblika jednadžbi strujanja pomnoženi s pripadajućim Lagrange-ovim multiplikatorom za odgovarajuću jednadžbu te pomoću parcijalne integracije prevedeni u oblik u kojem je u svakom članu izlučena derivacija značajke strujanja po konstrukcijskoj varijabli. Slijedi detaljniji opis i raspisivanje pojedinih članova za izvod adjungiranih jednadžbi.

### 2.4.1 Konvekcijski član

Konvekcijski član dolazi iz jednadžbe održanja količine gibanja te je pomnožen s adjungiranom brzinom  $u_i$ . Sastavljen je od dva dijela:  $u_i v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial v_i}{\partial b_m} \right)$  i  $u_i \frac{\partial v_j}{\partial b_m} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$  te nakon sređivanja

oblikuje jedan član:  $-v_j \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$ . Prvi član derivacije konvekcijskog člana po  $b_m$  glasi:

$$u_i v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial v_i}{\partial b_m} \right) = \quad (2.16a)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_j} \left( u_i v_j \frac{\partial v_i}{\partial b_m} \right) - \frac{\partial (u_i v_j)}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial b_m} = \quad (2.16b)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_j} \left( u_i v_j \frac{\partial v_i}{\partial b_m} \right) - v_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial b_m} - u_i \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial b_m} = \quad (2.16c)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_j} \left( u_i v_j \frac{\partial v_i}{\partial b_m} \right) - v_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial b_m} - \underbrace{u_i \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial b_m}}_{=0} = \quad (2.16d)$$

Zadnji član raspisanog oblika derivacije konvekcijskog člana jednak je 0 kada uzmemo u obzir jednadžbu kontinuiteta 2.1. Drugi član derivacije konvekcijskog člana po  $b_m$  glasi:

$$u_i \frac{\partial v_j}{\partial b_m} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \quad (2.17a)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_j} \left( v_i u_i \frac{\partial v_j}{\partial b_m} \right) - v_i \frac{\partial}{\partial x_j} \left( u_i \frac{\partial v_j}{\partial b_m} \right) = \quad (2.17b)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_j} \left( v_i u_i \frac{\partial v_j}{\partial b_m} \right) - v_i \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial b_m} - v_i u_i \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial v_j}{\partial b_m} \right) = \quad (2.17c)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_i} \left( v_j u_j \frac{\partial v_i}{\partial b_m} \right) - v_j \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial v_i}{\partial b_m} - \underbrace{v_i u_i \frac{\partial}{\partial b_m} \frac{\partial v_j}{\partial x_j}}_{=0} = \quad (2.17d)$$

Prvi član konačnih izvoda članova konvekcije je pod prostornim gradijentom, što znači da će se kasnije moći prevesti s prostornog na površinski integral, koristeći Green-Gaussov teorem.

Iz gradijenta efektivnog tlaka proizlaze članovi koji se grupiraju po  $\left( \frac{\partial p}{\partial b_m} \right)$  i  $\left( \frac{\partial k}{\partial b_m} \right)$ .

$$u \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial p_{\text{eff}}}{\partial b_m} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( u_i \frac{\partial p_{\text{eff}}}{\partial b_m} \right) - \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial p_{\text{eff}}}{\partial b_m} = \quad (2.18a)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_j} \left( u_i \frac{\partial p}{\partial b_m} + u_i \frac{2}{3} \frac{\partial k}{\partial b_m} \right) - \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial p}{\partial b_m} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial k}{\partial b_m} = \quad (2.18b)$$

## 2.4.2 Difuzijski član

Difuzijskom članu je također pripisan multiplikator adjungirana brzina  $u_i$  a rezultat prvog dijela derivacije difuzijskog člana po  $b_m$  su članovi koji sadržavaju derivacije turbulentnih značajki  $k$  i  $\varepsilon$  po  $b_m$ .

$$-u_i \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \frac{\partial \nu_t}{\partial b_m} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right] = -u_i \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( 2c_\mu \frac{k}{\varepsilon} \frac{\partial k}{\partial b_m} - c_\mu \frac{k^2}{\varepsilon^2} \frac{\partial \varepsilon}{\partial b_m} \right) \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right] = \quad (2.19a)$$

$$= -\frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( 2c_\mu u_i \frac{k}{\varepsilon} \frac{\partial k}{\partial b_m} - c_\mu u_i \frac{k^2}{\varepsilon^2} \frac{\partial \varepsilon}{\partial b_m} \right) \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right] + \quad (2.19b)$$

$$+ \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \left( 2c_\mu u_i \frac{k}{\varepsilon} \frac{\partial k}{\partial b_m} - c_\mu u_i \frac{k^2}{\varepsilon^2} \frac{\partial \varepsilon}{\partial b_m} \right) \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ -2c_\mu u_i \frac{k}{\varepsilon} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial k}{\partial b_m} \right] + \quad (2.19c)$$

$$+ 2c_\mu u_i \frac{k}{\varepsilon} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial k}{\partial b_m} +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ c_\mu u_i \frac{k^2}{\varepsilon^2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial b_m} \right] - \quad (2.19d)$$

$$- c_\mu u_i \frac{k^2}{\varepsilon^2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial \varepsilon}{\partial b_m}$$

Rezultat drugog dijela difuzijskog člana su 3 člana. Drugi i treći član sadržavaju derivaciju brzine  $v_i$  po  $b_m$ , dok prvi član, koji se također može prevesti na površinski integral sadrži



gradijent derivacije brzine po  $b_m$  te ide u zasebnu grupu.

$$-u_i \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ (\nu + \nu_t) \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial v_i}{\partial b_m} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial v_j}{\partial b_m} \right) \right] \right\} = \quad (2.20a)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ -u_i (\nu + \nu_t) \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial v_i}{\partial b_m} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial v_j}{\partial b_m} \right) \right] \right\} + \quad (2.20b)$$

$$+ \frac{\partial u_i}{\partial x_j} (\nu + \nu_t) \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial v_i}{\partial b_m} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial v_j}{\partial b_m} \right) \right] = \quad (2.20c)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ -u_i (\nu + \nu_t) \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial v_i}{\partial b_m} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial v_j}{\partial b_m} \right) \right] \right\} + \quad (2.20d)$$

$$+ (\nu + \nu_t) \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial v_i}{\partial b_m} \right) + (\nu + \nu_t) \underbrace{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial v_j}{\partial b_m} \right)}_{\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial v_i}{\partial b_m} \right)} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ -u_i (\nu + \nu_t) \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial v_i}{\partial b_m} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial v_j}{\partial b_m} \right) \right] \right\} + \quad (2.20e)$$

$$+ (\nu + \nu_t) \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial v_i}{\partial b_m} \right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ -u_i (\nu + \nu_t) \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial v_i}{\partial b_m} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial v_j}{\partial b_m} \right) \right] \right\} + \quad (2.20f)$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (\nu + \nu_t) \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial v_i}{\partial b_m} \right] - \quad (2.20g)$$

$$- \frac{\partial}{\partial x_j} \left( (\nu + \nu_t) \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right) \frac{\partial v_i}{\partial b_m} \quad (2.20h)$$

### 2.4.3 Jednadžba kontinuiteta

Izvod jednadžbe kontinuiteta je jednostavan. Njezini članovi sadržavaju faktor  $\left( \frac{\partial v_i}{\partial b_m} \right)$ :

$$q \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial v_j}{\partial b_m} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( q \frac{\partial v_j}{\partial b_m} \right) - \frac{\partial q}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial b_m} \quad (2.21a)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_i} \left( q \frac{\partial v_i}{\partial b_m} \right) - \frac{\partial q}{\partial x_i} \frac{\partial v_i}{\partial b_m} \quad (2.21b)$$

## 2.4.4 Turbulentni članovi

Zbog sličnosti izvoda konvekcijskih i difuzijskih članova transportnih jednadžbi za turbulentne značajke s momentnom jednadžbom olakšano je njihovo izvođenje:

$$k_a \frac{\partial v_j}{\partial b_m} \frac{\partial k}{\partial x_j} + k_a v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial k}{\partial b_m} \right) = \quad (2.22a)$$

$$= k_a \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial b_m} + \quad (2.22b)$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x_j} \left( k_a v_j \frac{\partial k}{\partial b_m} \right) - \quad (2.22c)$$

$$- \left( \frac{\partial k}{\partial x_j} v_j + k_a \underbrace{\frac{\partial v_j}{\partial x_j}}_{=0} \right) \frac{\partial k}{\partial b_m} \quad (2.22d)$$

U prvom članu derivacije turbulentne difuzije, slično kao i u jednadžbi očuvanja količine gibanja dobivamo 3 člana od kojih se zadnja dva mogu svrstati u adjungirane jednadžbe turbulencije, dok prvi može zasebno zbog gradijenta derivacije turbulentne značajke po  $b_m$ :

$$k_a \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \nu + \frac{\nu_t}{Pr_k} \right) \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial k}{\partial b_m} \right) \right] = \quad (2.23a)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ k_a \left( \nu + \frac{\nu_t}{Pr_k} \right) \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial k}{\partial b_m} \right) \right] - \frac{\partial k_a}{\partial x_j} \left( \nu + \frac{\nu_t}{Pr_k} \right) \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial k}{\partial b_m} \right) = \quad (2.23b)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ k_a \left( \nu + \frac{\nu_t}{Pr_k} \right) \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial k}{\partial b_m} \right) \right] - \quad (2.23c)$$

$$- \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \frac{\partial k_a}{\partial x_j} \left( \nu + \frac{\nu_t}{Pr_k} \right) \frac{\partial k}{\partial b_m} \right] + \quad (2.23d)$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \frac{\partial k_a}{\partial x_j} \left( \nu + \frac{\nu_t}{Pr_k} \right) \right] \frac{\partial k}{\partial b_m} \quad (2.23e)$$

Drugi član derivacije turbulentne difuzije sadrži članove s derivacijama turbulentnih značajki po  $b_m$ :

$$k_a \frac{1}{Pr_k} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial \nu_t}{\partial b_m} \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) = k_a \frac{1}{Pr_k} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \left( 2c_\mu \frac{k}{\varepsilon} \frac{\partial k}{\partial b_m} - c_\mu \frac{k^2}{\varepsilon^2} \frac{\partial \varepsilon}{\partial b_m} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) = \quad (2.24a)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_j} \left( k_a \frac{1}{Pr_k} \left( 2c_\mu \frac{k}{\varepsilon} \frac{\partial k}{\partial b_m} - c_\mu \frac{k^2}{\varepsilon^2} \frac{\partial \varepsilon}{\partial b_m} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) - \quad (2.24b)$$

$$- \frac{\partial k_a}{\partial x_j} \frac{1}{Pr_k} \left( 2c_\mu \frac{k}{\varepsilon} \frac{\partial k}{\partial b_m} - c_\mu \frac{k^2}{\varepsilon^2} \frac{\partial \varepsilon}{\partial b_m} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j}$$

## 2.4.5 Tenzor naprezanja

Tenzor naprezanja ovisan je o dvije varijable pri čemu je jedna varijabla turbulentna kinematička viskoznost  $\nu_t$ , koja ovisi o dvije  $k$  i  $\varepsilon$ , tako da tenzor naprezanja ovisi od sveukupno 3 varijable:

$$P_k = \nu_t \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = c_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \quad (2.25a)$$

$$\frac{\partial P_k}{\partial b_m} = 2c_\mu \frac{k}{\varepsilon} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial k}{\partial b_m} - \quad (2.25b)$$

$$- c_\mu \frac{k}{\varepsilon^2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial \varepsilon}{\partial b_m} + \quad (2.25c)$$

$$+ c_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial b_m} \left( \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \quad (2.25d)$$

gdje su prva dva člana gornje jednadžbe raspisana do konačnog oblika koji se množi s derivacijama turbulentnih varijabli po  $b_m$ , dok je treći potrebno još dodatno raspisati kako bi se došlo do željenog oblika:

$$c_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial b_m} \left( \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) = \quad (2.26a)$$

$$= c_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial b_m} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + c_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial}{\partial b_m} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \quad (2.26b)$$

$$= 2c_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial v_i}{\partial b_m} \right) = \quad (2.26c)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ 2c_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial v_i}{\partial b_m} \right] - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ 2c_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right] \frac{\partial v_i}{\partial b_m} \quad (2.26d)$$

Uz jednadžbe koje se integriraju po volumnoj domeni pomoću parcijalne integracije dobivaju se i jednadžbe koje je moguće preko Green-Gauss-ova teorema svesti na površinsku domenu. Te jednadžbe su potom korištene za izvođenje adjungiranih rubnih uvjeta, što je detaljnije pokazano u [4].

## 2.5 Izvedene adjungirane jednadžbe

U daljnjem tekstu su sažeto prikazane adjungirane jednadžbe zbog preglednosti.

### 2.5.1 Adjungirane jednadžbe unutarnje domene

Na kraju izvoda se dobiju sljedeće jednadžbe pomoću kojih se izračunavaju vrijednosti polja Lagrange-ovih multiplikatora  $u_i$ ,  $q$ ,  $k_a$  i  $\varepsilon_a$ :

$$R_i^u = -v_j \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (\nu + \nu_t) \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] + \quad (2.27)$$

$$+ \frac{\partial q}{\partial x_i} + k_a \frac{\partial k}{\partial x_i} + \varepsilon_a \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} + 2 \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( k_a + \varepsilon_a c_1 \frac{\varepsilon}{k} \right) \nu_t \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right]$$

$$R^q = - \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \quad (2.28)$$

$$R^{k_a} = 2c_\mu \frac{k}{\varepsilon} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u_j}{\partial x_j} - v_j \frac{\partial k_a}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \nu + \frac{\nu_t}{Pr_k} \right) \frac{\partial k_a}{\partial x_j} \right] + \frac{2c_\mu k}{Pr_k \varepsilon} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial k_a}{\partial x_j} -$$

$$- 2k_a c_\mu \frac{k}{\varepsilon} P + \frac{2c_\mu k}{Pr_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \frac{\partial \varepsilon_a}{\partial x_j} + \varepsilon_a \left( -c_1 c_\mu - c_2 \frac{\varepsilon^2}{k^2} \right) P - \frac{2}{3} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \quad (2.29)$$

$$R^{\varepsilon_a} = -c_\mu \frac{k^2}{\varepsilon^2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - v_j \frac{\partial \varepsilon_a}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \nu + \frac{\nu_t}{Pr_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon_a}{\partial x_j} \right] + \quad (2.30)$$

$$+ k_a c_\mu \frac{k^2}{\varepsilon^2} P - \frac{c_\mu k^2}{Pr_\varepsilon \varepsilon^2} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \frac{\partial \varepsilon_a}{\partial x_j} + k_a + 2c_2 \frac{\varepsilon}{k} \varepsilon_a - \frac{c_\mu k^2}{Pr_k \varepsilon^2} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial k_a}{\partial x_j}$$

## 2.5.2 Adjungirane jednačbe granica

Adjungirane jednačbe na granicama sudjeluju u određivanju rubnih uvjeta.

$$D_i^u = u_j v_j n_i + u_i v_j n_j + (\nu + \nu_t) \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j - \quad (2.31)$$

$$- q n_i - 2 \left( k_a + \varepsilon_a c_1 \frac{\varepsilon}{k} \right) (\nu + \nu_t) \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) n_j$$

$$D^q = u_j n_j \quad (2.32)$$

$$D^{k_a} = -2c_\mu \frac{k}{\varepsilon} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) u_i n_j + v_j n_j k_a + \left( \nu + \frac{\nu_t}{Pr_k} \right) \frac{\partial k_a}{\partial x_j} n_j + \frac{2}{3} u_j n_j - \quad (2.33)$$

$$- 2k_a \frac{c_\mu k}{Pr_k \varepsilon} \frac{\partial k}{\partial x_j} n_j - 2\varepsilon_a \frac{c_\mu k}{Pr_\varepsilon \varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} n_j$$

$$D^{\varepsilon_a} = c_\mu \frac{k^2}{\varepsilon^2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) u_i n_j + v_j n_j \varepsilon_a + \left( \nu + \frac{\nu_t}{Pr_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon_a}{\partial x_j} n_j + \quad (2.34)$$

$$+ \varepsilon_a \frac{c_\mu k^2}{Pr_\varepsilon \varepsilon^2} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} n_j + k_a \frac{c_\mu k^2}{Pr_k \varepsilon^2} \frac{\partial k}{\partial x_j} n_j$$

Ovo su ostaci integrala koji zapravo nisu pravi površinski članovi pošto sadržavaju derivaciju gradijenta značajki strujanja po  $b_m$ :

Sljedeći članovi opisuju površinske integrale koji se ne mogu smjestiti u prethodno pokazane površinske integrale zbog toga što za razliku od njih ne sadržavaju derivaciju značajki strujanja po  $b_m$  već derivaciju gradijenta istih značajki. Za njih je uvedena oznaka  $Dg$ :

$$Dg_i^u = -(\nu + \nu_t) u_i \frac{\partial}{\partial b_m} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) n_j \quad (2.35)$$

$$Dg^k = -k_a \left( \nu + \frac{\nu_t}{Pr_k} \right) \frac{\partial}{\partial b_m} \left( \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) n_j \quad (2.36)$$

$$Dg^\varepsilon = -\varepsilon_a \left( \nu + \frac{\nu_t}{Pr_\varepsilon} \right) \frac{\partial}{\partial b_m} \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) n_j \quad (2.37)$$

### 2.5.3 Adjungirane zidne funkcije

Sljedeća jednačba predstavlja izvod dijela jednačbi vezanih uz izvod adjungiranih zidnih funkcija iz [4], gdje je zbog svoje složenosti i neočiglednosti razjašnjen i raspisan član koji se nalazi u izvodima adjungiranih rubnih uvjeta na zidu te adjungiranih zidnih funkcija:

$$\left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) = \frac{v_\tau^2}{(\nu + \nu_t) n_j t_i} \quad (2.38a)$$

$$\frac{\partial}{\partial b_m} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial}{\partial b_m} \left( \frac{v_\tau^2}{(\nu + \nu_t) n_j t_i} \right) = \frac{\partial}{\partial v_\tau} \left( \frac{v_\tau^2}{(\nu + \nu_t) n_j t_i} \right) \frac{\partial v_\tau}{\partial b_m} \quad (2.38b)$$

$$\frac{\partial}{\partial v_\tau} \left( \frac{v_\tau^2}{(\nu + \nu_t) n_j t_i} \right) = \frac{2v_\tau}{(\nu + \nu_t) n_j t_i} + \frac{\partial}{\partial \nu_{\text{eff}}} \left( \frac{v_\tau^2}{(\nu + \nu_t) n_j t_i} \right) \frac{\partial \nu_{\text{eff}}}{\partial v_\tau} = \quad (2.38c)$$

$$= \frac{2v_\tau}{(\nu + \nu_t) n_j t_i} - \frac{v_\tau^2}{(\nu + \nu_t)^2 n_j t_i} c_\mu \frac{k}{\varepsilon} \left( 2 \frac{\delta k}{\delta v_\tau} - \frac{k}{\varepsilon} \frac{\delta \varepsilon}{\delta v_\tau} \right) \quad (2.38d)$$

u ovim jednačbama je tenzor brzine deformacije  $\left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$  izražen preko izraza za brzinu trenja  $v_\tau$ . Nadalje je taj izraz deriviran po  $b_m$  te lančano deriviran po brzini trenja  $v_\tau$  i turbulentnoj viskoznosti  $\nu_t$ , koja je opet ovisna o varijablama  $k$  i  $\varepsilon$  prema izrazu za  $\nu_t$ , što dodaje još jednu lančanu derivaciju.

## 2.6 Tipične funkcije cilja

U praksi se rijetko može naići na probleme za koje postoji jednoznačno najbolje rješenje, pošto često postoji veći broj ciljeva. No može se reći da su ti ciljevi sastavljeni od pojedinih elemenata, odnosno, pojedinih ciljnih funkcija. Ovdje je pokazano nekoliko osnovnih funkcija cilja:

### Minimizacija disipacije

$$J = - \int_{\Gamma_i} \left( p + \frac{1}{2} v_i^2 \right) v_k n_k \, d\Gamma - \int_{\Gamma_o} \left( p + \frac{1}{2} v_i^2 \right) v_k n_k \, d\Gamma \quad (2.39)$$

Ovaj se kriterij koristi kod unutarnjeg strujanja u svrhu smanjenja izravnog gubitka energije zbog prolaska kroz kanal. Prvi integral predstavlja protok energije kroz ulaznu površinu a drugi integral protok energije kroz izlaznu površinu. Integrali su po predznaku jednaki jer su definirani obzirom na normale na ulazu i izlazu.

### Uniformnost brzine na izlazu

$$J = \int_{\Gamma_o} \frac{c}{2} (v_i - v_i^d)^2 d\Gamma \quad (2.40)$$

Razlog gubitaka u unutarnjem strujanju može također biti nejednoliko strujanje na izlazu koje usprkos smanjenju disipacije energije može uzrokovati gubitke zbog mogućeg zagušenja strujanja. U ovoj formuli  $c = 1\text{m}^{-2}\text{s}^{-1}$  predstavlja konstantu uvedenu zbog konzistentnosti jedinica a  $v_i^d$  željenu brzinu [11]. U jednadžbi je definiran integral razlike postojeće brzine u odnosu na željenu brzinu.

### Smanjenje otpora, povećanje uzgona

$$J = \int_{\Gamma_w} pn_j d_j d\Gamma, \quad J = \int_{\Gamma_w} pn_j l_j d\Gamma \quad (2.41)$$

Ova je ciljna funkcija tipična za vanjsko strujanje gdje je cilj smanjiti otpor, odnosno povećati uzgon aerodinamičke površine.  $n_j d_j$  odnosno  $n_j l_j$  predstavljaju skalarni umnožak normale na površinu  $n_j$  i jediničnog vektora  $d_j$  suprotnog od smjera gibanja i vektora  $l_j$  okomitog na smjer gibanja koji pokazuju u smjeru otpora odnosno uzgona.

## 2.7 Kriterij za minimizaciju disipacije

Funkcija cilja gubitka totalnog tlaka derivirana po konstrukcijskoj varijabli  $b_m$ :

$$\frac{\delta J}{\delta b_m} = - \int_{\Gamma_i} \frac{\partial p}{\partial b_m} v_k n_k d\Gamma - \int_{\Gamma_o} v_i \frac{\partial v_i}{\partial b_m} v_k n_k + \frac{1}{2} v_i^2 \frac{\partial v_k}{\partial b_m} n_k d\Gamma$$

Na ulazu vrijedi da je  $\frac{\partial v_i}{\partial b_m} = 0$  a na izlazu  $\frac{\partial p}{\partial b_m} = 0$  pa stoga odgovarajući članovi u funkciji cilja otpadaju.

Izvedena proširena funkcija cilja prema [4]:

$$\begin{aligned} \frac{\delta L}{\delta b_m} = \frac{\delta J}{\delta b_m} + \int_{\Omega} R_i^\phi \frac{\partial \phi_i}{\partial b_m} d\Omega + \int_{\Gamma} D_i^\phi \frac{\partial \phi_i}{\partial b_m} d\Gamma + \\ + \int_{\Gamma} D g_i^\phi \frac{\partial}{\partial b_m} \left( \frac{\partial \phi_i}{\partial x_j} \right) d\Gamma + \int_{\Gamma_w} \phi_i R_i^\phi n_k d\Gamma \end{aligned} \quad (2.42)$$

Izvedena proširena funkcija cilja dobije se tako da se funkciji cilja  $J$  priključe jednadžbe ograđenja  $R^n$  te se na tako definiranu proširenu funkciju primjene Leibniz-ov teorem za integrale, pravilo lančanog deriviranja te Green-Gaussov teorem.

## 2.7.1 Adjungirani rubni uvjeti

Rubni uvjeti ovise o ciljnoj funkciji, te se pomoću nje izvode.

Kako funkcija cilja ne smije ovisiti o varijacijama značajki strujanja po konstrukcijskoj varijabli  $\left(\frac{\partial\phi}{\partial b_m}\right)$  članovi adjungirane jednadžbe koji sadržavaju varijacije pojedinih značajki strujanja po konstrukcijskoj varijabli se grupiraju u izraze, te se izjednačavaju s 0:

$$\int_{\Gamma} D^{\phi} \frac{\partial\phi}{\partial b_m} d\Gamma = 0 \implies D^{\phi} = 0$$

**Na ulazu** se zadaje Dirichletov rubni uvjet na  $v$ ,  $k$ , i  $\varepsilon$  i von Neumannov na  $p$ . Također vrijedi da su čvorovi nepomični  $\left(\frac{\delta x_i}{\delta b_m} = 0\right)$ , dok je u [4] je pokazano da vrijedi:  $u_i n_i = v_i n_i$ ,  $u_i t_i = 0$ ,  $\frac{\partial v_i}{\partial b_m} = \frac{\partial k}{\partial b_m} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial b_m} = 0$ , a na adjungirani tlak  $q$  rubni uvjeti se mogu staviti proizvoljno. Ispitivanja pokazuju da se može zadati von Neumannov uvjet za adjungirani tlak na ulazu što se slaže s istim rubnim uvjetom za obični tlak na ulazu.

**Na izlazu** je zadan von Neumannov rubni uvjet na  $v$ ,  $k$  i  $\varepsilon$  i Dirichletov na tlak. Čvorovi su nepomični  $\left(\frac{\delta x_i}{\delta b_m} = 0\right)$ , te također vrijedi:

$$\int_{\Gamma_o} \left( D_i^u - v_i v_k n_k - \frac{1}{2} v_k^2 n_i \right) d\Gamma = 0, \quad D^{k_a} = 0, \quad D^{\varepsilon_a} = 0$$

Ukoliko izlazna površina nije ravna ploha na njoj mora vrijediti:  $u_i t_i = 0$ . Na  $u_i n_i$  može se staviti proizvoljan rubni uvjet. Također se može proizvoljno primjeniti Dirichletov rubni uvjet na adjungirani tlak  $q$ .

**Na stijenci** vrijedi uvjet nepropusnosti za osnovnu brzinu  $v_i n_i = 0$  i adjungiranu brzinu  $u_i n_i = 0$ , te  $v_i t_i = 0$ .



## 2.7.2 Adjungirane zidne funkcije

Adjungirane zidne funkcije su izvedene u [4] te će ovdje biti ukratko prikazane:

Adjungirana brzina trenja izvedena je slično običnoj brzini trenja.

$$u_{\tau}^2 = (\nu + \nu_i) \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j t_i \quad (2.43)$$

Uvrštavanjem adjungiranih rubnih uvjeta dolazi se do sljedeće jednadžbe:

$$u_{\tau}^2 = \frac{1}{c_v} \left[ 2u_k t_k v_{\tau} - \left( \nu + \frac{\nu_t}{Pr_k} \right) \frac{\partial k_a}{\partial x_j} n_j \frac{\delta k}{\delta v_{\tau}} - \left( \nu + \frac{\nu_t}{Pr_{\varepsilon}} \right) \frac{\partial \varepsilon_a}{\partial x_j} n_j \frac{\delta \varepsilon}{\delta v_{\tau}} \right] \quad (2.44)$$

pri čemu  $c_v$  proizlazi iz obične zidne funkcije:

$$c_v = \begin{cases} \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + B + \frac{1}{\kappa}, & \text{za } y^+ \geq y_c^+ \\ \frac{2\nu_{\tau} \Delta}{\nu}, & \text{za } y^+ < y_c^+ \end{cases} \quad (2.45)$$

Za detalje pogledati [4]

## 2.8 Pomicanje mreže

U svrhu pomicanja površine mreže primjenjen je rješavač koji daje rješenje na osnovu Laplaceove jednačbe [7]:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left( \gamma \frac{\partial \delta_i}{\partial x_j} \right) = 0, \quad (2.46)$$

gdje  $\delta_i$  predstavlja pomak čvorova unutar mreže a  $\gamma$  predstavlja koeficijent difuzije površinskog pomaka u unutrašnjost mreže koji je definiran sljedećom jednačbom:

$$\gamma(V) = 1 + \frac{1 - \frac{V_{\min}}{V_{\max}}}{\frac{V}{V_{\max}}} \quad (2.47)$$

gdje je  $V$  volumen promatranog elementa mreže, a  $V_{\min}$  i  $V_{\max}$  su volumeni najmanjeg i najvećeg elementa mreže.

Rješavač koristi metodu konačnih elemenata za diskretizaciju jednačbe. Rješenje daje pomake na unutarnjim čvorovima obzirom na zadane vrijednosti na graničnim ploham.

# Poglavlje 3

## Numerički model

Jednadžbe prikazane u prethodnom poglavlju su polazna točka za numerički model. U ovom radu je korištena metoda kontrolnih volumena na kojoj je temeljen programski paket otvorenog pristupa kodu OpenFOAM. Proračunska domena je diskretizirana pomoću proizvoljnih poliedarskih kontrolnih volumena, gdje se svaka parcijalna diferencijalna jednadžba prevodi u sustav linearnih jednadžbi pomoću prostorne diskretizacije. Kako se u ovom radu razmatrana samo stacionarna strujanja, vremenska diskretizacija nije korištena.

Jednadžbe nestlačivog i turbulentnog stacionarnog strujanja rješavaju se pomoću SIMPLE algoritma, gdje se u svakoj iteraciji redom rješavaju:

1. momentna jednadžba,
2. jednadžba tlaka koja proizlazi iz jednadžbe kontinuiteta,
3. jednadžba turbulentne kinetičke energije te
4. jednadžba disipacije turbulentne kinetičke energije.

Sve jednadžbe su diskretizirane u strogoj konzervativnoj formi pomoću Gaussova teorema, gdje je za diskretizaciju svih konvekcijskih članova je korištena uzvodna shema prvog reda točnosti, dok se za diskretizaciju difuzijskih članova koristila linearna interpolacija s neortogonalnom korekcijom [12]. Za diskretizaciju gradijenata je korišten Gaussov teorem s linearnom interpolacijom. Jednadžbe strujanja su prvo rješavane s otprilike 200 do 500 iteracija da bi se dobilo ustaljeno strujanje za adjungirane jednadžbe, nakon čega se jednadžbe strujanja i adjungirane jednadžbe rješavaju paralelno.

Adjungirane se jednadžbe zbog analogije s jednadžbama strujanja rješavaju slično; odvojenim pristupom na temelju SIMPLE algoritma. Prvo se rješava adjungirana momentna jed-

nadžba, nakon čega se formulira adjungirana jednadžba tlaka. Nakon rješenja sustava adjungirane brzine i tlaka, rješavaju se uzastopno adjungirana turbulentna kinetička energija i adjungirana disipacije turbulentne kinetičke energije. Cijeli postupak rješavanja strujanja i adjungiranog problema se ponavlja zadani broj puta u svrhu smanjenja reziduala te dolaska do konvergirano rješenja. U adjungiranim jednadžbama su implicitno tretirani konvekcijski i difuzijski članovi, koristeći iste diskretizacijske sheme kao i za strujanje. Dodatni adjungirani konvekcijski član u momentnoj jednadžbi je tretiran eksplicitno.

Linearni sustavi koji su dobiveni diskretizacijom momentnih jednadžbi te jednadžbi modela turbulencije (za strujanje i adjungirani problem) su rješavani pomoću stabilizirane metode bi-konjugiranih gradijenata (BiCGStab), dok su jednadžbe tlaka i adjungiranog tlaka rješavane pomoću multi-grid metode.

## Poglavlje 4

### Testni primjeri

Kao podloga za ispitivanje implementiranog modela korišteni su uzorci 2D i 3D savinute cijevi, prema [1]. 2D savinutu cijev sastavljaju 2 zavoja u istoj ravnini od  $45^\circ$ , dok 3D savinutu cijev sastavljaju 2 zavoja savinuta okomito jedan na drugi pod  $90^\circ$ . Rješavač djeluje na način da izračuna površinske osjetljivosti koje bi trebale ublažiti skretanje strujanja i cijevnu površinu oblikovati tako da se približi funkciji cilja, koja je zadana jednadžbom 2.39.

U daljnjem tekstu opisane su postavke simulacije.  $k$  i  $\varepsilon$  se računa prema jednadžbama:

$$k = \frac{3}{2} (I v_{ul})^2 \text{ i } \omega = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{I v_{ul}}{c_\mu^{1/4} L_T}$$

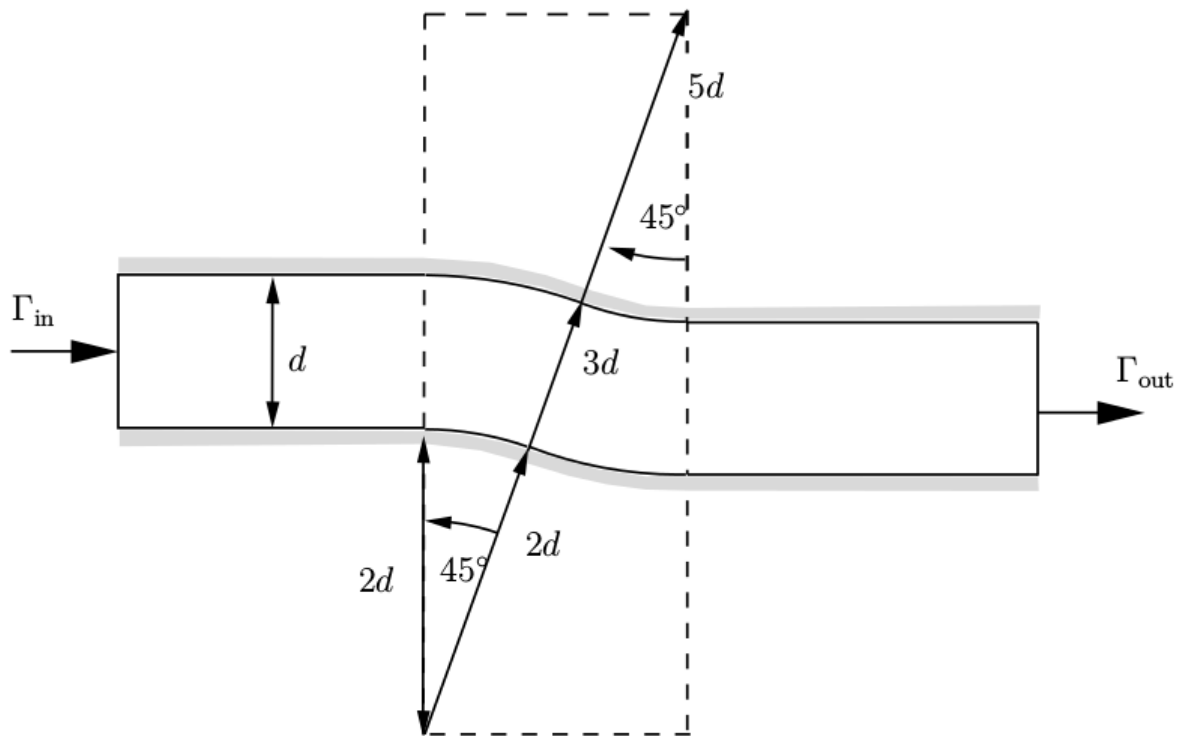
gdje je  $\omega$  je prevedena na  $\varepsilon$  preko  $\varepsilon = c_\mu \omega k$ ,  $v_{ul}$  je ulazna brzina strujanja. Intenzitet turbulencije  $I$  računa se prema jednadžbi  $I = 0.16 \text{ Re}^{-1/8}$  i  $L_T = 0.07d$  dok je  $\text{Re} = 20000$ ,  $L_T$  je duljinska skala turbulencije a  $d$  je u ovom slučaju promjer cijevi koji iznosi 0.1 m. Kao fluid je uzet zrak s kinematičkom viskoznošću od  $\nu = 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ . Odgovarajuća brzina na ulazu dobije se preko  $v_{ul} = \frac{\text{Re} \nu}{d}$  te iznosi 2 m/s.  $k$  prema tome iznosi 0.012916, dok  $\varepsilon$  iznosi 0.034458.

## 4.1 2D-savinuta cijev

U ovom će potpoglavlju biti opisana geometrija cijevi slika (4.1.1) i mreža slika (4.1.2) te će biti prikazani i raspravljani rezultati adjungiranog rješavača.

### 4.1.1 Geometrija

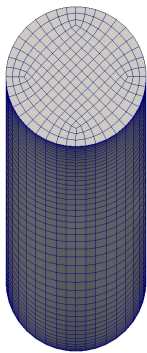
Geometrija 2D savinute cijevi je sastavljena od ulaznog i izlaznog segmenta. Ravni dio cijevi je dugačak 0.2 m, nakon toga slijedi zavoj s polumjerom zakrivljenosti po srednjoj liniji od veličine promjera 0.25 m te na kraju slijedi zavoj u drugom smjeru odnosno ispravljanje cijevi te ravni izlazni dio duljine 0.2 m.



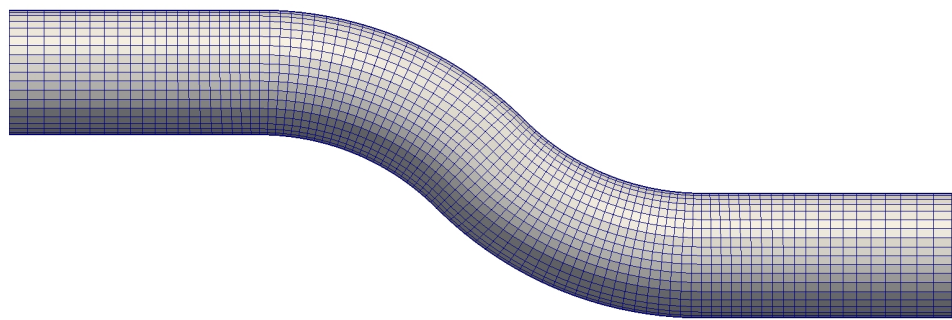
Slika 4.1.1: Geometrija 2D savinute cijevi.

### 4.1.2 Proračunska mreža

Mreža 2D savinute cijevi je blok-strukturirana, što znači da je sastavljena od isključivo heksaedarskih ćelija. Mreža se sastoji od ukupno 19800 ćelija što ju čini grubom i prikladnom za početno ispitivanje. Po poprečnom presjeku ima 220 ćelija, ravni segmenti imaju 10 ćelija po duljini dok savinuti imaju 25 ćelija po duljini. Također je bila izrađena finija mreža s 1692 ćelija po presjeku s ukupno 406080 ćelija s brzinom prilagođenom otprilike istom  $y^+$ .



a) X ravnina



b) Y ravnina

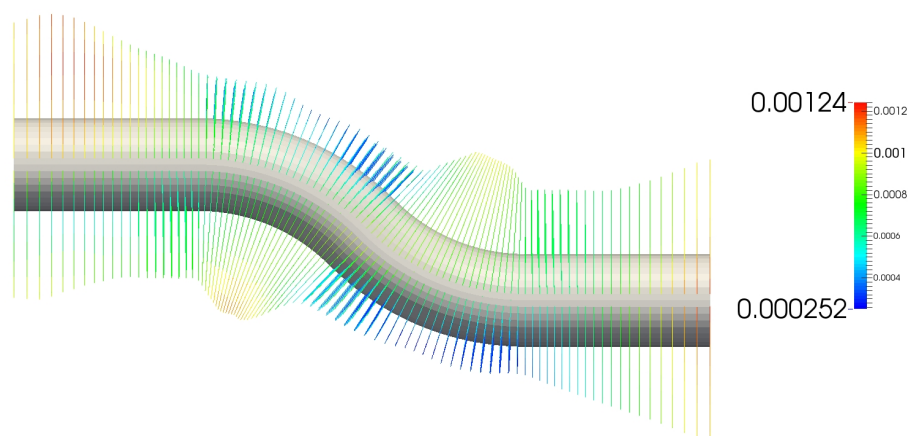
Slika 4.1.2: S-zavoju, mreža

### 4.1.3 Površinske osjetljivosti

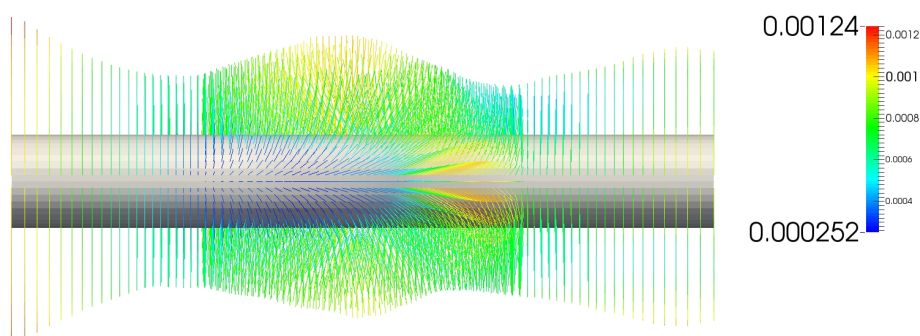
Na slikama (4.1.3) i (4.1.4) prikazane su površinske osjetljivosti za 2D savinutu cijev. Na tlocrtu (4.1.4) vidljivo je da površinske osjetljivosti poprimaju više vrijednosti na zidu cijevi na području infleksije cijevi te također poprimaju više vrijednosti na unutarnjem polumjeru zavoja cijevi, što je u načelu dobro, jer bi se na taj način cijev "izravnala" te bi se tako vjerojatno umanjio pad totalnog tlaka. S druge pak strane oko ulaza i izlaza površinske osjetljivosti poprimaju veće vrijednosti u odnosu na ostale. To se može objasniti na dva načina. Prvi je da su brzina i ulazni presjek konstantni. U tom slučaju takva promjena površine imala bi smisla, pošto bi protok ostao isti a brzina unutar cijevi bi se smanjila što bi za posljedicu imalo manji gradijent brzine uz stijenku u smjeru normalnom na stijenku.

U drugom slučaju brzina bi ostala ista a ulazna i izlazna površina bi se povećala, što bi značilo da će se uz istu brzinu protok povećati, a s povećanim protokom dolaze i veći gubici.

Nadalje se dobiveni rezultati mogu usporediti s rezultatima u [1] (stranica 121) gdje su prikazani rezultati za 2D slučaj: savinuti S-kanal, gdje su osjetljivosti na području pozitivnog prirasta tlaka na kraju infleksije usmjerene prema unutrašnjosti mreže, dok su u razmatranom slučaju sve površinske osjetljivosti okrenute u smjeru proširenja mreže. Izračun se također proveo na finijoj mreži te na mreži s produljenim ulazom i izlazom u pokušaju otkrivanja greške. Površinske osjetljivosti su davale kvalitativno slična rješenja te je zaključeno da ne ovise o gustoći mreže niti ovise o duljini ulaza i izlaza.



Slika 4.1.3: Površinske osjetljivosti 2D savinute cijevi sa strane.

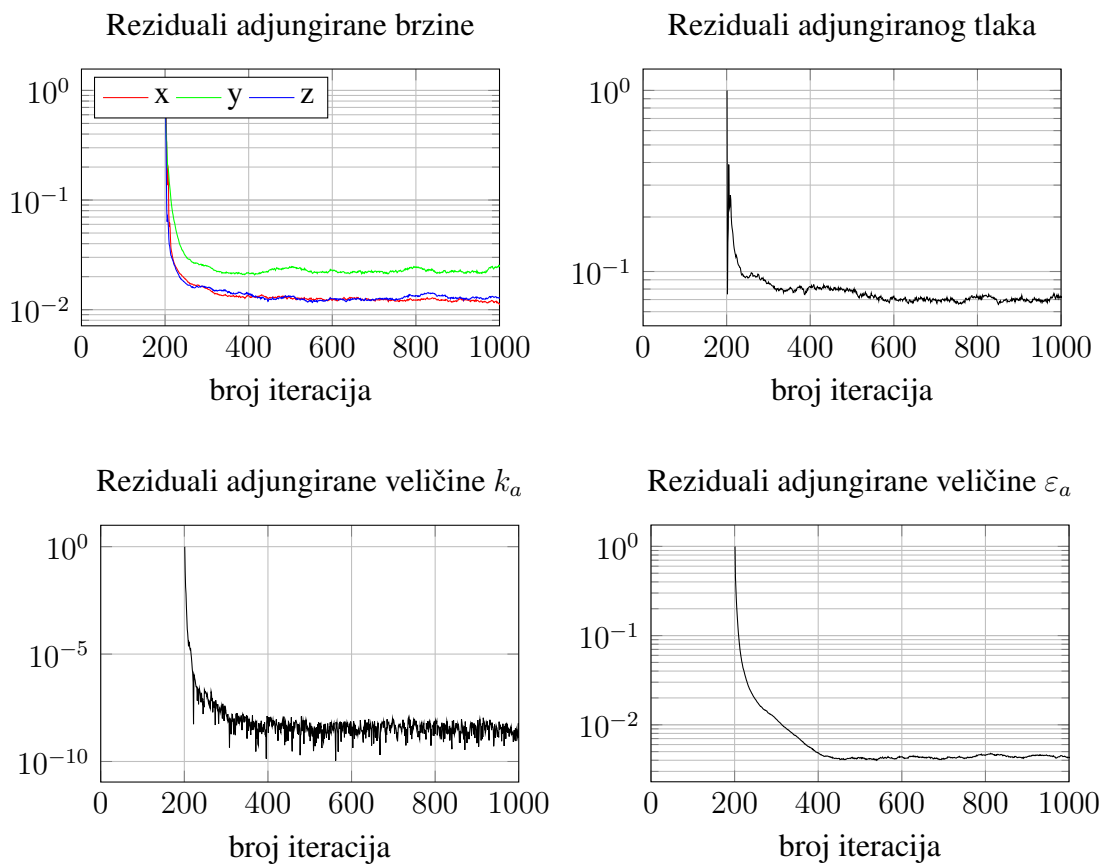


Slika 4.1.4: Površinske osjetljivosti 2D savinute cijevi s gornje strane.



#### 4.1.4 Konvergencija

Iz dijagrama moguće je iščitati da se reziduali adjungiranih varijabli stabiliziraju nakon do 600. koraka s time da se adjungirani rješavač uključio nakon 200 koraka osnovnih jednadžbi strujanja i bio uključen 400 koraka. Reziduali adjungirane brzine i adjungiranog tlaka konvergiraju do ispod  $10^{-1}$  reziduali adjungirane disipacije turbulentne kinetičke energije  $\varepsilon_a$  konvergiraju do  $10^{-2}$  dok adjungirana turbulentna kinetička energija  $k_a$  konvergira poprilično dobro, ispod  $10^{-7}$  ali reziduali plešu po nekoliko redova veličine.



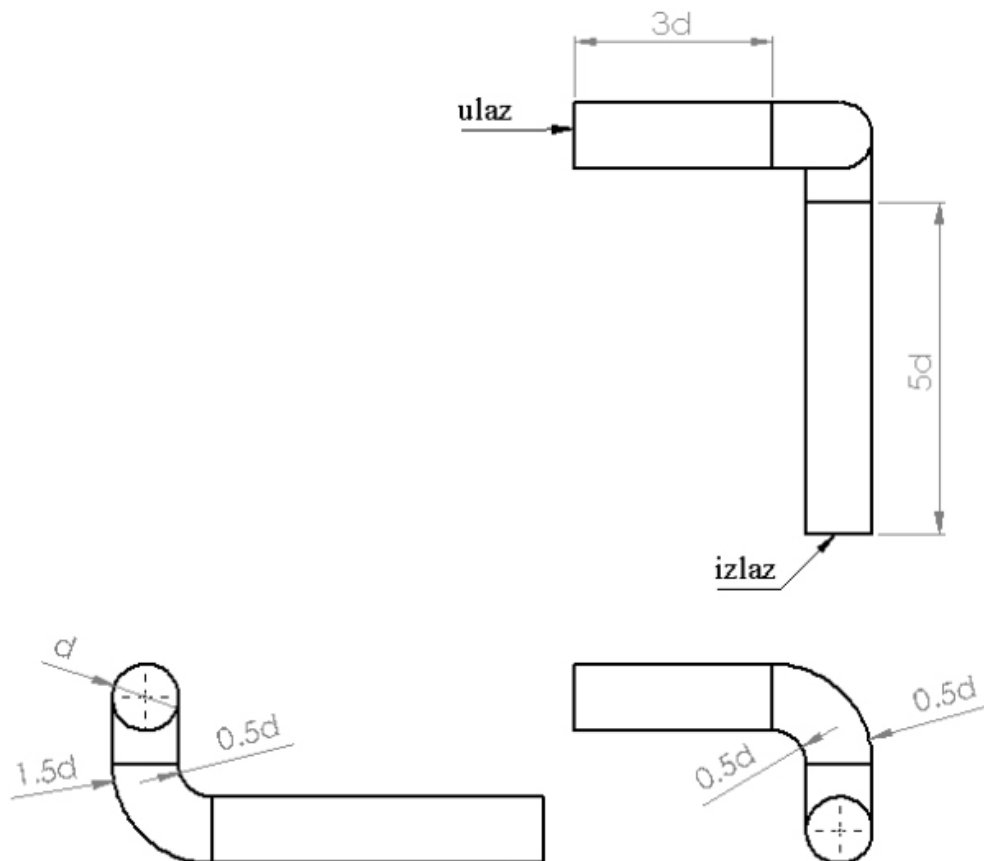
Slika 4.1.5: Dijagrami konvergencije adjungiranih veličina za 2D savinutu cijev.

## 4.2 3D-savinuta cijev

U ovom će potpoglavlju biti opisana geometrija cijevi (4.2.1) i mreža (4.2.2) te će biti prikazani i raspravljeni rezultati adjungiranog rješavača. Na kraju potpoglavlja će se obaviti pomak mreže pomoću površinskih osjetljivosti.

## 4.2.1 Geometrija

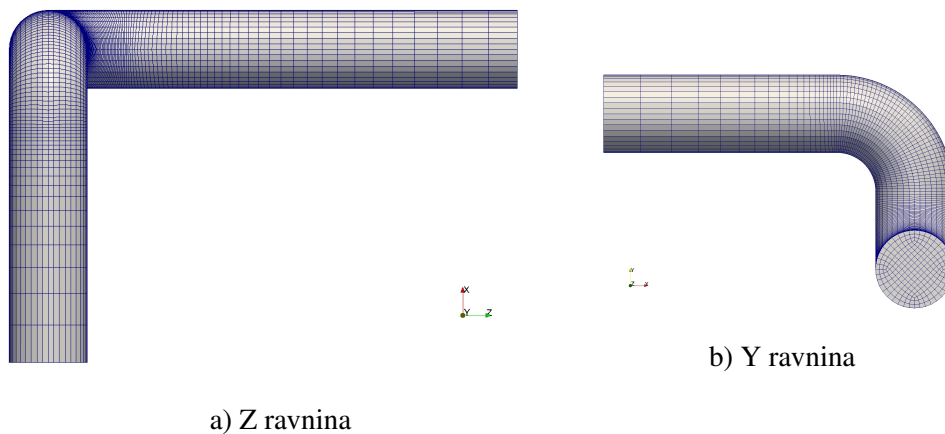
Prikazana je geometrija 3D savinute cijevi prema [1]. Polumjer cijevi iznosi 0.1 m kao i u prethodnom primjeru. Geometrija 3D savinute cijevi također je kao i 2D savinuta cijev sastavljena od 4 segmenta. To su ulazni i izlazni dio te dva zavoja od  $90^\circ$ . Prvi dio je dugačak 0.3 m te je kraći od izlaznog koji iznosi 0.5 m. Polumjer srednje linije zavoja iznosi 0.1 m.



Slika 4.2.1: Geometrija 3D savinute cijevi

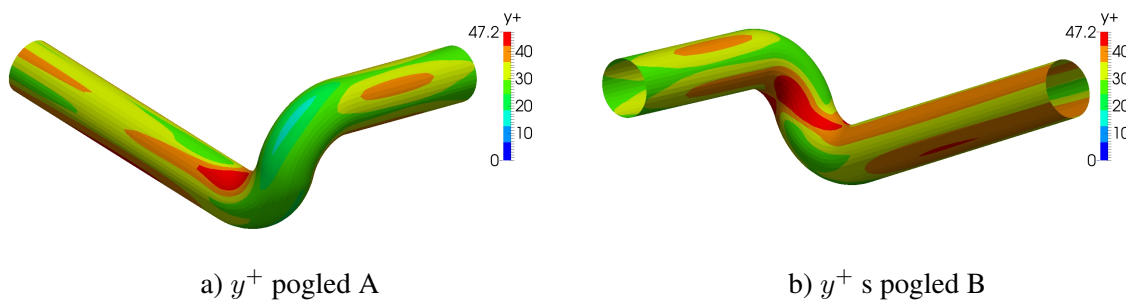
## 4.2.2 Proračunska mreža

Prikazana mreža je sastavljena od 30360 ćelija. Kao i u slučaju 2D savinute cijevi mreža je blok-strukturirana. Po presjeku ima 220 ćelija kao u prethodnom primjeru a po duljini: na ravnom ulaznom dijelu 20 ćelija, preostala tri dijela imaju 40 ćelija po duljini.



Slika 4.2.2: Mreža 3D-savinute cijevi.

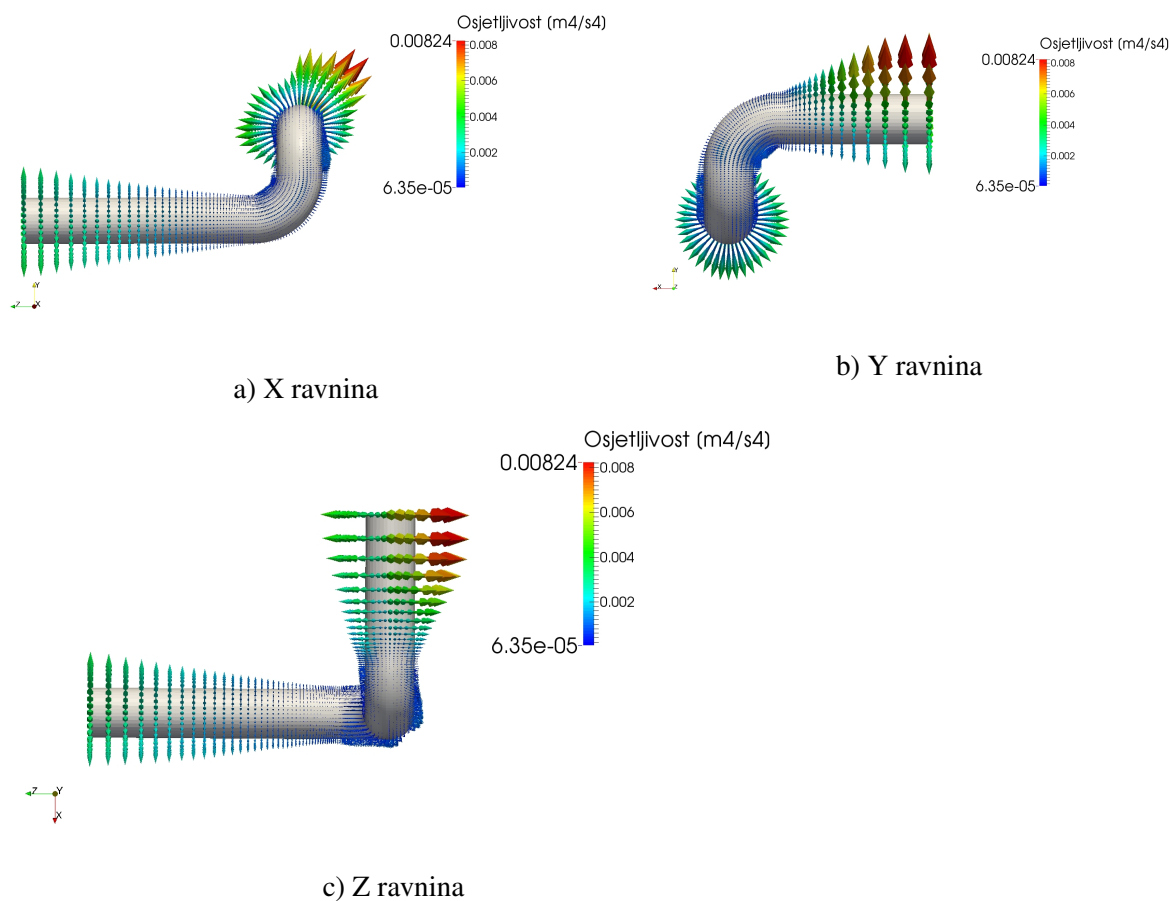
Na slikama 4.2.3. a) i 4.2.3. b) vidi se da  $y^+$  poprima vrijednosti od 15 do 50 što je blago iznad dozvoljenih vrijednosti za zidne funkcije velikog Reynoldsovog broja.



Slika 4.2.3: Vrijednosti bezdimenzijske udaljenosti  $y^+$  od stijenske cijevi

### 4.2.3 Površinske osjetljivosti

Slika prikazuje površinske osjetljivosti 3D savinute cijevi u 3 projekcije. Vidljivo je da su osjetljivosti najveće na ulazu i izlazu, što prije svega nije u skladu s rezultatima dobivenim u [1]. Uostalom, ne čini se smisljeno da bi se do boljeg rješenja moglo doći povećanjem ulaznog i izlaznog presjeka, pošto bi se pri tome uz istu ulaznu brzinu povećao protok, a samim time i gubici. Dobivene osjetljivosti naznačuju jako nesrazmjernu deformaciju ulaznog i izlaznog presjeka naspram preostataka površine cijevi te je malo vjerojatno da bi mogle dovesti do boljeg rješenja. U ovom slučaju finija mreža i produljenje ulaza i izlaza također nije ukazivalo na grešku.

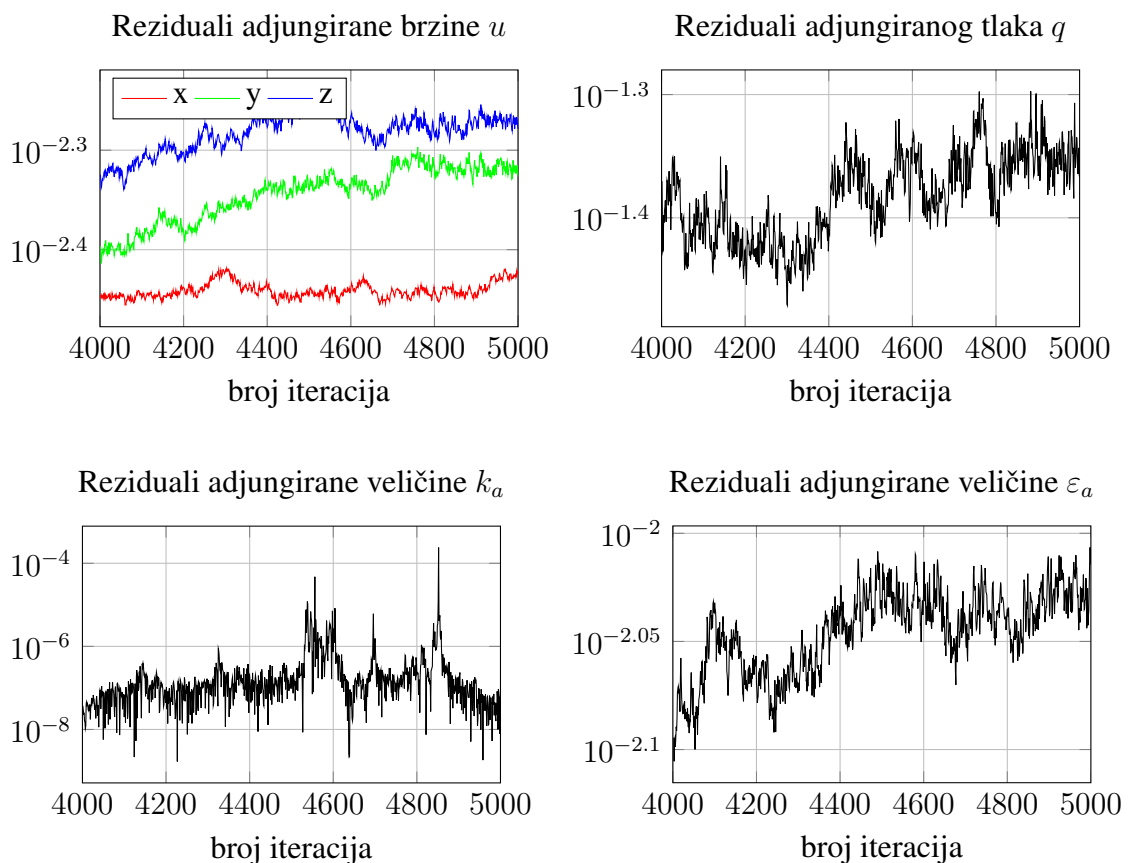


Slika 4.2.4: Površinske osjetljivosti 3D savinute cijevi.

## 4.2.4 Konvergencija

Na dijagramima su prikazani reziduali adjungiranih veličina. Namjerno je uzet interval od 4000 do 5000 iteracija kako bi se vidjelo da oni ne konvergiraju. Vidljivo je da je rezidual adjungiranog tlaka poprilično velik i da neće konvergirati ispod  $10^{-2}$ , što uzrokuje nestabilnosti u rezultatima. Također se ističe  $k_a$ , čiji reziduali osciliraju čak gotovo 5 redova veličina. Takvo nestabilno osciliranje reziduala ukazuje na nestabilne rezultate odnosno površinske osjetljivosti, što u načelu ne mora predstavljati problem pošto bi se u izmjenjivanju adjungiranog rješavača i rješavača za pomicanje mreže eventualna novonastala izrazita deformacija površine zbog naglog skoka površinske osjetljivosti izravnala u sljedećim koracima adjungiranog rješavača.

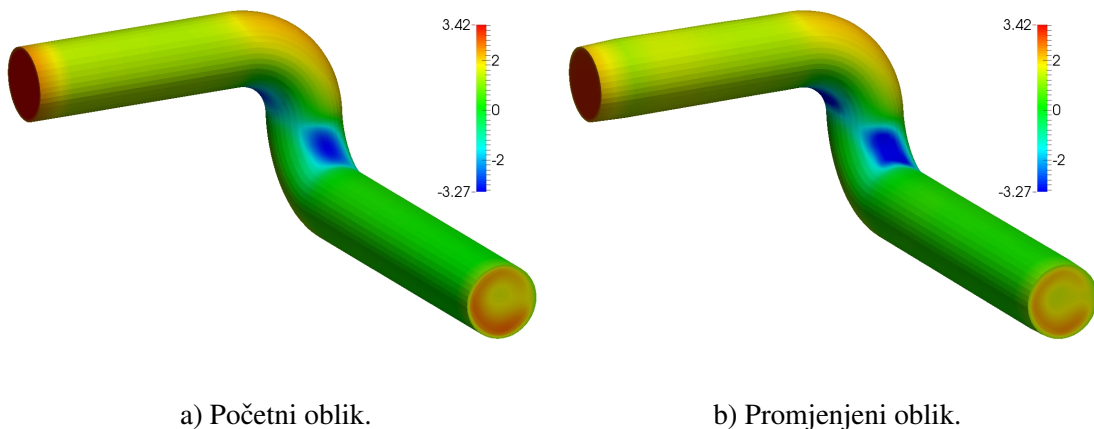
Osim toga, takve izrazite deformacije mogle bi dovesti do drugog lokalnog optimuma koji je po rješenju blizu originalnog. Odnosno, drugim riječima: takve perturbacije mogle bi pomoći pri nalaženju netrivialnih rješenja poput valovitih ili rebrastih površina kao u [13] i [14].



Slika 4.2.5: Reziduali adjungiranih značajki.

## 4.2.5 Pomak površine

Na slici (4.2.6) može se vidjeti usporedba polja totalnog tlaka nedeformirane i deformirane geometrije. Pošto se ulazna i izlazna površina nisu mijenjale mijenjanja prilikom deformacije a totalni tlak na ulazu ostaje isti, može se razmatrati samo totalni tlak na izlazu iz cijevi. Iz slike (4.2.6) se može zaključiti da je veći pad totalnog tlaka na izlazu iz deformirane cijevi veći od tlaka na izlazu iz nedeformirane cijevi, što potvrđuje pretpostavku o nekonzistentnosti rezultata te je potrebno detaljnije istražiti rezultate i uzroke greške.



Slika 4.2.6: Polje totalnog tlaka na 3D savinutoj cijevi.

## Poglavlje 5

### Zaključak

U ovom je radu prikazan detaljan izvod članova sustava adjungiranih jednadžbi turbulentnog strujanja za  $k-\varepsilon$  model. Objasnjeno je nekoliko tipičnih funkcija cilja te su opisani rubni uvjeti za funkciju cilja za smanjenje disipacije energije. Proveden je izračun površinskih osjetljivosti na zadatu ciljnu funkciju te je korištenjem te informacije izveden pomak stijenke uz deformaciju mreže pomoću rješavača koji rješava Laplace-ovu jednadžbu diskretiziranu metodom konačnih elemenata.

Na temelju rezultata se razmatranjem i usporedbom s rezultatima iz [1] može zaključiti da površinske osjetljivosti izračunate pomoću adjungiranog problema ne doprinose poboljšanju rješenja što potvrđuje i usporedba polja totalnog tlaka deformirane i nedeformirane mreže na izlaznoj površini. Budući rad će se fokusirati na dodatnim ispitivanjima u svrhu otklanjanja mogućih pogrešaka iz algoritma.

# Literatura

- [1] Arthur Stück. *Adjoint Navier–Stokes Methods for Hydrodynamic Shape Optimisation*. Schwarzenbergstraße 95c D-21073 Hamburg: Schriftenreihe Schiffbau der Technischen Universität Hamburg-Harburg, studeni 2011.
- [2] Michael B. Giles i Niles A. Pierce. „An Introduction to the Adjoint Approach to Design”. *Flow, Turbulence and Combustion* 65 (veljača 2000.), 393–415.
- [3] K.C. Gianakoglou A.S. Zymaris D.I. Papadimitriou i C. Othmer. „Continuous adjoint approach to the Spalart–Allmaras turbulence model for incompressible flows”. *ELSEVIER* (prosinac 2008.).
- [4] K.C. Gianakoglou A.S. Zymaris D.I. Papadimitriou i C. Othmer. „Adjoint wall functions: A new concept for use in aerodynamic shape optimization”. *Journal of Computational Physics* (ožujak 2010.).
- [5] Hrvoje Jasak i Željko Tuković. „Automatic mesh motion for unstructured finite volume method”. *FAMENA* (2007.).
- [6] M. Popovac H. Jasak H. Rusche i C. Reichl. „RANS turbulence treatment for continuous adjoint optimization”. *Turbulence, Heat and Mass Transfer* 8 (2015.).
- [7] Željko Tuković. „Metoda kontrolnih volumena na domenama promjenjivog oblika”. Disertacija. Fakultet strojarstva i brodogradnje, Sveučilište u Zagrebu, ožujak 2005.
- [8] D. C. Wilcox. „Formulation of the k-omega Turbulence Model Revisited”. *AIAA Journal* (2008.).
- [9] Nikola Lisjak. „Proračun geometrijske osjetljivosti turbo-profila korištenjem numeričke mehanike fluida i jednadžbi kontinuiranog adjointa”. Završni rad. Zagreb, Hrvatska: Fakultet strojarstva i Brodogradnje, Sveučilište u Zagrebu, 2013.
- [10] B.E. Launder i D.B. Spalding. „The numerical computation of turbulent flows”. *ELSEVIER* (ožujak 1974.).



- 
- [11] C. Othmer. „A continuous adjoint formulation for the computation of topological and surface sensitivities of ducted flows”. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* (2008.).
- [12] Hrvoje Jasak. „Error Analysis and Estimation for the Finite Volume Method with Applications to Fluid Flows”. Disertacija. Department of Mechanical Engineering, Imperial College of Science, Technology i Medicine, lipanj 1996.
- [13] Benjamin L. Hinchliffe i Ning Qin. „Using surface sensitivity from mesh adjoint solution for transonic wing drag reduction”. *AIAA SciTech* (siječanj 2016.).
- [14] M. Horvat B. Šojat i J.Žužul. „Primjena tehnologije izbočina na napadnom bridu vjetroturbine”. Gothenburg, Sweden: Fakultet strojarstva i brodogradnje, Sveučilište u Zagrebu, 2013.