Proračun odziva tankostjene konstrukcije primjenom programa otvorenog koda OOFEM

Perleta, Ivan

Master's thesis / Diplomski rad

2016

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:235:763956

Rights / Prava: In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2024-03-28**

Repository / Repozitorij:

Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb







Sveučilište u Zagrebu
Fakultet strojarstva i brodogradnje

DIPLOMSKI RAD

Ivan Perleta

Zagreb, 2016.

Sveučilište u Zagrebu
Fakultet strojarstva i brodogradnje

DIPLOMSKI RAD

Proračun odziva tankostjene konstrukcije primjenom programa otvorenog koda OOFEM

Mentor:
Doc. dr. sc. Pero Prebeg

Student:
Ivan Perleta

Zagreb, 2016.

Zahvaljujem se mentoru
doc.dr.sc. Peri Prebegu na pomoći prilikom
izrade rada.

Izjava

Izjavljujem da sam ovaj rad radio samostalno koristeći znanja stečena tijekom studija i navedenu literaturu.

Zagreb, ožujak 2016. Ivan Perleta

— Ovdje umetni tekst zadataka za diplomski rad! —

Sadržaj

Sadržaj v

Popis slika viii

Popis tablica xi

Popis oznaka xiv

Sažetak xiv

Summary xv

1. Uvod 1

2. OOFEM 2

2.1. Osnovne mogućnosti programa . . . 3

2.1.1. Analize . . . 3

2.1.2. Domene . . . 4

2.1.3. Vrste elemenata . . . 4

2.1.4. Vrste poprečnih presjeka elemenata . . . 5

2.1.5. Vrste materijalnih modela . . . 5

2.1.6. Vrste opterećenja . . . 6

2.2. Struktura programa . . . 6

2.2.1. Materijal-element okvir . . . 8

2.3. Izmjene i nadogradnje programa 11
2.3.1. Standardi kodiranja 11
2.3.2. Klasa Element 12
2.3.3. Klasa Structural element 13
2.3.4. Korišteni programi 13

3. Testiranja postojećih konačnih elemenata u OOFEM-u 15
3.1. Elementi za ravninsko stanje naprezanja 15
3.2. Elementi ploče 17
3.2.1. Slobodno oslonjena ploča 17
3.3. Elementi ljuske 18
3.3.1. Uklještena greda 18
3.3.2. Zakrivljena greda 20
3.3.3. Uvijena greda 21
3.3.4. Scordelis-Lo Roof 23
3.3.5. Hemispherical shell 24
3.3.6. Patch test QDKTPlate elementa 25
3.3.7. Zaključak o MITC4shell 27

4. Implementacija elemenata 28
4.1. Implementacija LSR elementa 28
4.1.1. Izvod LSR elementa 28
4.1.2. Implementacija LSR elementa 33
4.2. Implementacija CSSR elementa 36
4.2.1. Izvod CSSR elementa 36
4.2.2. Implementacija CSSR elementa 41
4.3. Implementacija elementa ploče 43
4.3.1. Izvod ACM ploče 43
4.3.2. Implementacija ACM ploče 47
4.4. Implementacija ljuske 48

5. Testiranje implementiranih elemenata 53
5.1. Cook-ov test 53
5.2. Slobodno oslonjena ploča 56

5.3. Uklještena greda I profila 57

6. Model konstrukcije krila zrakoplova **60**

6.1. Pravokutno krilo 62

6.1.1. Prva gustoća mreže konačnih elemenata 63

6.1.2. Druga gustoća mreže konačnih elemenata 65

6.1.3. Treća gustoća mreže konačnih elemenata 66

6.1.4. Rezultati 68

6.2. Trapezno krilo 69

6.2.1. Prva gustoća mreže konačnih elemenata 70

6.2.2. Druga gustoća mreže konačnih elemenata 71

6.2.3. Treća gustoća mreže konačnih elemenata 73

6.2.4. Rezultati 74

6.3. Analiza rezultata dodatnog slučaja opterećenja 75

7. Zaključak **78**

Literatura **80**

Popis slika

2.1 Opća struktura objektno orijentiranog koda[1] 7
2.2 Materijal-element okvir[1] 10

3.1 *PlaneStress2d* element[2] 16
3.2 Patch test *PlaneStress2d* elementa 16
3.3 Geometrija uklještene grede[4] 18
3.4 Geometrija zakrivljene grede[4] 21
3.5 Geometrija uvijene grede[4] 22
3.6 Geometrija Scordelis-Lo roof[4] 23
3.7 Geometrija Hemispherical shell 25
3.8 Geometrija patch testa QDKTPlate elementa 26

4.1 LSR konačni element 29
4.2 Matrica krutosti LSR elementa 32
4.3 Konvergencija *BasicLSRK3d* za različite vrijednosti dodatne krutosti . . 35
4.4 LSR konačni element 36
4.5 Pretpostavljena distribucija naprezanja po elementu 37
4.6 Matrica **B** CSSR elementa 40
4.7 Matrica **S** CSSR elementa 40
4.8 Matrica krutosti CSSR elementa 50
4.9 Konvergencija *CSSRK3d* za različite vrijednosti dodatne krutosti 51
4.10 Konvergencija *qshell* za različite vrijednosti dodatne krutosti 51
4.11 Konvergencija *qcshell* za različite vrijednosti dodatne krutosti 52

5.1 Geometrija Cook-ovog testa . . . 54
5.2 Konvergencija elemenata za ravninsko stanje naprezanja na Cook-ovom testu . . . 55
5.3 Slobodno oslonjena ploča[3] . . . 56
5.4 Konvergencija *ACMPlate*, *QDKTPlate* i *Quad1Mindlin* na primjeru slobodno oslonjene ploče . . . 57
5.5 Geometrija uklještene grede I profila[3] . . . 58
5.6 Konvergencija elemenata za ravninsko stanje naprezanja i elemenata ljuske na primjeru uklještene grede I profila . . . 59

6.1 Normalizirane sile duž raspona krila[12] . . . 61
6.2 Normalizirane sile duž tetive[12] . . . 62
6.3 Tehnike modeliranja panela zrakoplova[13] . . . 62
6.4 Pravokutno krilo prva gustoća mreže konačnih elemenata . . . 63
6.5 Pravokutno krilo druga gustoća mreže konačnih elemenata . . . 63
6.6 Pravokutno krilo treća gustoća mreže konačnih elemenata . . . 63
6.7 Pravokutno krilo u Nastran-u . . . 64
6.8 Pravokutno krilo u OOFEM-u . . . 64
6.9 Pravokutno krilo u Nastran-u . . . 65
6.10 Pravokutno krilo u OOFEM-u . . . 66
6.11 Pravokutno krilo u Nastran-u . . . 67
6.12 Pravokutno krilo u OOFEM-u . . . 67
6.13 Konvergencija elemenata na pravokutnom krilu . . . 68
6.14 Trapezno krilo prva gustoća mreže konačnih elemenata . . . 69
6.15 Trapezno krilo druga gustoća mreže konačnih elemenata . . . 69
6.16 Trapezno krilo treća gustoća mreže konačnih elemenata . . . 70
6.17 Trapezno krilo u Nastran-u . . . 70
6.18 Trapezno krilo u OOFEM-u . . . 71
6.19 Trapezno krilo u Nastran-u . . . 72
6.20 Trapezno krilo u OOFEM-u . . . 72
6.21 Trapezno krilo u Nastran-u . . . 73
6.22 Trapezno krilo u OOFEM-u . . . 74
6.23 Konvergencija elemenata na trapeznom krilu . . . 75

6.24 Konvergencija elemenata na pravokutnom krilu 77
6.25 Konvergencija elemenata na trapeznom krilu 77

Popis tablica

3.1 Progib ploče u središtu 17
3.2 Karakteristike uklještene grede 19
3.3 Rezultati: opterećenje silom u smjeru y-osi 19
3.4 Rezultati: opterećenje silom u smjeru z-osi 20
3.5 Rezultati: opterećenje momentom uvijanja na slobodnom kraju 20
3.6 Karakteristike zakrivljene grede 21
3.7 Karakteristike uvijene grede 22
3.8 Rezultati: opterećenje silom u smjeru z-osi 22
3.9 Rezultati: opterećenje silom u smjeru y-osi 23
3.10 Karakteristike Scordelis-Lo roof 24
3.11 Rezultati: opterećenje vlastitom težinom 24
3.12 Karakteristike Hemispherical shell 24
3.13 Rezultati: opterećenje silama u simetričnim ravninama 25
3.14 Karakteristike Hemispherical shell 26
3.15 Usporedba pomaka u smjeru z-osi u čvorovima 27

4.1 Karakteristike implementiranog elementa *BasicLSRK3d* 35
4.2 Karakteristike implementiranog elementa *CSSRK3d* 42
4.3 Karakteristike implementiranog elementa *ACMPlate* 47
4.4 Karakteristike implementiranog elementa *qshell* 49
4.5 Karakteristike implementiranog elementa *qcshell* 49

5.1 Karakteristike Cook-ovog testa 54

5.2 Progib na kraju grede 55
5.3 Karakteristike problema slobodno oslonjene ploče 56
5.4 Karakteristike problema uklještene grede I profila 58

6.1 Dimenzije referentnog krila 61
6.2 Usporedba rezultata za različite elemente 65
6.3 Usporedba rezultata za različite elemente 66
6.4 Usporedba rezultata za različite elemente 67
6.5 Usporedba rezultata za različite elemente 71
6.6 Usporedba rezultata za različite elemente 72
6.7 Usporedba rezultata za različite elemente 73
6.8 Usporedba rezultata za različite elemente i različite gustoće mreže na pravokutnom krilu 76
6.9 Usporedba rezultata za različite elemente i različite gustoće mreže na trapeznom krilu 76

Popis oznaka

	diferencijalni operator, matrica međusobne ovisnosti naprezanja i
$\mathbf{A}$	čvornih sila
$\mathbf{A}^{-1}$	inverzna matrica
$\mathbf{B}$	matrica međusobne ovisnosti deformacije u elementu i pomaka u čvorovima
$\mathbf{C}$	matrica međusobne ovisnosti stupnjeva slobode i koeficijenata interpolacijskih polinoma
$\mathbf{D}$	matrica elastičnosti
E	Youngov modul
$\mathbf{f}$	vektor koncentriranih sila u čvorovima konačnog elementa
$\mathbf{H}$	matrica funkcija u interpolacijskim polinomima
$\mathbf{K}$	globalna matrica krutosti
$\mathbf{k}$	matrica krutosti konačnog elementa
$\mathbf{L}$	diferencijalni kinematički operator
$\mathbf{N}$	matrica funkcija oblika
$\mathbf{S}$	matrica raspodjele naprezanja u konačnom elementu
u,v,w	komponte pomaka u Kartezijevu koordinatnom sustavu
$\mathbf{W}_{int}, \mathbf{W}_{ext}$	rad unutarnjih i vanjskih sila
$\boldsymbol{\epsilon}$	tenzor deformacija
$\varphi_x, \varphi_x, \varphi_x$	kutovi zakreta u konačnom elementu
ν	Poissonov koeficijent
$\boldsymbol{\sigma}$	tenzor naprezanja
$\boldsymbol{\sigma}_x$, $\boldsymbol{\sigma}_y$, $\boldsymbol{\sigma}_z$	normalne komponente naprezanja u Kartezijevu koordinatnom sustavu
$\boldsymbol{\tau}_{xy}$, $\boldsymbol{\tau}_{xy}$, $\boldsymbol{\tau}_{xy}$	posmične komponente naprezanja u Kartezijevu koordinatnom sustavu

Sažetak

U ovome radu je prikazano korištenje programa otvorenog koda kako bi se na jednostavan i jeftin način moglo modificirati konačne elemente za primjenu u analizi konstrukcija. Naime, komercijalni programi su često vrlo zatvoreni za implementaciju novih elemenata, te se mogu koristiti samo oni elementi koje posjeduje programski paket. *Object Oriented Finite Element Solver* (OOFEM) je besplatni program za analizu metodom konačnih elemenata sa objektno orijentiranom arhitekturom. U radu su prikazane mogućnosti OOFEM-a, problemi, analize, domene, elementi koji se mogu rješavati i koristiti, te njegova orijentiranost ka jednostavnoj nadogradnji. Korištenjem znanja iz metode konačnih elemenata, te upotrebom pogodnosti OOFEM-a, u program je implementirano nekoliko vrsta elemenata za analizu konstrukcija. Implementirani su elementi za ravninsko stanje naprezanja, element ploče i elementi ljuske. Svi elementi su testirani na njima prikladnim testovima, a također je dana i usporedba rješenja modela krila sa Nastran-om. Temeljem studija konvergencije na različitim testovima, izvedeni su zaključci o primjenjivosti pojedinih formulacija konačnih elemenata implementiranih u program OOFEM za analizu konstrukcije krila.

Ključne riječi: MKE, OOFEM,linearno-statička analiza, studija konvergencije

Summary

Shown in this thesis is the usage of open source code for simple and cheap improvement of finite elements for structural analysis. Commercially available finite element method solvers are often very restrictive regarding implementation of new elements, and only elements provided by the solver are available for usage. *Object Oriented Finite Element Solver* (OOFEM) is a free finite element code with object oriented architecture. This thesis shows possibilities of OOFEM, problems, analyses, domains, elements that can be solved and used, and its orientation to extensibility. Using finite element method knowledge, and using OOFEM capabilities, several structural analysis finite elements were implemented. Plane stress, plate and shell elements were implemented. All elements were tested on suitable tests, and also a comparison of a wing model results with Nastran is provided. Using convergence studies on different tests, conclusions regarding applicability of certain finite elements, implemented in OOFEM, for wing structural analysis are provided.

Keywords: FEM, OOFEM, linear-static analyisis, convergence study

1 Uvod

Komercijalni programi za rješavanje problema metodom konačnih elemenata su često vrlo zatvoreni za proširivanje koda od strane korisnika. Stoga je korisnik ograničen samo na konačne elemente ponuđene programskim paketom kojeg posjeduje. Programi otvorenog koda, s druge strane, omogućuju krajnjem korisniku jednostavnu mogućnost prilagodbe programa za njegove potrebe. Sve veći broj korisnika, izazvan financijskim aspektom, ali i mogućnostima programa otvorenog koda, odabire ih za korištenje, te se oni na taj način ubrzano razvijaju.

Object Oriented Finite Element Solver (OOFEM) je program otvorenog koda čije mogućnosti nisu ispitane u području analize zrakoplovnih konstrukcija. Program se ubrzano razvija, te se konstantno javljaju novi elementi za analizu konstrukcija. Kako bi se OOFEM primjenio za analizu zrakoplovnih konstrukcija, potrebno je provesti analizu trenutnog stanja OOFEM-a, implementiranih elemenata, njihovih mogućnosti, kao i mogućnosti nadogradnje programa. Kako bi se analizirala konstrukcija krila, potrebno je napraviti element ljuske, na način da su prethodno implementirani elementi za ravninsko stanje naprezanja i ploče spojeni u novi element. Potrebno je provesti testiranja elemenata na pogodnim testovima kako bi se potvrdila njihova valjanost, te primjeniti elemente za analizu jednostavne konstrukcije krila.

2 OOFEM

Object Oriented Finite Element Solver (OOFEM) je besplatni program za analizu metodom konačnih elemenata (MKE) sa objektno orijentiranom arhitekturom, koji se koristi za rješavanje mehaničkih, transportnih i problema dinamike fluida, koji radi na različitim operativnim sustavima.[5]
Program je razvijen zbog ograničenja postojećih komercijalnih programa. Naime, oni često pružaju set korisnički definiranih podrutina, koje se mogu korisiti kako bi se proširile mogućnosti paketa u određenom području. No, implementacija u potpunosti novog konstitutivnog modela je u prinicipu jako teška ili nemoguća. S druge strane, programi otvorenog koda često pate od nejasne strukture podataka, loše strukture programa ili nedovoljne dokumentacije.
OOFEM je razvijen kao program koji ima sposobnosti kontinuiranog razvoja, neograničene mogućnosti nadogradnje, podrške za timski rad, robusnosti i upotrebe na različitim sustavima. Glavni ciljevi su sljedeći:

- otvoreni kernel - dizajn kernela i implementacija mora biti predviđena za široki stupanj nadogradnje. Ovo mora vrijediti i za dizajn pojedinog modula.
- struktura programa mora biti u skladu sa modularnim dizajnom. Ovo je jako važno za podršku timskog rada.
- kod se mora moći lako održavati i mijenjati.
- upotrebljivost na različitim platformama je važan i prirodan zahtijev.

- računalne performanse slične programima napisanim u Fortran-u ili C-u.[1]

2.1. Osnovne mogućnosti programa

OOFEM nudi razne mogućnosti upotrebe zbog tri vrste problema koji se njime mogu rješavati, mnoštva analiza, elemenata i materijala koji se njime mogu opisati.

2.1.1. Analize

Trenutno, analize koje su podržane su sljedeće:

- linearno-statička analiza
- analiza linearne stabilnosti
- analiza vlastitih vrijednosti dinamičkih sustava
- direktna eksplicitna nelinearna analiza dinamičkih problema
- linearna eksplicitna analiza dinamičkih problema
- direktna implicitna analiza linearnih dinamičkih problema
- inkrementalna linearno statička analiza
- nelinearno-statička analiza
- adaptivna linearno-statička analiza
- adaptivna nelinearno-statička analiza
- stacionarni transportni problem
- nelinearni tranzijentni transportni problem
- tranzijentni nekompresibilni tok-CBS algoritam
- tranzijentni nekompresibilni tok-SUPG/PSPG algoritam
- *staggered* analiza.[6]

Prikazane analize se odnose na sve tri mogućnosti primjene programa, dakle probleme mehanike fluida, transportne i mehaničke probleme. U ovom radu bitni su mehanički problemi, stoga su zanimljive analize koje se na njih primjenjuju, a to su linearno-statička i nelinearno-statička analiza.

2.1.2. Domene

Domene se koriste kako bi riješile postavni broj stupnjeva slobode u čvoru i njihovo fizikalno značenje.
Postoje sljedeći tipovi domena:

- *2dPlaneStress* - deklarira 2 stupnja slobode po čvoru (u-pomak, v-pomak)
- *2d-Truss* - deklarira 2 stupnja slobode po čvoru (u-pomak, v-pomak)
- *3d* - deklarira 3 stupnja slobode po čvoru (u-pomak, v-pomak, w-pomak)
- *2dMindlinPlate* - deklarira 3 stupnja slobode po čvoru (w-pomak, u-rotacija, φ_y-rotacija)
- *3dShell* - deklarira 6 stupnjeva slobode po čvoru (pomaci i rotacije za svaku os)
- *2dBeam* - deklarira 3 stupnja slobode po čvoru (u-pomak, w-pomak, φ_y-rotacija)
- *2dIncompFlow* - deklarira 3 stupnja slobode po čvoru (u-brzina, v-brzina, tlak).[6]

2.1.3. Vrste elemenata

Kao i u ostalim slučajevima, i elementi u programu OOFEM se dijele u 3 skupine:

- Elementi za analizu konstrukcije
- Elementi za transportne probleme
- Elementi za probleme dinamike fluida.

U ovom radu razmatrani su elementi za analizu konstrukcije, koji se opet dijele u više skupina od kojih ćemo izdvojiti one koje će biti korištene u okviru ovog rada:

- elementi za ravninsko stanje naprezanja
  - *PlaneStress2d* element
- elementi ploče
  - *QDKTPlate* element
  - *Quad1Mindlin* element
- elementi ljuske
  - *mitc4shell* element.[2]

2.1.4. Vrste poprečnih presjeka elemenata

- *SimpleCS* - cjeloviti poprečni presjek sa konstantnim svojstvima
- *VariableCS* - cjeloviti poprečni presjek sa promjenjivim svojstvima
- *LayeredCS* - slojeviti poprečni presjek baziran na hipotezi da poprečni presjeci ostaju planarni poslije deformacije
- *FiberedCS* - vlaknasti poprečni presjek sastavljen od seta pravokutnih vlakana.[6]

2.1.5. Vrste materijalnih modela

Za materijalne modele vrijedi ista podjela kao i za elemente. Izdvojeni su samo neki materijalni modeli koji se koriste za analizu konstrukcije:

- elastični materijalni model
  - *IsoLe* - Izotropni linearno-elastični materijal
  - *OrthoLe* - Ortotropni linearno-elastični materijal
  - *HyperMat* - Hiper-elastični materijal
- materijalni modeli s utjecajem plastičnosti.[7]

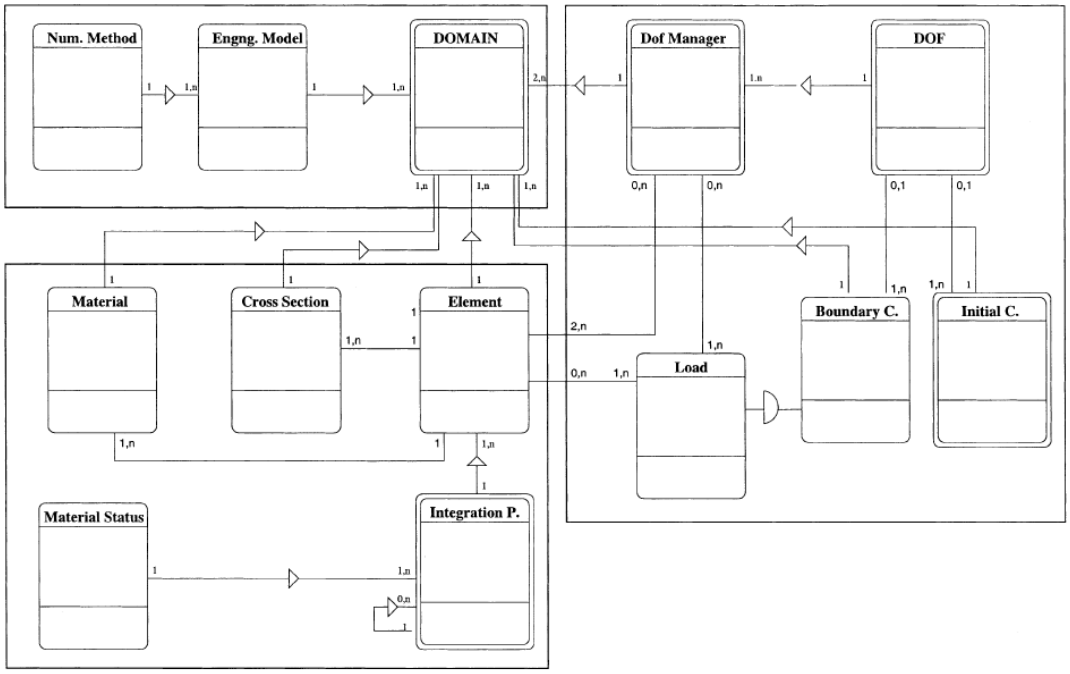
2.1.6. Vrste opterećenja

- *NodalLoad* - koncentrirano čvorno opterećenje
- *DeadWeight* - težinsko opterećenje elementa po volumenu
- *StructTemperatureLoad* - temperaturno opterećenje po volumenu
- *StructEigenstrainLoad* - deformacije konstrukcijskog elementa bez pojave naprezanja
- *ConstantEdgeLoad* - konstantno opterećenje po stranici elementa
- *ConstantSurfaceLoad* - konstantno opterećenje po površini elementa
- *LinearEdgeLoad* - linearno opterećenje po stranici elementa.[6]

2.2. Struktura programa

Kernel sadrži primjenu svih potrebnih dijelova metode konačnih elemenata. Ta primjena je predstavljena odgovarajućim općim klasama, koje obično deklariraju česte atribute i metode. Pojedina metoda može biti deklarirana kao apstraktna, što čini njenu implementaciju potrebnom na razini posebnih izvedenih klasa. S druge strane opća implementacija može biti izvedena tako da se koriste metode niže razine koje implementiraju izvedene klase. Izvedene klase mogu zamijeniti opće implementacije zbog specifičnih potreba primjene. Uloga apstraktne klase je deklariranje često potrebnih metoda. Time je potencijalnom korisniku omogućeno korištenje izvedenih klasa na jako apstraktnoj razini, skrivajući detalje implementacije, koristeći samo generalne metode deklarirane baznom klasom. Posljedica ovakve komunikacije, korištenjem apstraktnih metoda iz općeg sučelja, je omogućavanje neovisnosti programera o sučelju pojedine izvedene klase. Dakle, upotreba različitih implementacija, izvedenih iz iste bazne klase, je u potpunosti transparentna bez potrebe za izmjenom koda jer sve izvedene klase moraju implementirati isto opće sučelje.[1]
Opće sučelje kernela OOFEM-a je prikazano na slici 2.1. Kernel nudi definiciju svih osnovnih apstraktnih klasa metode konačnih elemenata. Npr. apstrakcije za generalni stupanj slobode (*degree of freedom-DOF*), *Dof manager*, konačni element, rubne

i početne uvjete, konstitutivni i model poprečnog presjeka, modul analize, numeričke metode i rijetku (*sparse*) matricu. Također, kernel nudi primjenu za korake rješenja, vektore, matrice i druge česte dijelove. Kompletni opis problema je sadržan u klasi *Domain*. Ova klasa sadrži listu komponenti koji opisuju problem koji se promatra - *Dof managers*, elementi, materijalni modeli, modeli poprečnih presjeka, početni i rubni uvjeti i vrstu analize. Klasa *Domain* nudi opće metode za stvaranje pripadajućih komponenata prema opisu problema i za pristupanje određenim komponentama domene.[1]



Slika 2.1: Opća struktura objektno orijentiranog koda[1]

Klasa *DOF* predstavlja jedan stupanj slobode. Sadrži njegovo fizikalno značenje, pridruženi broj jednadžbe i referencu na primjenjene rubne i početne uvjete. Dane su opće metode za dobivanje odgovarajućih nepoznanica u danom koraku rješenja, kao i razne metode za ispis i identifikaciju.[1]

Klasa *Dof Manager* predstavlja apstrakciju entiteta koji posjeduje stupnjeve slobode. Upravlja *DOF* skupom, listom primjenjenih opterećenja i opcionalno lokalnim koordinatnim sustavom. Opće metode uključuju metode ze skupljanje lokalizacijskih brojeva od sadržanih stupnjeva slobode, računanje primjenjenog vektora opterećenja i računanje

transformacije u lokalni koordinatni sustav. Izvedene klase obično predstavljaju čvor ili stranicu konačnog elementa koji posjeduju određene stupnjeve slobode.[1]
Bazna apstraktna klasa *Element* predstavlja opći konačni element. Deklarira opće, metode neovisne o vrsti analize. Ove metode uključuju metode za sastavljanje lokalizacijskih polja, pristupanje integracijskim točkama ili čvorovima elementa, kao i nekoliko apstraktnih metoda za postavljanje integracijskih točaka, sastavljanje transformacija elementa ili računanje karakterističnih komponenti. Pretpostavlja se da su izvedene klase bazne klase za pojedinu analizu. Izvedene klase definiraju dio općeg sučelja koji je specifičan za analizu tako da deklariraju potrebne metode za pojedinu analizu. Općenito, deklarirane su metode za prikupljanje karakterističnih komponenti koje sudjeluju u jednadžbama. Obično je dana opća implementacija ovih metoda, kao što su procjena matrica masa ili krutosti, računanje vektora opterećenja, korištenjem deklariranih apstraktnih metoda, kao što su metode za procjenu matrica veze između deformacije i pomaka. Ove apstraktne metode su implementirane konačnim klasama koje predstavljaju implementaciju pojedinog konačnog elementa. Kako se većina ovih općih metoda za procjenu karakterističnih komponenti može zamjeniti, mogu se implementirati učinkoviti algoritmi za pojedine elemente.[1]
Apstrakcija početnih i rubnih uvjeta predstavlja opći rubni ili početni uvjet. Klase izvedene iz bazne klase *Boundary condition* mogu predstavljati, primjerice, opterećenje primjenjeno na određenu komponentu kao što su atributi *Dof Manager*-a ili elementa. Deklarirane su usluge za procjenu komponenti rubnih uvjeta u određenom trenutku. Početni uvjeti opisuju početno stanje. Oni su obično atributi jednog ili više stupnjeva slobode.[1]

2.2.1. Materijal-element okvir

Materijal-element okvir predstavlja definiciju i opis zajedničkih sučelja elementa, poprečnog presjeka i konstitutivnog modela. Cjeloviti dizajn ovog okvira je motiviran sljedećim zahtjevima:

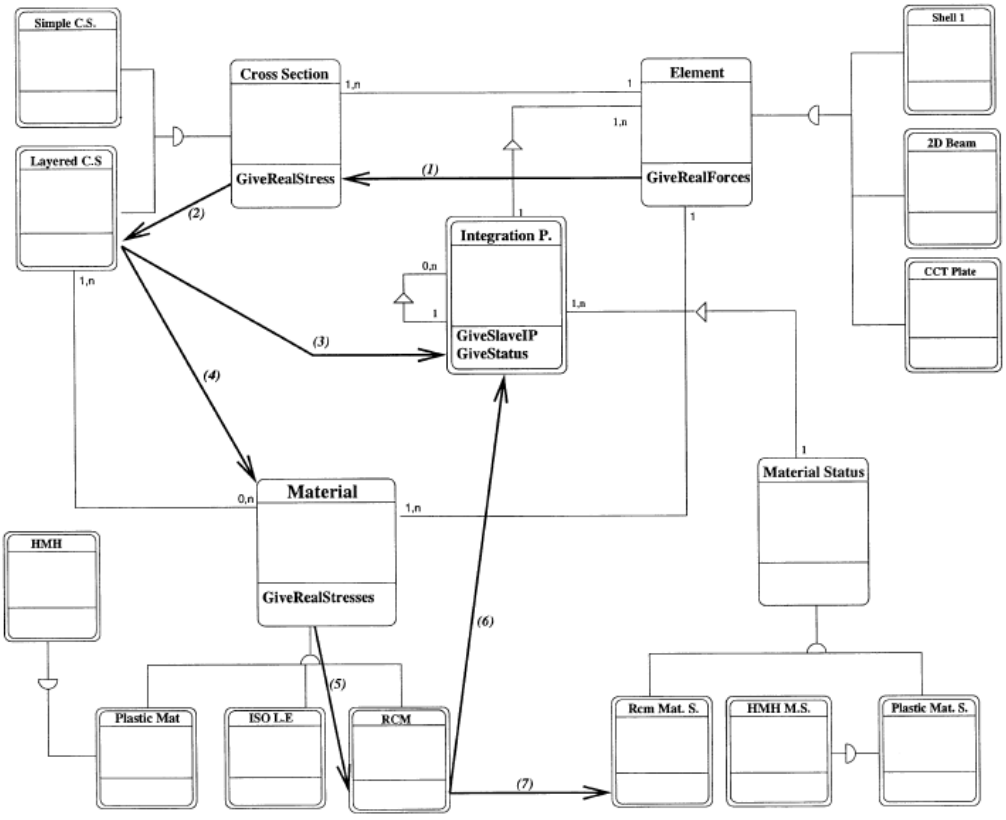
- opći,lako nadograđivan modularni dizajn
- nezavisni opis i implementacija poprečnog presjeka i konstitutivnog modela

- opća i učinkovita shema za povijest varijabli konstitutivnog modela[1]

Klasa i objekt *Integration point* je apstrakcija integracijske točke konačnog elementa. Sadrži koordinate i pripadajuću integracijsku težinu. Svaka integracijska točka može sadržavati bilo koji broj drugih integracijskih točaka - tzv. podređene (*slave*) točke. Podređene točke se npr. uvode modelom slojevitog poprečnog presjeka, gdje predstavljaju integracijske točke za svaki sloj. Mogu se uvesti i na razini materijalnog modela, gdje mogu predstavljati npr. mikroravnine. Integracijska točka mora sadržavati svoje pridružene interne varijable i, ukoliko se nelinearnost materijala uzme u obzir, povijest varijabli vezanih za tu integracijsku točku. Takve varijable, čija priroda ovisi o primjenjenom konstitutivnom modelu, se spremaju u pridruženu instancu klase *Material status*.[1]
Klasa *Cross section* je apstrakcija za opis poprečnog presjeka. Glavna uloga je uzimanje svih detalja vezanih za opis i implementaciju konačnog elementa, te njihovo sakrivanje od elementa. Posebni objekti koji predstavljaju konačne elemente ne komuniciraju direktno sa konstitutivnim modelom već uvijek koriste sučelje *Cross section* klase. Ono izvodi svu potrebnu integraciju po volumenu i poziva potrebne usluge modela materijala. *Cross section* sučelje, definirano u terminima općih funkcija, omogućuje upotrebu bilo kojeg modela poprečnog presjeka, bez izmjena koda, jer svi modeli poprečnih presjeka dijele isto sučelje, koje skriva implementaciju svakog posebnog modela.[1]
Material predstavlja baznu apstraktnu klasu za sve konstitutivne modele. Izvedene klase su bazne klase za specifičnu analizu, a deklariraju dijelove apstraktnih metoda, poput računanja matrice krutosti za analizu konstrukcije, za pojedinu analizu. Također i sučelje apstraktnog modela materijala, definirano u općim uslugama, omogućuje upotrebu bilo kojeg materijalnog modela, čak i onog dodanog u budućnosti, bez izmjene koda, jer svi materijalni modeli implementiraju isto sučelje.
U slučaju nadogradnje baze podataka materijala, javlja se problem. Svaki materijalni model mora sadržavati svoje jedinstvene parametre za svaku vezanu integracijsku točku. Broj, tip i značenje ovih parametara varira između materijalnih modela. Stoga nije moguće učinkovito ispuniti potrebe i prikazati ih u strukturi podataka integracijske točke. OOFEM kao rješenje koristi pridruženu klasu *Material status*, povezanu sa klasom *Material model*, kako bi pohranio potrebne parametre. Stvara se jedinstvena kopija statusa materijalnog modela i pridružena je svakoj integracijskoj točki upotrebom posebnog konstitutivnog modela. Kako je integracijska točka obvezni parametar svih

poruka poslanih modelu materijala, taj model materijala može pristupiti odgovarajućem statusu materijala odgovarajuće integracijske točke i tako pristupiti njenim povijesnim varijablama.[1]

Na slici 2.2 prikazan je pojednostavljeni materijal-element okvir. Vidljiv je tok programa, koji prikazuje kako element računa stvarne sile u čvorovima. Postoji jednostavna hijerarhija klase modela poprečnog presjeka sa dvije izvedene klase iz bazne klase *Cross section*. Klasa *Simple cross section* predstavlja model jedinstvenog poprečnog presjeka, a klasa *Layered cross section* predstavlja implementaciju slojevitog modela poprečnog presjeka. Na dnu se nalazi hijerarhija modela materijala i pridruženih statusa materijala. Računanje stvarnih čvornih sila na razini elementa se provodi integracijom stvarnih naprezanja u integracijskim točkama. Za svaki *Integration point* element traži računanje stvarnih naprezanja u toj integracijskoj točki od modela poprečnog presjeka.



Slika 2.2: Materijal-element okvir[1]

U ovom primjeru, implementacija slojevitog poprečnog presjeka, dakle *LayeredCS* klasa, koristi princip *master-slave* integracijske točke. Svaka integracijska točka elementa (*master*), sadrži svoje *slave* točke, koje predstavljaju pojedini sloj. Ove *slave* integracijske točke uvodi model poprečnog presjeka, a element ih ne vidi. Za pojedinu *master* integracijsku točku model poprečnog presjeka provodi integraciju po volumenu poprečnog presjeka koristeći *slave* točke. Dakle, za svaku *slave* integracijsku točku, koja je zatražena od *master* integracijske točke, metode klase materijalnog modela se koriste za računanje stvarnih naprezanja u pripadajućem sloju, a *slave* integracijska točka se prosljeđuje kao parametar. Zatim za svaku *slave* točku, materijalni model traži od integracijske točke njen pripadajući status. Kako posjeduje referencu na to, materijalni model može pristupiti svim povijesnim varijablama kroz metode statusa i izračunati rezultate.[1]

2.3. Izmjene i nadogradnje programa

Mogućnosti izmjene i dopune OOFEM-a su vrlo velike i jednostavne. Ovdje će biti biti objašnjeni dijelovi koda koji su nadograđeni, dakle fokus je na implementaciji novih elemenata. Kako bi se to moglo objasniti potrebno je objasniti standarde kodiranja za OOFEM, a koji se nalaze u Priručniku za programere[8]. Također, potrebno je objasniti i klasu *Element* koja je bazna klasa za sve klase implementiranih elemenata u OOFEM-u.

2.3.1. Standardi kodiranja

Standardi kodiranja se odnose na imenovanje klasa, atributa, metoda, varijabli, funkcija te način strukutriranja sučelja.
Imena klasa, atributa, metoda i varijabli se mogu koristiti kao neka vrsta komentara. Naime, ona su opisna, tj. ime daje informaciju što određena varijabla ili funkcija rade. Imena, kao i komentari u OOFEM programu moraju biti na engleskom jeziku. Lokalne varijable mogu imati kraća imena, jer se koriste samo u određenom kontekstu, naravno uz komentar koji opisuje njihovu namjenu. Preporuča se primjena što manje kratica, a ukoliko se koriste, potrebno je objasniti njihovo značenje. Koriste se velika slova za razdvajanje riječi u nazivu, za imenovanje makroa i za prefikse imena koja slijede uniformnu konvenciju. U svim drugim slučajevima koriste se mala slova. Također, kao i za

sva ostala imena, imena datoteka moraju biti opisna. Deklaracije klasa se spremaju u *.h datoteke, a implementacije klasa u *.C datoteke.[8]
Sučelja služe kako bi se organizirale ili grupirale opcionalne ili specifične metode u jasno definirane jedinice, ondosno dobro struktuiran kod, koje mogu selektivno implementirati neke klase. Kako bi se primjenio koncept sučelja, uvedena je posebna apstraktna klasa *Interface*, koja služi kao bazna klasa za sva sučelja. Sučelja predstavljaju dobro definiranu dodatnu ili opcionalnu sposobnost ili potporu neke klase. Potrebne usluge i atributi se nalaze u izvedenom sučelju potrebne klase, koje je izvedeno iz klase *Interface*. Klasa koja želi implementirati sučelje jednostavno nasljeđuje pripadnu klasu sučelja.[8]

2.3.2. Klasa Element

Ova klasa je osnovna klasa za sve konačne elemente. Ona je i apstraktna klasa, koja deklarira određene metode, koje moraju biti implementirane u izvedenim klasama. Glavna uloga ove klase je deklariranje osnovnih metoda zajedničkih svim konačnim elementima. Takve metode su spremanje referenci na materijalni model elementa, čvorove, primjenjena opterećenja itd. Klasa *Element* ne deklarira i ne implementira niti jednu metodu specifičnu za pojedinu analizu. Te usluge se deklariraju i po mogućnosti implementiraju u izvedenim klasama. Prema tome, pretpostavlja se da se klase izvedene iz klase *Element* odnose na određene analize i tipove problema. Izvedene klase obično deklariraju metode koje su potrebne za određenu vrstu analize, kao što su procjena matrice krutosti i mase za analizu konstrukcije, ili kapacitivne i konduktivne matrice za analizu prijenosa topline. Obično imaju i implementirane opće primjene ovih metoda.
Atributi deklarirani klasom *Element* uključuju varijable korištene za spremanje liste čvorova i stranica, materijala i broja poprečnog presjeka, liste primjenjenih opterećenja i rubnih uvjeta, liste integracijskih pravila i mreže koja sprema kodne brojeve.[8]
Sljedeće metode su deklarirane na razini klase *Element*:

- usluge za upravljanje komponentama - metode za potraživanje geometrijskih karakteristika elementa, materijala, poprečnog presjeka
- metode koje se odnose na upravljanje kodnim brojevima - *giveLocationArray*, *computeNumberOfDofs*

- metode za potraživanje karakterističnih komponenti - *giveCharacteristicMatrix*, *giveCharacteristicVector*
- metode koje se koriste za brojanje i izvršenje koraka rješenja
- metode za pristupanje nepoznanicama lokalnog elemenata za pripadne stupnjeve slobode
- metode za transformaciju koordinatnih sustava između lokalnog koordinatnog sustava i koordinantnog sustava u čvorovima.[8]

2.3.3. Klasa Structural element

Klasa *Structural element* je direktno izvedena iz klase *Element*, a služi kao bazna klasa za sve elemente za analizu konstrukcije. U njoj su deklarirane sve metode potrebne za analizu konstrukcije, kao što su metode za računanje matrice krutosti, vektora opterećenja, deformacije i naprezanja. Ova klasa posjeduje opće implementacije određenih metoda koje su deklarirane virtualnim funkcijama, čija je implementacija ostavljena izvedenim klasama, koje predstavljaju pojedine elemente. Glavni zadaci elementa za analizu konstrukcije su izračun njegovih doprinosa globalnim jednadžbama ravnoteže i proračun pripadajućih deformacija i naprezanja iz čvornih pomaka. Stoga su deklarirane pripadne virtualne metode za izračun ovih doprinosa.[8]
U ovom radu su implementirani elementi za analizu konstrukcije direktno izvedeni iz klase *StructuralElement*. Njihova implementacija je vršena na način da su u klasi definiranoj za pojedini konačni element deklarirane i implementirane one metode specifične za njega, tj. različite od onih deklariranih u baznoj klasi. Dakle, određene metode su zamijenjene, a određene su prvi put deklarirane i implementirane.

2.3.4. Korišteni programi

Prilikom izrade ovog rada korišten je OOFEM verzija 2.4. Kao razvojna okolina za kodiranje elemenata korišten je Qt Creator 3.5.1, čija je prednost *debug* sučelje, koje je koristilo za uklanjanje grešaka iz koda. CMake 3.2.2 je korišten za *build* OOFEM-a. Za prikaz rezultata iz OOFEM-a korišten je Paraview, verzija 4.0.1, a za prikaze studije

konvergencije korišten je Microsoft Excel 2007, u kojem su pomoću Visual Basic for Applications (VBA) programskog jezika integriranog u Excel, isprogramirane podrutine za čitanje ulaznih i izlaznih datoteka OOFEM-a, te crtanje grafova.

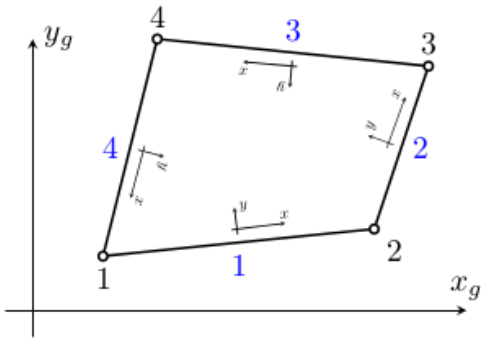
3 Testiranja postojećih konačnih elemenata u OOFEM-u

S ciljem utvrđivanja mogućnosti do sada implementiranih elemenata za analizu tankostijenih konstrukcija u OOFEM-u provedena su testiranja istih. Testirani su elementi za ravninsko stanje naprezanja, ploče i ljuske na različitim testovima. Ti testovi uključuju primjenu već postojećih *patch* testova iz OOFEM-a, njihovu izmjenu za primjenu na drugim elementima, kao i patch i druge testove iz priručnika za neke druge programske pakete iste namjene. Svi ti testovi se zapravo smatraju osnovnim testovima kojim se potvrđuje ili opovrgava ispravnost elemenata određene vrste.

3.1. Elementi za ravninsko stanje naprezanja

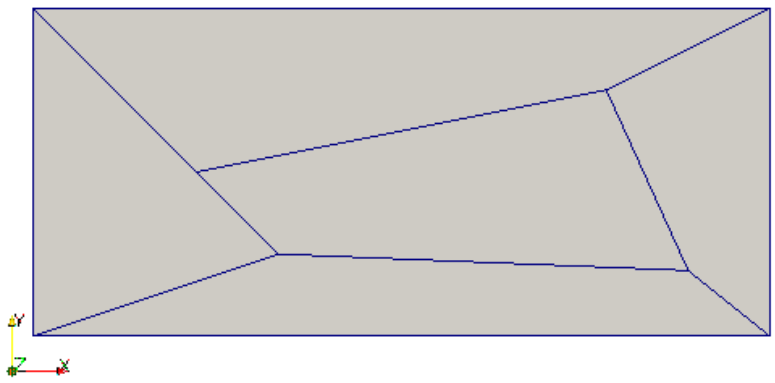
Od elemenata za ravninsko stanje naprezanja ponuđenih u OOFEM-u za potrebe ovog rada prikladan je bio samo element *PlaneStress2d*. To je izoparametarski četverokutni konačni element, sa četiri čvora. Svaki čvor ima dva stupnja slobode, u-pomak i v-pomak. Geometrija, kao i opterećenja moraju biti definirana u x-y ravnini. Koristi se linearna aproksimacija pomaka i geometrije. Element podržava odabir broja integracijskih točaka (1,4,9,16) za proračun membranskih deformacija koristeći Gaussovu integraciju. Smik se proračunava koristeći integraciju za jednu točku. Moguće je koristiti opterećenje vlastitom težinom ili rubno opterećenje.

Na slici 3.1 prikazana je numeracija čvorova, stranica i definicija lokalnih koordinatnih sustava.
Testovi vršeni na *Planestress2d* elementu uključuju već postojeće *patch* testove iz OOFEM-



Slika 3.1: *PlaneStress2d* element[2]

a, ali i *patch* testove iz priručnika za program MAESTRO[4]. *Patch* test služi za određivanje mogućnosti opisivanja polja konstantne deformacije. Grupa elemenata, uz postavljanje geometrijskih rubnih uvjeta koji su potrebni da se spriječe pomaci krutog tijela, u čvorovima na rubu proračunskog modela opterećuje se silama koje uvjetuju konstantna naprezanja , a na taj način i deformacije u elementima . Ako su izračunate komponente napreznaja konstantne i pomaci su točno opisani, test je zadovoljen i konvergencija rješenja je zajamčena.[9]



Slika 3.2: Patch test *PlaneStress2d* elementa

Na slici 3.2 prikazana je geometrija za *patch* test primjenjena na *PlaneStress2d* element. Opterećenja primjenjena u testovima su bila tlak u smjeru x i y osi. Element je dao dobra rješenja, tj. ekvivalentna analitičkom rješenju. Međutim, upotreba elementa je

ograničena, jer se može definirati samo u x-y ravnini.

3.2. Elementi ploče

OOFEM trenutno ima implementirano nekoliko elemenata ploče, međutim gotovo svi elementi za analizu tankostjenih konstrukcija su trokutni elementi. Jedini četverokutni elementi ploče su *QDKTPlate* element i *Quad1Mindlin* element, međutim on je izveden prema Mindlin-ovoj hipotezi i primjeren je za debelostjene konstrukcije.
QDKTPlate element je implementirani četverokutni element ploče temeljen na Diskretnoj Kirchoff-ovoj Teoriji. Prikladan je za rješavanje problema tankih ploča. Element u svakom čvoru ima 3 stupnja slobode, w-pomak te φ_x, φ_y-rotacije. Koristi kvadratnu interpolaciju rotacija, a kubičnu interpolaciju pomaka duž stranica. Moguće je koristiti opterećenje vlastitom težinom. *QDKTPlate* element implementiran u OOFEM-u ima svoje *patch* testove, te prema njima daje dobre rezultate, no kako bi ga dodatno testirali provedeni su još neki testovi za provjeru ispravnosti elementa ploče.

3.2.1. Slobodno oslonjena ploča

U tablici 3.1 su prikazana rješenja progiba u središtu ploče korištenjem elementa *QDKTPlate*, te njihovo odstupanje u odnosu na točno rješenje. Iznosi progiba su negativni, jer sila djeluje suprotno od pozitivnog smjera osi z. Iz rezultata je vidljivo da *QDK-*

Tablica 3.1: Progib ploče u središtu

N	1	2	4
w[mm]	-2.5382	-2.1256	-1.9991
Greška[%]	30.83	9.57	3.05

TPlate element daje dobre rezultate za problem savijanja ploča, konvergira ka točnom rješenju sa povećanjem gustoće mreže konačnih elemenata. Međutim, kako *QDKTPlate* element koristi numeričku integraciju za izračun funkcija oblika, matrice $\mathbf{B}$, te matrice $\mathbf{K}$, potrebno je implementirati novi element ploče sa direktnim unosom matrice $\mathbf{K}$. Razlog za to je mogućnost njegovog spajanja sa elementom za ravninsko stanje naprezanja koji će biti implementiran u daljnjem radu.

3.3. Elementi ljuske

Postojeći elementi ljuske u programu OOFEM su većinom trokutni ljuskasti elementi. Jedina dva četverokutna elementa ljuske su *MITC4shell* i *Quad1MindlinShell3d* element. *Quad1MindlinShell3d* element je element za analizu debelostjenih konstrukcija, a u opisu unutar koda *MITC4shell* elementa stoji da je on namijenjen za analizu tankostjenih i debelostjenih konstrukcija. Međutim, *MITC4shell* je element koji nije do kraja razvijen, te su provedena testiranja kako bi se provjerila njegova svojstva.
MITC4shell element je četverokutni element sa 4 čvora, a u svakom čvoru ima 6 stupnjeva slobode (u,v,w-pomak i $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$-rotacija). Kako bi se provjerila njegova svojstva izvršeni su testovi kao i za *PlaneStress2d* element. *MITC4shell* je dao ista rješenja za pomake kao i *PlaneStress2d* element, što je istovjetno analitičkom rješenju. Dalje su korišteni testovi iz MAESTRO priručnika[4] te *patch* testovi iz OOFEM-a koji su namijenjeni za testiranje ploča.

3.3.1. Uklještena greda

Prema testu iz MAESTRO priručnika[4] modelirana je uklještena greda. Greda je modelirana sa 6 trapeznih ili paralelogramskih ljuskastih elemenata, nalazi se u x-y ravnini te je prikazana na slici 3.3. Dimenzije grede se nalaze u tablici 3.2. Primjenjena su tri tipa opterećenja:

- jedinična sila u smjeru y-osi na slobodnom kraju (ravninsko opterećenje)
- jedinična sila u smjeru z-osi na slobodnom kraju (izvan ravninsko opterećenje)
- jedinični moment uvijanja na slobodnom kraju

Prvi tip opterećenja rezultira ravninskim smikom, drugi rezultira izvan ravninskim smikom, a treći uvijanjem grede.



Slika 3.3: Geometrija uklještene grede[4]

Tablica 3.2: Karakteristike uklještene grede

l [m]	6
h [m]	0.2
d [m]	0.1
E [Pa]	10^7
ν	0.3

Za sva tri slučaja opterećenja OOFEM nije mogao dati rješenje, zbog manjkavosti elementa, naime tek u slučaju blokiranja stupnja slobode 6, dakle rotacije oko osi z, moguće je rješenje problema. Zaključak je da element nema dodijeljenu krutost šestom stupnju slobode.

Za prvi slučaj opterećenja, rezultati progiba na slobodnom kraju su prikazani u tablici 3.3. Vidljivo je da rezultat odstupa od točnog rješenja 95% što je značajno odstupanje,

Tablica 3.3: Rezultati: opterećenje silom u smjeru y-osi

v [m]	$5.0322 * 10^{-3}$
Analitičko rješenje [m]	0.1081
MAESTRO Solver [m]	0.1068
MSC/Nastran V3.0 [m]	0.1068
Greška [%]	95

dok rješenje koristeći *CQUAD4R* element u MAESTRO Solver-u i Nastran-u odstupa 1.2%.

Za drugi slučaj opterećenja, rezultati progiba na slobodnom kraju su prikazani u tablici 3.4. U ovom slučaju, odstupanje rješenja je unutar 10%, dok su odstupanja u MAESTRO-u i Nastran-u na 1.62%.

Za treći slučaj opterećenja, rezultati kuta uvijanja na slobodnom kraju su prikazani u tablici 3.5. Greška je na razini 18% što se može smatrati nedozvoljenim odstupanjem. Vidljivo je da u ovom slučaju MAESTRO Solver daje rezultat identična analitičkom rješenju.

Iz rezultata za problem opterećenja uklještene grede može se zaključiti da *MITC4shell* element ne daje baš dobre rezultate, naročito ako se usporedi sa elementima u drugim

Tablica 3.4: Rezultati: opterećenje silom u smjeru z-osi

w [m]	$3.9001 * 10^{-1}$
Analitičko rješenje [m]	0.4321
MAESTRO Solver [m]	0.4252
MSC/Nastran V3.0 [m]	0.4264
Greška [%]	9.74

Tablica 3.5: Rezultati: opterećenje momentom uvijanja na slobodnom kraju

w [m]	$2.7362 * 10^{-3}$
Analitičko rješenje [m]	0.00233
MAESTRO Solver [m]	0.00233
MSC/Nastran V3.0 [m]	0.00306
Greška [%]	17.43

programima za rješavanje MKE.

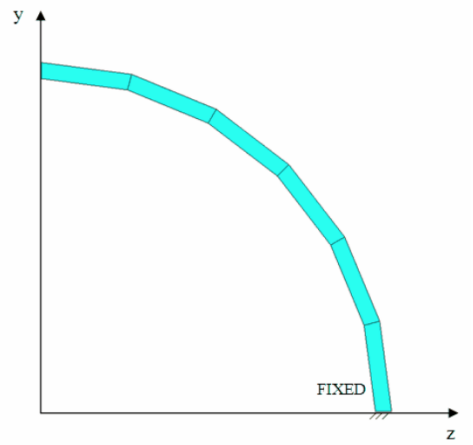
3.3.2. Zakrivljena greda

Sljedeći test je test zakrivljene grede, prema MAESTRO priručniku[4]. Zakrivljena greda, uklještena je na jednom kraju, a primjenjena su dva tipa opterećenja:

- jedinična sila u smjeru y-osi na slobodnom kraju (ravninsko opterećenje)
- jedinična sila u smjeru x-osi na slobodnom kraju (izvan ravninsko opterećenje)

Greda se nalazi u y-z ravnini, njene geometrijske i materijalne karakteristike su prikazane u tablici 3.6, a prikaz geometrije grede se nalazi na slici 3.4.

Prvi tip opterećenja rezultira ravninskim smikom, a drugi izvan ravninskim savijanjem. Međutim, za oba tipa rješenja OOFEM ne može riješiti problem, javljaju se greške, što ukazuje na nedostatke elementa.



Slika 3.4: Geometrija zakrivljene grede[4]

Tablica 3.6: Karakteristike zakrivljene grede

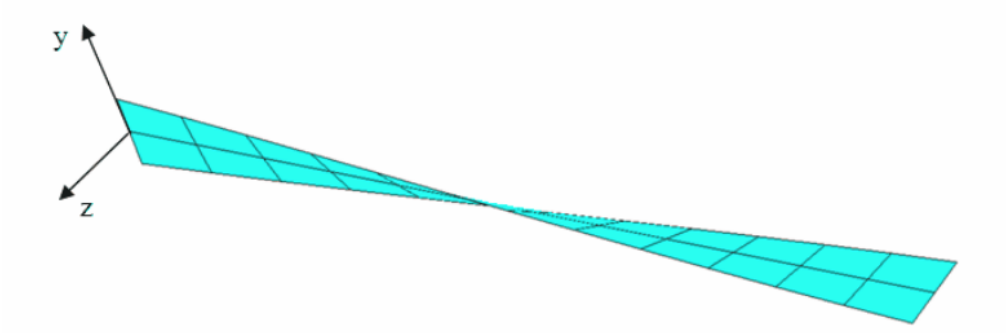
Unutarnji radijus [m]	4.12
Vanjski radijus [m]	4.12
Kut [deg]	90
d [m]	0.1
E [Pa]	10^7
ν	0.25

3.3.3. Uvijena greda

Test uvijene grede je također test iz MAESTRO priručnika[4], a namjenjen je testiranju kako element tretira međudjelovanje ravninskih i izvan-ravninskih deformacija u slučaju mreže konačnih elemenata na uvijenoj geometriji.Na slici 3.5 prikazana je geometrija, a geometrijske i materijalne karakteristike su prikazane u tablici 3.7. Geometrija je definirana u tako da prelazi iz y-z ravnine u x-z ravninu. Primjenjena su dva slučaja opterećenja:

- jedinična sila u smjeru z-osi na slobodnom kraju (ravninsko opterećenje)
- jedinična sila u smjeru y-osi na slobodnom kraju (izvan ravninsko opterećenje)

Prvi slučaj opterećenja rezultira ravninskim smikom, a drugi izvan-ravninskim smikom.



Slika 3.5: Geometrija uvijene grede[4]

Tablica 3.7: Karakteristike uvijene grede

l [m]	12
h [m]	1.1
d [m]	0.32
Kut uvijanja [deg]	90
E [Pa]	$2.9 * 10^7$
ν	0.22

I na ovom testu je za uspješno provođenje bilo potrebno blokirati 6. stupanj slobode u svim čvorovima. Nakon toga dobiveni rezultati za prvi slučaj opterećenja su prikazani u tablici 3.8.

Tablica 3.8: Rezultati: opterećenje silom u smjeru z-osi

w [m]	$1.996 * 10^{-3}$
Analitičko rješenje [m]	$5.424 * 10^{-3}$
MAESTRO Solver [m]	$5.382 * 10^{-3}$
MSC/Nastran V3.0 [m]	$5.388 * 10^{-3}$
Greška [%]	63.19

Iz rezultat je vidljivo da je greška 63% što je značajno odstupanje od točne vrijednosti,

dok su elementi u MAESTRO Solver-u i Nastran-u na razini ispod 1%.
Rezultati za drugi slučaj opterećenja prikazani su u tablici 3.9.

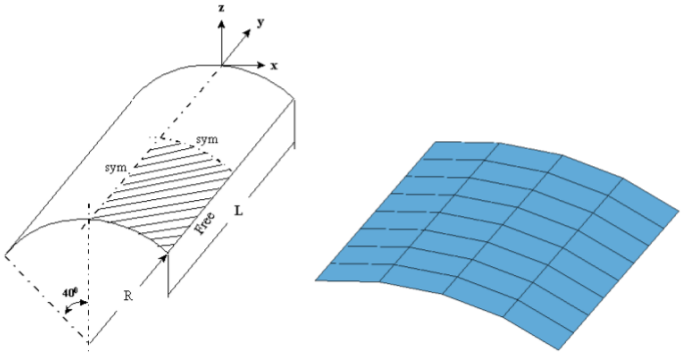
Tablica 3.9: Rezultati: opterećenje silom u smjeru y-osi

v [m]	$4.118 * 10^{-3}$
Analitičko rješenje [m]	$1.754 * 10^{-3}$
MAESTRO Solver [m]	$1.728 * 10^{-3}$
MSC/Nastran V3.0 [m]	$1.727 * 10^{-3}$
Greška [%]	134.76

Vidljivo je da je greška 135% i da je ovo odstupanje neprihvatljivo, za razliku od elemenata u MAESTRO Solver-u i Nastran-u koji imaju vrijednost odstupanja od 1.5%.

3.3.4. Scordelis-Lo Roof

Ovaj test iz MAESTRO priručnika[4] predstavlja problem konstrukcije opterećene vlasitom težinom, a javlja se kombinacija ravninskih i izvan-ravninskih opterećenja. Geometrija problema je prikazana na slici 3.6, a geometrijske i materijalne karakteristike u tablici 3.10



Slika 3.6: Geometrija Scordelis-Lo roof[4]

Tablica 3.10: Karakteristike Scordelis-Lo roof

R [m]	25
l [m]	50
d [m]	0.25
E [Pa]	$4.32 * 10^8$
ν	0

Tablica 3.11: Rezultati: opterećenje vlastitom težinom

v [m]	-0.1458
Analitičko rješenje [m]	-0.3086
MAESTRO Solver [m]	-0.3197
MSC/Nastran V3.0 [m]	-0.3218
Greška [%]	52.75

Rezultati prikazani u tablici 3.11 govore o grešci od 50%, međutim i u ovom slučaju je bilo potrebno spriječiti 6. stupanj slobode jer proračun nije bilo moguće provesti.

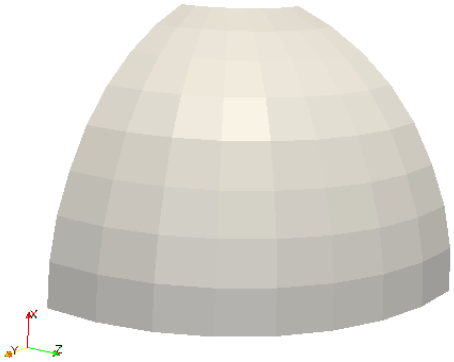
3.3.5. Hemispherical shell

Test se koristi za proučavanje točnosti rješenja dvostruko zakrivljene ljuske, a podaci za njega su preuzeti iz MAESTRO priručnika[4]. Geometrijski prikaz se nalazi na slici 3.7, a geometrijske i materijalne karakteristike u tablici 3.12. Opterećenje je jediničnim silama u simetričnim ravninama.

Tablica 3.12: Karakteristike Hemispherical shell

R [m]	10
d [m]	0.04
E [Pa]	$6.825 * 10^7$
ν	0.3

Za ovaj test nije bilo potrebno blokirati 6. stupanj slobode u čvorovima, što je poslje-



Slika 3.7: Geometrija Hemispherical shell

dica geometrije koja uzrokuje međudjelovanje elemenata. Međutim, rezultati prikazani u tablici 3.13 pokazuju značajno odstupanje od točnih vrijednosti. Ovakva razina odstupanja govori da postoje ozbiljni problemi u implementaciji elementa.

Tablica 3.13: Rezultati: opterećenje silama u simetričnim ravninama

v [m]	1.1525
Analitičko rješenje [m]	0.094
MAESTRO Solver [m]	0.090
Greška [%]	1126.15

3.3.6. Patch test QDKTPlate elementa

Upotrebljen je *patch* test namjenjen za testiranje *QDKTPlate* elementa, koji već postoji u OOFEM-u. Korišteni su njegova geometrija i opterećenje kako bi se testirao *MITC4shell* element. Također, zbog usporedbe na istom primjeru testirani su i *Quad1Mindlin*, koji koristi isti *patch* test uz primjenu reducirane integracije, te *QDKTPlate* element.

U primjeru se nalaze sljedeći slučajevi opterećenja:

- savijanje oko osi x i y pomoću momenata
- uvijanje, silom u smjeru z-osi
- smik u smjeru x i y pomoću sila

Slučaj uvijanja silom u smjeru osi z nije bilo moguće riješiti, te je zato izbačen iz testiranja. Na slici 3.8 prikazana je geometrija problema, kao i mreža konačnih elemenata, a u tablici 3.14 geometrijske i materijalne karakteristike.



Slika 3.8: Geometrija patch testa QDKTPlate elementa

Tablica 3.14: Karakteristike Hemispherical shell

l [m]	4
d [m]	0.3
E [Pa]	15
ν	0.25

U tablici 3.15 prikazane su vrijednosti pomaka u smjeru z-osi u pripadnim čvorovima za sva 3 elementa. Iz rezultata je vidljivo da se *MITC4shell* element ponaša jako slično *Quad1Mindlin* elementu te je njegova primjena prikladna za debelostjene konstrukcije.

Tablica 3.15: Usporedba pomaka u smjeru z-osi u čvorovima

ELEMENT 1	*QDKTPlate*	*MITC4shell*	*Quad1Mindlin*
ČVOR 3 [m]	-277.78	-277.78	-277.78
ČVOR 4 [m]	-277.78	-277.78	-277.78
ELEMENT 2	*QDKTPlate*	*MITC4shell*	*Quad1Mindlin*
ČVOR 12 [m]	277.78	277.78	277.78
ČVOR 13 [m]	277.78	277.78	277.78
ELEMENT 3	*QDKTPlate*	*MITC4shell*	*Quad1Mindlin*
ČVOR 32 [m]	148.148	111.67	111.78
ČVOR 33 [m]	148.148	111.67	111.78
ELEMENT 3	*QDKTPlate*	*MITC4shell*	*Quad1Mindlin*
ČVOR 43 [m]	148.148	111.67	111.78
ČVOR 44 [m]	148.148	111.67	111.78

3.3.7. Zaključak o MITC4shell

Iz svih obavljenih testova može se zaključiti da implementacija elementa *MITC4shell* nije dovršena. Ostaje problem nedostatka krutosti 6. stupnja slobode, te njegove karakteristike koje pokazuju da je puno sličniji elementima za debelostjene konstrukcije, iako bi trebao biti primjenjiv i za analizu tankostjenih konstrukcija.

4 Implementacija elemenata

U ovom poglavlju biti će opisana implementacija elemenata, zajedno sa njihovim izvodima. Objašnjena je implementacija pravokutnog konačnog elementa za ravninsko stanje naprezanja s linearnom raspodjelom deformacija (*Linear Strain Rectangle*, u daljnjem tekstu LSR). Također će biti implementiran i pravokutni konačni element za ravninsko stanje naprezanja s konstantnom raspodjelom smičnih naprezanja (*Constant Shear Stress Rectangle Element*, u daljnjem tekstu CSSR). Radi se o unaprijeđenom elementu koji rješava određene nedostatke LSR elementa. Implementiran je i element ploče, kao i dva elementa ljuske, koji se dobiju spajanjem elemenata za ravninsko stanje naprezanja i ploče.

4.1. Implementacija LSR elementa

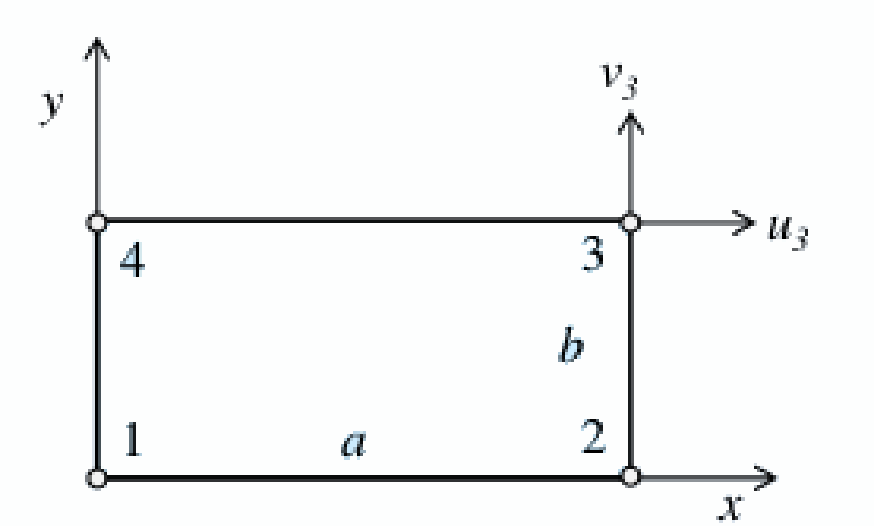
4.1.1. Izvod LSR elementa

LSR element je, kao što je navedeno, osnovni pravokutni element za ravninsko stanje naprezanja. Radi se o elementu koji ima 4 čvora, sa dva stupnja slobode, u-pomak i v-pomak, kako je prikaznao na slici 4.1. Izvod elementa je preuzet iz knjige *Ship Structural Design and Analysis*[10].

Stupnjevi slobode u pravcu koordinatnih osi x i y:

$$\boldsymbol{\delta}^T = \begin{Bmatrix} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & u_3 & v_3 & u_4 & v_4 \end{Bmatrix}$$

Vektor čvornih sila:



Slika 4.1: LSR konačni element

$$\mathbf{f}^T = \begin{Bmatrix} f_{x1} & f_{y1} & f_{x2} & f_{y2} & f_{x3} & f_{y3} & f_{x4} & f_{y4} \end{Bmatrix}$$

Prvi korak je odabir pogodne funkcije oblika za opis pomaka duž elementa:

$$\boldsymbol{\delta}(x,y) = \begin{Bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{Bmatrix} = \mathbf{H}(x,y)\mathbf{C}$$

Gdje su matrice $\mathbf{H}$ matrica funkcija u interpolacijskim polinomima, a matrica $\mathbf{C}$ matrica koeficijenata u interpolacijskim polinomima:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & xy & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & C_3 & C_4 & C_5 & C_6 & C_7 & C_8 \end{bmatrix}$$

Drugi korak je povezivanje generalne distribucije pomaka po elementu sa pomacima u čvorovima:

$$\boldsymbol{\delta}_1(x=0,y=0) = \mathbf{H}(x=0,y=0) * \mathbf{C}$$
$$\boldsymbol{\delta}_2(x=a,y=0) = \mathbf{H}(x=a,y=0) * \mathbf{C}$$
$$\boldsymbol{\delta}_3(x=a,y=b) = \mathbf{H}(x=a,y=b) * \mathbf{C}$$
$$\boldsymbol{\delta}_4(x=0,y=b) = \mathbf{H}(x=0,y=b) * \mathbf{C}$$

Kako $\boldsymbol{\delta}$(x) predstavlja pomake u i v u bilo kojoj točki elementa, čvorni pomaci se jednostavno dobiju uvrštavanjem pripadnih koordinata. Iz toga se može dobiti sljedeći izraz, gdje je matrica $\mathbf{A}$ matrica međusobne ovisnosti stupnjeva slobode i koeficijenata interpolacijskih polinoma.

$\boldsymbol{\delta} = \mathbf{AC}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a & 0 & 0 \\ 1 & a & b & ab & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a & b & ab \\ 1 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & b & 0 \end{bmatrix}$$

Kako je matrica $\mathbf{A}$ poznata, iz tog izraza slijedi matrica $\mathbf{C}$:

$\mathbf{C} = \mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{\delta}$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{a} & 0 & \frac{1}{a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{b} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{b} & 0 \\ \frac{1}{ab} & 0 & \frac{-1}{ab} & 0 & \frac{1}{ab} & 0 & \frac{-1}{ab} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{a} & 0 & \frac{1}{a} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{b} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{b} \\ 0 & \frac{1}{ab} & 0 & \frac{-1}{ab} & 0 & \frac{1}{ab} & 0 & \frac{-1}{ab} \end{bmatrix}$$

Pomaci unutar elementa se mogu izraziti u ovisnosti o čvornim pomacima:

$$\boldsymbol{\delta}(x,y) = \begin{Bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{Bmatrix} = \mathbf{H}(x,y)\mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{\delta} = \mathbf{N}(x,y)\boldsymbol{\delta}$$

Funkcija oblika $\mathbf{N}$(x,y) je jednaka: $\mathbf{N}(x,y) = \mathbf{H}(x,y)\mathbf{A}^{-1}$

$$\mathbf{N}(x,y) = \begin{bmatrix} N_u(x,y) \\ N_v(x,y) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \frac{(x-a)(y-b)}{ab} & 0 & \frac{-x(y-b)}{ab} & 0 & \frac{xy}{ab} & 0 & \frac{-(x-a)y}{ab} & 0 \\ 0 & \frac{(x-a)(y-b)}{ab} & 0 & \frac{-x(y-b)}{ab} & 0 & \frac{xy}{ab} & 0 & \frac{-(x-a)y}{ab} \end{bmatrix}$$

Treći korak je izraziti deformacije u elementu kao funkcije čvornih pomaka, gdje je $\mathbf{L}$ diferencijalni kinematički operator:

$$\boldsymbol{\epsilon}(x,y) = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \mathbf{L}\boldsymbol{\delta}(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix}$$

Zatim se određuje matrica $\mathbf{B}$ koja opisuje raspodjelu deformacije:

$\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{B}\boldsymbol{\delta}$

$\mathbf{B} = \mathbf{L}\mathbf{N}$

$$\mathbf{B}(x,y) = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_x \\ \mathbf{B}_y \\ \mathbf{B}_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_u(x,y) \\ N_v(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_u(x,y)}{\partial x} \\ \frac{\partial N_v(x,y)}{\partial y} \\ \frac{\partial N_u(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial N_v(x,y)}{\partial x} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{y}{ab} - \frac{1}{a} & 0 & \frac{1}{a} - \frac{y}{ab} & 0 & \frac{y}{ab} & 0 & \frac{-y}{ab} & 0 \\ 0 & \frac{x}{ab} - \frac{1}{b} & 0 & \frac{-x}{ab} & 0 & \frac{x}{ab} & 0 & \frac{1}{b} - \frac{y}{ab} \\ \frac{x}{ab} - \frac{1}{b} & \frac{y}{ab} - \frac{1}{a} & \frac{-x}{ab} & \frac{1}{a} - \frac{y}{ab} & \frac{x}{ab} & \frac{y}{ab} & \frac{1}{b} - \frac{y}{ab} & \frac{-y}{ab} \end{bmatrix}$$

Četvrti korak je izražavanje naprezanja u elementu kao funkciju čvornih pomaka:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \mathbf{D} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\mathbf{B}\boldsymbol{\delta}$

S=DB

$$\mathbf{S}= \begin{bmatrix} \frac{-(y-b)E}{ab\nu^2-ab} & \frac{-(\nu x-a\nu)E}{ab\nu^2-ab} & \frac{(y-b)E}{ab\nu^2-ab} & \frac{\nu xE}{ab\nu^2-ab} & \frac{-yE}{ab\nu^2-ab} & \frac{-\nu xE}{ab\nu^2-ab} & \frac{yE}{ab\nu^2-ab} & \frac{(\nu x-a\nu)E}{ab\nu^2-ab} \\ \frac{-(\nu y-b\nu)E}{ab\nu^2-ab} & \frac{-(x-a)E}{ab\nu^2-ab} & \frac{(\nu y-b\nu)E}{ab\nu^2-ab} & \frac{xE}{ab\nu^2-ab} & \frac{-\nu yE}{ab\nu^2-ab} & \frac{-xE}{ab\nu^2-ab} & \frac{\nu yE}{ab\nu^2-ab} & \frac{(x-a)E}{ab\nu^2-ab} \\ \frac{(x-a)E}{2ab\nu+2ab} & \frac{(y-b)E}{2ab\nu+2ab} & \frac{-xE}{2ab\nu+2ab} & \frac{-(y-b)E}{2ab\nu+2ab} & \frac{xE}{2ab\nu+2ab} & \frac{yE}{2ab\nu+2ab} & \frac{-(x-a)E}{2ab\nu+2ab} & \frac{-yE}{2ab\nu+2ab} \end{bmatrix}$$

Matrica $\mathbf{D}$ predstavlja matricu elastičnosti, a matrica $\mathbf{S}$ matricu raspodjele napreza-

nja u konačnom elementu.

Sljedeći korak je određivanje matrice krutosti $\mathbf{k}$ uspostavljanjem veze između čvornih sila i pomaka.
Za izvod matrice krutosti najčešće se koristi princip virtualnih radova, pa se unutrašnji virtualni rad izjednačava s vanjskim. Unutrašnji virtualni rad je jednak:
$\mathbf{W}_{int} = \int_V ((\boldsymbol{\epsilon}(x,y)^*)^T \boldsymbol{\sigma}(x,y) dV$
$\mathbf{W}_{int} = \int_V (\mathbf{B}\boldsymbol{\delta}^*)^T \mathbf{D}\mathbf{B}\boldsymbol{\delta} dV$
$\mathbf{W}_{int} = \int_V \boldsymbol{\delta}^{*T} \mathbf{B}^T \mathbf{D}\mathbf{B}\boldsymbol{\delta} dV$

Vanjski virtualni rad je jednak:
$\mathbf{W}_{ext} = \boldsymbol{\delta}^{*T} \mathbf{f}$

Izjednačavanjem radova i pretpostavkom jediničnih virtualnih pomaka dobije se izraz za matricu krutosti $\mathbf{k}$:

$$\mathbf{k} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D}\mathbf{B} dV = t \int\int_{00}^{ba} \mathbf{B}^T \mathbf{D}\mathbf{B} dx dy$$

Na slici 4.2 prikazana je matrica krutosti LSR elementa.

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix}
\frac{\left(a^2 n-2 b^2-a^2\right) t E}{6 a b (n-1)(n+1)} & -\frac{t E}{8(n-1)} & \frac{\left(a^2 n+4 b^2-a^2\right) t E}{12 a b (n-1)(n+1)} & -\frac{(3 n-1) t E}{8(n-1)(n+1)} & -\frac{\left(a^2 n-2 b^2-a^2\right) t E}{12 a b (n-1)(n+1)} & \frac{t E}{8(n-1)} & -\frac{\left(a^2 n+b^2-a^2\right) t E}{6 a b (n-1)(n+1)} & \frac{(3 n-1) t E}{8(n-1)(n+1)} \\
-\frac{t E}{8(n-1)} & \frac{\left(b^2 n-b^2-2 a^2\right) t E}{6 a b (n-1)(n+1)} & \frac{(3 n-1) t E}{8(n-1)(n+1)} & -\frac{\left(b^2 n-b^2+a^2\right) t E}{6 a b (n-1)(n+1)} & \frac{t E}{8(n-1)} & -\frac{\left(b^2 n-b^2-2 a^2\right) t E}{12 a b (n-1)(n+1)} & -\frac{(3 n-1) t E}{8(n-1)(n+1)} & \frac{\left(b^2 n-b^2+4 a^2\right) t E}{12 a b (n-1)(n+1)} \\
\frac{\left(a^2 n+4 b^2-a^2\right) t E}{12 a b (n-1)(n+1)} & \frac{(3 n-1) t E}{8(n-1)(n+1)} & \frac{\left(a^2 n-2 b^2-a^2\right) t E}{6 a b (n-1)(n+1)} & \frac{t E}{8(n-1)} & -\frac{\left(a^2 n+b^2-a^2\right) t E}{6 a b (n-1)(n+1)} & -\frac{(3 n-1) t E}{8(n-1)(n+1)} & -\frac{\left(a^2 n-2 b^2-a^2\right) t E}{12 a b (n-1)(n+1)} & -\frac{t E}{8(n-1)} \\
-\frac{(3 n-1) t E}{8(n-1)(n+1)} & -\frac{\left(b^2 n-b^2+a^2\right) t E}{6 a b (n-1)(n+1)} & \frac{t E}{8(n-1)} & \frac{\left(b^2 n-b^2-2 a^2\right) t E}{6 a b (n-1)(n+1)} & \frac{(3 n-1) t E}{8(n-1)(n+1)} & \frac{\left(b^2 n-b^2+4 a^2\right) t E}{12 a b (n-1)(n+1)} & -\frac{t E}{8(n-1)} & -\frac{\left(b^2 n-b^2-2 a^2\right) t E}{12 a b (n-1)(n+1)} \\
-\frac{\left(a^2 n-2 b^2-a^2\right) t E}{12 a b (n-1)(n+1)} & \frac{t E}{8(n-1)} & -\frac{\left(a^2 n+b^2-a^2\right) t E}{6 a b (n-1)(n+1)} & \frac{(3 n-1) t E}{8(n-1)(n+1)} & \frac{\left(a^2 n-2 b^2-a^2\right) t E}{6 a b (n-1)(n+1)} & -\frac{t E}{8(n-1)} & \frac{\left(a^2 n+4 b^2-a^2\right) t E}{12 a b (n-1)(n+1)} & -\frac{(3 n-1) t E}{8(n-1)(n+1)} \\
\frac{t E}{8(n-1)} & -\frac{\left(b^2 n-b^2-2 a^2\right) t E}{12 a b (n-1)(n+1)} & -\frac{(3 n-1) t E}{8(n-1)(n+1)} & \frac{\left(b^2 n-b^2+4 a^2\right) t E}{12 a b (n-1)(n+1)} & -\frac{t E}{8(n-1)} & \frac{\left(b^2 n-b^2-2 a^2\right) t E}{6 a b (n-1)(n+1)} & \frac{(3 n-1) t E}{8(n-1)(n+1)} & -\frac{\left(b^2 n-b^2+a^2\right) t E}{6 a b (n-1)(n+1)} \\
-\frac{\left(a^2 n+b^2-a^2\right) t E}{6 a b (n-1)(n+1)} & -\frac{(3 n-1) t E}{8(n-1)(n+1)} & -\frac{\left(a^2 n-2 b^2-a^2\right) t E}{12 a b (n-1)(n+1)} & -\frac{t E}{8(n-1)} & \frac{\left(a^2 n+4 b^2-a^2\right) t E}{12 a b (n-1)(n+1)} & \frac{(3 n-1) t E}{8(n-1)(n+1)} & \frac{\left(a^2 n-2 b^2-a^2\right) t E}{6 a b (n-1)(n+1)} & \frac{t E}{8(n-1)} \\
\frac{(3 n-1) t E}{8(n-1)(n+1)} & \frac{\left(b^2 n-b^2+4 a^2\right) t E}{12 a b (n-1)(n+1)} & -\frac{t E}{8(n-1)} & -\frac{\left(b^2 n-b^2-2 a^2\right) t E}{12 a b (n-1)(n+1)} & -\frac{(3 n-1) t E}{8(n-1)(n+1)} & -\frac{\left(b^2 n-b^2+a^2\right) t E}{6 a b (n-1)(n+1)} & \frac{t E}{8(n-1)} & \frac{\left(b^2 n-b^2-2 a^2\right) t E}{6 a b (n-1)(n+1)}
\end{bmatrix}$$

Slika 4.2: Matrica krutosti LSR elementa

4.1.2. Implementacija LSR elementa

LSR element, kao i svi ostali elementi implementirani u ovom radu, pripadaju klasi *StructuralElement* zato jer su namjenjeni za linearnu analizu. Za svaki element je razvijena njegova posebna klasa, konkretno za LSR element, ta klasa se zove *BasicLSR*. Klasa *BasicLSR* je izvedena tako da zamjenjuje metode iz klase *StructuralElement* koje su specifične za LSR element, uz također dodavanje potrebnih metoda specifičnih za taj element. Primjenjene su prethodno izvedene matrice **N**, **B**, **k**, međutim, kako se ne koristi princip numeričke integracije, moguće je bilo samo unijeti matricu krutosti **k**. U kodu su također prisutne metode za računanje lokalnog koordinatnog sustava, kao i za transformaciju iz globalnog u lokalni koordinatni sustav. Element ima 4 Gaussove točke koje se koriste za određivanje pozicija na kojima se računaju naprezanja. Trenutno element može primjeniti samo čvorno opterećenje.
Klasa *BasicLSR* je klasa koja implementira osnovni LSR element, u ravnini, no međutim, kako je testovima postojećih elemenata za ravninsko stanje naprezanja utvrđeno da se mogu koristiti samo u jednoj ravnini, klasa *BasicLSR* je dorađena, te je razvijena nova klasa *BasicLSR3d*.
Klasa *BasicLSR3d* je klasa koja implementira osnovni LSR element, koji je moguće proizvoljno orijentirati u prostoru. Ovaj element više ne posjeduje 2 stupnja slobode kao *BasicLSR*, već posjeduje 3 stupnja slobode, a to su u,v,w-pomak. Kako bi se to omogućilo, u klasi *BasicLSR3d* u odnosu na klasu *BasicLSR* izvršene su izmjene matrice koja računa lokalni koordinatni sustav elementa, te matrice transformacije globalnog u lokalni koordinatni sustav. Matrica krutosti **k** ostaje nepromijenjena i ona je i dalje dimenzija [8x8], jer se prilikom izračuna sve računa na razini pojedinog elementa u njegovom koordinatnom sustavu.
Prilikom testiranja implementiranog elementa *BasicLSR3d* pokazano je da on daje dobre vrijednosti razultata pomaka za proizvoljnu orijentiranost u prostoru, te je stoga primjenjiv za rješavanje ravninskog stanja naprezanja. Testovi su vršeni na Cook-ovom testu koji je opisan u poglavlju 5.1.
Sljedeći test koji nam je zanimljiv je uklještena greda I profila[3], prikazan u poglavlju 5.3 . Međutim, kako se elementi u testu nalaze u 2 različite ravnine, a opterećenje je u samo jednoj ravnini, javlja se problem zbog toga što se radi o elementima za ravninsko stanje naprezanja. Konkretno, potrebno je osim stupnjeva slobode čvorova na

mjestu uklještenja blokirati i 3. stupanj slobode u čvorovima elemenata na dijelu pojasa I profila, inače nije moguće dobiti rješenja. Stoga je rješenje tog problema proširenje matrice krutosti **k** elementa, tj. dodavanje dodatne krutosti za pomak u smjeru lokalne osi z elementa. Dodavanjem dodatne krutosti u matricu krutosti, moguće je rješenje problema u prostoru gdje opterećenje djeluje u ravnini okomitoj na ravninu elementa. Na taj način, problem kojeg inače rješavaju ljuske, koje imaju 6. stupnjeva slobode, možemo riješiti sa elementom koji ima 3. stupnja slobode gibanja. Naravno, ovo je na ovom primjeru moguće, jer je za deformaciju grede dominantno membransko ponašanje struka I profila, a ne pojasnog dijela. Međutim, odabrana dodatna krutost mora biti tako odabrana da omogućuje numeričko izvršenje testa, ali da praktično ne utječe na rezultate.

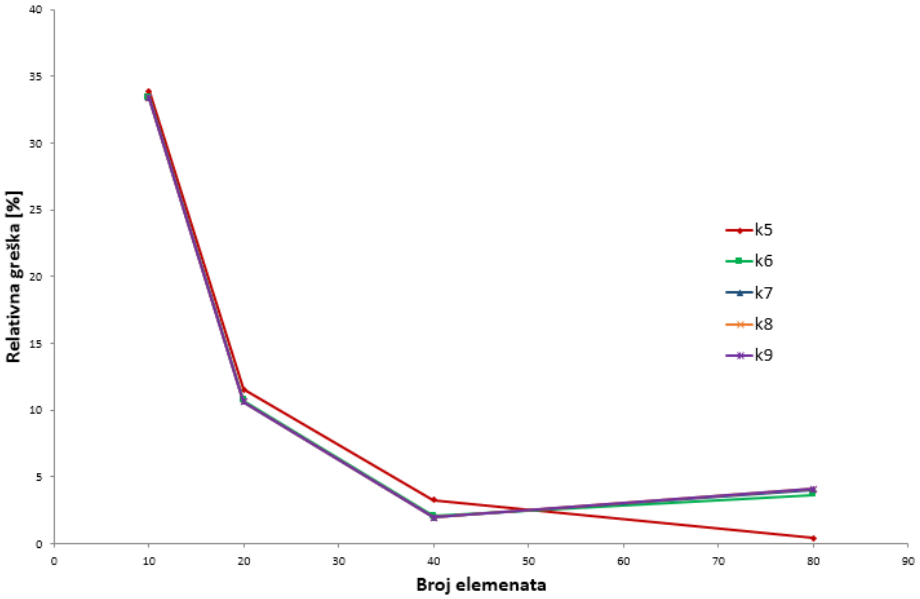
Implementirana je nova klasa *BasicLSRK3d* koja je izvedena iz klase *BasicLSR3d*. Modificirana je tako da je matrica krutosti **k** proširena sa veličine [8x8] na veličinu [12x12].Na pozicijama (3,3),(6,6),(9,9),(12,12) matrice krutosti nalaze se vrijednosti dodatne krutosti, a na svim ostalim pozicijama u pripadnim redovima i stupcima nalaze se nule. Također su izvršene pripadajuće izmjene matrice **B** te je ona sa dimenzija [3x8] poprimila dimenzije [3x12]. Matrica lokalnog koordinatnog sustava i matrica transformacije globalnog u lokalni koordinatni sustav su također prilagođene.

Kako bi se odredila odgovarajuća vrijednost dodatne krutosti, izvršena je usporedba rješenja za različite vrijednosti dodatne krutosti na testu uklještene grede I profila. Dobiveni su iznosi progiba za različitu gustoću mreže, N=1..16, gdje N opisuje povećanje mreže duž x osi, te su uspoređeni sa točnom vrijednošću.

Iznos dodatne krutosti dobiven je na način da se najveća vrijednost krutosti na dijagonali matrice krutosti **k** podijelila sa vrijednošću $10^5...10^9$. Na taj način dobivene su vrijednosti dodatne krutosti $k_5...k_9$, s čijim je vrijednostima proveden proračun. Konvergencija rješenja problema uklještene grede I profila sa različitim vrijednostima dodatne krutosti u matrici krutosti dana je na slici 4.3.

$$k_{5...9} = \frac{k_{max}}{10^5...10^9}$$

Na slici je prikazana relativna greška u odnosu na točnu vrijednost progiba na slobodnom kraju grede. Također je vidljivo da se krivulje konvergencije rješenja za vrijednosti



Slika 4.3: Konvergencija *BasicLSRK3d* za različite vrijednosti dodatne krutosti

dodatne krutosti ispod k_7 podudaraju, te stoga možemo odabrati vrijednost k_7 kao vrijednost dodatne krutosti koju će imati element *BasicLSRK3d*. Karakteristike implementiranog elementa *BasicLSRK3d* su dane u tablici 4.1.

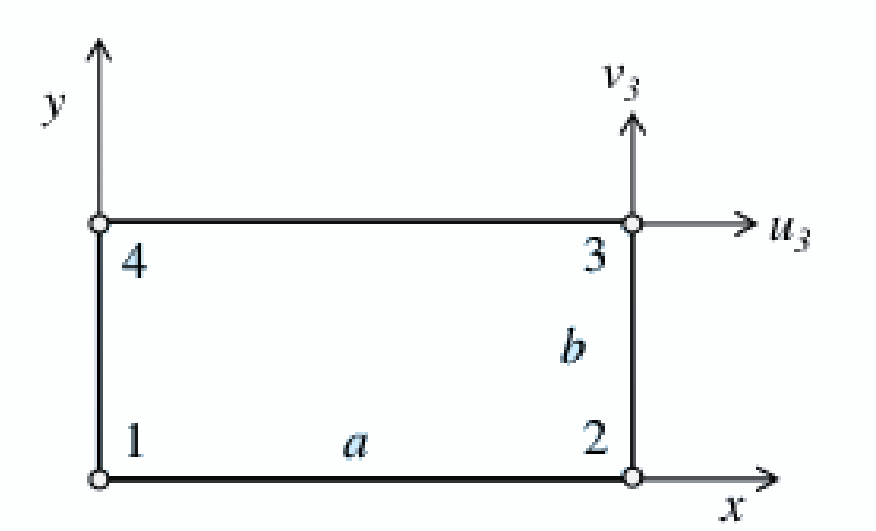
Tablica 4.1: Karakteristike implementiranog elementa *BasicLSRK3d*

Broj stranica	4
Broj čvorova	4
Broj Gaussovih točki	4
Broj stupnjeva slobode	3 (2+1) (u,v,w-pomak)
Dodatna krutost	$\frac{k_{max}}{10^7}$
Opterećenje	u čvorovima

4.2. Implementacija CSSR elementa

4.2.1. Izvod CSSR elementa

CSSR element je element za ravninsko stanje naprezanja sa konstantnom raspodjelom smičnih naprezanja. Radi se o četverokutnom elementu sa 4 čvora, u kojem ima 2 stupnja slobode gibanja, u-pomak i v-pomak, kao što je prikazano na slici 4.4. Izvod elementa je preuzet iz knjige *Ship Structural Design and Analyis*[10].



Slika 4.4: LSR konačni element

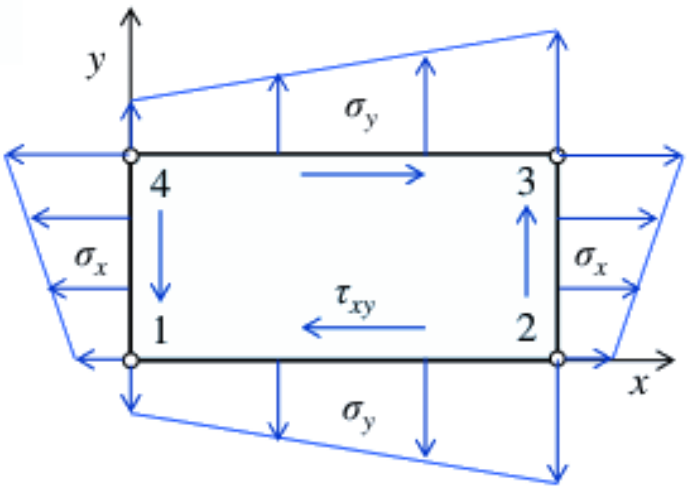
Stupnjevi slobode u pravcu koordinatnih osi x i y:
$\boldsymbol{\delta}^T = \begin{Bmatrix} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & u_3 & v_3 & u_4 & v_4 \end{Bmatrix}$

Vektor čvornih sila:
$\mathbf{f}^T = \begin{Bmatrix} f_{x1} & f_{y1} & f_{x2} & f_{y2} & f_{x3} & f_{y3} & f_{x4} & f_{y4} \end{Bmatrix}$

Prvi korak je odabir pogodne funkcije oblika za opis pomaka duž elementa:
$\boldsymbol{\delta}(x,y) = \begin{Bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{Bmatrix} = \mathbf{H}(x,y)\mathbf{C}$

Gdje su matrice **H** matrica funkcija u interpolacijskim polinomima, a matrica **C** matrica koeficijenata u interpolacijskim polinomima, međutim za razliku od izvoda LSR elementa, ovdje se matrica **H**(x,y) izvodi iz pretpostavljene distribucije naprezanja po elementu. Pretpostavljena distribucija naprezanja po elementu je prikazana na slici 4.5.

$\sigma_x(x,y) = C_1 + C_2 y$
$\sigma_y(x,y) = C_3 + C_4 x$
$\tau_{xy}(x,y) = C_5$



Slika 4.5: Pretpostavljena distribucija naprezanja po elementu

Zatim se određuju deformacije iz naprezanja, a poslije toga pomaci iz deformacija. Iz dobivenog polja pomaka slijedi matrica funkcija u interpolacijskim polinomima:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{E}\begin{bmatrix} x & xy & -\nu y & \frac{-(y^2+\nu x^2)}{2} & (\nu+1)y & y & 1 & 0 \\ -\nu y & \frac{-(\nu y^2+x^2)}{2} & y & xy & (\nu+1)x & -x & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Drugi korak je povezivanje generalne distribucije pomaka po elementu sa pomacima u čvorovima:

$\boldsymbol{\delta}_1(x=0,y=0) = \mathbf{H}(x=0,y=0) * \mathbf{C}$
$\boldsymbol{\delta}_2(x=a,y=0) = \mathbf{H}(x=a,y=0) * \mathbf{C}$
$\boldsymbol{\delta}_3(x=a,y=b) = \mathbf{H}(x=a,y=b) * \mathbf{C}$
$\boldsymbol{\delta}_4(x=0,y=b) = \mathbf{H}(x=0,y=b) * \mathbf{C}$

Kako $\boldsymbol{\delta}$(x) predstavlja pomake u i v u bilo kojoj točki elementa, čvorni pomaci se jednostavno dobiju uvrštavanjem pripadnih koordinata. Iz toga se može dobiti sljedeći izraz, gdje je matrica $\mathbf{A}$ matrica međusobne ovisnosti stupnjeva slobode i koeficijenata interpolacijskih polinoma.
$\boldsymbol{\delta} = \mathbf{AC}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{E} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{E} \\ \frac{a}{E} & 0 & \frac{-a\nu}{E} & \frac{-a^2\nu}{2E} & 0 & 0 & \frac{1}{E} & 0 \\ 0 & \frac{-a^2}{2E} & 0 & 0 & \frac{a(\nu+1)}{E} & \frac{-a}{E} & 0 & \frac{1}{E} \\ \frac{a}{E} & \frac{ab}{E} & \frac{-a\nu}{E} & \frac{-(a^2\nu+b^2)}{2E} & \frac{b(\nu+1)}{E} & \frac{b}{E} & \frac{1}{E} & 0 \\ \frac{-b\nu}{E} & \frac{-(b^2\nu+a^2)}{2E} & \frac{b}{E} & \frac{ab}{E} & \frac{a(\nu+1)}{E} & \frac{-a}{E} & 0 & \frac{1}{E} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-b^2}{2E} & \frac{b(\nu+1)}{E} & \frac{b}{E} & \frac{1}{E} & 0 \\ \frac{-b\nu}{E} & \frac{-b^2\nu}{2E} & \frac{b}{E} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{E} \end{bmatrix}$$

Kako je matrica $\mathbf{A}$ poznata, vektor nepoznatih koeficijenata $\mathbf{C}$ se može dobiti iz sljedećeg izraza:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{\delta}$$

Pomaci unutar elementa se mogu izraziti u ovisnosti o čvornim pomacima:

$$\boldsymbol{\delta}(x,y) = \begin{Bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{Bmatrix} = \mathbf{H}(x,y)\mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{\delta} = \mathbf{N}(x,y)\boldsymbol{\delta}$$

Funkcija oblika $\mathbf{N}$(x,y) je jednaka: $\mathbf{N}(x,y) = \mathbf{H}(x,y)\mathbf{A}^{-1}$

$$\mathbf{N}(x,y) = \begin{bmatrix} N_u(x,y) \\ N_v(x,y) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} & N_{13} & N_{14} & N_{15} & N_{16} & N_{17} & N_{18} \\ N_{21} & N_{22} & N_{23} & N_{24} & N_{25} & N_{26} & N_{27} & N_{28} \end{bmatrix}$$

$N_{11} = \frac{(x-a)(y-b)}{ab}$
$N_{12} = \frac{-(y^2-by+\nu x^2-a\nu x)}{2ab}$
$N_{13} = \frac{-x(y-b)}{ab}$
$N_{14} = \frac{y^2-by+\nu x^2-a\nu x}{2ab}$
$N_{15} = \frac{xy}{ab}$
$N_{16} = \frac{-(y^2-by+\nu x^2-a\nu x)}{2ab}$
$N_{17} = \frac{-(x-a)y}{ab}$
$N_{18} = \frac{y^2-by+\nu x^2-a\nu x}{2ab}$
$N_{21} = \frac{-(\nu y^2-b\nu y+x^2-ax)}{2ab}$
$N_{22} = \frac{(x-a)(y-b)}{ab}$
$N_{23} = \frac{\nu y^2-b\nu y+x^2-ax}{2ab}$
$N_{24} = \frac{-x(y-b)}{ab}$
$N_{25} = \frac{-(\nu y^2-b\nu y+x^2-ax)}{2ab}$
$N_{26} = \frac{xy}{ab}$
$N_{27} = \frac{\nu y^2-b\nu y+x^2-ax}{2ab}$
$N_{28} = \frac{-(x-a)y}{ab}$

Treći korak je izraziti deformacije u elementu kao funkcije čvornih pomaka, gdje je $\mathbf{L}$ diferencijalni kinematički operator:

$$\boldsymbol{\epsilon}(x,y) = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \mathbf{L}\boldsymbol{\delta}(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix}$$

Zatim se određuje matrica $\mathbf{B}$ koja opisuje raspodjelu deformacije:

$\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{B}\boldsymbol{\delta}$

$\mathbf{B} = \mathbf{LN}$

$$\mathbf{B}(x,y) = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_x \\ \mathbf{B}_y \\ \mathbf{B}_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_u(x,y) \\ N_v(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_u(x,y)}{\partial x} \\ \frac{\partial N_v(x,y)}{\partial y} \\ \frac{\partial N_u(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial N_v(x,y)}{\partial x} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{y-b}{a\,b} & -\frac{\nu\,(2\,x-a)}{2\,a\,b} & -\frac{y-b}{a\,b} & \frac{\nu\,(2\,x-a)}{2\,a\,b} & \frac{y}{a\,b} & -\frac{\nu\,(2\,x-a)}{2\,a\,b} & -\frac{y}{a\,b} & \frac{\nu\,(2\,x-a)}{2\,a\,b} \\ -\frac{\nu\,(2\,y-b)}{2\,a\,b} & \frac{x-a}{a\,b} & \frac{\nu\,(2\,y-b)}{2\,a\,b} & -\frac{x}{a\,b} & -\frac{\nu\,(2\,y-b)}{2\,a\,b} & \frac{x}{a\,b} & \frac{\nu\,(2\,y-b)}{2\,a\,b} & -\frac{x-a}{a\,b} \\ -\frac{1}{2\,b} & -\frac{1}{2\,a} & -\frac{1}{2\,b} & \frac{1}{2\,a} & \frac{1}{2\,b} & \frac{1}{2\,a} & \frac{1}{2\,b} & -\frac{1}{2\,a} \end{bmatrix}$$

Slika 4.6: Matrica **B** CSSR elementa

Četvrti korak je izražavanje naprezanja u elementu kao funkciju čvornih pomaka:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \mathbf{D} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{DB}\boldsymbol{\delta}$$

$$\mathbf{S}{=}\mathbf{DB}$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \frac{\left(2\nu^2 y-2y-b\nu^2+2b\right)E}{2ab(\nu-1)(\nu+1)} & \frac{\nu E}{2b(\nu-1)(\nu+1)} & -\frac{\left(2\nu^2 y-2y-b\nu^2+2b\right)E}{2ab(\nu-1)(\nu+1)} & \frac{\nu E}{2b(\nu-1)(\nu+1)} & \frac{\left(2\nu^2 y-2y-b\nu^2\right)E}{2ab(\nu-1)(\nu+1)} & -\frac{\nu E}{2b(\nu-1)(\nu+1)} & -\frac{\left(2\nu^2 y-2y-b\nu^2\right)E}{2ab(\nu-1)(\nu+1)} & -\frac{\nu E}{2b(\nu-1)(\nu+1)} \\ \frac{\nu E}{2a(\nu-1)(\nu+1)} & \frac{\left(2\nu^2 x-2x-a\nu^2+2a\right)E}{2ab(\nu-1)(\nu+1)} & -\frac{\nu E}{2a(\nu-1)(\nu+1)} & -\frac{\left(2\nu^2 x-2x-a\nu^2\right)E}{2ab(\nu-1)(\nu+1)} & -\frac{\nu E}{2a(\nu-1)(\nu+1)} & \frac{\left(2\nu^2 x-2x-a\nu^2\right)E}{2ab(\nu-1)(\nu+1)} & \frac{\nu E}{2a(\nu-1)(\nu+1)} & -\frac{\left(2\nu^2 x-2x-a\nu^2+2a\right)E}{2ab(\nu-1)(\nu+1)} \\ -\frac{E}{4b(\nu+1)} & -\frac{E}{4a(\nu+1)} & -\frac{E}{4b(\nu+1)} & \frac{E}{4a(\nu+1)} & \frac{E}{4b(\nu+1)} & \frac{E}{4a(\nu+1)} & \frac{E}{4b(\nu+1)} & -\frac{E}{4a(\nu+1)} \end{bmatrix}$$

Slika 4.7: Matrica **S** CSSR elementa

Matrica **D** predstavlja matricu elastičnosti, a matrica **S** matricu raspodjele naprezanja u konačnom elementu.

Sljedeći korak je određivanje matrice krutosti **k** uspostavljanjem veze između čvornih sila i pomaka.

Za izvod matrice krutosti najčešće se koristi princip virtualnih radova, pa se unutrašnji

virtualni rad izjednačava s vanjskim. Unutrašnji virtualni rad je jednak:
$\mathbf{W}_{int} = \int_V ((\boldsymbol{\epsilon}(x,y)^*)^T \boldsymbol{\sigma}(x,y) dV$
$\mathbf{W}_{int} = \int_V (\mathbf{B}\boldsymbol{\delta}^*)^T \mathbf{D}\mathbf{B}\boldsymbol{\delta} dV$
$\mathbf{W}_{int} = \int_V \boldsymbol{\delta}^{*T} \mathbf{B}^T \mathbf{D}\mathbf{B}\boldsymbol{\delta} dV$

Vanjski virtualni rad je jednak:
$\mathbf{W}_{ext} = \boldsymbol{\delta}^{*T} \mathbf{f}$

Izjednačavanjem radova i pretpostavkom jediničnih virtualnih pomaka dobije se izraz za matricu krutosti $\mathbf{k}$:

$$\mathbf{k} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D}\mathbf{B} dV = t \int\int_{00}^{ba} \mathbf{B}^T \mathbf{D}\mathbf{B} dx dy$$

Na slici 4.8 prikazana je matrica krutosti CSSR elementa.

4.2.2. Implementacija CSSR elementa

Implementacija CSSR elementa u OOFEM izvršena je analogno implementaciji LSR elementa. Analogno elementu *BasicLSR3d* implementiran je element *CSSR3d*, tj. izmjenjene su pripadajuće matrice $\mathbf{N}$,$\mathbf{B}$, $\mathbf{k}$. Iz istih razloga zbog kojih je implementiran element *BasicLSRK3d* implementiran je element *CSSRK3d*. Elementi su također izvedeni direktno iz klase *StructuralElement*, te koriste iste metode.
Za element *CSSRK3d* potrebno je odrediti iznos dodatne krutosti, slično kao i za *BasicLSRK3d*. Izvršeni su testovi uklještene grede I profila[3], za različite iznose dodatne krutosti elementa, kako bi se dobila onaj iznos krutosti kod kojeg se pomaci praktički ne mjenjanju. Radi se o iznosu dodatne krutosti koja praktički ne utječe na rezultate, a omogućuje provedbu proračuna u OOFEM-u.
Iznos dodatne krutosti dobiven je na način da se najveća vrijednost krutosti na dijagonali matrice krutosti $\mathbf{k}$ podijelila sa vrijednossću $10^5 ... 10^9$. Na taj način dobivene su vrijednosti dodatne krutosti $k_5 ... k_9$, s čijim je vrijednostima proveden proračun. Konver-

gencija rješenja problema uklještene grede I profila sa različitim vrijednostima dodatne krutosti u matrici krutosti dana je na slici 4.9.

$k_{5...9} = \frac{k_{max}}{10^5...10^9}$

Na slici je prikazana relativna greška u odnosu na točnu vrijendost progiba na slobodnom kraju grede. Također je vidljivo da se krivulje konvergencije rješenja za vrijednosti dodatne krutosti ispod k_8 podudaraju, te stoga možemo odabrati vrijednost k_8 kao vrijednost dodatne krutosti koju će imati element *CSSRK3d*. Karakteristike implementiranog elementa *CSSRK3d* su dane u tablici 4.2.

Tablica 4.2: Karakteristike implementiranog elementa *CSSRK3d*

Broj stranica	4
Broj čvorova	4
Broj Gaussovih točki	4
Broj stupnjeva slobode	3 (2+1) (u,v,w-pomak)
Dodatna krutost	$\frac{k_{max}}{10^8}$
Opterećenje	u čvorovima

4.3. Implementacija elementa ploče

Shodno zaključcima izvedenih iz testiranja i svojstava postojećih elemenata ploče za analizu tankostjenih konstrukcija, potrebno je implementirati novu ploču u program OOFEM. Ploča koja je odabrana za implementaciju je ACM ploča. Njen izvod je pruzet iz knjige *Metoda konačnih elemenata.*[9] Element posjeduje 3 stupnja slobode gibanja, w-pomak te φ_x-rotaciju i φ_y-rotaciju.

4.3.1. Izvod ACM ploče

Prvi korak je odabir pogodne funkcije oblika za opis pomaka duž elementa:

$$w = [1, x, y, x^2, xy, y^2, x^3, x^2y, xy^2, y^3, x^3y, xy^3]$$

$$\varphi_x = (\frac{\partial w}{\partial y})$$

$$\varphi_x = [0, 0, 1, 0, x, 2\,y, 0, x^2, 2\,x\,y, 3\,y^2, x^3, 3\,x\,y^2]$$

$$\varphi_y = -(\frac{\partial w}{\partial x})$$

$$\varphi_y = [0, -1, 0, -2\,x, -y, 0, -3\,x^2, -2\,x\,y, -y^2, 0, -3\,x^2\,y, -y^3]$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & x^2 & x\,y & y^2 & x^3 & x^2\,y & x\,y^2 & y^3 & x^3\,y & x\,y^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x & 2\,y & 0 & x^2 & 2\,x\,y & 3\,y^2 & x^3 & 3\,x\,y^2 \\ 0 & -1 & 0 & -2\,x & -y & 0 & -3\,x^2 & -2\,x\,y & -y^2 & 0 & -3\,x^2\,y & -y^3 \end{bmatrix}$$

Drugi korak je povezivanje generalne distribucije pomaka po elementu sa čvornim pomacima:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_1 & \mathbf{N}_2 & \mathbf{N}_3 & \mathbf{N}_4 \end{bmatrix}$$

Treći korak je izražavanje deformacija u elementu preko čvornih pomaka:

$$\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{B}\boldsymbol{\delta}$$

$$\mathbf{B} = -\begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{N}_1 & \mathbf{N}_2 & \mathbf{N}_3 & \mathbf{N}_4 \end{bmatrix}$$

Četvrti korak je izražavanje naprezanja u elementu kao funkciju čvornih pomaka:

$$\mathbf{S}{=}\mathbf{DB}$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{t^3\,E}{12\,(1-\nu^2)} & \frac{\nu\,t^3\,E}{12\,(1-\nu^2)} & 0 \\ \frac{\nu\,t^3\,E}{12\,(1-\nu^2)} & \frac{t^3\,E}{12\,(1-\nu^2)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)\,t^3\,E}{24\,(1-\nu^2)} \end{bmatrix}$$

Zadnji korak je određivanje matrice krutosti postavljanjem veze između čvornih sila i pomaka:

$$\mathbf{k} = \int_V \mathbf{B}^T\mathbf{D}\mathbf{B}dV$$

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_{1,1} & k_{1,2} & k_{1,3} & \dots & k_{1,12} \\ k_{2,1} & k_{2,2} & k_{2,3} & \dots & k_{2,12} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_{12,1} & k_{12,2} & k_{12,3} & \dots & k_{12,12} \end{bmatrix}$$

Kako je matrica krutosti simetrična, napisani su samo članovi matrice krutosti iznad dijagonale:

$$k_{1,1} = \frac{(2a^2b^2\nu - 10b^4 - 7a^2b^2 - 10a^4)t^3E}{30a^3b^3\nu^2 - 30a^3b^3}$$
$$k_{1,2} = -\frac{(4b^5\nu + b^5 + 10a^2b^3)t^3E}{10(6ab^5\nu^2 - 6ab^5)}$$
$$k_{1,3} = -\frac{(4a^2b^3\nu + 10b^5 + a^2b^3)t^3E}{60a^2b^4\nu^2 - 60a^2b^4}$$
$$k_{1,4} = -\frac{(2a^2b^2\nu - 10b^4 - 7a^2b^2 + 5a^4)t^3E}{30a^3b^3\nu^2 - 30a^3b^3}$$
$$k_{1,5} = \frac{(4b^5\nu + b^5 - 5a^2b^3)t^3E}{10(6ab^5\nu^2 - 6ab^5)}$$
$$k_{1,6} = -\frac{(-a^2b\nu + 10b^3 + a^2b)t^3E}{60a^2b^2\nu^2 - 60a^2b^2}$$
$$k_{1,7} = \frac{(2a^2b^2\nu + 5b^4 - 7a^2b^2 + 5a^4)t^3E}{30a^3b^3\nu^2 - 30a^3b^3}$$
$$k_{1,8} = -\frac{(b^5\nu - b^5 + 5a^2b^3)t^3E}{10(6ab^5\nu^2 - 6ab^5)}$$
$$k_{1,9} = \frac{(-a^2b\nu - 5b^3 + a^2b)t^3E}{60a^2b^2\nu^2 - 60a^2b^2}$$

$$k_{1,10} = -\frac{(2a^2b^2\nu+5b^4-7a^2b^2-10a^4)t^3E}{30a^3b^3\nu^2-30a^3b^3}$$
$$k_{1,11} = \frac{(b^5\nu-b^5-10a^2b^3)t^3E}{10(6ab^5\nu^2-6ab^5)}$$
$$k_{1,12} = \frac{(4a^2b^3\nu-5b^5+a^2b^3)t^3E}{60a^2b^4\nu^2-60a^2b^4}$$
$$k_{2,2} = \frac{(2b^5\nu-2b^5-10a^2b^3)t^3E}{5(18ab^4\nu^2-18ab^4)}$$
$$k_{2,3} = -\frac{b^3\nu t^3E}{2(6b^3\nu^2-6b^3}$$
$$k_{2,4} = \frac{(4b^5\nu+b^5-5a^2b^3)t^3E}{10(6ab^5\nu^2-6ab^5}$$
$$k_{2,5} = -\frac{(2b^5\nu-2b^5+5a^2b^3)t^3E}{5(18ab^4\nu^2-18ab^4}$$
$$k_{2,6} = 0$$
$$k_{2,7} = \frac{(b^5\nu-b^5+5a^2b^3)t^3E}{10(6ab^5\nu^2-6ab^5)}$$
$$k_{2,8} = \frac{(b^5\nu-b^5-5a^2b^3)t^3E}{10(18ab^4\nu^2-18ab^4)}$$
$$k_{2,9} = 0$$
$$k_{2,10} = -\frac{b^5\nu-b^5-10a^2b^3)t^3E}{10(6ab^5\nu^2-6ab^5)}$$
$$k_{2,11} = -\frac{(b^5\nu-b^5+10a^2b^3)t^3E}{10(18ab^4\nu^2-18ab^4)}$$
$$k_{2,12} = 0$$
$$k_{3,3} = -\frac{(-a^2b\nu+5b^3+a^2b)t^3E}{45ab^2\nu^2-45ab^2}$$
$$k_{3,4} = \frac{(-a^2b\nu+10b^3+a^2b)t^3E}{60a^2b^2\nu^2-60a^2b^2}$$
$$k_{3,5} = 0$$
$$k_{3,6} = -\frac{(a^2b\nu+10b^3-a^2b)t^3E}{180ab^2\nu^2-180ab^2}$$
$$k_{3,7} = -\frac{(-a^2b\nu-5b^3+a^2b)t^3E}{60a^2b^2\nu^2-60a^2b^2};$$
$$k_{3,8} = 0$$
$$k_{3,9} = \frac{(a^2b\nu-5b^3-a^2b)t^3E}{180ab^2\nu^2-180ab^2}$$
$$k_{3,10} = \frac{(4a^2b^3\nu-5b^5+a^2b^3)t^3E}{60a^2b^4\nu^2-60a^2b^4}$$
$$k_{3,11} = 0$$
$$k_{3,12} = -\frac{(2a^2b\nu+5b^3-2a^2b)t^3E}{2(45ab^2\nu^2-45ab^2)}$$
$$k_{4,4} = \frac{(2a^2b^2\nu-10b^4-7a^2b^2-10a^4)t^3E}{30a^3b^3\nu^2-30a^3b^3}$$
$$k_{4,5} = -\frac{(4b^5\nu+b^5+10a^2b^3)t^3E}{10(6ab^5\nu^2-6ab^5)}$$
$$k_{4,6} = \frac{(4a^2b^3\nu+10b^5+a^2b^3)t^3E}{60a^2b^4\nu^2-60a^2b^4}$$
$$k_{4,7} = -\frac{(2a^2b^2\nu+5b^4-7a^2b^2-10a^4)t^3E}{30a^3b^3\nu^2-30a^3b^3}$$
$$k_{4,8} = \frac{(b^5\nu-b^5-10a^2b^3)t^3E}{10(6ab^5\nu^2-6ab^5)}$$
$$k_{4,9} = -\frac{(4a^2b^3\nu-5b^5+a^2b^3)t^3E}{60a^2b^4\nu^2-60a^2b^4}$$
$$k_{4,10} = \frac{(2a^2b^2\nu+5b^4-7a^2b^2+5a^4)t^3E}{30a^3b^3\nu^2-30a^3b^3}$$
$$k_{4,11} = -\frac{(b^5\nu-b^5+5a^2b^3)t^3E}{10(6ab^5\nu^2-6ab^5)}$$
$$k_{4,12} = -\frac{(-a^2b\nu-5b^3+a^2b)t^3E}{60a^2b^2\nu^2-60a^2b^2}$$

$$k_{5,5} = \frac{(2b^5\nu - 2b^5 - 10a^2b^3)t^3E}{5(18ab^4\nu^2 - 18ab^4)}$$
$$k_{5,6} = \frac{b^3\nu t^3 E}{2(6b^3\nu^2 - 6b^3)}$$
$$k_{5,7} = -\frac{(b^5\nu - b^5 - 10a^2b^3)t^3E}{10(6ab^5\nu^2 - 6ab^5)}$$
$$k_{5,8} = -\frac{(b^5\nu - b^5 + 10a^2b^3)t^3E}{10(18ab^4\nu^2 - 18ab^4)}$$
$$k_{5,9} = 0$$
$$k_{5,10} = \frac{(b^5\nu - b^5 + 5a^2b^3)t^3E}{10(6ab^5\nu^2 - 6ab^5)}$$
$$k_{5,11} = \frac{(b^5\nu - b^5 - 5a^2b^3)t^3E}{10(18ab^4\nu^2 - 18ab^4)}$$
$$k_{5,12} = 0$$
$$k_{6,6} = -\frac{(-a^2b\nu + 5b^3 + a^2b)t^3E}{45ab^2\nu^2 - 45ab^2)}$$
$$k_{6,7} = -\frac{(4a^2b^3\nu - 5b^5 + a^2b^3)t^3E}{60a^2b^4\nu^2 - 60a^2b^4}$$
$$k_{6,8} = 0$$
$$k_{6,9} = -\frac{(2a^2b\nu + 5b^3 - 2a^2b)t^3E}{2(45ab^2\nu^2 - 45ab^2)}$$
$$k_{6,10} = \frac{(-a^2b\nu - 5b^3 + a^2b)t^3E}{60a^2b^2\nu^2 - 60a^2b^2}$$
$$k_{6,11} = 0$$
$$k_{6,12} = \frac{(a^2b\nu - 5b^3 - a^2b)t^3E}{180ab^2\nu^2 - 180ab^2}$$
$$k_{7,7} = \frac{(2a^2b^2\nu - 10b^4 - 7a^2b^2 - 10a^4)t^3E}{30a^3b^3\nu^2 - 30a^3b^3}$$
$$k_{7,8} = \frac{(4b^5\nu + b^5 + 10a^2b^3)t^3E}{10(6ab^5\nu^2 - 6ab^5)}$$
$$k_{7,9} = \frac{(4a^2b^3\nu + 10b^5 + a^2b^3)t^3E}{60a^2b^4\nu^2 - 60a^2b^4}$$
$$k_{7,10} = -\frac{(2a^2b^2\nu - 10b^4 - 7a^2b^2 + 5a^4)t^3E}{30a^3b^3\nu^2 - 30a^3b^3}$$
$$k_{7,11} = -\frac{(4b^5\nu + b^5 - 5a^2b^3)t^3E}{10(6ab^5\nu^2 - 6ab^5)}$$
$$k_{7,12} = \frac{(-a^2b\nu + 10b^3 + a^2b)t^3E}{60a^2b^2\nu^2 - 60a^2b^2}$$
$$k_{8,8} = \frac{(2b^5\nu - 2b^5 - 10a^2b^3)t^3E}{5(18ab^4nu^2 - 18ab^4)}$$
$$k_{8,9} = -\frac{b^3\nu t^3 E}{2(6b^3\nu^2 - 6b^3)}$$
$$k_{8,10} = -\frac{(4b^5\nu + b^5 - 5a^2b^3)t^3E}{10(6ab^5\nu^2 - 6ab^5)}$$
$$k_{8,11} = -\frac{(2b^5\nu - 2b^5 + 5a^2b^3)t^3E}{5(18ab^4\nu^2 - 18ab^4)}$$
$$k_{8,12} = 0$$
$$k_{9,9} = -\frac{(-a^2b\nu + 5b^3 + a^2b)t^3E}{45ab^2\nu^2 - 45ab^2}$$
$$k_{9,10} = -\frac{(-a^2b\nu + 10b^3 + a^2b)t^3E}{60a^2b^2\nu^2 - 60a^2b^2}$$
$$k_{9,11} = 0$$
$$k_{9,12} = -\frac{(a^2b\nu + 10b^3 - a^2b)t^3E}{180ab^2\nu^2 - 180ab^2}$$
$$k_{10,10} = \frac{(2a^2b^2\nu - 10b^4 - 7a^2b^2 - 10a^4)t^3E}{30a^3b^3\nu^2 - 30a^3b^3}$$
$$k_{10,11} = \frac{(4b^5\nu + b^5 + 10a^2b^3)t^3E}{10(6ab^5\nu^2 - 6ab^5)}$$
$$k_{10,12} = -\frac{(4a^2b^3\nu + 10b^5 + a^2b^3)t^3E}{60a^2b^4\nu^2 - 60a^2b^4}$$

$$k_{11,11} = \frac{(2b^5\nu - 2b^5 - 10a^2b^3)t^3E}{5(18ab^4\nu^2 - 18ab^4)}$$
$$k_{11,12} = \frac{b^3\nu t^3 E}{2(6b^3\nu^2 - 6b^3)}$$
$$k_{12,12} = -\frac{(-a^2b\nu + 5b^3 + a^2b)t^3E}{45ab^2\nu^2 - 45ab^2}$$

4.3.2. Implementacija ACM ploče

Implementacija ACM ploče u OOFEM je izvršena stvaranjem nove klase *ACMPlate* koja nasljeđuje klasu *StructuralElement*. U ovom slučaju, za razliku od elemenata za ravninsko stanje naprezanja, primjenjene su metode i funkcije potrebne za definiranja elementa ploče.

Kako element ploče posjeduje 3 stupnja slobode gibanja, a to su w-pomak te φ_x, φ_y-rotacija, oni su implementirani u kod. Također je implementirana matrica krutosti, izvedena u prethodnom poglavlju. Ostale metode praktički ostaju iste kao kod elemenata za ravninsko stanje naprezanja, osim domene elementa, koja sada opisuje element ploče.

Tablica 4.3: Karakteristike implementiranog elementa *ACMPlate*

Broj stranica	4
Broj čvorova	4
Broj Gaussovih točki	4
Broj stupnjeva slobode	3 (w-pomak, φ_x, φ_y-rotacija)
Opterećenje	u čvorovima

4.4. Implementacija ljuske

Konačni element ljuske je implementiran u OOFEM na način da su spojeni prethodno implementirani konačni elementi za ravninsko stanje naprezanja i implementirani konačni element ploče. Ljuska je konačni element koji ima 6 stupnjeva slobode gibanja po čvoru, u,v,w-pomak i $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$-rotacija. Međutim konačni elementi za ravninsko stanje naprezanja imaju 2+1 stupanj slobode gibanja, u,v + w-pomak, a konačni element ploče ima 3 stupnja slobode gibanja w-pomak, te φ_x, φ_y-rotacije. Spajanje dva elementa izvršeno je na način da se matrica krutosti dobije kombinacijom matrica krutosti konačnog elementa za ravninsko stanje naprezanja i konačnog elementa ploče.
Matrica krutosti ljuske preuzima pripadne krutosti za stupnjeve slobode 1 i 2 (u,v-pomak) od matrice krutosti elementa za ravninsko stanje naprezanja. Pripadne krutosti za stupnjeve slobode 3,4 i 5 (w-pomak, φ_x, φ_y-rotacija) konačni element ljuske preuzima iz matrice krutosti konačnog elementa ploče. Vidljivo je da ostaje nedefinirana krutost 6. stupnja slobode gibanja, odnosno φ_z-rotacije. Za taj stupanj slobode gibanja potrebno je dodijeliti dodatnu krutost, koja mora biti tako definirana da omogućuje provedbu proračuna u OOFEM-u, ali da praktički ne utječe na rezultate.
Implementirana su dva konačna elementa ljuske na način da su stvorene dvije klase *qshell* i *qcshell*. Klasa *qshell* predstavlja konačni element ljuske nastao spajanjem LSR konačnog elementa i ACM ploče, a klasa *qcshell* predstavlja konačni element ljuske nastao spajanjem CSSR konačnog elementa i ACM ploče. Obje ljuske su direktno izvedene iz klase *StructuralElement*, uz pripadajuće izmjene metoda i funkcija koje su potrebne za konačni element ljuske.
Matrice krutosti ovih ljuski su dimenzija [24x24], kako se radi o četverokutnoj ljusci sa 6 stupnjeva slobode gibanja po čvoru. No, pozicije (6,6), (12,12), (18,18), (24,24) matrice krutosti, vezane za φ_z-rotaciju su prazne i potrebno je dodijeliti vrijednost dodatne krutosti na tu poziciju. Vrijednost dodatne krutosti je određena testiranjem modela uklještene grede I profila[3] korištenjem ova dva implementirana elementa, sa različitim iznosima dodatne krutosti.
Vrijednosti dodatne krutosti za oba implementirana elementa, određena je na istovjetan način kao i za elemente za ravninsko stanje naprezanja. Najveća vrijednost krutosti na dijagonali je podijeljena sa vrijednošću $10^4 ... 10^7$, te su dobivene krutosti $k_4 ... k_7$. Sa tako dobivenim dodatnim krutostima za 6. stupanj slobode gibanja, izvršeni su proračuni

na testu uklještene grede I profila, te je gledana konvergencija rješenja progiba na slobodnom kraju. Odabrana je ona dodatna krutost, poslije koje za sve ostale krutosti ne dolazi do promjene u rješenju. Prikaz konvergencije rješenja za različite vrijednosti dodatne krutosti nalazi se na slici 4.10 za element *qshell*, a na slici 4.11 za element *qcshell*.

Kako je vidljivo na slici 4.10 za sve vrijednosti dodatne krutosti rezultati su isti, stoga je kao vrijednost dodatne krutosti za 6. stupanj slobode odabrana vrijednost k_4. Prema slici 4.11 vidljivo je da se konvergencija progiba slobodnog kraja grede ponaša identično za vrijednosti krutosti ispod k_5, stoga je ta vrijednost odabrana kao vrijednost dodatne krutosti.
Karakteristike implementiranih ljuski su prikazane u tablicama 4.4 i 4.5.

Tablica 4.4: Karakteristike implementiranog elementa *qshell*

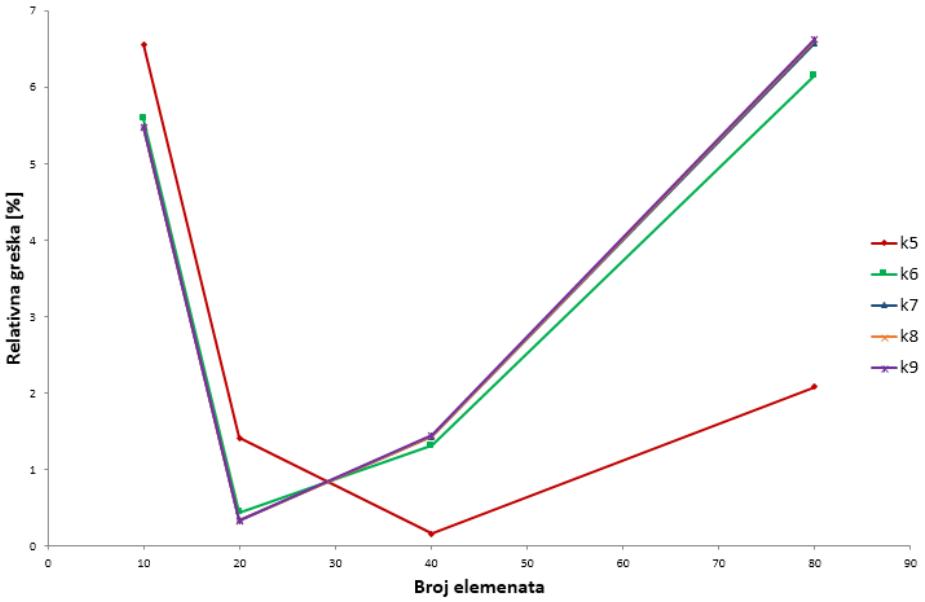
Broj stranica	4
Broj čvorova	4
Broj Gaussovih točki	4
Broj stupnjeva slobode	6 (5+1) (u,v,w-pomak, $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$-rotacija)
Dodatna krutost	$\frac{k_{max}}{10^4}$
Opterećenje	u čvorovima

Tablica 4.5: Karakteristike implementiranog elementa *qcshell*

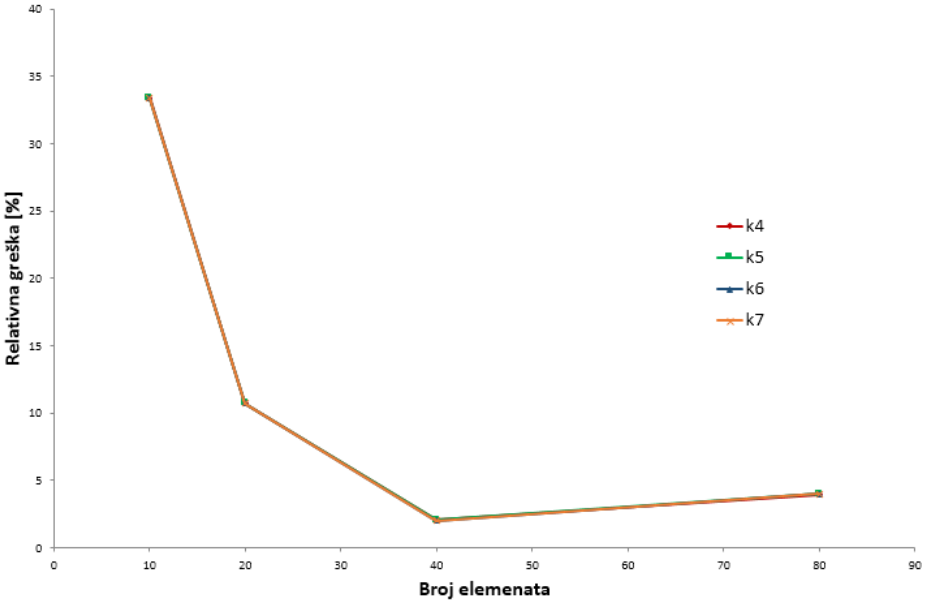
Broj stranica	4
Broj čvorova	4
Broj Gaussovih točki	4
Broj stupnjeva slobode	6 (5+1) (u,v,w-pomak, $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$-rotacija)
Dodatna krutost	$\frac{k_{max}}{10^5}$
Opterećenje	u čvorovima

$$
\mathbf{k} = \begin{bmatrix}
\frac{(2b^2c^2+3a^2c^2+3a^2b^2-2a^4)tE}{24ab(c-1)(c+1)} & -\frac{tE}{8(c-1)} & -\frac{(2b^2c^2-3a^2c^2+6b^2+3a^2)tE}{24ab(c-1)(c+1)} & -\frac{(3a-1)tE}{8(c-1)(a+1)} & \frac{(2b^2c^2-3a^2c^2+3a^2+6a^4)tE}{24ab(c-1)(c+1)} & \frac{tE}{8(c-1)} & -\frac{(2b^2c^2+3a^2c^2+3a^2+6a^4-3a^6)tE}{24ab(c-1)(c+1)} & \frac{(3a-1)tE}{8(c-1)(a+1)} \\
 & \frac{tE}{8(c-1)} & \frac{(2a^2c^2+3b^2c^2-3b^4-8a^2)tE}{24ab(c-1)(c+1)} & \frac{(3a-1)tE}{8(c-1)(a+1)} & -\frac{(2a^2c^2+3b^2c^2-6b^4-8a^2)tE}{24ab(c-1)(c+1)} & \frac{tE}{8(c-1)} & \frac{(2a^2c^2-3b^2c^2+3b^4+4a^2)tE}{24ab(c-1)(c+1)} & -\frac{(3a-1)tE}{8(c-1)(a+1)} \\
 & & \frac{(2a^2c^2+3a^2c^2+3a^2b^2-2a^4)tE}{24ab(c-1)(c+1)} & -\frac{(3a-1)tE}{8(c-1)(a+1)} & \frac{(2b^2c^2-3a^2c^2+4b^2+3a^2)tE}{24ab(c-1)(c+1)} & \frac{tE}{8(c-1)} & -\frac{(2b^2c^2+3a^2c^2+4b^2-3a^4)tE}{24ab(c-1)(c+1)} & \frac{(3a-1)tE}{8(c-1)(a+1)} \\
 & & & \frac{tE}{8(c-1)} & -\frac{(2a^2c^2+3b^2c^2-3b^4-8a^2)tE}{24ab(c-1)(c+1)} & -\frac{tE}{8(c-1)} & \frac{(2a^2c^2-3b^2c^2+3b^4+4a^2)tE}{24ab(c-1)(c+1)} & -\frac{(3a-1)tE}{8(c-1)(a+1)} \\
 & & & & \frac{(2b^2c^2-3a^2c^2+4b^2+3a^2)tE}{24ab(c-1)(c+1)} & \frac{tE}{8(c-1)} & -\frac{(2b^2c^2+3a^2c^2+4b^2-3a^4)tE}{24ab(c-1)(c+1)} & \frac{(3a-1)tE}{8(c-1)(a+1)} \\
 & & & & & \frac{tE}{8(c-1)} & -\frac{(2a^2c^2+3b^2c^2-3b^4-8a^2)tE}{24ab(c-1)(c+1)} & -\frac{(3a-1)tE}{8(c-1)(a+1)} \\
 & & & & & & \frac{(2b^2c^2+3a^2c^2+4b^2+3a^2)tE}{24ab(c-1)(c+1)} & \frac{tE}{8(c-1)} \\
 & & & & & & & \frac{(2a^2c^2+3b^2c^2+4a^2+3b^2)tE}{24ab(c-1)(c+1)}
\end{bmatrix}
$$

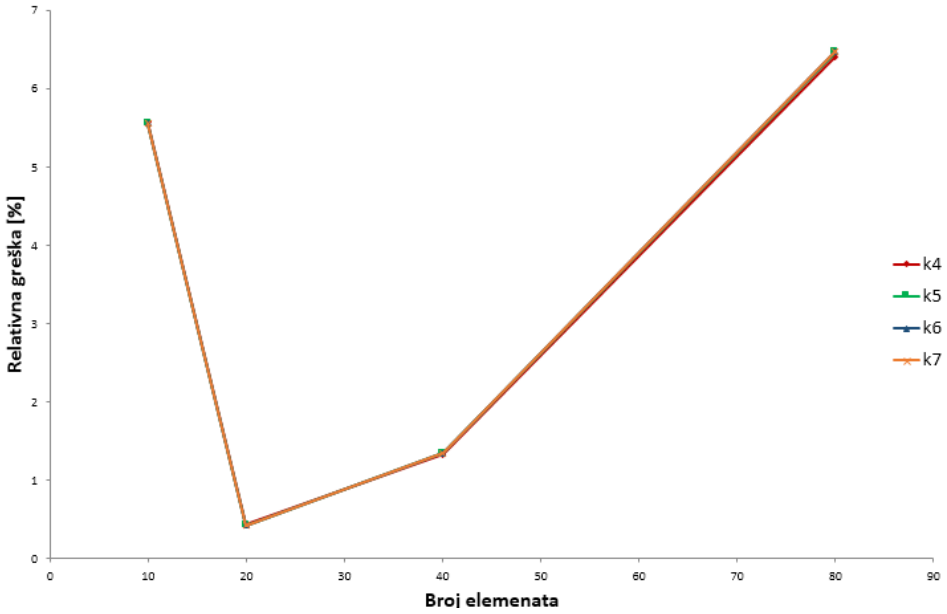
Slika 4.8: Matrica krutosti CSSR elementa



Slika 4.9: Konvergencija *CSSRK3d* za različite vrijednosti dodatne krutosti



Slika 4.10: Konvergencija *qshell* za različite vrijednosti dodatne krutosti



Slika 4.11: Konvergencija *qcshell* za različite vrijednosti dodatne krutosti

5 Testiranje implementiranih elemenata

Kako bi se potvrdila ispravnost prethodno implementiranih elemenata, potrebno je izvršiti testiranja. Pregledom literature, odabrani su pogodni testni primjeri za analizu tankostjenih konstrukcija. Odabrani testovi su:

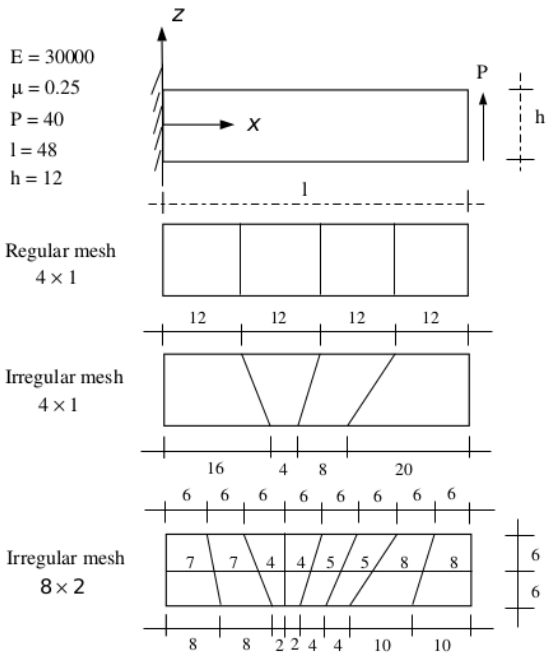
- Cook-ov test
- slobodno oslonjena ploča
- uklještena greda I profila.

Cook-ov test je karakterističan za testiranje membranskih elemenata, slobodno oslonjena ploča je standardan test za testiranje elemenata ploče, a uklještenu gredu I profila možemo gledati kao modificirani Cook-ov test za testiranje ljuski.

5.1. Cook-ov test

Testovi su vršeni na Cook-ovom testu koji je preuzet iz doktorata *Analysis and Evaluation of a Shell Finite Element with Drilling Degree of Freedom*[3].
Cook-ov test je zapravo test uklještene grede, opterećene smičnom silom u čvorovima na slobodnom kraju grede. Geometrija, sa prikazom rezultata je prikazana na slici 5.1, a geometrijske i materijalne karakteristike testa u tablici 5.2. Kao što je vidljivo na slici, uklještena greda će biti rješena za različite gustoće mreže konačnih elemenata, pravilnom i nepravilnom mrežom. Testirani su implementirani elementi za ravninsko stanje naprezanja *BasicLSRK3d*, *CSSRK3d*, te postojeći element *PlaneStress2d*. Rezultati u

usporedbi sa analitičkim rezultatima su prikazani u tablici 5.2.



Slika 5.1: Geometrija Cook-ovog testa

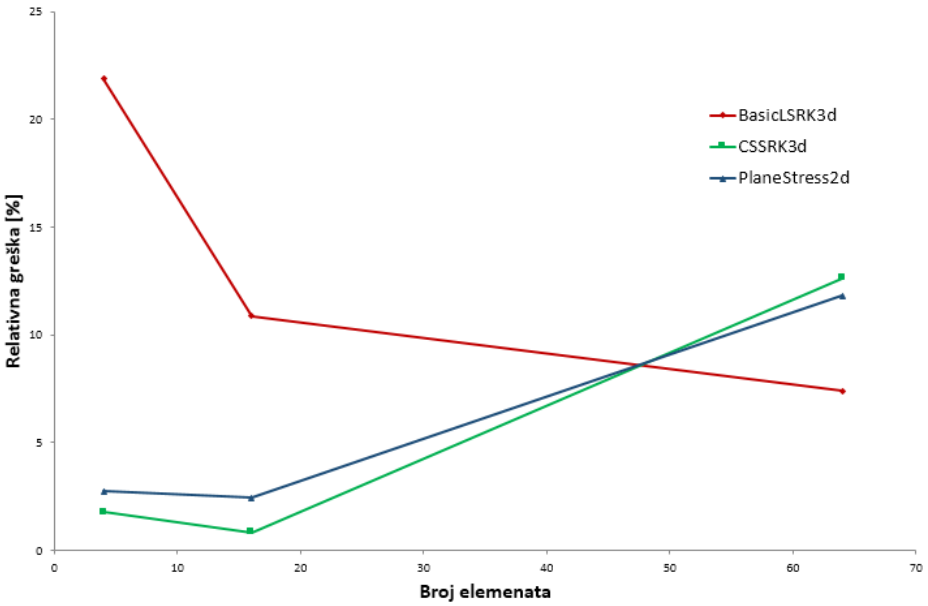
Tablica 5.1: Karakteristike Cook-ovog testa

l [m]	48
h [m]	12
E [Pa]	30000
ν	0.25
F [N]	40

Iz rezultata je vidljivo da sva tri elementa konvergiraju prema rješenju za pravilnu mrežu, s tim da je *BasicLSRK3d* najsporiji, a *CSSRK3d* najbrži, kao što je prikazano

Tablica 5.2: Progib na kraju grede

w[m]	4x1	8x2	16x4	4x1*	8x1*
Točno rješenje	0.3553	0.3553	0.3553	0.3553	0.3553
BasicLSRK3d	0.2775	0.3167	0.3816	0.0725	0.1313
Greška[%]	21.89	10.86	7.4	79.59	63.03
CSSRK3d	0.3491	0.3523	0.4001	0.0977	0.1697
Greška[%]	1.75	0.84	12.62	72.48	52.24
PlaneStress2d	0.34564	0.3467	0.3972	0.2924	0.3366
Greška[%]	2.72	2.42	11.79	17.7	5.26

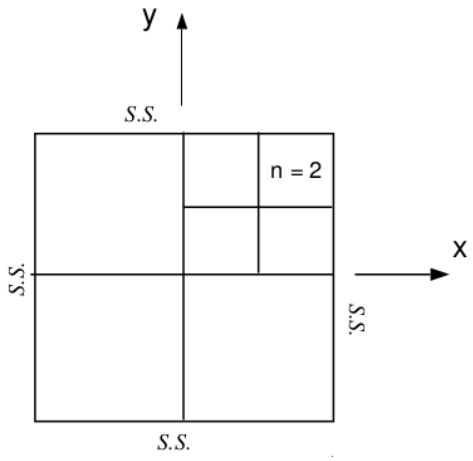


Slika 5.2: Konvergencija elemenata za ravninsko stanje naprezanja na Cook-ovom testu

na slici 5.2. Međutim, vidljivo je da sa profinjenjem mreže *BasicLSRK3d* konvergira, dok druga dva elementa odstupaju od točnog rješenja. Za bolju analizu konvergencije potrebno je model diskretizirati sa još finijom mrežom. Rezultate za nepravilnu mrežu označava (*), a za nju najbolje rezultate daje *PlaneStress2d* element, a najlošije *BasicLSRK3d*. Najboljim elementom se pokazao *PlaneStress2d*, prema rezultatima za pravilnu i nepravilnu mrežu.

5.2. Slobodno oslonjena ploča

Jedan od standardnih testova za testiranje elemenata ploče je test slobodno oslonjene kvadratne ploče opterećene koncentriranom silom, kao što je prikazano u knjizi *Metoda konačnih elemenata*[9] i doktoratu *Analysis and Evaluation of a Shell Finite Element with Drilling Degree of Freedom* [3]. Na slici 5.3 je prikazana geometrija ploče, a u tablici 5.3 su prikazane geometrijske i materijalne karakteristike ploče te iznos opterećenja u središtu. Kako se radi o simetričnoj ploči, testira se samo četvrtina ploče sa pripadnim



Slika 5.3: Slobodno oslonjena ploča[3]

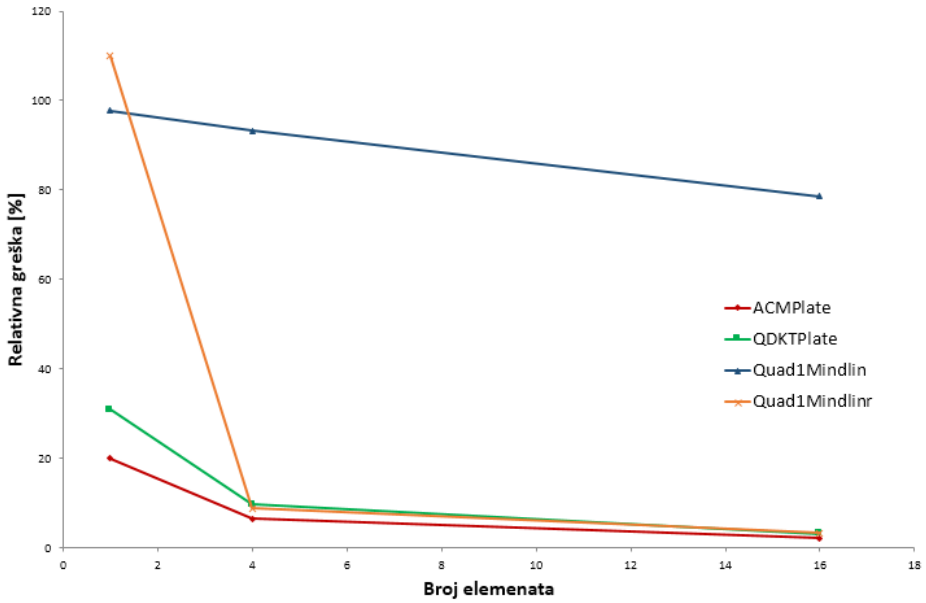
Tablica 5.3: Karakteristike problema slobodno oslonjene ploče

l [mm]	200
h [mm]	5
E [GPa]	210
ν	0.29
F [N]	10000

opterećenjem i rubnim uvjetima simetrije. Točno rješenje progiba u središtu ploče je w=1.94 mm[9].

Na ovome testu pokazana je konvergencija elementa *ACMPlate* za različite gustoće mreže konačnih elemenata, gdje je N=1..4, gdje N predstavlja broj elemenata duž stranice ploče.

Konvergencija *ACMPlate* elementa prikazana je zajedno s konvergencijom *QDKTPlate* i *Quad1Mindlin* elementa, sa i bez reducirane integracije, na slici 5.4. Na slici je prikazana relativna greška u odnosu na točnu vrijednost progiba u središtu ploče. Iz slike je vidljivo da *ACMPlate* brže i točnije konvergira ka točnoj vrijednosti progiba od *QDKTPlate* elementa, dok je *Quad1Mindlin* element daleko od točnog rješenja, no ako se upotrijebi reducirana integracija vrlo brzo se ponaša kao *QDKTPlate*.

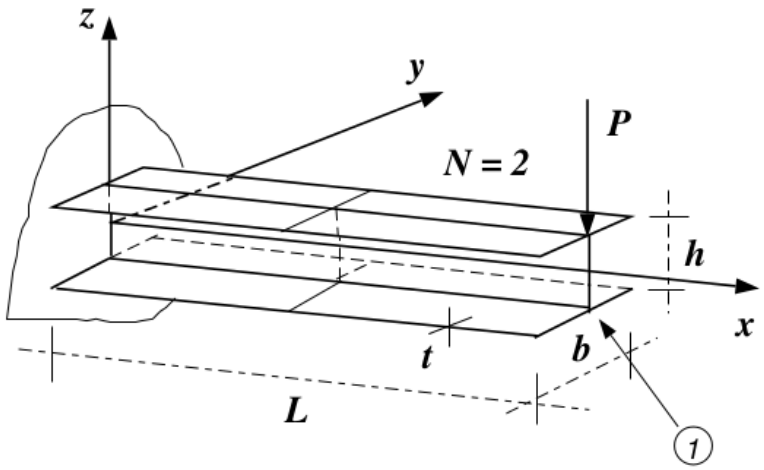


Slika 5.4: Konvergencija *ACMPlate*, *QDKTPlate* i *Quad1Mindlin* na primjeru slobodno oslonjene ploče

5.3. Uklještena greda I profila

Sljedeći test koji nam je zanimljiv je uklještena greda I profila[3], prikazan na slici 5.5. Greda I profila je na jednom kraju uklještena, a na slobodnom kraju je opterećena koncentriranom silom. Geometrija problema je prikazana na slici 5.5, a geometrijske

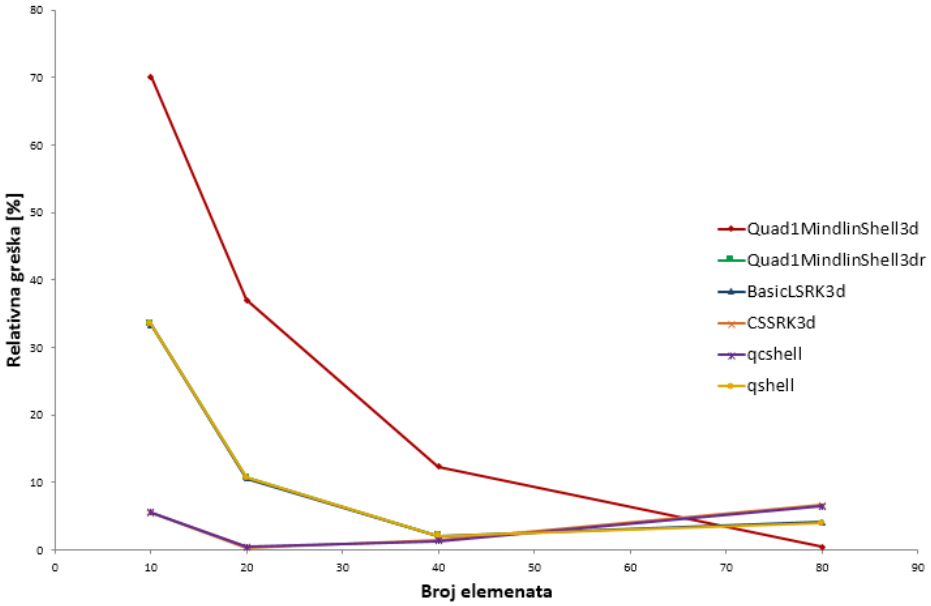
i materijalne karakteristike su dane u tablici 5.5. Na testu uklještene grede I profila testirani su implementirani elementi za ravninsko stanje naprezanja *BasicLSRK3d*, *CSSRK3d*, te elementi ljuske *qshell*, *qcshell*, te postojeći element *Quad1MindlinShell3d*. Dobiveni su iznosi progiba za različitu gustoću mreže, N=1..16, gdje N opisuje povećanje mreže duž x osi, te su uspoređeni sa točnom vrijednošću.



Slika 5.5: Geometrija uklještene grede I profila[3]

Tablica 5.4: Karakteristike problema uklještene grede I profila

l [m]	1.016
b [m]	0.254
h [m]	0.127
t [m]	$6.35 * 10^{-3}$
E [GPa]	689.7457
ν	0.3
F [N]	1779.288



Slika 5.6: Konvergencija elemenata za ravninsko stanje naprezanja i elemenata ljuske na primjeru uklještene grede I profila

Na slici 5.6 prikazana je relativna greška progiba na slobodnom kraju grede za elemente za ravnisko stanje naprezanja i elemente ljuske. Međutim ovaj dijagram se ne može smatrati pravim dijagramom konvergencije, jer je mreža konačnih elemenata profinjavana samo duž x-osi, pa odnos stranica elementa nije povoljan, što može utjecati na rezultate. Prikazani rezultati pokazuju ono što se moglo očekivati, implementirane ljuske imaju bržu konvergenciju od *Quad1MindlinShell3d* elementa. Isti element sa reduciranom integracijom, pokazuje identično ponašanje kao *qshell* odnosno *BasicLSRK3d*. Ta dva elementa, slično kao i *qcshell* i *CSSRK3d* pokazuju identično ponašanje, iz razloga što je u ovom testu dominantno membransko ponašanje struka I profila, a samim time značajan utjecaj imaju članovi matrice krutosti vezani za 1. i 2. stupanj slobode. Obzirom da su ti članovi u matrice krutosti pojedine ljuske preuzeti iz pripadnog elementa za ravninsko stanje naprezanja, njihovo ponašanje je identično.

6 Model konstrukcije krila zrakoplova

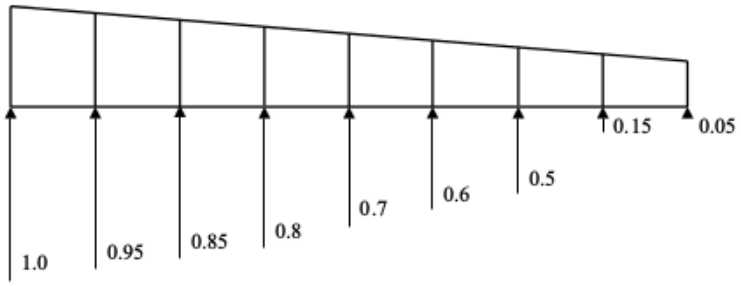
U ovom poglavlju će na jednostavnom modelu konstrukcije krila zrakoplova biti izvršena usporedba rezultata dobivenih korištenjem programa OOFEM i Nastran. Model konstrukcije krila je dimenzioniran i opterećen prema članku *Multidisciplinary Optimization of a Transport Aircraft Wing using Particle Swarm Optimization*[12].
Referentno krilo predstavlja tipično krilo transportnog zrakoplova klase Boeing 767[12], a njegove generalne dimenzije su dane u tablici 6.1. Korištenjem prvog načina modeliranja panela krila, prema slici 6.3, modelirano je krilo bez uzdužnica. Krilo je modelirano sa 3 ramenjače i 9 rebara, a umjesto modeliranja uzdužnica korišteno je načelo razmazivanja uzdužnica na panele[13], odnosno povećanje debljine oplate, bez modeliranja uzdužnica. Debljina svih dijelova krila je 10 mm. Testirana su dva modela krila, pravokutno i trapezno krilo, sa 3 gustoće mreže konačnih elemenata, kako bi se vidio utjecaj nepravilnosti mreže konačnih elemenata na trapeznom krilu na rezultate. Krilo je opterećeno prema silama koje su definirane u članku[12], prema formuli i rasporedu sila po rasponu, slika 6.1, te rasporedu sila po tetivi, slika 6.2. Sile koje djeluju na napadnom i izlaznom rubu krila zamijenjene su ekvivalentnim momentima koji djeluju na pozicijama prednje i stražnje ramenjače. Razlog tomu je što je modelirano krilo između prednje i stražnje ramenjače, tzv. torzijska kutija krila.
Provedene su linearno statičke analize koristeći programe Nastran i OOFEM. Za analize u Nastran-u korišteni su elementi *CQUAD4* i *CQUADR*, a za analize u OOFEM-u korišteni su prethodno implementirani elementi ljuske *qshell* i *qcshell*, te već postojeći element OOFEM-a *Quad1MindlinShell3d*, bez i sa upotrebom reducirane integracije.

Tablica 6.1: Dimenzije referentnog krila

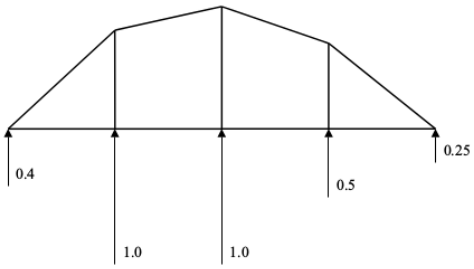
$b_{ref}[m]$	36.576
$S_{ref}[m^2]$	195.0964
c_t/c_r	0.4
$(t/c)_{ref}$	0.12
AR	6.8571

$F_{i,j} = C_f LP_j CP_i S_{i,j}$[12]

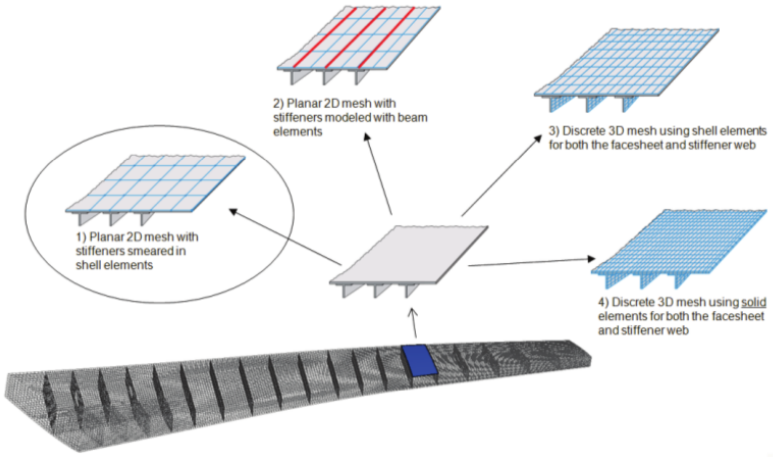
Formula predstavlja izračun čvornih sila, kao posljedicu aerodinamičkog tlaka, gdje i predstavlja čvor, a j tetivu na kojoj se nalazi. C_f je opterećenje krila, LP_j raspored tlaka po rasponu, slika 6.1, CP_i je raspored tlaka po tetivi,slika 6.2, a $S_{i,j}$ površina pridružena svakom čvoru.



Slika 6.1: Normalizirane sile duž raspona krila[12]



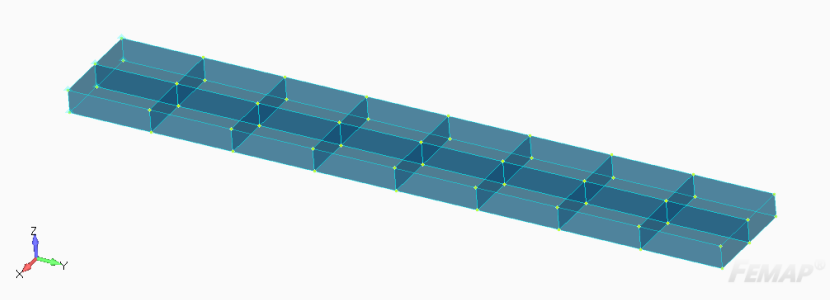
Slika 6.2: Normalizirane sile duž tetive[12]



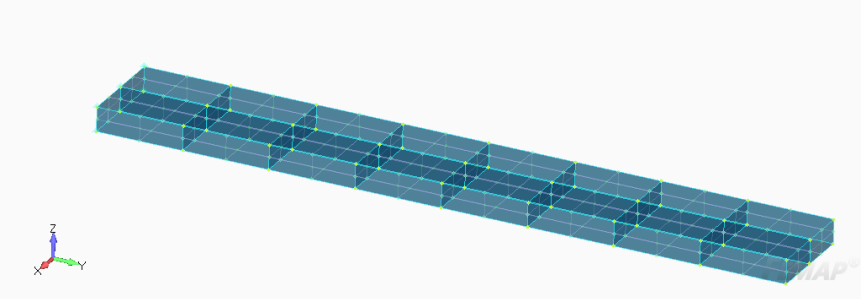
Slika 6.3: Tehnike modeliranja panela zrakoplova[13]

6.1. Pravokutno krilo

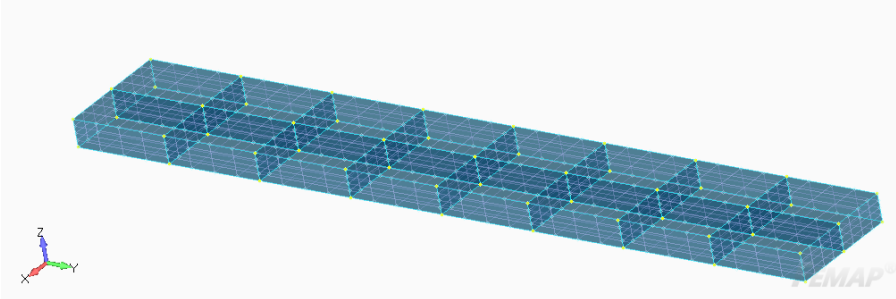
Pravokutno krilo je modelirano sa 3 različite gustoće mreže, prikazane na slikama 6.4, 6.5, 6.6.



Slika 6.4: Pravokutno krilo prva gustoća mreže konačnih elemenata



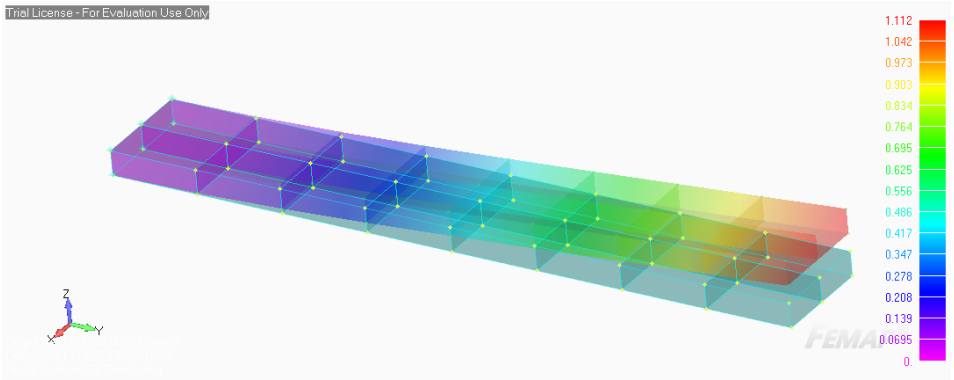
Slika 6.5: Pravokutno krilo druga gustoća mreže konačnih elemenata



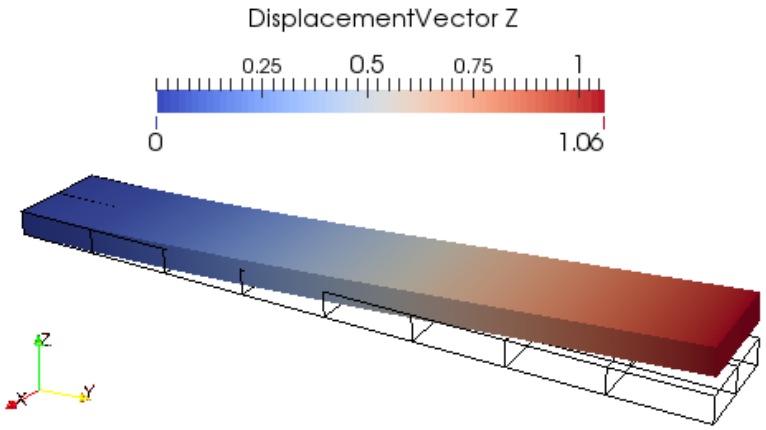
Slika 6.6: Pravokutno krilo treća gustoća mreže konačnih elemenata

6.1.1. Prva gustoća mreže konačnih elemenata

Na slikama 6.7 i 6.8 su prikazani rezultati analiza u Nastran-u i OOFEM-u. U tablici 6.2 su dani rezultati pomaka u smjeru z-osi u čvoru na poziciji dodira srednje ramenjače i gornjake krila, na slobodnom kraju krila.



Slika 6.7: Pravokutno krilo u Nastran-u



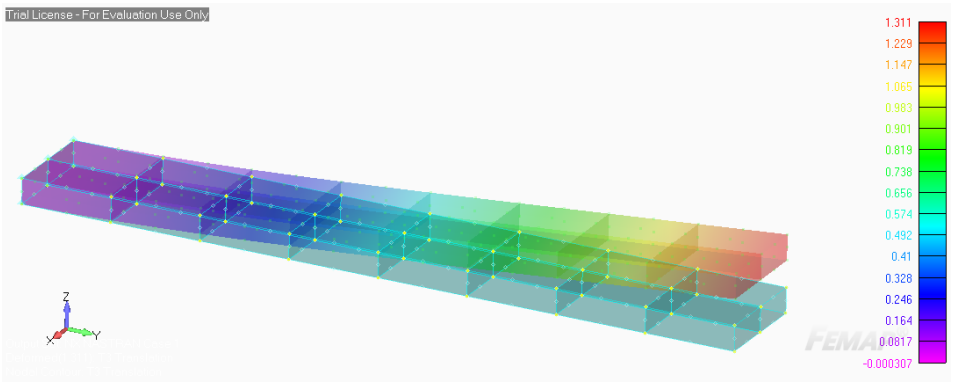
Slika 6.8: Pravokutno krilo u OOFEM-u

Tablica 6.2: Usporedba rezultata za različite elemente

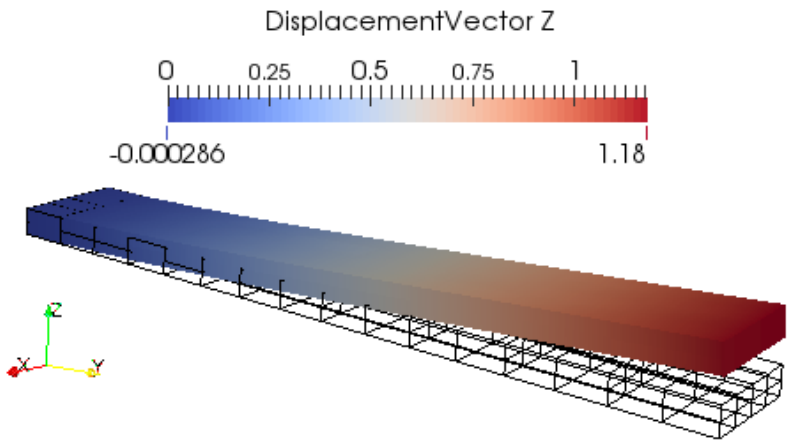
	$w[m]$
CQUAD4	1.1052
CQUADR	1.1061
qshell	0.7053
qcshell	1.0582
Quad1MindlinShell3d	0.4095
Quad1MindlinShell3d r.i.	0.7268

6.1.2. Druga gustoća mreže konačnih elemenata

Na slikama 6.9 i 6.10 su prikazani rezultati analiza u Nastran-u i OOFEM-u. U tablici 6.3 su dani rezultati pomaka u smjeru z-osi u čvoru na poziciji dodira srednje ramenjače i gornjake krila, na slobodnom kraju krila.



Slika 6.9: Pravokutno krilo u Nastran-u



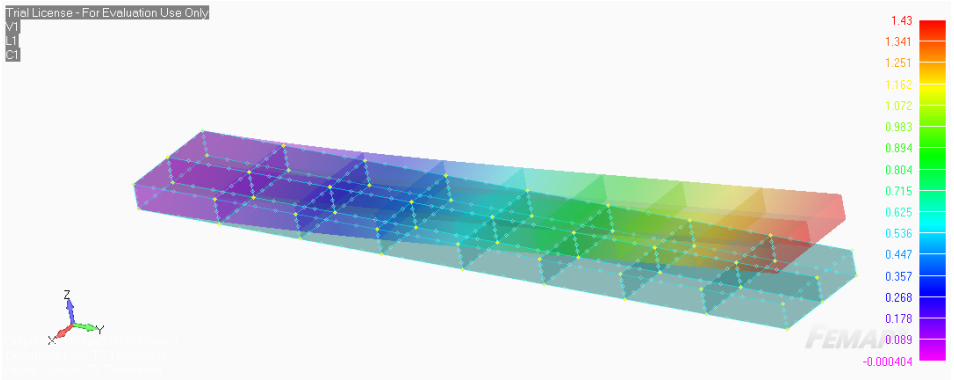
Slika 6.10: Pravokutno krilo u OOFEM-u

Tablica 6.3: Usporedba rezultata za različite elemente

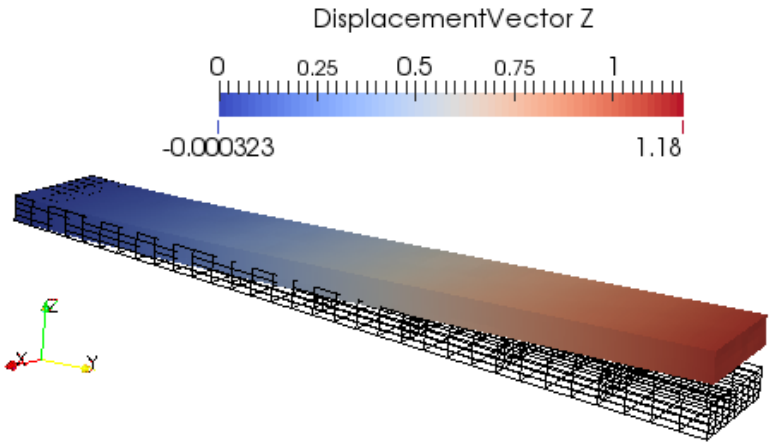
	$w[m]$
CQUAD4	1.3047
CQUADR	1.2759
qshell	0.9661
qcshell	1.1742
Quad1MindlinShell3d	0.8642
Quad1MindlinShell3d r.i.	1.0748

6.1.3. Treća gustoća mreže konačnih elemenata

Na slikama 6.11 i 6.12 su prikazani rezultati analiza u Nastran-u i OOFEM-u. U tablici 6.8 su dani rezultati pomaka u smjeru z-osi u čvoru na poziciji dodira srednje ramenjače i gornjake krila, na slobodnom kraju krila.



Slika 6.11: Pravokutno krilo u Nastran-u



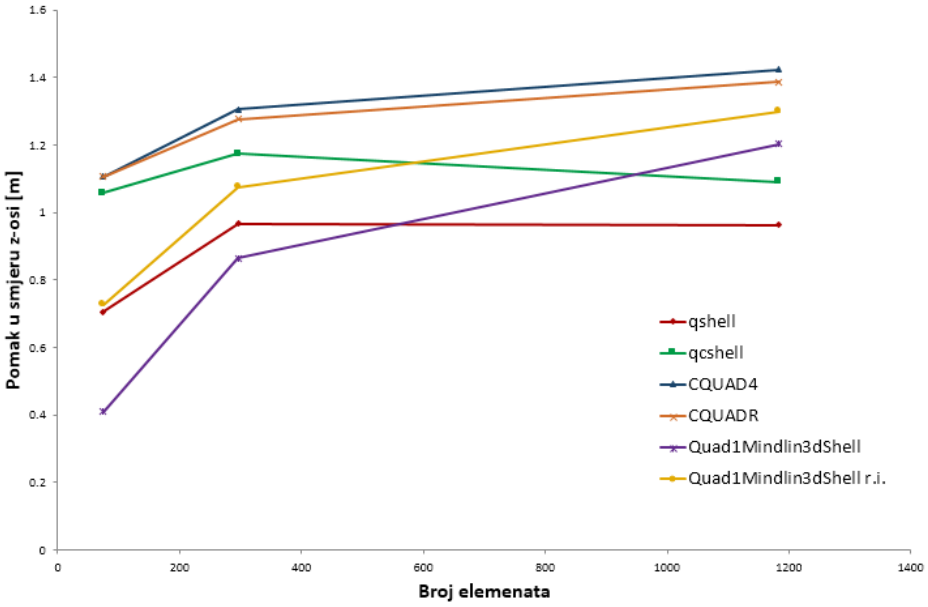
Slika 6.12: Pravokutno krilo u OOFEM-u

Tablica 6.4: Usporedba rezultata za različite elemente

	$w[m]$
CQUAD4	1.4234
CQUADR	1.3863
qshell	0.9635
qcshell	1.0908
Quad1MindlinShell3d	1.2025
Quad1MindlinShell3d r.i.	1.2994

6.1.4. Rezultati

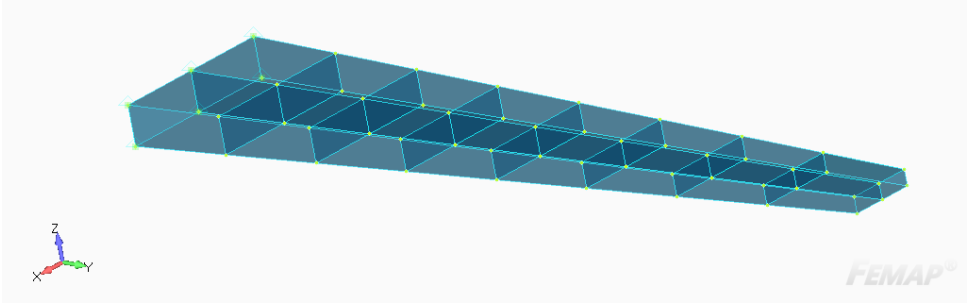
Na slici 6.13 prikazana je konvergencija prethodno navedenih elemenata za 3 gustoće mreže konačnih elemenata, na modelu pravokutnog krila. Iz rezultata je vidljivo da za element *qcshell* za najgrublju razinu mreže daje rezultate bliske elementima iz Nastran-a. Međutim, kako se mreža profinjuje, razlika se povećava. Element *qshell* za najgrublju mrežu daje loše rezultate, naspram *qcshell* elementa, što je posljedica članova matrice krutosti od LSR elementa, odnosno CSSR elementa. Element *Quad1MindlinShell3d* sa profinjanvanjem gustoće mreže se približava vrijednostima pomaka Nastran elementa, s tim da su rezultati primjenom reducirane integracije točniji.



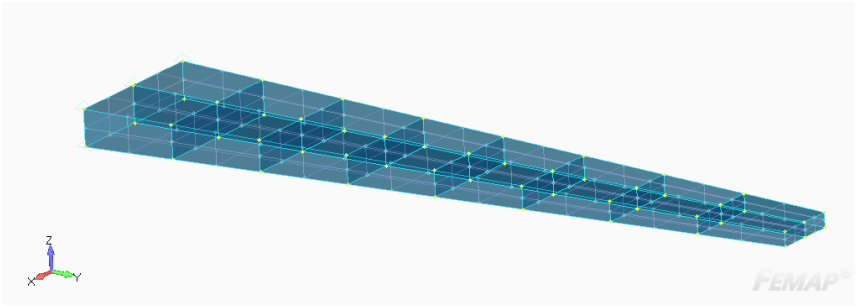
Slika 6.13: Konvergencija elemenata na pravokutnom krilu

6.2. Trapezno krilo

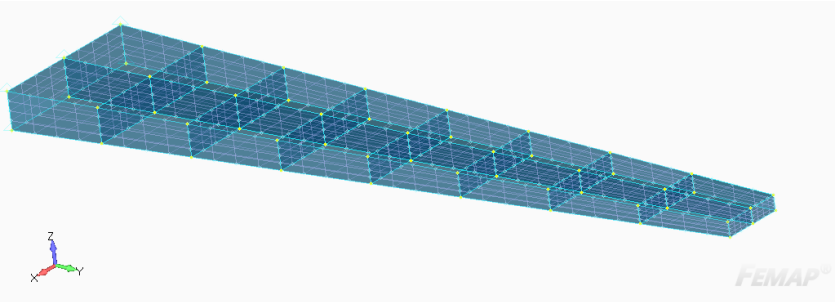
Trapezno krilo je modelirano sa 3 različite gustoće mreže, prikazane na slikama 6.14, 6.15, 6.16.



Slika 6.14: Trapezno krilo prva gustoća mreže konačnih elemenata



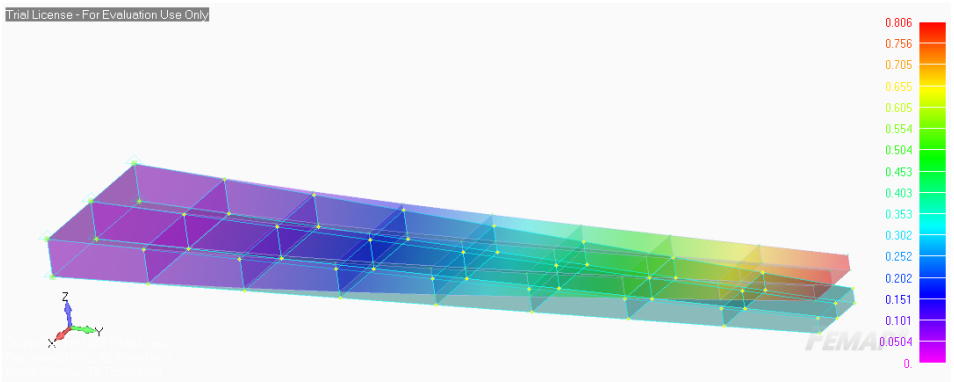
Slika 6.15: Trapezno krilo druga gustoća mreže konačnih elemenata



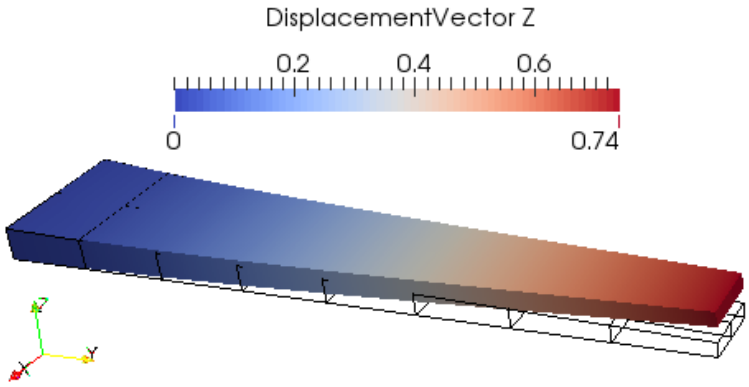
Slika 6.16: Trapezno krilo treća gustoća mreže konačnih elemenata

6.2.1. Prva gustoća mreže konačnih elemenata

Na slikama 6.17 i 6.18 su prikazani rezultati analiza u Nastran-u i OOFEM-u. U tablici 6.5 su dani rezultati pomaka u smjeru z-osi u čvoru na poziciji dodira srednje ramenjače i gornjake krila, na slobodnom kraju krila.



Slika 6.17: Trapezno krilo u Nastran-u



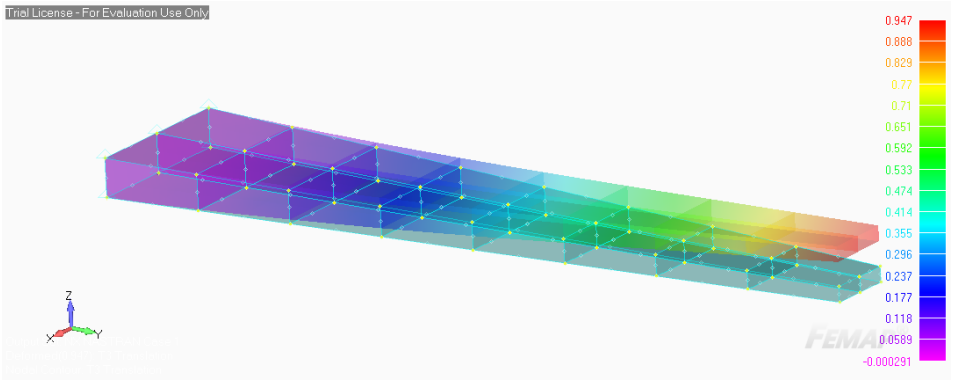
Slika 6.18: Trapezno krilo u OOFEM-u

Tablica 6.5: Usporedba rezultata za različite elemente

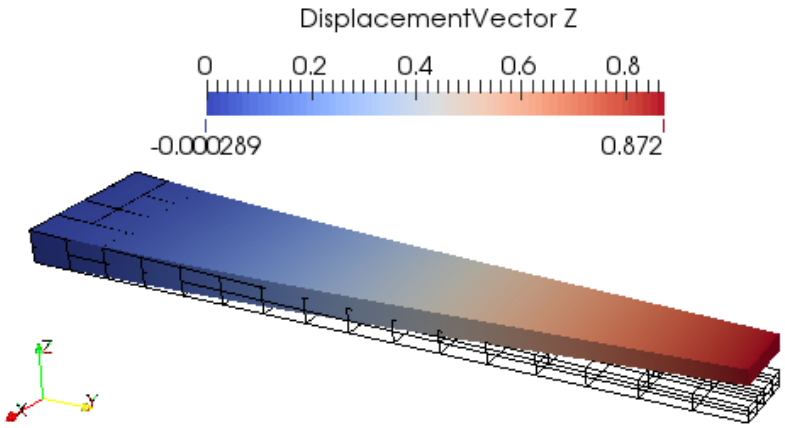
	$w[m]$
CQUAD4	0.7995
CQUADR	0.8049
qshell	0.6095
qcshell	0.7364
Quad1MindlinShell3d	0.3716
Quad1MindlinShell3d r.i.	0.5867

6.2.2. Druga gustoća mreže konačnih elemenata

Na slikama 6.19 i 6.20 su prikazani rezultati analiza u Nastran-u i OOFEM-u. U tablici 6.6 su dani rezultati pomaka u smjeru z-osi u čvoru na poziciji dodira srednje ramenjače i gornjake krila, na slobodnom kraju krila.



Slika 6.19: Trapezno krilo u Nastran-u



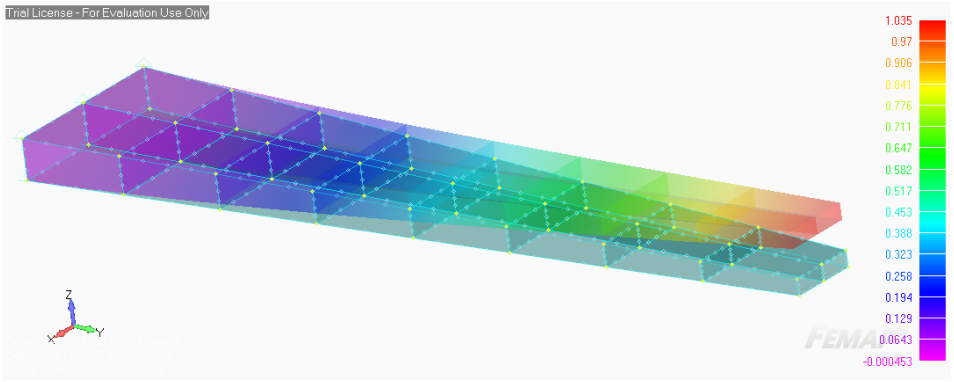
Slika 6.20: Trapezno krilo u OOFEM-u

Tablica 6.6: Usporedba rezultata za različite elemente

	$w[m]$
CQUAD4	0.9406
CQUADR	0.9265
qshell	0.7784
qcshell	0.8664
Quad1MindlinShell3d	0.6936
Quad1MindlinShell3d r.i.	0.6936

6.2.3. Treća gustoća mreže konačnih elemenata

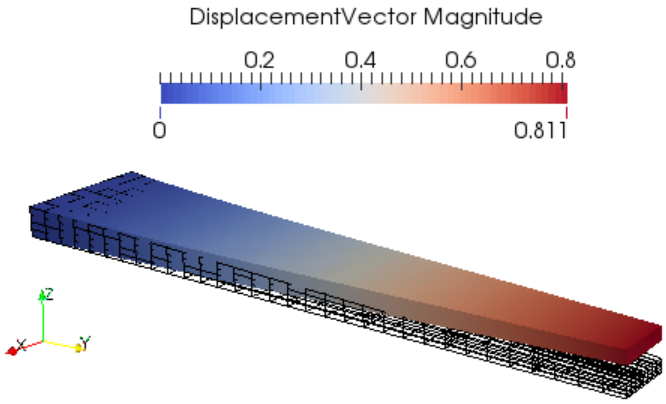
Na slikama 6.21 i 6.22 su prikazani rezultati analiza u Nastran-u i OOFEM-u. U tablici 6.9 su dani rezultati pomaka u smjeru z-osi u čvoru na poziciji dodira srednje ramenjače i gornjake krila, na slobodnom kraju krila.



Slika 6.21: Trapezno krilo u Nastran-u

Tablica 6.7: Usporedba rezultata za različite elemente

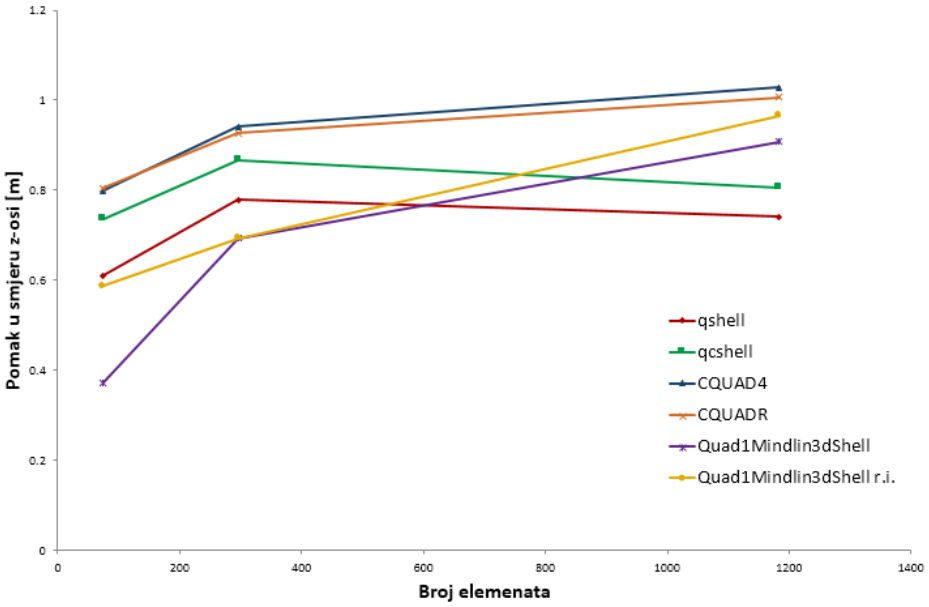
	$w[m]$
CQUAD4	1.0281
CQUADR	1.0061
qshell	0.7403
qcshell	0.8057
Quad1MindlinShell3d	0.9082
Quad1MindlinShell3d r.i.	0.9655



Slika 6.22: Trapezno krilo u OOFEM-u

6.2.4. Rezultati

Na slici 6.23 prikazana je konvergencija prethodno navedenih elemenata za 3 gustoće mreže konačnih elemenata, na modelu trapeznog krila. Iz rezultata je vidljivo da za element *qcshell* za najgrublju razinu mreže daje rezultate bliske elementima iz Nastran-a. Međutim, kako se mreža profinjuje, razlika se povećava. Element *qshell* za najgrublju mrežu daje lošije rezultate, naspram *qcshell* elementa, što je posljedica članova matrice krutosti od LSR elementa, odnosno CSSR elementa. Element *Quad1MindlinShell3d* sa profinjanvanjem gustoće mreže se približava vrijednostima pomaka Nastran elemenata, s tim da su rezultati primjenom reducirane integracije točniji.



Slika 6.23: Konvergencija elemenata na trapeznom krilu

6.3. Analiza rezultata dodatnog slučaja opterećenja

Kako bi se otkrio uzrok ovakvih rezultata implementiranih elemenata ljuske, na istim modelima zrakoplova, pravokutnom i trapeznom krilu, uz promjenu opterećenja testirani su implementirani elementi za ravninsko stanje naprezanja *BasicLSRK3d* i *CSSRK3d*. Opterećenje je mijenjano na način da su zanemareni momenti koji djeluju na prednju i stražnju ramenjaču, iz razloga što ove elemente ne možemo opteretiti momentima, jer nemaju potrebne stupnjeve slobode. Zbog toga su sa tim, novim opterećenjem provedeni proračuni za elemente u Nastran-u , te za elemente implementirane u ovom radu. Rezultati pomaka u smjeru osi z, na poziciji spoja srednje ramenjače i gornjake, su dane u tablicama 6.8 i 6.9, a na slikama 6.24 i 6.25 je dana konvergencija pomaka za sve elemente.

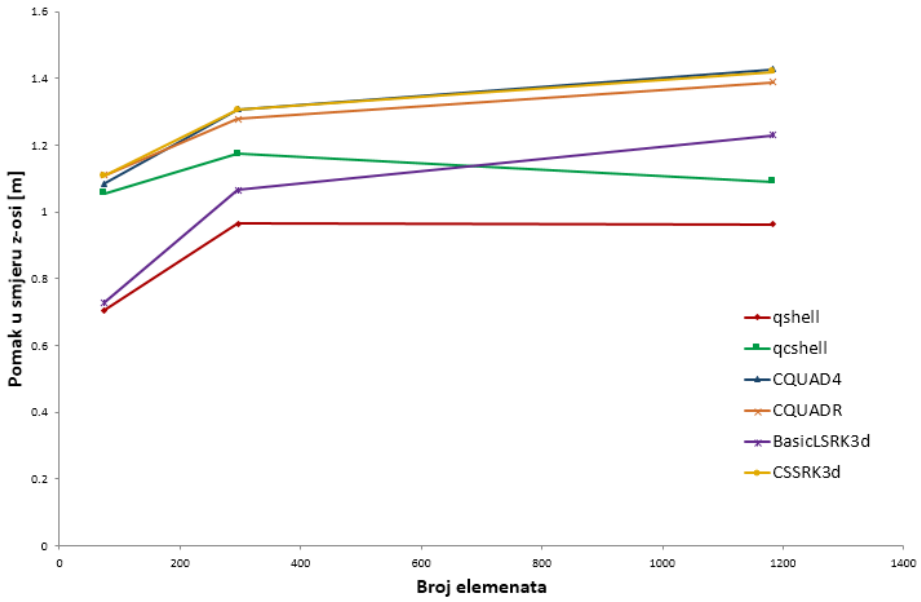
Tablica 6.8: Usporedba rezultata za različite elemente i različite gustoće mreže na pravokutnom krilu

	1. MREŽA	2. MREŽA	3.MREŽA
	$w[m]$	$w[m]$	$w[m]$
CQUAD4	1.1084	1.3073	1.4265
CQUADR	1.1094	1.2789	1.3892
qshell	0.7045	0.9653	0.9627
qcshell	1.0564	1.1728	1.0896
BasicLSRK3d	0.7293	1.0649	1.2307
CSSRK3d	1.1078	1.3057	1.4196

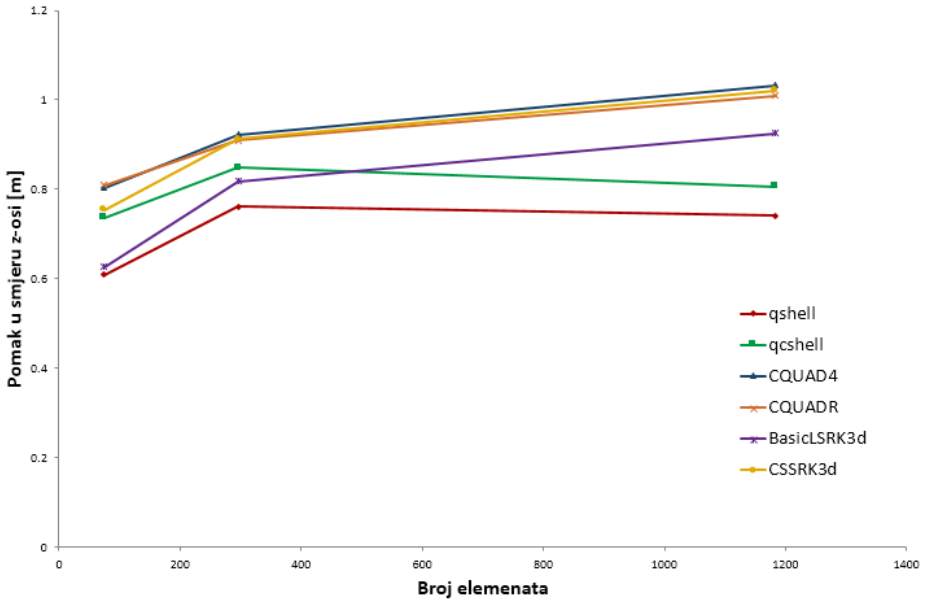
Tablica 6.9: Usporedba rezultata za različite elemente i različite gustoće mreže na trapeznom krilu

	1. MREŽA	2. MREŽA	3.MREŽA
	$w[m]$	$w[m]$	$w[m]$
CQUAD4	0.8034	0.9227	1.032
CQUADR	0.8091	0.9097	1.0095
qshell	0.6092	0.7616	0.7405
qcshell	0.7365	0.8478	0.8057
BasicLSRK3d	0.6256	0.8177	0.9249
CSSRK3d	0.7539	0.9125	1.0209

Iz rezultata je vidljivo, da za razliku od implementiranih ljuski, implementirani elementi za ravninsko stanje naprezanja konvergiraju ka rezultatima elemenata iz Nastran-a. *CSSRK3d* konvergira brže, kao što je već pokazano. Obzirom da je razlika između elemenata broj stupnjeva slobode, dakle različite matrice krutosti, možemo zaključiti, obzirom da se radi o problemu u kojem je dominantno membransko ponašanje elemenata ljuske, da je problem u krutosti vezanoj za stupanj slobode 3. Očigledno je krutost vezana za



Slika 6.24: Konvergencija elemenata na pravokutnom krilu



Slika 6.25: Konvergencija elemenata na trapeznom krilu

stupanj slobode 3, u matrici krutosti ljuske, ono što utječe na odstupanje rezultata za implementirane ljuske.

7 Zaključak

OOFEM kao program otvorenog koda je jednostavan za korištenje i proširivanje. Trenutno stanje implementiranih elemenata i njihove mogućnosti sugeriraju da je program u razvoju. Međutim, jednostavnost implementacije novih elemenata, vrste analiza koje su omogućene, problemi koji se s programom mogu rješavati, te kvalitetna podrška korisnika su prednost ovog programa.

Elementi implementirani u ovom radu su pokazali različito ponašanje. Elementi za ravninsko stanje naprezanja, koji su implementirani prema školskim, udžbeničkim primjerima, pokazali su dobre rezultate. Naime, njihova mogućnost korištenja u sve 3 ravnine, proizvoljno u prostoru, kao i 3(2+1) stupnja slobode, nadmašuju postojeće stanje elemenata za ravninsko stanje naprezanja. Prikaz konvergencije elemenata na različitim primjerima, pokazuje bržu konvergenciju CSSR elementa, no potrebno je testirati elemente na finijim mrežama kako bi se utvrdio pravi karakter ponašanja elementa. Element ploče implementiran u ovom radu pokazuje bolje rezultate, tj. bržu konvergenciju od postojećih elemenata ploče u OOFEM-u. Elementi ljuske implementirani u ovom radu, nastali spajanjem elemenata za ravninsko stanje naprezanja i ploče, nisu pratili rezultate ljuski iz Nastran-a. Uzrok tome može biti netočnost aproksimacije konstrukcije primjenom razmazivanja uzdužnica po panelima, no prema usporednim rezultatima sa elementima za ravninsko stanje naprezanja, riječ je o prevelikoj krutosti za stupanj slobode 3. Očigledno ona ima prevelik utjecaj na pomake, tj. na membransko ponašanje elementa.

Budući rad na unaprijeđenju funkcionalnosti OOFEM- a za analizu zrakoplovnih konstrukcija mogao bi obuhvatiti sljedeće aktivnosti koje zbog ograničenog vremena izrade

nisu mogle biti obuhvaćene u ovom diplomskom radu:

- implementacija linijskih opterećenja
- implementacija površinskih opterećenja
- implementacija opterećenja vlastitom težinom
- implementacija četverokutnih (*quadrilateral*) elemenata ljuske karakteristika sličnih Nastran-ovom CQUADR elementu.

Literatura

[1] B. Patzák and Z. Bittnar. Design of object oriented finite element code. *Advances in Engineering Software*, 32(10-11):759–767, 2001.

[2] B. Patzák. Oofem element library manual. http://www.oofem.org, 2014.

[3] Lanheng Jin. Analysis and evaluation of a shell finite element with drilling degree of freedom. Master's thesis, Department of Civil Engineering and Institute for System Research University of Maryland at College Park, 1994.

[4] Inc. Optimum Structural Design. Maestro manual. 2012.

[5] B. Patzák. OOFEM home page. http://www.oofem.org, 2000.

[6] B. Patzák. Input data format specification. http://www.oofem.org, 2014.

[7] B. Patzák. Material model library manual. http://www.oofem.org, 2014.

[8] B. Patzák. Programmers's manual. http://www.oofem.org, 2014.

[9] Jurica Sorić. *Metoda konačnih elemenata*. Golden marketing-Tehnička knjiga, 2004.

[10] O.F. Hughes and J.K.Paik. *Ship Structural Design and Analysis*. Wiley, SNAME, 2010. (Chapter 7).

[11] Robert D. Cook. *Finite Element Modeling for Stress Analysis*. Wiley, 1995.

[12] Gerhard Venter and Jaroslaw Sobieszczanski-Sobieski. Multidisciplinary optimization of a transport aircraft wing using particle swarm optimization. *American Institute of Aeronautics and Astronautics*, 2002.

[13] Phil Yarrington Ryan Lucking James Ainsworth, Craig Collier and Collier Research Corp. James Locke. *Airframe Wingbox Preliminary Design and Weight Prediction*. Society of Allied Weight Engineers, 2010.