

# Algebarske metode estimacije stanja autonomne letjelice primjenom akcelerometra

---

Markučič, Joško

Master's thesis / Diplomski rad

2018

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:235:644428>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-04-02**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# **DIPLOMSKI RAD**

**Joško Markučić**

Zagreb, 2018.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# DIPLOMSKI RAD

*Mentor:*

Prof. dr. sc. Josip Kasać

*Student:*

Joško Markučić

Zagreb, 2018.

*Izjavljujem da sam ovaj rad izradio samostalno koristeći znanja stečena tijekom studija i navedenu literaturu.*

*Posebno se zahvaljujem mentoru prof. dr. sc. Josipu Kasaću na pruženom mentorstvu, korisnim savjetima, diskusijama i primjedbama te motivaciji i susretljivosti tijekom pisanja ovog rada.*

*Također zahvaljujem obitelji i djevojci Andrei na pruženoj potpori tijekom studija.*

*Joško Markučić*



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE



Središnje povjerenstvo za završne i diplomske ispite  
Povjerenstvo za diplomske radove studija strojarstva za smjerove:  
proizvodno inženjerstvo, računalno inženjerstvo, industrijsko inženjerstvo i menadžment,  
inženjerstvo materijala te mehatronika i robotika

Sveučilište u Zagrebu Fakultet strojarstva i brodogradnje	
Datum:	Prilog:
Klasa:	
Ur. broj:	

## DIPLOMSKI ZADATAK

Student: **JOŠKO MARKUČIĆ** Mat. br.: 0035185765

Naslov rada na hrvatskom jeziku: **Algebarske metode estimacije stanja autonomne letjelice primjenom akcelerometra**

Naslov rada na engleskom jeziku: **Algebraic methods for state estimation of unmanned aerial vehicles by using accelerometer**

Opis zadatka:

Autonomne letjelice opisane su dinamičkim modelima s dvanaest varijabli stanja od kojih linearne i kutne brzine obično nisu direktno mjerljive. S ciljem sinteze regulacijskog sustava letjelice, navedene brzine trebaju biti estimirane u realnom vremenu na temelju mjerljivih stanja sustava. Kod autonomnih letjelica najčešće su mjerljive pozicija ili akceleracija. Osnovni cilj ovog rada je primjena algebarskih metoda za estimaciju brzina i pozicija letjelice na temelju mjerenja akceleracije. Pretpostavka je da postoji konstantna nepoznata pogreška u mjerenju akceleracije.

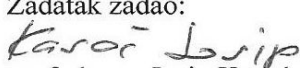
U radu je potrebno:

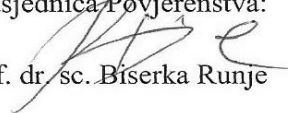
1. Implementirati konvencionalnu algebarsku metodu estimacije brzine i pozicije na temelju mjerenja akceleracije.
2. Analizirati stabilnost i robusnost konvencionalne algebarske metode u slučaju pogreške mjerenja akceleracije.
3. Izvesti i implementirati algebarsku metodu estimacije stanja primjenom metode frekvencijskog pomaka.
4. Provesti komparativnu analizu performansi konvencionalnog i predloženog algebarskog estimatora stanja.
5. Algebarsku metodu estimacije stanja primjenom metode frekvencijskog pomaka primijeniti u sintezi regulatora autonomne letjelice za problem slijeđenja proizvoljne referentne trajektorije.
6. Zaključak.

Zadatak zadan:  
03. svibnja 2018.

Rok predaje rada:  
05. srpnja 2018.

Predvideni datum obrane:  
11. srpnja 2018.  
12. srpnja 2018.  
13. srpnja 2018.

Zadatak zadao:  
  
prof. dr. sc. Josip Kasac

Predsjednica Povjerenstva:  
  
prof. dr. sc. Biserka Runje

# Sadržaj

<b>Popis slika</b>	<b>III</b>
<b>Sažetak</b>	<b>IV</b>
<b>Summary</b>	<b>V</b>
<b>1 Uvod</b>	<b>1</b>
<b>2 Matematički model multirotorske letjelice</b>	<b>3</b>
2.1 Model hexarotora . . . . .	3
2.2 Šum i drift mjerenog signala . . . . .	4
<b>3 Algebarska metoda estimacije varijabli stanja</b>	<b>5</b>
3.1 Algebarska metoda estimacije stanja . . . . .	5
3.2 Rezultati simulacije . . . . .	10
3.2.1 Mjerenje izlaza bez šuma . . . . .	11
3.2.2 Mjerenje izlaza sa šumom . . . . .	12
3.2.3 Mjerenje izlaza sa šumom i driftom . . . . .	13
3.3 Zaključak . . . . .	14
<b>4 Asimptotska estimacija drifta akcelerometra</b>	<b>16</b>
4.1 Estimacija drifta akcelerometra . . . . .	16
4.2 Estimacija varijabli stanja . . . . .	17
4.3 Zakon upravljanja . . . . .	19
4.4 Rezultati simulacija . . . . .	20
4.4.1 Parametri simulacije . . . . .	20
4.4.2 Mjerenje akceleracije bez šuma . . . . .	20
4.4.3 Mjerenje akceleracije sa šumom . . . . .	21
4.4.4 Mjerenje akceleracije s jakim šumom . . . . .	23
4.5 Zaključak . . . . .	25
<b>5 Asimptotska estimacija vanjskog poremećaja</b>	<b>26</b>
5.1 Estimacija vanjskog poremećaja . . . . .	26
5.1.1 Estimacija sustavom prvog reda . . . . .	26
5.1.2 Estimacija sustavom drugog reda . . . . .	27
5.2 Rezultati simulacija . . . . .	30
5.2.1 Parametri simulacije . . . . .	30
5.2.2 Mjerenje akceleracije bez šuma . . . . .	30
5.2.3 Mjerenje akceleracije sa šumom . . . . .	33

---

5.3	Zaključak . . . . .	36
<b>6</b>	<b>Algebarska metoda korištenjem metode frekvencijskog pomaka</b>	<b>37</b>
6.1	Algebarska estimacija drifta primjenom invarijantnog filtriranja . . . . .	37
6.1.1	Metoda frekvencijskog pomaka . . . . .	39
6.1.2	Estimacija drifta akcelerometra . . . . .	40
6.2	Estimacija varijabli stanja . . . . .	42
6.3	Rezultati simulacija . . . . .	43
6.3.1	Parametri simulacije . . . . .	43
6.3.2	Mjerenje bez šuma . . . . .	43
6.3.3	Mjerenje sa šumom . . . . .	45
6.4	Zaključak . . . . .	46
<b>7</b>	<b>Zaključak</b>	<b>47</b>
	<b>Literatura</b>	<b>49</b>

## Popis slika

2.1	Potpuno upravljivi hexarotor [6] . . . . .	3
3.1	Algebarska estimacija varijabli stanja bez utjecaja šuma . . . . .	11
3.2	Algebarska estimacija stanja s utjecajem šuma . . . . .	12
3.3	Algebarska estimacija stanja s utjecajem šuma i drifta . . . . .	13
3.4	Usporedba utjecaja šuma sa driftom na algebarski estimator stanja. . . . .	14
4.1	Estimacija drifta akcelerometra bez šuma mjerenja . . . . .	21
4.2	Estimacija drifta akcelerometra sa šumom mjerenja ( $A = 2$ ) . . . . .	22
4.3	Estimacija drifta akcelerometra s jakim šumom mjerenja ( $A = 20$ ) . . . . .	24
5.1	Estimacija vanjskog poremećaja korištenjem estimatora prvog reda bez šuma mjerenja . . . . .	31
5.2	Estimacija vanjskog poremećaja korištenjem estimatora drugog reda bez šuma mjerenja . . . . .	32
5.3	Usporedba estimacije vanjskog poremećaja za estimator prvog i drugog reda . . . . .	32
5.4	Estimacija vanjskog poremećaja korištenjem estimatora prvog reda sa šumom mjerenja . . . . .	34
5.5	Estimacija vanjskog poremećaja korištenjem estimatora drugog reda sa šumom mjerenja . . . . .	35
6.1	Estimacija drifta metodom frekvencijskog pomaka bez utjecaja šuma . . . . .	44
6.2	Estimacija drifta metodom frekvencijskog pomaka s utjecajem šuma . . . . .	45



## Sažetak

U ovom radu razmatrana je primjena algebarskih metoda estimacije stanja autonomne letjelice primjenom akcelerometra s ciljem sinteze regulacijskog sustava letjelice. Algebarske metode omogućuju robusnu identifikaciju parametara i estimaciju stanja sustava u realnom vremenu te predstavljaju potencijalnu alternativu konvencionalnom asimptotskom pristupu estimaciji varijabli stanja sustava. Algebarske metode estimacije primjenjene su na linearizirani model potpuno upravljive letjelice sa šest zakrenutih rotora, koji omogućuje potpuno decentralizirano upravljanje po svakom stupnju slobode gibanja letjelice. Pretpostavka je da je početna pozicija letjelice u ishodištu inercijalnog sustava te da postoji nepoznata konstantna pogreška mjerenja akceleracije. Korištena je konvencionalna algebarska metoda te metoda frekvencijskog pomaka za dobivanje izraza za algebarsku estimaciju drifta akcelerometra dok je za usporedbu s asimptotskom metodom korišten robusni kompenzator drifta akcelerometra.

**Ključne riječi:** algebarska metoda, metoda frekvencijskog pomaka, robusni kompenzator, drift akcelerometra, estimacija varijabli stanja, autonomna letjelica

## **Summary**

This thesis discusses application of algebraic estimation methods of autonomous aircraft by using accelerometer with the aim of forming the aircraft control system. Algebraic methods enable robust parameter identification and real-time system estimation which represent a potential alternative to a conventional asymptotic approach to system state estimation. Algebraic estimation methods were applied to a linearized model of a fully actuated aircraft with six passively tiled rotors, which allows for a fully decentralized control of each aircraft degree of freedom. The assumption is that the initial position of the aircraft is at the origin of the inertial system and that there is an unknown constant error in acceleration measurement. A conventional algebraic method and a frequency shift method were used to obtain expressions for algebraic accelerometer drift estimation, while for comparison with the asymptotic method a robust compensator of accelerometer drift was used.

**Keywords:** algebraic method, frequency shift method, robust compensator, accelerometer drift, state observer, autonomous aircraft

# 1 Uvod

Multirotorske letjelice promatramo kao kruta tijela u prostoru koja posjeduju šest stupnjeva slobode gibanja te su stoga matematički opisane dinamičkim modelima s dvanaest varijabli stanja. Varijable stanja takvog sustava multirotorske letjelice nisu u potpunosti mjerljive što znači da varijable stanja poput linearnih i kutnih brzina nisu direktno mjerljive. Za potrebe postizanja autonomnosti multirotorskih letjelica potrebno je provesti sintezu regulacijskog sustava letjelice. Za potrebe sinteze regulacijskog sustava letjelice potrebno je poznavati navedene varijable stanja brzine zbog čega je potrebno brzine estimirati u realnom vremenu na temelju mjerljivih stanja sustava.

Kod sustava multirotorskih letjelica u realnoj izvedbi uobičajeno je korištenje senzora za mjerenje akceleracije te sustava za mjerenje pozicije koji su inherentno podložni šumu i klizanju (*engl.* drift) u mjerenoj signalu. Nadalje, u slučaju mjerenja akceleracije postoji zahtjev na poravnavanje mjernih osi akcelerometra i osi letjelice koji također utječe na točnost mjerenoj signala. Također, ovisno o izvedbi, sustavi za mjerenje pozicije postižu različite razine preciznosti i razlučivosti koje su inherentno važne značajke za postizanje zadovoljavajuće točnosti sustava upravljanja ovisno o zahtjevima primjene autonomne letjelice.

Pomoću izmjerenih signala mjerljivih varijabli stanja potrebno je matematičkim putem estimirati stvarne signale ostalih, nemjerljivih, varijabli stanja. Za dobivanje estimiranih signala varijabli stanja koristimo se matematičkim relacijama između varijabli stanja, poput odnosa akceleracije i brzine ( $\ddot{x} = \dot{v}$ ). Jednostavnim integriranjem mjerenoj signala akceleracije sustava, koji sadrži šum i drift, dobivamo signal estimirane brzine sustava u kojem se akumulira šum i drift signala akceleracije što uzrokuje drift estimiranog signala brzine. Očigledno takav jednostavan oblik estimiranja nemjerljivih varijabli stanja nije pogodan za potrebe regulacije sustava letjelice.

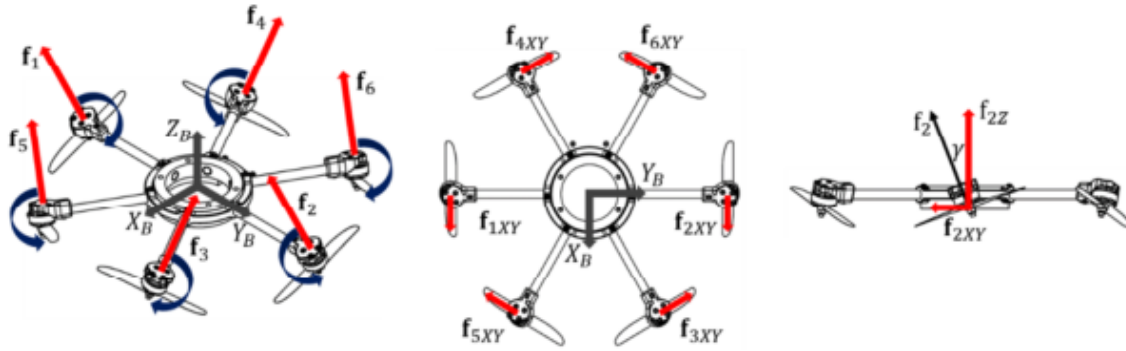
Algebarske metode [1] u teoriji upravljanja kao metodologija identifikacije pogodne su za rješavanje tri temeljna problema u zadacima sinteze regulatora: identifikacija parametara, estimacija stanja te robusnost u odnosu na aditivni šum mjerenja. Algebarske metode primjenjive su na linearne i nelinearne sustave te su jednostavne za razumijeti. Kod primjene na linearne sustave postoji pristup u vremenskoj domeni te pristup u frekvencijskoj domeni. Za slučaj pristupa u vremenskoj domeni korištenje vremenskih derivacija izraza, množenje pozitivnim potencijama vremenske varijable te integriranje dovoljno je za dobivanje linearnih izraza za tražene parametre bez utjecaja početnih uvjeta. Kod slučaja u frekvencijskoj domeni koristimo se Laplaceovim transformacijama, derivacijama kompleksne varijable  $s$  te množenjem prikladnim negativnim potencijama kompleksne

varijable  $s$ . Algebarske metode omogućuju robusnu sintezu identifikacije parametara te estimacije stanja u realnom vremenu uz prisutnost šuma. Algebarski estimatori stanja nemaju zahtjeve na statističko poznavanje šuma u signalu te za razliku od asimptotskih observera stanja ne oslanjaju se na asimptotsko konvergiranje argumenata i Lyapunovljevu teoriju stabilnosti nego je njihova identifikacija i estimacija praktički trenutačna.

## 2 Matematički model multirotorske letjelice

### 2.1 Model hexarotora

Konvencionalni quadrotori predstavljaju podupravljanje sustave kao posljedica konfiguracije rotora [10][11][12]. Prema [6] predložen je hexarotor s pasivno zakrenutim rotorima (Slika 2.1) čime je omogućena potpuna upravljivost zakretanjem rotora čime je omogućeno djelovanje upravljačkom silom u ravnini  $X_B Y_B$ .



Slika 2.1: Potpuno upravljivi hexarotor [6]

Sa pretpostavkom da su tijekom leta kutevi orijentacije blizu nule [5] i [6] predlaže dinamički model pozicije hexarotora koji glasi

$$\begin{aligned} m\ddot{X} &= f_x - f_z\theta + d_{mX} \\ m\ddot{Y} &= f_y - f_z\phi + d_{mY} \\ m\ddot{Z} &= -mg + f_z + d_{mZ} \end{aligned} \quad (2.1)$$

Dok dinamički model orijentacije glasi

$$\begin{aligned} I_{XX}\ddot{\phi} &= \tau_\phi + d_{m\phi} \\ I_{YY}\ddot{\theta} &= \tau_\theta + d_{m\theta} \\ I_{ZZ}\ddot{\psi} &= \tau_\psi + d_{m\psi} \end{aligned} \quad (2.2)$$

gdje su  $X$ ,  $Y$  i  $Z$  varijable stanja pozicije, a  $\phi$ ,  $\theta$  i  $\psi$  su varijable stanja orijentacije hexarotora. Parametar  $m$  je masa sustava dok su parametri  $I_{XX}$ ,  $I_{YY}$ ,  $I_{ZZ}$  momenti tromosti oko pojedinih osi sustava.  $[f_x \ f_y \ f_z]^T$  predstavljaju upravljačke sile, dok su  $[\tau_\phi \ \tau_\theta \ \tau_\psi]^T$  momenti upravljanja. Vanjski poremećaji sile su  $d_f = [d_{mX} \ d_{mY} \ d_{mZ}]^T$  dok su  $d_\tau = [d_{m\phi} \ d_{m\theta} \ d_{m\psi}]^T$  vanjski poremećaji momenta. Obzirom da se radi o potpuno upravljivom sustavu omogućeno je potpuno decentralizirano upravljanje po svakom stupnju slobode gibanja letjelice. Dodatno možemo pretpostaviti početnu poziciju letjelice u ishodištu inercijalnog sustava čime su definirani početni uvjeti brzine i pozicije.

## 2.2 Šum i drift mjerenog signala

Prilikom mjerenja sustava koje promatramo u stvarnosti te ih matematički opisujemo u signalima mjerenih varijabli stanja prisutna je greška u mjerenju koja uzrokuje odstupanje mjerenih vrijednosti od stvarnih vrijednosti koje opisuju stanje sustava. Radi provođenja simulacija te ispitivanja svojstava predloženih estimatora stanja u ovome radu potrebno je matematički modelirati pojavu greške mjerenja varijabli stanja pojedinog sustava. Pretpostavka je da se greška prilikom mjerenja sastoji od visokofrekventne komponente šuma te konstantnog odstupanja od stvarne vrijednosti drifta (*engl.* drift). Komponentu šuma modeliramo kao nasumične brojeve normalne distribucije. Za sustav drugog reda

$$\begin{aligned}\ddot{x}(t) &= \frac{1}{m}u(t) \\ y(t) &= \ddot{x}(t)\end{aligned}\tag{2.3}$$

gdje je  $\ddot{x}(t)$  akceleracija sustava,  $m$  masa sustava i  $u(t)$  upravljačka varijabla sustava. Izlaz sustava je  $y(t)$  te je jednak akceleraciji sustava  $\ddot{x}(t)$ . Mjereni zašumljeni signal akceleracije  $g(t)$  možemo izraziti kao stvarnu akceleraciju sustava s aditivnim šumom

$$g(t) = y(t) + A\xi(t) + d\tag{2.4}$$

gdje je  $g(t)$  mjereni signal akceleracije, a  $\xi(t)$  je šum normalne distribucije  $\mathcal{N}(0, 1)$ . Parametar  $A$  je varijacija mjerenog signala akceleracije  $\sigma^2$  [3] dok je  $d$  konstantna pogreška mjerenja akceleracije.

### 3 Algebarska metoda estimacije varijabli stanja

Zadan je sustav [2] diferencijalnih jednadžbi drugog reda koji glasi

$$\begin{aligned}\ddot{x}(t) &= a\dot{x}(t) + bx(t) + u(t) \\ y(t) &= \ddot{x}(t)\end{aligned}\tag{3.1}$$

gdje je  $x(t) \in \mathbb{R}$  te predstavlja poziciju. Pretpostavka je da su parametri  $a$  i  $b$  poznati i konstantni dok je  $u(t) \in \mathbb{R}$  upravljačka varijabla. Izlaz sustava  $y(t)$  jednak je drugoj vremenskoj derivaciji pozicije  $x(t)$  te predstavlja mjerenu akceleraciju sustava podložnu utjecaju šuma. Predloženi sustav (3.1) u prostoru stanja glasi

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= ax_2(t) + bx_1(t) + u(t)\end{aligned}\tag{3.2}$$

gdje je  $x_1(t)$  varijabla stanja koja predstavlja poziciju sustava, dok je  $x_2(t)$  varijabla stanja brzine sustava.

Cilj algebarske estimacije varijabli stanja je dobivanje izraza za estimaciju varijabli stanja brzine i pozicije  $x(t)$  i  $\dot{x}(t)$ . Uobičajeni postupci estimacije varijabli stanja sadrže diferenciranje mjerenih signala zbog čega su estimirane varijable stanja vrlo osjetljive na prisutnost šuma u mjerenim signalima. Predložena algebarska metoda za estimaciju varijabli stanja izbjegava diferenciranje mjerenih signala, dok je pretpostavljena prisutnost šuma u mjenom signalu srednje vrijednosti jednake nuli (*engl.* zero mean). U nastavku po koracima je objašnjen postupak dobivanja potrebnih linearno nezavisnih jednadžbi za dobivanje konačnog izraza za estimaciju varijabli stanja korištenjem algebarskih metoda.

#### 3.1 Algebarska metoda estimacije stanja

Postupak dobivanja izraza algebarske estimacije varijabli stanja sustava (3.1) zahtijeva izvođenje nezavisnog skupa linearnih jednadžbi. Za dobivanje dovoljnog broja međusobno nezavisnih linearnih jednadžbi korištena je metoda algebarskih derivacija (*engl.* algebraic derivative method) [1]. U frekvencijskoj domeni ova metoda sastoji se od deriviranja po kompleksnoj varijabli  $s$ , Laplaceove transformacije jednadžbe sustava u vremenskoj domeni te jednadžbe izlaza sustava. Prvi korak ove metode je eliminacija početnih uvjeta koji se pojavljuju uslijed Laplaceove transformacije derivacija funkcija po vremenu. Nakon eliminacije početnih uvjeta dobivene jednadžbe dijele se odgovarajućim potencijama kompleksne varijable  $s$  s ciljem eliminacije svih pozitivnih potencija kompleksne varijable  $s$  koje bi u vremenskoj domeni predstavljale derivacije po vremenu. Tako dobivene jednadžbe u vremenskoj domeni sadrže isključivo integracije.

Radi lakšeg pisanja za izraz  $y(t)$  iz jednadžbe sustava (3.1) uvodimo sljedeću supstituciju

$$\dot{x}(t) = v(t) \quad (3.3)$$

čime dobivamo izraz izlaza sustava izražen preko brzine sustava  $v(t)$

$$y(t) = \dot{v}(t) \quad (3.4)$$

Laplaceovom transformacijom prethodnog izraza, uzimajući u obzir početne uvjete, dobivamo

$$y(s) = sv(s) - v(0) \quad (3.5)$$

Dijeljenjem jednadžbe (3.5) u frekvencijskoj domeni s kompleksnom varijablom  $s$  dobivamo izraz

$$\frac{1}{s}y(s) = v(s) - \frac{1}{s}v(0) \quad (3.6)$$

Korištenjem inverzne Laplaceove transformacije na prethodni izraz u frekvencijskoj domeni dobivamo izraz koji sadrži nepoznato stanje brzine sustava  $v(t)$  i njenu početnu vrijednost u vremenskoj domeni na intervalu  $[0, t]$

$$\int_0^t y(\tau) d\tau = v(t) - v(0) \quad (3.7)$$

gdje korištenjem prethodne supstitucije (3.3) dobivamo prvu jednadžbu u skupu potrebnih linearno nezavisnih jednadžbi za algebarsku estimaciju varijabli stanja

$$\int_0^t y(\tau) d\tau = \dot{x}(t) - \dot{x}(0) \quad (J1) \quad (3.8)$$

Nadalje, deriviranjem izraza (3.5) po kompleksnoj varijabli  $s$  u frekvencijskoj domeni dobivamo izraz

$$\frac{d}{ds}y(s) = v(s) + s \cdot \frac{d}{ds}v(s) + 0 \quad (3.9)$$

Dijeljenjem prethodno dobivene jednadžbe kompleksnom varijablom  $s$  slijedi izraz

$$\frac{1}{s} \frac{d}{ds}y(s) = \frac{1}{s}v(s) + \frac{d}{ds}v(s) \quad (3.10)$$

Za provođenje sljedećeg koraka kod dobivanja linearno nezavisne jednadžbe za algebarsku estimaciju stanja korištenjem metode algebarskih derivacija potrebno je izraziti inverznu Laplaceovu transformaciju [13] za funkcije u frekvencijskoj domeni derivirane



po kompleksnoj varijabli  $s$  koja glasi

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ (-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n} \right\} = t^n f(t) \quad (3.11)$$

Korištenjem inverzne Laplaceove transformacije izražene u (3.11) na izraz (3.10) u frekvencijskoj domeni te korištenjem supstitucije (3.3) dobivamo izraz za drugu linearno nezavisnu jednadžbu potrebnu za algebarsku estimaciju varijabli stanja

$$\begin{aligned} \int_0^t \tau y(\tau) d\tau &= - \int_0^t \dot{x}(\tau) d\tau + t\dot{x}(t) \\ &= t\dot{x}(t) - x(t) + x(0) \quad (J2) \end{aligned} \quad (3.12)$$

Za izvođenje izraza treće linearno nezavisne jednadžbe provodimo istovjetni prethodno prikazani postupak metode algebarske derivacije na izraz (3.9) gdje je prvog korak deriviranje po kompleksnoj varijabli  $s$  u frekvencijskoj domeni prema čemu slijedi izraz

$$\frac{d^2}{ds^2} y(s) = 2 \frac{d}{ds} v(s) + s \cdot \frac{d^2}{ds^2} v(s) \quad (3.13)$$

Slijedeći korak je dijeljenje prethodno dobivene jednadžbe kompleksnom varijablom  $s$  iz čega slijedi

$$\frac{1}{s} \frac{d^2}{ds^2} y(s) = 2 \frac{1}{s} \frac{d}{ds} v(s) + \frac{d^2}{ds^2} v(s) \quad (3.14)$$

Primjenom inverzne Laplaceove transformacije (3.11) na prethodnu jednadžbu u kompleksnoj domeni slijedi izraz u vremenskoj domeni

$$\int_0^t \tau^2 y(\tau) d\tau = t^2 v(t) - 2 \int_0^t \tau v(\tau) d\tau \quad (3.15)$$

Uvođenjem supstitucije (3.3) u prethodni izraz te primjenom parcijalnog integriranja

$$\int_0^t u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x) dx$$

dobivamo konačni izraz za treću linearno nezavisnu jednadžbu algebarske estimacije varijabli stanja u vremenskom periodu  $[0, t]$  koja glasi

$$\int_0^t \tau^2 y(\tau) d\tau = t^2 \dot{x}(t) - 2tx(t) + 2 \int_0^t x(\tau) d\tau \quad (J3) \quad (3.16)$$

Četvrtu linearno nezavisnu jednadžbu dobivamo primjenom postupka algebarske derivacije na jednadžbe sustava (3.1). Deriviranjem jednadžbe sustava i jednadžbe izlaza susatava te njihovim međusobnim uvrštavanjem dobivamo

$$\dot{y}(t) = ay(t) + bv(t) + \dot{u}(t) \quad (3.17)$$

Korištenjem Laplaceove transformacije prethodne jednadžbe u vremenskoj domeni dobivamo izraz u frekvencijskoj domeni

$$sy(s) = ay(s) + bv(s) + su(s) \quad (3.18)$$

Deriviranjem prethodne jednadžbe u frekvencijskoj domeni po kompleksnoj varijabli  $s$  slijedi izraz

$$y(s) + s \frac{d}{ds} y(s) = a \frac{d}{ds} y(s) + b \frac{d}{ds} v(s) + u(s) + s \frac{d}{ds} u(s) \quad (3.19)$$

Dijeljenjem prethodno dobivene jednadžbe kompleksnom varijablom  $s$  dobivamo

$$\frac{1}{s} y(s) + \frac{d}{ds} y(s) = a \frac{1}{s} \frac{d}{ds} y(s) + b \frac{1}{s} \frac{d}{ds} v(s) + \frac{1}{s} u(s) + \frac{d}{ds} u(s) \quad (3.20)$$

Korištenjem inverzne Laplaceove transformacije (3.11) te uvođenjem prethodno uvedenih supstitucija (3.3) slijedi izraz

$$\int_0^t y(\tau) d\tau - ty(t) = -a \int_0^t \tau y(\tau) d\tau - b \int_0^t \tau \dot{x}(\tau) d\tau + \int_0^t u(\tau) d\tau - tu(t) \quad (3.21)$$

Primjenom parcijalnog integriranja te nakon preslagivanja dobivamo izraz za četvrtu linearno nezavisnu jednadžbu algebarske estimacije varijabli stanja koja glasi

$$\begin{aligned} ty(t) - \int_0^t y(\tau) d\tau - a \int_0^t \tau y(\tau) d\tau - tu(t) + \int_0^t u(\tau) d\tau = \\ = btx(t) - b \int_0^t x(\tau) d\tau \quad (J4) \quad (3.22) \end{aligned}$$

Posljednja jednadžba u skupu linearno nezavisnih jednadžbi za algebarsku estimaciju varijabli stanja je sama diferencijalna jednadžba sustava (3.1) zapisana u obliku

$$y(t) = a\dot{x}(t) + bx(t) + u(t) \quad (J5) \quad (3.23)$$

Korištenjem dobivenih izraza skupa međusobno linearno nezavisnih jednadžbi (3.8), (3.12), (3.16), (3.22) i (3.23) te rješavanjem dobivenog sustava linearno nezavisnih jednadžbi (J1), (J2), (J3), (J4) i (J5) možemo riješiti pet nepoznatih varijabli koje vektorski zapisane glase

$$\gamma(t) = \begin{bmatrix} \int_0^t x(\tau) d\tau \\ x(t) \\ \dot{x}(t) \\ x(0) \\ \dot{x}(0) \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

Sustav navedenih pet linearno nezavisnih jednadžbi možemo zapisati kao matični izraz

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{P}(t)\gamma(t) \quad (3.25)$$

gdje matrica  $\mathbf{P}(t)$  glasi

$$\mathbf{P}(t) = \begin{bmatrix} 0 & b & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & t & 1 & 0 \\ 2 & -2t & t^2 & 0 & 0 \\ -b & bt & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

Vektor  $\mathbf{q}(t)$  je poznat te glasi

$$\mathbf{q}(t) = \begin{bmatrix} y(t) - u(t) \\ \int_0^t y(\tau) d\tau \\ \int_0^t \tau y(\tau) d\tau \\ \int_0^t \tau^2 y(\tau) d\tau \\ F(t) \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

gdje je  $F(t)$  skraćeni zapis za

$$F(t) = ty(t) - \int_0^t y(\tau) d\tau - a \int_0^t \tau y(\tau) d\tau - tu(t) + \int_0^t u(\tau) d\tau \quad (3.28)$$

Množenjem izraza (3.25) s  $\mathbf{P}^{-1}$  na lijevoj strani dobivamo izraz za rješenje sustava gdje vektor  $\gamma(t)$  sadrži estimirane varijable stanja

$$\gamma(t) = \mathbf{P}(t)^{-1}\mathbf{q}(t) \quad (3.29)$$

Treba uzeti u obzir singularnost matrice  $\mathbf{P}(t)$  čija determinanta glasi

$$|\mathbf{P}(t)| = -b^2t^2 \quad (3.30)$$

iz čega možemo zaključiti da je matrica  $\mathbf{P}(t)$  singularna u trenutku  $t = 0$ , dok je invertibilna za bilo koji trenutak  $t \geq \varepsilon > 0$  te za  $b \neq 0$ . Stoga izraz (3.29) glasi

$$\gamma(t) = \mathbf{P}(t)^{-1}\mathbf{q}(t), \quad \forall t \geq \varepsilon > 0 \quad (3.31)$$

gdje je  $\varepsilon$  proizvoljan trenutak u vremenu te ga biramo dovoljno malim za postizanje zadovoljavajućeg odziva algebarskog estimatora varijabli stanja. Konačni izraz za vektor estimiranih varijabli stanja  $\hat{\gamma}$ , što je ujedno i izraz za algoritam estimacije varijabli stanja, glasi

$$\hat{\gamma}(t) = \begin{cases} \phi, & t \in [0, \varepsilon) \\ \mathbf{P}(t)^{-1}\mathbf{q}(t), & t \in [\varepsilon, t_{max}] \end{cases} \quad (3.32)$$

### 3.2 Rezultati simulacije

Predloženi algebarski estimator varijabli stanja (3.32), zajedno sa sustavom (3.1) implementiran je u programskom paketu MathWorks MATLAB korištenjem numeričke metode Runge-Kutta četvrtog reda za rješavanje sustava diferencijalnih jednadžbi zadanih izrazima sustava u prostoru stanja (3.1) te izrazima u vektoru  $\mathbf{q}(t)$  iz (3.27).

U svim provedenim simulacijama korišteni su sljedeći početni uvjeti i parametri prethodno opisanih sustava

$$\begin{aligned} T = 12 \text{ s} & \quad a = -2 & \quad x(0) = 0 \\ \varepsilon = 0,1 \text{ s} & \quad b = -1 & \quad \dot{x}(0) = 0 \end{aligned} \quad (3.33)$$

Parametar  $T$  odnosi se na ukupno vrijeme simulacije dok je parametar  $\varepsilon$  kojim zaobilazimo singularitet matrice  $\mathbf{P}(t)$  odabran razumno mali kako bi prikazali ponašanje estimatora varijabli stanja u što više trenutaka.

Radi bolje ocjene točnosti estimacije varijabli stanja uvodimo izraze za pogresku estimacije stanja koji glase

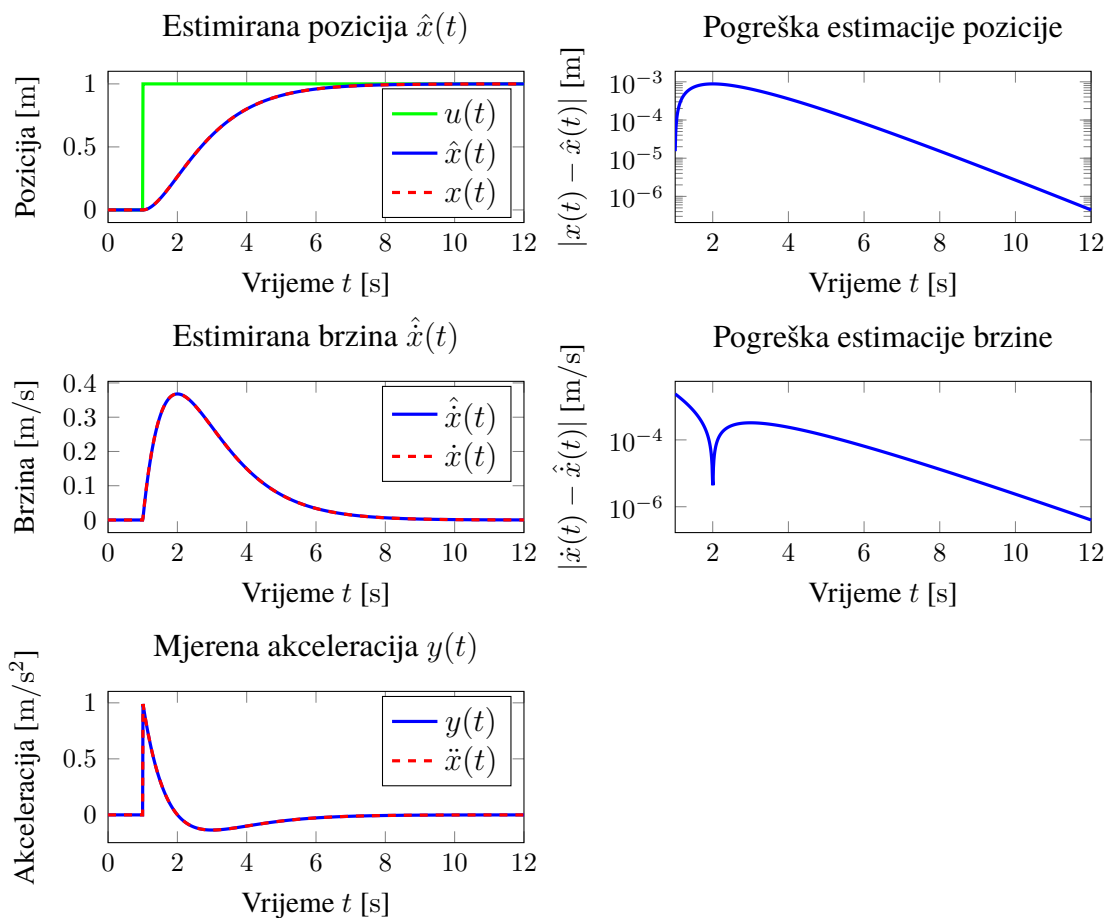
$$\tilde{x}(t) = \hat{x}(t) - x(t) \quad (3.34)$$

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \dot{\hat{x}}(t) - \dot{x}(t) \quad (3.35)$$

### 3.2.1 Mjerenje izlaza bez šuma

Provedena je simulacija estimacije varijabli stanja pozicije  $x(t)$  i brzine  $\dot{x}(t)$  bez utjecaja šuma na mjereni signal akceleracije  $y(t) = \ddot{x}(t)$ . Za simulaciju su korišteni početni uvjeti i parametri definirani u (3.33). Kao ulaz sustava korištena je step funkcija koja glasi

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 1 \text{ s} \\ 1, & t \geq 1 \text{ s} \end{cases} \quad (3.36)$$



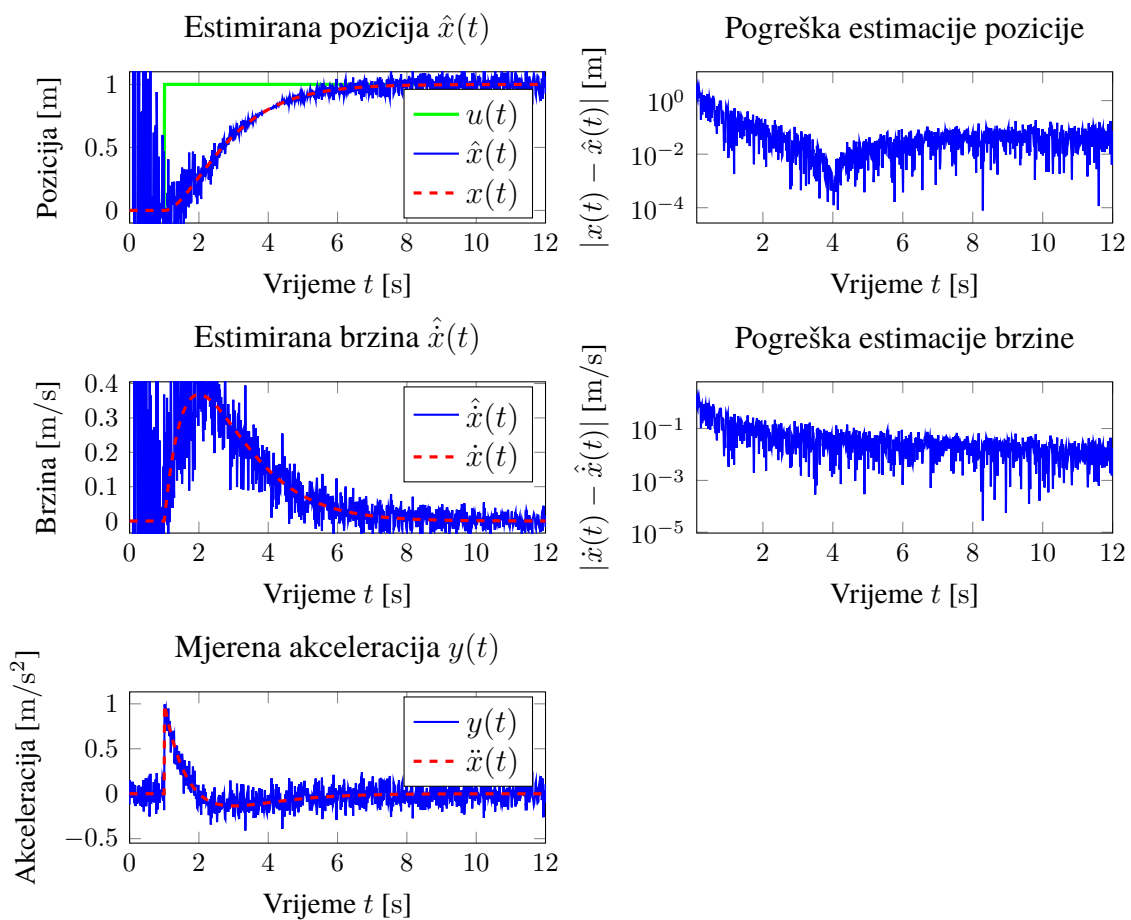
**Slika 3.1:** Algebarska estimacija varijabli stanja bez utjecaja šuma

Iz grafičkog prikaza rezultata simulacija na slici 3.1 vidljivo je da estimator varijabli stanja dobro estimira vrijednosti varijabli stanja pozicije  $x(t)$  i brzine  $\dot{x}(t)$  za prethodno opisani sustav drugog reda (3.1). Vrijedi napomenuti da je odabirom parametra uključivanja algebarskog estimatora varijabli stanja  $\varepsilon$  koji je manji od trenutka pojave ulaznog signala  $u(t = 1 \text{ s})$  prikriveno svojstvo estimatora da su do trenutka  $t = \varepsilon$  vrijednosti estimiranih varijabli stanja jednake nuli što se u ovom slučaju podudara sa stanjem sustava kojemu su svi početni uvjeti jednaki nuli.

### 3.2.2 Mjerenje izlaza sa šumom

Provedena je simulacija algebarske estimacije varijabli stanja pozicije  $x(t)$  i brzine  $\dot{x}(t)$  sa utjecajem šuma na mjereni signal izlazne varijable sustava  $y(t)$ . Za simulaciju su korišteni početni uvjeti i parametri definirani u (3.33) te ulazni signal opisan u (3.36). Dodatno su definirani parametri šuma varijacije  $\sigma^2$  te drifta  $d$  koji su prethodno opisani izrazom (2.4), a glase

$$\begin{aligned} A &= 0,1 \\ d &= 0 \end{aligned} \quad (3.37)$$



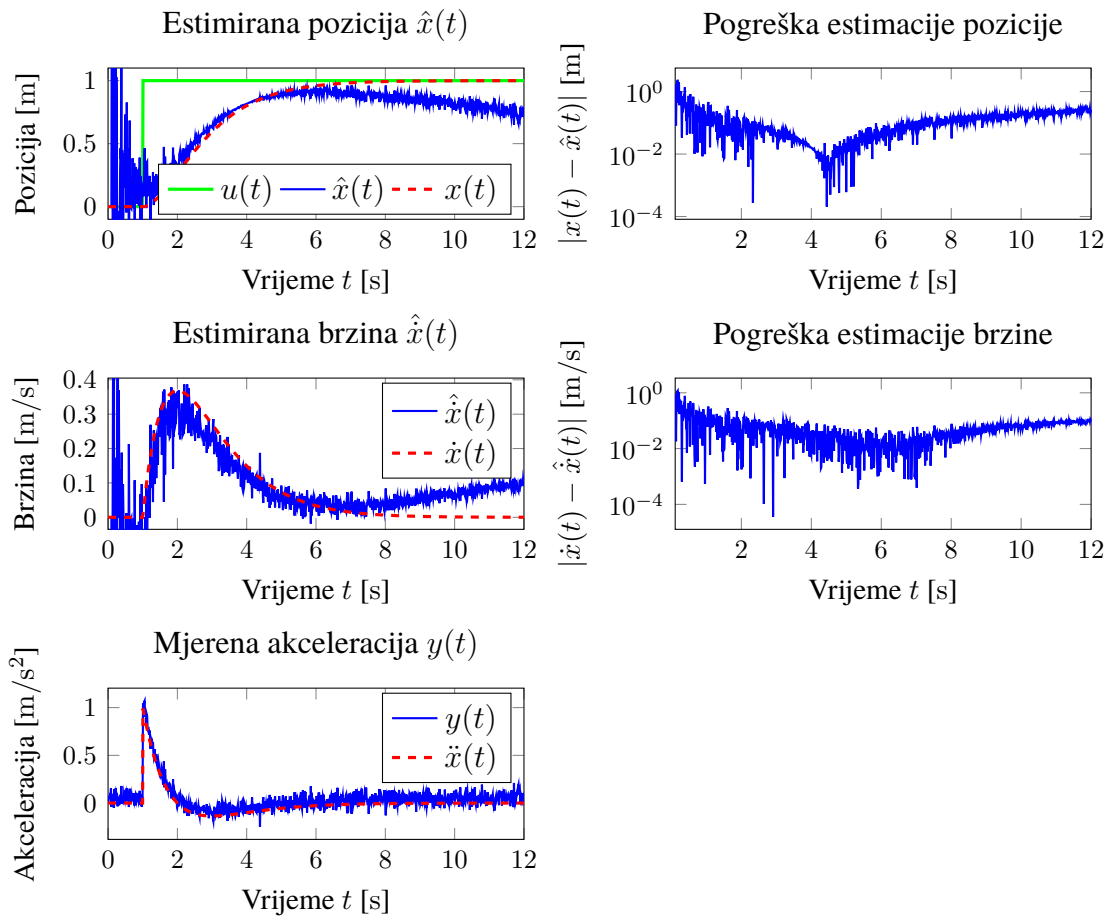
**Slika 3.2:** Algebarska estimacija stanja s utjecajem šuma

Iz grafičkog prikaza rezultata simulacija s utjecajem šuma na slici 3.2 vidljivo je da točnost estimacije nije značajno narušena uvođenjem šuma u mjereni signal akceleracije. Primjetimo da je zašumljenost signala estimirane pozicije  $\hat{x}(t)$  značajno velika sve do trenutka pojave ulaznog signala  $u(t = 1 \text{ s})$  što je posljedica odabira vrlo malog iznosa parametra  $\varepsilon$ .

### 3.2.3 Mjerenje izlaza sa šumom i driftom

Za slučaj mjerenja izlaza sustava sa prisutstvom šuma i drifta uzeti su prethodno definirani početni uvjeti (3.33) te sljedeći parametri šuma i drifta

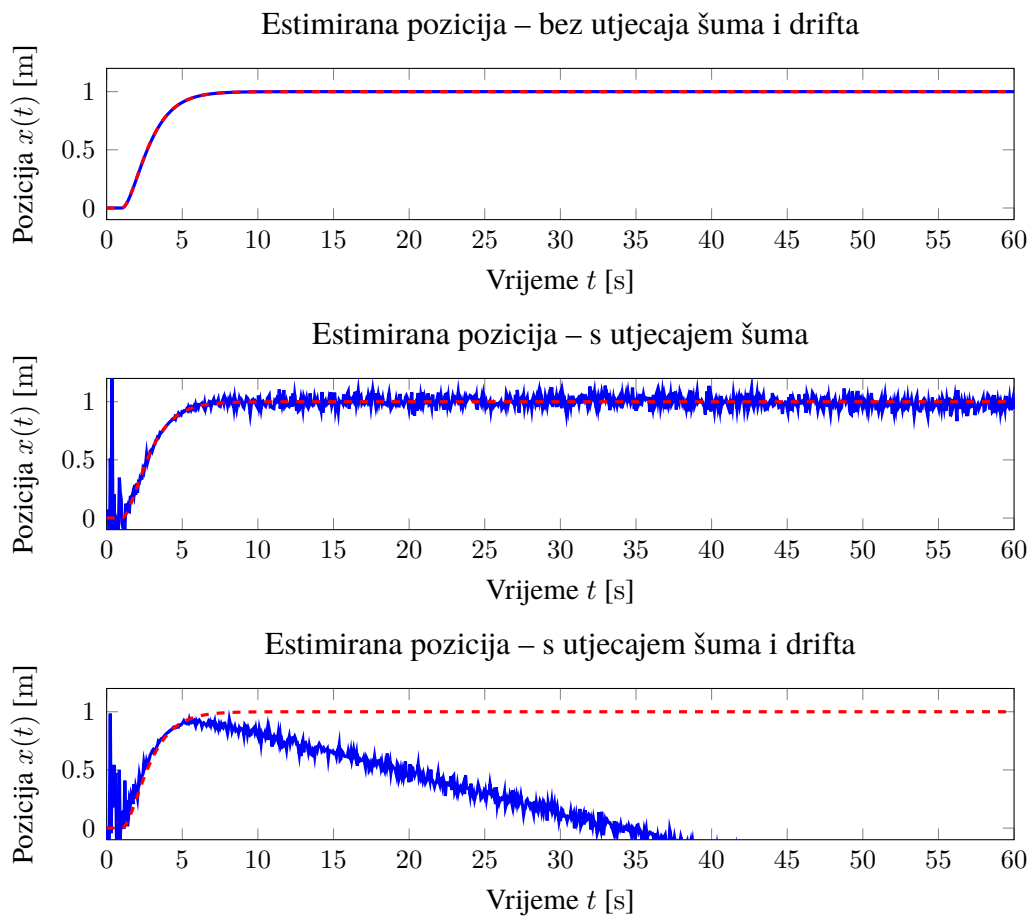
$$\begin{aligned} A &= 0,05 \\ d &= 0,05 \end{aligned} \quad (3.38)$$



**Slika 3.3:** Algebarska estimacija stanja s utjecajem šuma i drifta

Iz grafičkog prikaza rezultata simulacije prikazanih na slici 3.3 vidljiv je utjecaj pomaka srednje vrijednosti šuma (drifta)  $d$  na estimirane vrijednosti pozicije i brzine. Drift mjerene akceleracije očekivano uzrokuje akumulaciju pogreške u članovima s integralom mjerene akceleracije, prisutne u izrazu (3.27), što rezultira driftom samih vrijednosti estimiranih varijabli stanja. Veći iznosi drifta očekivano bi uzrokovali još veće pogreške estimacije.

Radi usporedbe utjecaja šuma s driftom na drift signala estimirane pozicije  $x(t)$  provedene su dodatne simulacije s vremenom simuliranja  $T = 60$  s za slučajeve bez šuma, sa šumom te sa šumom i driftom. Korišteni su prethodno definirani parametri (3.33) te parametri



**Slika 3.4:** Usporedba utjecaja šuma sa driftom na algebarski estimator stanja.

(3.38) za parametre šuma i drifta. Iz slike 3.4 vidljiv je očekivani utjecaj drifta na signal estimirane pozicije  $x(t)$  koji prikazuje nedostatak predloženog algoritma algebarske estimacije varijabli stanja u otklanjanju utjecaja šuma s driftom. To je očekivani rezultat obzirom na početnu pretpostavku prisutnosti šuma srednje vrijednosti jednake nuli.

### 3.3 Zaključak

Uvidom u performanse algebarskog estimatora varijabli stanja iz provedenih simulacija za različite uvjete šuma i drifta mjenenog signala akceleracije vidljivi su nedostaci predloženog estimatora stanja u realnim uvjetima kod kojih se prilikom mjerenja akceleracije korištenjem akcelerometra na potencijalnim sustavima autonomnih letjelica uvijek pojavljuje nekakav oblik šuma i drifta mjenenog signala uslijed same prirode mjerenja. Također, razmatranjem matematičkog modela sustava multirotorske letjelice vidljiv je temeljni problem primjene predloženog algebarskog estimatora varijabli stanja koji sadrži član pozicije  $bx(t)$  u izrazu za dinamiku letjelice (3.1). Jedan od zahtijeva dobivenog algebarskog estimatora varijabli stanja je uvjet opisan izrazom (3.30) koji zahtijeva da je parametar  $b \neq 0$



što ne vrijedi za sustav multirotorske letjelice [5] [6] [7]. Treba uočiti članove ispod integrala koji su množeni potencijom vremena  $\tau^n$  u izrazima opisanima (3.27) što uzrokuje nestabilnost estimatora [4] te zahtijeva periodičko gašenje estimatora kako bi se izbjegla inherentna nestabilnost.

## 4 Asimptotska estimacija drifta akcelerometra

Uvidom u nedostatke predloženog algebarskog estimatora varijabli stanja predloženo je korištenje konvencionalnih asimptotskih pristupa za estimiranje drifta akcelerometra te estimaciju varijabli stanja pozicije i brzine sustava. U svrhu izvođenja izraza za estimaciju varijabli stanja i predloženih poremećaja predložen je pojednostavljeni jednodimenzionalni sustav letjelice koji glasi

$$\begin{aligned}\ddot{x}(t) &= \frac{1}{m}u(t) \\ y(t) &= \dot{x}(t)\end{aligned}\tag{4.1}$$

Predloženi sustav u prostoru stanja glasi

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \frac{1}{m}u(t)\end{aligned}\tag{4.2}$$

gdje je  $m$  masa sustava. Radi pojednostavljenja izraza za estimaciju pretpostavljeno je polijetanje letjelice sa stacionarne podloge u prostoru iz čega možemo odrediti početne uvjete pozicije  $x(0) = 0$  i  $\dot{x}(0) = 0$ . Mjereni izlaz sustava, akceleracija, prema prethodnim pretpostavkama podložna je šumu i driftu akcelerometra kojim provodimo mjerenje. Izraz za mjerenu akceleraciju stoga glasi

$$g(t) = a(t) + d\tag{4.3}$$

gdje je  $g(t)$  mjereni signal dobiven iz akcelerometra,  $d$  je pretpostavljeni drift akcelerometra dok je  $a(t)$  stvarna akceleracija promatranog sustava.

### 4.1 Estimacija drifta akcelerometra

Za predloženi sustav pojednostavljenog jednodimenzionalnog sustava letjelice 4.1 uvodimo izraz za robusnu kompenzaciju drifta akcelerometra [9] koji u diferencijalnom obliku glasi

$$\dot{z}_1(t) = -\lambda(z_1(t) - d)\tag{4.4}$$

gdje je  $z_1(t)$  varijabla stanja estimirane vrijednosti drifta akcelerometra, a  $\lambda$  je proizvoljni pol estimatora drifta akcelerometra. Uvođenjem izraza za pogrešku estimacije drifta akcelerometra  $\tilde{z}_1(t)$  koji glasi

$$\tilde{z}_1(t) = z_1(t) - d\tag{4.5}$$

Nakon uvrštavanja prethodnog izraza u izraz za estimator vrijednosti drifta akcelerometra (4.4) dobivamo izraz

$$\dot{\tilde{z}}_1(t) = -\lambda \tilde{z}_1 \quad (4.6)$$

čije rješenje diferencijalne jednadžbe glasi

$$\tilde{z}_1(t) = e^{-\lambda t} \tilde{z}_1(0) \quad (4.7)$$

iz čega možemo zaključiti da vrijednost  $\tilde{z}_1(t)$  za  $t \rightarrow \infty$  teži u 0 stoga prema (4.5) slijedi da  $z_1(t \rightarrow \infty) = d$ .

Uvrštavanjem izraza za mjerenu akceleraciju (4.3) u izraz za estimaciju drifta akcelerometra dobivamo

$$\dot{z}_1(t) = -\lambda(z_1(t) - g(t) + a(t)) \quad (4.8)$$

gdje akceleraciju sustava  $a(t)$  možemo izraziti preko samog izraza sustava pojednostavljene jednodimenzionalne letjelice (4.1) čime dobivamo konačni izraz za estimator drifta akcelerometra  $d$

$$\dot{z}_1 = -\lambda \left( z_1(t) - g(t) + \frac{1}{m}u(t) \right) \quad (4.9)$$

$$(4.10)$$

## 4.2 Estimacija varijabli stanja

Uzimanjem početnog uvjeta  $z_1(0) = 0$  te uvrštavanjem izraza pogreške estimacije drifta akcelerometra (4.5) u izraz (4.7) dobivamo izraz

$$z_1(t) = d(1 - e^{-\lambda t}) \quad (4.11)$$

integriranjem prethodnog izraza na vremenskom intervalu od 0 do  $t$  dobivamo izraz

$$\begin{aligned} \int_0^t z_1(\tau) d\tau &= d \int_0^t d\tau - d \int_0^t e^{-\lambda\tau} d\tau = \\ &= d \int_0^t d\tau - d \frac{-1}{\lambda} e^{-\lambda\tau} \Big|_0^t \end{aligned} \quad (4.12)$$

koji nakon rješavanja glasi

$$\int_0^t z_1(\tau) d\tau = d \int_0^t d\tau - \frac{1}{\lambda} d(1 - e^{-\lambda t}) \quad (4.13)$$

Konačno, uvrštavanjem izraza (4.11) u prethodni izraz dobivamo izraz za integral varijable stanja  $z_1(t)$  u vremenskom preiodu od 0 do  $t$  za početni uvjet  $z_1(0) = 0$  koji glasi

$$\int_0^t z_1(\tau) d\tau = d \int_0^t d\tau - \frac{1}{\lambda} z_1(t) \quad (4.14)$$

Izraz za integral varijable stanja estimatora drifta akcelerometra  $z_1(t)$  također možemo dobiti preslagivanjem izraza (4.4) te njegovim integriranjem od 0 do  $t$  dobivamo

$$\int_0^t z_1(\tau) d\tau = d \int_0^t d\tau - \frac{1}{\lambda} \int_0^t \dot{z}_1(\tau) d\tau \quad (4.15)$$

Ukoliko odaberemo početni uvjet  $z_1(0) = 0$  konačni izraz za integral varijable stanja  $z_1(t)$  glasi

$$\int_0^t z_1(\tau) d\tau = d \int_0^t d\tau - \frac{1}{\lambda} z_1(t) \quad (4.16)$$

Obizrom da vrijednost varijable stanja estimatora drifta akcelerometra  $z_1(t)$  teži u  $d$  iz izraza (4.3) možemo izraziti izraz za estimiranu stvarnu akceleraciju sustava  $\hat{a}(t)$  koja glasi

$$\hat{a}(t) = g(t) - z_1(t) \quad (4.17)$$

gdje je  $\hat{a}(t)$  estimirana akceleracija sustava. Uslijed prijelazne pojave varijable stanja  $z_1(t)$  prilikom integriranja estimirane akceleracije dolazi do pogreške koju je potrebno kompenzirati za dobivanje estimirane brzine sustava. Obzirom da je  $\dot{v} = a$  te je pretpostavljeno  $\dot{x}(0) = v(0) = 0$ , preslagivanjem te integriranjem izraza (4.3) na vremenskom periodu od 0 do  $t$  dobivamo

$$v(t) = \int_0^t a(\tau) d\tau = \int_0^t g(\tau) d\tau - d \int_0^t d\tau \quad (4.18)$$

Analogno integriranju akceleracije za dobivanje izraza brzine, integriramo izraz (4.17) estimirane akceleracije sustava  $\hat{a}(t)$  koji glasi

$$\int_0^t \hat{a}(\tau) d\tau = \int_0^t g(\tau) d\tau - \int_0^t z_1(\tau) d\tau \quad (4.19)$$

gdje nakon uvrštavanja izraza za integral varijable stanja estimatora drifta akcelerometra (4.16) dobivamo izraz

$$\int_0^t \hat{a}(\tau) d\tau = \int_0^t g(\tau) d\tau - d \int_0^t d\tau + \frac{1}{\lambda} z_1(t) \quad (4.20)$$

Uspoređivanjem izraza za brzinu sustava (4.18) dobivenu integriranjem akceleracije te integrala estimirane akceleracije (4.20) možemo formirati izraz za estimiranu brzinu  $\hat{v}(t)$

koji glasi

$$\hat{v}(t) = \int_0^t \hat{a}(\tau) d\tau - \frac{1}{\lambda} z_1(t) \quad (4.21)$$

Uvođenjem novih varijabli stanja  $x_3(t)$  i  $x_4(t)$  koje glase

$$\begin{aligned} x_3(t) &= \int_0^t \hat{a}(\tau) d\tau \\ x_4(t) &= \int_0^t \hat{v}(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (4.22)$$

gdje je  $x_4(t)$  varijabla stanja estimirane pozicije  $\hat{x}(t)$ . Korištenjem prethodnih izraza za varijable stanja  $x_3(t)$  i  $x_4(t)$  izraze (4.17) i (4.21) možemo zapisati u prostoru stanja

$$\begin{aligned} \dot{x}_3 &= g(t) - z_1(t) \\ \dot{x}_4 &= x_3(t) - \frac{1}{\lambda} z_1(t) \end{aligned} \quad (4.23)$$

dok sami izrazi za estimirane vrijednosti varijabli stanja sustava glase

$$\begin{aligned} \hat{v}(t) &= x_3(t) - \frac{1}{\lambda} z_1(t) \\ \hat{x}(t) &= x_4(t) \end{aligned} \quad (4.24)$$

gdje je  $\hat{v}(t)$  estimirana vrijednost varijable stanja brzine sustava  $\dot{x}(t)$ , dok je  $\hat{x}(t)$  estimirana vrijednost varijable stanja pozicije sustava  $x(t)$ .

### 4.3 Zakon upravljanja

Kako bi formirali izraz za zakon slijeđenja referentne trajektorije  $x_d(t)$  za sustav pojednostavljene jednodimenzionalne letjelice opisane izrazom (4.1) uvodimo izraze za pogrešku slijeđenja referentne trajektorije

$$\begin{aligned} \tilde{x}(t) &= \hat{x}(t) - x_d(t) \\ \dot{\tilde{x}}(t) &= \hat{v}(t) - \dot{x}_d(t) \end{aligned} \quad (4.25)$$

gdje je  $x_d(t)$  zadana referentna trajektorija, a  $\tilde{x}(t)$  je pogreška slijeđenja zadane referentne trajektorije  $x_d(t)$ . Prethodni izraz nakon uvrštavanja izraza za estimirane varijable stanja (4.24) glasi

$$\begin{aligned} \tilde{x}(t) &= x_4(t) - x_d(t) \\ \dot{\tilde{x}}(t) &= x_3(t) - \frac{1}{\lambda} z_1(t) - \dot{x}_d(t) \end{aligned} \quad (4.26)$$

Korištenjem izraza za pogrešku slijeđenja referentne trajektorije  $x_d(t)$  možemo izraziti

zakon upravljanja pojednostavljene jednodimenzionalne letjelice koji glasi

$$u(t) = m (\ddot{x}_d(t) - K_D \dot{\tilde{x}}(t) - K_P \tilde{x}(t)) \quad (4.27)$$

## 4.4 Rezultati simulacija

### 4.4.1 Parametri simulacije

Za predloženi asimptotski estimator drifta akcelerometra te estimator varijabli stanja provedene su simulacije za različite parametre šuma u mjerenoj signalu akceleracije. Za sve simulacije prisutan je drift  $d$  konstantne vrijednosti dok su početni uvjeti jednaki nuli. Parametri sustava korišteni u simulacijama glase

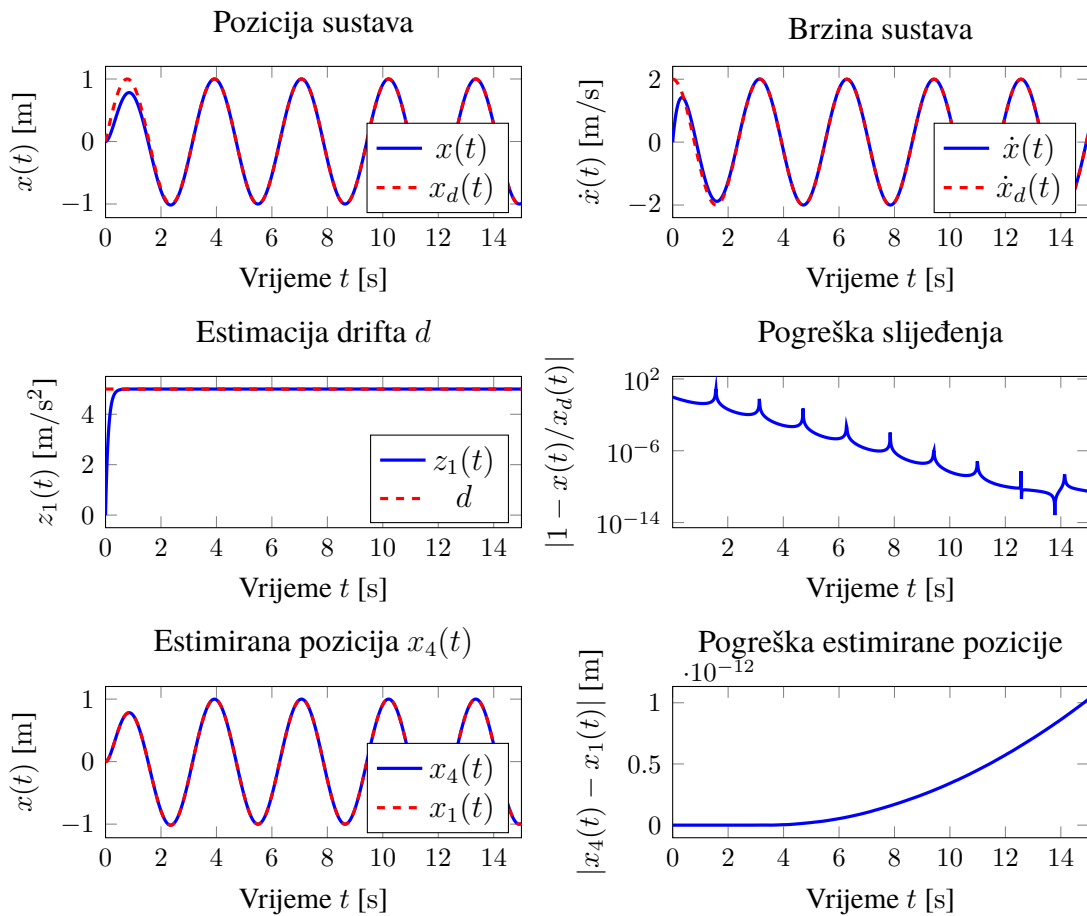
$$\begin{aligned} T &= 15 \text{ s} & K_P &= 6 & \lambda &= 10 \\ m &= 3 \text{ kg} & K_D &= 5 & d &= 5 \end{aligned} \quad (4.28)$$

Referentna trajektorija  $x_d(t)$  za sve simulacije je zadana izrazom

$$x_d(t) = \sin(2t) \quad (4.29)$$

### 4.4.2 Mjerenje akceleracije bez šuma

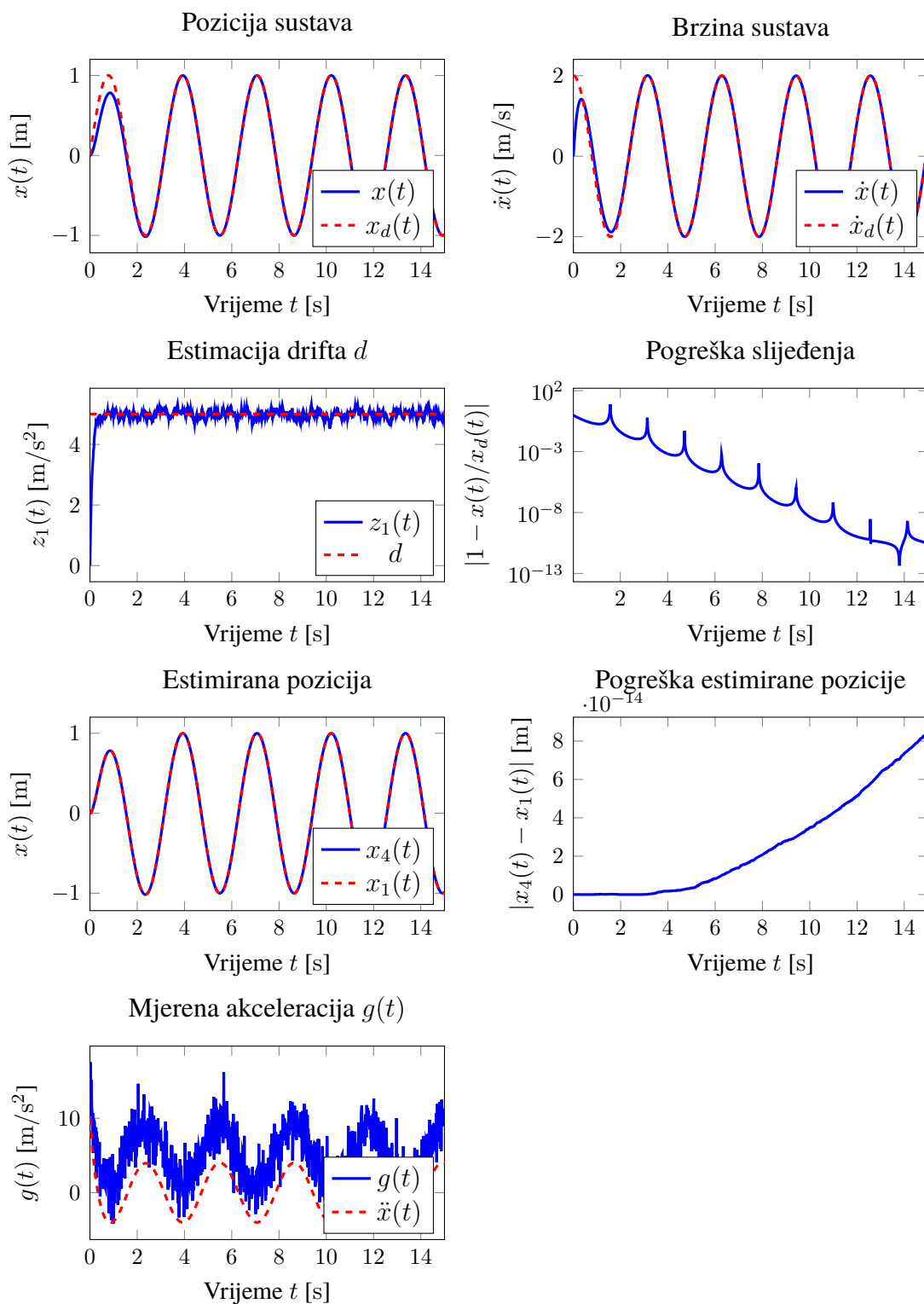
Na grafičkom prikazu rezultata simulacija bez prisutstva šuma u mjerenoj signalu akceleracije sustava na slici 4.1 vidljivo je da sustav vrlo dobro estimira vrijednost drifta akcelerometra  $d$  te zadovoljavajuće prati referentnu trajektoriju  $x_d(t)$ . Također je grafički prikazana prikazana estimirana vrijednost pozicije sustava  $x_4(t)$  za istu simulaciju. Iz grafičkog prikaza pogreške estimirane pozicije sustava vidljivo je svojstvo estimiranja varijable stanja pozicije koje je reda  $10^{-12}$  m što je vrlo precizno.



**Slika 4.1:** Estimacija drifta akcelerometra bez šuma mjerenja

#### 4.4.3 Mjerenje akceleracije sa šumom

Na slici 4.2 prikazani su rezultati simulacije provedene s prisutstvom šuma mjerenog signala akceleracije s parametrom šuma  $A = \sigma^2 = 2$  te parametrima sustava danih u (4.28). Iz navedenih slika vidljivo je da šum ne utječe značajno na svojstva estimacije drifta i pozicije sustava što ukazuje na dobra svojstva eliminacije šuma iz mjerenog signala akceleracije. Razmatranjem pogreške estimirane pozicije sustava  $x_4(t)$  koja je reda veličine  $10^{-14}$  m možemo sa zaključiti da je greška estimiranja pozicije zanemariva.

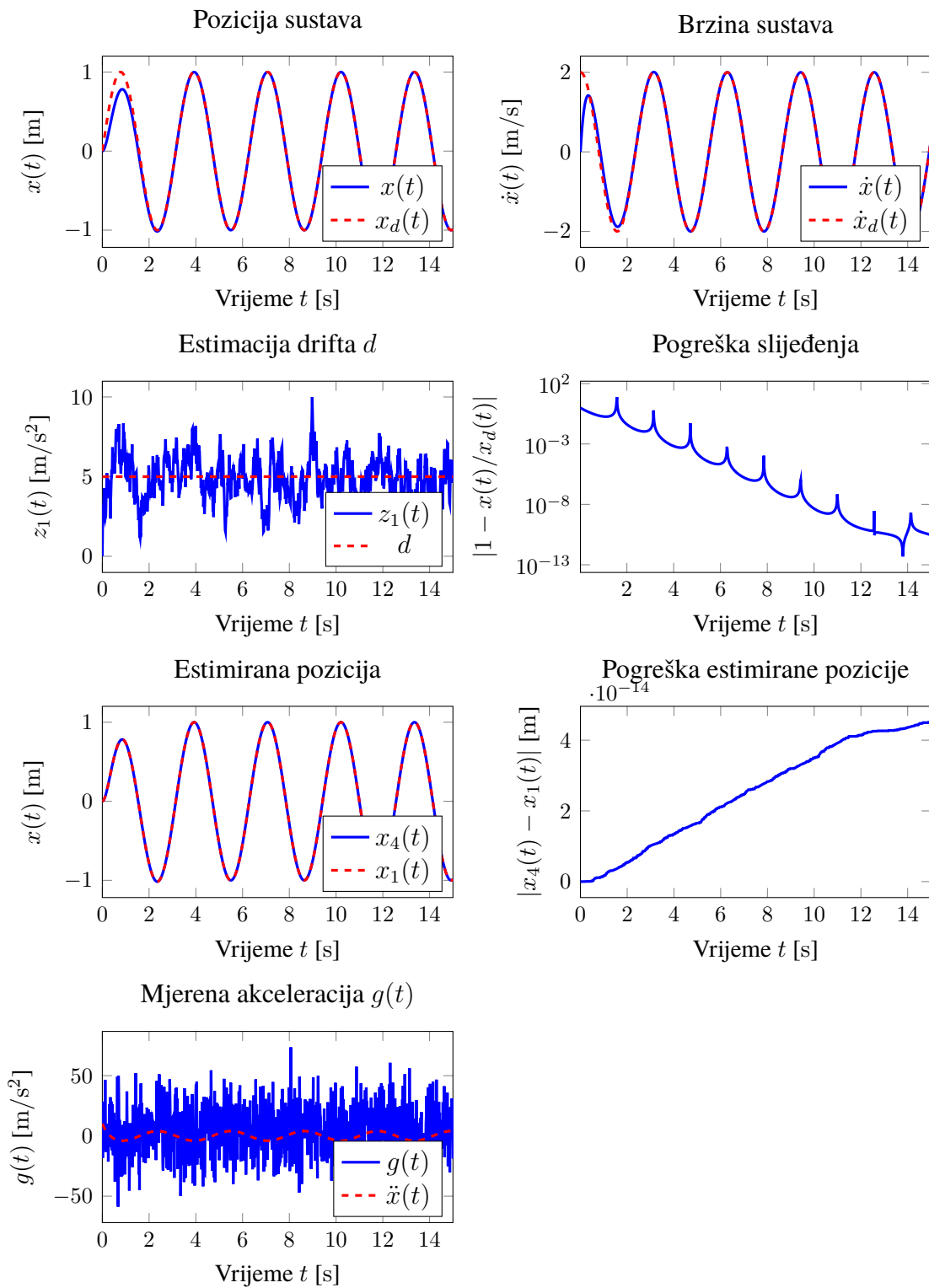


**Slika 4.2:** Estimacija drifta akcelerometra sa šumom mjerenja ( $A = 2$ )



#### 4.4.4 Mjerenje akceleracije s jakim šumom

Konačno je provedena simulacija sa zašumljenim signalom mjerene akceleracije sustava korištenjem parametra šuma  $A = \sigma^2 = 20$  što predstavlja jako zašumljeni signal značajno izražen nad stvarnim signalom akceleracije. Dobiveni rezultati provedene simulacije grafički su prikazani na slici 4.3 gdje je na prikazu mjerene akceleracije  $g(t)$  vidljiva izraženost šuma u odnosu na stvarni signal akceleracije sustava  $\ddot{x}(t)$ . Možemo uočiti kako šum u ovom slučaju značajno utječe na signal estimacije drifta  $z_1(t)$  iz kojeg nije jasno vidljiva postavljena referentna vrijednost drifta  $d$ . Signal estimacije pozicije sustava  $x_4(t)$  dobro estimira stvarnu poziciju sustava  $x_1(t)$  što možemo i zaključiti iz prikaza pogreške estimirane pozicije.



**Slika 4.3:** Estimacija drifta akcelerometra s jakim šumom mjerenja ( $A = 20$ )

## 4.5 Zaključak

Prema provedenim simulacijama za predloženi asimptotski estimator drifta akcelerometra te kompenzirani estimator varijabli stanja sustava pojednostavljene jednodimenzionalne letjelice opisane jednadžbama (4.1) možemo zaključiti kako je predloženi estimator vrlo kvalitetno estimira varijable stanja pozicije  $x(t)$  i brzine  $\dot{x}(t)$  koje su prijeko potrebne za formiranje upravljačkog signala  $u(t)$  čak i u slučajevima kada prisutstvo šuma u signalu mjerene akceleracije sustava u potpunosti prikriva temeljni signal same akceleracije sustava  $\ddot{x}(t)$ .

Nedostatak predloženog asimptotskog estimatora drifta akcelerometra je u nemogućnosti istovremene estimacije vanjskih poremećaja koji su inherentno prisutni u stvarnim sustavima.

## 5 Asimptotska estimacija vanjskog poremećaja

Za razmatranje slučaja pojave vanjskog poremećaja (npr. vjetra) koji djeluje na sustav prethodno opisane pojednostavljene jednodimenzionalne letjelice (4.1) uvodimo dodatni član akceleracije vanjskog poremećaja  $p(t)$  koji na sustav djeluje zajedno s upravljačkom silom  $u(t)$ . Nakon uvođenja spomenutog poremećaja sustav glasi

$$\begin{aligned}\ddot{x}(t) &= \frac{1}{m}u(t) + p(t) \\ y(t) &= \ddot{x}\end{aligned}\tag{5.1}$$

Opisani sustav u prostoru stanja glasi

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \frac{1}{m}u(t) + p(t)\end{aligned}\tag{5.2}$$

gdje je  $m$  masa sustava, a  $p(t)$  nepoznati vanjski poremećaj (npr. vjetar) koji je predmet asimptotske estimacije. Obzirom na usku povezanost očekivane akceleracije sustava uslijed djelovanja upravljačke sile  $u(t)$ , nepoznatog poremećaja  $p(t)$  te prisutstva drifta akcelerometra  $d$  pretpostavljeno je mjerenje akceleracije sustava akcelerometrom bez utjecaja drifta ( $d = 0$ ).

### 5.1 Estimacija vanjskog poremećaja

#### 5.1.1 Estimacija sustavom prvog reda

Analogno uvođenju diferencijalne jednadžbe robusne kompenzacije estimatora drifta akcelerometra (4.4) za sustav pojednostavljene jednodimenzionalne letjelice s vanjskim poremećajem opisan u (5.1) uvodimo izraz za robusnu kompenzaciju vanjskog poremećaja [8] koji u diferencijalnom obliku glasi

$$\dot{z}_1(t) = -\lambda(z_1(t) - p(t))\tag{5.3}$$

Preslagivanjem izraza sustava (5.1) te uvrštavanjem u prethodni izraz dobivamo

$$\dot{z}_1(t) = -\lambda\left(z_1(t) - y(t) + \frac{1}{m}u(t)\right)\tag{5.4}$$

gdje član izlaza sustava  $y(t)$  supstituiramo mjerenom zašumljenom akceleracijom  $a(t)$  bez prisutstva drifta  $d$  nakon čega slijedi izraz za estimaciju vanjskog poremećaja

$$\dot{z}_1(t) = -\lambda\left(z_1(t) - a(t) + \frac{1}{m}u(t)\right)\tag{5.5}$$

Možemo razmotriti uvrštavanje izraza mjerene akceleracije s prisutstvom drifta  $d$  opisane izrazom (4.3) što bi uvelo nepoznatu vrijednost drifta akcelerometra  $d$  u izraz za estimaciju vanjskog poremećaja. Obzirom na takav nedostatak predloženog estimatora vanjskog poremećaja koristimo prethodno postavljenu pretpostavku mjerenja akceleracije sustava akcelerometrom bez utjecaja drifta  $d$  čime je srednja vrijednost šuma mjerenog signala akceleracije jednaka nuli.

Diferencijalne jednadžbe observera stanja za opisani sustav (5.1) potrebne za formiranje izraza upravljačke varijable glase

$$\begin{aligned}\dot{x}_3(t) &= a(t) \\ \dot{x}_4(t) &= x_3(t)\end{aligned}\tag{5.6}$$

gdje je  $x_3(t)$  varijabla stanja estimirane brzine sustava, a  $x_4(t)$  je varijabla stanja estimirane pozicije sustava. Nakon formiranja izraza za estimaciju varijabli stanja možemo uvesti izraze pogreške slijeđenja referentne trajektorije  $x_d(t)$  koji glase

$$\begin{aligned}\tilde{x}(t) &= x_4(t) - x_d(t) \\ \dot{\tilde{x}}(t) &= x_3(t) - \dot{x}_d(t)\end{aligned}\tag{5.7}$$

Korištenjem uvedenih izraza za pogrešku slijeđenja referentne trajektorije  $x_d(t)$  možemo izraziti zakon upravljanja pojednostavljene jednodimenzionalne letjelice za slijeđenje referentne trajektorije s kompenzacijom vanjskog poremećaja koji glasi

$$u(t) = m(\ddot{x}_d(t) - K_D\dot{\tilde{x}}(t) - K_P\tilde{x}(t) - z_1(t))\tag{5.8}$$

### 5.1.2 Estimacija sustavom drugog reda

Dodatno je predložen asimptotski estimator vanjskog poremećaja korištenjem sustava drugog reda s ciljem bolje eliminacije šuma u mjerenoj signalu akceleracije. Preslagivanjem izraza sustava (5.1) te uvođenjem izraza za estimiranu vrijednost vanjskog poremećaja  $\hat{p}(t)$  koji glasi

$$\hat{p}(t) = a(t) - \frac{1}{m}u(t) = \ddot{x}_4(t) - \frac{1}{m}u(t)\tag{5.9}$$

gdje je  $x_4(t)$  estimirana pozicija sustava opisana izrazom (5.6). Uvodimo izraz za asimptotsko estimiranje vanjskog poremećaja koji u diferencijalnom obliku glasi

$$\dot{z}_2(t) = -\lambda(z_2(t) - p(t))\tag{5.10}$$

gdje nakon uvrštavanja izraza (5.9) u prethodni izraz dobivamo

$$\dot{z}_2(t) = -\lambda \left( z_2(t) - \ddot{x}_4(t) + \frac{1}{m}u(t) \right) \quad (5.11)$$

Nakon preslagivanja te odvajanja derivacija po vremenu od ostalih članova prethodni izraz glasi

$$\frac{d}{dt} \left( \underbrace{z_2(t) - \lambda \dot{x}_4(t)}_{w_1} \right) = -\lambda z_2(t) - \lambda \frac{1}{m}u(t) \quad (5.12)$$

gdje izraz za uvedenu varijablu  $w_1(t)$  glasi

$$w_1(t) = z_2(t) - \lambda \dot{x}_4(t) \quad (5.13)$$

Uvođenjem supstitucije za  $w_1(t)$  u jednadžbu (5.12) dobivamo izraz za  $w_1(t)$  u diferencijalnom obliku

$$\dot{w}_1(t) = -\lambda z_2(t) - \lambda \frac{1}{m}u(t) \quad (5.14)$$

Izražavanjem (5.13) preko  $z_2(t)$  te uvrštavanjem izraza za estimirane varijable stanja (5.6) dobivamo izraz za estimirani signal vanjskog poremećaja koji glasi

$$z_2(t) = w_1(t) + \lambda x_3(t) \quad (5.15)$$

gdje je  $x_3(t)$  estimirana varijabla stanja brzine. Uvrštavanjem prethodnog izraza u jednadžbu (5.14) dobivamo izraz za prvu varijablu stanja estimatora vanjskog poremećaja koji glasi

$$\dot{w}_1(t) = -\lambda w_1(t) - \lambda \left( \lambda x_3(t) + \frac{1}{m}u(t) \right) \quad (5.16)$$

Uvodimo izraz za dodatno filtriranje šuma  $z_3(t)$  koji u diferencijalnom obliku glasi

$$\dot{z}_3(t) = -\lambda(z_3(t) - z_2(t)) \quad (5.17)$$

gdje nakon uvrštavanja jednadžbe (5.13) dobivamo sljedeći izraz

$$\dot{z}_3(t) = -\lambda(z_3(t) - w_1(t) - \lambda \dot{x}_4(t)) \quad (5.18)$$

Analogno grupiranju derivacija po vremenu kao što je provedeno u (5.12) za prethodni izraz dobivamo

$$\frac{d}{dt} \left( \underbrace{z_3(t) - \lambda^2 x_4(t)}_{w_2} \right) = -\lambda z_3(t) + \lambda w_1(t) \quad (5.19)$$

gdje izraz za uvedenu varijablu  $w_2(t)$  glasi

$$w_2(t) = z_3(t) - \lambda^2 x_4(t) \quad (5.20)$$

Uvođenjem supstitucije za  $w_2(t)$  u jednadžbu (5.19) dobivamo izraz za  $w_2(t)$  u diferencijalnom obliku

$$\dot{w}_2(t) = -\lambda z_3(t) + \lambda w_1(t) \quad (5.21)$$

Izražavanjem (5.20) preko  $z_3(t)$  dobivamo izraz za estimirani signal vanjskog poremećaja koji glasi

$$z_3(t) = w_2(t) + \lambda^2 x_4(t) \quad (5.22)$$

gdje je  $x_4(t)$  estimirana varijabla stanja pozicije. Uvrštavanjem prethodnog izraza u jednadžbu (5.21) dobivamo izraz za drugu varijablu stanja estimatora vanjskog poremećaja koji glasi

$$\dot{w}_2(t) = -\lambda w_2(t) + \lambda w_1(t) - \lambda^3 x_4(t) \quad (5.23)$$

Korištenjem prethodno uvedenih izraza (5.7) za pogrešku slijeđenja referentne trajektorije  $x_d(t)$  možemo izraziti zakon upravljanja pojednostavljene jednodimenzionalne letjelice za slijeđenje referentne trajektorije s kompenzacijom vanjskog poremećaja korištenjem varijante estimacije vanjskog poremećaja filtriranjem drugog reda opisane izrazom (5.22). Konačni izraz za zakon upravljanja glasi

$$u(t) = m(\ddot{x}_d(t) - K_D \dot{\tilde{x}}(t) - K_P \tilde{x}(t) - z_3(t)) \quad (5.24)$$

## 5.2 Rezultati simulacija

### 5.2.1 Parametri simulacije

Za predložene asimptotske estimatore vanjskog poremećaja  $p(t)$  za opisani sustav (5.1) provedene su simulacije za različite parametre šuma u mjerenoj signali akceleracije. Prema prethodno opisanoj pretpostavi o početnim uvjetima sustava za sve simulacije početni uvjeti su jednaki nuli. Parametri sustava korišteni u simulacijama glase

$$\begin{aligned} T &= 15 \text{ s} & K_P &= 6 & \lambda &= 10 \\ m &= 3 \text{ kg} & K_D &= 5 & d &= 5 \end{aligned} \quad (5.25)$$

Referentna trajektorija  $x_d(t)$  za sve simulacije zadana je izrazom

$$x_d(t) = \sin(2t) \quad (5.26)$$

dok izraz za vanjski poremećaj  $p(t)$  za sve simulacije glasi

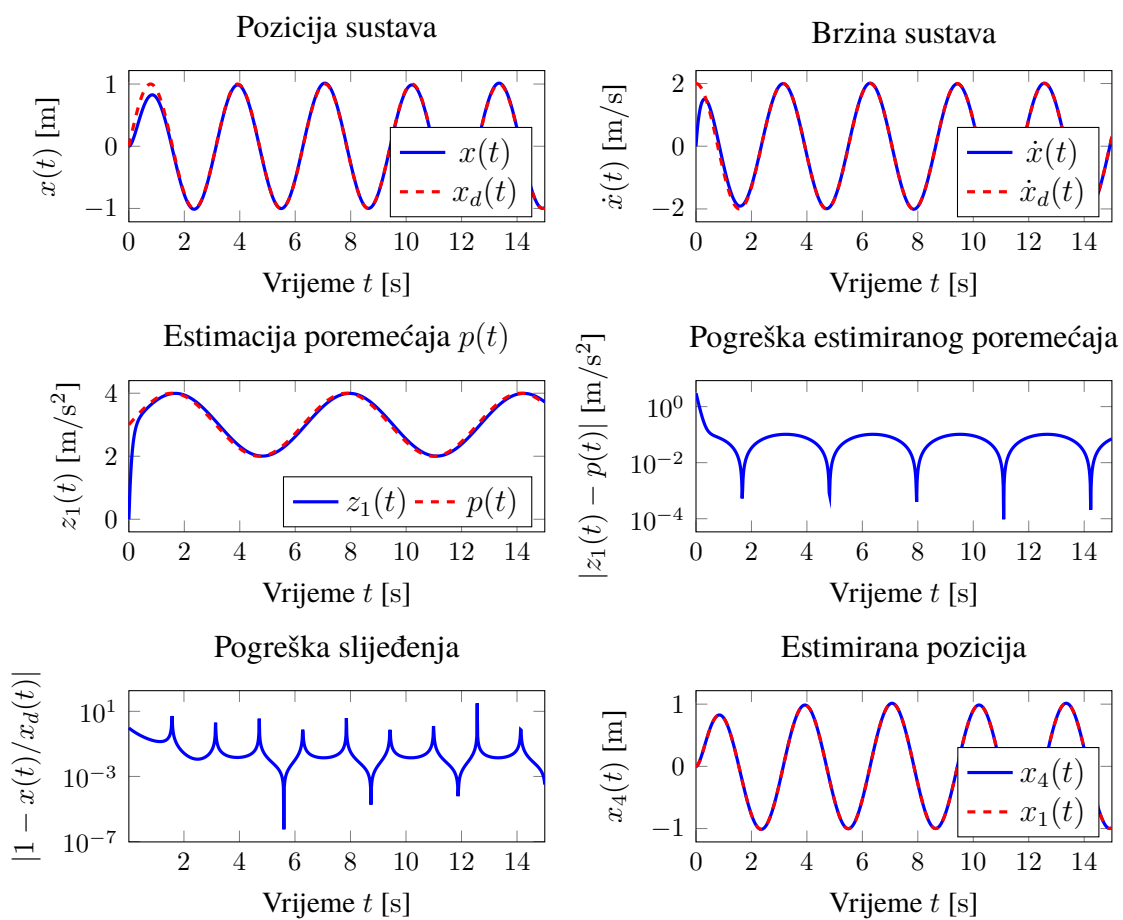
$$p(t) = 3 + \sin(t) \quad (5.27)$$

### 5.2.2 Mjerenje akceleracije bez šuma

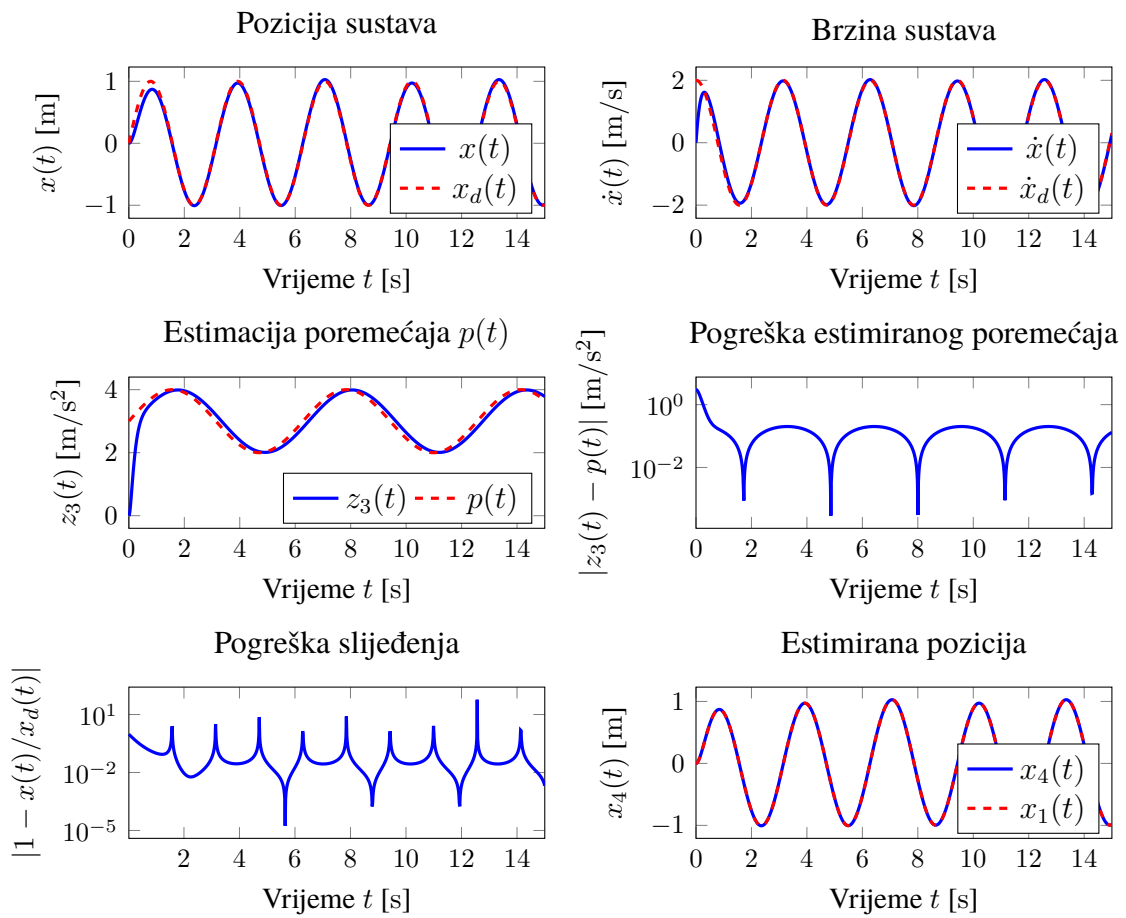
Na slici 5.1 prikazani su rezultati simulacije provedene bez šuma u mjerenoj signali akceleracije sustava za estimator vanjskog poremećaja prvog reda opisan jednadžbom (5.5) te zakonom upravljanja (5.8). Vidljivo je da sustav zadovoljavajuće slijedi zadanu referentnu trajektoriju  $x_d(t)$ , dok je kod signala estimiranog poremećaja  $z_1(t)$  vidljivo blago kašnjenje u odnosu na referentni signal poremećaja  $p(t)$  što je očekivani slučaj za predloženi asimptotski estimator poremećaja.

Za estimator vanjskog poremećaja drugog reda opisan izrazima (5.22) te zakonom upravljanja (5.24) provedena je simulacija sa istim početnim uvjetima čiji rezultati su prikazani na slici 5.2. Dobiveni rezultati nešto su slabijih svojstava nego za estimator vanjskog poremećaja prvog reda, dok je na grafičkom prikazu estimacije poremećaja  $z_3(t)$  vidljivo veće kašnjenje estimiranog signala poremećaja u odnosu na referentni signal  $p(t)$  što je i očekivano obzriom da je sustav estimatora poremećaja višeg reda što je i vidljivo na slici 5.3 gdje su signali estimacije poremećaja za provedene simulacije prikazani usporedno u većem mjerilu radi zornijeg prikaza.

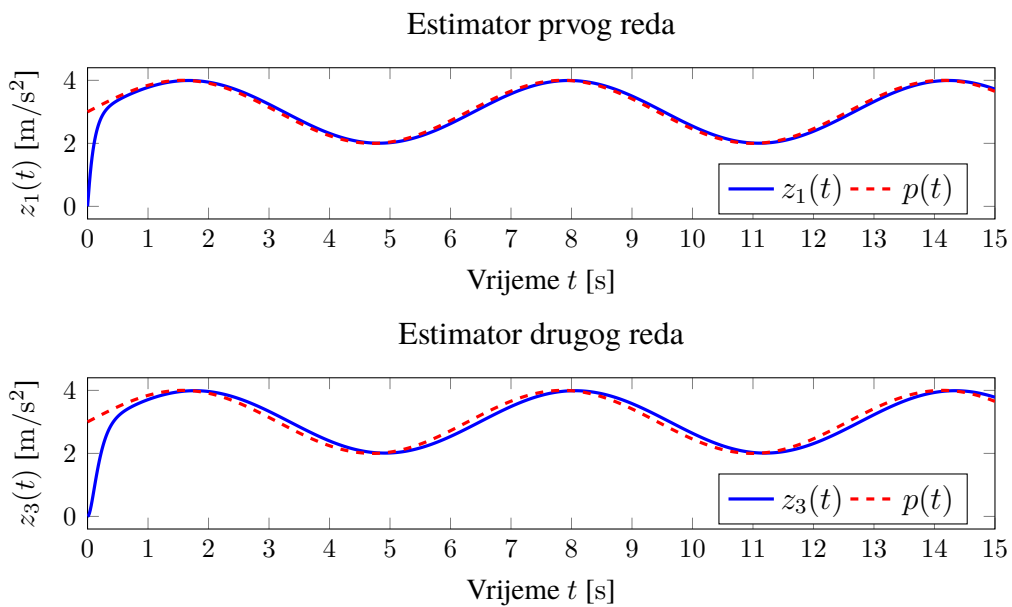




**Slika 5.1:** Estimacija vanjskog poremećaja korištenjem estimatora prvog reda bez šuma mjerenja



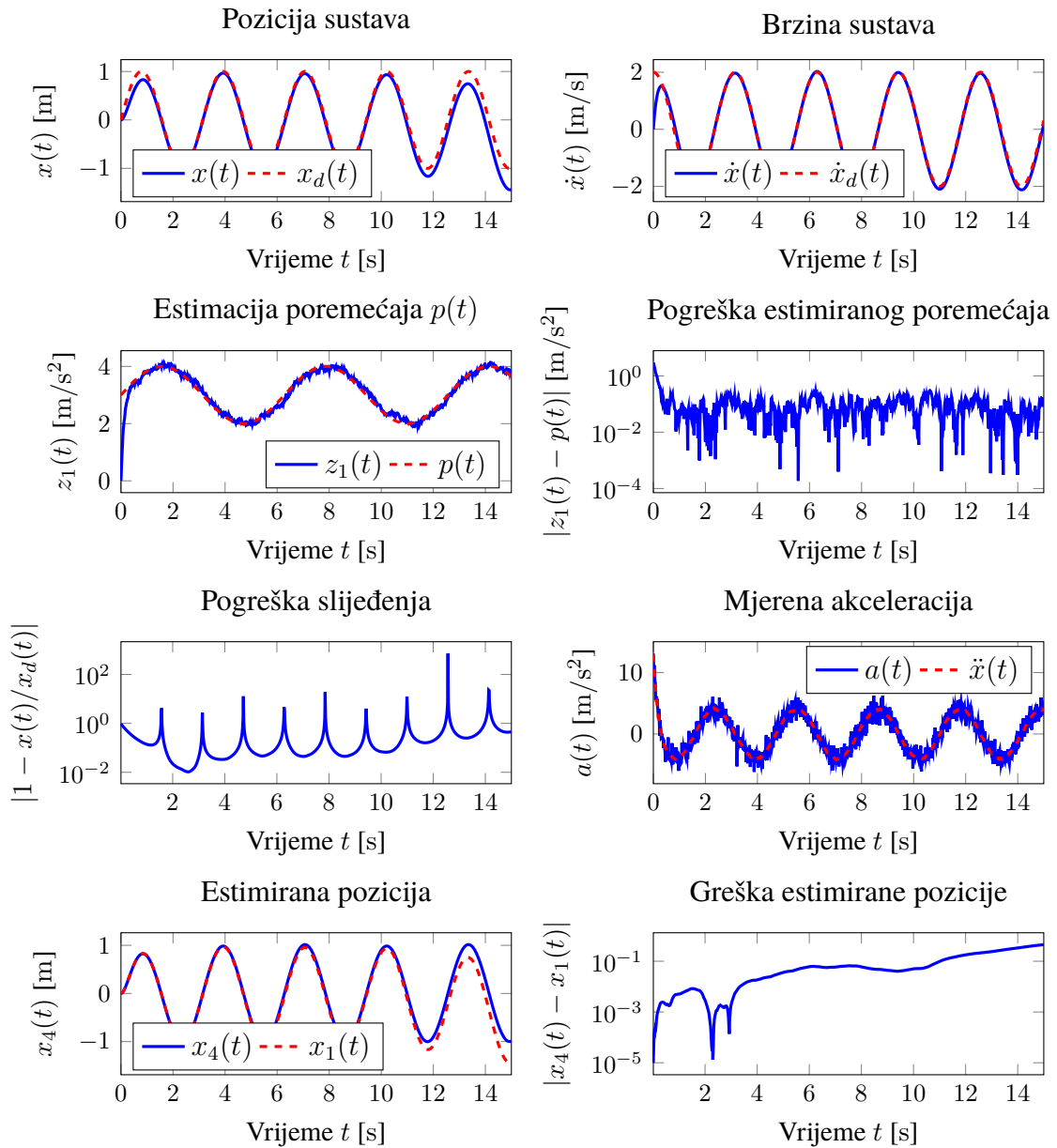
**Slika 5.2:** Estimacija vanjskog poremećaja korištenjem estimatora drugog reda bez šuma mjerenja



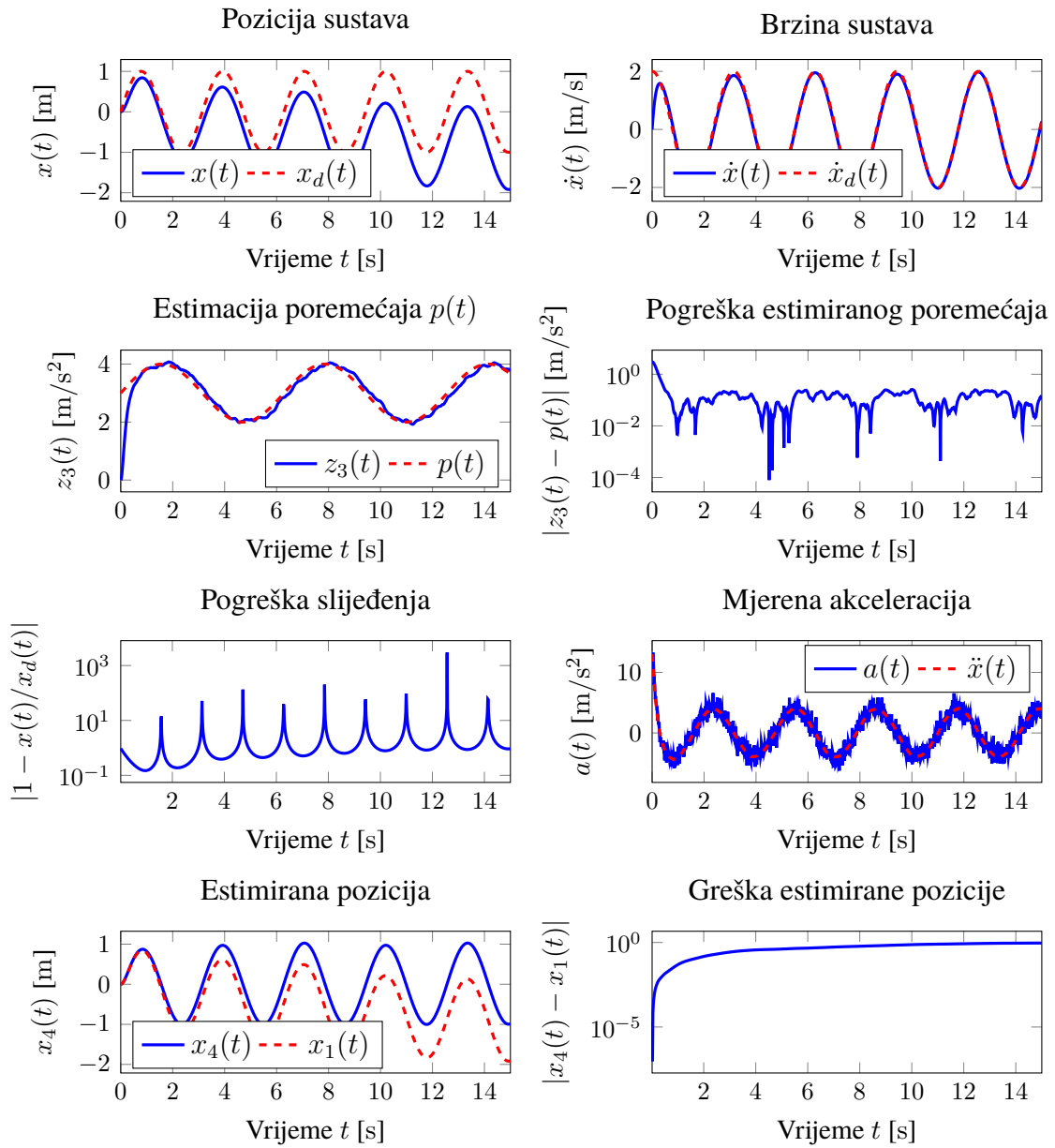
**Slika 5.3:** Usporedba estimacije vanjskog poremećaja za estimator prvog i drugog reda

### 5.2.3 Mjerenje akceleracije sa šumom

Provedene su simulacije sa prisustvom šuma varijacije  $A = \sigma^2 = 1$  bez drifta  $d = 0$  za estimatore vanjskog poremećaja prvog i drugog reda s grafičkim prikazom rezultata simulacija na slikama 5.4 i 5.5. Za svaki od predloženih estimatora vanjskih poremećaja odmah možemo uočiti drift vrijednosti estimirane pozicije kao i same pozicije sustava što je posljedica statističke prirode šuma koji nije uvijek nužno srednje vrijednosti jednake nuli nego dolazi do odstupanja iako smo kao parametar simulacije odredili  $d = 0$ . Vrijedi uočiti da bez obzira na loše praćenje referentne trajektorije sustav u oba dva slučaja dobro estimira vanjski poremećaj  $p(t)$  dok je na slici 5.5 jasno vidljivo bolje prigušenje zašumljenog signala sustava drugog reda u odnosu na sustav prvog reda.



**Slika 5.4:** Estimacija vanjskog poremećaja korištenjem estimatora prvog reda sa šumom mjerenja



**Slika 5.5:** Estimacija vanjskog poremećaja korištenjem estimatora drugog reda sa šumom mjerenja

### 5.3 Zaključak

Provedene simulacije za predloženi asimptotski estimator vanjskog poremećaja predloženog sustava jednodimenzionalne letjelice pokazuju zadovoljavajuća svojstva estimacije samog vanjskog poremećaja  $p(t)$  čime je zadatak samog estimatora poremećaja zadovoljen, ali za potrebe estimacije varijabli stanja pozicije i brzine kompenzacija samog poremećaja nije dovoljna za slučajeve prisutstva šuma u mjerenoj signalu akceleracije iako nije uveden drift akcelerometra u samo mjerenje. Razlog tome je što sredina nasumično generiranog šuma nije uvijek točno jednaka nuli što uzrokuje akumuliranje takve pogreške mjerenja prilikom integracije akceleracije i brzine s ciljem dobivanja estimiranih varijabli stanja istih za predloženi sustav što naravno uzrokuje i lošije performanse slijeđenja zadane referentne trajektorije.

## 6 Algebarska metoda korištenjem metode frekvencijskog pomaka

Uočavanjem nedostataka prethodno opisane konvencionalne metode algebarske estimacije varijabli stanja radi usporedbe iste potrebno je provesti estimaciju varijabli stanja algebarskom metodom korištenjem metode frekvencijskog pomaka. U svrhu izvođenja izraza za estimaciju predloženog poremećaja mjerenja akceleracije, drifta, korišten je prethodno opisani pojednostavljeni sustav jednodimenzionalne letjelice (4.1) koja ponovno glasi

$$\begin{aligned}\ddot{x}(t) &= \frac{1}{m}u(t) \\ y(t) &= \dot{x}(t)\end{aligned}\tag{6.1}$$

Također ponovno koristimo pretpostavku polijetanja letjelice sa stacionarne podloge u prostoru iz čega možemo odrediti početne uvjete pozicije  $x(0) = 0$  i  $\dot{x}(0) = 0$ . Mjereni izlaz sustav akceleracija prema pretpostavci je podložna šumu i driftu akcelerometra kojim provodimo mjerenje. Izraz za mjerenu akceleraciju glasi

$$g(t) = a(t) + d\tag{6.2}$$

gdje je  $g(t)$  mjereni signal akcelerometra,  $d$  je konstantni drift akcelerometra dok je  $a(t)$  stvarna akceleracija promatranog sustava.

### 6.1 Algebarska estimacija drifta primjenom invarijantnog filtriranja

Za sustav (6.1) uvodimo izraz za akceleraciju izraženu preko mjerene akceleracije sustava i nepoznatog iznosa konstantnog drifta akcelerometra koji glasi

$$\ddot{x}(t) = g(t) - d\tag{6.3}$$

Korištenjem Laplaceove transformacije sustav u frekvencijskoj domeni glasi

$$s^2x(s) = g(s) + \frac{d}{s}\tag{6.4}$$

Nakon množenja jednadžbe sa  $s$  dobivamo izraz

$$s^3x(s) = sg(s) + d\tag{6.5}$$

U svrhu invarijantnog filtriranja uvodimo izraz za filter sa četiri različita pola koji glasi

$$G_0(s) = \frac{1}{(s + \lambda_1)(s + \lambda_2)(s + \lambda_3)(s + \lambda_4)}\tag{6.6}$$

čijim uvrštavanjem u (6.5) možemo opisani sustav zapisati kao

$$G_3(s)x(s) - G_1(s)g(s) = dG_0(s) \quad (6.7)$$

gdje su članovi  $G_3(s)$ ,  $G_1(s)$  i  $G_0(s)$  te njihovi razvoji na parcijalne razlomke definirani izrazom

$$G_k(s) = \frac{s^k}{\prod_{i=1}^4 (s + \lambda_i)} = \sum_{i=1}^4 \frac{A_{ki}}{(s + \lambda_i)} \quad k = 0, 1, 3 \quad (6.8)$$

Koeficijente parcijalnih razlomaka  $A_{kj}$  prethodnog izraza određujemo slijedećim izrazom

$$A_{kj} = \lim_{s \rightarrow -\lambda_j} (s + \lambda_j) G_k(s) = \frac{(-\lambda_j)^k}{\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^4 (\lambda_i - \lambda_j)} \quad (6.9)$$

Ukoliko polove filtera  $\lambda_j$  odaberemo na linearnim razmacima definiranim izrazom

$$\lambda_j = j\lambda_0 \quad j = 1, \dots, 4 \quad \lambda_0 > 0 \quad (6.10)$$

čijim uvrštavanjem u prethodni izraz (6.9) dobivamo izraz za koeficijente parcijalnih razlomaka  $A_{kj}$  za jednako udaljene polove koji glasi

$$A_{kj} = \frac{(-j)^k}{\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^4 (i - j)} \lambda_0^{k-3} \quad (6.11)$$

Za slučaj kada je  $k = 0$  koeficijenti parcijalnih razlomaka funkcije  $G_0(s)$  glase

$$\begin{aligned} A_{01} &= \frac{1}{6\lambda_0^3} & A_{02} &= -\frac{1}{2\lambda_0^3} \\ A_{03} &= -\frac{1}{6\lambda_0^3} & A_{04} &= \frac{1}{2\lambda_0^3} \end{aligned} \quad (6.12)$$

Uvrštavanjem izraza (6.8) izraženog preko parcijalnih razlomaka u izraz (6.7) dobivamo izraz

$$\sum_{i=1}^4 \frac{1}{s + \lambda_i} \left[ \underbrace{A_{3i}x(s) - A_{1i}g(s)}_{x_i(s)} \right] = d \underbrace{\sum_{i=1}^4 \frac{A_{0i}}{s + \lambda_i}}_{\Phi(s)} \quad (6.13)$$

gdje uvođenjem varijabli stanja  $x_i(s)$  te supstitucije za  $\Phi(s)$  prethodni izraz sustava možemo zapisati kao



$$\sum_{i=1}^4 x_i(s) = d \Phi(s) \quad (6.14)$$

Korištenjem inverzne Laplaceove transformacije sustav u vremenskoj domeni glasi

$$\sum_{i=1}^4 x_i(t) = d \Phi(t) \quad (6.15)$$

gdje izraz za  $\Phi(t)$  u vremenskoj domeni glasi

$$\Phi(t) = \sum_{i=1}^4 A_{0i} e^{-\lambda_i t} \quad (6.16)$$

Vrijedi uočiti iznos funkcije  $\Phi(t)$  u trenutku  $t = 0$

$$\begin{aligned} \Phi(0) &= \sum_{i=1}^4 A_{0i} = A_{01} + A_{02} + A_{03} + A_{04} = \\ &= \frac{1}{6\lambda_0^3} - \frac{1}{2\lambda_0^3} - \frac{1}{6\lambda_0^3} + \frac{1}{2\lambda_0^3} = 0 \end{aligned} \quad (6.17)$$

Konačno možemo raspisati sustav diferencijalnih jednadžbi za algebarsku estimaciju drifta akcelerometra primjenom invarijantnog filtriranja koje glase

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\lambda_1 x_1 + A_{31}x(t) - A_{11}g(t) \\ \dot{x}_2 &= -\lambda_2 x_2 + A_{32}x(t) - A_{12}g(t) \\ \dot{x}_3 &= -\lambda_3 x_3 + A_{33}x(t) - A_{13}g(t) \\ \dot{x}_4 &= -\lambda_4 x_4 + A_{34}x(t) - A_{14}g(t) \end{aligned} \quad (6.18)$$

Obzirom da je  $\Phi(0) = 0$  izraz za estimaciju drifta akcelerometra glasi

$$\hat{d} = \begin{cases} 0, & t \in [0, \varepsilon) \\ \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{\Phi(t)}, & t \geq \varepsilon \end{cases} \quad (6.19)$$

gdje konačni izraz za  $\Phi(t)$  glasi

$$\Phi(t) = A_{01} e^{-\lambda_1 t} + A_{02} e^{-\lambda_2 t} + A_{03} e^{-\lambda_3 t} + A_{04} e^{-\lambda_4 t} \quad (6.20)$$

### 6.1.1 Metoda frekvencijskog pomaka

Prilikom primjene konvencionalne algebarske metode koristimo korake deriviranja izraza sustava te korake integriranja za dobivanje linearno nezavisnih sustava jednadžbi. Tako dobivene rezultirajuće linearno nezavisne jednadžbe uobičajeno sadrže članove  $t^n$  koji

čine nestabilne vremenski ovisne filtere estimatora. Kako bi izbjegli navedene nedostatke konvencionalne algebarske metode [4] uvodi metodu frekvencijskog pomaka koja koristi operator konačnih diferencija. Konačni operator diferencija funkcije  $f(s)$  u frekvencijskoj domeni definiran je izrazom

$$\delta_q f(s) = f(s + q) - f(s) \quad (6.21)$$

gdje operator diferencija  $\delta_q$  možemo izraziti kao

$$\delta_q = e^{q \frac{d}{ds}} - 1 \quad (6.22)$$

gdje je  $e^{q \frac{d}{ds}}$  operator pomaka sa svojstvom

$$e^{q \frac{d}{ds}} f(s) = f(s + q) \quad (6.23)$$

Za  $f(s) = s^n$  dobivamo

$$\delta_q s^n = (s + q)^n - s^n = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} s^{n-k} q^k \quad (6.24)$$

Za proizvoljnu funkciju  $f(s)$  vrijedi izraz

$$\delta_q^n f(s) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} f(s + (n - k)q) \quad (6.25)$$

Korištenjem operatora konačnih diferencija u frekvencijskoj domeni dobivamo pomaknute funkcije poput  $F(s + q)$ . Svojstvo frekvencijskog pomaka Laplaceove transformacije glasi

$$F(s + q) = \mathcal{L} \{ e^{-qt} f(t) \} \quad (6.26)$$

koje koristimo za inverznu Laplaceovu transformaciju algebarskih izraza u vremensku domenu.

### 6.1.2 Estimacija drifta akcelerometra

Potrebno je primjeniti algebarsku metodu frekvencijskog pomaka s ciljem estimacije drifta akcelerometra. Uvodimo izraz za akceleraciju sustava (6.1) izraženu preko mjerene akceleracije sustava kompenzirane za nepoznati iznos drifta akcelerometra  $d$ .

$$\ddot{x}(t) = g(t) - d \quad (6.27)$$

Za navedenu diferencijalnu jednadžbu provodimo Laplaceovu transformaciju u frekvencijsko područje u kojemu prethodni izraz glasi

$$s^2 x(s) = g(s) + \frac{d}{s} \quad (6.28)$$

Dobivenu jednadžbu u frekvencijskom području množimo operatorom pomaka opisanim u (6.23) nakon čega slijedi izraz

$$(s + q)^2 \cdot x(s + q) = a(s + q) + \frac{d}{s + q} \quad (6.29)$$

U svrhu provođenja invarijantnog filtriranja uvodimo izraz

$$G_0(s) = \frac{1}{(s + q)^3} \quad (6.30)$$

gdje je  $q$  proizvoljno odabrani pol filtera. Nakon množenja izraza (6.29) s prethodnim izrazom dobivamo

$$\frac{1}{s + q} x(s + q) = \frac{1}{(s + q)^3} a(s + q) + \frac{d}{(s + q)^4} \quad (6.31)$$

Prebacivanjem poznatih varijabli na lijevu stranu te grupiranjem prethodni izraz možemo prikazati na sljedeći način

$$\underbrace{\frac{1}{s + q} \left( x(s + q) - \underbrace{\frac{1}{s + q} \left( \underbrace{\frac{1}{s + q} a(s + q)}_{x_1(s)} \right)}_{x_2(s)} \right)}_{x_3(s)} = \frac{d}{(s + q)^4} \quad (6.32)$$

iz čega možemo izraziti varijable stanja estimatora drifta akcelerometra u frekvencijskoj domeni koje glase

$$\begin{aligned} (s + q) x_1(s) &= a(s + q) \\ (s + q) x_2(s) &= x_1(s) \\ (s + q) x_3(s) &= x(s + q) - x_2(s) \end{aligned} \quad (6.33)$$

Korištenjem inverzne Laplaceove transformacije pomoću izraza (6.26) možemo prethodne varijable stanja izraziti u vremenskoj domeni nakon čega dobivamo

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -qx_1(t) + e^{-qt} a(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -qx_2(t) + x_1(t) \\ \dot{x}_3(t) &= -qx_3(t) - x_2(t) + e^{-qt} x(t) \end{aligned} \quad (6.34)$$

Korištenjem uvedenih supstitucija te uvrštavanjem (6.30) izraz (6.32) možemo zapisati

$$x_3(s) = d G_0(s) \quad (6.35)$$

uvođenjem inverzne Laplaceove transformacije za (6.30)

$$\Phi(t) = \mathcal{L}^{-1} \{G_0(s)\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s+q)^4} \right\} = \frac{1}{6} t^3 e^{-qt} \quad (6.36)$$

izraz (6.35) možemo napisati izraz za estimaciju drifta akcelerometra  $d$  u vremenskoj domeni izražen za  $d$  koji glasi

$$d = \frac{x_3(t)}{\Phi(t)} \quad (6.37)$$

Obzirom da se funkcija  $\Phi(t)$  nalazi u nazivniku izraza za estimaciju drifta vrijedi uočiti da je za trenutak  $t = 0$  funkcija  $\Phi(0)$  jednaka nuli  $\Phi(0) = 0$  zbog čega uvodimo konačni izraz za estimaciju drifta

$$\hat{d} = \begin{cases} 0, & t \in [0, \varepsilon) \\ \frac{x_3(t)}{\Phi(t)}, & t \geq \varepsilon \end{cases} \quad (6.38)$$

Usporedimo li izraze algebarskog estimatora drifta akcelerometra dobivenog metodom frekvencijskog pomaka sa algebarskim estimatorom drifta akcelerometra dobivenog invarijantnim filtriranjem (6.18) i (6.19) možemo primjetiti da je estimator drifta dobiven metodom frekvencijskog pomaka bolji i jednostavniji za primjeniti.

## 6.2 Estimacija varijabli stanja

Iz diferencijalnih jednadžbi estimatora drifta akcelerometra (6.34) vidljivo je da osim što je potrebno mjeriti akceleraciju sustava, potrebno je i mjeriti poziciju sustava  $x(t)$  uslijed čega uvodimo izraze za estimaciju brzine koji glasi

$$\begin{aligned} \dot{x}_4(t) &= g(t) - \hat{d} \\ \hat{v}(t) &= x_4(t) - \varepsilon \cdot \hat{d} \end{aligned} \quad (6.39)$$

Nakon formiranja izraza za estimaciju nepoznatih varijabli stanja možemo uvesti izraze pogreške slijeđenja referentne trajektorije  $x_d(t)$  koji glase

$$\begin{aligned} \tilde{x}_d(t) &= x(t) - x_d(t) \\ \dot{\tilde{x}}(t) &= \hat{v}(t) - \dot{x}_d(t) \end{aligned} \quad (6.40)$$

Korištenjem uvedenih izraza za pogrešku slijeđenja referentne trajektorije  $x_d(t)$  možemo izraziti zakon upravljanja pojednostavljene jednodimenzionalne letjelice za slijeđenje referentne trajektorije s kompenzacijom vanjskog poremećaja koji glasi

$$u(t) = m(\ddot{x}_d(t) - K_D\dot{\tilde{x}}(t) - K_P\tilde{x}(t)) \quad (6.41)$$

## 6.3 Rezultati simulacija

### 6.3.1 Parametri simulacije

Za predloženi algebarski estimator drifta akcelerometra te estimator varijabli stanja provedene su simulacije za različite parametre aditivnog šuma u mjerenoj signalu akceleracije. Za sve simulacije prisutan je drift  $d$  konstantne vrijednosti dok su početni uvjeti jednaki nuli. Parametri sustava korišteni u simulacijama glase

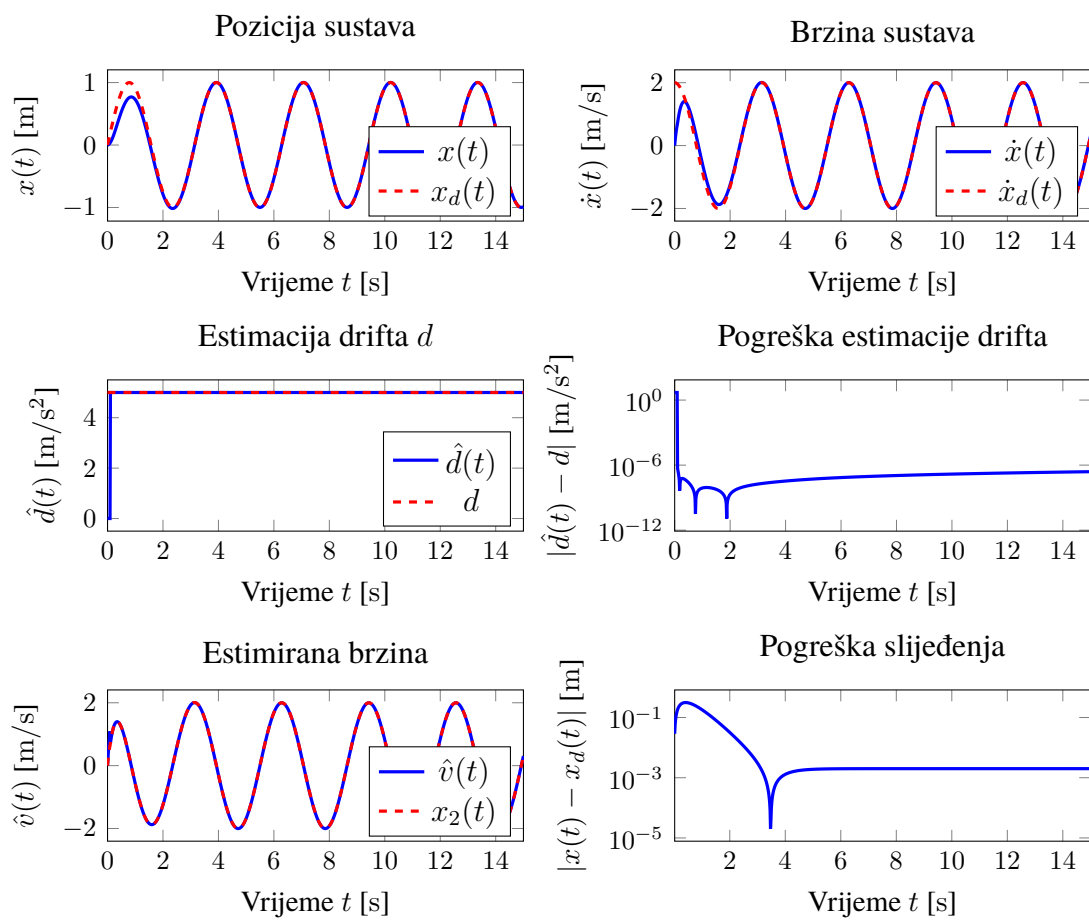
$$\begin{aligned} T &= 15 \text{ s} & K_P &= 6 & q &= 12 \\ m &= 3 \text{ kg} & K_D &= 5 & \varepsilon &= 0.5 \text{ s} \\ d &= 5 \end{aligned} \quad (6.42)$$

Referentna trajektorija  $x_d(t)$  za sve simulacije zadana je izrazom

$$x_d(t) = \sin(2t) \quad (6.43)$$

### 6.3.2 Mjerenje bez šuma

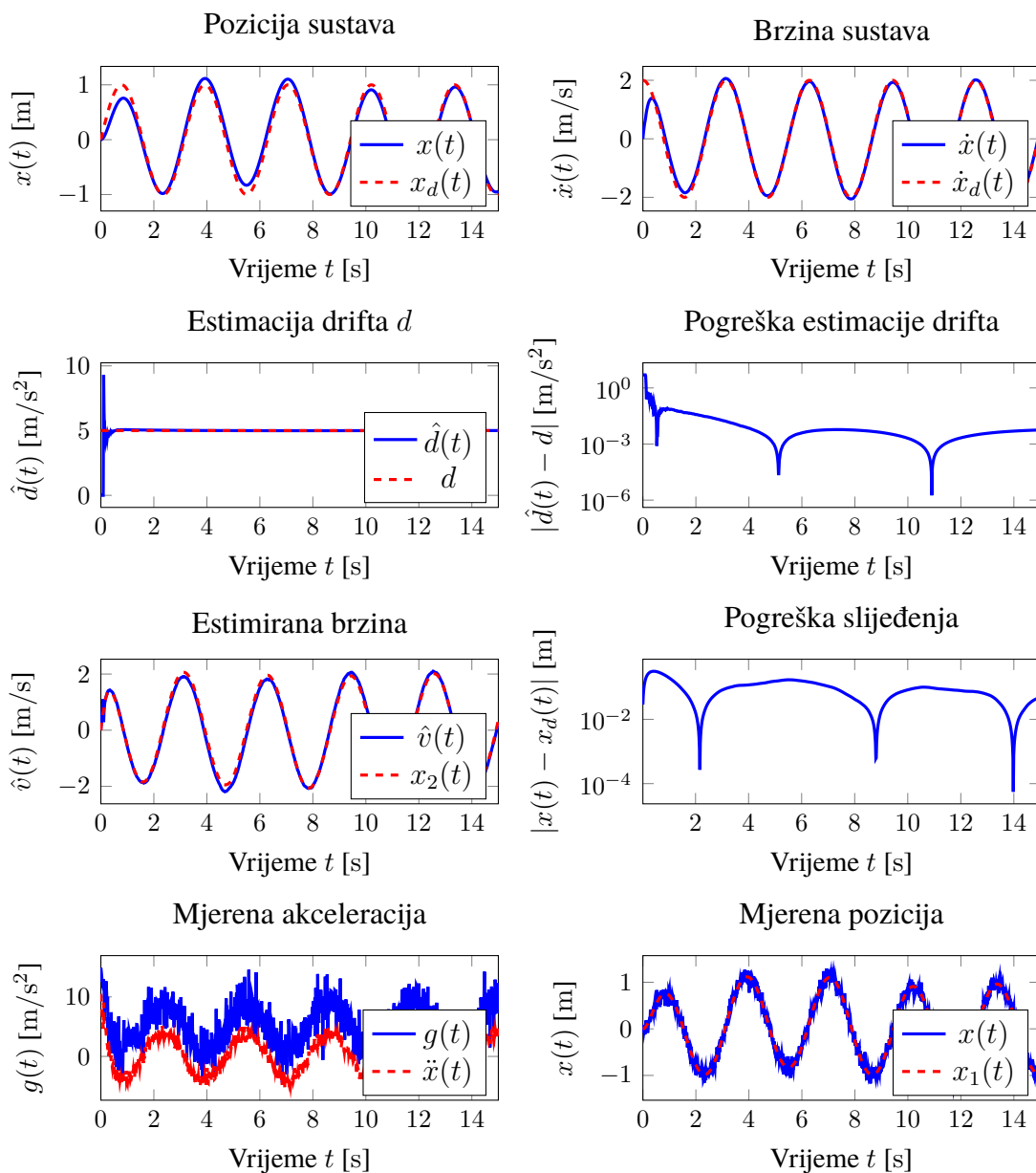
Na slici 6.1 prikazani su rezultati simulacije provedene bez prisutstva šuma za parametre sustava zadane u (6.42) te zadanu referentnu trajektoriju (6.43). Iz navedene slike je vidljivo praktički trenutno estimiranje vrijednosti drifta akcelerometra  $d$  koja je za trenutak  $\varepsilon > t \geq 0$  proizvoljno odabrana jednaka nuli. Obzirom na dobra svojstva estimiranja drifta akcelerometra rezultirajuće estimiranje varijable stanja brzine očekivano je zadovoljavajuće uslijed čega je postignuto vrlo dobro slijeđenje zadane referentne trajektorije  $x_d(t)$  što možemo vidjeti iz grafičkog prikaza pogreške slijeđenja.



**Slika 6.1:** Estimacija drifta metodom frekvencijskog pomaka bez utjecaja šuma

### 6.3.3 Mjerenje sa šumom

Za simulacije mjerenja sa prisutstvom šuma u mjerenim signalima korišteni su prethodno definirani parametri sustava iz (6.42) te su dodatno definirani parametri varijacije šuma mjerenja akceleracije  $A = 2$  dok je za šum prisutan u signalu mjerene pozicije korišten parametar varijacije  $A_x = 0,1$ . Na slici 6.2 grafički su prikazani rezultati provedene simulacije iz koje je vidljiv minimalan utjecaj šuma na svojstva slijeđenja referentne trajektorije  $x_d(t)$ .



**Slika 6.2:** Estimacija drifta metodom frekvencijskog pomaka s utjecajem šuma

## 6.4 Zaključak

Predloženi estimator drifta mjenog signala akceleracije korištenjem algebarske metode frekvencijskog pomaka te estimator varijabli stanja za provedene simulacije pokazuje brzu, praktički trenutačnu, konvergenciju estimiranog drifta  $\hat{d}(t)$  prema stvarnoj vrijednosti drifta. Nedostatak metode je zahtijev za odgađanje estimacije do proizvoljno odabranog trenutka u vremenu  $\varepsilon$  obzirom da izraz za estimaciju drifta nije definiran u trenutku  $t = 0$  te zahtijev na mjerenje akceleracije i pozicije sustava. Dodavanjem aditivnog šuma na mjereni signal akceleracije sustava rezultati simulacija pokazuju dobra svojstva estimacije drifta i varijabli stanja za prisutnost šuma mjerenja u signalima akceleracije i pozicije.



## 7 Zaključak

U ovom radu razmotrena je primjena konvencionalne algebarske metode, algebarske metode primjenom metode frekvencijskog pomaka te asimptotske robusne kompenzacije na estimaciju varijabli stanja s ciljem sinteze regulacijskog sustava za pojednostavljeni model letjelice. Za mjerljive varijable stanja pretpostavljena je prisutnost aditivnog šuma mjerenja te konstantna nepoznata pogreška mjerenja akceleracije. Prilikom estimacije varijabli stanja brzine i pozicije korištenjem mjerenog signala akceleracije nepoznata konstantna pogreška mjerenja akceleracije onemogućuje direktno integriranje akceleracije u svrhu dobivanja signala estimirane brzine što ukazuje na potrebu za kompenzaciju takve greške mjerenja.

Primjenom konvencionalne algebarske metode estimacije varijabli stanja na predloženi sustav rezultati simulacija pokazali su dobro estimiranje varijabli stanja pozicije i brzine u prisutnosti aditivnog šuma mjerene akceleracije. Unatoč tome primjenjena metoda ukazuje nedostatke u primjenjivosti na sustav multirotorske letjelice kao i loše rezultate uslijed djelovanja drifta akcelerometra.

Nadalje, razmotrena je primjena asimptotske estimacije drifta akcelerometra te asimptotska estimacija vanjskog poremećaja primjenom robusnog kompenzatora [8][9]. Za primjenjeni asimptotski estimator drifta akcelerometra rezultati provedenih simulacija pokazali su dobra svojstva estimacije drifta te njegove kompenzacije. Rezultirajući regulacijski sustav pokazao je dobra svojstva slijeđenja zadane referentne trajektorije čak i uslijed djelovanja značajno velikog aditivnog šuma u odnosu na mjerenu akceleraciju sustava. Razmotreni robusni kompenzator vanjskog poremećaja pokazuje dobra svojstva estimacije vanjskog poremećaja, ali uslijed djelovanja aditivnog šuma srednje vrijednosti jednake nuli rezultati simulacija pokazali su nedostatak ove metode pod utjecajem minimalnog odstupanja srednje vrijednosti šuma od nule. Razmatranjem rezultata simulacija za estimatore drifta te vanjskog poremećaja uočena je nemogućnost istovremene primjene ovakvih estimatora.

Korištenjem metode frekvencijskog pomaka za algebarsku estimaciju drifta akcelerometra za dobivene izraze provedene su simulacije s prisutsvom aditivnog šuma u mjerenim signalima akceleracije i pozicije. Dobiveni izraz za estimirani drift akcelerometra nije definiran u trenutku  $t = 0$  te zahtijeva odgađanje estimacije na proizvoljni trenutak  $t \geq \varepsilon > 0$  što predstavlja svojevrsni nedostatak. Rezultati provedenih simulacija pokazuju vrlo dobra svojstva estimacije drifta akcelerometra te slijeđenje zadane referentne trajektorije uslijed značajnog aditivnog šuma u odnosu na mjereni signal akceleracije.

S ciljem daljnje evaluacije performansi i robusnosti kompenzacije greške mjerenja akceleracije te estimacije stanja za razmotrene estimatore stanja potreban je budući rad primjene predloženih estimatora na realnu autonomnu letjelicu.

## Literatura

- [1] Hebertt Sira-Ramírez, Carlos García-Rodríguez, John Cortés-Romero, Alberto Luviano-Juárez : *Algebraic identification and estimation methods in feedback control systems*, John Wiley & Sons, United Kingdom 2014., ISBN 978-1-118-73060-7
- [2] Romain Delpoux, Hebertt Sira-Ramírez i Thierry Floquet: *Acceleration Feedback via an algebraic state estimation method*, 52nd IEEE Conference on Decision and Control, December 10-13, 2013. Florence, Italy
- [3] MathWorks Documentation: *Random Numbers from Normal Distribution with Specific Mean and Variance*, 8. svibnja 2018., <http://www.mathworks.com/help/matlab/math/random-numbers-with-specific-mean-and-variance.html>
- [4] Josip Kasać, Tihomir Žilić, Vladimir Milić i Andrej Jokić: *Frequency-shifting-based stable on-line algebraic parameter identification of linear systems*, Journal of the Franklin Institute, available online 22 March 2017, <https://doi.org/10.1016/j.jfranklin.2017.03.008>
- [5] Josip Kasać, Stojan Stevanović, Tihomir Žilić, Josip Stepanić: *Robust Output Tracking Control of a Quadrotor in the Presence of External Disturbances*, Transactions of Famena, Vol. 37, No. 4, pp. 29-42 (2013)
- [6] Denis Kotarski, Petar Piljek, Hrvoje Brezak, Josip Kasać: *Chattering-Free Tracking Control of a Fully Actuated Multirotor with Passively Tilted Rotors*, Transactions of Famena, Vol. 42, No. 1, pp. 1-14 (2018)
- [7] D. Kotarski, P. Piljek, H. Brezak and J. Kasać: *Design of a fully actuated passively tilted multirotor UAV with decoupling control system*, Proc. of the 8th International Conference on Mechanical and Aerospace Engineering, Prague, Czech Republic, 22-25 July (2017)
- [8] Hao Liu, Danjun Li, Zongyu Zuo i Yisheng Zhong: *Robust Three-Loop Trajectory Tracking Control for Quadrotors With Multiple Uncertainties*, IEEE Transactions On Industrial Electronics, Vol. 63, No. 4, April 2016.
- [9] Igor Boiko i Mohammad Chehadeh: *Sliding mode differentiator/observer for quadcopter velocity estimation through sensor fusion*, International Journal Of Control, 2018., <https://doi.org/10.1080/00207179.2017.1421775>
- [10] R. Beard: *Quadrotor dynamics and control*, Brigham Young University, 2008.

- [11] P. Castillo, R. Lozano i A. E. Dzul: *Modelling and control of mini-flying machines*, Springer-Verlag, 2006.
- [12] T. Bresciani: *Modelling, identification and control of a quadrotor helicopter*, MSc Theses, Lund University, 2008.
- [13] D. Majetić, J. Kasać i D. Brezak: *Zbirka zadataka iz teorije automatskog upravljanja – Viševarijabilni sustavi*, Fakultet strojarstva i brodogradnje, 2016.