

# Predgrijavanje aluminijskih blokova s vrućim zrakom

---

Iličić, Dominik

Undergraduate thesis / Završni rad

2018

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:235:123927>

Rights / Prava: [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2024-07-18**

Repository / Repozitorij:

[Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# ZAVRŠNI RAD

**Dominik Iličić**

Zagreb, 2018.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# ZAVRŠNI RAD

Mentori:

Doc. Dr. sc. Nenad Ferdelji, dipl. ing.

Student:

Dominik Iličić

Zagreb, 2018.

Izjavljujem da sam ovaj rad izradio samostalno koristeći znanja stečena tijekom studija i navedenu literaturu.

Zahvaljujem se svom mentoru doc.dr.sc.Nenadu Ferdeljiju na pruženoj pomoći i savjetima tijekom pisanja ovoga rada.

Dominik Iličić



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE



Središnje povjerenstvo za završne i diplomske ispite  
Povjerenstvo za završne ispite studija strojarstva za smjerove:  
procesno-energetski, konstrukcijski, brodstrojarski i inženjersko modeliranje i računalne simulacije

Sveučilište u Zagrebu	
Fakultet strojarstva i brodogradnje	
Datum	Prilog
Klasa:	
Ur.broj:	

## ZAVRŠNI ZADATAK

Student: **Dominik Ilić**

Mat. br.: 0035197698

Naslov rada na hrvatskom jeziku: **Predgrijavanje aluminijskih blokova s vrućim zrakom**

Naslov rada na engleskom jeziku: **Preheating of aluminium blocks with hot air**

Opis zadatka:

U komori se pomoću vrućeg zraka temperature 110 °C, predgrijavaju aluminijski blokovi dimenzija 510 x 1010 x 7000 mm početne temperature 5 °C. Za izložene se plohe bloka prema vrućem zraku može pretpostaviti da koeficijent konvektivnog prijelaza topline iznosi 10 W/(m<sup>2</sup> K), dok se ploha na kojoj je oslonjen blok može smatrati toplinski izoliranom.

Za slučaj da je aluminijski blok oslonjen na

- donju površinu (1010 x 7000 mm)
- bočnu površinu (510 x 7000 mm)

potrebno je:

- odrediti vremensku promjenu osrednjene temperature aluminijskog bloka i usporediti je s analitičkim izrazom za vremensku promjenu temperature uz zanemarenje toplinskog otpora aluminijskog bloka,
- dijagramski prikazati temperaturni profil za nekoliko vremenskih trenutaka na odabranim presjecima aluminijskog bloka

Usporedite brzinu zagrijavanja aluminijskog bloka 1020 x 1010 x 7000 mm sa slučajem pod a1).

Zadatak riješiti numerički, koristeći metodu konačnih diferencija uz dodatno pojašnjenje uvjeta numeričke stabilnosti korištene metode.

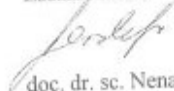
U radu je potrebno navesti korištenu literaturu i eventualno dobivenu pomoć.

Zadatak zadan:  
30. studenog 2017.

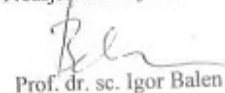
Rok predaje rada:  
1. rok: 23. veljače 2018.  
2. rok (izvanredni): 28. lipnja 2018.  
3. rok: 21. rujna 2018.

Predviđeni datumi obrane:  
1. rok: 26.2. - 2.3. 2018.  
2. rok (izvanredni): 2.7. 2018.  
3. rok: 24.9. - 28.9. 2018.

Zadatak zadao:

  
doc. dr. sc. Nenad Ferdelji

Predsjednik Povjerenstva:

  
Prof. dr. sc. Igor Balen

## SADRŽAJ

SADRŽAJ .....	I
POPIS SLIKA .....	III
POPIS TABLICA .....	IV
POPIS OZNAKA .....	V
SAŽETAK .....	VII
SUMMARY .....	VIII
1. UVOD .....	1
1.1. Diferencijalna jednačba provođenja topline u krutini.....	2
2. NUMERIČKO RJEŠAVANJE NESTACIONARNOG PROVOĐENJA TOPLINE .....	3
2.1. Dimenzijska analiza diferencijalne jednačbe .....	3
3. DISKRETIZACIJA.....	5
3.1. Koncept diskretizacije.....	5
3.2. Metode izvođenja diskretizacijskih jednačbi .....	5
3.2.1. Taylorov red .....	5
3.2.2. Formulacija kontrolnih volumena.....	6
3.3. Metoda kontrolnih volumena .....	7
3.3.1. EksPLICITNA, Crank-Nicolson i potpuno implicitna metoda .....	8
3.3.2. Rubni uvjeti .....	12
3.4. Primjena implicitne metode .....	16
3.4.1. Rješavanje linearnog sustava.....	18
4. Analiza numeričke greške .....	20
4.1. Aproksimacije prve derivacije.....	20
4.1.1. Derivacija „prema unaprijed“ (engl. Forward difference) .....	20
4.1.2. Derivacija „prema unatrag“ (engl. Backward difference).....	21
4.1.3. „Središnja“ derivacija (engl. Central difference).....	22
4.2. Aproksimacije druge derivacije.....	22
4.3. Sheme za nestacionarni problem .....	23
4.3.1. Vremenska derivacija „prema unaprijed“ (engl. Forward time) .....	23
4.3.2. Vremenska derivacija „prema unatrag“ (engl. Backward time).....	24
4.3.3. Crank-Nicolson.....	24
5. REZULTATI .....	26
5.1. Ulazni podaci.....	27
5.2. Procjena utjecajnih parametara.....	27
5.2.1. Utjecaj relativne greške iterativnog postupka .....	27
5.2.2. Utjecaj vremenskih trenutaka .....	28
5.2.3. Utjecaj lokalne udaljenosti točaka .....	29
5.3. Temperaturne raspodjele.....	30
5.3.1. Presjeci bloka.....	30
5.3.1.1. Rezultati za slučaj a), blok oslonjen na donju površinu (1010 x 7000 mm) 31	
5.3.1.2. Rezultati za slučaj b), blok oslonjen na donju površinu (510 x 7000 mm) ..	39

---

5.3.1.3. Rezultati za blok veličine 1020 x 1010 x 7000 mm oslonjen na donju površinu .....	42
6. ZAKLJUČAK.....	43
LITERATURA.....	44
PRILOZI .....	45

**POPIS SLIKA**

Slika 1.	Povijest razvoja računala s relativnom cijenom računanja [1] .....	1
Slika 2.	Temperaturni profili diskretiziranih jednadžbi [3].....	5
Slika 3.	1D mreža s točkama [3].....	5
Slika 4.	Kontrolni volumen za 2D mrežu [3] .....	7
Slika 5.	Promjena temperature s vremenom za tri različite metode [3].....	9
Slika 6.	Uz pojašnjenje stabilnosti eksplicitne metode .....	10
Slika 7.	Rubni uvjet 3. vrste .....	12
Slika 8.	Rubni uvjet 2. vrste .....	13
Slika 9.	Vrh sa rubnim uvjetom 3. vrste.....	14
Slika 10.	Vrh s oba rubna uvjeta.....	15
Slika 11.	Primjer 2D mreže s 30 točaka .....	17
Slika 12.	Linearni sustav $Ax=b$ .....	19
Slika 13.	Računalne točke 1D mreže za sheme konačnih diferencija .....	25
Slika 14.	2D ekvidistantna mreža .....	26
Slika 15.	Presjeci 2D mreže .....	30
Slika 16.	Temperaturna raspodjela u izometriji nakon 1h, 12h i 24h.....	31
Slika 17.	Temperaturna raspodjela na presjeku A-A za različite vremenske intervale .....	32
Slika 18.	Temperaturna raspodjela na presjeku B-B za različite vremenske intervale.....	32
Slika 19.	Temperaturna raspodjela na presjeku C-C za različite vremenske intervale.....	33
Slika 20.	Temperaturna raspodjela na presjeku D-D za različite vremenske intervale .....	33
Slika 21.	Temperaturna raspodjela na presjeku E-E za različite vremenske intervale .....	34
Slika 22.	Temperaturni profil za presjeke A-A, B-B i D-D nakon 1h.....	34
Slika 23.	Temperaturni profil za presjeke A-A, B-B i D-D nakon 12h.....	35
Slika 24.	Temperaturni profil za presjeke A-A, B-B i D-D nakon 24h.....	35
Slika 25.	Temperaturni profil za presjeke C-C i E-E nakon 1h.....	36
Slika 26.	Temperaturni profil za presjeke C-C i E-E nakon 12h.....	36
Slika 27.	Temperaturni profil za presjeke C-C i E-E nakon 24h.....	37
Slika 28.	Osrednjena temperatura bloka numerički i analitički .....	38
Slika 29.	Temperaturna raspodjela u izometriji nakon 1h, 12h i 24h.....	39
Slika 30.	Usporedba temperature u točki $T_{1,1}$ za slučaj a) i b) .....	40
Slika 31.	Usporedba temperature u točki $T_{ns,1}$ za slučaj a) i b) .....	40
Slika 32.	Usporedba temperature u točki $T_{1,ms}$ za slučaj a) i b).....	41
Slika 33.	Osrednjena temperatura bloka numerički i analitički za slučaj b).....	41
Slika 34.	Osrednjena temperatura bloka numerički i analitički za manji i veći blok .....	42



---

**POPIS TABLICA**

Tablica 1. Analiza utjecaja relativne greške iterativnog postupka.....28  
Tablica 2. Analiza utjecaja vremenskog intervala.....28  
Tablica 3. Analiza utjecaja lokalne udaljenosti točaka.....29

**POPIS OZNAKA**

Latinične oznake:

Oznaka	Jedinica	Opis
<b>A</b>	-	matrica linearnog sustava
<i>A</i>	m <sup>2</sup>	površina prijelaza topline
<i>a</i>	m <sup>2</sup> /s	temperaturna provodnost
<i>Bi</i>	-	Biotova značajka
<b>b</b>	-	vektor poznatih temperatura
<i>c</i>	J/(kg K)	specifični toplinski kapacitet kapljevine i krutine
<i>e</i>	-	relativno odstupanje iterativnog postupka
<i>f</i>	-	težinski faktor
<i>h</i>	m	lokalna udaljenost točaka ekvidistantne mreže
<i>m</i>	-	broj redaka ekvidistantne mreže
<i>n</i>	-	broj stupaca ekvidistantne mreže
<i>O</i>	-	red veličine greške zaokruživanja
<i>T</i>	K	termodinamička temperatura
<i>T<sub>zr</sub></i>	K	termodinamička temperatura zraka
<i>t</i>	s	vrijeme
<i>t<sub>uk</sub></i>	s	ukupno vrijeme provođenja topline
<i>t<sub>0</sub></i>	s	početni trenutak
$\Delta t$	s	vremenski interval
<b>x</b>	-	vektor nepoznatih temperatura
$\Delta x$	m	udaljenost točaka u smjeru x na mreži
$\hat{x}$	-	bezdimenzijska udaljenost u smjeru x
$\Delta y$	m	udaljenost točaka u smjeru y na mreži
$\hat{y}$	-	bezdimenzijska udaljenost u smjeru y
$\hat{z}$	-	bezdimenzijska udaljenost u smjeru y

Grčke oznake:

<i>a</i>	W/(m <sup>2</sup> K)	koeficijent prijelaza topline
$\vartheta$	°C	(celzijeva) temperatura
$\vartheta_{\text{poc}}$	°C	(celzijeva) temperatura početnog trenutka
$\vartheta_{\text{zr}}$	°C	(celzijeva) temperatura zraka
$\lambda$	W/(m K)	toplinska provodnost
$\rho$	kg/m <sup>3</sup>	gustoća
$\Phi_V$	W	unutrašnji toplinski izvor (ponor)

Popis indeksa:

<b>Oznaka</b>	<b>Opis</b>
1, 2, 3	veličina u točkama 1, 2 i 3
P, W, E, S, N	veličina u točkama P, W, E, S, N
$n$	broj stupaca
$ns$	srednji stupac
$m$	broj redaka
$ms$	srednji redak

Popis gornjih indeksa:

<b>Oznaka</b>	<b>Opis</b>
0	veličina u trenutku $t = t_0$
$t$	veličina u trenutku $t$
$t + \Delta t$	veličina u trenutku $t = t + \Delta t$
$t - \Delta t$	veličina u trenutku $t = t - \Delta t$

---

**SAŽETAK**

U ovom radu zadatak je numerički odrediti nestacionarno zagrijavanje aluminijskog bloka. Pomoću pojednostavljenog matematičkog modela i formulacijom konačnih volumena izvedene su diskretizirane jednačbe potrebne za numeričko opisivanje provođenja topline. Metodom konačnih diferencija definirale su se pogreške zaokruživanja numeričke aproksimacije. Rješavanjem linearnog sustava diskretiziranih jednačbi dobivene su temperature na točkama domene. Uspoređeni su rezultati dobiveni za različite rubne uvjete, te dimenzije s analitičkim izrazom provođenja topline kroz krutinu zanemarivog toplinskog otpora.

Ključne riječi: nestacionarno provođenje topline, metoda kontrolnih volumena, metoda konačnih diferencija

---

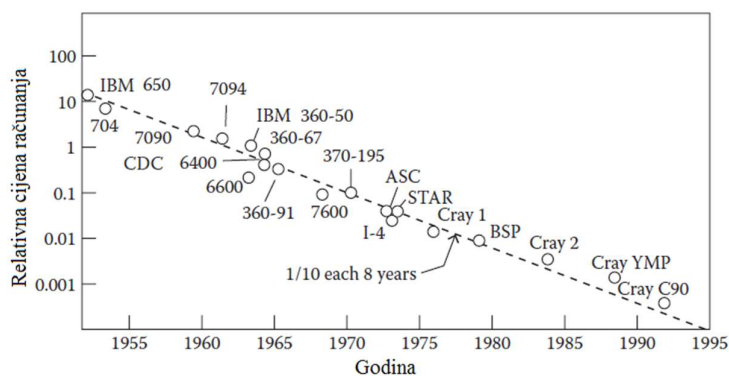
**SUMMARY**

In this paper the task is to numerically solve transient heating of aluminium block. Discrete equations needed for numerical description of heat transfer were derived with simplified mathematical model and control volume formulation. Truncation error from numerical approximation was defined with finite difference method. Temperatures on domains nodes were obtained by solving linear system. Results given with different boundary conditions and dimensions were compared with analytical expression of lumped system.

Key words: transient heat transfer, control volume method, finite difference method

## 1. UVOD

Razvoj visoko brzih računala tijekom prijašnjih desetljeća imalo je za utjecaj na način kako se znanstveni principi mehanike fluida i termodinamike primjenjuju u modernoj inženjerskoj praksi. Problemi za koje je trebalo godine kako bi se riješili s postojećim računalnim metodama i računalima prije 50 godina, danas se mogu riješiti unutar nekoliko sekundi. Ovo nikako ne znači da se svi današnji inženjerski problemi rješavaju u samo nekoliko sekundi, nego da se veliki napredak postigao u efikasnosti računalnih metoda te performansama računala. Stabilan razvoj u računalnoj tehnologiji proteklog pola stoljeća razultirali su stvaranju nove metodologije za rješavanje kompleksnih problema u mehanici fluida i termodinamici poznate kao računalna dinamika fluida (engl. Computational fluid dynamics). U ovom računalnom (ili numeričkom) pristupu, jednadžbe (obično u diferencijalnoj ili integralnoj formi) koje upravljaju procesom interesa rješavaju se numerički. Rad na razvoju i primjeni numeričkih metoda, posebno metoda konačnih diferencija (MKD) za rješavanje običnih i parcijalnih diferencijalnih jednadžbi intenzivno je počeo početkom dvadesetog stoljeća. Kasnih 1930tih Atanasoff je izumio automatsko digitalno računalo za rješavanje problema u mehanici fluida. Ipak, ovi događaji sami po sebi nisu rezultirali revolucijom u inženjerskoj praksi. Nagli porast računalne aktivnosti započeo je nakon opće dostupnosti visoko-brzih digitalnih računala tijekom 1960tih. Ovim porastom dostupnosti digitalnih računala pojavio se numerički pristup kao nova metoda za rješavanje problema u mehanici kontinuuma. Danas je to vrlo važan alat koji služi za opisivanje kompleksnih strujanja fluida, prijenosa topline i ostalih fizikalnih pojava [1].



Slika 1. Povijest razvoja računala s relativnom cijenom računanja [1]

### 1.1. Diferencijalna jednadžba provođenja topline u krutini

Problem nalaženja rješenja temperaturnog polja u krutini zahtjeva najprije formulaciju diferencijalne jednadžbe provođenja topline. Diferencijalna jednadžba provođenja topline naravi predstavlja jednu od formulacija zakona očuvanja energije uzimajući u obzir da je promatrani sustav kruta tvar, koju je, u velikom broju slučajeva, moguće dodatno pojednostaviti uvođenjem sljedećih pretpostavki [2]:

- Promatrano tijelo (krutina) je homogeno i izotropno
- Fizikalna svojstva tijela su konstanta (temperaturno neovisna)
- Deformacija promatranog infinitezimalnog volumena, zbog varijacije temperature, zanemarivo je malena
- Unutrašnji toplinski izvori (ponori), koji mogu biti zadani u generalnom obliku  $\Phi_V = f(x, y, z, t)$ , nejednoliko su distribuirani po volumenu krutine [2]

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) \pm \Phi_V \quad (1.1)$$

Gornja jednadžba daje vezu između vremenske promjene temperature u bilo kojoj točki prostora promatrane krutine, uvjetovanu provođenjem topline, uz postojanje toplinskog izvora (ponora). Jednadžba (1.1) uključuje u sebi prostornu promjenu toplinske provodnosti krutine [2].

Ako je vrijednost toplinske provodnosti konstanta nad čitavom domenom krutine (izotropna, homogena krutina), tada se jednadžbu (1.1) lako transformira u oblik [2]

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \pm \frac{\Phi_V}{\rho c} \quad (1.2)$$

U kojoj veličina

$$a = \frac{\lambda}{\rho c}, \quad (1.3)$$

Predstavlja temperaturnu provodnost i izražava se u  $\text{m}^2/\text{s}$ .

Jed. (1.2) predstavlja diferencijalnu jednadžbu modela koja će biti primijenjena za rješavanje zadanog problema nestacionarnog provođenja topline u ovom radu.

## 2. NUMERIČKO RJEŠAVANJE NESTACIONARNOG PROVOĐENJA TOPLINE

Za slučajeve nestacionarnog provođenja topline, postoje također, dakako u manjoj mjeri, rješenja u analitičkom obliku. Za isti oblik problema u literaturi se mogu pronaći u pojedinim slučajevima i rješenja kako u grafičkom (Binder – Schmidtova metoda), tako i grafoanalitičkom obliku (Gröberova metoda) [2].

Ravoj elektroničkih računala omogućuje vrlo efikasnu primjenu relevantnih numeričkih metoda za rješavanje nestacionarnih temperaturnih polja u krutinama proizvoljnog oblika. Danas su poznate numeričke metode: metoda konačnih diferencija (MKD), metoda konačnih elemenata (MKE), te metoda kontrolnih volumena (MKV) [2].

Često je efikasnost numeričkih metoda ograničena mogućnostima računala te je u pravilu usko vezana s brojem operacija (elemenata) u numeričkoj analizi. Rijetki su slučajevi u inženjerskoj praksi u kojima pojedine modele nije moguće dodatno pojednostaviti čime se podiže efikasnost numeričke analize. Pri tome valja voditi računa da uvedena pojednostavljenja ne narušavaju znatno točnost rezultata. Jedna od čestih metoda, koja može znatno smanjiti broj potrebnih operacija je dimenzijska analiza modela provođenja topline.

### 2.1. Dimenzijska analiza diferencijalne jednadžbe

U ovom radu analizira se zagrijavanje aluminijskog bloka (510 x 1010 x 7000 mm). S obzirom da je jedna dimenzija gotovo za red veličine veća od ostalih, moguće je provesti dimenzijsku analizu u svrhu dodatnog pojednostavljenja modela.

Uvedu li se sljedeće supstitucije, uz  $L = 1,01\text{m}$ , u jednadžbu (1.2)

$$\hat{x} = \frac{x}{L}, \quad 0 \leq \hat{x} \leq 1 \quad (2.1)$$

$$\hat{y} = \frac{1}{0,505 L} y, \quad 0 \leq \hat{y} \leq 1 \quad (2.2)$$

$$\hat{z} = \frac{1}{6,93 L} z, \quad 0 \leq \hat{z} \leq 1 \quad (2.3)$$

Dobijemo

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \left( \frac{\partial^2 T}{\partial \hat{x}^2} + \frac{1}{0,505^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \hat{y}^2} + \frac{1}{6,93^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \hat{z}^2} \right) \pm \frac{\Phi_V}{\rho c} \quad (2.4)$$



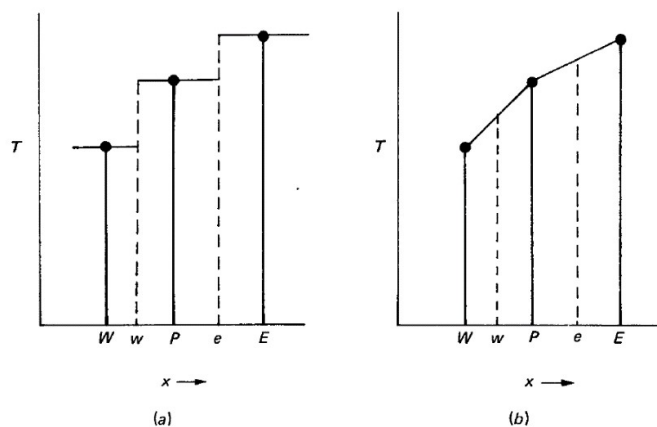
Analiziranjem članova unutar zgrade u jed. (2.4), možemo vidjeti da je prvi član oko 50 puta veći od trećeg člana, te da je drugi član oko 200 puta veći od trećeg. Sada možemo zanemariti član provođenja topline u smjeru z jer njegov član utječe zanemarivo malo naspram provođenja u x i y smjeru. S obzirom da u aluminijskog bloku ne postoji toplinski izvor ili ponor, konačna diferencijalna jednadžba modela glasi

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (2.5)$$

### 3. DISKRETIZACIJA

#### 3.1. Koncept diskretizacije

Algebarske jednačbe koje sadrže nepoznate temperature u odabranoj točki mreže, (u daljnjem tekstu jednačbe diskretizacije), izvedene su iz diferencijalne jednačbe (2.5). Unutar ovog izvoda potrebno je odrediti interpolacijsku funkciju između točaka mreže. Često se linearni profil uzima u obzir zbog svoje praktičnosti, koji je prikazan na Slici 2. (b) [3].



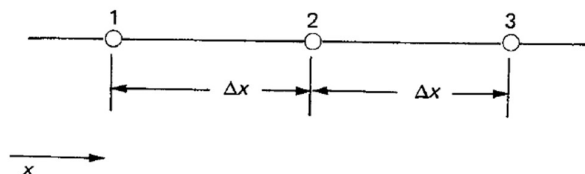
Slika 2. Temperaturni profili diskretiziranih jednačbi [3]

#### 3.2. Metode izvođenja diskretizacijskih jednačbi

Za diferencijalnu jednačbu modela, jed. (2.5), potrebne diskretizacijske jednačbe se mogu izvesti na više načina. Ovdje su spomenute samo dvije koje su vezane za MKD i MKV [3].

##### 3.2.1. Taylorov red

Uobičajena procedura izvođenja jednačbi metode konačnih diferencija sastoji se od aproksimacija derivacija pomoću Taylorova reda. Neka su zadane točke na mreži kao na Slici 3.



Slika 3. 1D mreža s točkama [3]

Putem razvoja Taylorova reda:

$$T_1 = T_2 - \Delta x \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_2 + \frac{1}{2} (\Delta x)^2 \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right)_2 - \dots \quad (3.1)$$

$$T_3 = T_2 + \Delta x \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_2 + \frac{1}{2} (\Delta x)^2 \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right)_2 + \dots \quad (3.2)$$

Zanemarujući treći član i nadalje, te zbrajanjem i oduzimanjem ovih dviju jednažbi, dobiva se

$$\left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_2 = \frac{T_3 - T_1}{2\Delta x} \quad (3.3)$$

$$\left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right)_2 = \frac{T_3 + T_1 - 2T_2}{(\Delta x)^2} \quad (3.4)$$

Uvrštavanjem ovih izraza u diferencijalnu jednažbu (2.5) slijede diskretizirane jednažbe konačnih diferencija. Zbog razloga kasnije navedenih u poglavlju 3.2.2. odabrana je formulacija kontrolnih volumena kao metoda izvođenja diskretiziranih jednažbi.

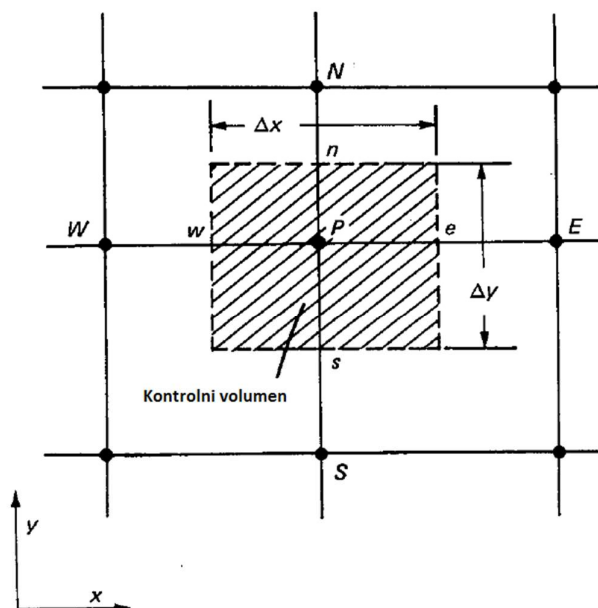
### 3.2.2. Formulacija kontrolnih volumena

Ideja formulacije kontrolnih volumena je jednostavna za razumjeti i u skladu je s direktnom fizikalnom interpretacijom. Domena računanja dijeli se na manje nepreklapajuće kontrolne volumene tako da jedan kontrolni volumen okružuje jednu točku mreže. Diferencijalna jednažba (2.5) se tada integrira za svaki kontrolni volumen. Linearni profil između svake točke mreže koristi se za lako opisivanje potrebnih integrala. Rezultat ovog postupka su diskretizirane jednažbe koje sadrže temperature svake točke u mreži. Iako se pristupi MKV i MKD potpuno razlikuju, rezultat diskretizirane jednažbe biti će isti u slučaju ekvidistantnih točaka mreže u kartezijevim koordinatama. MKD metoda počiva na formulaciji Taylorovog razvoja koja je relativno jednostavna ali dopušta manju fleksibilnost i ne pruža uvid u fizikalno značenje. Upravo zbog svoje jednostavnosti razumijevanja fizikalne interpretacije, odabran je pristup metode kontrolnih volumena. Najatraktivnije svojstvo formulacije diskretizacijskih jednažbi pomoću kontrolnih volumena jeste da zakoni očuvanja mase, momenta i energije zadovoljavaju bilo koju grupu kontrolnih volumena unutar domene, i naravno cijelu domenu [3].

### 3.3. Metoda kontrolnih volumena

S obzirom da je vrijeme „jednosmjerna“ koordinata, rješenje jednačbe dobivamo pomoću distribucije temperatura u početnom trenutku ( $t = t_0$ ). Temperature pojedinih točaka u početnom trenutku biti će označene s  $T_P^0, T_E^0, T_W^0, T_S^0, T_N^0$ , a temperature u novom vremenskom trenutku ( $t = t_0 + \Delta t$ ) s  $T_P, T_E, T_W, T_S, T_N$  [3].

Diskretizirana jednačba se sada izvodi pomoću integriranja jednačbe (2.5) na kontrolnom volumenu prikazanom na Slici 4.



Slika 4. Kontrolni volumen za 2D mrežu [3]

$$\int_s^n \int_w^e \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial T}{\partial t} dt dx dy = a \left[ \int_t^{t+\Delta t} \int_s^n \int_w^e \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dx dy dt + \int_t^{t+\Delta t} \int_w^e \int_s^n \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} dy dx dt \right] \quad (3.5)$$

Za predočenje člana  $\frac{\partial T}{\partial t}$ , pretpostavit će se da je temperatura  $T_P$  jednaka po cijelom kontrolnom volumenu u datom trenutku. Stoga se lijevi dio jednačbe (3.5) može zapisati kao

$$\int_s^n \int_w^e \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial T}{\partial t} dt dx dy = \Delta x \Delta y (T_P - T_P^0) \quad (3.6)$$

Desni dio jednadžbe (3.5) može se pomoću linearnog profila temperature između točaka mreže zapisati kao

$$\begin{aligned} \Delta x \Delta y (T_P - T_P^0) &= a \int_t^{t+\Delta t} \left[ \left( \frac{T_E - T_P}{\Delta x} - \frac{T_P - T_W}{\Delta x} \right) \Delta y \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{T_N - T_P}{\Delta y} - \frac{T_P - T_S}{\Delta y} \right) \Delta x \right] dt \end{aligned} \quad (3.7)$$

Na ovom je koraku potrebno odabrati pretpostavku kako se  $T_P$ ,  $T_E$ ,  $T_W$ ,  $T_S$  i  $T_N$  ponašaju između vremenskih trenutaka  $t_0$  i  $t_0 + \Delta t$ . Brojne pretpostavke su moguće, neke od njih se mogu generalno zapisati kao [3]

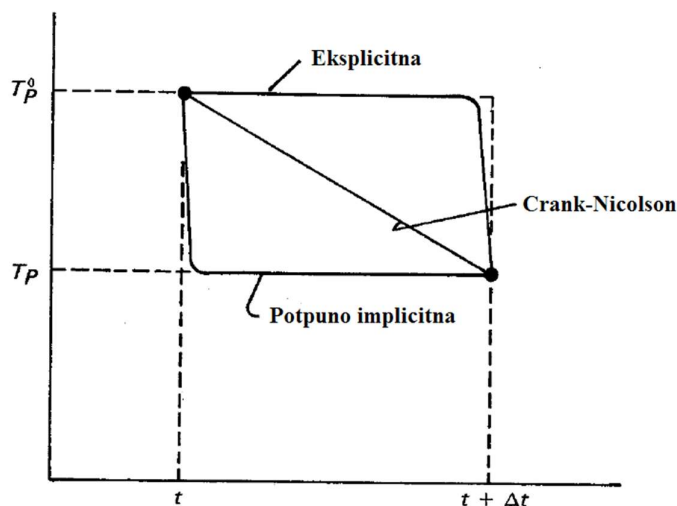
$$\int_t^{t+\Delta t} T_P dt = [f T_P + (1 - f) T_P^0] \Delta t \quad (3.8)$$

Gdje je  $f$  težinski faktor između 0 i 1. Koristeći istu formulu za temperature  $T_E$ ,  $T_W$ ,  $T_S$  i  $T_N$ , uz pretpostavku da je  $\Delta x = \Delta y = h$ , lako se izvodi osnovna diskretizacijska jednadžba modela

$$\begin{aligned} \frac{h^2}{a \Delta t} (T_P - T_P^0) &= f [T_E + T_W + T_S + T_N - 4T_P] \\ &\quad + (1 - f) [T_E^0 + T_W^0 + T_S^0 + T_N^0 - 4T_P^0] \end{aligned} \quad (3.9)$$

### 3.3.1. *Eksplisitna, Crank-Nicolson i potpuno implicitna metoda*

Za određene specifične vrijednosti težinskog faktora  $f$ , diskretizacijska jednadžba (3.7) reducira se na jedne od dobro poznatih shema za rješavanje paraboličnih diferencijalnih jednadžbi. To jest,  $f = 0$  predstavlja eksplisitnu shemu,  $f = 0,5$  predstavlja Crank-Nicolsonovu shemu, a  $f = 1$  predstavlja potpuno implicitnu shemu. Sljedeća slika kvalitativno prikazuje različito ponašanje temperature  $T_P$  ovih shema kroz vremenski interval  $\Delta t$  [3].



Slika 5. Promjena temperature s vremenom za tri različite metode [3]

### Eksplisitna metoda

Za eksplisitnu metodu ( $f = 0$ ), jednačba (3.9) poprima oblik:

$$\frac{h^2}{a\Delta t}(T_P - T_P^0) = T_E^0 + T_W^0 + T_S^0 + T_N^0 - 4T_P^0 \quad (3.10)$$

Ova metoda je dobila ime po svojem svojstvu da se iz jednačbe (3.10) može eksplicitno izraziti temperatura  $T_P$  pomoću poznatih temperatura iz prethodnog vremenskog koraka  $T_P^0$ ,  $T_E^0$ ,  $T_W^0$ ,  $T_S^0$ ,  $T_N^0$ . Bilo koja shema sa  $f \neq 0$  u naravi je implicitna, tj.  $T_P$  je funkcija nepoznatih temperatura iz istog vremenskog koraka  $T_E$ ,  $T_W$ ,  $T_S$  i  $T_N$ . Iz jednačbe (3.10) se vidi glavni nedostatak eksplisitne metode – koeficijent ispred  $T_P^0$  može postati negativan te time može doći do nefizikalnih rješenja.

Jednačba (3.10) može se zapisati i na sljedeći način

$$T_P = \frac{a\Delta t}{h^2}(T_E^0 + T_W^0 + T_S^0 + T_N^0) + \left(1 - \frac{4a\Delta t}{h^2}\right)T_P^0 \quad (3.11)$$

Tj. uvjet stabilnosti eksplisitne metode je

$$\Delta t < \frac{h^2}{4a} = \frac{\rho ch^2}{4\lambda} \quad (3.12)$$

Kako bi se stabilnost eksplicitne metoda i pojava nefizikalnih rješenja pobliže objasnila, zamislimo primjer jednodimenzionalni nestacionarni problem s točkama  $T_1$ ,  $T_2$  i  $T_3$ , kao na Slici 3. Ovaj problem bio bi diskretiziran jednažbom (3.10), ali u jednodimenzionalnom obliku

$$\frac{\Delta x^2}{a\Delta t}(T_2 - T_2^0) = T_1^0 + T_3^0 - 2T_2^0 \quad (3.13)$$

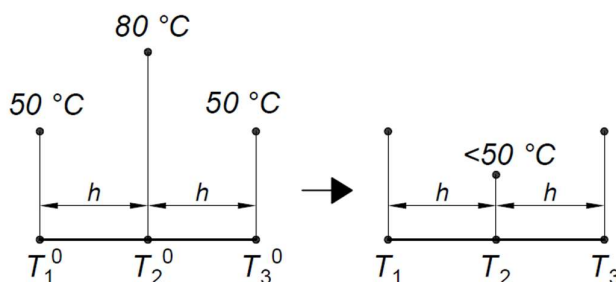
Iz koje bi uvjet stabilnosti bio

$$\Delta t < \frac{\Delta x^2}{2a} = \frac{\rho c \Delta x^2}{2\lambda} \quad (3.14)$$

Za  $h = 0,01$  m, te aluminij ( $a = 9,37 \cdot 10^{-5}$  m<sup>2</sup>/s), uvjet stabilnosti iznosio bi

$$\Delta t < 0,53 \text{ s} \quad (3.15)$$

Za slučaj temperature kada bi temperature  $T_1^0$  i  $T_3^0$  bile 50 °C, a temperatura  $T_2^0$  80 °C uz ispunjenje uvjeta (3.15), temperatura u novom vremenskom trenutku  $T_3$  bila bi između 50 °C i 80 °C. Ako uvjet (3.15) ne bi bio ispunjen, temperatura u novom vremenskom trenutku  $T_3$  bila bi manja od 50 °C, što narušava drugi glavni stavak termodinamike. Slika 6. Kvalitativno opisuje slučaj kada uvjet stabilnost nije ispunjen [6].



Slika 6. Uz pojašnjenje stabilnosti eksplicitne metode

---

*Crank-Nicolson metoda*

Za Crank-Nicolson metodu ( $f = 0,5$ ), jednačba (3.9) poprima oblik

$$\begin{aligned} \frac{h^2}{a\Delta t} (T_P - T_P^0) = & 0,5[T_E + T_W + T_S + T_N - 4T_P] \\ & + 0,5[T_E^0 + T_W^0 + T_S^0 + T_N^0 - 4T_P^0] \end{aligned} \quad (3.16)$$

Mora se napomenuti kako za male vremenske korake Crank-Nicolson metoda je najtočnija od ove tri metode jer za dovoljno maleni vremenski korak međusobna ovisnost temperatura između dva koraka je približno linearna [3]. U ovom primjeru završnog rada, ova metoda nije povoljna jer se zahtijevaju dugi vremenski koraci, što bi poništilo njenu glavnu prednost nad ostalim metodama.

*Potpuno implicitna metoda*

Za potpuno implicitnu metodu ( $f = 1$ ), jednačba (3.9) poprima oblik

$$\frac{h^2}{a\Delta t} (T_P - T_P^0) = T_E + T_W + T_S + T_N - 4T_P \quad (3.17)$$

Ova metoda je bezuvjetno stabilna i stoga pogodna za tehničke probleme vrlo dugotrajnih zagrijavanja kao što je primjer zagrijavanja aluminijskog bloka u ovom radu. Vidljivo je kako pri težnji za beskonačnim vremenskim korakom  $\Delta t \rightarrow \infty$ , jednačba (3.14) poprima oblik stacionarnog dvodimenzijskog provođenja u krutini.

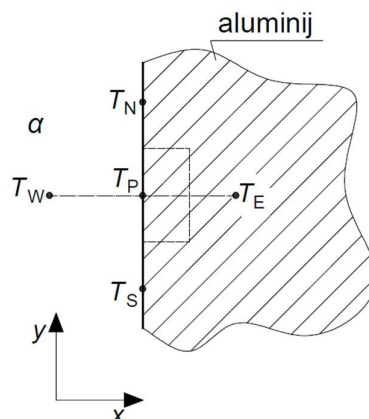


### 3.3.2. Rubni uvjeti

Osim početnih uvjeta, rješenje parcijalne diferencijalne jednačbe zahtjeva definiranje uvjeta na rubovima domene.

Rubni uvjeti koji se javljaju u ovom zadatku su:

- I. Rubni uvjet 3. vrste (Newtonov iskustveni stavak)



Slika 7. Rubni uvjet 3. vrste

Kako je to uvjet na rubu domene, prvi kontrolni volumen ima upola manju površinu od reprezentativnog kontrolnog volumena unutar domene!

Ovaj rubni uvjet definiran je kao

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_s = -\frac{T_P - T_W}{\frac{\lambda}{\alpha}} \quad (3.18)$$

U kojem je temperatura  $T_W$ , temperatura zraka,  $T_W = T_{zr}$ .

U nastavku je dan prikaz diskretizacijske jednačbe ovog rubnog uvjeta u slučaju eksplicitne, odnosno potpuno implicitne metode

#### Eksplicitna metoda

Integrirajući jednačbu (3.5) uz uvrštavanje  $f = 0$ , dobije se eksplicitni izraz za ovaj rubni uvjet

$$\frac{h^2}{a\Delta t}(T_P - T_P^0) = 2T_E^0 + T_S^0 + T_N^0 - \left(4 + 2\frac{\alpha h}{\lambda}\right)T_P^0 + 2\frac{\alpha h}{\lambda}T_{zr} \quad (3.19)$$

Uređenjem ove jednadžbe dobiva se potencijalno novi uvjet stabilnosti eksplcitne jednadžbe

$$\Delta t < \frac{\rho ch^2}{2\alpha h + 4\lambda} \quad (3.20)$$

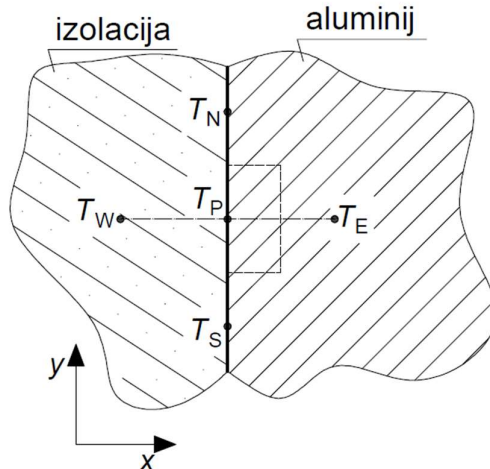
### Potpuno implicitna metoda

Integrirajući jednadžbu (3.5) uz uvrštavanje  $f = 1$ , dobiva se implicitni izraz za ovaj rubni uvjet

$$\frac{h^2}{a\Delta t}(T_P - T_P^0) = 2T_E + T_S + T_N - \left(4 + 2\frac{\alpha h}{\lambda}\right)T_P + 2\frac{\alpha h}{\lambda}T_{zr} \quad (3.21)$$

Ovdje se vidi kako je implicitna metoda bezuvjetno stabilna, bez obzira na rubni uvjet.

## II. Rubni uvjet 2. vrste (adijabatski rubni uvjet)



Slika 8. Rubni uvjet 2. vrste

Kako je to uvjet na rubu domene, i u ovom slučaju prvi kontrolni volumen ima upola manju površinu od reprezentativnog kontrolnog volumena unutar domene!

Ovaj rubni uvjet definiran je kao

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_s = 0 \quad (3.22)$$

U nastavku je dan prikaz diskretizacijske jednačbe ovog rubnog uvjeta u slučaju eksplicitne, odnosno potpuno implicitne metode.

### Eksplícitna metoda

Integrirajući jednačbu (3.5) uz uvrštavanje  $f = 0$ , dobije se eksplicitni izraz za ovaj rubni uvjet

$$\frac{h^2}{a\Delta t}(T_P - T_P^0) = 2T_E^0 + T_S^0 + T_N^0 - 4T_P^0 \quad (3.23)$$

Uređenjem ove jednačbe dobiva se isti uvjet stabilnosti eksplicitne jednačbe

$$\Delta t < \frac{h^2}{4a} = \frac{\rho ch^2}{4\lambda} \quad (3.24)$$

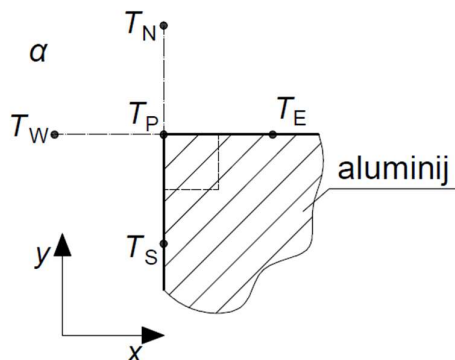
### Potpuno implicitna metoda

Integrirajući jednačbu (3.5) uz uvrštavanje  $f = 1$ , dobiva se implicitni izraz za ovaj rubni uvjet

$$\frac{h^2}{a\Delta t}(T_P - T_P^0) = 2T_E + T_S + T_N - 4T_P \quad (3.25)$$

Također posebno se moraju uzeti u obzir i vrhovi na kojima se dodiruju dva ruba. Tako je moguća kombinacija dva rubna uvjeta ili pak „dvostruki“ rubni uvjet 3. vrste.

### III. Vrh sa „dvostrukim“ rubnim uvjetom 3. vrste



Slika 9. Vrh sa rubnim uvjetom 3. vrste

Kako je to uvjet na spoju dvaju rubova domene, analizirani kontrolni volumen ima četvrtinu površine reprezentativnog kontrolnog volumena unutar domene!

Temperatura  $T_W$  i  $T_N$  je temperatura zraka,  $T_W = T_N = T_Z$

U nastavku je dan prikaz diskretizacijske jednadžbe ovog rubnog uvjeta u slučaju eksplicitne, odnosno potpuno implicitne metode.

### Eksplicitna metoda

Integrirajući jednadžbu (3.5) uz uvrštavanje  $f = 0$ , dobije se eksplicitni izraz za ovaj rubni uvjet

$$\frac{h^2}{a\Delta t}(T_P - T_P^0) = 2(T_E^0 + T_S^0) - (4 + 4\frac{\alpha h}{\lambda})T_P^0 + 4\frac{\alpha h}{\lambda}T_{Zr} \quad (3.26)$$

Uređenjem ove jednadžbe dobiva se potencijalno novi uvjet stabilnosti eksplicitne jednadžbe

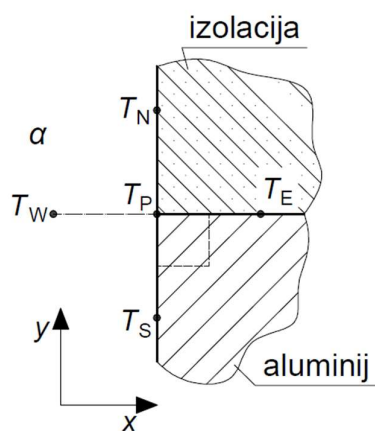
$$\Delta t < \frac{\rho ch^2}{4\alpha h + 4\lambda} \quad (3.27)$$

### Potpuno implicitna metoda

Integrirajući jednadžbu (3.5) uz uvrštavanje  $f = 1$ , dobiva se implicitni izraz za ovaj rubni uvjet

$$\frac{h^2}{a\Delta t}(T_P - T_P^0) = 2(T_E + T_S) - (4 + 4\frac{\alpha h}{\lambda})T_P + 4\frac{\alpha h}{\lambda}T_W \quad (3.28)$$

#### IV. Vrh s kombinacijom dvaju rubnih uvjeta



Slika 10. Vrh s oba rubna uvjeta

Kako je to uvjet na spoju dvaju rubova domene, analizirani kontrolni volumen ima četvrtinu površine reprezentativnog kontrolnog volumena unutar domene!

S gornje strane se nalazi izolacija, dok se s lijeve strane nalazi zrak.

### *Eksplisitna metoda*

Integrirajući jednadžbu (3.5) uz uvrštavanje  $f = 0$ , dobije se eksplicitni izraz za ovaj rubni uvjet

$$\frac{h^2}{a\Delta t}(T_P - T_P^0) = 2(T_E^0 + T_S^0) - (4 + 2\frac{\alpha h}{\lambda})T_P^0 + 2\frac{\alpha h}{\lambda}T_W \quad (3.29)$$

Uređenjem ove jednadžbe dobiva se potencijalno novi uvjet stabilnosti eksplicitne jednadžbe

$$\Delta t < \frac{\rho ch^2}{2\alpha h + 4\lambda} \quad (3.30)$$

### *Potpuno implicitna metoda*

Integrirajući jednadžbu (3.5) uz uvrštavanje  $f = 1$ , dobiva se implicitni izraz za ovaj rubni uvjet

$$\frac{h^2}{a\Delta t}(T_P - T_P^0) = 2(T_E + T_S) - (4 + 2\frac{\alpha h}{\lambda})T_P + 2\frac{\alpha h}{\lambda}T_W \quad (3.31)$$

Može se vidjeti kako uvjet stabilnost eksplicitne metode ovisi o vrsti rubnih uvjeta, stoga je potrebno odrediti uvjet stabilnost za svaki od slučajeva i uzeti „najstroži“ kako bi se zadovoljila stabilnost metode u svakom rubnom uvjetu, tj. u svakoj diskretiziranoj jednadžbi.

$$\Delta t < \min \left\{ \frac{\rho ch^2}{4\lambda}, \frac{\rho ch^2}{4\alpha h + 4\lambda}, \frac{\rho ch^2}{2\alpha h + 4\lambda} \right\} \quad (3.32)$$

## **3.4. Primjena implicitne metode**

Zbog toga što  $T_P$  ovisi o temperaturama svojih susjeda  $T_E$ ,  $T_W$ ,  $T_S$  i  $T_N$  rješavanje ovih diskretiziranih jednadžbi svodi se na rješavanje linearnog sustava  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ .

Kako bi se kreirao takav linearni sustav potrebno je definirati domenu na kojoj se računaju diskretizirane jednadžbe.



Slika 11. Primjer 2D mreže s 30 točaka

Slika 11. predstavlja primjer mrežu s 30 ekvidistantnih točaka s pripadajućim rubnim uvjetima. Za točke 8, 9, 10, 11, 14, 15, 16, 17, 20, 21, 22 i 23 koristit će se diskretizirana jednačba (3.14). Na primjer, za točku 8 i 15 diskretizacijske jednačbe glase

$$\frac{h^2}{a\Delta t}(T_8 - T_8^0) = T_9 + T_7 + T_2 + T_{14} - 4T_8 \quad (3.33)$$

$$\frac{h^2}{a\Delta t}(T_{15} - T_{15}^0) = T_{16} + T_{14} + T_9 + T_{21} - 4T_{15} \quad (3.34)$$

Ili zapisano na sljedeći način, kojeg se zadržava kao oblik zapisivanja zbog lakše vizualizacije kreiranja linearnog sustava.

$$\left(1 + 4\frac{a\Delta t}{h^2}\right)T_8 - \frac{a\Delta t}{h^2}(T_9 + T_7 + T_2 + T_{14}) = T_8^0 \quad (3.35)$$

$$\left(1 + 4\frac{a\Delta t}{h^2}\right)T_{15} - \frac{a\Delta t}{h^2}(T_{14} + T_{16} + T_9 + T_{21}) = T_{15}^0 \quad (3.36)$$

Za točke 7, 12, 13, 18, 19, 24, 26, 27, 28 i 29 koristit će se diskretizirana jednačba (3.18).

Na primjer za točke 7 i 27 diskretizacijske jednačbe će biti:

$$(1 + 4\frac{a\Delta t}{h^2} + 2\frac{a\Delta t\alpha}{\lambda h})T_7 - \frac{a\Delta t}{h^2}(2T_8 + T_1 + T_{13}) = T_7^0 + 2\frac{a\Delta t\alpha}{\lambda h}T_{zr} \quad (3.37)$$

$$(1 + 4\frac{a\Delta t}{h^2} + 2\frac{a\Delta t\alpha}{\lambda h})T_{27} - \frac{a\Delta t}{h^2}(2T_{21} + T_{26} + T_{28}) = T_{27}^0 + 2\frac{a\Delta t\alpha}{\lambda h}T_{zr} \quad (3.38)$$

Za točke 2, 3, 4 i 5 koristit će se diskretizirana jednadžba (3.22).

Na primjer za točku 4 diskretizacijska jednadžba će biti:

$$(1 + 4\frac{a\Delta t}{h^2})T_4 - \frac{a\Delta t}{h^2}(T_3 + T_5 + 2T_{10}) = T_4^0 \quad (3.39)$$

Za točku 1 i 6 diskretizacijska jednadžba će biti prema (3.28)

$$(1 + 2\frac{a\Delta t}{h^2} + 2\frac{a\Delta t\alpha}{\lambda h})T_1 - 2\frac{a\Delta t}{h^2}(T_2 + T_7) = T_1^0 + 2\frac{a\Delta t\alpha}{\lambda h}T_{zr} \quad (3.40)$$

Za točku 25 i 30 diskretizacijska jednadžba će biti prema (3.25)

$$(1 + 4\frac{a\Delta t}{h^2} + 4\frac{a\Delta t\alpha}{\lambda h})T_1 - 2\frac{a\Delta t}{h^2}(T_{19} + T_{26}) = T_7^0 + 4\frac{a\Delta t\alpha}{\lambda h}T_{zr} \quad (3.41)$$

Nakon definiranja ovih jednadžbi preostaje samo konstruirati matricu  $\mathbf{A}$ , koja će imati dimenziju 30x30, te će biti popunjena na 5 dijagonala dok će ostala mjesta imati 0. Matrica  $\mathbf{A}$  pomnožena s vektorom  $\mathbf{x}$  koji predstavlja vektor temperatura, dati će lijevi dio svih diskretizacijskih jednadžbi, dok će desni dio predstavljati vektor  $\mathbf{b}$ .

### 3.4.1. Rješavanje linearnog sustava

Uvedu li se niže navedene supstitucije u jednadžbe (3.14,3.18,3.22,3.25 i 3.28):

$$s = \frac{a\Delta t}{h^2} \quad (3.42)$$

$$k = \frac{a\Delta t\alpha}{\lambda h} \quad (3.43)$$

Može se formirati linearni sustav

$$\begin{array}{c}
 \mathbf{A} \\
 \left[ \begin{array}{cccccccc}
 1+4s+2k & -2s & 0 & 0 & 0 & -2s & 0 & 0 & \dots \\
 -s & 1+4s & -s & 0 & 0 & 0 & -2s & 0 & \dots \\
 0 & -s & 1+4s & -s & 0 & 0 & 0 & -2s & \dots \\
 0 & 0 & -s & 1+4s & -s & 0 & 0 & 0 & \dots \\
 0 & 0 & 0 & -s & 1+4s+2k & 0 & 0 & 0 & \dots \\
 -s & 0 & 0 & 0 & 0 & 1+4s+2k & -2s & 0 & \dots \\
 0 & -s & 0 & 0 & 0 & -s & 1+4s & -s & \dots \\
 0 & 0 & -s & 0 & 0 & 0 & -s & 1+4s & \dots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
 \end{array} \right]
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 \mathbf{x} \\
 \left[ \begin{array}{c}
 T_1 \\
 T_2 \\
 T_3 \\
 T_4 \\
 T_5 \\
 T_6 \\
 T_7 \\
 T_8 \\
 \vdots
 \end{array} \right]
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 \mathbf{b} \\
 \left[ \begin{array}{c}
 2k \cdot T_{ir} + T_1^0 \\
 T_2^0 \\
 T_3^0 \\
 T_4^0 \\
 2k \cdot T_{ir} + T_5^0 \\
 2k \cdot T_{ir} + T_6^0 \\
 T_7^0 \\
 T_8^0 \\
 \vdots
 \end{array} \right]
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \text{rubni uvjet} \\
 \text{adijabatski + newton} \\
 \text{adijabatski} \\
 \text{adijabatski} \\
 \text{adijabatski} \\
 \text{adijabatski + newton} \\
 \text{newton} \\
 - \\
 - \\
 \vdots
 \end{array}$$

Slika 12. Linearni sustav  $Ax=b$ 

Osim klasičnih metoda za rješavanje sustava linearnih jednadžbi, kao što je Gaussova metoda, postoje metode koje se zasnivaju na različitim dekompozicijama matrice  $A$ , kao što je Cholesky dekompozicija, QE dekompozicija, dekompozicija na singularne vrijednosti, itd. Posebnu klasu metoda predstavljaju tzv. iterativne metode, kao što je Gauss-Seidelove ili Jacobijeva metoda. Također, od posebnog su praktičnog značaja tzv. veliki rijetki sustavi linearnih jednadžbi za koje postoje specijalne metode za rješavanje. Upravo je jedan od primjera velikih rijetkih linearnih sustava rješavanje implicitne metode kod provođenja topline [4]. Često programski paketi kao što je MATLAB® u sebi već imaju isprogramiran iterativni rješavač (engl. solver) za ovakve sustave.

Relativno odstupanje definirano je kao

$$e = \frac{\|\Delta \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \quad (3.44)$$

Gdje je  $\Delta \mathbf{x}$  razlika vektora  $\mathbf{x}$  između dvije susjedne iteracije [4].

Relativno odstupanje  $e$  reda veličine je  $10^{-6}$ ,  $10^{-7}$ , ...,  $10^{-n}$ . Ovisno koliku točnosti željenog rezultata želimo. Problem koji nastupa u nestacionarnom provođenju topline jeste zbrajanje relativnog odstupanja nakon svakog vremenskog intervala  $\Delta t$ , kojih može  $10^5$  i više. U poglavlju 5.2.1 numeričkim eksperimentom odredit ćemo utjecaj relativnog odstupanja  $e$  na rezultat s obzirom na broj vremenskih intervala  $\Delta t$ .



## 4. Analiza numeričke greške

Dosadašnji pristup diskretizacije diferencijalne jednačbe (2.5) temelji se na formulaciji kontrolnih volumena. Iste diskretizirane jednačbe bi se dobile kada bi se pristupilo formulaciji diskretiziranih jednačbe pomoću metode konačnih diferencija koja se temelji na Taylorov razvoju, te kojeg će se opisati za analizu numeričke greške diskretizacije. U ovom kontekstu, riječ „diskretna“ znači da je numerički rezultat znan samo na konačnom broju točaka unutar domene. Broj tih točaka moguće je proizvoljno odabrati. U općem slučaju, povećanjem broja točaka ne samo da se povećava rezolucija tj. detalj, nego se povećava i točnost numeričkog rezultata. Dva glavna parametra za mrežu su  $h$ , lokalna udaljenost točaka u domeni u smjeru  $x$  i smjeru  $y$ ,  $h$ , i lokalna udaljenost između dva vremenska trenutka,  $\Delta t$ . Primjena MKD na diferencijalnu jednačbu uključuje zamjenu svih derivacija formulama diferencija. Limitom kako se lokalna udaljenost  $h$  približava nuli, numerički rezultat težiti će pravom rezultatu originalne diferencijalne jednačbe. Međutim, brzina pri kojoj će se numeričko rješenje približavati pravom rješenju razlikuje se s obzirom na odabranu shemu. Tri različite sheme za rješavanje diferencijalne jednačbe bit će predstavljene u sljedećem poglavlju, od kojih dvije predstavljaju isti zapis kao i pristup MKV napisan u prijašnjim poglavljima [5].

### 4.1. Aproksimacije prve derivacije

Kao primjer za formuliranje sljedećih izraza Taylorovog razvoja iskoristiti će se primjer čvorova na Slici 3.

#### 4.1.1. Derivacija „prema unaprijed“ (engl. *Forward difference*)

Koristeći točke 2 i 3 na Slici 3. može se zapisati Taylorov razvoj

$$T_3 = T_2 + \Delta x \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_2 + \frac{\Delta x^2}{2} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right)_2 + \frac{\Delta x^3}{3!} \left( \frac{\partial^3 T}{\partial x^3} \right)_2 + \dots \quad (4.1)$$

Ili drugačije zapisano

$$\left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_2 = \frac{T_3 - T_2}{\Delta x} - \frac{\Delta x}{2} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right)_2 - \frac{\Delta x^2}{3!} \left( \frac{\partial^3 T}{\partial x^3} \right)_2 + \dots \quad (4.2)$$

Koristeći notaciju veliko  $O$ , jednačbu (4.2) možemo zapisati kao

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_2 = \frac{T_3 - T_2}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (4.3)$$

Jednadžba (4.3) se naziva derivacija „prema unaprijed“ (engl. Forward difference) za  $\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_2$ , zato što sadrži točke  $T_2$  i  $T_3$ , koja je udaljenija od ruba domene. Ova aproksimacija sadrži numeričku grešku zaokruživanja  $O(\Delta x)$ . Veličina ove greške je (većinom) „pod našom“ kontrolom zato što je moguće odabirati veličinu lokalne udaljenosti  $\Delta x$ . Drugim riječima, izraz  $O(\Delta x)$  ne govori o točnoj veličini greške, već govori kako je to umnožak nepoznate konstante i  $\Delta x$ , što određuje red veličine greške. Iako ovaj izraz ne govori o apsolutnom iznosu greške, ukazuje na to koliko se brzo ovaj izraz približava nuli kako se  $\Delta x$  približava nuli [5].

#### 4.1.2. Derivacija „prema unatrag“ (engl. Backward difference)

Koristeći točke 1 i 2 na Slici 3. može se zapisati Taylorov razvoj

$$T_1 = T_2 - \Delta x \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_2 + \frac{\Delta x^2}{2} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_2 - \frac{\Delta x^3}{3!} \left(\frac{\partial^3 T}{\partial x^3}\right)_2 + \dots \quad (4.4)$$

Ili drugačije zapisano

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_2 = \frac{T_2 - T_1}{\Delta x} + \frac{\Delta x}{2} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_2 - \frac{\Delta x^2}{3!} \left(\frac{\partial^3 T}{\partial x^3}\right)_2 + \dots \quad (4.5)$$

Koristeći notaciju veliko  $O$ , jednadžbu (4.5) možemo zapisati kao

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_2 = \frac{T_2 - T_1}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (4.6)$$

Jednadžba (4.6) se naziva derivacija „prema unatrag“ (engl. Backward difference), zato što sadrži točke  $T_2$  i  $T_1$ , koja je bliža rubu domene. Red veličine numeričke greške  $O(\Delta x)$  jednak je kao i za derivaciju „prema unaprijed“. Sljedeća derivacija koristi kombinaciju ove dvije kako bi se dobila manja greška zaokruživanja.

### 4.1.3. „Središnja“ derivacija (engl. Central difference)

Koristeći jednačbe (4.7) i (4.8)

$$T_3 = T_2 + \Delta x \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_2 + \frac{\Delta x^2}{2} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right)_2 + \frac{\Delta x^3}{3!} \left( \frac{\partial^3 T}{\partial x^3} \right)_2 + \dots \quad (4.7)$$

$$T_1 = T_2 - \Delta x \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_2 + \frac{\Delta x^2}{2} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right)_2 - \frac{\Delta x^3}{3!} \left( \frac{\partial^3 T}{\partial x^3} \right)_2 + \dots \quad (4.8)$$

Oduzimanjem jednačbe (4.7) od jednačbe (4.8) proizlazi:

$$T_3 - T_1 = 2\Delta x \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_2 + 2 \frac{\Delta x^3}{3!} \left( \frac{\partial^3 T}{\partial x^3} \right)_2 + \dots \quad (4.9)$$

Ili drugačije zapisano

$$\left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_2 = \frac{T_3 - T_1}{2\Delta x} + \frac{\Delta x^2}{3!} \left( \frac{\partial^3 T}{\partial x^3} \right)_2 + \dots \quad (4.10)$$

Koristeći notaciju veliko  $O$ , jednačba (4.10) se može zapisati kao

$$\left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_2 = \frac{T_3 - T_1}{2\Delta x} + O(\Delta x^2) \quad (4.11)$$

Jednačba (4.11) naziva se „Središnja“ derivacija (engl. Central difference). Kada je  $\Delta x \ll 1$ , greška zaokruživanja za „Središnju“ derivaciju približava se nuli puno brže nego greška zaokruživanja derivacije „prema unatrag“ i derivacije „prema unaprijed“. Valja istaknuti kako je upravo jednačba (4.11) jednaka formulaciji kontrolnog volumena korištenog u poglavlju 3.3. [5].

## 4.2. Aproksimacije druge derivacije

Aproksimacija višeg reda derivacija može se izvesti dodatnim manipuliranjem Taylorovog razvoja oko točke  $T_2$ . Zbrajanjem jednačbe (4.7) i (4.8) dobiva se [5]

$$T_3 - T_1 = 2T_2 + \Delta x^2 \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right)_2 + \frac{2\Delta x^4}{4!} \left( \frac{\partial^4 T}{\partial x^4} \right)_2 + \dots \quad (4.12)$$

Ili drugačije zapisano

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_2 = \frac{T_3 - 2T_2 + T_1}{\Delta x^2} + \frac{2\Delta x^2}{4!} \left(\frac{\partial^4 T}{\partial x^4}\right)_2 + \dots \quad (4.13)$$

Koristeći notaciju veliko  $O$ , jednačba (4.13) može se zapisati kao

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_2 = \frac{T_3 - 2T_2 + T_1}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2) \quad (4.14)$$

Tj. pridržavajući se istih oznaka kao i u poglavlju 3.3.

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_P = \frac{T_E^t - 2T_P^t + T_W^t}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2) \quad (4.15)$$

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)_P = \frac{T_E^t - 2T_P^t + T_S^t}{\Delta y^2} + O(\Delta y^2) \quad (4.16)$$

Time je aproksimirana desna strana jednačbe (2.5) uz ocjenu greške. Još ostaje aproksimirati lijevu stranu te jednačbe, tj. definirati aproksimaciju promjene temperature u vremenu.

### 4.3. Sheme za nestacionarni problem

#### 4.3.1. Vremenska derivacija „prema unaprijed“ (engl. *Forward time*)

Aproksimirajući vremensku derivaciju derivacijom „prema unaprijed“

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_{t+\Delta t, T_P} = \frac{T_P^{t+\Delta t} - T_P^t}{\Delta t} + O(\Delta t) \quad (4.17)$$

Primjenjujući ekvidistantnu mrežu gdje je  $h = \Delta x = \Delta y$ , može se aproksimirati diferencijalna jednačba (2.5) pomoću izraza (4.15, 4.16 i 4.17)

$$\frac{T_P^{t+\Delta t} - T_P^t}{\Delta t} = a \left( \frac{T_E^t - 2T_P^t + T_W^t}{\Delta x^2} + \frac{T_N^t - 2T_P^t + T_S^t}{\Delta y^2} + O(\Delta t) + O(h^2) \right) \quad (4.18)$$

Drugačije zapisano:

$$\frac{h^2}{a\Delta t} (T_P^{t+\Delta t} - T_P^t) = T_E^t + T_W^t + T_N^t + T_S^t - 4T_P^t + O(\Delta t) + O(h^2) \quad (4.19)$$

Koristeći notaciju  $T_P^{t+\Delta t} = T_P$ , te  $T_P^t = T_P^0$ , jednažba (4.19) postaje ista kao jednažba (3.10) koju smo dobili formulacijom MKV uz eksplicitnu metodu, ali je pomoću formulacije MKD procijenjen red veličine greške zaokruživanja. Ova shema se naziva FTCS (engl. Forward time, centered space).

#### 4.3.2. Vremenska derivacija „prema unatrag“ (engl. Backward time)

Aproksimacija vremenske derivacije s derivacijom „prema unatrag“ glasi

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_{t+\Delta t, T_P} = \frac{T_P^t - T_P^{t-\Delta t}}{\Delta t} + O(\Delta t) \quad (4.20)$$

Primjenjujući ekvidistantnu mrežu gdje je  $h = \Delta x = \Delta y$ , može se aproksimirati diferencijalna jednažba (2.5) pomoću izraza (4.15, 4.16 i 4.20)

$$\frac{T_P^t - T_P^{t-\Delta t}}{\Delta t} = a \left( \frac{T_E^t - 2T_P^t + T_W^t}{\Delta x^2} + \frac{T_N^t - 2T_P^t + T_S^t}{\Delta y^2} + O(\Delta t) + O(h^2) \right) \quad (4.21)$$

Gornja se jednažba može zapisati u sljedećem obliku

$$\frac{h^2}{a\Delta t} (T_P^t - T_P^{t-\Delta t}) = T_E^t + T_W^t + T_N^t + T_S^t - 4T_P^t + O(\Delta t) + O(h^2) \quad (4.22)$$

Koristeći notaciju  $T_P^t = T_P$ , te  $T_P^{t-\Delta t} = T_P^0$ , jednažba (4.22) postaje ista kao i (3.14) koja je dobivena formulacijom MKV uz implicitnu metodu, ali je pomoću formulacije MKD procijenjen red veličine greške zaokruživanja. Ova shema se naziva BTCS (engl. Backward time, centered space), koja se razlikuje samo u aproksimaciji vremenske derivacije, dok joj je ocjena reda veličine greške zaokruživanja potpuno ista kao i FTCS.

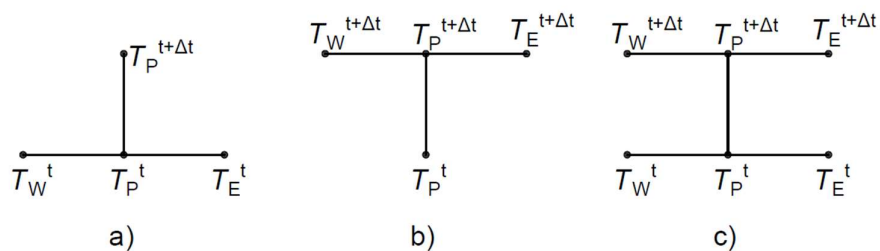
#### 4.3.3. Crank-Nicolson

FTCS i BTCS sheme imaju vremensku grešku zaokruživanja  $O(\Delta t)$ . Kada je vremenska točnost od važnosti, uz uvjet da se ne radi o dugim vremenskim intervalima zagrijavanja kao što je primjer zagrijavanja velikog aluminijskog bloka, Crank-Nicolson shema pruža vremensku grešku zaokruživanja  $O(\Delta t^2)$ . To znači da kako se  $\Delta t$  približava nuli, vremenska greška zaokruživanja kod Crank-Nicolson sheme brže će težiti prema nuli nego kod FTCS i BTCS sheme. Vremenska aproksimacija kod Crank-Nicolson sheme ista je kao i kod BTCS, dok je prostorna aproksimacija jednaka prosjeku „središnje“ derivacije između dva vremenska

trenutka. Crank-Nicolson shema je implicitna, kao i BTCS, isto tako je i bezuvjetno stabilna.

Stoga je diferencijalna jednačba (2.5) aproksimirana kao [5]:

$$\frac{T_P^t - T_P^{t-\Delta t}}{\Delta t} = \frac{a}{2} \left[ \frac{T_E^t - 2T_P^t + T_W^t}{\Delta x^2} + \frac{T_E^{t-\Delta t} - 2T_P^{t-\Delta t} + T_W^{t-\Delta t}}{\Delta x^2} + \frac{T_N^t - 2T_P^t + T_S^t}{\Delta y^2} + \frac{T_N^{t-\Delta t} - 2T_P^{t-\Delta t} + T_S^{t-\Delta t}}{\Delta y^2} + O(\Delta t^2) + O(h^2) \right] \quad (4.23)$$



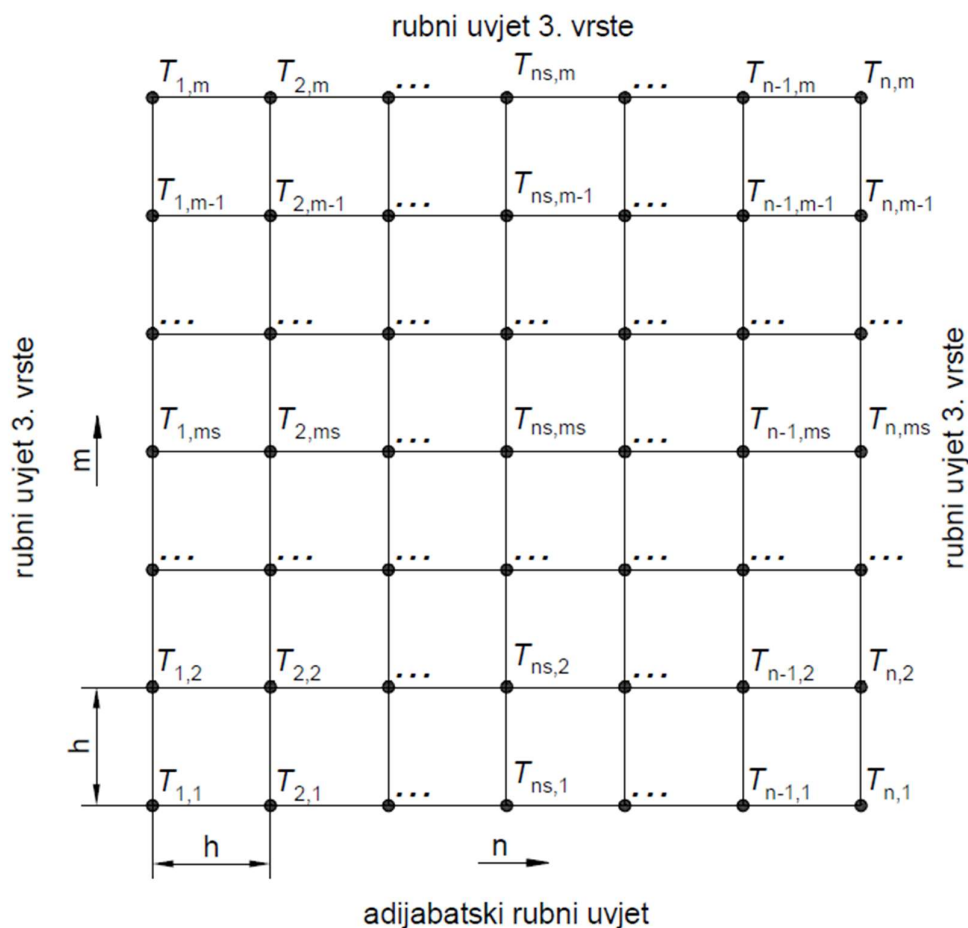
Slika 13. Računalne točke 1D mreže za sheme konačnih diferencija

Slika 13. prikazuje

- „središnju derivaciju“ prostora i vremensku derivaciju „prema unaprijed“
- „središnju derivaciju“ prostora i vremensku derivaciju „prema unatrag“
- Crank-Nicolson

## 5. REZULTATI

U prethodnim poglavljima definirali su se utjecajni parametri na točnost numeričkog rezultata. Ti parametri su: lokalna udaljenost točaka  $h$ , vremenski interval  $\Delta t$  i relativno odstupanje iteracijskog postupka  $e$ . Kako bi se došlo do rezultata koji će zadovoljavati određene točnosti, potrebno je napraviti procjenu navedenih parametara. Isto tako, prije nego se provede procjena, potrebno je označiti i definirati sve točke mreže u promatranoj dvodimenzionalnoj domeni, kao što je to prikazano na Slici 14.



Slika 14. 2D ekvidistantna mreža

Slika 14 predstavlja općenito definiranu domenu unutar koje se računaju temperature pojedinih točaka mreže. Mreža je definirana brojem stupaca  $n$  i brojem redaka  $m$ . Indeksi  $ns$  i  $ms$  označavaju središnji stupac, tj. redak, redom. Lokalni razmak između točaka jednak je u horizontalnom i vertikalnom smjeru čime je stvorena ekvidistantna mreža unutar domene.

## 5.1. Ulazni podaci

- Temperatura vrućeg zraka:  $\vartheta_{zr} = 110 \text{ }^{\circ}\text{C}$  ( $T_{zr} = 383,15 \text{ K}$ )
- Početna temperatura bloka:  $\vartheta_{poc} = 5 \text{ }^{\circ}\text{C}$  ( $T_{zr} = 278,15 \text{ K}$ )
- Koeficijent konvektivnog prijelaza topline:  $\alpha = 10 \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}}$
- Dimenzije presjeka aluminijskog bloka: 510 x 1010 mm, 1020 x 1010 mm
- Gustoća 99,75% čistog aluminija pri 50 °C:  $\rho = 2700 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
- Spec. toplinski kapacitet 99,75% čistog aluminija pri 50 °C:  $c = 905,25 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}}$
- Toplinska provodnost 99,75% čistog aluminija pri 50 °C:  $\lambda = 229 \frac{\text{W}}{\text{mK}}$

## 5.2. Procjena utjecajnih parametara

U sljedećim numeričkim eksperimentima, za rješavanje linearnog sustava, korištena je iterativna metoda bicgstab (engl. Biconjugate gradients stabilized method).

### 5.2.1. Utjecaj relativne greške iterativnog postupka

Svrha ovog eksperimenta je vidjeti koliko se rezultat mijenja promjenom zadanog relativnog odstupanja iterativne metode. Za svaki odabrani vremenski korak  $\Delta t$  prati se promjena iznosa temperature pojedinih točaka definiranih na Slici 14, kao i potrebno vrijeme računanja (engl. CPU time). Zelenim poljem označeno je maksimalno odstupanje za koje je razlika dobivenih rješenja manja od  $10^{-4} \text{ }^{\circ}\text{C}$  i ono je odabrano kao referentno odstupanje s kojim se provodi daljnje analiza.



h = 0,02 m, n = 50, m = 25, t <sub>uk</sub> = 16 h							
vremenski interval	rel. odstup.	temperature točaka [K]					vrijeme računanja
$\Delta t$ [s]	e	$T_{1,1} = T_{n,1}$	$T_{ns,1}$	$T_{1,ms} = T_{n,ms}$	$T_{ns,ms}$	$T_{1,m} = T_{n,m}$	
57600	1E-06	329,9120	329,3457	330,0488	329,4840	330,4613	0
	1E-07	329,9120	329,3458	330,0488	329,4841	330,4613	0
	1E-08	329,9120	329,3458	330,0488	329,4841	330,4613	0
360	1E-06	343,1810	342,7527	343,2847	342,8575	343,5958	14 s
	1E-07	343,1807	342,7525	343,2846	342,8575	343,5959	15 s
	1E-08	343,1807	342,7525	343,2846	342,8575	343,5959	18 s
100	1E-07	343,2643	342,8370	343,3679	342,9417	343,6785	0,7 min
	1E-08	343,2642	342,8369	343,3679	342,9417	343,6786	0,9 min
	1E-09	343,2642	342,8369	343,3679	342,9417	343,6786	1,1 min
10	1E-09	343,2931	342,8661	343,3968	342,9709	343,7072	3,8 min
	1E-10	343,2932	342,8662	343,3968	342,9709	343,7073	4 min
	1E-11	343,2932	342,8662	343,3968	342,9709	343,7073	4,7 min
1	1E-09	343,2954	342,8684	343,3991	342,9732	343,7096	13 min
	1E-10	343,2960	342,8691	343,3997	342,9738	343,7101	19 min
	1E-11	343,2960	342,8691	343,3997	342,9738	343,7101	24 min
0,1	1E-09	343,2956	342,8689	343,3993	342,9737	343,7098	67 min
	1E-10	343,2963	342,8693	343,3999	342,9741	343,7103	75 min
	1E-11	343,2963	342,8693	343,3999	342,9741	343,7103	83 min

Tablica 1. Analiza utjecaja relativne greške iterativnog postupka

### 5.2.2. Utjecaj vremenskog intervala

Svrha ovog prikaza je pokazati koliko se rezultat mijenja promjenom vremenskog intervala. U Tablici 1. mogu se vidjeti rezultati temperatura za različite vremenske intervale,  $\Delta t$ . Razlika u dobivenim rezultatima, označena sivom bojom u Tablici 2., posljedica je greške zaokruživanja, definiranom kao  $O(\Delta t)$ . Jasno je vidljiva konvergencija greške zaokruživanja prema nuli, smanjenjem vremenskog intervala,  $\Delta t$ .

h = 0,02 m, n = 50, m = 25, t <sub>uk</sub> = 16 h					
vremenski interval	temperature točaka [K]				
	$T_{1,1} = T_{n,1}$	$T_{ns,1}$	$T_{1,ms} = T_{n,ms}$	$T_{ns,ms}$	$T_{1,m} = T_{n,m}$
$\Delta t$ [s]	$ (T_{1,1})_{\Delta t} - (T_{1,1})_{\Delta t=0,1} $	$ (T_{ns,1})_{\Delta t} - (T_{ns,1})_{\Delta t=0,1} $	$ (T_{1,ms})_{\Delta t} - (T_{1,ms})_{\Delta t=0,1} $	$ (T_{ns,ms})_{\Delta t} - (T_{ns,ms})_{\Delta t=0,1} $	$ (T_{1,m})_{\Delta t} - (T_{1,m})_{\Delta t=0,1} $
57600	329,9120	329,3458	330,0488	329,4841	330,4613
	13,38	13,52	13,35	13,49	13,25
360	343,1807	342,7525	343,2846	342,8575	343,5959
	0,12	0,12	0,12	0,12	0,11
100	343,2642	342,8369	343,3679	342,9417	343,6786
	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03
10	343,2932	342,8662	343,3968	342,9709	343,7073
	3E-03	3E-03	3E-03	3E-03	3E-03
1	343,2960	342,8691	343,3997	342,9738	343,7101
	3E-04	2E-04	2E-04	0,0003	2E-04
0,1	343,2963	342,8693	343,3999	342,9741	343,7103

Tablica 2. Analiza utjecaja vremenskog intervala

### 5.2.3. Utjecaj lokalne udaljenosti točaka

Svrha ove analize je pokazati koliko se rezultat mijenja promjenom lokalne udaljenosti,  $h$ . Može se vidjeti kako se s porastom  $h$  mijenja temperatura, što se objašnjava greškom zaokruživanja definiranom kao  $O(h^2)$ . Tablica 3. prikazuje konvergenciju greške zaokruživanja prema 0, smanjenjem lokalne udaljenosti,  $h$ .

1000 x 500 mm, $t_{uk} = 16$ h, $\Delta t = 360$ s					
lok. udaljenost	rel. odstup.	temperature točaka [K]			vrijeme računanja
$h$ [m]	$e$	$T_{1,1} = T_{n,1}$ $ (T_{1,1})_h - (T_{1,1})_{h=0,01} $	$T_{min}$ $ (T_{min})_h - (T_{min})_{h=0,01} $	$T_{1,m} = T_{n,m}$ $ (T_{1,m})_h - (T_{1,m})_{h=0,01} $	
0,1	1E-08	348,4006 6,11	348,0628 6,22	348,7020 5,97	0
0,05	1E-09	345,0388 2,75	344,6439 2,80	345,4102 2,68	0
0,025	1E-09	343,4827 1,19	343,0600 1,21	343,8906 1,16	5 s
0,01	1E-09	342,5832 0,29	342,1462 0,30	343,0155 0,29	8,3 min
0,005	1E-10	342,2920	341,8474	342,7296	4,4 h

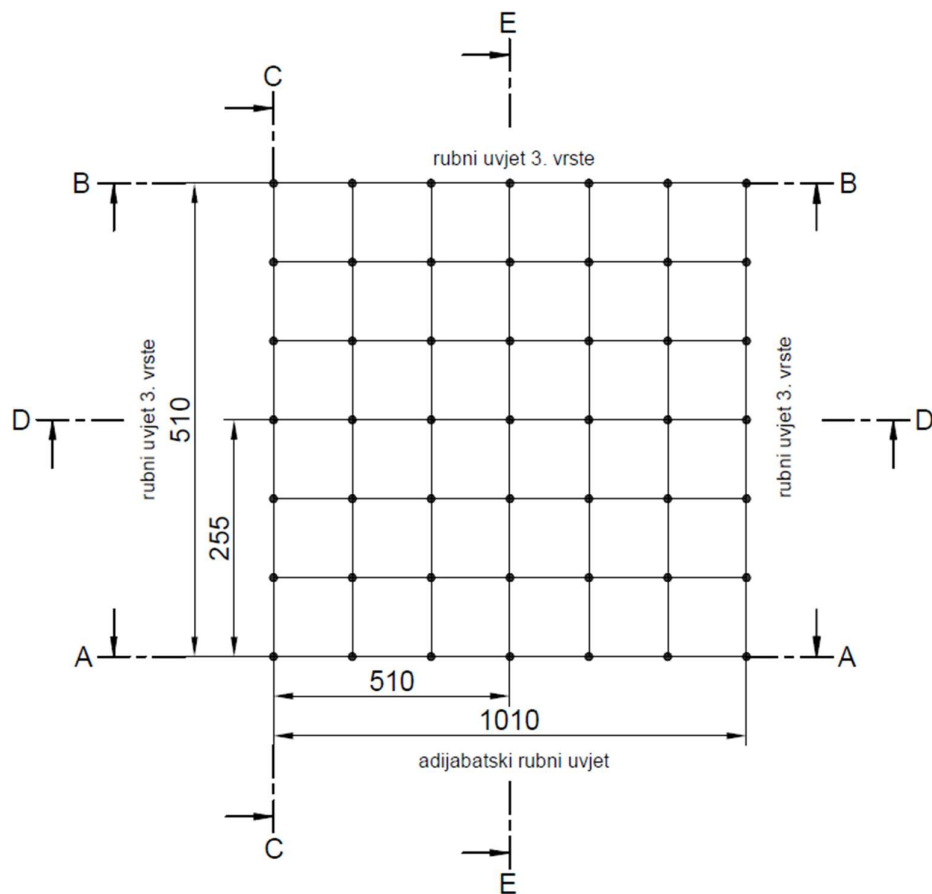
Tablica 3. Analiza utjecaja lokalne udaljenosti točaka

Nakon danih rezultata, odabire se lokalna udaljenost,  $h = 0,01$  m, zbog toga što je razlika u rezultatu zadovoljavajuća (0,29 °C), a vrijeme računanja je samo 8,3 min naspram 4,4 h pri upola manjem  $h$ . Vremenski interval odabran je  $\Delta t = 10$ s zbog također zadovoljavajuće točnosti u odnosu za slučaj kada bi vremenski interval bio  $\Delta t = 0,02$  s.

### 5.3. Temperaturne raspodjele

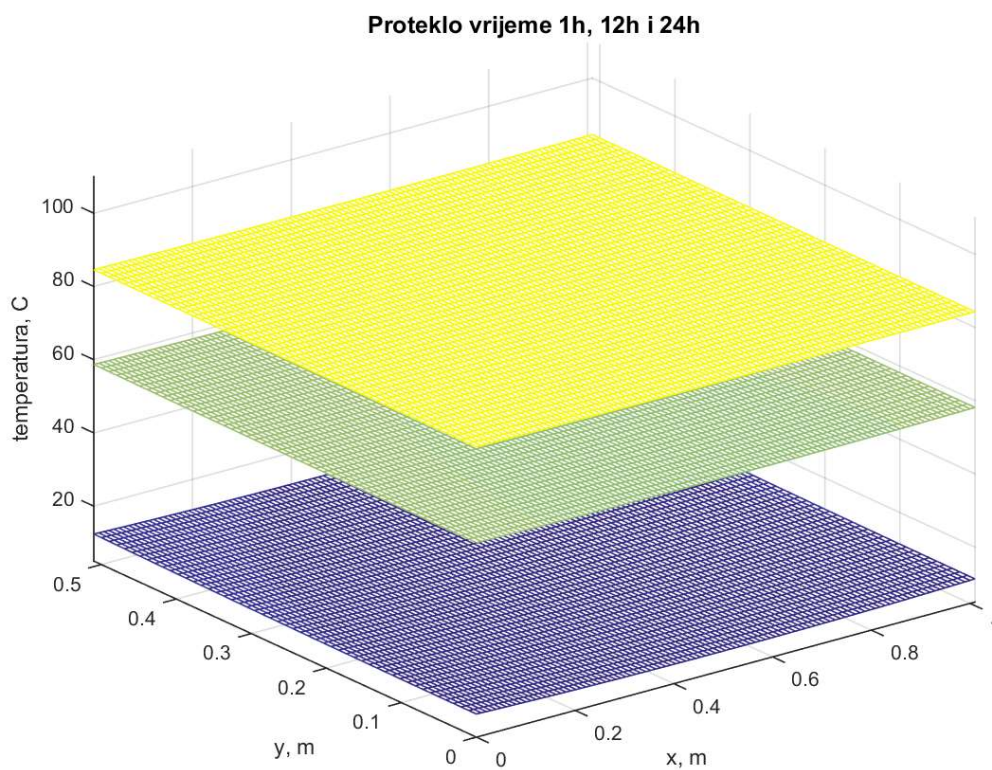
#### 5.3.1. Presjeci bloka

U nastavku su definirani presjeci za koje su dani dobiveni rezultati temperatura u dijagramskom obliku.

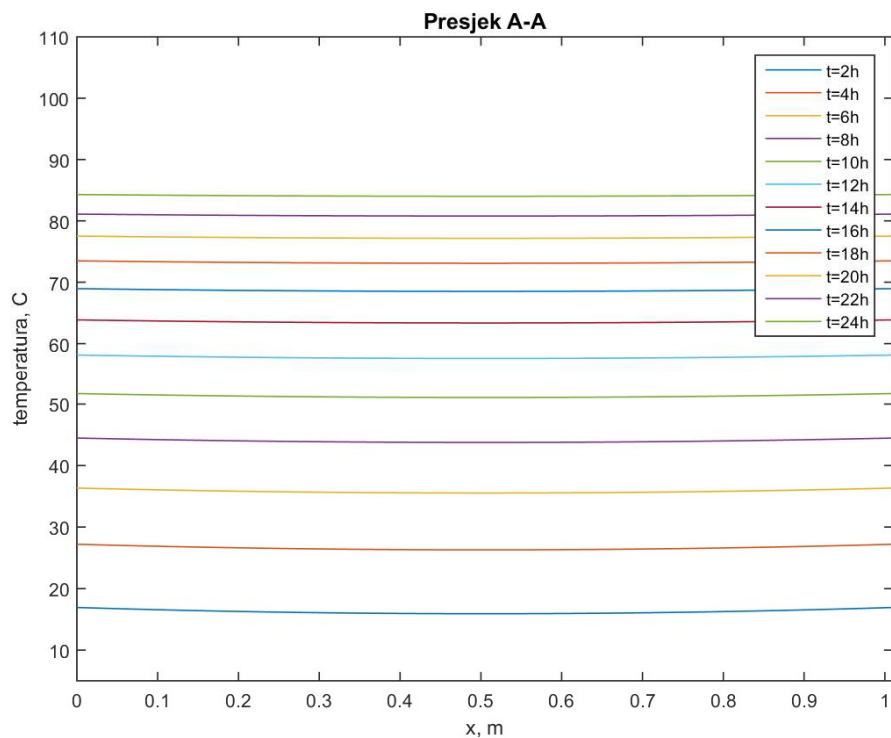


Slika 15. Presjeci 2D mreže

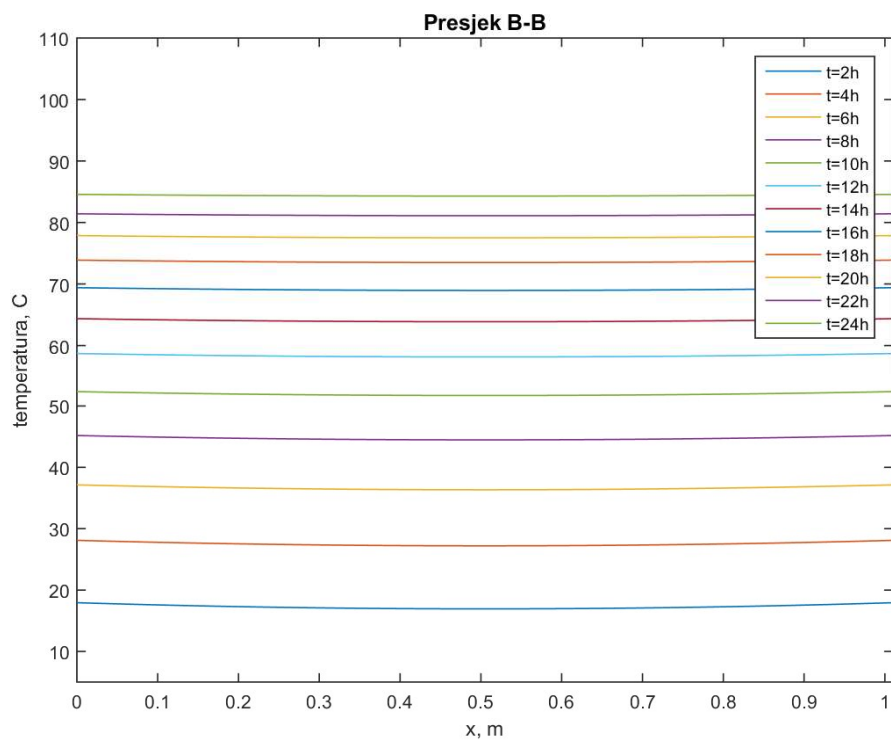
## 5.3.1.1. Rezultati za slučaj a), blok oslonjen na donju površinu (1010 x 7000 mm)



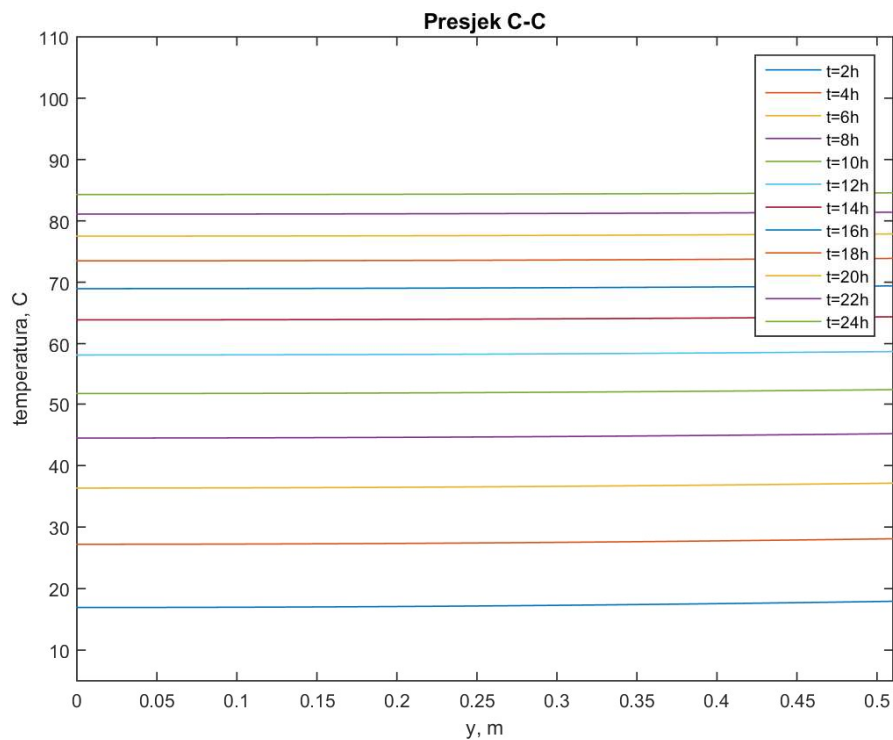
**Slika 16. Temperaturna raspodjela u izometriji nakon 1h, 12h i 24h**



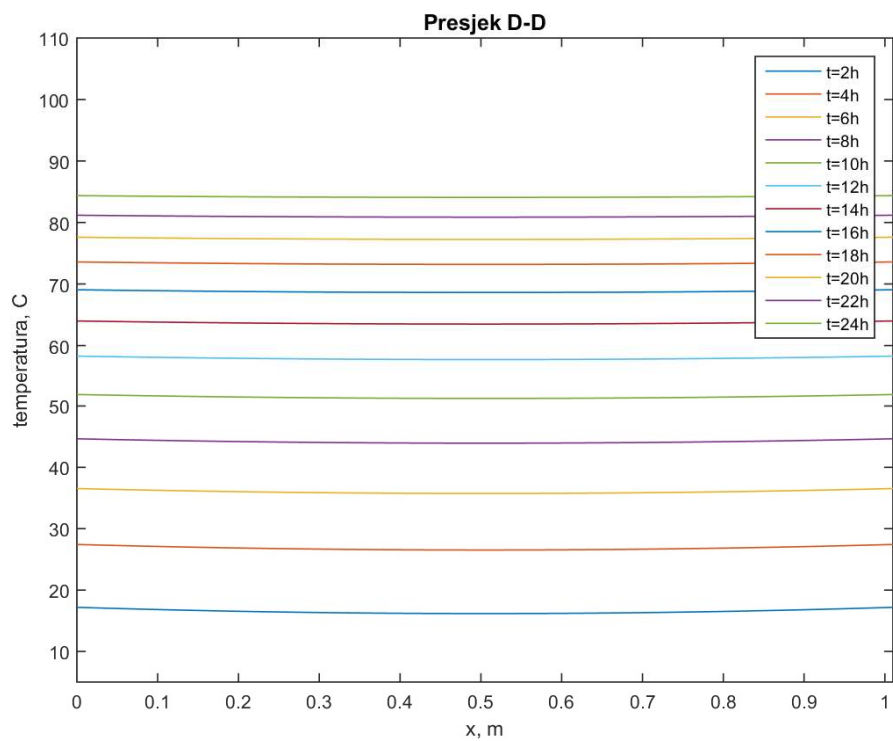
Slika 17. Temperaturna raspodjela na presjeku A-A za različite vremenske intervale



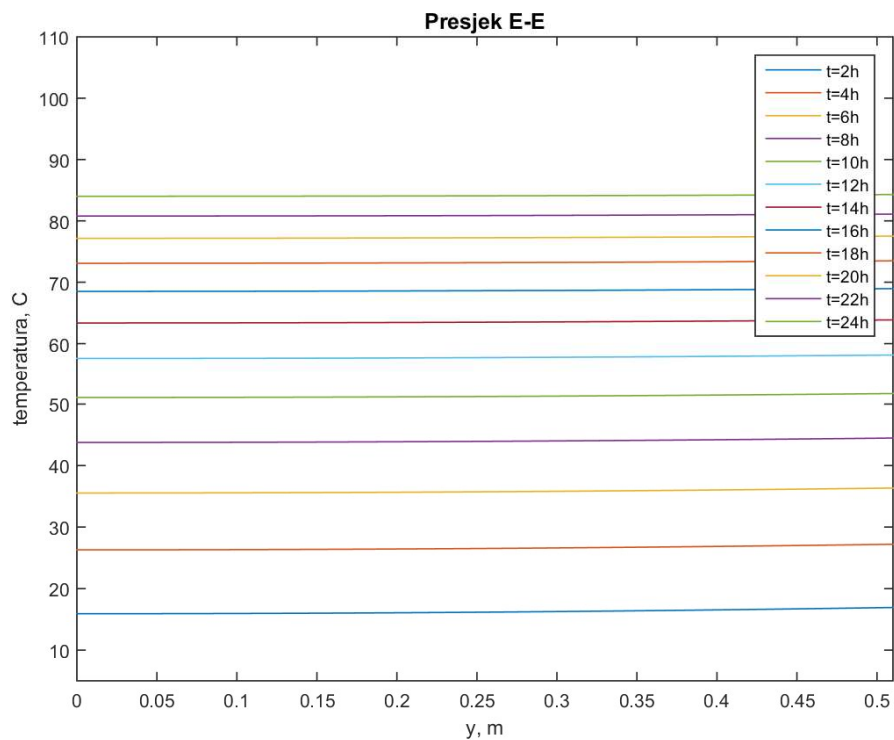
Slika 18. Temperaturna raspodjela na presjeku B-B za različite vremenske intervale



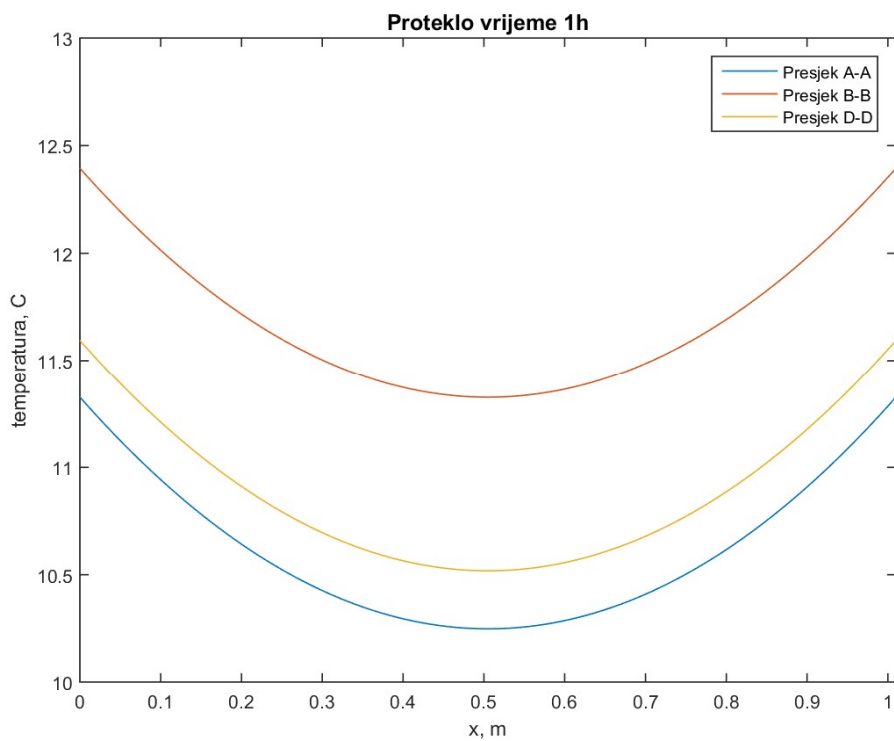
Slika 19. Temperaturna raspodjela na presjeku C-C za različite vremenske intervale



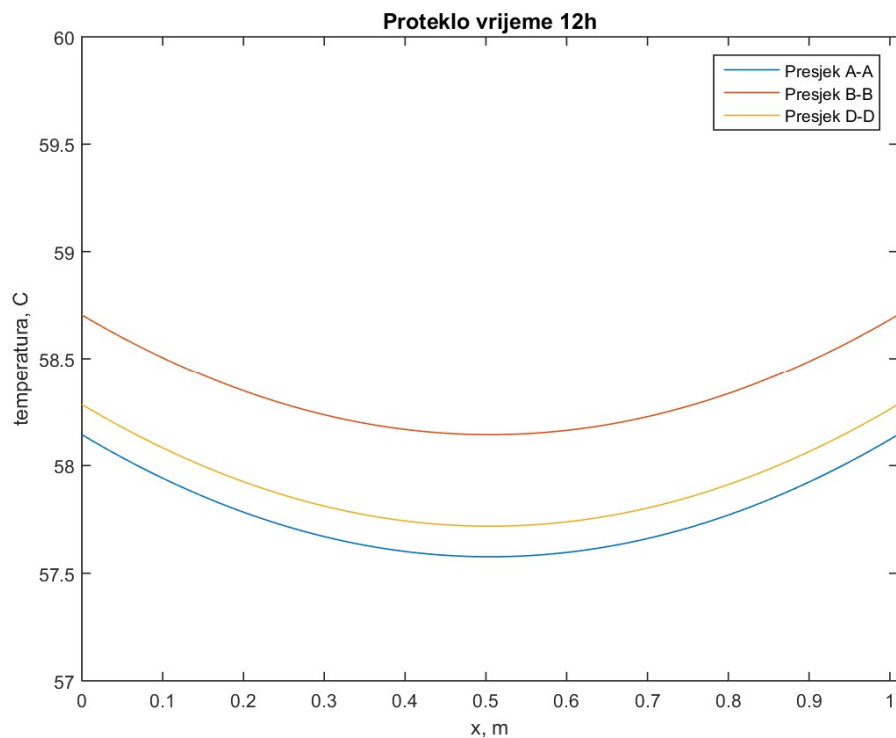
Slika 20. Temperaturna raspodjela na presjeku D-D za različite vremenske intervale



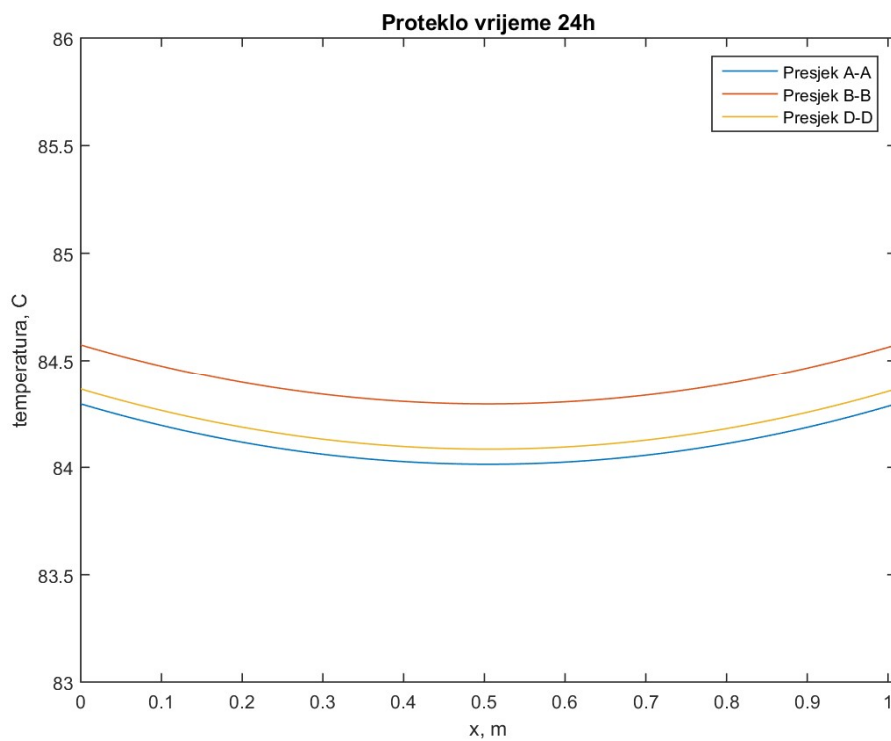
Slika 21. Temperaturna raspodjela na presjeku E-E za različite vremenske intervale



Slika 22. Temperaturni profil za presjeke A-A, B-B i D-D nakon 1h

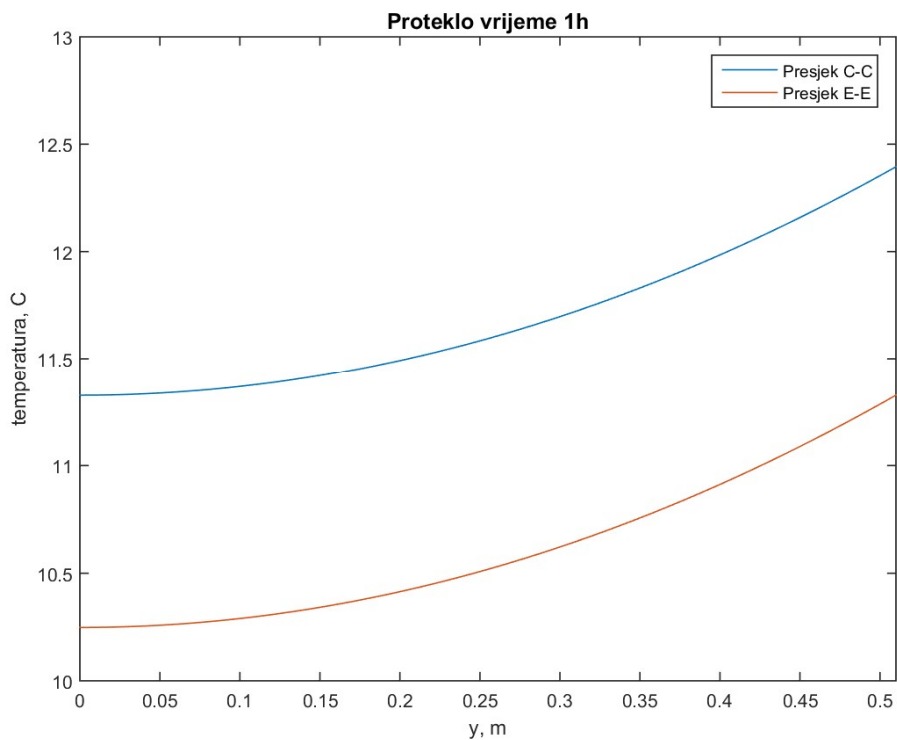


**Slika 23. Temperaturni profil za presjeke A-A, B-B i D-D nakon 12h**

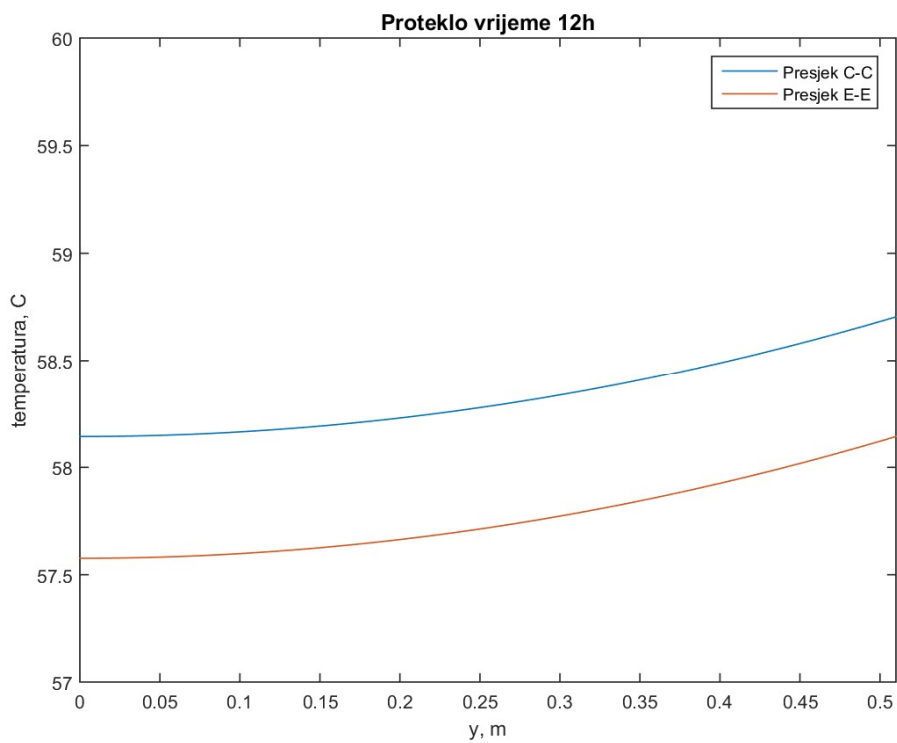


**Slika 24. Temperaturni profil za presjeke A-A, B-B i D-D nakon 24h**

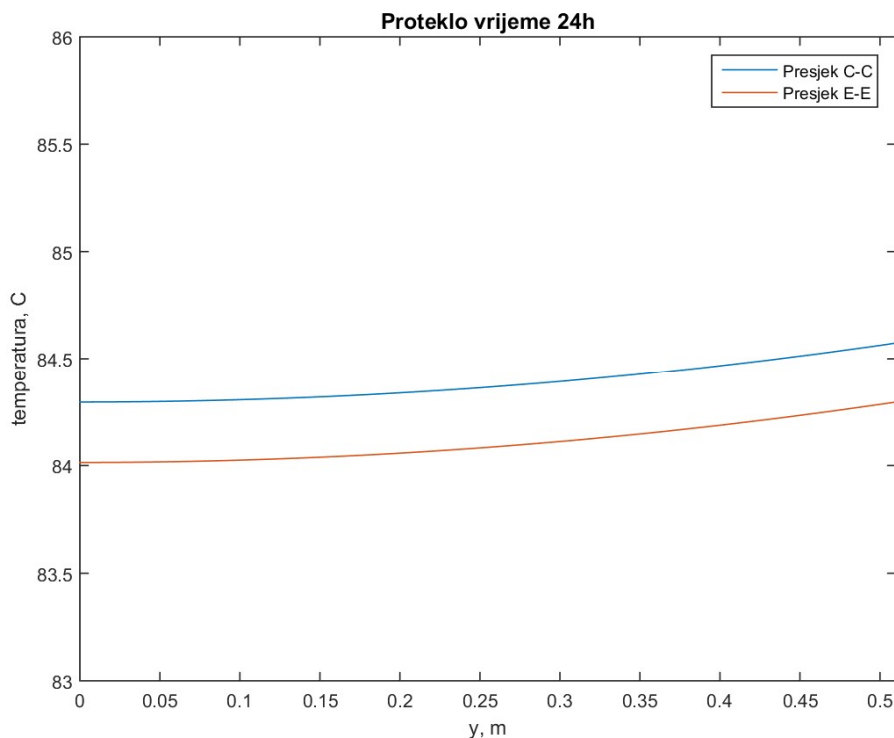




**Slika 25. Temperaturni profil za presjeke C-C i E-E nakon 1h**



**Slika 26. Temperaturni profil za presjeke C-C i E-E nakon 12h**



Slika 27. Temperaturni profil za presjeke C-C i E-E nakon 24h

Valja za napomenuti kako je temperaturna skala na slikama 22-27 uvijek definirana s istim  $\Delta\vartheta = 3^{\circ}\text{C}$ , te se zaključuje smanjenje temperaturne razlike između naznačenih presjeka tijekom vremena.

*Provođenje topline kroz krutinu zanemarivog toplinskog otpora*

Ovim poglavljem želi se usporediti razlika osrednjene temperature bloka u vremenu i funkcija vremenske temperaturne distribucije, koja je u općem slučaju naznačena jednačinom (5.24) [2]

$$\vartheta = f(t) \tag{5.24}$$

Zapis u gornjoj jednačini govori da se radi o slučajevima nestacionarnog temperaturnog polja, s tim da temperatura ne ovisi o pozicije točke u promatranoj krutini. Brojna istraživanja pokazuju da se praktički mogu zanemariti temperaturni gradijenti u krutini, ako je ispunjen sljedeći uvjet [2]

$$Bi = \frac{\alpha(V/A_s)}{\lambda} < 0,1 \quad (5.25)$$

u kojem se veličina  $V$  odnosi na ukupni volumen krutine, a  $A_s$  rubne plohe prijelaza topline.

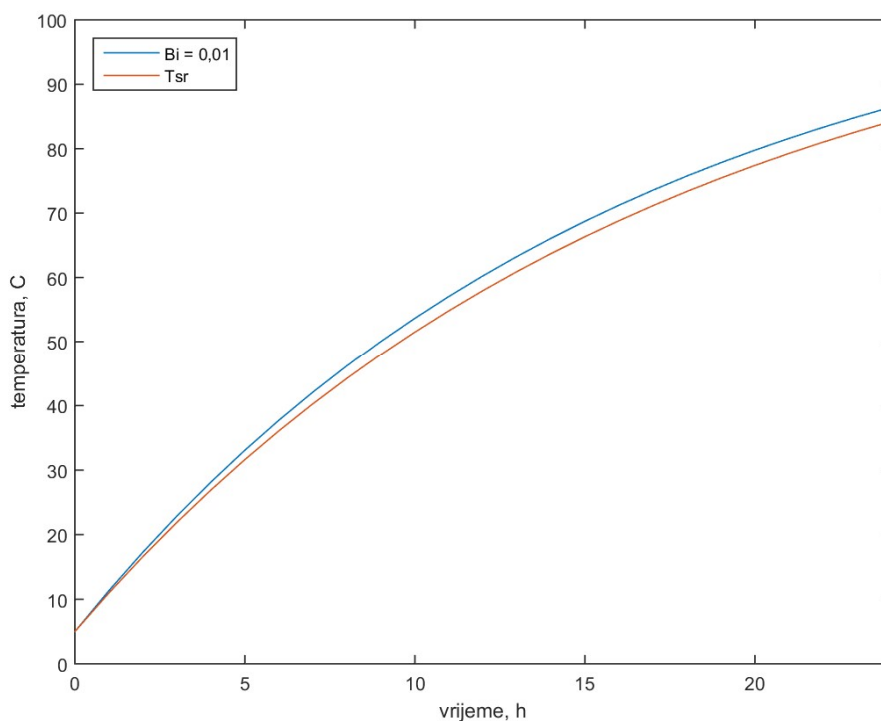
Za naš slučaj je:

$$Bi = \frac{\alpha(V/A_s)}{\lambda} \approx 0,01 \quad (5.26)$$

Izraz (5.27) predstavlja trenutnu temperaturnu distribuciju u bezdimenzijskom obliku [2]

$$\frac{\vartheta - \vartheta_{zr}}{\vartheta_{poc} - \vartheta_{zr}} = \exp \left[ -\frac{\alpha at}{\lambda(V/A_s)} \right] \quad (5.27)$$

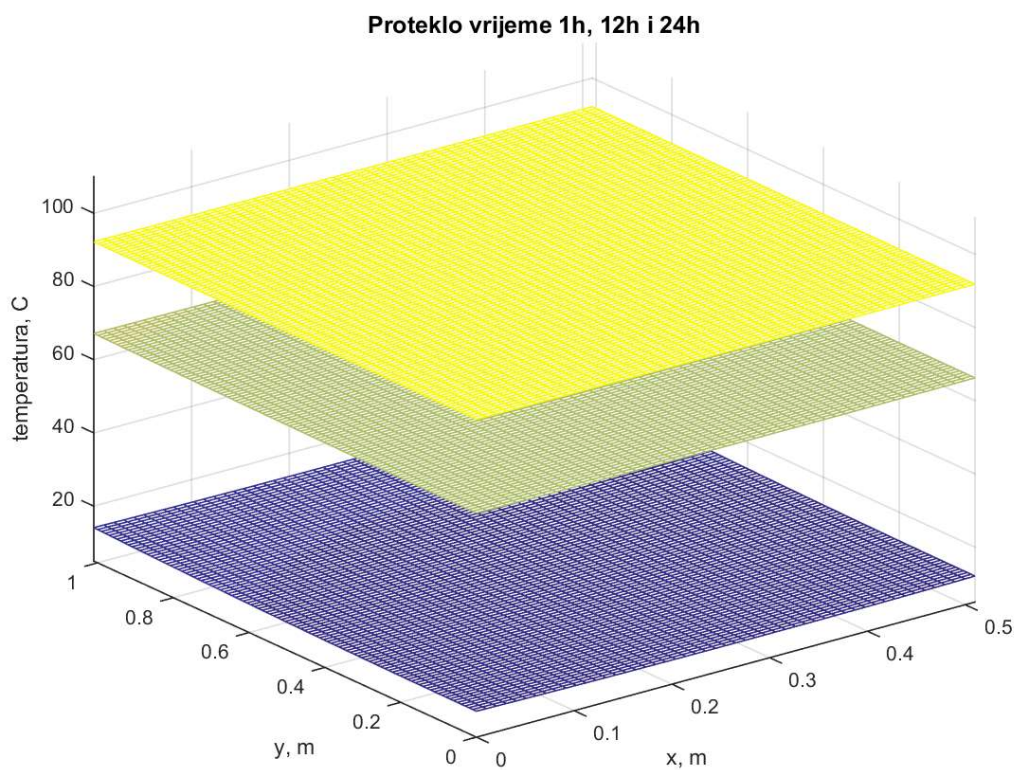
Sljedeći dijagram predstavlja usporedbu analitičkog izraza (5.27) i osrednjene temperature bloka  $T_{sr}$ .



**Slika 28. Osrednjena temperatura bloka numerički i analitički**

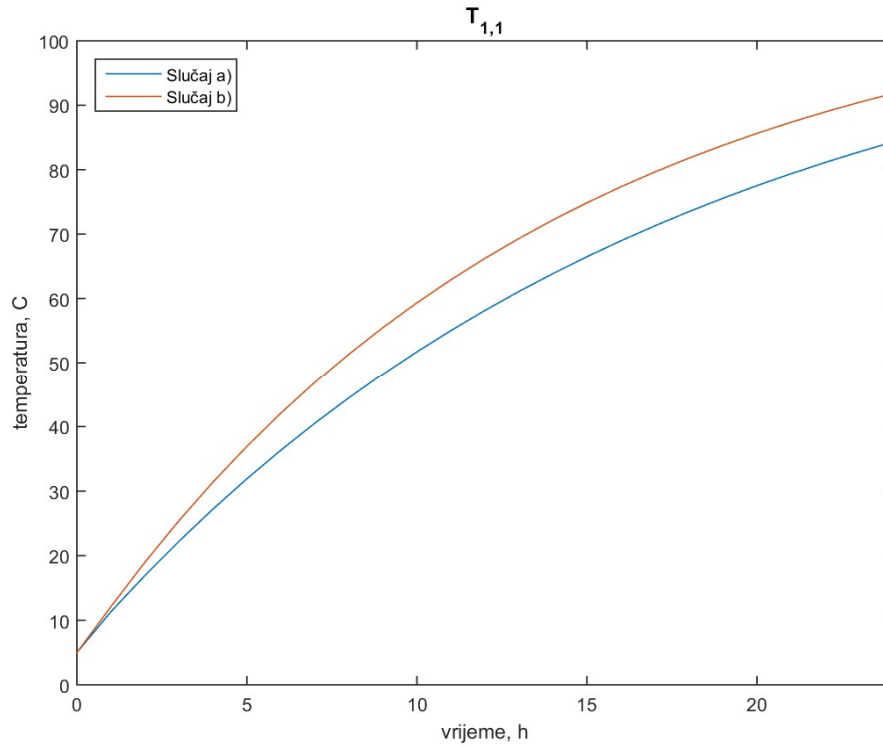
Slika 28 pokazuje dobro aproksimiranje analitičkog izraza s dobivenim numeričkim rezultatom.

## 5.3.1.2. Rezultati za slučaj b), blok oslonjen na donju površinu (510 x 7000 mm)

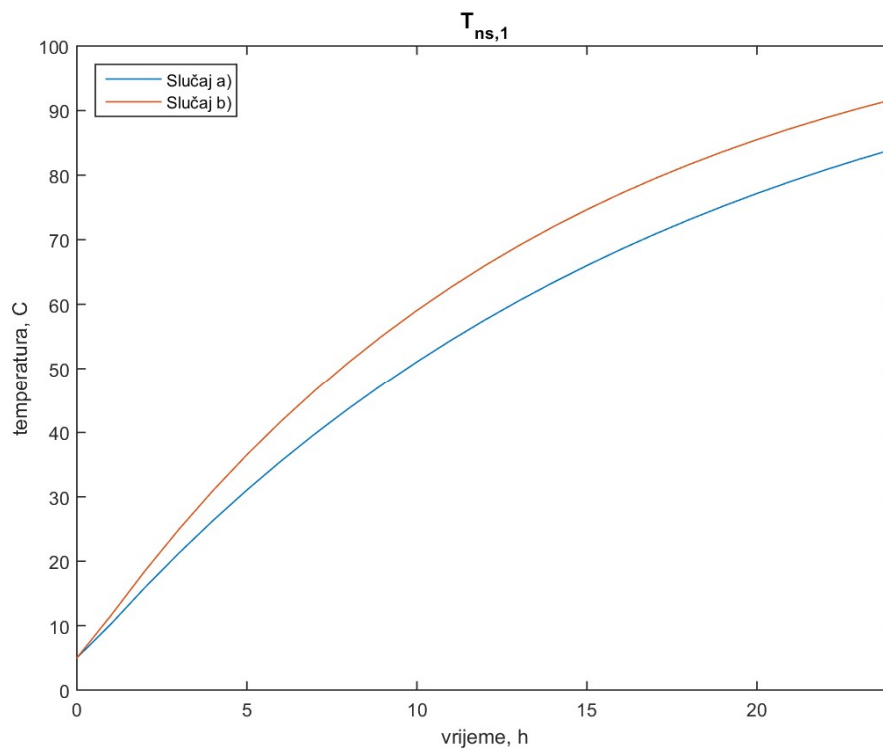


**Slika 29. Temperaturna raspodjela u izometriji nakon 1h, 12h i 24h**

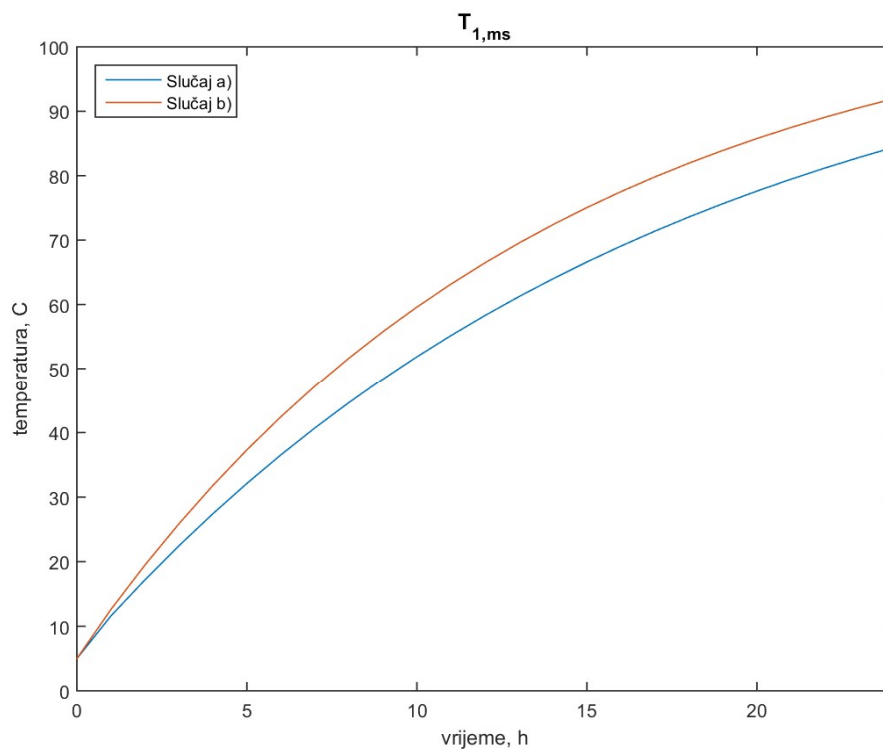
U usporedbi sa slučajem a), mogu se vidjeti slični gradijenti, ali i malo brže zagrijavanje. Zbog toga što se dimenzije ova dva bloka mijenjaju u daljnjim dijagramima uspoređuju se ova dva slučaja za pojedine temperature definirane na Slici 15.



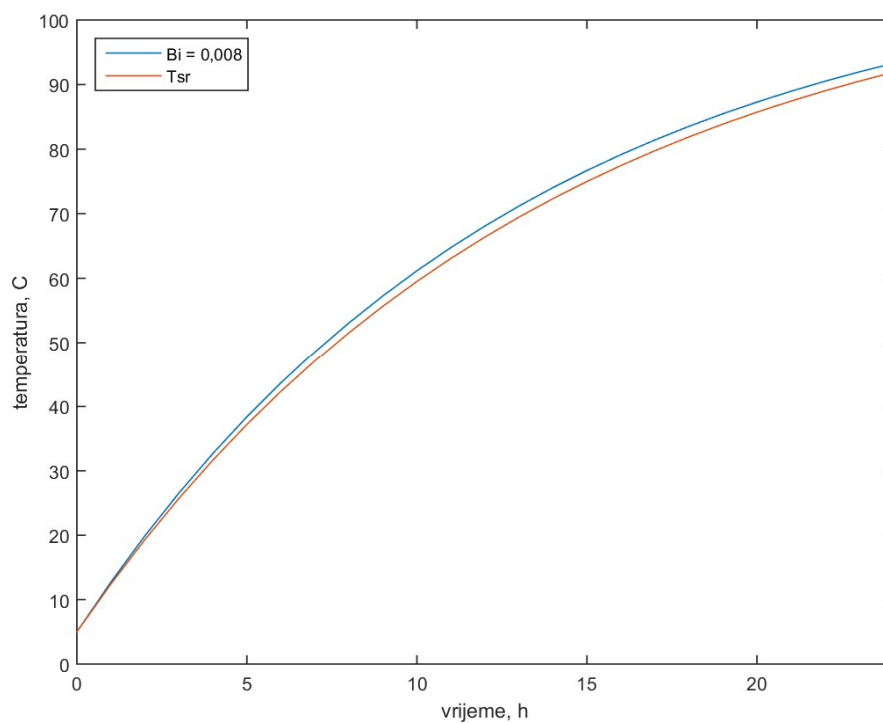
Slika 30. Usporedba temperature u točki  $T_{1,1}$  za slučaj a) i b)



Slika 31. Usporedba temperature u točki  $T_{ns,1}$  za slučaj a) i b)



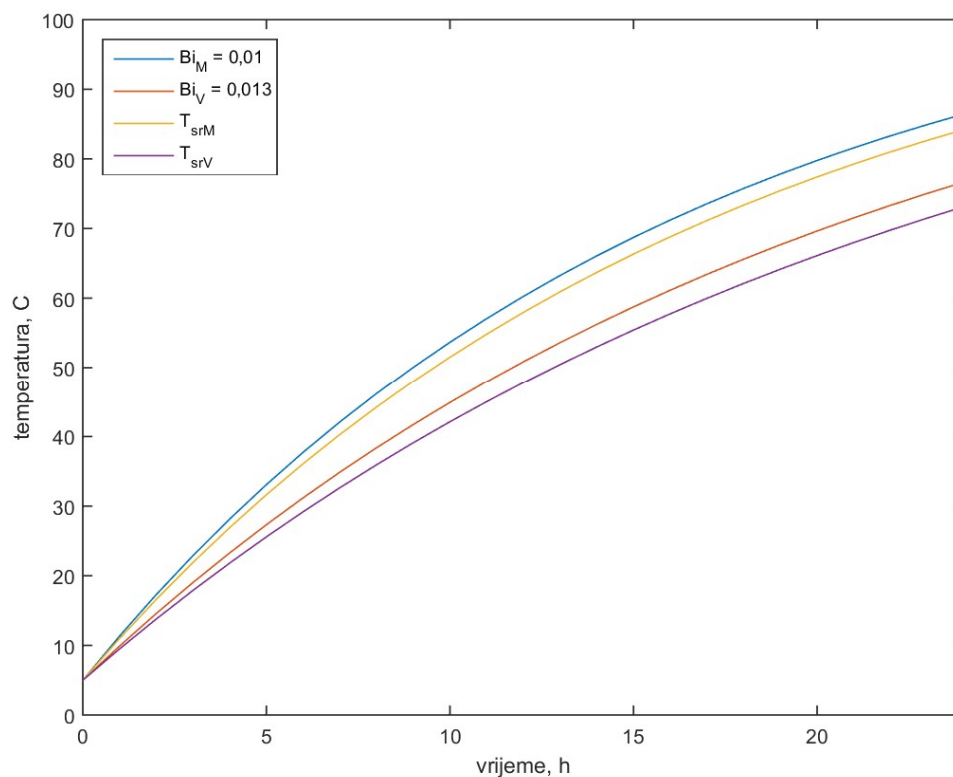
Slika 32. Usporedba temperature u točki  $T_{1,ms}$  za slučaj a) i b)



Slika 33. Osrednjena temperatura bloka numerički i analitički za slučaj b)

Slika 33 pokazuje vrlo dobro aproksimiranje analitičkog izraza s dobivenim numeričkim rezultatom, jer je Biotov broj još manji nego li na slici 28.

### 5.3.1.3. Rezultati za blok veličine 1020 x 1010 x 7000 mm oslonjen na donju površinu



Slika 34. Osrednjena temperatura bloka numerički i analitički za manji i veći blok

Usporedbom ovih dvaju blokova vidljivo je brže zagrijavanje kod bloka manjih dimenzija. Također se vidi utjecaj Biotovog broja na kvalitetu aproksimacije analitičkog izraza s numeričkim rezultatima.

---

## 6. ZAKLJUČAK

Dimenzijskom analizom moguće je pojednostavljeno fizikalnog problema provođenja topline koji se susreću u inženjerskoj praksi. Procjenom greške zaokruživanja numeričkim eksperimentom, tj. smanjenjem lokalne udaljenosti točaka domene i duljine dvaju bliskih vremenskih trenutaka, vidljivo je njeno konvergentno ponašanje prema nuli. Ovi utjecajni parametri definirani su željenom točnošću i performansama računala. Lokalna udaljenost  $h$  najviše je definirana s performansama računala jer veličina matrice  $\mathbf{A}$  raste u funkciji  $h^4$ , što znači smanjimo li  $h$  za duplo, matrica  $\mathbf{A}$  narasti će 16 puta!

Usporedbom rezultata dobivenih za blokove oslonjene na donju i bočnu površinu, nema većih promjena u brzini zagrijavanja, međutim povećanjem mase bloka brzina zagrijavanja značajno se smanjuje. Zbog malih temperaturnih gradijenata, analitički izraz za vremensku promjenu temperature zanemarivog toplinskog otpora, precizno je aproksimirao dobivene rezultate, posebice slučaj b za koji je Biotov broj nešto manji tako da u svakom trenutku dijagramski prikaz temperaturnog profila na odabranim presjecima pokazuje približno podjednaku temperaturu.



---

**LITERATURA**

- [1] Pletcher, R. H., Tannehill, J. C., Anderson, D. A.: Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer, CRC Press, 2013.
- [2] Galović, A.: Termodinamika II, Udžbenici Sveučilišta u Zagrebu, FSB, Zagreb, 2010.
- [3] Patankar, S. V.: Numerical Heat Transfer and Fluid Flow, New York, 1980.
- [4] Scitovski, R.: Numerička matematika, Osijek, 2004.
- [5] Recktenwald G. W.: Finite-Difference Approximations to the Heat Equation, 2004.
- [6] Cengel, Y. A.: Heat transfer, A practical approach, Mc Graw - Hill, Boston, 2003.

**PRILOZI**

I. CD-R disc