Numeričko modeliranje kontaktne dinamike sustava velikog broja krutih čestica na primjeru elektromagnetne spojke s česticama

Jurinić, Dominik

Undergraduate thesis / Završni rad

2017

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:235:809170

Rights / Prava: In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2024-04-19**

Repository / Repozitorij:

Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

ZAVRŠNI RAD

Dominik Jurinić

Zagreb,2017.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

ZAVRŠNI RAD

Mentor:
Prof.dr.sc. Zdravko Terze

Autor:
Dominik Jurinić

Zagreb,2017.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE
Središnje povjerenstvo za završne i diplomske ispite
Povjerenstvo za završne ispite studija strojarstva za smjerove:
procesno-energetski, konstrukcijski, brodostrojarski i inženjersko modeliranje i računalne simulacije

Sveučilište u Zagrebu Fakultet strojarstva i brodogradnje	
Datum 25 -09- 2017	Prilog
Klasa: 602-04/17- 6/1	
Ur.broj: 15-1703-17- 359	

ZAVRŠNI ZADATAK

Student: **Dominik Jurinić** Mat. br.: 0035197320

Naslov rada na hrvatskom jeziku: **Numeričko modeliranje kontaktne dinamike sustava velikog broja krutih čestica na primjeru elektromagnetne spojke s česticama**

Naslov rada na engleskom jeziku: **Numerial modeling of rigid-particles-system contact dynamics by using magnetic particle clutch test case**

Opis zadatka:

Numeričko modeliranje sustava koji sadrže velik broj krutih čestica u međusobnom kontaktu zahtjevna je zadaća koja tijekom posljednjih godina privlači velik interes istraživača. Reprezentativan primjer takvog sustava je elektromagnetna spojka sa česticama. Princip rada takve spojke zasniva se na djelovanju elektromagnetskih i mehaničkih sila na feromagnetičnu ispunu pomoću koje se ostvaruje prijenos momenta.

U tom smislu, u radu je potrebno:

- opisati princip rada elektromagnetne spojke sa česticama, a pritom posebnu pažnju posvetiti međudjelovanju čestica kojima se ostvaruje prijenos momenta
- opisati model kontaktne dinamike koji će se koristiti u numeričkoj simulaciji
- izraditi računalni model spojke koji uključuje opisani kontaktni model u programskom paketu *Project Chrono* ili drugom prikladnom programskom okruženju otvorenog koda

U radu je potrebno navesti korištenu literaturu i eventualno dobivenu pomoć.

Zadatak zadan:
30. studenog 2016.

Rok predaje rada:
1. rok: 24. veljače 2017.
2. rok (izvanredni): 28. lipnja 2017.
3. rok: 22. rujna 2017.

Predviđeni datumi obrane:
1. rok: 27.2. - 03.03. 2017.
2. rok (izvanredni): 30. 06. 2017.
3. rok: 25.9. - 29. 09. 2017.

Zadatak zadao:

Prof. dr. sc. Zdravko Terze

Predsjednik Povjerenstva:

Prof. dr. sc. Igor Balen

Izjavljujem da sam završni rad izradio samostalno koristeći dostupnu literaturu i znanje stečeno tijekom studija.

Zahvaljujem se prof.dr.sc. Zdravku Terzeu na vodstvu i savjetima udjeljenima tokom izrade ovog rada.

Zahvaljujem se i asistentima dr.sc. Dariu Zlatar i Viktoru Pandža mag.ing. koji su mi pomogli prilikom izrade ovog rada.

Na kraju, zahvaljujem se cijeloj obitelji i prijateljima jer su mi uvijek bili potpora.

Dominik Jurinić

Sažetak

Analiza sustava koji sadrži veliki broj čestica zahtjevna je zadaća iz više razloga. Matematičko i mehaničko modeliranje značajno je otežano zbog velikog broja čestica i njihove međusobne interakcije. Sustave s velikim brojem čestica karakterizira izrazito veliki broj stupnjeva slobode pa su i numeričke simulacije izrazito zahtjevne za provesti. Tema rada je numeričko modeliranje kontaktne dinamike spomenutih sustava na primjeru spojke kao realnog sustava, čije bolje razumijevanje može rezultirati poboljšanjem u konstrukcij i korištenju spojke. Rad je tematski podijeljen u tri dijela. Prvi dio daje kratak uvod u spojke, njihovu podjelu i funkciju. Nakon toga slijedi detaljniji opis konstrukcije spojke te interakcije čestica. Drugi dio počinje pregledom jednadžbi dinamike za česticu i sustav čestica koje su relevantne za promatrani problem. Nakon toga su kratko izložene jednadžbe elektromagnetizma koje su neophodne za naš slučaj. Slijedi matematička formulacija dvaju pristupa modeliranju kontaktne dinamike koja će se koristiti u ovom radu: metoda diskretnih elemenata(DEM) i diferencijalne varijacijske nejednakosti(DVI). Treći dio rada počinje kratkim pregledom programskog koda otvorenog okruženja *projectChrono* u kojemu je realizirana simulacija. Na kraju rada dana je validacija rezultata simulacije s obzirom na eksperimentalno dobivene podatke.

Ključne riječi: numerička simulacija, dinamika sustava više tijela, dinamika konstrukcijskih sustava, kontaktna dinamika, *project Chrono*

Sadržaj

1 Uvod **1**
1.1 Općenito o spojkama . . . 1
1.2 Podjela spojki . . . 1
1.3 Elektromagnetska spojka s čeličnim kuglicama . . . 2
1.4 Više o interakciji čestica . . . 3
1.5 Centrifugalna spojka s česticama . . . 4

2 Matematičko modeliranje **7**
2.1 Dinamika čestice . . . 7
2.2 Dinamika sustava čestica . . . 8
2.3 Osnovne jednadžbe elektromagnetizma . . . 11
2.3.1 Maxwellove jednadžbe . . . 11
2.3.2 Magnetske sile na česticu . . . 12
2.4 Metoda diskretnih elemenata . . . 13
2.4.1 Detekcija sudara . . . 13
2.4.2 Računanje normalne sile . . . 14
2.4.3 Računanje tangencijalne sile . . . 16
2.5 Diferencijalne varijacijske nejednakosti . . . 17
2.5.1 Diferencijalne jednadžbe s ograničenjima . . . 17
2.5.2 Formulacija problema . . . 18

3 Numerička simulacija **22**
3.1 *projectChrono* . . . 22
3.1.1 Arhitektura . . . 22
3.2 Numerička simulacija centrifugalne spojke . . . 22
3.2.1 Rezultati simulacije centrifugalne spojke sa DVI kontaktnim modelom . . . 24
3.2.2 Rezultati simulacije centrifugalne spojke sa DEM kontaktnim modelom . . . 25
3.2.3 Rezultati simulacije elektromagnetske spojke s DVI kontaktnim modelom . . . 26
3.3 Zaključak . . . 29

Popis slika

1.1 Shematski prikaz mehaničkog sustava sa spojkom [9] 1
1.2 Elektromagnetska spojka s česticama [2] 2
1.3 Prikaz spojke s označenim smjerom magnetskog polja [2] 2
1.4 Shematski prikaz spojke s označenim smjerom magnetskog polja [2] . . . 3
1.5 Konstrukcija elektromagnetske spojke za simulaciju 4
1.6 Shematski prikaz spojke u mirovanju [9] 4
1.7 Shematski prikaz spojke u radu [9] 5
1.8 Shematski prikaz spojke prilikom preopterećenja [9] 5
1.9 Shematski prikaz spojke prilikom preopterećenja [9] 6
1.10 Konstrukcija centrifugalne spojke 6

2.1 Čestica u gibanju[10] 7
2.2 Sustav *p* čestica[10] 9
2.3 Kutna količina gibanja *i*-te čestice[10] 10
2.4 Elektromagnetsko polje 12
2.5 Metodologija formuliranja DEM sustava [8] 13
2.6 Podjela na manje dijelove[8] 13
2.7 Čestice koje se preklapaju[8] 14
2.8 Normalna i tangencijalna sila prilikom kontakta[8] 14
2.9 Ovisnost normalne sile o iznosu prodiranja[7] 16
2.10 Ovisnost tangencijalne sile o tangencijalnom pomaku[7] 17
2.11 Kuglica i podloga[5] 18
2.12 Dva tijela u kontaktu[5] 19

3.1 Arhitektura *projectChrono*-a [1] 22
3.2 Eksperimentalni podaci [3] 23
3.3 Prikaz spojke napunjene česticama 23
3.4 Rezultati simulacije DVI modela s 200 čestica 24
3.5 Rezultati simulacije DVI modela s 500 čestica 24
3.6 Rezultati simulacije DVI modela s 1000 čestica 25
3.7 Rezultati simulacije DEM modela s 200 čestica 25
3.8 Rezultati simulacije DEM modela s 500 čestica 26
3.9 Rezultati simulacije DEM modela s 1000 čestica 26
3.10 Čestice u elektromagnetskoj spojki pod utjecajem elektromagnetskog polja 27
3.11 Rezultati simulacije elektromagnetske spojke s DVI kontaktnim modelom s 200 čestica 27
3.12 Rezultati simulacije elektromagnetske spojke s DVI kontaktnim modelom s 500 čestica 28
3.13 Rezultati simulacije elektromagnetske spojke s DVI kontaktnim modelom s 1000 čestica 28

Popis tablica

Popis oznaka

$\mathbf{a}$	vektor akceleracije
$\mathbf{B}$	magnetsko polje
$\mathbf{E}$	električno polje
$\mathbf{F}$	sila
$\mathbf{h}_0$	kutna količina gibanja
$\mathbf{J}$	gustoća električne struje
$\mathbf{l}_c$	rezultantni moment
$\mathbf{M}$	magnetizacija materijala
$\mathbf{n}$	vektor normale
$\mathbf{p}$	količina gibanja
$\mathbf{r}$	vektor položaja
$\mathbf{T}_m$	moment magnetskog polja na česticu
$\mathbf{u}$	vektor tangencijalnog pomaka
$\mathbf{v}$	vektor brzine
$\mathbf{q}$	vektor generaliziranih koordinata
d	promjer čestice
K	broj kinematskih ograničenja u sustavu
k_n	koeficijent opruge
m	masa čestice
n	broj stupnjeva slobode
t	vrijeme
γ_i	multiplikator
γ_n	faktor prigušenja
δ_{ij}	iznos prodiranja
ε_0	permitivnost
ρ	gustoća naboja
μ_0	permeabilnost
μ_i	faktor trenja
ε_j	kvaternion
χ	volumna magnetska osjetljivost

1. Uvod

U uvodu je dana problematika spojki, njihova podjela i funkcija. U izloženoj podjeli spojki locirana je elektromagnetska spojka s česticama koja će se koristiti u simulaciji. Nakon pregleda funkcioniranja spojke kao makrosustava fokus je prebačen na interakciju između pojedinih čestica kako bi se bolje shvatio mehanizam prijenosa momenta. Za validaciju rezultata simulacije kontaktne dinamike koristi će se centrifugalna spojka s česticama jer za nju postoje dostupni eksperimentalni podaci,pa je nakon opisa elektromagnetske spojke opisano i funkcioniranje centrifugalne spojke. Na kraju uvodnog poglavlja dan je prikaz modela elektromagnetske i centrifugalne spojke koji su izrađeni u CAD alatu Solidworks i koji će biti korišteni u simulaciji.

1.1 Općenito o spojkama

Spojke su strojni elementi koji se upotrebljavaju za trajno ili povremeneo spajanje dvaju vratila u svrhu prijenosa okretnog momenta ili za spajanje dvaju vratila sa strojnim dijelom koji se nalazi na njemu(npr. remenica, zupčanik i sl.)[9]. U osnovi, spojke se sastoje od dva člana: primarnog i sekundarnog. Primarni dio se odnosi na dio koji je vezan na ulazno vratilo, tj. vratilo preko kojeg se dovodi snaga. Sekundarni dio se odnosi na dio koji je vezan na izlazno vratilo tj. vratilo preko kojeg se odvodi snaga. Spojke, za razliku od prijenosnika snage(zupčanici, remenski i tarni prijenosnici i sl.) karakterizira to što one ne vrše transformaciju brzine vrtnje i okretnog momenta.

Slika 1.1: Shematski prikaz mehaničkog sustava sa spojkom [9]

Prema tome, zahtjevi koje stavljamo pred spojku su: prijenos okretnog momenta, uspostavljanje ili prekid prijenosa okretnog momenta, zaštita strojeva od preopterećenja te olakšavanje montaže i transporta.

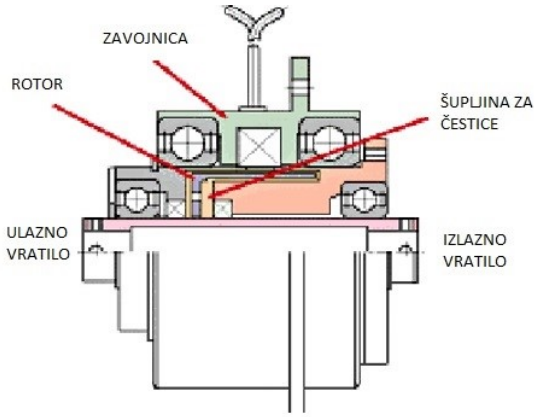
1.2 Podjela spojki

Spojke možemo podijeliti na 4 osnovne grupe: neelastične, elastične, uključno-isključne te specijalne spojke [9]. Za svaku od navedenih grupa postoje i detaljnije podjele, međutim one nisu relevantne za ovaj rad. Glavna karakteristika neelastičnih spojki je da s pogonske na gonjenu stranu spojke prenose isto kolebanje okretnog momenta. U slučaju da naš mehanički sustav ima udarna opterećenja i velika kolebanja okretnih momenata, elastične spojke su prikladan odabir u konstrukciji istih. Uključno-isključne spojke služe

za povremeno uključivanje i isključivanje veze ulaznog i izlaznog vratila. Specijalne spojke pored osnovne namjene (prijenos okretnog momenta) imaju i dodatnu namjenu po kojoj se vrši njihova podjela. Razlikujemo spojke za automatsko upuštanje u rad, sigurnosne spojke i jednosmjerne spojke.

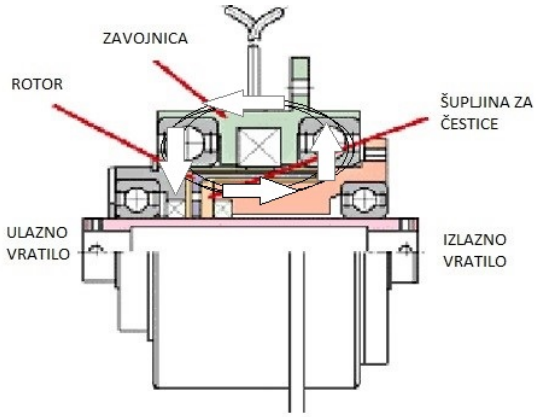
1.3 Elektromagnetska spojka s čeličnim kuglicama

Elektromagnetska spojka s čeličnim kuglicama spada u kategoriju elektromagnetičnih spojki međutim za razliku od ostalih spojki iz te kategorije nema frikcijsku pločicu koja prenosi moment. Prijenos momenta ostvaren je mehanički preko feromagnetične ispune. Konstrukcija spojke prikazana je na Slici 1.2.



Slika 1.2: Elektromagnetska spojka s česticama [2]

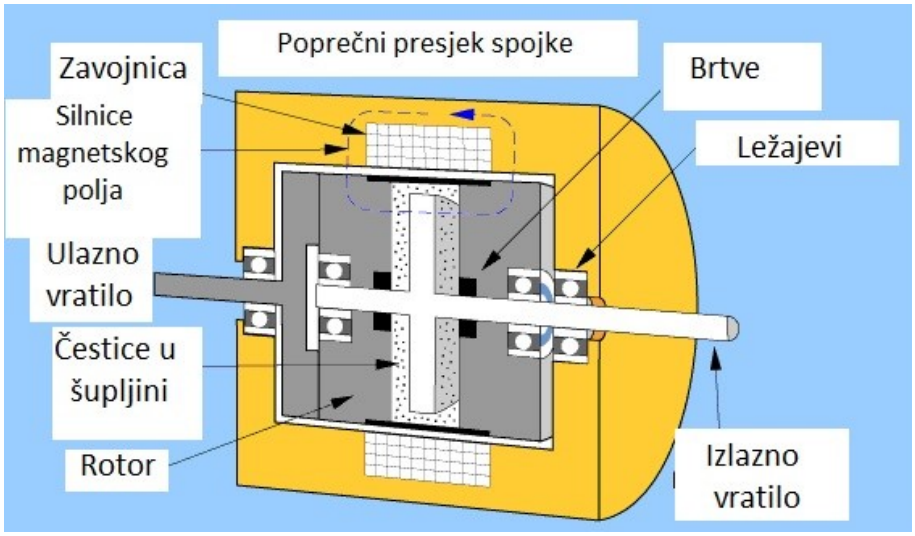
Čestice, koje se nalaze u prostoru oko rotora, mogu ali i ne moraju biti u uljnoj suspenziji. Prije nego što se pusti struja kroz zavojnicu na čestice djeluje samo sila teža. Kao posljedica protoka struje kroz zavojnicu, javlja se magnetsko polje koje čestice poravna u smjeru silnica magnetskog polja. Silnice magnetskog polja su shematski prikazane na Slici 1.3.



Slika 1.3: Prikaz spojke s označenim smjerom magnetskog polja [2]

1.4 Više o interakciji čestica

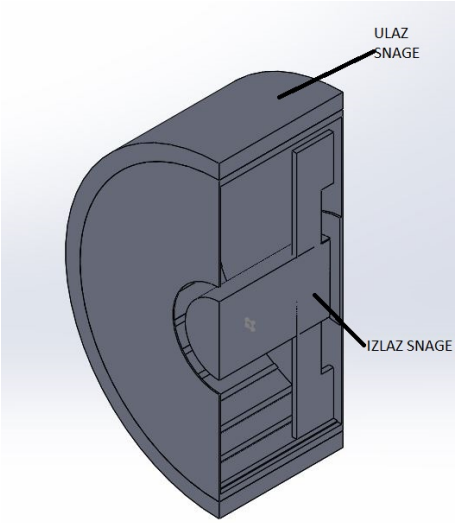
Na gornjim slikama je dana konstrukcijska izvedba elektromagnetske spojke s česticama. Da bi objasnili princip rada elektromagnetske spojke koristit ćemo shematski prikaz spojke koji je prikazan na Slici 1.4.



Slika 1.4: Shematski prikaz spojke s označenim smjerom magnetskog polja [2]

Kao što je već rečeno, dok nema električne struje kroz zavojnicu na čestice djeluje samo sila teža te su one slobodno rasprostranjene po šupljini. Rotor, koji je spojen na ulazno vratilo spojke slobodno rotira dok je disk spojen na izlazno vratilo također slobodan te između njega i rotora nema nikakve veze. Kada se kroz vodič pusti električna struja oko vodiča se inducira magnetsko polje čiji smjer ovisi o smjeru protoka struje. Smjer magnetskog polja za naš slučaj nije presudan stoga ćemo u radu uzeti da su silnice magnetskog polja usmjerene kao na Slici 1.3. Magnetsko polje djeluje na čestice koje se nalaze u magnetskom polju, a vektor sile usmjeren je u smjeru magnetskog polja. Sile koje su rezultat magnetskog polja djeluju na svaku pojedinu česticu pritom gurajući čestice na stijenke. Postupnim nabijanjem čestica, stvara se čvrsta veza između rotora kroz koji se dovodi snaga i diska koji je spojen na izlazno vratilo. Dok magnetsko polje nije dovoljno jako disk izlaznog vratila klizi kroz čestice sve do trenutka dok se ne dostigne dovoljna jačina magnetskog polja, a time i sile koja djeluje na čestice. Znajući zakon ovisnosti jakosti magnetskog polja u ovisnosti napona ili jačine struje koja teče kroz vodič, moguće je dobiti direktnu vezu između strujnih karakteristika i momenta koji se može prenjeti. Taj zakon se onda kasnije može iskorisiti za fino podešavanje karakteristika spojke u eksploataciji.

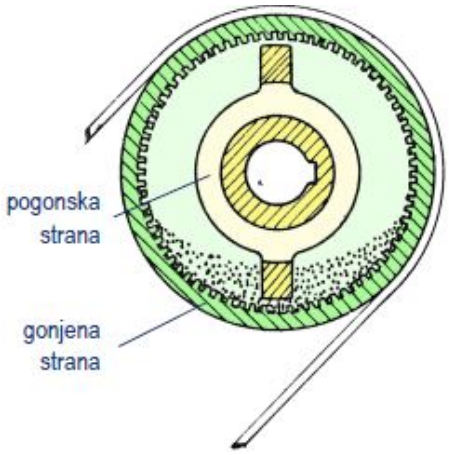
Prikaz konstrukcije spojke koja će se koristiti u simulaciji dan je na Slici: 1.5.



Slika 1.5: Konstrukcija elektromagnetske spojke za simulaciju

Iako je vidljivo da se shematski prikaz i prikaz konstrukcije spojke za simulaciju razlikuju, bitno je napomenuti da pojednostavljenje napravljeno da bi se simulacija mogla pokrenuti na osobnom računalu, a i mehanizam prijenosa momenta je isti.

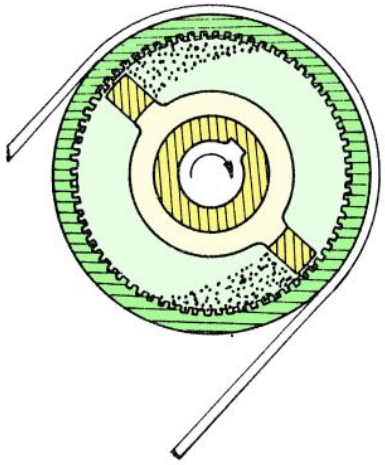
1.5 Centrifugalna spojka s česticama



Slika 1.6: Shematski prikaz spojke u mirovanju [9]

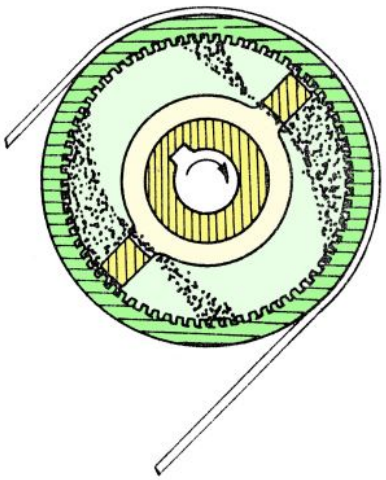
Na Slici 1.6 vidimo shematski prikaz spojke te označen primarni(pogonski) i sekundarni(gonjeni) dio spojke. Primarni dio čini ulazno vratilo na koji su spojene dvije lopatice. Sekundarni dio ima oblik šupljeg cilindra koji po unutarnjem obodu ima raspoređena rebra. Dok je spojka u mirovanju, čelične kuglice leže u donjem dijelu spojke. Prilikom pokretanja primarnog dijela spojke, opterećenje pogonskog dijela spojke je gotovo nepostojeće te lopatice samo prolaze kroz slojeve čestica koje leže na dnu spojke. Postupnim ubrzavanjem primarnog dijela spojke, zbog centrifugalne sile koja djeluje na čestice dolazi do stvaranja naslaga čestica ispred lopatica. Naslage čestica rezultiraju čvrstom vezom između primarnog i sekundarnog dijela spojke. Čvrsta veza između primarnog i

sekundarnog dijela osigurava sinkronu brzinu vrtnje primarnog i sekundarnog dijela spojke, a time i prijenos momenta. Rad spojke prikazan je na Slici 1.7.



Slika 1.7: Shematski prikaz spojke u radu [9]

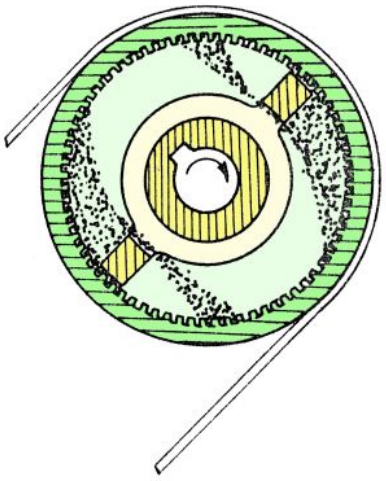
U slučaju da dođe do povećanja momenta koji je potrebno isporučiti na sekundarni dio spojke, do izražaja dolazi još jedna karakteristika spojke. Prilikom preopterećenja, kuglice koju su posložene u naslage ispred lopatice, počinju proklizavati i curiti kroz prorez na lopaticama. Pri tome, opterećenje pogonskog stroja ostaje isto. Taj slučaj je prikazan na Slici 1.9.



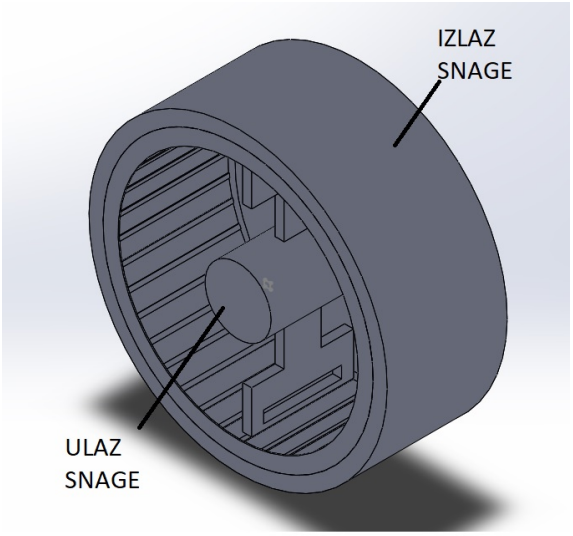
Slika 1.8: Shematski prikaz spojke prilikom preopterećenja [9]

Kao kontrolu koju možemo uzeti prilikom validacije bitno je znati da bi se ostvarile dovoljne centrifugalne sile za prijenos momenta, potrebno je ostvariti najmanje 500okr/min primarnog dijela spojke [2].

Prikaz konstrukcije centrifugalne spojke označen je na Slici: 1.10.



Slika 1.9: Shematski prikaz spojke prilikom preopterećenja [9]



Slika 1.10: Konstrukcija centrifugalne spojke

2. Matematičko modeliranje

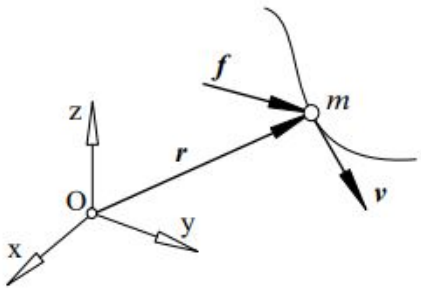
U ovom poglavlju prezentirana je dinamika mehničkog sustava. Ukratko su navedene glavne zadaće kojima se bavi dinamika nakon čega je dan opis matematičkog aparata koji se koristi i koji je neophodan za kasnije formuliranje problema kojim se bavi rad.

2.1 Dinamika čestice

Dinamika je grana klasične mehanike koja se bavi proučavanjem gibanja. Zadaća dinamike je opisati gibanje makroskopskih tijela na koje djeluju vanjske sile. Da bismo mogli formulirati jednadžbe dinamike, prvo moramo dati opis prostora u kojem se naš sustav nalazi. U klasičnoj mehanici, pretpostavka je da je prostor trodimenzijski i Euklidski, što znači da je ne zakrivljen. Takav prostor označavamo $\mathbb{R}^n$ gdje n označava broj dimenzija. U našem slučaju prostor označavamo kao $\mathbb{R}^3$. Da bismo opisali položaj čestice u takvom prostoru potrebna su nam tri, međusobno neovisna parametra. Kartezijev koordinatni sustav definiran je sa tri ortonormalne koordinatne osi. Prema tome, položaj čestice je definiran kao umnožak neke skalarne vrijednosti i jediničnog vektora za svaku od osi:

$$\vec{r} = \mathbf{r} = \sum_{i=1}^{3} x_i \vec{e}_i,$$

gdje su $\vec{e}_i$, $i = 1,2,3$ jedinični vektori Kartezijevog koordinatnog sustava, a $\mathbf{r}$ je vektor položaja čestice kao što je prikazano na Slici 2.1.



Slika 2.1: Čestica u gibanju[10]

U slučaju da čestica mijenja svoj položaj u vremenu, tada je njezin položaj funkcija vremena t:

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = \sum_{i=1}^{3} x_i(t) \vec{e}_i.$$

Osim položaja, brzina je također važno svojstvo čestice za promatranje evolucije sustava u vremenu. Brzina je prva derivacija položaja čestice i također je vektorska veličina:

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}.$$

Akceleracija je definirana kao prva derivacija vektora brzine ili druga derivacija vektora položaja čestice:

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d^2\mathbf{r}(t)}{dt^2} = \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt}.$$

Kao što smo vidjeli, gibanje čestice je matematički opisano uz pomoć određenog broja parametara. Broj neovisnih parametara koji su potrebni da bi se opisalo stanje(konfiguracija) dinamičkog sustava zovu se *stupnjevi slobode*. Za česticu koja se nalazi u trodimenzionalnom prostoru broj parametara koji su potrebni za opis njenog položaja je ,$n = 3$, što znači da čestica ima 3 stupnja slobode. Broj stupnjeva slobode označava se s n, implicirajući pri tome da je za sustav sa N čestica, broj stupnjeva slobode jednak:

$$n = 3N.$$

Svaki stupanj slobode je matematički opisan koristeći jednu koordinatu(skalarna vrijednost). *Generalizirane koordinate* su minimalan skup neovisnih koordinata, čiji je broj jednak broju stupnjeva slobode sustava, koje u potpunosti opisuju konfiguraciju sustava. Važno je napomenuti da pri izboru koordinata sustava treba voditi računa da se odabranim koordinatama mogu opisati sve konfiguracije sustava. Prilikom definicije sustava potrebno je spomenuti još i ograničenja. Ograničenja u mehaničkim sustavima su česta jer su tijela međusobno povezana i njihova gibanja također mogu biti opisana na predefinirane načine. Prisutnost ograničenja reducira broj stupnjeva slobode sustava:

$$n = 3N - K,$$

gdje K označava broj ograničenja u sustavu. Nakon što smo definirali kinematičke veličine dinamičkog sustava slijedi definicija ostalih veličina važnih analizu sustava. Količina gibanja je također vektorska veličina definirana kao umnožak mase i brzine čestice:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}.$$

Kutna količina gibanja s obzirom na mirujući koordinatni sustav definirana je kao vektorski umnožak vektora položaja čestice i količine gibanja:

$$\mathbf{h}_O = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}.$$

Nakon što smo upoznali najvažnija svojstva čestice u gibanju, spremni smo formulirati 2. Newtonov zakon za česticu koji glasi:

$$\mathbf{f} = m\ddot{\mathbf{r}} = m\dot{\mathbf{v}} = m\mathbf{a} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v})$$

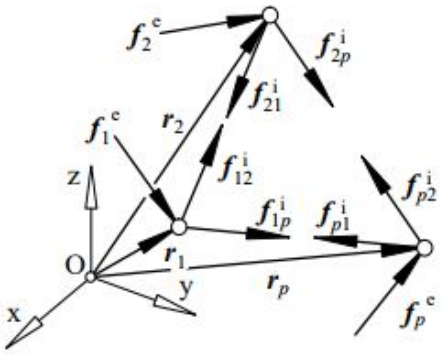
2.2 Dinamika sustava čestica

Pregled dinamike čestice dan je kao u [10]. Razmatrajući sustav čestica kao na Slici 2.2 Newtonov zakon za i-tu česticu glasi:

$$\mathbf{f}_i = \mathbf{f}_i^e + \mathbf{f}_i^i = m_i\mathbf{a}_i$$

gdje $\mathbf{f}_i^e$ označava rezultantu sila koje djeluju na i-tu česticu. Rezultanta unutarnjih sila $\mathbf{f}_i^i$ dana je jednadžbom:

$$\sum_{j=1}^{p} \mathbf{f}_{ij} = \mathbf{f}_i^i.$$



Slika 2.2: Sustav p čestica[10]

U gornjoj jednadžbi $\mathbf{f}_{ij}$ predstavlja unutarnje sile u sustavu koje djeluju između tijela i i j. Prema trećem Newtonom zakonu možemo napisati:

$$\mathbf{f}_{ij} = -\mathbf{f}_{ji}.$$

Nakon što sumiramo sve sile koje djeluju u sustavu:

$$\sum_{i=1}^{p} \mathbf{f}_i^e + \sum_{i=1}^{p} \mathbf{f}_i^i = \sum_{i=1}^{p} m_i \mathbf{a}_i,$$

pritom znajući da:

$$\sum_{i=1}^{p} \mathbf{f}_i^i = 0.$$

Prema tome slijedi:

$$\sum_{i=1}^{p} \mathbf{f}_i^e = \sum_{i=1}^{p} m_i \mathbf{a}_i.$$

Položaj $\mathbf{r}_c$ centra mase C definiran je kao:

$$m\mathbf{r}_C = \sum_{i=1}^{p} m_i \mathbf{r}_i,$$

pri tome vrijedi da je $m = \sum_{i=1}^{p} m_i$ ukupna masa sustava. Derivacijom gornje jednadžbe po vremenu kao rezultat dobijemo količinu gibanja sustava čestica:

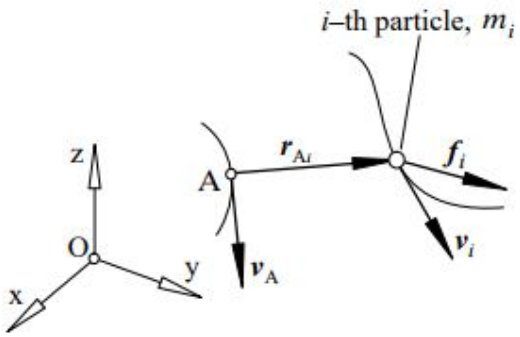
$$m\mathbf{v}_C = \sum_{i=1}^{p} m_i \mathbf{v}_i.$$

Druga derivacija po vremenu rezultira:

$$m\mathbf{a}_C = \sum_{i=1}^{p} m_i \mathbf{a}_i.$$

Uspoređujući lijevu stranu gornje jednadžbe sa sumom vanjskih sila koje djeluju na sustav:

$$\sum_{i=1}^{p} \mathbf{f}_i^e = m\mathbf{a}_C$$



Slika 2.3: Kutna količina gibanja *i*-te čestice[10]

možemo zaključiti da se centar mase sustava giba kao da je masa cijelog sustava koncetrirana u toj točki, a sve vanjske sile djeluju na tu točku.

Kutna količina gibanja za *i*-tu česticu oko proizvoljno definirane točke A, koja se giba kao što je prikazano na Slici 2.3 definirana je kao:

$$\mathbf{h}_{Ai} = \mathbf{r}_A i \times m_i \mathbf{v}_i.$$

Rezultat deriviranja gornje jednadžbe po vremenu je:

$$\dot{\mathbf{h}}_{Ai} = \dot{\mathbf{r}}_{Ai} \times m_i \mathbf{v}_i + \mathbf{r}_{Ai} \times m_i \dot{\mathbf{v}}_i.$$

U slučaju da se točka A poklapa s točkom O koja je nepomična $(\dot{\mathbf{r}}_{Ai} \times \mathbf{v}_i = \mathbf{v}_i \times \mathbf{v}_i = 0)$ tada gornju jednadžbu možemo napisati kao:

$$\dot{\mathbf{h}}_{Ai} = \mathbf{r}_{Ai} \times m_i \dot{\mathbf{v}}_i = \mathbf{r}_{Ai} \times \mathbf{f}_i.$$

ili

$$\dot{\mathbf{h}}_{Ai} = \mathbf{l}_{Ai}$$

gdje je $\mathbf{l}_{Ai}$ rezultantni moment s obzirom na točku A. Kutna količina gibanja s obzirom na sustav čestica oko točke A koja se giba je:

$$\mathbf{h}_A = \sum_{i=1}^{p} \mathbf{r}_{Ai} \times m_i \mathbf{v}_i.$$

Nakon što gornju jednadžbu deriviramo po vremenu i izvršimo neke algebarske operacije:

$$\dot{\mathbf{h}}_A = \dot{\mathbf{r}}_{AC} \times m\mathbf{v}_C + \sum_{i=1}^{p} \mathbf{r}_{Ai} \times \mathbf{f}_i^e,$$

pri čemu je $\mathbf{r}_{AC}$ vektor položaja centra mase sustava čestica s obzirom na točku A. Ako se točka A podudara s mirujućim ishodištem $O(\mathbf{r}_{AC} = \mathbf{r}_C = \mathbf{v}_C, \dot{\mathbf{v}_C} \times m\mathbf{v}_C = 0)$ gornja jednadžba se svodi na:

$$\dot{\mathbf{h}}_A = \sum_{i=1}^{p} \mathbf{r}_{Ai} \times \mathbf{f}_i^e.$$

Ako se točka A poklapa s točkom C možemo napisati:

$$\dot{\mathbf{h}}_C = \sum_{i=1}^{p} \mathbf{r}_{Ci} \times \mathbf{f}_i^e,$$

ili

$$\dot{\mathbf{h}}_C = \mathbf{l}_C$$

pri čemu:

$$\mathbf{l}_C = \sum_{i=1}^{p} \mathbf{r}_{Ci} \times \mathbf{f}_i^e.$$

je rezultantni moment svih vanjskih sila koje djeluju na sustav čestica oko centra mase C.

2.3 Osnovne jednadžbe elektromagnetizma

U uvodnom poglavlju je opisana uloga elektromagnetskog polja u funkcioniranju spojke. Zbog toga je dan vrlo sažet pregled najvažnijh jednadžbi elektromagnetizma.

Elektromagnetsko polje je vektorsko polje koje nastaje kao posljedica prisutnosti električno nabijenih tijela. Elektromagnetsko polje možemo promatrati kao kombinaciju električnog i magnetskog polja. Električno polje je posljedica stacionarnih naboja, a magnetsko polje posljedica naboja koji se kreću. Naboji u pokretu su poznati i kao električna struja. Također, magnetski materijali su izvor elektromagnetskog polja Način interakcije između naboja i elektromagnetskog polja opisan je Maxwellovim jednadžbama i Lorenztovim zakonom.

2.3.1 Maxwellove jednadžbe

Kao što smo rekli, električno i magnetsko polje su trodimenzijska vektorska polja. To znači da je za svaku točku prostora definiran vektor koji je funkcija prostornih i vremenskih koordinata. Električno polje možemo napisati kao $\mathbf{E}(x,y,z,t)$ a magnetsko kao $\mathbf{B}(x,y,z,t)$. Ako je električno polje $\mathbf{E}$ različito od nule i konstantno u vremenu, kažemo da je elektrostatično polje. Ekvivalentno, ako je magnetsko polje različito i konstantno u vremenu također je magnetostatično. U slučaju da je jedno od polja promjenjivo u vremenu, tada oba polja moramo promatrati kao spregnuto elektromagnetsko polje za čiju analizu koristimo Maxwellove jednadžbe. Maxwellove jednadžbe u vekorskom obliku glase:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0},$$

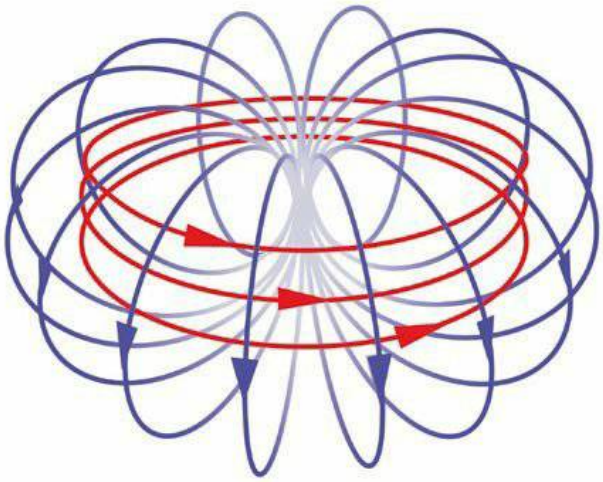
$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0,$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

pri čemo ρ označava gustoću naboja, ε_0 permitivnost, μ_0 permeabilnost, a $\mathbf{J}$ je gustoća električne struje . Prva od četiri Maxwellove jednadžbe označava Gaussov zakon koji pokazuje da je tok električnog polja koje izlazi iz nekog volumena proporcionalno naboju u tom volumenu. Gaussov zakon magnetizma predstavlja druga jednadžba, koja govori da magnetsko polje $\mathbf{B}$ ima divergenciju jednaku nuli. Intuitivnije, to možemo shvatiti da za magnetsko polje ne postoji izvori i ponori kao što postoje za električno polje, nego silnice magnetskog polja formiraju zatvorene petlje. Faradayev zakon indukcije predstavljen trećom jednadžbom opisuje način interakcije između magnetskog polja i električnog kruga. Promjenjivo magnetsko polje stvara električno polje.To je princip na kojem rade

mnogi tipovi elektromotora i generatora. Četvrta jednadžba predstavlja prošireni Amperov zakon. Prema njemu znamo da se oko vodiča kojim teče struja inducira magnetsko polje ali i da svako promjenjivo električno polje inducira magnetsko polje. Na slici 2.4 dan je prikaz magnetskog polja koje je označeno plavom bojom.



Slika 2.4: Elektromagnetsko polje

2.3.2 Magnetske sile na česticu

Matematičko modeliranje sila koje su rezultat magnetskog polja na česticu dano je prema [4]. Kako je vidljivo iz uvoda, B je oznaka za magnetsko polje također označava i gustoću magnetskog toka. Gustoću magnetskog toka možemo izračunati iz snage magnetskog polja H prema jednadžbi:

$$\mathbf{B} = \mu_r \mu_0 \mathbf{H} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$$

gdje μ_r označava specifičnu permeabilnost materijala. Magnetizacija M označava osjetljivost materijala na magnetizaciju a definirana je

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}_0,$$

gdje χ označava volumnu magnetsku osjetljivost a za kuglu iznosi 0.3. Sila magnetskog polja na česticu dana je jednadžbom :

$$\partial \mathbf{F}_m = \mu_0(\mathbf{M}_p \cdot \nabla)\mathbf{H}\partial V_p$$

a moment možemo dobiti kao:

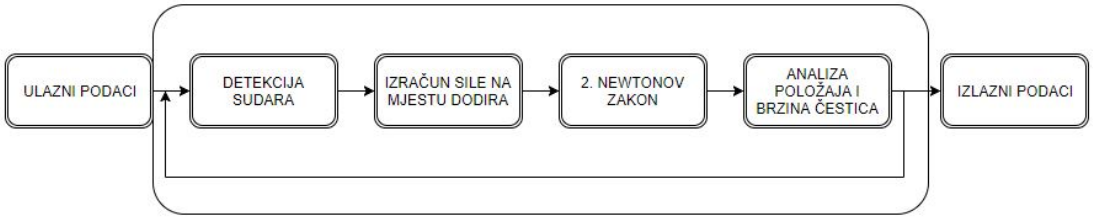
$$\partial \mathbf{T}_m = \mu_0 \mathbf{M}_p \times \mathbf{H}\partial V_P.$$

U slučaju da su čestice usmjere kao i silnice magnetskog polja, silu koja djeluje na čestice možemo napisati:

$$\mathbf{F}_m = \mu_0 V_p M_p \nabla H.$$

2.4 Metoda diskretnih elemenata

Da bi se sustavi s mnogo čestica mogli simulirati potrebno je takve sustave diskretizirati tako da promatramo svaku pojedinu česticu te pomoću metoda numeričke integracije računamo njezinu evoluciju u vremenu. Na taj način, možemo uhvatiti inerakcije između pojedinih čestica i iz toga dobiti odgovarajuće sile reakcije. Kroz godine, razvijeni su mnogi modeli kontaka s ciljem razvijanja modela koji bi najviše odgovarao realnosti. U modelu koji će biti predstavljen korištene su sferne čestice,međutim metodu je moguće generalizirati za svaki konveksan oblik čestice. Koraci prilikom definiranja DEM modela prikazani su na Slici 2.5. Pregled metode dan je kao u [8].

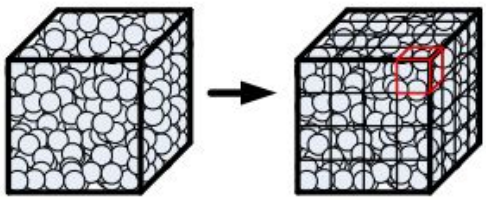


Slika 2.5: Metodologija formuliranja DEM sustava [8]

U prvom koraku definiramo ulazne podatke, kreiramo čestice i okolinu u kojoj će se realizirati simulacija. Gibanje čestice je promatrano u svakom koraku integracije sve dok traje simulacija. Veličina koraka integracije ovisi o veličini čestice i njihovoj relativnoj brzini i mora biti odabrana tako da je pojedinoj čestici onemogućeno da tokom jednog koraka prijeđe udaljenost veću od vlastitog promjera [8]. Također veličina koraka integracije mora biti dovoljno mala da svaki sudar bude registriran kako bi kao rezultat sudara dobili sile koje djeluju na česticu. Nakon što su nam poznate sve sile koje djeluju na česticu, možemo dobiti akceleraciju, a zatim i brzinu i položaj.

2.4.1 Detekcija sudara

Kao što je već rečeno, u svakom koraku integracije je potrebno provesti detekciju sudara kako bi se dobile sile na mjestima kontakta. Da bi se za pojedinu česticu provjerilo je li u kontaktu sa susjednim česticama,algoritam za detekciju sudara okolinu podjeli na male "kutije" kao što je prikazano na Slici 2.6.

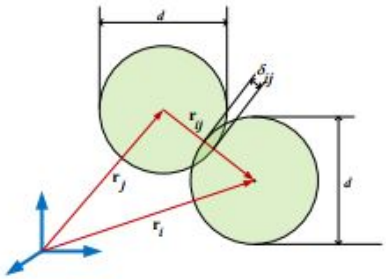


Slika 2.6: Podjela na manje dijelove[8]

Za svaku od kutija algoritam provjerava ima li u njoj preklapanja čestica. Na Slici 2.7 prikazano je preklapanje dvaju susjednih čestica. Položaj svake od čestica opisan

je vektorima $\mathbf{r}_i$ i $\mathbf{r}_j$. Relativan položaj između čestica opisan je vektorom $\mathbf{r}_{ij}$, pri čemu vrijedi:

$$\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j.$$



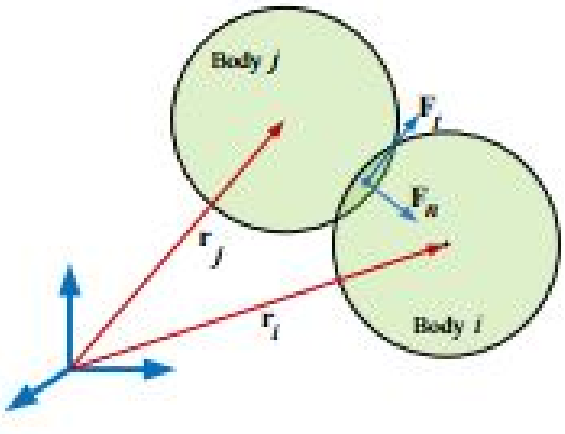
Slika 2.7: Čestice koje se preklapaju[8]

Ako je udaljenost između centara masa čestica manja od zbroja njihovih radijusa čestice su u kontaktu. Ako imamo dvije čestice s jednakim radijusom možemo napisati gornji uvjet kao:

$$\mathbf{r}_{ij} \leq d$$

pri čemu uzimamo da je d promjer čestice.

Modeliranje kontakta između čestica je najzahtjevniji zadatak u modeliranju sustava s velikim brojem čestica. Sudari dviju čestica nisu ni potpuno elastični ali nisu ni neelastični dok koeficijent restitucije ovisi o materijalu čestica ali i o brzini prije sudara. Veće brzine prije sudara rezultiraju sudarima koji su više neelastični što znači i manji koeficijent restitucije [8]. Eksperimentalna ispitivanja su pokazala da se prilikom modeliranja kontakta u obzir mora uzeti i međusobno klizanje između čestica. Računanje sile koja se javlja prilikom kontakta možemo podijeliti na računanje normalne komponente i računanje tangencijalne komponente kao što je prikazano na Slici 2.8.



Slika 2.8: Normalna i tangencijalna sila prilikom kontakta[8]

2.4.2 Računanje normalne sile

Za računanje normalne sile razvijeno je više modela koji mogu biti podijeljeni u četiri kategorije: kontinuirani potencijalni modeli, linearni viskoznoelastični modeli, nelinearni

viskozno elastični modeli i histeretični modeli. Kontinuirani potencijalni modeli se koriste u molekularnoj dinamici i neće biti predstavljeni u ovom radu. U linearno viskoznoelastičnim modelu, normalna sila je funkcija normalnog sabijanja $\mathbf{d}_{ij}$ i relativne normalne brzine $\dot{\mathbf{d}}_{ij}$ između čestica u dodiru. Da bi približili ovaj model računanja sile, možemo zamisliti da između dvije čestice postoji opruga i prigušnica s koeficijentom opruge k_n i faktorom prigušenja γ_n, respektivno. Koeficijent opruge i faktor prigušenja su konstante i ovise o svojstvu materijala. Prema tom modelu, normalnu silu između čestica i i j možemo napisati kao:

$$\mathbf{F}_{n_{ij}} = \mathbf{F}_{el} + \mathbf{F}_{diss} = -k_n \mathbf{d}_{ij} + \gamma_n \dot{\mathbf{d}}_{ij}.$$

Konstantni koeficijenti impliciraju i konstantan koeficijent restitucije, međutim on u realnim sustavima nije konstantan nego ovisi o iznosu brzine prije sudara. Da bi se anulirao efekt konstantnog koeficijenta restitucije predložen je nelinearni viskoznoelastični model. Kao što je opisano u [8] eksperimentalno je potvrđena veza između statičkog trenja, kuta nasipa i kuta granične stabilnosti, pri čemu vrijedi da su kut nasipa i faktor statičkog trenja međusobno linearno zavisni. Normalna sila se prema tome računa kao:

$$\mathbf{F}_{n_{ij}} = -k_n \mathbf{d}_{ij}^{3/2} + \gamma_n \dot{\mathbf{d}}_{ij}.$$

Nelinearnost modela proizlazi iz prvog člana desne strane gornje jednadžbe, dok drugi dio linearno ovisi o relativnoj normalnoj brzini $\dot{d}_{ij}$.

Kao što vidimo na Slici 2.7, δ_{ij} je iznos prodiranja jednog tijela u drugo a računamo ga kao:

$$\delta_{ij} = d - r_{ij}.$$

Vektor normale $\mathbf{n}_{ij}$ usmjeren je u smjeru vektora $\mathbf{r}_{ij}$. To možemo napisati kao:

$$\mathbf{n}_{ij} = \frac{\mathbf{r}_{ij}}{r_{ij}}.$$

Relativnu brzinu $\mathbf{v}_{ij}$ računamo kao:

$$\mathbf{v}_{ij} = \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j,$$

pa je prema tome relativna normalna brzina jednaka:

$$\mathbf{v}_{n_{ij}} = (\mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{n}_{ij})\mathbf{n}_{ij}.$$

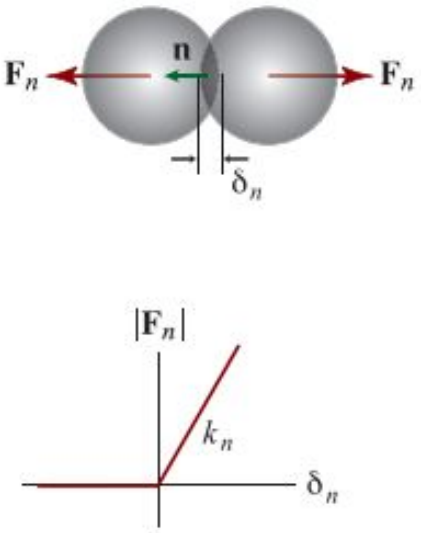
Normalna sila koja djeluje na česticu dana je sljedećim izrazom:

$$\mathbf{F} = f(\frac{\delta_{ij}}{d})\,(k_n \delta_{ij} \mathbf{n}_{ij} - \gamma_n m_{eff} \mathbf{v}_{n_{ij}})$$

pri čemu vrijedi:

$$m_{eff} = \frac{m_i m_j}{(m_i + m_j)}.$$

Dijagramski prikaz ovisnosti normalne sile o iznosu prodiranja dan je na Slici 2.9.



Slika 2.9: Ovisnost normalne sile o iznosu prodiranja[7]

2.4.3 Računanje tangencijalne sile

Uz brojne modele za računanje normalne sile također postoje i različiti modeli za računanje tangencijalne sile. U ovom radu se koristi linearni tangencijalni model koji uključuje konstanu opruge k_t i faktor prigušenja γ_t u kombinaciji s Coulombovim zakonom trenja. Relativna tangencijalna brzina $\mathbf{v}_{t_{ij}}$ je zbroj relativne brzine centra masa i brzine zbog rotacije tijela u dodiru:

$$\mathbf{v}_{t_{ij}} = \mathbf{v}_{ij} - \mathbf{v}_{n_{ij}} - \frac{1}{2}(\omega_i - \omega_j) \times \mathbf{r}_{ij}.$$

U tangencijalnom modelu,ekvivalent prodiranjeu je definiran preko vektora $\mathbf{u}_t$ koji prati ukupni tangencijalni pomak. Uzimamo da je na početku kontakta tangencijalni pomak jednak nuli, a računamo ga kao integral brzine za vremenski interval koji traje dok su čestice u dodiru:

$$\mathbf{u}_{t_{ij}} = \int_{coll} \mathbf{v}_{t_{ij}}(\tau) d\tau.$$

Zbog rotacije oko točke dodira, potrebno je osigurati da $\mathbf{u}_{t_{ij}}$ uvijek leži u tangentnoj ravnini dodira:

$$\frac{d\mathbf{u}_{t_{ij}}}{dt} = \mathbf{v}_{t_{ij}} - \frac{(\mathbf{u}_{t_{ij}} \cdot \mathbf{v}_{ij})\mathbf{r}_{ij}}{r_{ij}^2}.$$

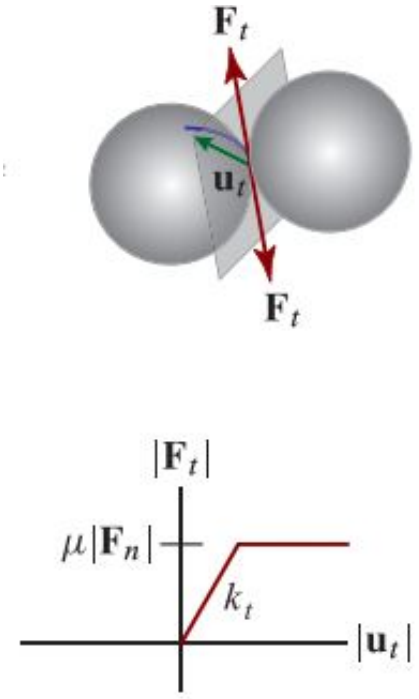
Prema tome tangencijalna sila je formulirana na isti način kao i normalna sila s članom koji ovisi o pomaku i članom koji ovisi o brzini:

$$\mathbf{F}_{t_{ij}} = f(\frac{\delta_{ij}}{d})(-k_t \mathbf{u}_{t_{ij}} - \gamma_t m_{eff} \mathbf{v}_{t_{ij}}).$$

Coulombov zakon trenja nameće uvjet da iznos tangencijalne sile ne može premašiti iznos normalne sile pomnožene faktorom trenja:

$$|\mathbf{F}_{t_{ij}}| \leq |\mu \mathbf{F}_{n_{ij}}|.$$

Dijagramski prikaz ovisnosti tangencijalne sile o tangencijalnom pomaku:



Slika 2.10: Ovisnost tangencijalne sile o tangencijalnom pomaku[7]

2.5 Diferencijalne varijacijske nejednakosti

Realno predstavljanje fizikalnog sustava uz diferencijalne jednadžbe koje ga opisuju, zahtjeva i neka ograničenja u ponašanju takvog sustava čije nametanje dodatno otežava rješenja jednadžbi koje opisuju promatrane sustave. Prema [5] rješavanjem spomenutih problema numeričkim metodama nailazimo na poteškoće, a ponekad je i ponašanje diferencijalnih jednadžbi u područjima ograničenja loše definirano. Modeli kojima se mogu opisati dinamički sustavi s ograničenjima imaju korijene u teoriji optimizacije pa će zbog toga biti korištene i metode koje su se tamo pokazale korisne. Da bismo bolje shvatili o čemu se radi prvo je dan jednostavn primjer sustava s ograničenjem i njegova formulacija a nakon toga i matematička formulacija problema.

2.5.1 Diferencijalne jednadžbe s ograničenjima

Primjer je dan kao u [5]. Zamislimo krutu lopticu kako udara u horizontalnu podlogu, kao na Slici 2.11. Ako zanemarimo otpor zraka, jednadžba gibanja dana je:

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -mg + N(t).$$

Ako je r radijus kuglice, za $t > 0$ mora vrijediti ograničenje $y(t) - r \geq 0$. Uzmimo da $t = \tau$ vrijeme kada kuglica udari u podlogu. U tom trenutku se javlja sila reakcije $N(t)$. Prije udara kuglice u podlogu imamo $dy/dt(\tau^-) < 0$, međutim nakon udara očekujemo da vrijedi $dy/dt(\tau^+) \geq 0$. Iz ovoga možemo zaključiti da $N(t)$ mora sadržavati Diracovu-δ funkciju, ili impuls, u trenutku τ: $N(t) = N^*\delta(t-\tau) + g(t)$. Sila koja se javlja prilikom kontakta usmjerena je okomito na površinu pa možemo napisati: $N(t) \geq 0$ za $t > 0$. Prema tome, odnos između položaja $y(t)$ i normalne sile koja se javlja uslijed kontakta

$N(t)$ možemo zapisati sljedećim relacijama:

$$0 \leq y(t) - r$$

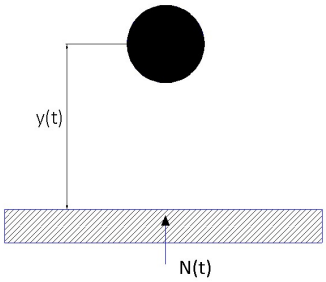
$$0 \leq N(t)$$

$$0 = (y(t) - r)N(t)$$

Ovako napisane relacije nazivaju se *uvjet komplementarnosti*. Taj uvjet možemo napisati i u sažetom obliku:

$$0 \leq y(t) - r \perp N(t) \geq 0.$$

Da bi dobili riješenje diferencijalne jednadžbe, tj položaj potrebno je još znati i koeficijent restitucije e.



Slika 2.11: Kuglica i podloga[5]

2.5.2 Formulacija problema

Matematička formulacija koja slijedi dana je prema [8] i [6]. Stanje sustava s n_b tijela u trodimenzijskom prostoru možemo napisati preko generalizranih koordinata

$$\mathbf{q} = [\mathbf{r}_1^T, \varepsilon_1^T, ..., \mathbf{r}_{n_b}^T, \varepsilon_{n_b}^T]^T \in \mathbb{R}^{7n_b}$$

i njihovih derivacija po vremenu

$$\dot{\mathbf{q}} = [\dot{\mathbf{r}}_1^T, \dot{\varepsilon}_1^T, ..., \dot{\mathbf{r}}_{n_b}^T, \dot{\varepsilon}_{n_b}^T]^T \in \mathbb{R}^{7n_b}$$

pri čemu je $\mathbf{r}_j$ vektor apsolutnog položaja centra mase j-tog tijela a rotacija je definirana kvaternionom ε_j . Možemo također uvesti i poopćene brzine $\mathbf{v} = [\dot{\mathbf{r}}_1^T, \bar{\omega}_1^T, ..., \dot{\mathbf{r}}_{n_b}^T, \bar{\omega}_{n_b}^T]^T \in \mathbb{R}^{6n_b}$ koje su s $\dot{\mathbf{q}}$ povezane linearnim preslikavanjem $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{L}(\mathbf{q})\mathbf{v}$ kojim se kutna brzina $\bar{\omega}_i$ transformira u određeni kvaternion $\dot{\varepsilon}_i$ preko formule $\dot{\varepsilon}_i = \frac{1}{2}G(\varepsilon_j)\bar{\omega}_i$ pri čemu vrijedi

$$G(\varepsilon_j) = \begin{bmatrix} +\varepsilon_1 & +\varepsilon_0 & -\varepsilon_3 & +\varepsilon_2 \\ +\varepsilon_2 & +\varepsilon_3 & +\varepsilon_0 & -\varepsilon_1 \\ +\varepsilon_3 & -\varepsilon_2 & +\varepsilon_1 & +\varepsilon_0 \end{bmatrix}$$

Ograničenja sustava kao što su prizmatični zglobovi predstavljena su algebarskim jednadžbama koje ograničavaju relativnu poziciju čestica. Pretpostavimo da je B skup ograničenja u sustavu prema kojemu možemo formulirati jednadžbe:

$$\Psi_i(\mathbf{q}, t) = 0, \quad i \in B.$$

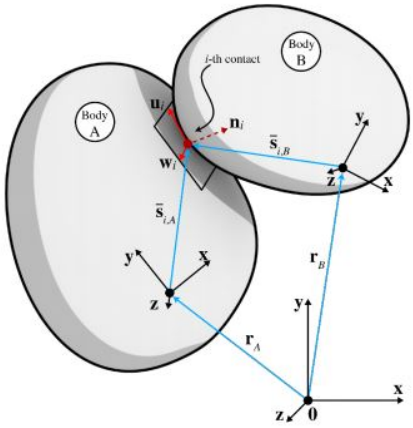
Da bi osigurali da su ograničenja dobro definirana i za brzine, prva derivacija mora biti definirana:

$$\nabla\Psi_i^T\mathbf{v}+\frac{\partial\Psi_i}{\partial t}=0,\quad i\in B$$

gdje je jakobijeva matrica $\nabla_q\Psi_i=[\partial\Psi_i/\partial\mathbf{q}]^T$ i $\nabla_q\Psi_i^T=\nabla_q\Psi_i^T\mathbf{L}(\mathbf{q})$**.** Izraz $\partial\Psi_i/\partial t$ je jednak nuli za sva skleronomna ograničenja, tj. ona ograničenja koja ne ovise o vremenu. Zbog toga što u obzir uzimamo kontakt između krutih tijela, za svako tijelo moramo definirati sudarni oblik. Algoritam za detekciju sudara nam vraća parove kontaktnih točaka tijela čiji se sudarni oblici nalaze blizu jedan drugome, tako da bismo onda mogli iskoristi skup nejednakosti A da izrazimo uvjet ne prodiranja jednog tijela u drugo:

$$\Phi_i(\mathbf{q})\geq 0,\quad i\in A.$$

Smisao navedene jednakosti jednak je kao i u primjeru navedenom na početku poglavlja, osigurati da se sustav ponaša kao u stvarnosti.



Slika 2.12: Dva tijela u kontaktu[5]

Ako imamo dva tijela kao na Slici 2.12, neka $\mathbf{n}_i$ bude normala na točku dodira usmjerena od tijela A, a $\mathbf{u}_i$ i $\mathbf{w}_i$ budu dva vektora u ravnini dodira te međusobno okomiti $\mathbf{n}_i$, $\mathbf{u}_i$ i $\mathbf{w}_i\in\mathbb{R}^3$. Kada je kontakt i aktivan, tj. kada vrijedi $\Phi_i(\mathbf{q})=0$, sile trenja javljaju se kao multiplikatori $\hat{\gamma}_{i,n}\geq 0$, $\hat{\gamma}_{i,u}$ i $\hat{\gamma}_{i,w}$. Normalna komponenta sile koja djeluje na tijelo B je $\mathbf{F}_{i,N}=\hat{\gamma}_{i,n}\mathbf{n}_i$ dok je tangencijalna komponenta sile $\mathbf{F}_{i,T}=\hat{\gamma}_{i,u}\mathbf{u}_i+\hat{\gamma}_{i,w}\mathbf{w}_i$. Za tijelo A ove sile imaju isti iznos ali drugačiji predznak. Prema Coulombovom zakonu trenja, ako je relativna tangencijana brzina $\mathbf{v}_{i,T}$ različita od nule, smjer tangencijalne sile koja nastaje kao rezultat dodira kolinearan je s vektorom brzine $\mathbf{v}_{i,T}$ i proporcionalan normalnoj sili prema zakonu $||\mathbf{F}_{i,T}||=\mu_{i,d}||\mathbf{F}_{i,N}||$ gdje je faktor proporcionalnosti dinamički koeficijen trenja $\mu_{i,d}\in\mathbb{R}^+$. U slučaju da je tangencijalna brzina $\mathbf{v}_{i,T}$ jednaka nuli, iznos tangencijalne sile ograničen je nejednakošću $||\mathbf{F}_{i,T}||\leq\mu_{i,s}||\mathbf{F}_{i,N}||$ pri čemu je $\mu_{i,s}\in\mathbb{R}^+$ statički faktor trenja. Za model koji će se koristiti uzimamo da su dinamički i statički faktor trenja jednaki i označavamo ga kao μ_i. Prema tome, možemo napisati Coulombov model trenja:

$$\begin{aligned}
\hat{\gamma}_{i,n} \geq 0, \Phi_i(\mathbf{q}) \geq 0, \Phi_i(\mathbf{q})\hat{\gamma}_{i,n} = 0, \\
\mu_i \hat{\gamma}_{i,n} \geq \sqrt{\hat{\gamma}_{i,u}^2 + \hat{\gamma}_{i,w}^2} \\
\langle \mathbf{F}_{i,T}, \mathbf{v}_{i,T} \rangle = -||\mathbf{F}_{i,T}||||\mathbf{v}_{i,T}|| \\
||\mathbf{v}_{i,T}||(\mu_i \hat{\gamma}_{i,n} - \sqrt{\hat{\gamma}_{i,u}^2 + \hat{\gamma}_{i,w}^2}) = 0.
\end{aligned}$$

Prvi izraz u gornjem izrazu nam govori da ako je udaljenost između dva tijela veća od nule $\Phi_i(\mathbf{q}) > 0$ onda je normalna sila jednaka nuli $\hat{\gamma}_{i,n} = 0$. Može se dogoditi i obrnuti slučaj da je udaljenost nula, a normalna sila različita od nule. Taj uvjet možemo napisati kao komplementarno ograničenje $\hat{\gamma}_{i,n} \geq 0, \Phi_i(\mathbf{q}) \geq 0, \Phi_i(\mathbf{q})\hat{\gamma}_{i,n} = 0$. Drugi uvjet $\mu_i \hat{\gamma}_{i,n} \geq \sqrt{\hat{\gamma}_{i,u}^2 + \hat{\gamma}_{i,w}^2}$ uvjetuje da se sila trenja nalazi unutar konusa trenja. Iz trećeg uvjeta je vidljivo da su vektor sile trenja i vektor tangencijalne brzine u točki dodira kolinearni ali suprotno usmjereni. Zadnji uvjet opisuje dva slučaja: ako je relativna tangencijalna brzina jednaka nuli ili veća od nule. Ako je brzina veća od nule onda vrijedi:$\mu_i \hat{\gamma}_{i,n} = \sqrt{\hat{\gamma}_{i,u}^2 + \hat{\gamma}_{i,w}^2}$, a ako je jednaka nuli onda imamo:$\mu_i \hat{\gamma}_{i,n} \geq \sqrt{\hat{\gamma}_{i,u}^2 + \hat{\gamma}_{i,w}^2}$. Ovaj model možemo interpretirati i kao Karush-Kuhn-Tucker uvjete prvog reda principa maksimalne disipacije:

$$(\hat{\gamma}_{i,u}, \hat{\gamma}_{i,w}) = \underset{\sqrt{\hat{\gamma}_{i,u}+\hat{\gamma}_{i,w}^2} \leq \mu_i \hat{\gamma}_{i,n}}{\operatorname{argmin}} \mathbf{v}_{i,T}^T (\hat{\gamma}_{i,u}\mathbf{u}_i + \hat{\gamma}_{i,w}\mathbf{w}_i).$$

Utjecaj vanjskih sila definirat ćemo pomoću vektora poopćenih sila $\mathbf{f}(t, \mathbf{q}, v) \in \mathbb{R}^{6n_b}$ koji sadrži utjecaj gravitacije, sile koje su posljedica opruga ili prigušnica i momente koje u sustavu stvaraju motori. Uzimajući u obzir skup dodira s trenjem A i skup bilateralnih ograničenja sustav ne može biti sveden na skup običnih diferencijalnih jednadžbi(ODE) oblika $\dot{\mathbf{v}} = f(\mathbf{q}, \mathbf{v}, t)$ ili na sustav algebarskih diferencijalnih jednadžbi(DAE). Prema tome, evolucija sustava u vremenu opisana je sljedećom diferencijalnom varijacijskom nejednakošću:

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{q}} &= \mathbf{L}(\mathbf{q})\mathbf{v} \\
\mathbf{M}\dot{\mathbf{v}} &= \mathbf{f}(t, \mathbf{q}, \mathbf{v}) + \sum_{i \in B} \hat{\gamma}_{i,b} \nabla \Psi_i + \sum_{i \in A} (\hat{\gamma}_{i,n}\mathbf{D}_{i,n} + \hat{\gamma}_{i,u}\mathbf{D}_{i,u} + \hat{\gamma}_{i,w}\mathbf{D}_{i,w}) \\
i \in B &: \Psi_i(\mathbf{q}, t) = 0 \\
i \in A &: \hat{\gamma}_{i,n} \geq 0 \perp \Phi_i(\mathbf{q}) \geq 0 \\
(\hat{\gamma}_{i,u}, \hat{\gamma}_{i,w}) &= \underset{\sqrt{\hat{\gamma}_{i,u}+\hat{\gamma}_{i,w}^2} \leq \mu_i \hat{\gamma}_{i,n}}{\operatorname{argmin}} \mathbf{v}^T (\hat{\gamma}_{i,u}\mathbf{D}_{i,u} + \hat{\gamma}_{i,w}\mathbf{D}_{i,w})
\end{aligned}$$

Za izražavanje kontaktnih sila u poopćenim koordinatama, koristimo generatore tangentnih prostora $D_i = [\mathbf{D}_{i,n}, \mathbf{D}_{i,u}, \mathbf{D}_{i,w}] \in \mathbb{R}^{7n_b x 3}$ koji su rijetki i definirani za tijelo A i B u dodiru kao:

$$\begin{aligned}
D_i^T = [0 \quad ... \quad -A_{i,p}^T \quad A_{i,p}^T A_A \tilde{\tilde{\mathbf{s}}}_{i,A} \quad 0 \quad ... \\
0 \quad ... \quad A_{i,p}^T \quad A_{i,p}^T A_A \tilde{\tilde{\mathbf{s}}}_{i,B} \quad 0 \quad ...]
\end{aligned}$$

Za razliku od prijašnje metode, u ovoj metodi nepoznanice nisu ni sile niti akceleracije $\dot{\mathbf{v}}$. Poznati su nam položaji $\mathbf{q}^{(l)}$ i brzine $\mathbf{v}^{(l)}$ a nepoznanice su nam impulsi: $\gamma_n, \gamma_u, \gamma_w, \gamma_b$. i brzine $\mathbf{v}^{(l+1)}$ u sljedećem koraku integracije $t^{(l+1)} = t^{(l)} + h$. Zbog takve formulacije sile mogu imati impulse, a brzine mogu imati diskontinuitete.

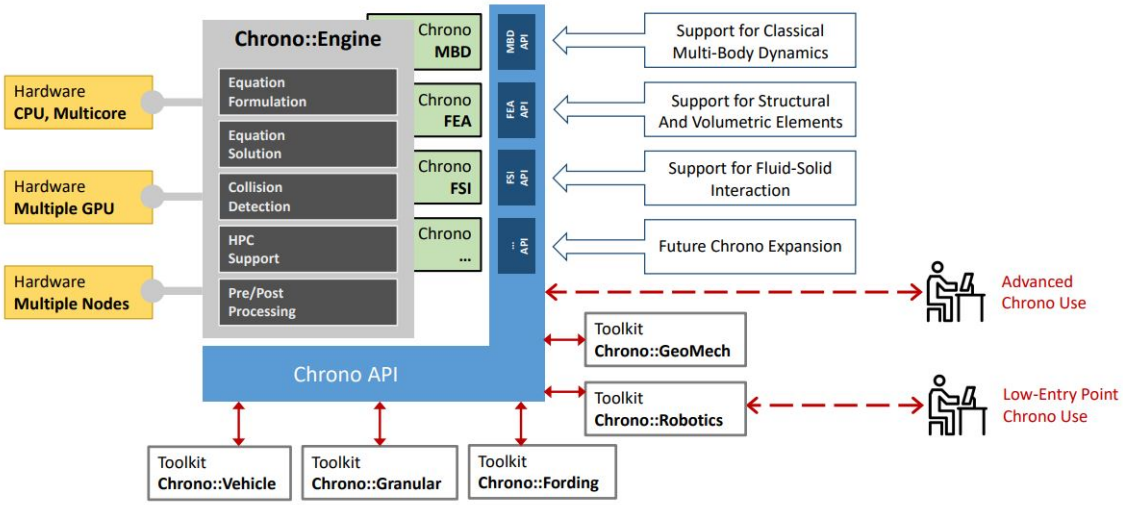
3. Numerička simulacija

3.1 *projectChrono*

projectChrono je skup softverskih alata koji služi za simulaciju realnih pojava u koje su uključeni različiti fizikalni efekti. To je programsko okruženje otvorenog koda što znači da je svima dostupno za preuzimanje. *projectChrono* se može koristiti za simulacije dinamike sustava više tijela, nelinearnu metodu konačnih elemenata te za simulacije interakcija između fluida i čvrstih tijela.

3.1.1 Arhitektura

U osnovi, *projectChrono* je skup biblioteka napisanih u programskom jeziku C++. Arhitektura *projectChrono*-a je modularna, što znači da korisnik odlučuje koji moduli su mu potrebni za njegovu simulaciju. Također, moguće ga je spregnuti s drugim softverskim alatima kako bi se olakšale neke procedure. Naprimjer, u ovom radu, modeli spojke su izmodelirani u CAD alatu Solidworks te su ti modeli uvezeni u simulaciju. Arhitektura koda je prikazana na Slici 3.1.

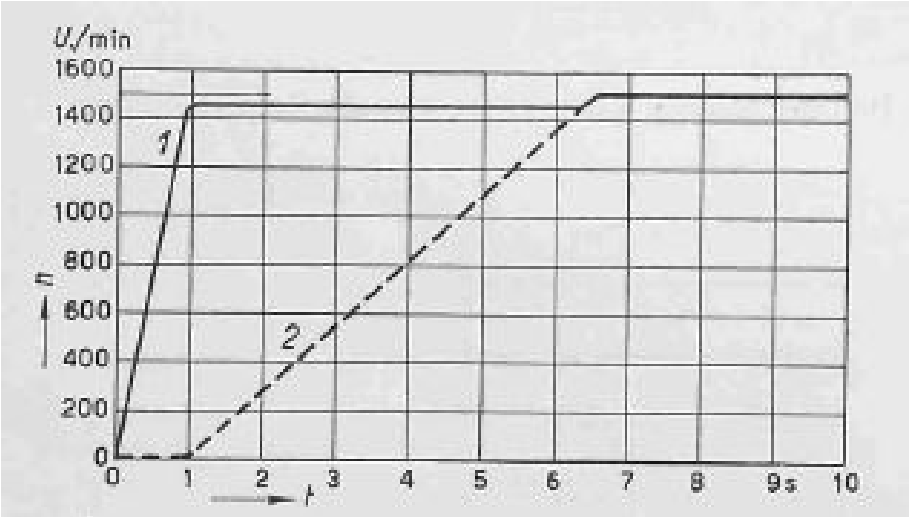


Slika 3.1: Arhitektura *projectChrono*-a [1]

Iz gornje slike je vidljivo da bazu čini knjižnica Chrono::Engine na koju se onda nadovezuju različiti specijalizirani moduli.

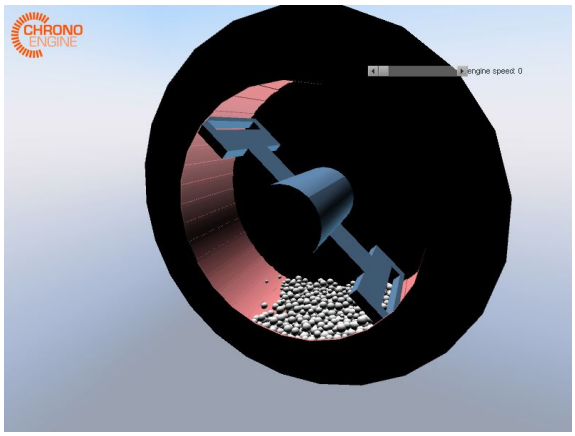
3.2 Numerička simulacija centrifugalne spojke

Zbog dostupnosti eksperimentalnih podataka, za validaciju modela iskoristit će se centrifugalna spojka s česticama. Veličine koje će se promatarati kao izlaz iz simulacije su brzine okretaja primarnog dijela spojke (motorRPM) i sekundardnog dijela spojke(output RPM). Simulacija će biti provedena za tri slučaja, svaki s povećanim brojem čestica. Za validaciju ćemo koristiti rezultate sa Slike 3.2.



Slika 3.2: Eksperimentalni podaci [3]

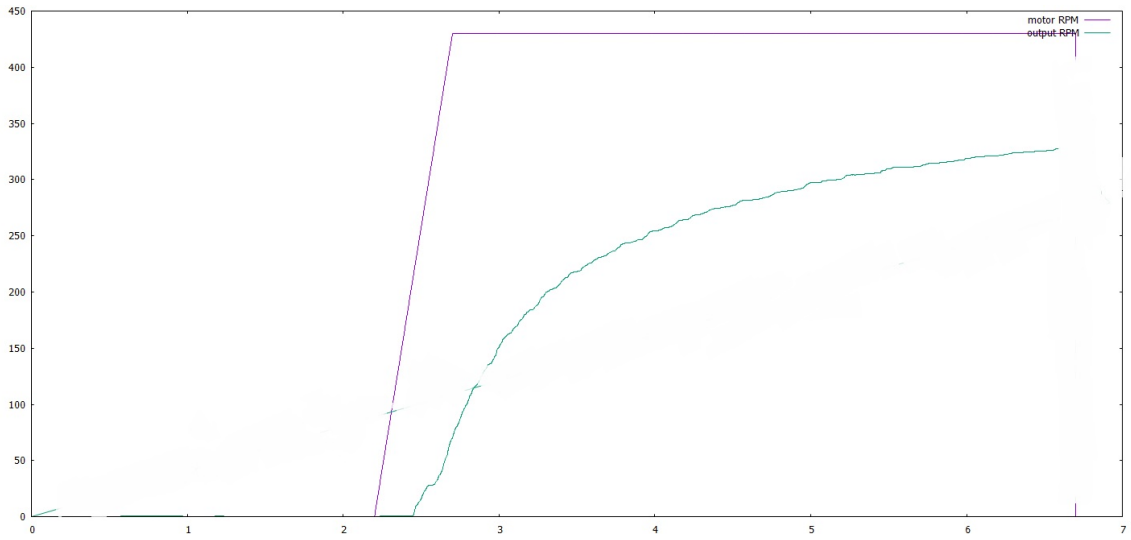
Prvo je model spojke uveden u *projectChrono* nakon čega je spojka napunjena česticama promjera 1*cm*. Prikaz spojke uvezene u *Chrono::Engine* vidljiv je na 3.3. Lijeva stijenka sa slike nedostaje iz razloga da bi se dobio uvid u unutrašnjost spojke. Tokom simulacije spojka je u potpunosti zatvorena.



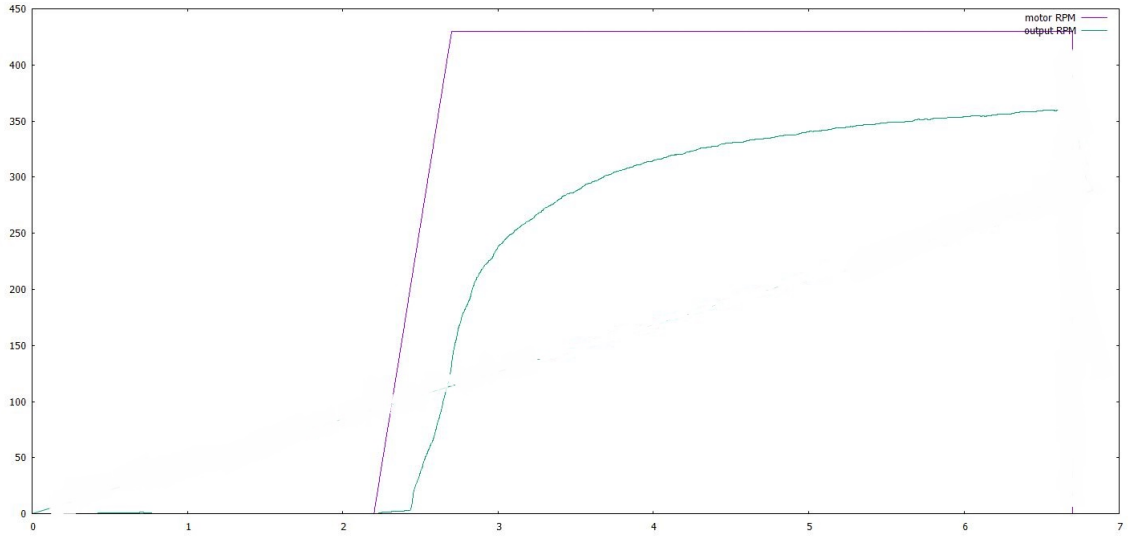
Slika 3.3: Prikaz spojke napunjene česticama

3.2.1 Rezultati simulacije centrifugalne spojke sa DVI kontaktnim modelom

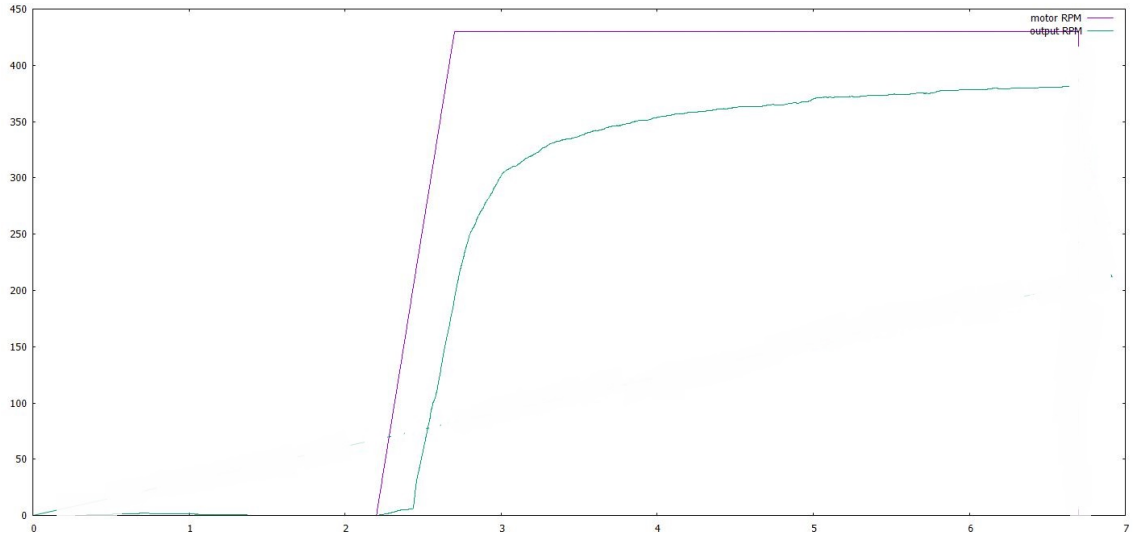
Spojka je napunjena česticama čiji je promjer dan u distribuciji između 1*cm* i 1.5*cm*. Punjenje spojke česticama događa se u prve dvije sekunde simulacije, nakon čega slijedi ubrzanje primarnog dijela spojke(motora), kao što je vidljivo na donjim dijagramima. Korak integracije je 0.001s. Na sljedeće tri slike slijede rezultati simulacije s 200, 500 i 1000 čestica.



Slika 3.4: Rezultati simulacije DVI modela s 200 čestica



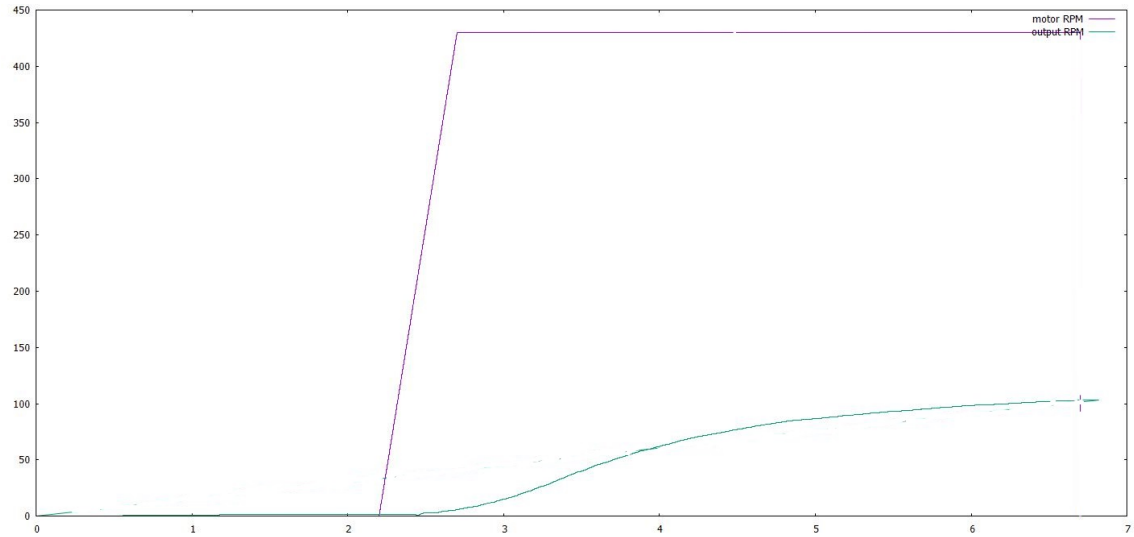
Slika 3.5: Rezultati simulacije DVI modela s 500 čestica



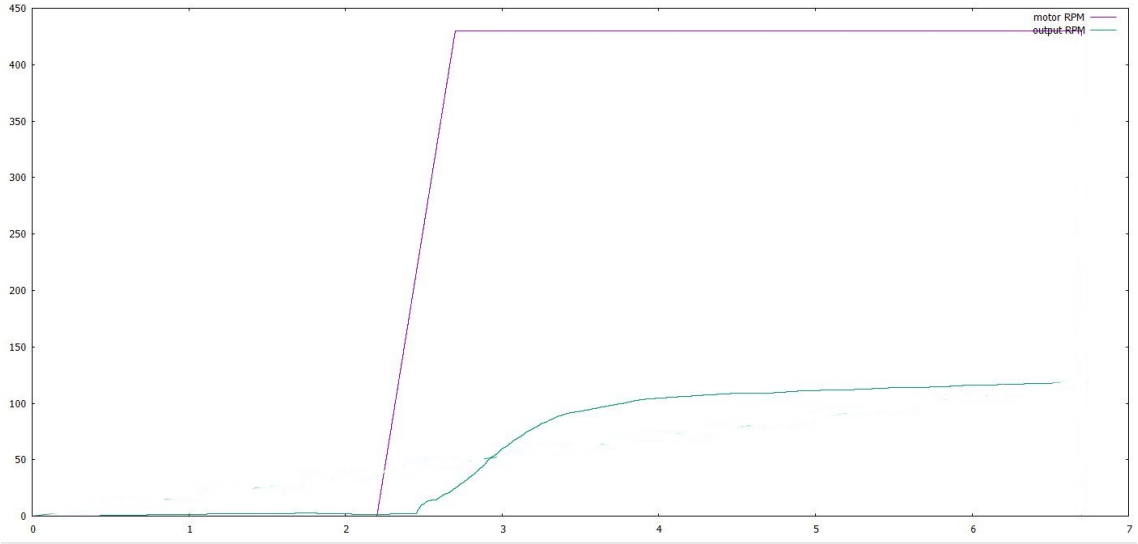
Slika 3.6: Rezultati simulacije DVI modela s 1000 čestica

3.2.2 Rezultati simulacije centrifugalne spojke sa DEM kontaktnim modelom

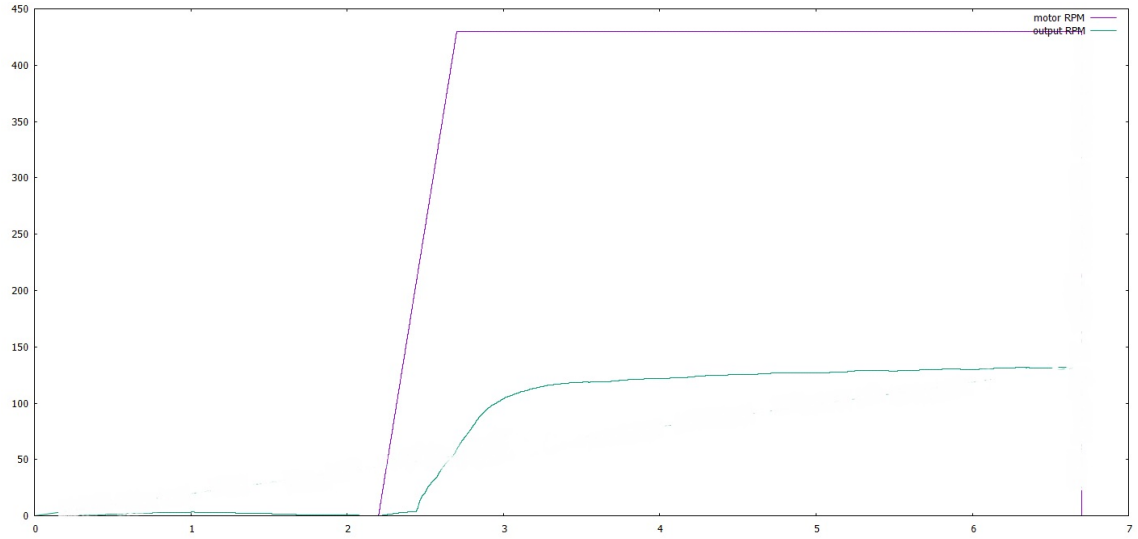
Za simulaciju s DEM kontaknim modelom osigurana je identična simulacijska okolina kao i za DVI model, međutim korak integracije je smanjen na 0.0001s.



Slika 3.7: Rezultati simulacije DEM modela s 200 čestica



Slika 3.8: Rezultati simulacije DEM modela s 500 čestica

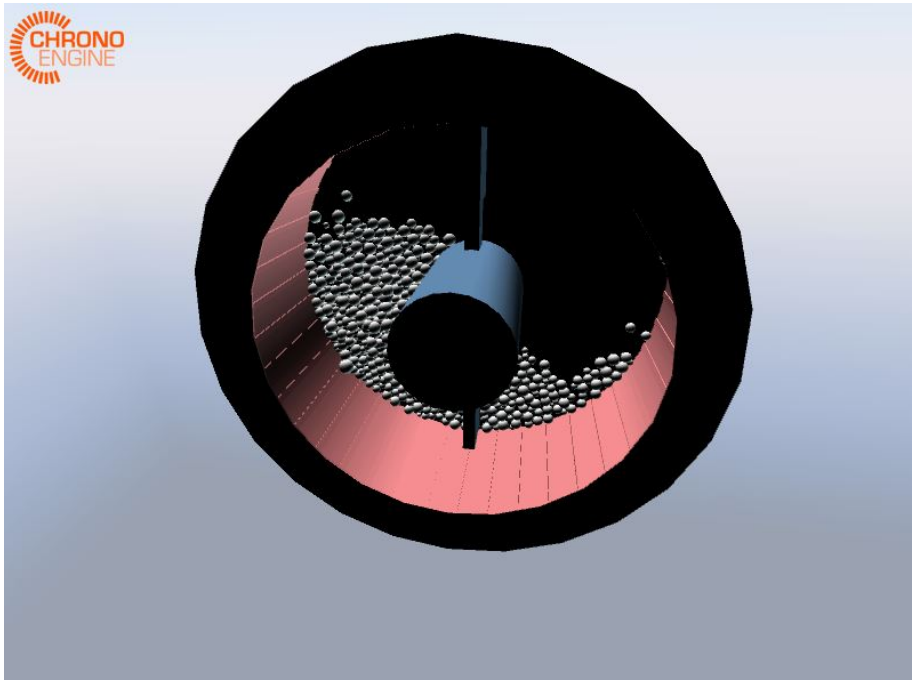


Slika 3.9: Rezultati simulacije DEM modela s 1000 čestica

Rezultati simulacije s DVI modelom kontakta već i za relativno mali broj čestica pokazuju prilično dobro kvalitativno slaganje sa eksperimentalnim rezultatima. Kod DEM modela može se primjetiti trend da se povećanjem broja čestica kvalitativno približavamo eksperimentalnim rezultatima. U tom smislu, bilo bi potrebno značajno povećati broj čestica u simulaciji pa promatrati odaziv sustava. Nakon validacije kontaktnih modela, možemo prikazati rezultate simulacije elektromagnetske spojke s česticama prema DVI modelu kontakta.

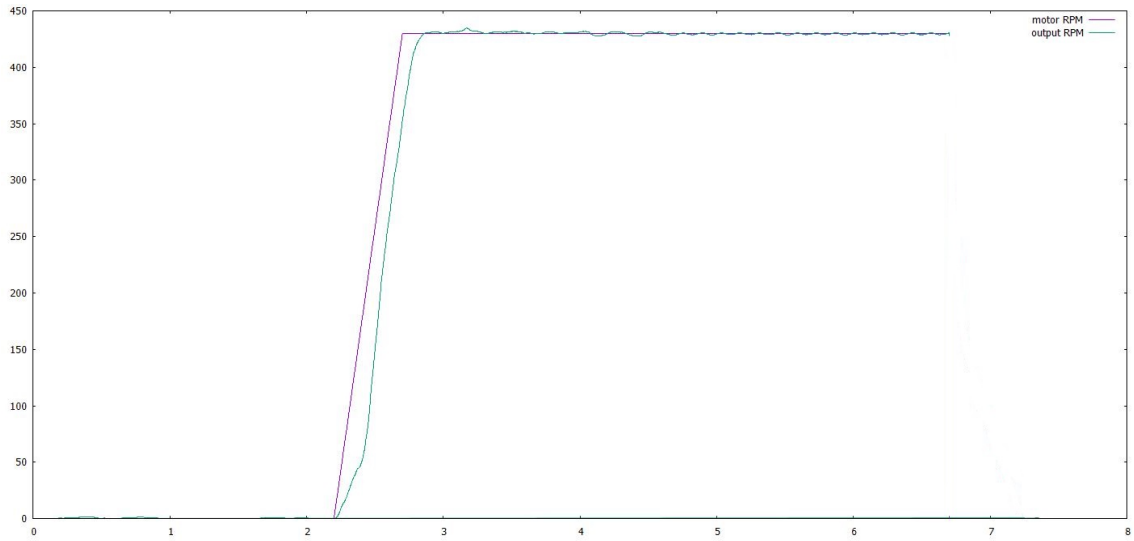
3.2.3 Rezultati simulacije elektromagnetske spojke s DVI kontaktnim modelom

Kao što smo vidjeli u uvodnom poglavlju, gdje je objašnjen princip funkcioniranja spojke, na čestice u spojki utječe elektromagnetsko polje. Prikaz čestica pod utjecajem elektromagnetskog polja dan je na Slici 3.10.

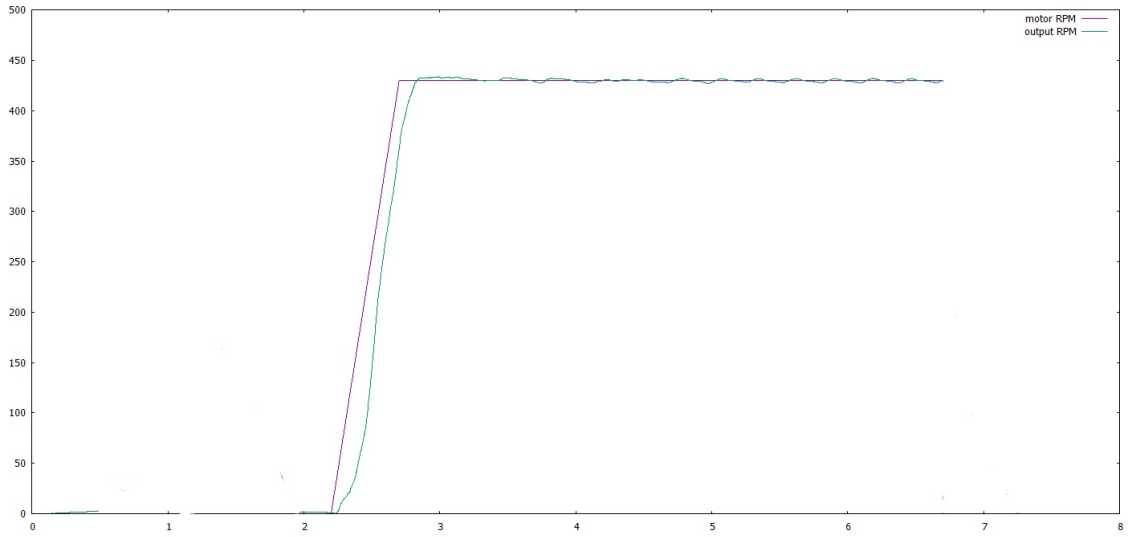


Slika 3.10: Čestice u elektromagnetskoj spojki pod utjecajem elektromagnetskog polja

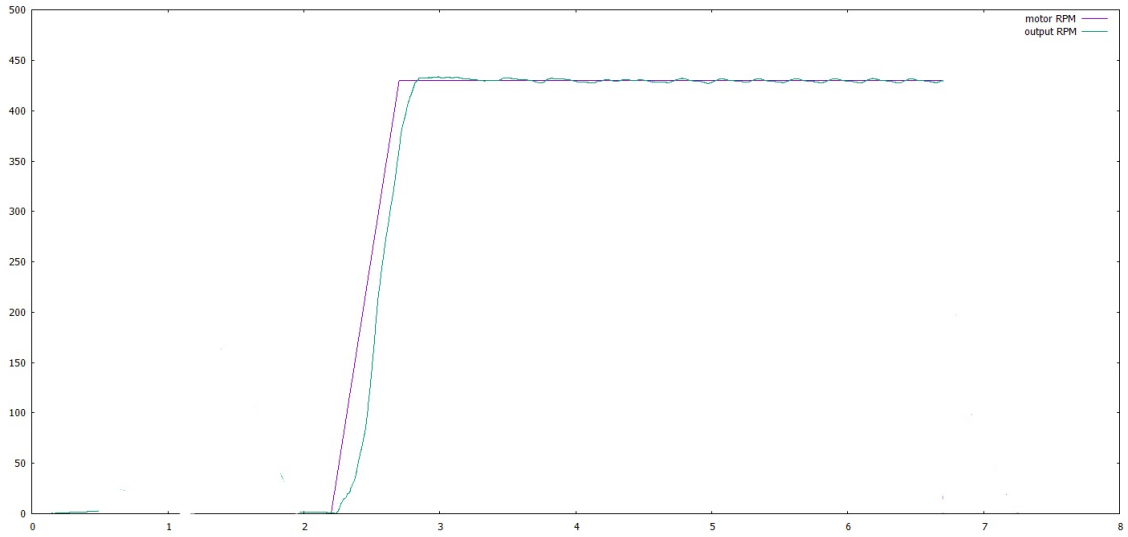
Slijede rezultati simulacije elektromagnetske spojke s česticama s različitim brojem čestica koji je varijabilan kao i u gornjim primjerima.



Slika 3.11: Rezultati simulacije elektromagnetske spojke s DVI kontaktnim modelom s 200 čestica



Slika 3.12: Rezultati simulacije elektromagnetske spojke s DVI kontaktnim modelom s 500 čestica



Slika 3.13: Rezultati simulacije elektromagnetske spojke s DVI kontaktnim modelom s 1000 čestica

Za razliku od gore prikazane centrifugalne spojke, iz priloženih dijagrama je vidljivo da je vrijeme odaziva sekundarnog dijela spojke puno brže kod elektromagnetske spojke. Možemo reći da je gotovo trenutačna sinkronizacija broja okretaja između primarnog i sekundarnog dijela spojke i očekivana, jer za razliku od centrifugalne spojke gdje je potrebno neko vrijeme da centrifugalna sila dostigne potrebne vrijednosti, djelovanje magnetskog polja na čestice počinje u trenutku kad električna struja počne teći kroz vodič. Prema tome možemo zaključiti da su dobiveni podaci iz simulaciji i očekivani.

3.3 Zaključak

Sustavi s velikim brojem čestica predmet su intenzivnijeg istraživanja još od početka 20.-og stoljeća. Eminentni znanstvenici poput Coulomba, Faradaya, Hertza, Huygensa i Reynoldsa pridonjeli su tom području, međutim ni dan danas ne postoji jedinstvena teorija koja bi opisivala ponašanje takvih sustava (kao teorije koje postoje za opis fluida i čvrstih tijela). Do relativno nedavno nemoguće je bilo približno simulirati takve sustave, međutim taj trend se mijenja zahvaljujući brzom napretku mogućnosti računala, pa u budućnosti možemo očekivati još detaljnije i točnije simulacije.

U ovom radu obrađena je problematika analize takvog sustava koja je motivirana poboljšanjima na realnoj konstrukciji. Provedene simulacije validirane su prema eksperimentalno dobivenim rezultatima, te je zaključeno da rezultati simulacije kvalitativno odgovaraju vrijednostima. Usporedbom rezultata simulacije za elektromagnetsku i centrifugalnu spojku razlike koje su se i očekivale su se pokazale kroz rezultate simulacije.

Smjer budućeg istraživanja bio bi daljnji razvoj kontaktnih modela prezentiranih u radu te njihova eksperimentalna verifikacija u svrhu budućih simulacija čim bližih realnosti. Također, istraživanja u smjeru efikasnijih simulacija korištenjem grafičkih procesorskih jedinica (GPU) isto daju perspektivu značajnog povećanja obujma simulacija.

Literatura

[1] *"https://projectchrono.org/"*.

[2] *"http://www.mecholic.com/2016/01/magnetic-particle-clutch-features-and.html?m=1"*.

[3] *http://doi.org/10.5169/seals-58895*.

[4] Johannes Lindner, Katharina Menzel, and Hermann Nirschl. Simulation of magnetic suspensions for hgms using cfd, fem and dem modeling. *Computers & chemical engineering*, 54:111–121, 2013.

[5] David E Stewart. *Dynamics with Inequalities: impacts and hard constraints*. SIAM, 2011.

[6] Alessandro Tasora, Dan Negrut, and Mihai Anitescu. Gpu-based parallel computing for the simulation of complex multibody systems with unilateral and bilateral constraints: an overview. In *Multibody Dynamics*, pages 283–307. Springer, 2011.

[7] Alessandro Tasora, Radu Serban, Hammad Mazhar, Arman Pazouki, Daniel Melanz, Jonathan Fleischmann, Michael Taylor, Hiroyuki Sugiyama, and Dan Negrut. Chrono: an open source multi-physics dynamics engine. In *International Conference on High Performance Computing in Science and Engineering*, pages 19–49. Springer, 2015.

[8] Martin Tupy. *A Study on the Dynamics of Granular Materials with a Comparison of DVI and DEM Approaches*. PhD thesis, University of Wisconsin–Madison, 2010.

[9] Krešimir Vučković. *Elementi konstrukcija II*. Fakultet strojarstva i brodogradnje, 2017.

[10] Albrecht Eiber Zdravko Terze. *Dynamics of Multibody Systems*. Fakultet strojarstva i brodogradnje, 2017.