

# Numerička usporedba Euler-Bernoullijeve i Timošenkove teorije savijanja grede primjenom metode konačnih elemenata

---

Čulo, Ante

Undergraduate thesis / Završni rad

2017

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:235:517245>

Rights / Prava: [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom](#).

Download date / Datum preuzimanja: **2025-03-03**

Repository / Repozitorij:

[Repository of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture University of Zagreb](#)



Sveučilište u Zagrebu  
Fakultet strojarstva i brodogradnje

# ZAVRŠNI RAD

**Ante Čulo**

Zagreb, 2017.

Sveučilište u Zagrebu  
Fakultet strojarstva i brodogradnje

# **ZAVRŠNI RAD**

## **NUMERIČKA USPOREDBA EULER-BERNOULLIJEVE I TIMOŠENKOVE TEORIJE SAVIJANJA GREDE PRIMJENOM METODE KONAČNIH ELEMENATA**

Mentor:

Doc. dr. sc. Ivica Skozrit

Student:

Ante Čulo

Zagreb, 2017.

Izjavljujem da sam ovaj rad izradio samostalno koristeći stečena znanja tijekom studija i navedenu literaturu.

Zahvaljujem se mentoru doc. dr. sc. Ivici Skozritu za svu pruženu pomoć i savjete tokom izrade ovog rada.

Ante Čulo



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE



Središnje povjerenstvo za završne i diplomske ispite  
Povjerenstvo za završne ispite studija strojarstva za smjerove:  
procesno-energetski, konstrukcijski, brodstrojarski i inženjersko modeliranje i računalne simulacije

Sveučilište u Zagrebu Fakultet strojarstva i brodogradnje	
Datum	Prilog
Klasa:	
Ur.broj:	

## ZAVRŠNI ZADATAK

Student: **Ante Čulo** Mat. br.: 0035196253

Naslov rada na hrvatskom jeziku: **Numerička usporedba Euler-Bernoullijeve i Timošenkove teorije savijanja grede primjenom metode konačnih elemenata**  
Naslov rada na engleskom jeziku: **Numerical Comparison of Euler-Bernoulli and Timoshenko Beam Theory Using Finite Element Method**  
Opis zadatka:

Poznato je da su za proračun savijanja grede u primijeni Euler-Bernoullijeva i Timošenkova teorija. Primjena pojedine teorije definirana je u ovisnosti o omjeru visine i duljine grede, a vrijednosti se razlikuju ovisno o literaturi.

Potrebno je pokazati za koji omjer visine i duljine grede se može koristiti jednostavnija Euler-Bernoullijeva teorija i uz koju grešku. Proračun provesti numerički primjenom programskog paketa Abaqus® koji se temelji na metodi konačnih elemenata. U numeričkim analizama koristiti dostupne konačne elemente iz baze programskog paketa, te ako je moguće varirati tip i broj čvorova konačnog elementa. Rezultate analiza potrebno je usporediti s dostupnim analitičkim rezultatima. Usporedbu navedenih teorija savijanja grede provesti na nekoliko jednostavnih primjera, npr. konzola opterećena silom na kraju, konzola opterećena konstantnim kontinuiranim opterećenjem i silom na kraju, greda na dva oslonca opterećena koncentriranom silom u sredini. Usporedbe je potrebno provesti za dva karakteristična poprečna presjeka grede, a to su kružni i pravokutni poprečni presjek grede. Sve usporedbe potrebno je prikazati u bezdimenzijskom obliku.

U radu treba navesti korištenu literaturu i eventualno dobivenu pomoć.

Zadatak zadan:  
30. studenog 2016.

Rok predaje rada:  
**1. rok:** 24. veljače 2017.  
**2. rok (izvanredni):** 28. lipnja 2017.  
**3. rok:** 22. rujna 2017.

Predvideni datumi obrane:  
**1. rok:** 27.2. - 03.03. 2017.  
**2. rok (izvanredni):** 30. 06. 2017.  
**3. rok:** 25.9. - 29. 09. 2017.

Zadatak zadao:  
*Sharit Ivica*  
Doc. dr. sc. Ivica Skozrit

Predsjednik Povjerenstva:  
*Igor Balen*  
Prof. dr. sc. Igor Balen

**SADRŽAJ**

POPIS SLIKA .....	II
POPIS TABLICA .....	III
POPIS OZNAKA .....	IV
SADRŽAJ .....	VI
SUMMARY .....	VII
1 UVOD .....	1
1.1 Savijanje grede .....	1
1.2 Teorija savijanja grede kroz povijest .....	2
2 ANALITIČKI PRIKAZ TEORIJA SAVIJANJA GREDE .....	7
2.1 Euler-Bernoullijeva teorija savijanja grede .....	7
2.2 Timošenkova teorija savijanja grede .....	10
2.3 Kratak osvrt na analitičku usporedbu teorija savijanja grede .....	13
3 METODA KONAČNIH ELEMENATA .....	14
3.1 Opis metode konačnih elemenata .....	14
4 OPISIVANJE PRORAČUNSKOG MODELA .....	17
4.1 Definiranje poprečnog presjeka grede .....	17
4.2 Odabir konačnih elemenata .....	18
4.2.1 Konačni elementi za Euler-Bernoullijevu teoriju savijanja .....	18
4.2.2 Konačni elementi za Timošenkovu teoriju savijanja .....	19
5 NUMERIČKI REZULTATI ZA GREDE RAZLIČITIH DEBLJINA .....	20
5.1 Konzola opterećena silom na kraju .....	20
5.1.1 Analitička rješenja .....	20
5.1.2 Numerička rješenja .....	22
5.1.3 Konvergencija rješenja .....	24
5.1.4 Izračunavanje pogreške Euler-Bernoullijeve teorije savijanja grede .....	26
5.2 Greda na dva oslonca opterećena koncentriranom silom u sredini .....	27
5.2.1 Analitička rješenja .....	28
5.2.2 Numerička rješenja .....	29
5.2.3 Konvergencija rješenja .....	31
5.2.4 Izračunavanje pogreške Euler-Bernoullijeve teorije savijanja grede .....	33
5.3 Konzola opterećena konstantnim kontinuiranim opterećenjem i silom na kraju .....	35
5.3.1 Analitička rješenja .....	35
5.3.2 Numerička rješenja .....	37
5.3.3 Konvergencija rješenja .....	38
5.3.4 Izračunavanje pogreške Euler-Bernoullijeve teorije savijanja grede .....	40
6 ZAKLJUČAK .....	42
LITERATURA .....	43
PRILOZI .....	44

## POPIS SLIKA

Slika 1. Prikaz savijanja grede na primjeru realne konstrukcije .....	1
Slika 2. a) Čisto savijanje i b) poprečno savijanje .....	1
Slika 3. Kamena greda iz starog vijeka .....	2
Slika 4. Savijanje grede prema Galileu [2] .....	3
Slika 5. Galileova pretpostavka naprezanja po presjeku grede [1] .....	3
Slika 6. Mariotteova pretpostavka naprezanja po presjeku grede [1] .....	4
Slika 7. Coulombova pretpostavka naprezanja po presjeku grede [1] .....	5
Slika 8. Izgradnja Eiffelovog tornja .....	6
Slika 9. Zakrivljenost elastične linije grede .....	8
Slika 10. Deformiranje grede u x-z ravnini, prema Euler-Bernoulliju .....	8
Slika 11. Ravnoteža elementa grede opterećenog na čisto savijanje .....	9
Slika 12. Deformiranje grede u x-z ravnini, prema Timošenku .....	10
Slika 13. Poprečni presjek grede .....	11
Slika 14. Shematski prikaz programa [4] .....	15
Slika 15. Modeli greda karakterističnih poprečnih presjeka .....	17
Slika 16. Prikaz modela grede u Abaqusu .....	17
Slika 17. Transverse Shear Stiffness [6] .....	18
Slika 18. Gredni konačni element B23 [5] .....	18
Slika 19. Gredni konačni element B21 [5] .....	19
Slika 20. Gredni konačni element B22 [5] .....	19
Slika 21. Konzola opterećena silom na kraju .....	20
Slika 22. Proračunski model konzole opterećene silom na kraju .....	20
Slika 23. Deformirani oblik grede .....	23
Slika 24. Konvergencija progiba za B23 gredne konačne elemente .....	24
Slika 25. Konvergencija nagiba tangente za B23 gredne konačne elemente .....	24
Slika 26. Konvergencija progiba za B21 gredne konačne elemente .....	25
Slika 27. Konvergencija nagiba za B21 gredne konačne elemente .....	25
Slika 28. Prikaz pogreške u ovisnosti o obliku poprečnog presjeka .....	27
Slika 29. Greda na dva oslonca opterećena koncentriranom silom u sredini .....	27
Slika 30. Proračunski model grede .....	27
Slika 31. Deformirani oblik grede .....	31
Slika 32. Konvergencija progiba za B23 gredne konačne elemente .....	32
Slika 33. Konvergencija nagiba tangente za B23 konačne elemente .....	32
Slika 34. Konvergencija progiba za B21 gredne konačne elemente .....	33
Slika 35. Konvergencija nagiba za B21 konačne elemente .....	33
Slika 36. Prikaz pogreške u ovisnosti o obliku poprečnog presjeka .....	34
Slika 37. Konzola opterećena konstantnim kontinuiranim opterećenjem i silom na kraju .....	35
Slika 38. Proračunski model grede .....	35
Slika 39. Deformirani oblik grede .....	38
Slika 40. Konvergencija progiba za B23 gredne konačne elemente .....	39
Slika 41. Konvergencija nagiba tangente za B23 konačne elemente .....	39
Slika 42. Konvergencija progiba za B21 gredne konačne elemente .....	40
Slika 43. Konvergencija nagiba za B21 konačne elemente .....	40
Slika 44. Prikaz pogreške u ovisnosti o obliku poprečnog presjeka .....	41

**POPIS TABLICA**

Tablica 1. Analitička rješenja za pravokutni poprečni presjek grede.....	21
Tablica 2. Analitička rješenja za kružni poprečni presjek grede .....	22
Tablica 3. Numerička rješenja za pravokutni poprečni presjek grede.....	22
Tablica 4. Numerička rješenja za kružni poprečni presjek grede .....	23
Tablica 5. Konvergencija Euler-Bernoullijevih grednih konačnih elemenata.....	24
Tablica 6. Konvergencija Timošenkovih grednih konačnih elemenata .....	25
Tablica 7. Prikaz pogreške kod različitih debljina grede pravokutnog poprečnog presjeka ....	26
Tablica 8. Prikaz pogreške kod različitih debljina grede kružnog poprečnog presjeka .....	26
Tablica 9. Analitička rješenja za pravokutni poprečni presjek grede.....	29
Tablica 10. Analitička rješenja za kružni poprečni presjek grede .....	29
Tablica 11. Numerička rješenja za pravokutni poprečni presjek .....	30
Tablica 12. Numerička rješenja za kružni poprečni presjek .....	30
Tablica 13. Konvergencija Euler-Bernoullijevih grednih konačnih elemenata.....	31
Tablica 14. Konvergencija Timošenkovih grednih konačnih elemenata .....	32
Tablica 15. Prikaz pogreške kod različitih debljina grede pravokutnog poprečnog presjeka ..	33
Tablica 16. Prikaz pogreške kod različitih debljina grede kružnog poprečnog presjeka .....	34
Tablica 17. Analitička rješenja za pravokutne poprečne presjeke grede.....	36
Tablica 18. Analitička rješenja za kružne poprečne presjeke grede .....	37
Tablica 19. Numerička rješenja za pravokutni poprečni presjek .....	37
Tablica 20. Numerička rješenja za kružni poprečni presjek .....	37
Tablica 21. Konvergencija Euler-Bernoullijevih grednih konačnih elemenata.....	38
Tablica 22. Konvergencija Timošenkovih grednih konačnih elemenata .....	39
Tablica 23. Prikaz pogreške kod različitih debljina grede pravokutnog poprečnog presjeka ..	41
Tablica 24. Prikaz pogreške kod različitih debljina grede kružnog poprečnog presjeka .....	41



## POPIS OZNAKA

Oznaka	Jedinica	Opis
$A$	$m^2$	površina poprečnog presjeka
$A_s$	$m^2$	ekvivalentna smična površina poprečnog presjeka
$\mathbf{a}_g$	-	kinematička matrica transformacije
$\mathbf{B}$	-	matrica međusobne ovisnosti deformacije u elementu i pomaka u čvorovima
$b$	$m$	širina pravokutnog poprečnog presjeka
$d$	$m$	promjer kružnog poprečnog presjeka
$\mathbf{D}$	$N/m^2$	matrica elastičnosti
$\mathbf{D}_k$	-	kinematički diferencijalni operator
$E$	$N/m^2$	Youngov modul elastičnosti
$F$	$N$	sila
$G$	$N/m^2$	modul smicanja
$g$	-	pogreška
$h$	$m$	visina pravokutnog poprečnog presjeka
$I_y$	$m^4$	aksijalni moment tromosti
$k$	-	korekcijski faktor smicanja
$\mathbf{K}$	$N/m$	globalna matrica krutosti
$l$	$m$	duljina grede
$M_y$	$Nm$	moment savijanja oko osi $y$
$\mathbf{N}$	-	matrica funkcija oblika
$q_0$	$N/m$	konstantno kontinuirano opterećenje
$Q_z$	$N$	poprečna sila u smjeru osi $z$
$\mathbf{R}$	$N$	globalni vektor ukupnih čvornih sila
$\mathbf{u}$	$m$	vektor pomaka
$\mathbf{v}$	-	vektor stupnjeva slobode konačnog elementa
$\mathbf{V}$	-	vektor globalnih stupnjeva slobode
$w$	$m$	progib grede
$w_{\max EB}$	$m$	maksimalni progib po Euler-Bernoullijevoj teoriji savijanja grede
$w_{\max T}$	$m$	maksimalni progib po Timošenkovoj teoriji savijanja grede
$z$	$m$	udaljenost od neutralne linije
$\alpha$	rad	nagib tangente na elastičnu liniju
$\alpha_{\max EB}$	rad	maksimalni nagib tangente po Euler-Bernoullijevoj teoriji savijanja grede
$\gamma$	-	kutna deformacija
$\boldsymbol{\varepsilon}$	-	tenzor deformacije

---

$\varepsilon_x$	-	deformacija u smjeru osi $x$
$\nu$	-	poissonov faktor
$\rho$	m	polumjer zakrivljenosti elastične linije
$\sigma$	N/m <sup>2</sup>	tenzor naprezanja
$\sigma_x$	N/m <sup>2</sup>	naprezanje u smjeru osi $x$
$\tau_{xz}$	N/m <sup>2</sup>	smično naprezanje
$\phi$	rad	kut poprečnog presjeka nakon deformacije
$\phi_{\max T}$	rad	maksimalni nagib po Timošenkovoj teoriji

## SADRŽAJ

U ovom radu provedena je usporedba Euler-Bernoullijeve i Timošenkove teorije savijanja grede. Usporedba Euler-Bernoullijeve i Timošenkove provedena je numerički u programskom paketu Abaqus koji se temelji na metodi konačnih elemenata. Usporedba navedenih teorija savijanje grede provedena je na nekoliko jednostavnih primjera. Također usporedba je provedena za dva karakteristična poprečna presjeka grede, a to su kružni i pravokutni poprečni presjek. Numerički rezultati uspoređeni su sa dostupnim analitičkim rezultatima. Uz numeričku usporedbu navedenih teorija savijanja grede pokazane su i osnovne analitičke razlike. Dokazano je da je Euler-Bernoullijeva teorija savijanja grede poseban slučaj Timošenkove teorije savijanja grede uz ispunjavanje određenih geometrijskih uvjeta. U radu je pokazano do kojeg omjera visine i duljine grede se može koristiti jednostavnija Euler-Bernoullijeva teorija i uz koju grešku.

Ključne riječi: savijanje grede, Euler-Bernoullijeva teorija, Timošenko teorija, metoda konačnih elemenata, gredni konačni elementi

## **SUMMARY**

This paper has conducted the comparison of Euler-Bernoulli and Timoshenko theory of beam bending. The comparison of Euler-Bernoulli and Timoshenko beam theory has been conducted numerically in the software package called Abaqus which is based on finite element method. The comparison of the listed beam bending theories has been conducted on several simple examples. Also, it has been conducted on two specific cross-sections of beams, the circular and the rectangular cross-section. Numerical results have been compared to the available analytic results. Along with the numerical comparison of the listed beam bending theories, there are also shown basic analytic differences. It has been proved that Euler-Bernoulli beam theory is the special case of Timoshenko beam theory when certain geometrical conditions are met. The paper shows to which ratio of the cross-section height and the length of the beam can the simple Euler-Bernoulli theory be used and to which mistake.

Key words: beam bending, Euler-Bernoulli beam theory, Timoshenko beam theory, finite element method, beam finite elements

# 1 UVOD

## 1.1 Savijanje grede

Savijanje je pojava kod koje uzdužna os štapa mijenja svoj oblik, tj. pri savijanju se ravni štapovi zakrivljuju [1]. Štap mijenja zakrivljenost uzdužne osi kada na njega djeluju poprečne sile ili momenti savijanja. Stoga štapove opterećene poprečnim silama ili momentima savijanja nazivamo gredama. Greda je konstrukcijski element kojemu su dimenzije poprečnog presjeka znatno manje od uzdužne duljine. Na slici 1 je prikazana realna konstrukcija u kojoj je greda na slobodnom kraju opterećena poprečnom silom  $Q$ , a na drugom kraju je uklještena. Uobičajeni naziv za greda koja je opisana prethodnom rečenicom je konzola.



Slika 1. Prikaz savijanja grede na primjeru realne konstrukcije

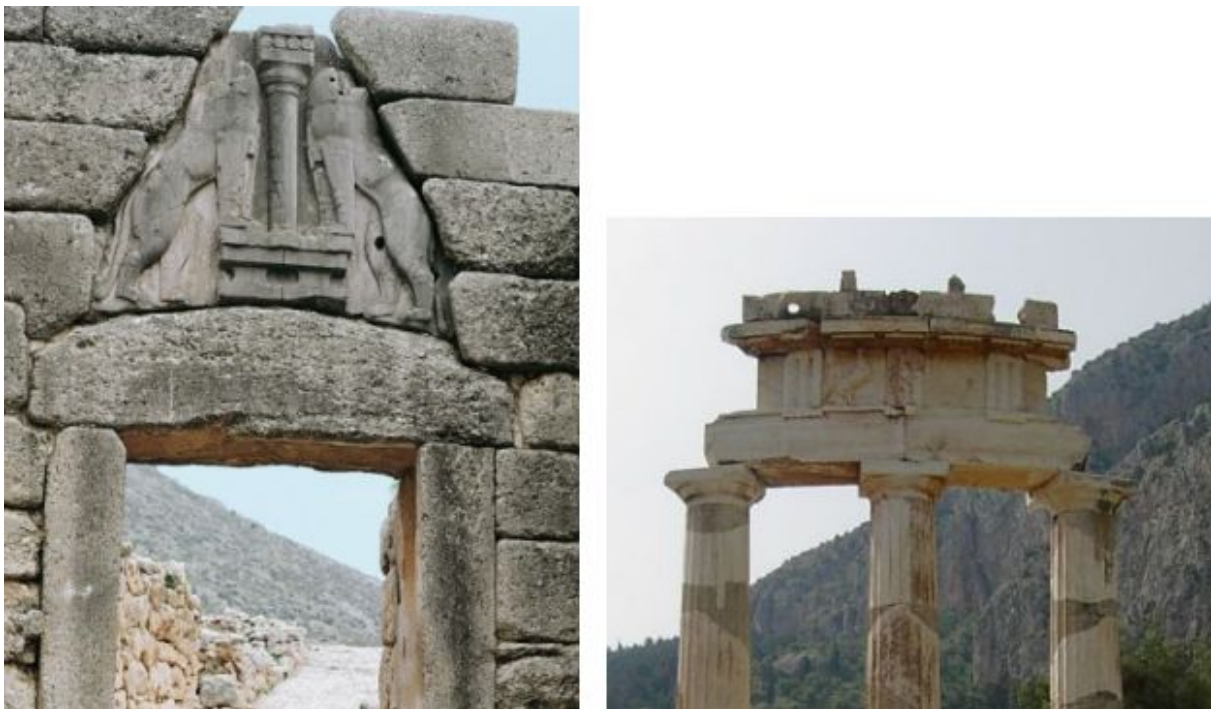
Prema [1], ako se vanjske sile u nekom poprečnom presjeku reduciraju samo na spreg, kažemo da je greda opterećena na čisto savijanje ili savijanje spregovima (slika 3a), a ako se u poprečnom presjeku javljaju i poprečne sile, govorimo o poprečnom savijanju ili savijanju silama (slika 3b).



Slika 2. a) Čisto savijanje i b) poprečno savijanje

## 1.2 Teorija savijanja grede kroz povijest

Savijanje grede je problem sa kojim se čovjek često susretao kroz povijest. Već sa prvim građevinama čovjek je morao savladati problem savijanja grede. Veličanstvene građevine iz starog vijeka bilo bi nemoguće izgraditi bez savladavanja problema savijanja grede. Međutim, graditelji iz starog doba nisu poznavali suvremene teorije savijanja grede, nego su koristili iskustvena pravila pri određivanju dimenzija pojedinih konstrukcijskih dijelova. Na slici 3 prikazani su primjeri greda korištenih u graditeljstvu starog vijeka.

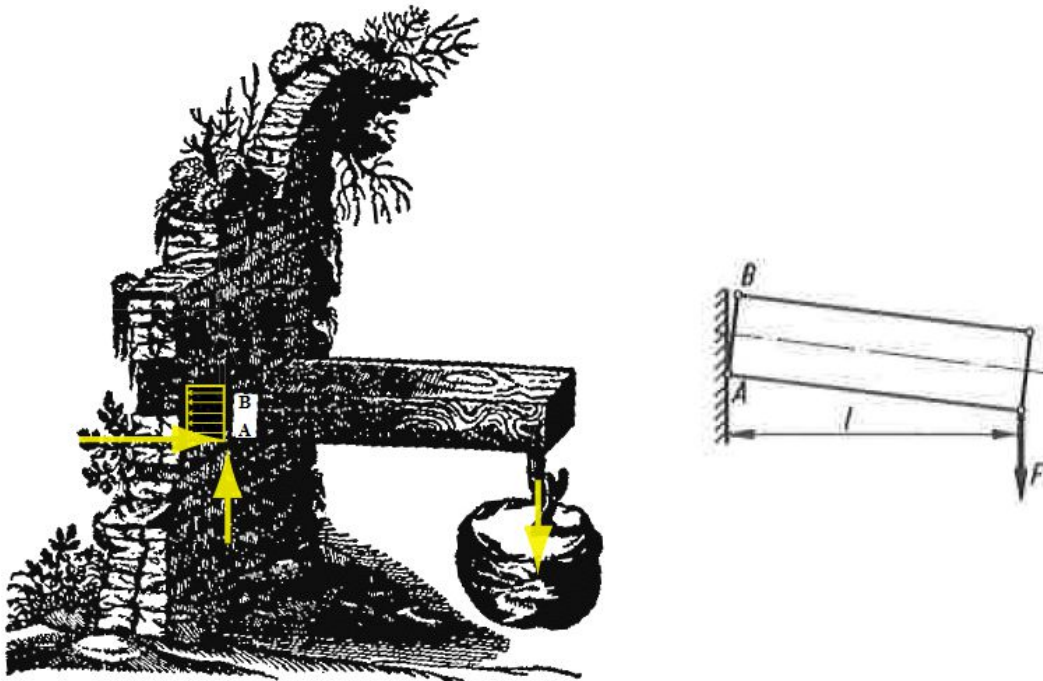


Slika 3. Kamena greda iz starog vijeka

Leonardo da Vinci (1452-1519) prvi je proveo značajnije pokuse o ponašanju i čvrstoći materijala. Da Vinci u svojem rukopisu poznatijem kao Codex Madrid piše: "Prema tome centar njegove visine (visine poprečnog presjeka) postaje upravo kao ravnoteža njegovih stranica" [2]. Iz prethodnog se može zaključiti da je da Vinci točno pretpostavio da u slučaju pravokutnog poprečnog presjeka neutralna linija prolazi kroz polovicu visine presjeka. Ispitivanjem grede zaključio je da će čvrstoća grede opterećene na dva oslonca biti veća ako je udaljenost između oslonaca manja, a širina grede veća.

Galileo Galilei (1564-1642) prvi je analitički pristupio problemu savijanja grede u djelu "I due nuovi scienze fisiche...", objavljenom 1638 [1]. U svom razmatranju pošao je od konzole (slika 4), i uočio da lom počinje u točki  $B$  i širi se prema točki  $A$ . Pri tome se

odlomljena konzola okreće oko točke  $A$ . Dok ne dođe do loma grede, moment unutrašnjih sila po presjeku  $AB$  drži ravnotežu momentu sile  $F$ .



Slika 4. Savijanje grede prema Galileu [2]

Galileo je krivo pretpostavio da su naprezanja po presjeku jednoliko raspodijeljena (slika 5).

U tom slučaju rezultanta unutrašnjih sila prolazi kroz središte presjeka i iznosi:

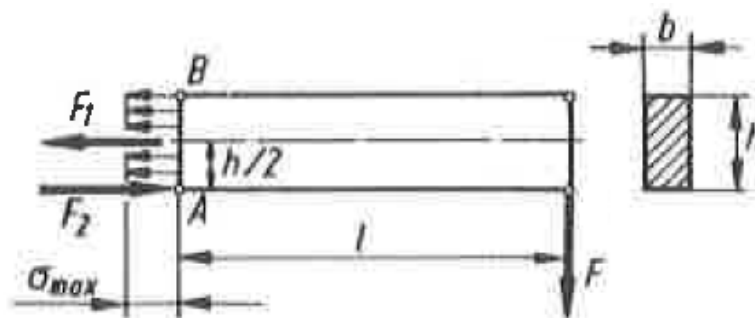
$$F_1 = \sigma_{\max} bh. \quad (1.1)$$

Krak te sile oko točke  $A$  iznosi  $h/2$ , pa ravnoteža momenata oko točke  $A$  glasi:

$$\Sigma M_A = 0; \quad \sigma_{\max} bh \frac{h}{2} = Fl. \quad (1.2)$$

Oдавде bi maksimalno naprezanje po Galileovoj pretpostavci iznosilo:

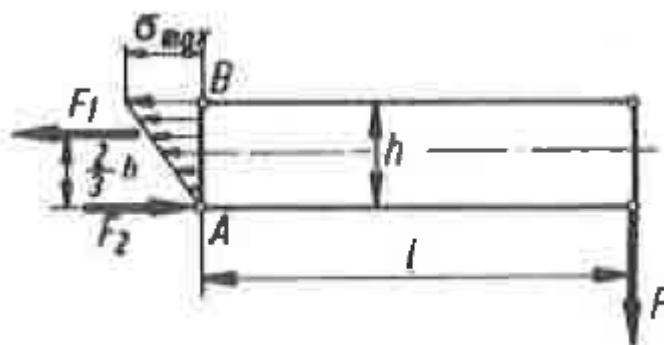
$$\sigma_{\max} = 2 \frac{Fl}{bh^2}. \quad (1.3)$$



Slika 5. Galileova pretpostavka naprezanja po presjeku grede [1]

Iako znamo da je Galileovo rješenje neispravno, ono je imalo veliko značenje za daljnji razvoj teorije savijanja [1].

Edme Mariotte (1620-1684) unaprijedio je Galileovu teoriju savijanja grede. Mariotte je zadržao Galileovu pretpostavku da se u presjeku javljaju samo vlačne sile. Međutim, Mariotte je zaključio da njihova raspodjela nije jednolika već se linearno mijenja. Uočivši da se vlakna to više rastežu što su dalje od okretišta  $A$ , pa i unutrašnje sile rastu linearno od nule u točki  $A$  do maksimalne vrijednosti u točki  $B$  [1]. Na temelju toga naprezanja su raspodijeljena po zakonu trokuta (slika 6).



Slika 6. Mariotteova pretpostavka naprezanja po presjeku grede [1]

Iz slike 6 slijedi da rezultanta unutrašnjih sila iznosi

$$F_1 = \sigma_{\max} \frac{bh}{2}. \quad (1.4)$$

Rezultanta unutrašnjih sila djeluje na kraku  $2h/3$ , te iz toga proizlazi da ravnoteža momenata oko točke  $A$  jednaka

$$\Sigma M_A = 0; \quad F_1 \frac{2h}{3} = Fl. \quad (1.5)$$

Uvrštavanjem izraza (1.4) u (1.5) dobivamo izraz za maksimalno naprezanje u presjeku grede.

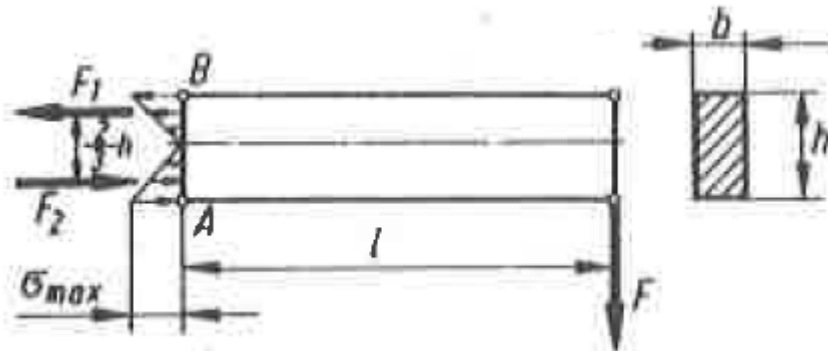
$$\frac{1}{2} \sigma_{\max} bh \frac{2}{3} h = Fl, \quad (1.6)$$

$$\sigma_{\max} = 3 \frac{Fl}{bh^2}. \quad (1.7)$$

Antoine Parent (1666-1716) prvi je dao točno rješenje problema savijanja grede [1]. Parent je točno pretpostavio linearnu raspodjelu naprezanja i položaj neutralne linije na sredini presjeka. Prvi je točno izveo izraz za moment otpora pravokutnog presjeka. Međutim, Parentovo rješenje nije bilo prihvaćeno od strane njegovih suvremenika, pa su u inženjerskoj praksi ostale u primjeni Galileova i Mariotteova teorija savijanja grede.



Charles-Augustin de Coulomb (1736-1806) također je dao točno rješenje problema savijanja grede. Coulomb je ispravno pretpostavio da se u presjeku grede pojavljuju i vlačna i tlačna napreznja koja se linearno mijenjaju po visini presjeka [1]. Također, Coulomb je ispravno odredio položaj neutralne linije u sredini pravokutnog poprečnog presjeka (slika 7).



Slika 7. Coulombova pretpostavka napreznja po presjeku grede [1]

Rezultanta vlačnih napreznja  $F_1$  mora biti jednaka rezultanti tlačnih napreznja  $F_2$ :

$$F_1 = F_2 = \frac{1}{2} \sigma_{\max} b \frac{h}{2} = \frac{1}{4} \sigma_{\max} bh. \quad (1.8)$$

Ravnoteža momenata vanjskih i unutrašnjih sila oko točke A:

$$F_1 \frac{2}{3} h = Fl, \quad (1.9)$$

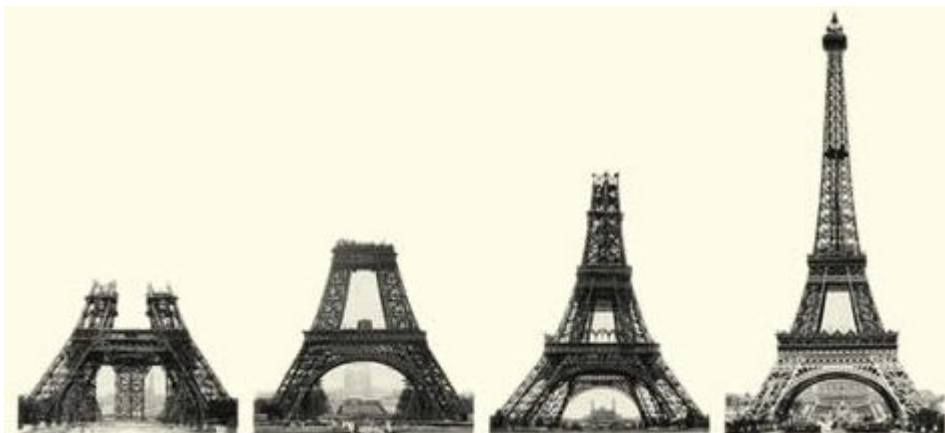
$$\frac{1}{4} \sigma_{\max} bh \frac{2}{3} h = Fl, \quad (1.10)$$

$$\sigma_{\max} = 6 \frac{Fl}{bh^2}. \quad (1.11)$$

Znatan doprinos u razvoju teorije savijanja grede dali su Leibnitz, braća Jacob i Johann Bernouilli. Jacob Bernouilli je pri izvođenju izraza za napreznje pri savijanju uveo pretpostavku o ravnim presjecima, primijenio je Hookeov zakon i utvrdio da su zakrivljenost deformirane osi štapa i moment savijanja proporcionalne veličine.

Daniel Brnoulli (1700-1782), sin spomenutog Johanna Bernouillia i Leonhard Euler (1707-1783) zajedno su u potpunosti riješili problem savijanja grede. Primjenom varijacijskog principa Bernoulli i Euler prvi su izveli diferencijalnu jednadžbu elastične linije. Jednadžbama koje su izveli Bernoulli i Euler može se sa velikom preciznošću odrediti progib grede uslijed djelovanja opterećenja, također njihovim se jednadžbama može izračunati i napreznje pri savijanju. Euler-Bernoullijeva teorija savijanja grede smatra se prvom

sveobuhvatnom teorijom savijanja grede, iako je njihova teorija primjenjiva samo za tanke grede kod kojih je malen omjer visine poprečnog presjeka i ukupne duljine grede. Euler-Bernoullijeva teorija savijanja i danas ima veliki značaj u inženjerskoj praksi. Zanimljivo je napomenuti da se Euler-Bernoullijeva teorija savijanja grede primjenjivala i pri proračunu gredi Eiffelovog tornja (slika 8).



**Slika 8. Izgradnja Eiffelovog tornja**

Stjepan Timošenko (1878-1972) dodatno je proširio Euler-Bernoullijevu teoriju savijanja grede. Glavna mana prethodno spomenute Euler-Bernoullijeve teorije je zanemarivanje smičnog naprezanja. Timošenkova teorija savijanja grede primjenjiva je i za grede znatno veće debljine gdje se utjecaj smika ne može zanemariti.

## 2 ANALITIČKI PRIKAZ TEORIJA SAVIJANJA GREDE

Za verifikaciju numeričkih rješenja dobivenih iz programskog paketa Abaqus potrebno je prikazati osnovne analitičke izraze. U ovom poglavlju će se samo ukratko prikazati izrazi i geometrijske pretpostavke kod Euler-Bernoullijeve i Timošenkove teorije savijanja grede.

### 2.1 Euler-Bernoullijeva teorija savijanja grede

Kod prikazivanja izraza za savijanje grede Euler-Bernoullijevom metodom ograničiti ćemo se čisto savijanja grede čiji poprečni presjek ima jednu os simetrije [1]. Uslijed djelovanja opterećenja greda se deformira. Deformacija grede uzrokuje zakrivljenje uzdužne osi štapa te se naziva elastična ili progibna linija. Euler-Bernoullijeva teorija savijanja grede izvedena je uz određene pretpostavke o deformiranju i raspodjeli naprezanja:

- poprečni presjeci nakon deformiranja ostaju ravni i okomiti na elastičnu liniju,
- sve komponente naprezanja osi  $\sigma_x$  jednake su nuli,
- maksimalni nagib tangente na elastičnu liniju je malen,

$$\alpha_{\max} \leq 0,05 \dots 0,1 \text{ rad } (2^\circ \dots 3^\circ) \text{ prema [1],}$$

- visina poprečnog presjeka  $h$  je mala u usporedbi sa duljinom grede  $l$ ,

$$\frac{h}{l} \leq \frac{1}{4} \dots \frac{1}{5}, \text{ prema [1],}$$

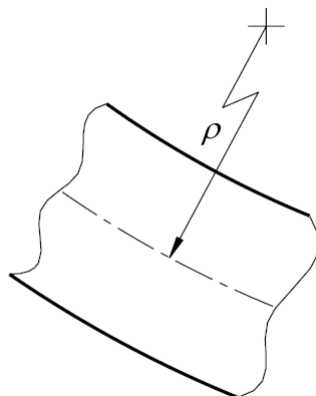
$$\frac{h}{l} \leq \frac{1}{10} \dots \frac{1}{20}, \text{ prema [3].}$$

U Euler-Bernoullijevoj teoriji savijanja grede zanemaruje se utjecaj smičnog naprezanja. Stoga je Euler-Bernoullijeva teorija savijanja grede primjenjiva je samo za tanke grede, tj. one grede kod kojih je visina poprečnog presjeka mala u usporedbi sa duljinom grede. Primjenom Euler-Bernoullijeve metode na deblje grede dobivala bi se rješenja koja su znatno različita od stvarnih rješenja, zato što se kod debljih greda ne može zanemariti utjecaj smičnog naprezanja. Pogreška koja se dobiva računanjem pomoću ove metodom smanjuje se sa smanjivanjem omjera  $h/l$ .

Osnovni izrazi koji opisuju Euler-Bernoullijevu teoriju savijanja preuzeti su iz [1]. Iz geometrijske analize štapa opterećenog na čisto savijanje dobivamo osnovni izraz za deformaciju u smjeru osi  $x$ . Detaljna geometrijska analiza se ovdje neće provoditi. Cjelokupna geometrijska analiza te izvod izraza za deformaciju  $\varepsilon_x$  može se pronaći u [1].

$$\varepsilon_x = \frac{z}{\rho}. \quad (2.1)$$

U izrazu (2.1) oznaka  $\rho$  predstavlja polumjer zakrivljenosti elastične linije (slika 9), a  $z$  je udaljenost točke od neutralne linije.



Slika 9. Zakrivljenost elastične linije grede

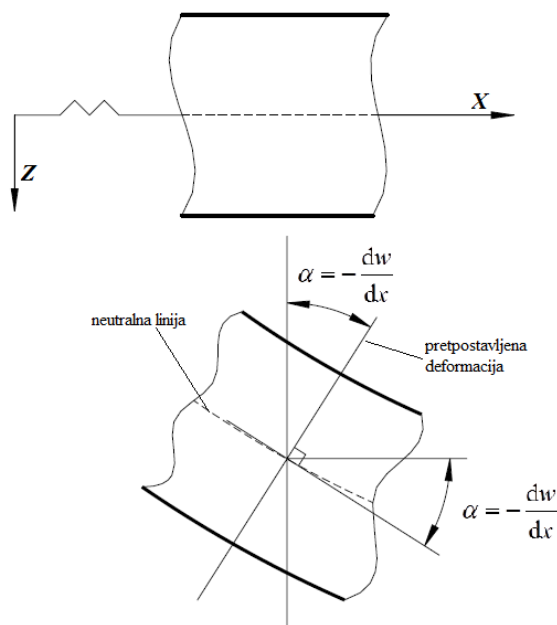
Primjenom Hookeova zakona možemo dobiti izraz za raspodjelu napreznja. Iz pretpostavke da u štapu vlada jednoosno stanje napreznja dobivamo

$$\sigma_x = E\varepsilon_x \quad (2.2)$$

Uvrštavanjem izraza (2.1) u (2.2) dobivamo izraz za raspodjelu napreznja

$$\sigma_x = E \frac{z}{\rho} \quad (2.3)$$

Na slici 10 prikazana je deformacija grede uslijed savijanja. Na slici možemo vidjeti kako poprečni presjeci ostaju ravni i okomiti na elastičnu liniju.



Slika 10. Deformiranje grede u x-z ravnini, prema Euler-Bernoulliju

Primjenom uvjeta ravnoteže sa slike 11 dobivamo

$$N = \int_A \sigma_x dA = 0, \quad (2.4)$$

$$M_z = -\int_A \sigma_x y dA = 0, \quad (2.5)$$

$$M_y = \int_A \sigma_x z dA. \quad (2.6)$$

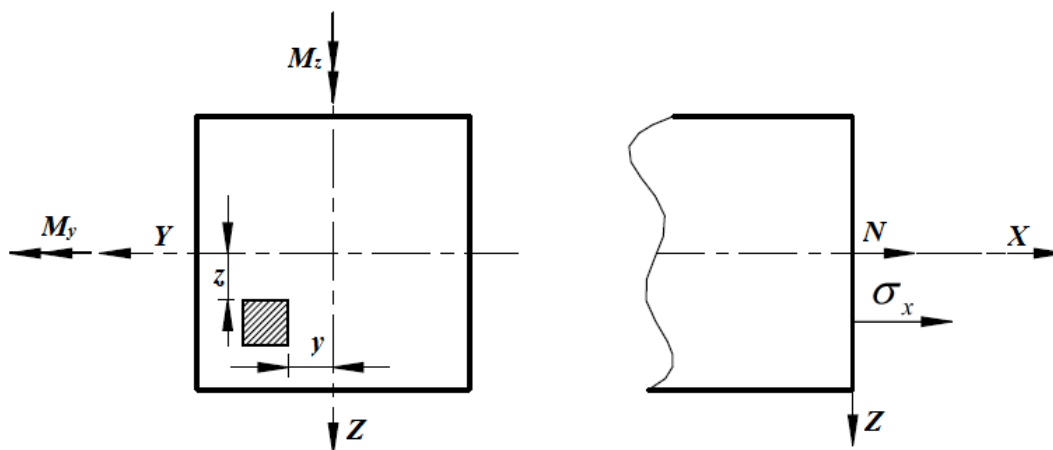
Uvrstimo li izraz (2.3) u (2.6) dobit ćemo

$$M_y = \frac{E}{\rho_y} \int_A z^2 dA. \quad (2.7)$$

Kako je  $\int_A z^2 dA = I_y$ , te se iz izraza (2.3) može izraziti da je  $\frac{E}{\rho} = \frac{\sigma_x}{z}$  dobivamo

$$\sigma_x = \frac{M_y}{I_y} z. \quad (2.8)$$

Izraz (2.8) omogućava nam da u svakoj točki presjeka štapa odredimo naprezanje  $\sigma_x$ . Također iz izraza za naprezanje lako možemo zaključiti da se naprezanje mijenja linearno po visini poprečnog presjeka.



Slika 11. Ravnoteža elementa grede opterećenog na čisto savijanje

U deformiranom štapa pomaci točkaka na osi štapa u smjeru osi  $x$  i  $y$ , tj. pomaci  $u$  i  $v$  zanemarivo su mali u odnosu na pomake  $w$  u smjeru osi  $z$ . Pomaci  $w$  nazivaju se još i progibi grede, a elastična se linija ponekad naziva progibna linija [1]. Dokaz izraza koji slijede nećemo provoditi, nego ćemo ih samo navesti kako bi ih u nastavku mogli usporediti sa izrazima Timošenkove teorije savijanja grede.

Diferencijalnu jednadžbu elastične linije možemo opisati slijedećim izrazom

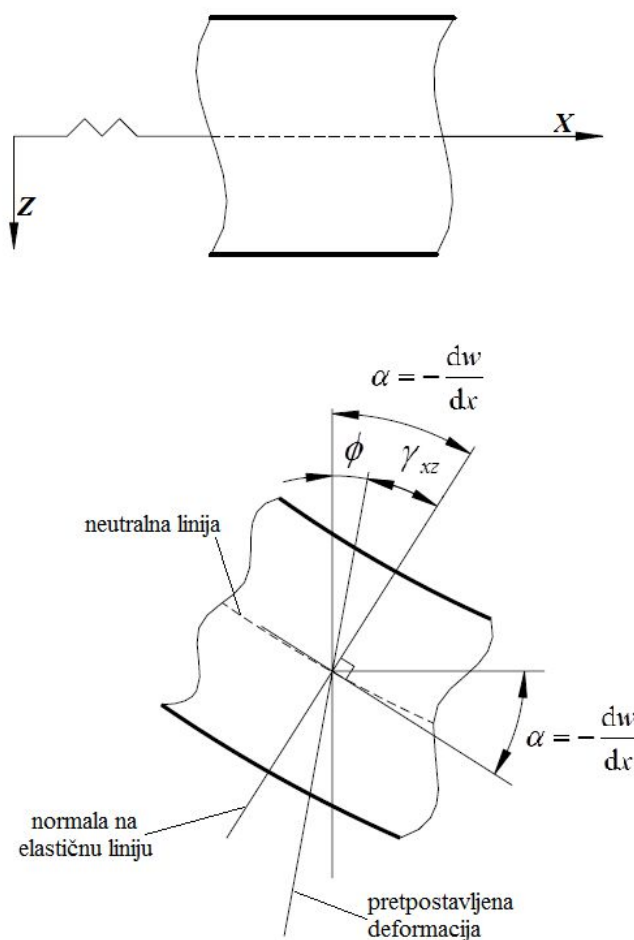
$$\frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{M_y}{EI_y}. \quad (2.9)$$

Nagib tangente na elastičnu liniju određen je izrazom

$$\alpha = -\frac{dw}{dx}. \quad (2.10)$$

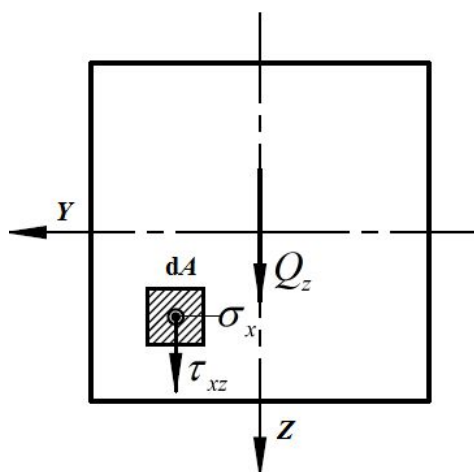
## 2.2 Timošenkova teorija savijanja grede

Za razliku od Euler-Bernoullijeve teorije savijanja grede, Timošenkova teorija uzima u obzir i utjecaj smičnog napreznja. Stoga je ova teorija primjenjiva i za grede znatno veće debljine. Kod deformiranja grede poprečni presjeci više nisu ravni i okomiti na elastičnu liniju. Pretpostavka da poprečni presjeci ostaju ravni i dalje vrijedi, ali zbog kutne deformacije koja je posljedica smičnog napreznja dolazi do deplanacije poprečnog presjeka, te on više nije okomit na elastičnu liniju. Kut za koji je poprečni presjek dodatno zakrenut u odnosi na pravi kut posljedica je smičnog napreznja (slika 12).



Slika 12. Deformiranje grede u x-z ravnini, prema Timošenku

Iz prethodne teze može se zaključiti da kod Timošenkove teorije savijanja grede imamo dvije komponente naprezanja, normalno naprezanje  $\sigma_x$  i smično naprezanje  $\tau_{xz}$ , dok su sve ostale komponente naprezanja jednake nuli. Radi jednostavnosti razmatranja problema, usvaja se pretpostavka da je smično naprezanje  $\tau_{xz}$  konstantno po visini poprečnog presjeka. Slično kao i kod razmatranja Euler-Bernoullijeve teorije savijanja grede prikazati će se samo gotovi izrazi koji opisuju teoriju savijanja grede prema Timošenku. Detaljnija analitička razrada navedene teorije savijanja može se pronaći u [3]. Poprečne sile  $Q_z$  koje opterećuju gredu uzrokuju pojavu smičnog naprezanja  $\tau_{xz}$ . Primjenom uvjeta ravnoteže na poprečnom presjeku grede dobivamo izraz koji povezuje poprečne sile  $Q_z$  i smično naprezanje  $\tau_{xz}$  (slika 13). Na slici 13 naprezanje  $\sigma_x$  djeluje "iz papira".



Slika 13. Poprečni presjek grede

Iz slike 13 proizlazi

$$dQ_z = \tau_{xz} dA. \quad (2.11)$$

Integriranjem izraza (2.11) po cijelom presjeku dobivamo da je poprečna sila jednaka

$$Q_z = \int_A \tau_{xz} dA, \quad (2.12)$$

$$Q_z = \tau_{xz} A_s. \quad (2.13)$$

U izrazu (2.13) uvedena je ekvivalentna smična površina  $A_s$ . Računanje sa ekvivalentnom smičnom površinom posljedica je pretpostavke o konstantom smičnom naprezanju  $\tau_{xz}$  po visini poprečnog presjeka. Veza između stvarne površine poprečnog presjeka  $A$  i ekvivalentne površine poprečnog presjeka  $A_s$  definirana je korekcijskim faktorom smicanja  $k$ . Odnosno korekcijski faktor smicanja određen je izrazom

$$k = \frac{A_s}{A}. \quad (2.14)$$

Korekcijski faktor smicanja definiran je karakteristikom materija grede i geometrijom poprečnog presjeka. Detaljnije objašnjenje korekcijskog faktora smicanja prikazano je u od narednih poglavlja.

Izraz za kut  $\phi$ , pod kojim se presjek nalazi uslijed smičnog naprezanja, proizlazi iz slike 13

$$\phi = \alpha + \gamma_{xz}. \quad (2.15)$$

Uvrštavanjem poznatog izraza (2.10) u (2.15) dobivamo

$$\phi = -\frac{dw}{dx} + \gamma_{xz}. \quad (2.16)$$

Deformaciju u smjeru osi  $x$  možemo prikazati u ovisnosti o kutu  $\phi$

$$\varepsilon_x = \frac{d\phi}{dx} z. \quad (2.17)$$

Primjenom Hookeova zakona možemo povezati deformacije i naprezanja, pa dobivamo

$$\sigma_x = E\varepsilon_x = E \frac{d\phi}{dx} z, \quad (2.18)$$

$$\tau_{xz} = G\gamma_{xz}, \quad (2.19)$$

gdje je  $G$  modul smicanja, a on je definiran sljedećim izrazom

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (2.20)$$

Izraz za moment savijanja  $M_y$  identičan je izrazu (2.6). Uvrštavanjem izraza (2.18) te analognim postupkom kao i za Euler-Bernoullijevu teoriju savijanja grede dobivamo

$$M_y = EI_y \frac{d\phi}{dx}. \quad (2.21)$$

Izraz za poprečnu silu  $Q_z$  koja uzrokuje smično naprezanje  $\tau_{xz}$  već je definiran izrazom (2.13), no taj izraz možemo proširiti izrazim (2.14) i (2.19), iz čega slijedi:

$$Q_z = kAG\gamma_{xz}. \quad (2.22)$$

Kako bi analitička usporedba Euler-Bernoullijeve i Timošenkovne metode bila potpuna, potrebno je još prikazati izraz kojim se definira progib elastične linije kod Timošenkovne metode savijanja grede. Taj izraz prema [3] glasi:

$$EI_y \frac{d^2 w}{dx^2} = -M_y - \frac{EI_y}{kAG} q_z. \quad (2.23)$$



### 2.3 Kratak osvrt na analitičku usporedbu teorija savijanja grede

Kao što je već naznačeno, Euler-Bernoullijeva teorija koristi se samo kod tankih greda gdje se utjecaj smičnog naprezanja može zanemariti, dok se Timošenkova teorija može koristiti i za grede većih debljina. Međutim, primjenom Timošenkove metode na tanke grede gdje se može zanemariti utjecaj smičnog naprezanja dolazimo do zanimljivog zaključka.

Pravokutni poprečni presjek grede može se okarakterizirati sljedećim veličinama:

$$A = bh, \quad (2.24)$$

$$I_y = \frac{bh^3}{12}. \quad (2.25)$$

Drugi član na desnoj strani jednadžbe (2.23), koji je posljedica utjecaja smičnog naprezanja označit ćemo proizvoljnom oznakom  $S$ .

$$S = \frac{EI_y}{kAG} q_z. \quad (2.26)$$

Uvrštavanjem izraza (2.24) i (2.25) u (2.26) dobivamo:

$$S = \frac{Ebh^3}{12kbhG} = \frac{Eh^2}{12kG}. \quad (2.27)$$

Kod jako tankih greda  $h \rightarrow 0$ , dobivamo da je  $S = 0$ . Može se zaključiti da ako je  $S = 0$ , diferencijalna jednadžba elastične linije prema Timošenku (2.23) postaje potpuno identična izrazu (2.9), tj. diferencijalnoj jednadžbi elastične linije Euler-Bernoullijeve teorije. Do istog zaključka se može doći i lakšim putem. Zanemarivanjem smičnog naprezanja u izrazima Timošenkove teorije savijanja, tj. zanemarivanjem kutne deformacije ( $\gamma_{xz} = 0$ ) možemo iz izraza (2.15) dobiti:

$$\phi = \alpha. \quad (2.28)$$

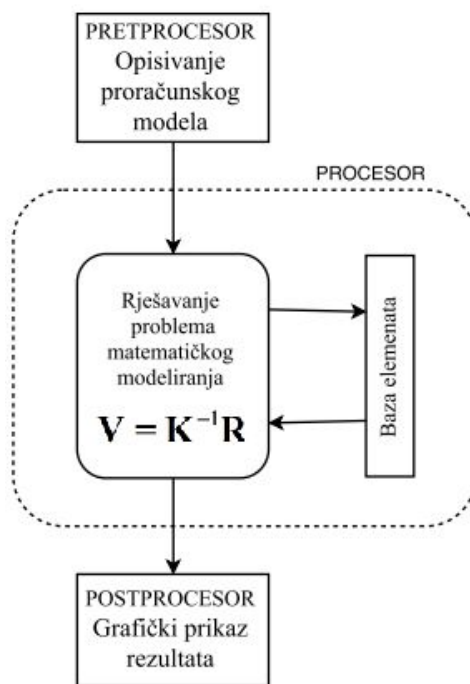
Iz prethodnog je lako zaključiti da ćemo primjenom Timošenkove teorije savijanja na tanke grede dobiti izraze koji su identični izrazima u Euler-Bernoullijevoj teoriji savijanja grede.

### 3 METODA KONAČNIH ELEMENATA

U ovom radu će se usporediti Euler-Bernoullijeva i Timošenkova metoda savijanja grede pomoću metode konačnih elementa. Metoda konačnih elemenata približna je numerička metoda koja je nezaobilazna u inženjerskim proračunima. Metoda konačnih elemenata se temelji na fizičkoj diskretizaciji kontinuuma [4]. Razmatrani kontinuum s beskonačno stupnjeva slobode gibanja zamjenjuje se s diskretnim modelom međusobno povezanih elemenata s ograničenim brojem stupnjeva slobode, odnosno razmatrani kontinuum postaje mreža konačnih elemenata. Konačni elementi međusobno su povezani u čvorovima. Polje pomaka, naprezanja i deformacija u svakom je elementu opisano pomoću interpolacijskih funkcija. Interpolacijske funkcije pomoću kojih se opisuje stanje elemenata moraju zadovoljiti odgovarajuće uvjete da bi se diskretizirani model mogao što više približiti točnom rješenju. Uz pravilnu formulaciju konačnih elemenata, približavanje točnom rješenju raste sa povećanjem broja elemenata. Pojava da se numerička rješenja dobivena metodom konačnih elemenata sve više približavaju vrijednostima koje točno opisuju razmatrani problem, uz povećanje broja konačnih elemenata, naziva se konvergencija rješenja. Ovisno o konačnim elementima i formulaciji metode konačnih elemenata, približavanje točnom rješenju može biti monotono i nemonotono [4]. Konvergencija je monotona kada se izračunavaju pomaci koji su po apsolutnoj vrijednosti manji od točnih, a usitnjavanjem mreže se stalno povećavaju i približavaju točnom rješenju. Za postizanje monotone konvergencije, potrebno je da interpolacijske funkcije mogu opisati pomake krutog tijela te da je moguće opisati polje konstantnih deformacija. Također moraju biti zadovoljeni svi potrebni uvjeti kompatibilnosti duž rubova susjednih elemenata [4]. Ukoliko nisu ispunjeni svi potrebni uvjeti kompatibilnosti duž rubova susjednih elemenata konvergencija je nemonotona.

#### 3.1 Opis metode konačnih elemenata

Nakon izvođenja jednadžbi za konačni element, odgovarajućim postupcima izvode se globalne jednadžbe za diskretizirani model. Međutim, složene konstrukcije zahtijevaju diskretizaciju sa velikim brojem konačnih elemenata što uzrokuje sustav algebarskih jednadžbi sa velikim brojem nepoznanica. Iz prethodno navedenog razloga zaključuje se da je za izračun rješenja metodom konačnih elemenata potrebno računalo. Abaqus je programski paket koji se bazira na metodi konačnih elemenata. Na slici 14 je prikazan način rada programskog paketa Abaqus.



Slika 14. Shematski prikaz programa [4]

U pretprocesoru je potrebno definirati geometriju, rubne uvjete i opterećenje proračunskog modela. Kod modeliranja u pretprocesoru potrebno je što vjernije opisati stanje realne konstrukcije. Također je potrebno diskretizirati proračunski model na konačne elemente te odrediti njihov tip. U procesoru se nalaze algoritmi za rješavanje problema matematičkog modeliranja. U procesoru se rješava globalna jednadžba konačnih elemenata

$$\mathbf{KV} = \mathbf{R}, \quad (3.1)$$

gdje je

- $\mathbf{K}$  - globalna matrica krutosti,
- $\mathbf{V}$  - vektor globalnih stupnjeva slobode,
- $\mathbf{R}$  - globalni vektor ukupnih čvornih sila.

Kod analize konstrukcija najčešće nas zanimaju pomaci. Stoga je izraz (3.1) potrebno pomnožiti sa inverznom matricom krutosti, pa slijedi

$$\mathbf{V} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{R}. \quad (3.2)$$

Nakon rješavanja globalnog sustava jednadžbi i izračunavanja vektora globalnih stupnjeva slobode  $\mathbf{V}$ , moguće je izračunati polja naprezanja i deformacija u konačnim elementima. Međutim, da bismo mogli izračunati polje naprezanja i deformacije konačnih elemenata potrebno je preračunavanje globalnih stupnjeva slobode u stupnjeve slobode u odnosu na lokalni koordinatni sustav. Procesor pomoću određenih matrica transformacije ( $\mathbf{a}_g$  i  $\mathbf{T}$ ) provodi prethodno navedenu operaciju. Vektor globalnih stupnjeva slobode  $\mathbf{V}$  se pomoću

kinematičke matrice transformacije  $\mathbf{a}_g$  transformira u vektor lokalnih stupnjeva slobode u smjeru globalnih koordinata  $\mathbf{v}_g$ .

$$\mathbf{v}_g = \mathbf{a}_g \mathbf{V}. \quad (3.3)$$

Vektor lokalnih stupnjeva slobode dobivamo transformiranjem matrice  $\mathbf{v}_g$  pomoću matrice transformacije  $\mathbf{T}$ , pa slijedi

$$\mathbf{v} = \mathbf{T} \mathbf{v}_g. \quad (3.4)$$

Vektor pomaka  $\mathbf{u}$  možemo zapisati kao umnožak matrice funkcije oblika  $\mathbf{N}$  i vektora lokalnih stupnjeva slobode  $\mathbf{v}$

$$\mathbf{u} = \mathbf{N} \mathbf{v}. \quad (3.5)$$

Deformacije u elementu  $\boldsymbol{\varepsilon}$  određene su izrazom

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}_k \mathbf{u}, \quad (3.6)$$

gdje je

$\mathbf{D}_k$  - kinematički diferencijalni operator,

$\mathbf{u}$  - vektor pomaka u odnosu na lokalne stupnjeve slobode.

Uvrštavanjem izraza (3.5) u (3.6) dobivamo

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}_k \mathbf{N} \mathbf{v}. \quad (3.7)$$

Uvođenjem supstitucije dobivamo matricu međusobne ovisnosti deformacije u elementu i pomaka u čvorovima

$$\mathbf{B} = \mathbf{D}_k \mathbf{N}. \quad (3.8)$$

Uvrštavanjem izraza (3.8) u (3.7) dobivamo konačni izraz za polje deformacija u elementu

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \mathbf{v}. \quad (3.9)$$

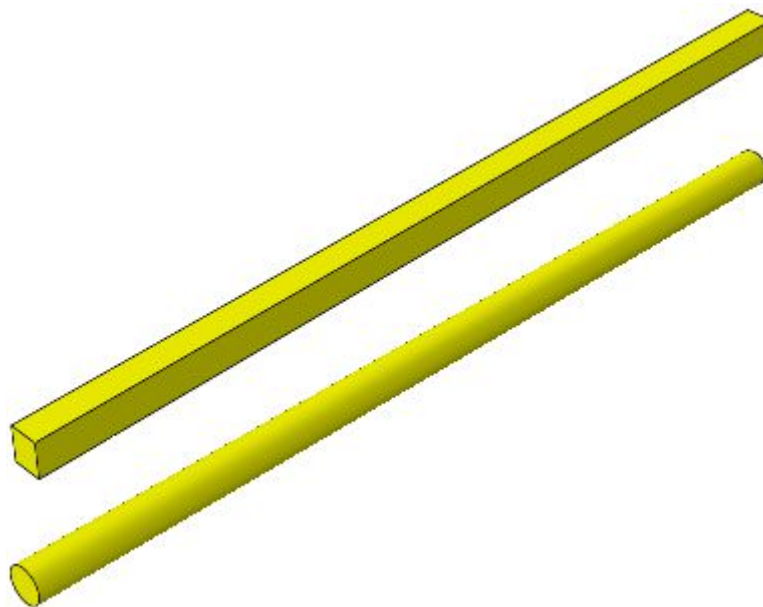
Množenjem izraza (3.9) sa matricom elastičnosti  $\mathbf{D}$  dobivamo izraz za naprezanje

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (3.10)$$

U procesoru se obavljaju izračuni svih prethodno prikazanih izraza. Rezultate dobivene kompleksnim izračunima u procesoru potrebno je prikazati korisniku programskog paketa. Postprocesor omogućuje grafički prikaz rezultata, tj. deformirani oblik proračunskog modela te raspodjelu unutarnjih sila i naprezanja.

## 4 OPISIVANJE PRORAČUNSKOG MODELA

Prije same numeričke usporedbe teorija savijanja potrebno je u pretprocesoru programskog paketa Abaqus definirati proračunski model, tj. potrebno je definirati geometriju, opterećenje i rubne uvjete proračunskog modela. Numerička usporedba biti će prikazana za dva karakteristična poprečna presjeka grede, a to su kružni i pravokutni poprečni presjek grede (slika 15).



Slika 15. Modeli greda karakterističnih poprečnih presjeka

Modeli grede prikazani na slici 15 u Abaqusu se prikazuju kao ravna linija (slika 16).

---

Slika 16. Prikaz modela grede u Abaqusu

### 4.1 Definiranje poprečnog presjeka grede

Za dobivanje ispravnih numeričkih rješenja Timošenkovom teorijom savijanja grede, potrebno je ispravno definirati poprečnu smičnu krutost (Transverse Shear Stiffness - TSS prema [5]). Radi jednostavnosti poprečna smična krutost biti će definirana iz elastičnih svojstava materijala. Prema [5] poprečna smična krutost (*TSS*) određuje se pomoću korekcijskog faktora smicanja *k*. Potrebno je istaknuti da Abaqus korekcijski faktor smicanja *k* računa prema Cowperu [5].

Korekcijski faktor smicanja za kružni poprečni presjek, prema Cowperu je definiran izrazom

$$k_o = \frac{6 + 6\nu}{7 + 6\nu}, \quad (3.1)$$

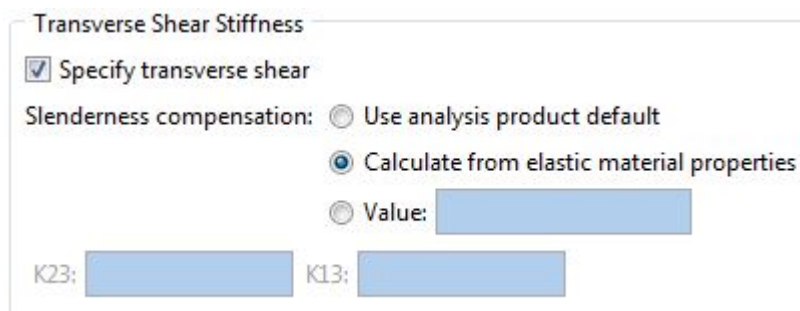
dok se za pravokutni poprečni presjek definira kao

$$k_{\square} = \frac{10+10\nu}{12+11\nu}. \quad (3.2)$$

Uvrštavanjem vrijednosti za Poissonov faktor  $\nu = 0,3$  dobivamo vrijednost izraza (3.1) i (3.2)

$$k_{\circ} = 0,89 \text{ i } k_{\square} = 0,85. \quad (3.3)$$

U modulu *Property* programskog paketa Abaqus, točnije u izborniku *Edit Beam Section* uključuje se opcija prema kojoj Abaqus poprečnu smičnu krutost izračunava iz elastičnih svojstva materijala (slika 17).



Slika 17. Transverse Shear Stiffness [6]

## 4.2 Odabir konačnih elemenata

### 4.2.1 Konačni elementi za Euler-Bernoullijevu teoriju savijanja

Elementi koji se koriste za analizu savijanja grede prema Euler-Bernoullijevoj teoriji ne dozvoljavaju kutnu deformaciju. Stoga presjeci ostaju ravni i okomiti na elastičnu liniju. Na slici 18 je prikazan element koji će se koristiti za analizu Euler-Bernoullijeve teorije savijanja.



Slika 18. Gredni konačni element B23 [5]

Euler-Bernoullijev gredni element B23 ima 2 čvora. Polje pomaka kod B23 konačnog elementa opisuje se interpolacijskim polinomom trećeg reda, tj. kubičnim interpolacijskim polinomom. Interpolacijska funkcija trećeg reda omogućava zadovoljavajuću točnost pri analizi grede koja je opterećena kontinuiranim opterećenjem po svojoj duljini.

#### 4.2.2 Konačni elementi za Timošenkovu teoriju savijanja

Timošenkovi gredni konačni elementi dozvoljavaju kutnu deformaciju. B21 konačni element ima dva čvora, a polje pomaka se opisuje interpolacijskim polinomom prvoga reda.



Slika 19. Gredni konačni element B21 [5]

Također se može koristiti i Timošenkov gredni element višeg reda koji se označava kao B22. Ovaj konačni element ima 3 čvora, dok se polje pomaka opisuje interpolacijskim polinomom drugoga reda.



Slika 20. Gredni konačni element B22 [5]

## 5 NUMERIČKI REZULTATI ZA GREDE RAZLIČITIH DEBLJINA

Numerička usporedba teorija savijanja biti će prikazana na nekoliko jednostavnih primjera savijanja grede. Usporedba rezultata biti će prikazana za nekoliko različitih vrijednosti omjera visine grede i njezine ukupne duljine  $h/l$ .

### 5.1 Konzola opterećena silom na kraju

Na slici 21 prikazana je konzola opterećena silom na kraju. Za ovaj slučaj opterećenja konzole, maksimalni progib elastične linije  $w$  te maksimalni kutovi  $\alpha$  i  $\phi$  dobivaju se na slobodnom kraju konzole, odnosno na mjestu gdje djeluje opterećenje, sila  $F$ .



Slika 21. Konzola opterećena silom na kraju

U programskom paketu Abaqus proračunski model prikazan je na slici 22.



Slika 22. Proračunski model konzole opterećene silom na kraju

Usporedba Euler-Bernoullijeve i Timošenkovke teorije savijanja grede biti će prikazana za tri različite vrijednosti omjera visine poprečnog presjeka i duljine grede, a to su  $1/20$ ,  $1/5$  i  $1/2$ .

#### 5.1.1 Analitička rješenja

Svi analitički izrazi prikazani u nastavku su preuzeti iz [3].

Maksimalni progib elastične linije Euler-Bernoullijeve metode  $w_{\max EB}$  izračunava se izrazom

$$w_{\max EB} = \frac{1}{3} \frac{Fl^3}{EI_y}, \quad (5.1)$$



dok se maksimalni nagib tangente na elastičnu liniju  $\alpha_{\max EB}$  izračunava prema izrazu iz

$$\alpha_{\max EB} = -\frac{1}{2} \frac{Fl^2}{EI_y}. \quad (5.2)$$

Kod Timošenkovke teorije savijanja grede maksimalni progib elastične linije  $w_{\max T}$  iznosi

$$w_{\max T} = \frac{1}{3} \frac{Fl^3}{EI_y} + \frac{Fl}{kAG} = w_{\max EB} + \frac{Fl}{kAG}, \quad (5.3)$$

a kut  $\phi_{\max}$  pod kojim se nalaze deformirani presjeci jednak je maksimalnom nagibu tangente na elastičnu liniju Euler-Bernoullijeve metode  $\alpha_{\max EB}$

$$\phi_{\max} = -\frac{1}{2} \frac{Fl^2}{EI_y} = \alpha_{\max EB}. \quad (5.4)$$

Za pravokutni poprečni presjek aksijalni moment tromosti izračunava se prema izrazu

$$I_y = \frac{bh^3}{12}, \quad (5.5)$$

dok za kružni poprečni presjek iznosi

$$I_y = \frac{d^4 \pi}{64}, \quad (5.6)$$

gdje je  $d$  promjer kružnog poprečnog presjeka.

U tablici 1 prikazana su analitička rješenja za različite vrijednosti omjera  $h/l$  kod pravokutnog poprečnog presjeka. Zbog jednostavnosti problema uzeto je da su stranice pravokutnika jednake  $h=b$ , odnosno riječ je o kvadratnom presjeku poprečne grede. Sva rješenja dobivena su za ulazne podatke:  $F = 100 \text{ N}$ ,  $l = 100 \text{ mm}$ ,  $E = 210000 \text{ N/mm}^2$ ,  $\nu = 0,3$  i  $k = 0,85$ .

**Tablica 1. Analitička rješenja za pravokutni poprečni presjek grede**

$\frac{h=b}{\text{mm}}$	$\frac{h}{l}$	Euler-Bernoullijeva teorija		Timošenkova teorija	
		$w_{\max EB} / \text{mm}$	$\alpha_{\max EB} / \text{rad}$	$w_{\max T} / \text{mm}$	$\phi_{\max} / \text{rad}$
5	$\frac{1}{20}$	3,048	-0,0457	3,053	-0,0457
20	$\frac{1}{5}$	0,0119	$-1,786 \cdot 10^{-4}$	0,0123	$-1,786 \cdot 10^{-4}$
50	$\frac{1}{2}$	$3,048 \cdot 10^{-6}$	$-4,571 \cdot 10^{-6}$	$3,64 \cdot 10^{-4}$	$-4,571 \cdot 10^{-6}$

Za kružni poprečni presjek korekcijski faktor smicanja jednak je  $k = 0,89$ . U tablici 2 prikazani su analitički rezultati za kružni poprečni presjek kod kojega je visina poprečnog presjeka  $h$  jednaka promjeru kružnog poprečnog presjeka  $d$ . Svi ulazni podaci osim već spomenutog korekcijskog faktora smicanja  $k$  ostaju ne promijenjeni.

**Tablica 2. Analitička rješenja za kružni poprečni presjek grede**

$\frac{d = h}{\text{mm}}$	$\frac{h}{l}$	Euler-Bernoullijeva teorija		Timošenkova teorija	
		$w_{\max \text{EB}} / \text{mm}$	$\alpha_{\max \text{EB}} / \text{rad}$	$w_{\max \text{T}} / \text{mm}$	$\phi_{\max} / \text{rad}$
5	$\frac{1}{20}$	5,174	-0,0776	5,181	-0,0776
20	$\frac{1}{5}$	0,0202	$-3,032 \cdot 10^{-4}$	0,0207	$-3,032 \cdot 10^{-4}$
50	$\frac{1}{2}$	$5,174 \cdot 10^{-4}$	$-7,761 \cdot 10^{-6}$	$5,882 \cdot 10^{-4}$	$-7,761 \cdot 10^{-6}$

### 5.1.2 Numerička rješenja

Kao referentno analitičko rješenje odabrana je Timošenkova teorija savijanja grede, zato što ona daje preciznija rješenja za deblje grede. Za analizu ovog slučaja, konzole opterećene silom na kraju korišteni su gredni konačni elementi B23 za Euler-Bernoullijevu teoriju savijanja, dok su dobivanje numeričkih vrijednosti Timošenkovom teorijom savijanja grede korišteni B21 gredni konačni elementi. Numerička rješenja dobivena za pravokutni poprečni presjek prikazana su u tablici 3.

**Tablica 3. Numerička rješenja za pravokutni poprečni presjek grede**

$\frac{h = b}{\text{mm}}$	$\frac{h}{l}$	Euler-Bernoullijeva teorija		Timošenkova teorija	
		$w_{\max \text{EB}} / \text{mm}$	$\alpha_{\max \text{EB}} / \text{rad}$	$w_{\max \text{T}} / \text{mm}$	$\phi_{\max} / \text{rad}$
5	$\frac{1}{20}$	3,047619	-0,045714	3,053445	-0,045714
20	$\frac{1}{5}$	0,0119048	-0,00017857	0,0122689	-0,00017857
50	$\frac{1}{2}$	0,000304762	$-4,571 \cdot 10^{-6}$	0,00036303	$-4,571 \cdot 10^{-6}$

Usporedbom analitičkih rješenja iz tablice 1 sa numeričkim rješenjima iz tablice 3 može se zaključiti da se ona poklapaju.

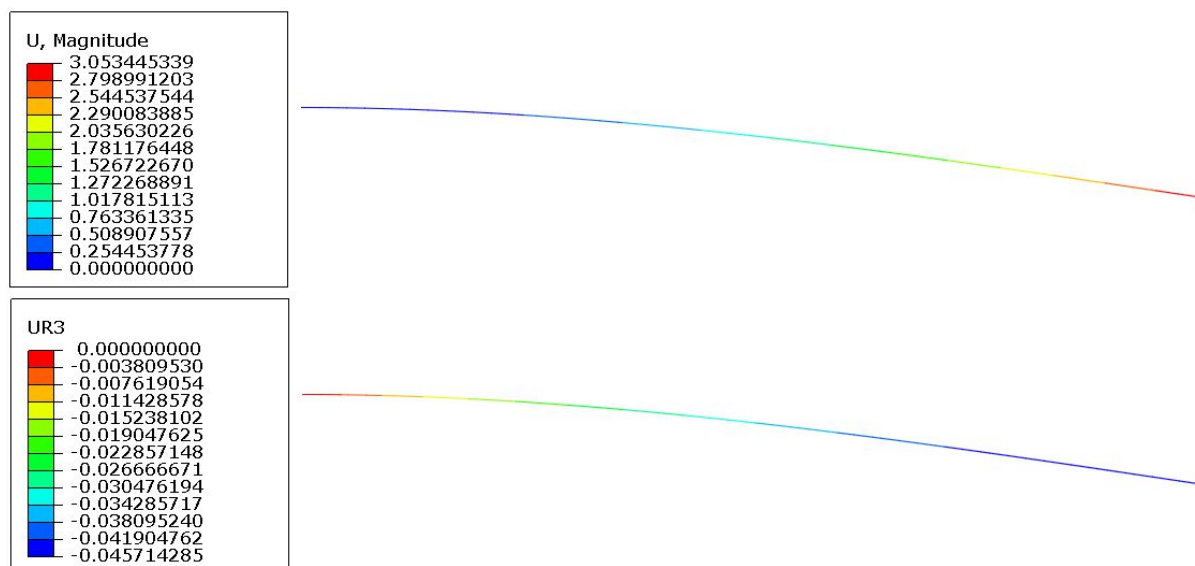
Numerička rješenja dobivena za kružni poprečni presjek prikazana su u tablici 4.

Tablica 4. Numerička rješenja za kružni poprečni presjek grede

$\frac{d = h}{\text{mm}}$	$\frac{h}{l}$	Euler-Bernoullijeva teorija		Timošenkova teorija	
		$w_{\max \text{EB}} / \text{mm}$	$\alpha_{\max \text{EB}} / \text{rad}$	$w_{\max \text{T}} / \text{mm}$	$\phi_{\max} / \text{rad}$
5	$\frac{1}{20}$	5,1738	-0,077607	5,1809	-0,077607
20	$\frac{1}{5}$	0,0202102	-0,00030315	0,020653	-0,00030315
50	$\frac{1}{2}$	0,00051738	$-7,761 \cdot 10^{-6}$	0,00058823	$-7,761 \cdot 10^{-6}$

Isto kao što je bio i slučaj za pravokutni poprečni presjek, numeričke vrijednosti dobivene za kružni poprečni presjek poklapaju se sa analitičkim vrijednostima (tablica 2).

Slikom 23 prikazan je deformirani oblik grede, te raspodjela progiba  $w$  i kuta  $\phi$  po duljini grede  $l$  za Timošenkovu teoriju savijanja grede pravokutnog poprečnog presjeka kod koje je  $h/l = 1/20$ .



Slika 23. Deformirani oblik grede

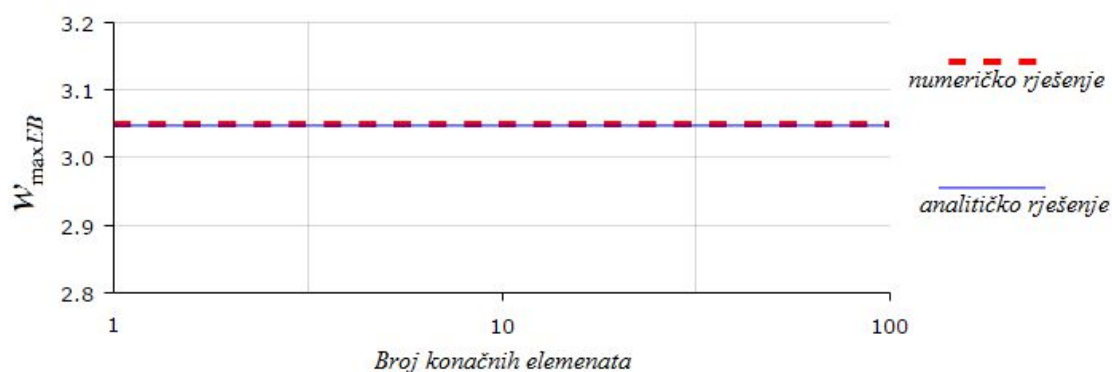
### 5.1.3 Konvergencija rješenja

Konvergencija rješenja prikazana je samo za slučaj pravokutnog poprečnog presjeka tanke grede, tj. kod omjera visine poprečnog presjeka i duljine grede  $h/l = 1/20$ . Konvergencija rješenja za Euler-Bernoullijevu teoriju, tj. za konačne elemente B23 prikazana je tablicom 5.

Tablica 5. Konvergencija Euler-Bernoullijevih grednih konačnih elemenata

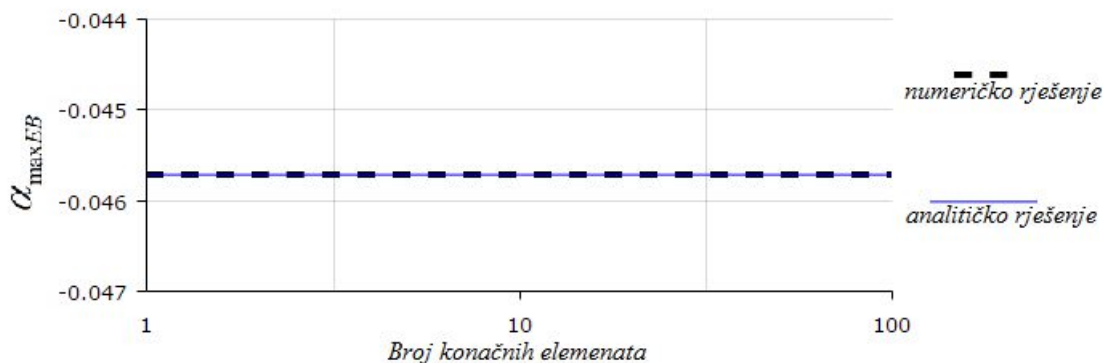
Broje elemenata B23	Euler-Bernoulli	
	$w_{\max EB} / \text{mm}$	$\alpha_{\max EB} / \text{rad}$
1	3,047619	-0,045714
10	3,047619	-0,045714
100	3,047619	-0,045714

Iz tablice se može zaključiti da se konvergencija rješenja postiže sa samo jednim elementom. Konvergencija sa samo jednim elementom posljedica je jednostavnosti geometrije, rubnih uvjeta te opterećenja proračunskog modela. Konvergencija progiba za Euler-Bernoullijeve gredne konačne elemente B23 prikazana je slikom 24.



Slika 24. Konvergencija progiba za B23 gredne konačne elemente

Konvergencija kuta nagiba tangente na elastičnu liniju prikazana je na slici 25.



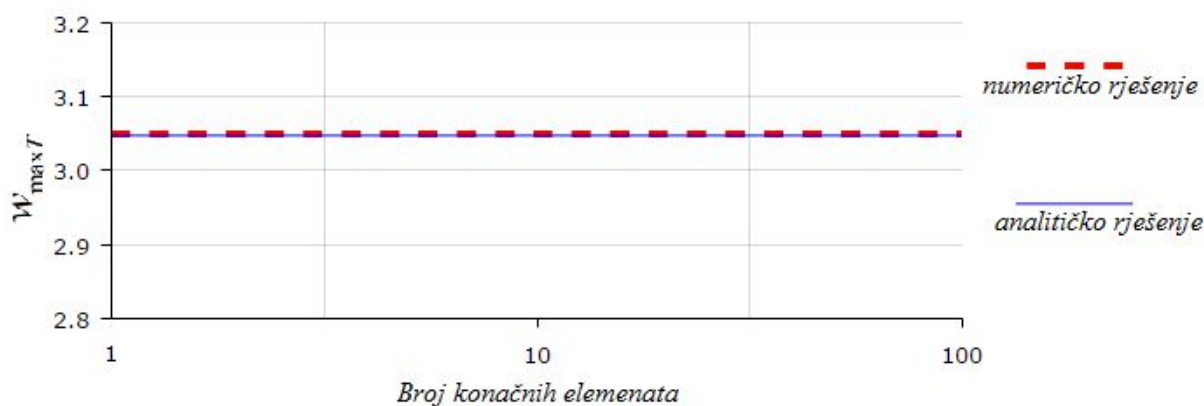
Slika 25. Konvergencija nagiba tangente za B23 gredne konačne elemente

Konvergencija rješenja za Timošenkovu teoriju savijanja grede, odnosno konvergencija B21 grednih konačnih elemenata prikazana je tablicom 6.

**Tablica 6. Konvergencija Timošenkovih grednih konačnih elemenata**

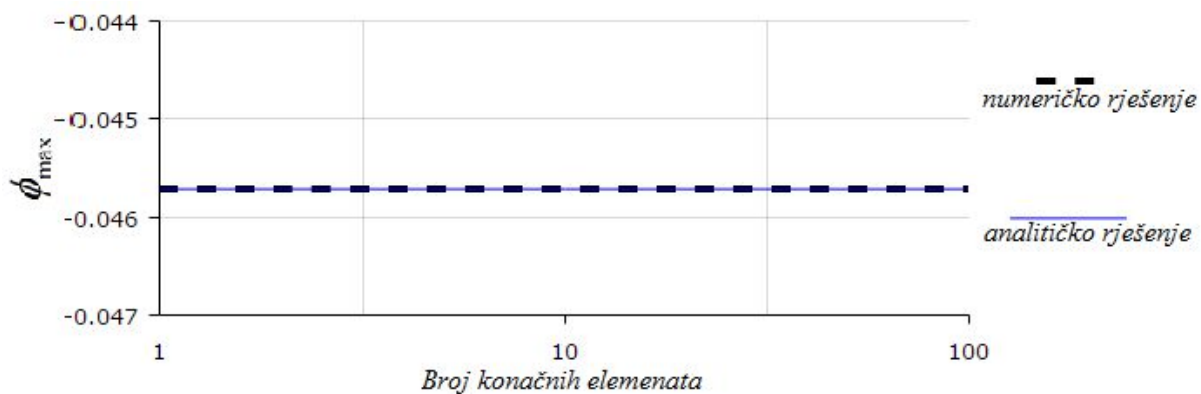
Broje elemenata B21	Timošenko	
	$w_{\max T}$ / mm	$\phi_{\max}$ / rad
1	3,053445	-0,045714
10	3,053445	-0,045714
100	3,053445	-0,045714

Konvergenciju Timošenkovih grednih konačnih elemenata prikazanu tablicom 4 moguće je prikazati dijagramom konvergencije. Slikom 26 prikazana je konvergencija pomaka za B21 gredne konačne elemente.



**Slika 26. Konvergencija progiba za B21 gredne konačne elemente**

Konvergencija kuta pod kojim se nalazi deformirani poprečni presjek u odnosu na normalu elastične linije prikazana je slikom 27.



**Slika 27. Konvergencija nagiba za B21 gredne konačne elemente**

### 5.1.4 Izračunavanje pogreške Euler-Bernoullijeve teorije savijanja grede

Da bismo mogli odrediti do koje debljine grede je prihvatljivo koristiti Euler-Bernoullijevu teoriju savijanja grede potrebno je odrediti pogrešku koju ona daje u odnosu na Timošenkovu teoriju savijanja grede. Kao referentna veličina za izračunavanje pogreške izabran je progib elastične linije  $w$ .

Izraz kojim se računa pogreška  $g$  je definiran kao

$$g = \left( 1 - \frac{w_{\max \text{EB}}}{w_{\max \text{T}}} \right) \cdot 100\%. \quad (5.7)$$

Tablicom 7 prikazani su iznosi pogrešaka koje daje Euler-Bernoullijeva teorija savijanja za različite debljine grede pravokutnog poprečnog presjeka. Kako se i pretpostavljalo najveća greška dobivena je za najveći omjer visine poprečnog presjeka  $h$  i duljine grede  $l$ , tj. za najdeblju gredu.

**Tablica 7. Prikaz pogreške kod različitih debljina grede pravokutnog poprečnog presjeka**

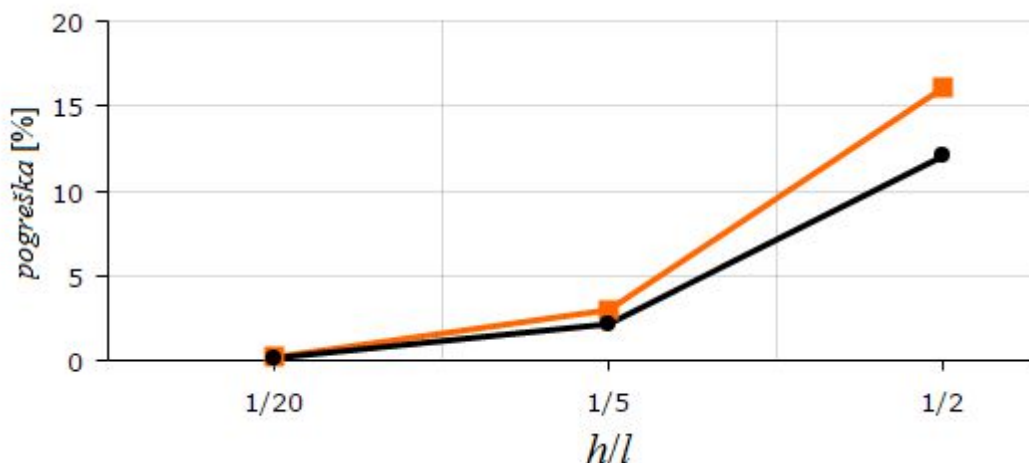
$\frac{h}{l}$	$w_{\max \text{EB}} / \text{mm}$	$w_{\max \text{T}} / \text{mm}$	$g / \%$
$\frac{1}{20}$	3,047619	3,053445	0,19
$\frac{1}{5}$	0,0119048	0,0122689	2,97
$\frac{1}{2}$	0,000304762	0,00036303	16,05

Analogno tablici pogreške za pravokutni poprečni presjek grede možemo i pogreške za kružni poprečni presjek prikazati tablicom (tablica 8).

**Tablica 8. Prikaz pogreške kod različitih debljina grede kružnog poprečnog presjeka**

$\frac{h}{l}$	$w_{\max \text{EB}} / \text{mm}$	$w_{\max \text{T}} / \text{mm}$	$g / \%$
$\frac{1}{20}$	5,1738	5,1809	0,14
$\frac{1}{5}$	0,0202102	0,020653	2,14
$\frac{1}{2}$	0,00051738	0,00058823	12,04

Rezultati iz tablica 7 i 8 mogu se prikazati dijagramski (slika 28).

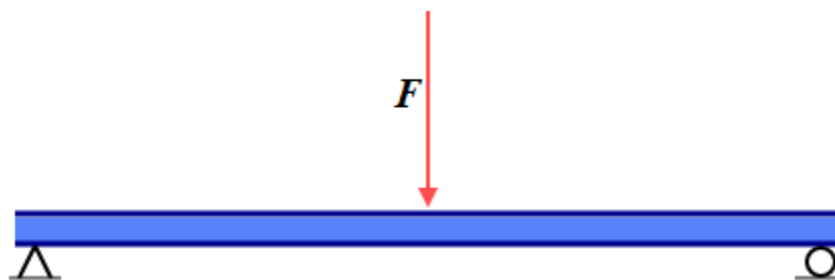


Slika 28. Prikaz pogreške u ovisnosti o obliku poprečnog presjeka

Na slici 28 pogreška za pravokutni poprečni presjek prikazana je narančastom (gornjom) linijom, dok je za kružni poprečni presjek pogreška prikazana crnom linijom.

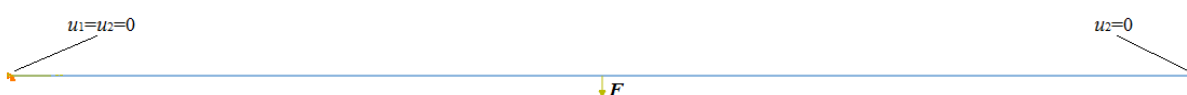
## 5.2 Greda na dva oslonca opterećena koncentriranom silom u sredini

Greda na dva oslonca opterećena koncentriranom silom u sredini prikazana je na slici 29. Kod ovakvog slučaja opterećenja grede maksimalni progib elastične linije  $w$  nalazi se na sredini grede, tj. na mjestu djelovanja opterećenja, sile  $F$ . Maksimalni kutovi  $\alpha$  i  $\phi$  dobivaju se u osloncima.



Slika 29. Greda na dva oslonca opterećena koncentriranom silom u sredini

U programskom paketu Abaqus proračunski model prikazan je na slici 30.



Slika 30. Proračunski model grede

Slično kao i u prethodnom primjeru usporedba Euler-Bernoullijeve i Timošenkove metode prikazati će se za nekoliko greda različitih debljina.

### 5.2.1 Analitička rješenja

Svi analitički izrazi prikazani u nastavku preuzeti su iz [3].

Maksimalni progib elastične linije Euler-Bernoullijeve metode  $w_{\max EB}$  izračunava se prema izrazu

$$w_{\max EB} = \frac{1}{48} \frac{Fl^3}{EI_y}, \quad (5.8)$$

dok se maksimalni nagib tangente na elastičnu liniju  $\alpha_{\max EB}$  izračunava izrazom

$$|\alpha_{\max EB}| = \frac{1}{16} \frac{Fl^2}{EI_y}. \quad (5.9)$$

U izrazu (5.9) kut  $\alpha_{\max EB}$  je prikazan kao apsolutna vrijednost. Naime, zbog načina na koji definiramo predznak nagiba tangente na elastičnu liniju, u lijevom osloncu dobivamo da je njegova vrijednost negativna, dok mu je u desnom osloncu vrijednost pozitivna. Kako su te dvije vrijednosti po apsolutnoj vrijednosti jednake, uzet je pozitivni predznak kuta.

Kod Timošenkove teorije savijanja grede maksimalni progib elastične linije  $w_{\max T}$  iznosi

$$w_{\max T} = \frac{1}{48} \frac{Fl^3}{EI_y} + \frac{1}{4} \frac{Fl}{kAG} = w_{\max EB} + \frac{1}{4} \frac{Fl}{kAG}, \quad (5.10)$$

a kut  $\phi_{\max}$  pod kojim se nalaze deformirani presjeci jednak je maksimalnom nagibu tangente na elastičnu liniju Euler-Bernoullijeve metode  $\alpha_{\max EB}$

$$\phi_{\max} = \frac{1}{16} \frac{Fl^2}{EI_y} = \alpha_{\max EB}. \quad (5.11)$$

Za pravokutni i kružni poprečni presjek aksijalni momenti tromosti izračunavaju se prema izrazima (5.5) i (5.6).

Ulazni podaci iz kojih se izračunavaju analitička rješenja su identična prošlom primjeru, tj  $F = 100 \text{ N}$ ,  $l = 100 \text{ mm}$ ,  $E = 210000 \text{ N/mm}^2$  i  $\nu = 0,3$ . Također, kod pravokutnih poprečnih presjeka, visina poprečnog presjeka  $h$  biti će jednaka debljini poprečnog presjeka  $b$ . Iz navedenih ulaznih podataka i poznatog korekcijskog faktora smicanja  $k$  za pravokutni poprečni presjek dobivaju analitička rješenja prikazana u tablici 9.



Tablica 9. Analitička rješenja za pravokutni poprečni presjek grede

$\frac{h=b}{\text{mm}}$	$\frac{h}{l}$	Euler-Bernoullijeva teorija		Timošenkova teorija	
		$w_{\max \text{ EB}} / \text{mm}$	$\alpha_{\max \text{ EB}} / \text{rad}$	$w_{\max \text{ T}} / \text{mm}$	$\phi_{\max} / \text{rad}$
5	$\frac{1}{20}$	0,19048	$5,7143 \cdot 10^{-3}$	0,19193	$5,7143 \cdot 10^{-3}$
20	$\frac{1}{5}$	$7,4405 \cdot 10^{-4}$	$2,2321 \cdot 10^{-5}$	$8,3509 \cdot 10^{-4}$	$2,2321 \cdot 10^{-5}$
50	$\frac{1}{2}$	$1,9048 \cdot 10^{-5}$	$5,7143 \cdot 10^{-7}$	$3,3613 \cdot 10^{-5}$	$5,7143 \cdot 10^{-7}$

Za kružni poprečni presjek korekcijski faktor smicanja jednak je  $k = 0,89$ . U tablici 10 prikazani su analitički rezultati za kružni poprečni presjek kod kojega je visina poprečnog presjeka  $h$  jednaka promjeru kružnog poprečnog presjeka  $d$ . Svi ulazni podaci osim već spomenutog korekcijskog faktora smicanja  $k$  ostaju ne promijenjeni.

Tablica 10. Analitička rješenja za kružni poprečni presjek grede

$\frac{d=h}{\text{mm}}$	$\frac{h}{l}$	Euler-Bernoullijeva teorija		Timošenkova teorija	
		$w_{\max \text{ EB}} / \text{mm}$	$\alpha_{\max \text{ EB}} / \text{rad}$	$w_{\max \text{ T}} / \text{mm}$	$\phi_{\max} / \text{rad}$
5	$\frac{1}{20}$	0,32336	$9,7009 \cdot 10^{-3}$	0,32513	$9,7009 \cdot 10^{-3}$
20	$\frac{1}{5}$	$1,2631 \cdot 10^{-3}$	$3,7894 \cdot 10^{-5}$	$1,3738 \cdot 10^{-3}$	$3,7894 \cdot 10^{-5}$
50	$\frac{1}{2}$	$3,2336 \cdot 10^{-5}$	$9,7009 \cdot 10^{-7}$	$5,0049 \cdot 10^{-5}$	$9,7009 \cdot 10^{-7}$

### 5.2.2 Numerička rješenja

Timošenkova teorija savijanja grede je referentno analitičko rješenje, zato što ona daje preciznija rješenja za deblje grede. Za Euler-Bernoullijevu teoriju savijanja korišteni su već opisani B23 gredni konačni elementi, dok će se za Timošenkovu teoriju savijanja grede koristiti B21 gredni konačni elementi. Numerička rješenja dobivena za pravokutni poprečni presjek prikazana su u tablici 11.

Tablica 11. Numerička rješenja za pravokutni poprečni presjek

$\frac{b = h}{\text{mm}}$	$\frac{h}{l}$	Euler-Bernoullijeva teorija		Timošenkova teorija	
		$w_{\max \text{EB}} / \text{mm}$	$\alpha_{\max \text{EB}} / \text{rad}$	$w_{\max \text{T}} / \text{mm}$	$\phi_{\max} / \text{rad}$
5	$\frac{1}{20}$	0,19048	$5,7143 \cdot 10^{-3}$	0,19193	$5,7143 \cdot 10^{-3}$
20	$\frac{1}{5}$	$7,4405 \cdot 10^{-4}$	$2,2321 \cdot 10^{-5}$	$8,3509 \cdot 10^{-4}$	$2,2321 \cdot 10^{-5}$
50	$\frac{1}{2}$	$1,9048 \cdot 10^{-5}$	$5,7143 \cdot 10^{-7}$	$3,3613 \cdot 10^{-5}$	$5,7143 \cdot 10^{-7}$

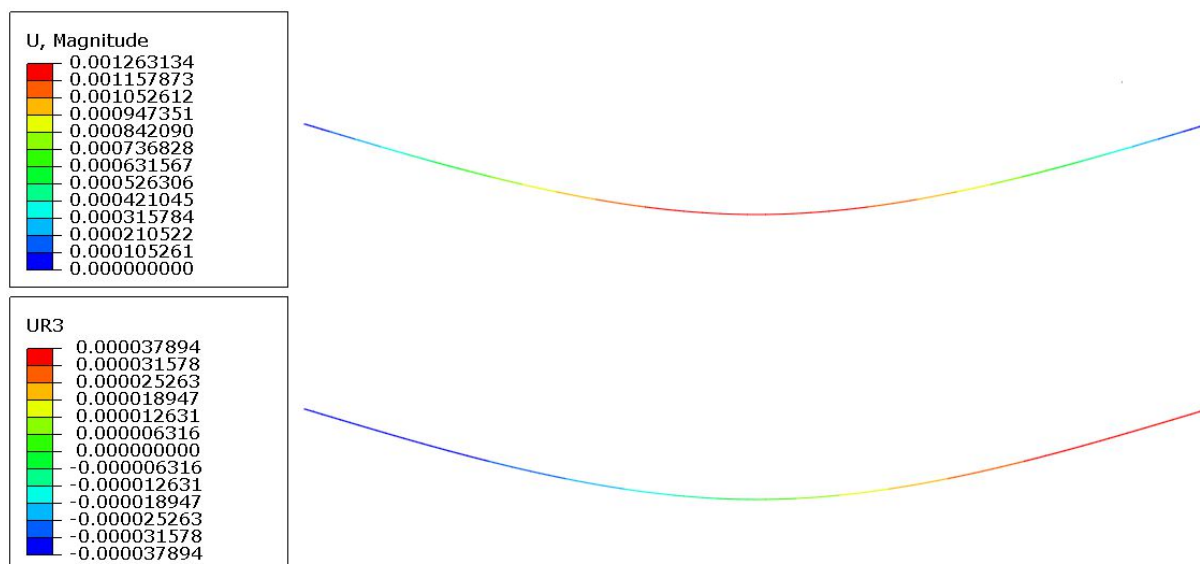
Numerička rješenja dobivena za kružni poprečni presjek prikazana su u tablici 12.

Tablica 12. Numerička rješenja za kružni poprečni presjek

$\frac{d = h}{\text{mm}}$	$\frac{h}{l}$	Euler-Bernoullijeva teorija		Timošenkova teorija	
		$w_{\max \text{EB}} / \text{mm}$	$\alpha_{\max \text{EB}} / \text{rad}$	$w_{\max \text{T}} / \text{mm}$	$\phi_{\max} / \text{rad}$
5	$\frac{1}{20}$	0,32336	$9,7009 \cdot 10^{-3}$	0,32513	$9,7009 \cdot 10^{-3}$
20	$\frac{1}{5}$	$1,2631 \cdot 10^{-3}$	$3,7894 \cdot 10^{-5}$	$1,3738 \cdot 10^{-3}$	$3,7894 \cdot 10^{-5}$
50	$\frac{1}{2}$	$3,2336 \cdot 10^{-5}$	$9,7009 \cdot 10^{-7}$	$5,0049 \cdot 10^{-5}$	$9,7009 \cdot 10^{-7}$

Usporedbom tablica, tj. usporedbom numeričkih i analitičkih rezultata može se zaključiti da se ona poklapaju, odnosno može se reći da je numerička analiza u programskom paketa Abaqus dobro izvedena.

Slikom 31 prikazan je deformirani oblik grede, te raspodjela progiba  $w$  i kuta  $\alpha$  po duljini grede  $l$  za Euler-Bernoullijevu teoriju savijanja grede kružnog poprečnog presjeka kod koje je  $h/l = 1/5$ .



Slika 31. Deformirani oblik grede

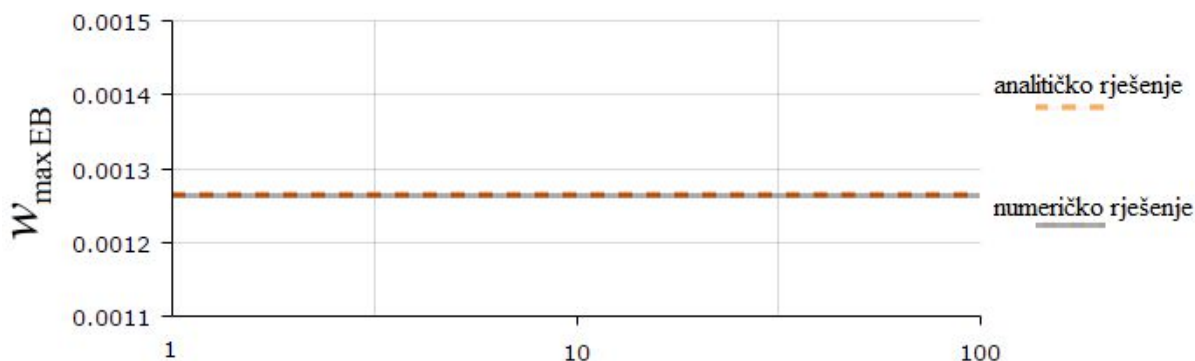
### 5.2.3 Konvergencija rješenja

Za razliku od prošlog primjera u kojemu je prikazan konvergencija rješenja za pravokutni poprečni presjek u ovom primjeru konvergencija rješenja biti će prikazana za kružni poprečni presjek, gdje je debljina grede  $h/l = 1/5$ . Konvergencija rješenja za deblje ili tanje grede biti će identična. Konvergencija rješenja za Euler-Bernoullijevu teoriju savijanja grede, tj. konvergencija rješenja B23 grednim konačnim elementima prikazana je tablicom 13.

Tablica 13. Konvergencija Euler-Bernoullijevih grednih konačnih elemenata

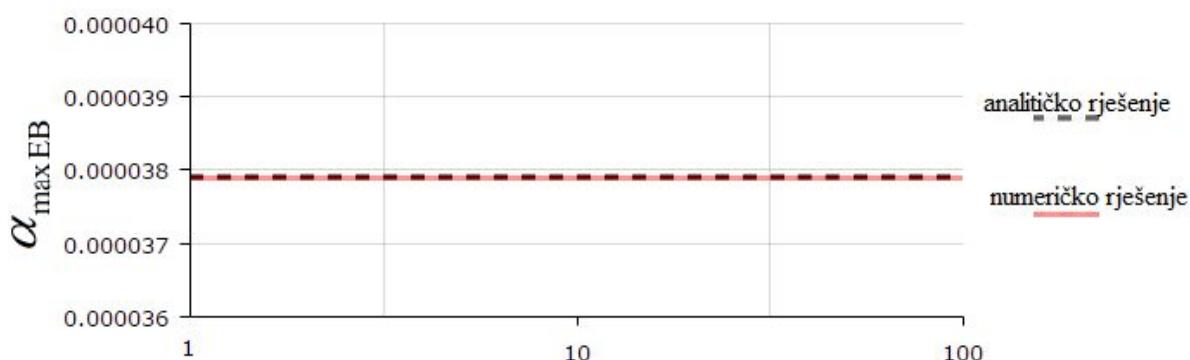
Broje elemenata B23	Euler-Bernoulli	
	$w_{\max \text{ EB}} / \text{mm}$	$\alpha_{\max \text{ EB}} / \text{rad}$
1	$1,2631 \cdot 10^{-3}$	$3,7894 \cdot 10^{-5}$
10	$1,2631 \cdot 10^{-3}$	$3,7894 \cdot 10^{-5}$
100	$1,2631 \cdot 10^{-3}$	$3,7894 \cdot 10^{-5}$

Rezultati konvergencije rješenja za Euler-Bernoullijevu teoriju savijanja grede mogu se prikazati grafički dijagramskim prikazom. Na slici 32 prikazana je konvergencija maksimalnog progiba za Euler-Bernoullijevu teoriju  $w_{\max \text{ EB}}$ .



Slika 32. Konvergencija progiba za B23 gredne konačne elemente

Konvergencija nagiba tangente na elastičnu liniju prikazana je slikom 33.



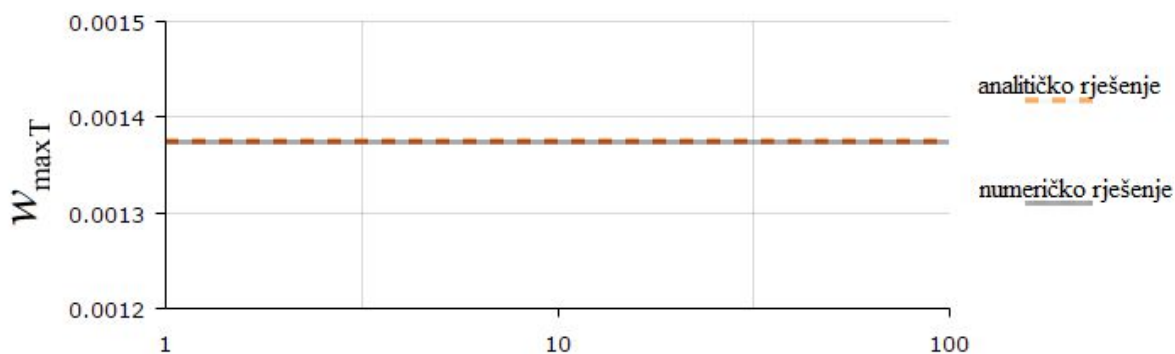
Slika 33. Konvergencija nagiba tangente za B23 konačne elemente

Konvergencija rješenja za Timošenkovu teoriju savijanja grede, odnosno konvergencija grednih konačnih elemenata B21 prikazana je tablicom 14.

Tablica 14. Konvergencija Timošenkovih grednih konačnih elemenata

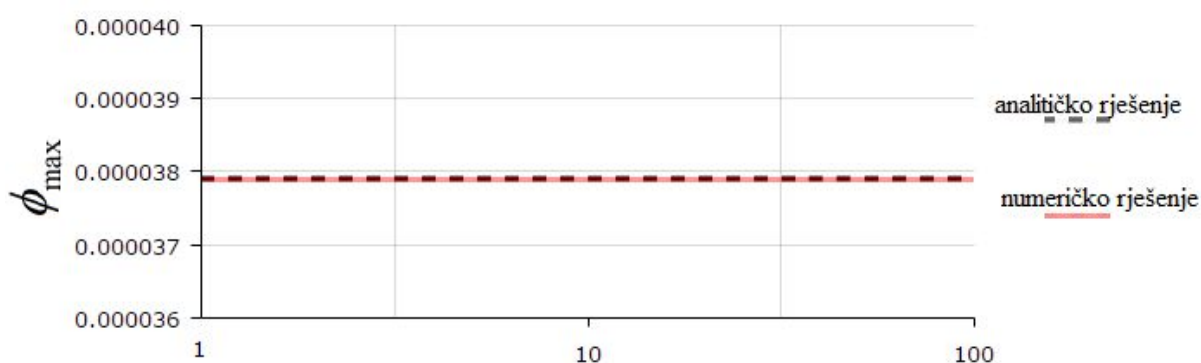
Broje elemenata B21	Timošenko	
	$w_{\max T} / \text{mm}$	$\phi_{\max} / \text{rad}$
1	$1,3738 \cdot 10^{-3}$	$3,7894 \cdot 10^{-5}$
10	$1,3738 \cdot 10^{-3}$	$3,7894 \cdot 10^{-5}$
100	$1,3738 \cdot 10^{-3}$	$3,7894 \cdot 10^{-5}$

Rezultati iz tablice 14 mogu se prikazati grafički. Na slici 34 je prikazana konvergencija maksimalnog progiba Timošenkove teorije  $w_{\max T}$ .



Slika 34. Konvergencija progiba za B21 gredne konačne elemente

Konvergencija kuta  $\phi$  prikazana je slikom 35.



Slika 35. Konvergencija nagiba za B21 konačne elemente

#### 5.2.4 Izračunavanje pogreške Euler-Bernoullijeve teorije savijanja grede

Kao i u prošlom primjeru potrebno je odrediti pogrešku koju daje Euler-Bernoullijeva teorija savijanja grede. Tablicom 15 prikazani su iznosi pogrešaka koje daje Euler-Bernoullijeva teorija savijanja za različite debljine grede pravokutnog poprečnog presjeka.

Tablica 15. Prikaz pogreške kod različitih debljina grede pravokutnog poprečnog presjeka

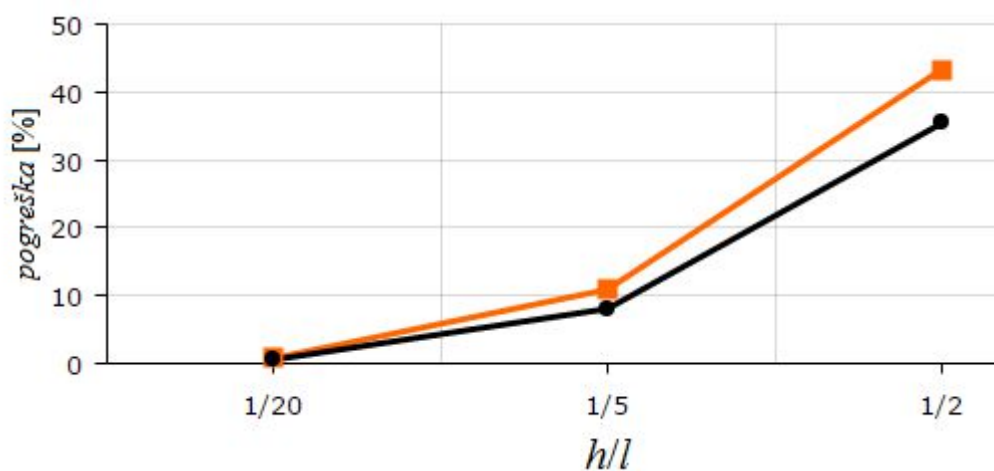
$\frac{h}{l}$	$w_{\max \text{ EB}} / \text{mm}$	$w_{\max \text{ T}} / \text{mm}$	$g / \%$
$\frac{1}{20}$	0,19048	0,19193	0,76
$\frac{1}{5}$	$7,4405 \cdot 10^{-4}$	$8,3509 \cdot 10^{-4}$	10,9
$\frac{1}{2}$	$1,9048 \cdot 10^{-5}$	$3,3613 \cdot 10^{-5}$	43,33

Analogno tablici pogreške za pravokutni poprečni presjek grede možemo i pogreške za kružni poprečni presjek prikazati tablicom (tablica 16).

Tablica 16. Prikaz pogreške kod različitih debljina grede kružnog poprečnog presjeka

$\frac{h}{l}$	$w_{\max \text{ EB}} / \text{mm}$	$w_{\max \text{ T}} / \text{mm}$	$g / \%$
$\frac{1}{20}$	0,32336	0,32513	0,54
$\frac{1}{5}$	$1,2631 \cdot 10^{-3}$	$1,3738 \cdot 10^{-3}$	8,06
$\frac{1}{2}$	$3,2336 \cdot 10^{-5}$	$5,0049 \cdot 10^{-5}$	35,39

Ako se vrijednosti iz tablica 15 i 16 usporede sa vrijednostima iz tablica 7 i 8 može se zaključiti da pogreška  $g$  neće ovisiti samo o omjeru  $h/l$  već i o načinu na koji je greda opterećena te o rubnim uvjetima grede. Rezultati iz tablica 15 i 16 mogu se prikazati dijagramski (slika 36).

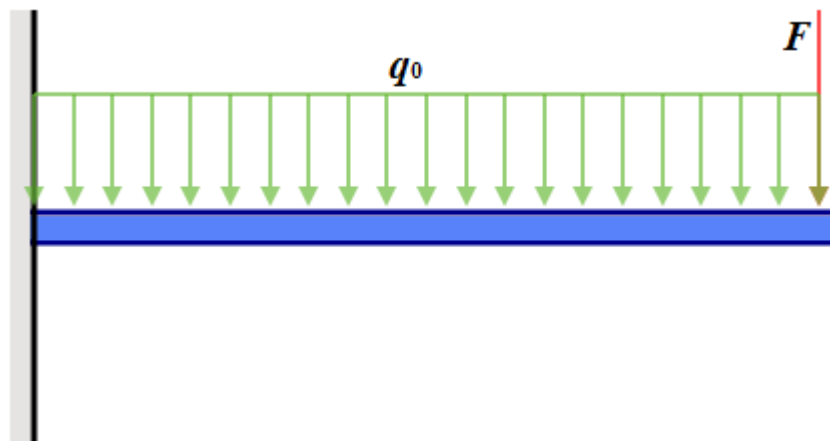


Slika 36. Prikaz pogreške u ovisnosti o obliku poprečnog presjeka

Na slici 36 pogreška za pravokutni poprečni presjek prikazana je narančastom (gornjom) linijom, dok je za kružni poprečni presjek pogreška prikazana crnom linijom.

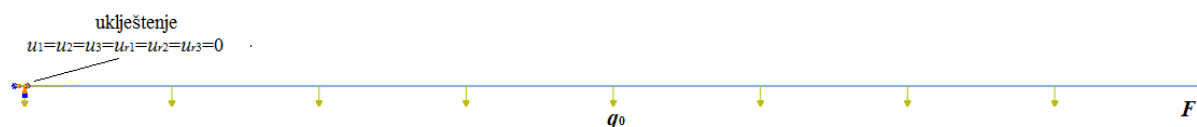
### 5.3 Konzola opterećena konstantnim kontinuiranim opterećenjem i silom na kraju

Na slici 37 prikazana je konzola opterećena kontinuiranim opterećenjem i silom na kraju. Za ovaj slučaj opterećenja konzole, maksimalni progib elastične linije  $w$  te maksimalni kutovi  $\alpha$  i  $\phi$  dobivaju se na slobodnom kraju konzole, odnosno na mjestu gdje djeluje opterećenje, sila  $F$ .



Slika 37. Konzola opterećena konstantnim kontinuiranim opterećenjem i silom na kraju

U programskom paketu Abaqus proračunski model prikazan je na slici 38.



Slika 38. Proračunski model grede

#### 5.3.1 Analitička rješenja

Svi analitički izrazi u nastavku preuzeti su iz [3]. Izrazi koji slijedi izvedeni su uz pretpostavku da vrijedi  $F = q_0 l$ . Maksimalni progib elastične linije Euler-Bernoullijeve metode  $w_{\max EB}$  izračunava se prema izrazu

$$w_{\max EB} = \frac{11}{24} \frac{q_0 l^4}{EI_y}, \quad (5.12)$$

dok se maksimalni nagib tangente na elastičnu liniju  $\alpha_{\max EB}$  izračunava izrazom

$$\alpha_{\max EB} = -\frac{2}{3} \frac{q_0 l^3}{EI_y}. \quad (5.13)$$

Kod Timošenkove teorije savijanja grede maksimalni progib elastične linije  $w_{\max T}$  iznosi

$$w_{\max T} = \frac{11}{24} \frac{q_0 l^4}{EI_y} + \frac{3}{2} \frac{q_0 l^2}{kAG} = w_{\max EB} + \frac{3}{2} \frac{q_0 l^2}{kAG}, \quad (5.14)$$

a kut  $\phi_{\max}$  pod kojim se nalaze deformirani presjeci jednak je maksimalnom nagibu tangente na elastičnu liniju Euler-Bernoullijeve metode  $\alpha_{\max EB}$

$$\phi_{\max} = -\frac{2}{3} \frac{q_0 l^3}{EI_y} = \alpha_{\max EB} \quad (5.15)$$

Za pravokutni i kružni poprečni presjek aksijalni momenti tromosti izračunavaju se prema izrazima (5.5) i (5.6).

Ulazni podaci iz kojih se izračunavaju analitička rješenja su identična prošlom primjeru, tj  $F = 100 \text{ N}$ ,  $l = 100 \text{ mm}$ ,  $E = 210000 \text{ N/mm}^2$  i  $\nu = 0,3$ , uz dodatak  $q_0 = 1 \text{ N/mm}$ . Također, kao i u prošlim primjerima, visina poprečnog presjeka  $h$  pravokutnika jednaka je debljini poprečnog presjeka  $b$ . Iz navedenih ulaznih podataka i poznatog korekcijskog faktora smicanja  $k = 0,85$  za pravokutni poprečni presjek dobivaju analitička rješenja prikazana u tablici 17.

**Tablica 17. Analitička rješenja za pravokutne poprečne presjeke grede**

$\frac{h=b}{\text{mm}}$	$\frac{h}{l}$	Euler-Bernoullijeva teorija		Timošenkova teorija	
		$w_{\max EB} / \text{mm}$	$\alpha_{\max EB} / \text{rad}$	$w_{\max T} / \text{mm}$	$\phi_{\max} / \text{rad}$
5	$\frac{1}{20}$	4,1905	-0,060952	4,1992	-0,060952
20	$\frac{1}{5}$	0,016369	$-2,381 \cdot 10^{-4}$	0,016915	$-2,381 \cdot 10^{-4}$
50	$\frac{1}{2}$	$4,1905 \cdot 10^{-4}$	$-6,0952 \cdot 10^{-6}$	$5,0644 \cdot 10^{-4}$	$-6,0952 \cdot 10^{-6}$

Analognu tablicu možemo dobiti i za kružni poprečni presjek kod kojega je korekcijski faktor smicanja  $k = 0,89$ . Svi ostali ulazni podaci osim već navedenog korekcijskog faktora smicanja ostaju isti. Isto kao i u prethodnim primjerima visina poprečnog presjeka  $h$  jednaka je promjeru  $d$  kružnog poprečnog presjeka. Analitička rješenja za kružni poprečni presjek prikazana su tablicom 18.



Tablica 18. Analitička rješenja za kružne poprečne presjeke grede

$\frac{d = h}{\text{mm}}$	$\frac{h}{l}$	Euler-Bernoullijeva teorija		Timošenkova teorija	
		$w_{\max \text{ EB}} / \text{mm}$	$\alpha_{\max \text{ EB}} / \text{rad}$	$w_{\max \text{ T}} / \text{mm}$	$\phi_{\max} / \text{rad}$
5	$\frac{1}{20}$	7,114	-0,10348	7,1352	-0,10348
20	$\frac{1}{5}$	0,027789	$-4,042 \cdot 10^{-4}$	0,029117	$-4,042 \cdot 10^{-4}$
50	$\frac{1}{2}$	$7,114 \cdot 10^{-4}$	$-1,0348 \cdot 10^{-5}$	$9,2394 \cdot 10^{-4}$	$-1,0348 \cdot 10^{-5}$

### 5.3.2 Numerička rješenja

Isto kao i u prošlim primjerima za Euler-Bernoullijevu teoriju savijanja grede korišteni su B23 gredni konačni elementi, dok su za Timošenkovu teoriju savijanja grede korišteni B21 gredni konačni elementi. Numerički rezultati za pravokutni poprečni presjek prikazani su tablicom 19.

Tablica 19. Numerička rješenja za pravokutni poprečni presjek

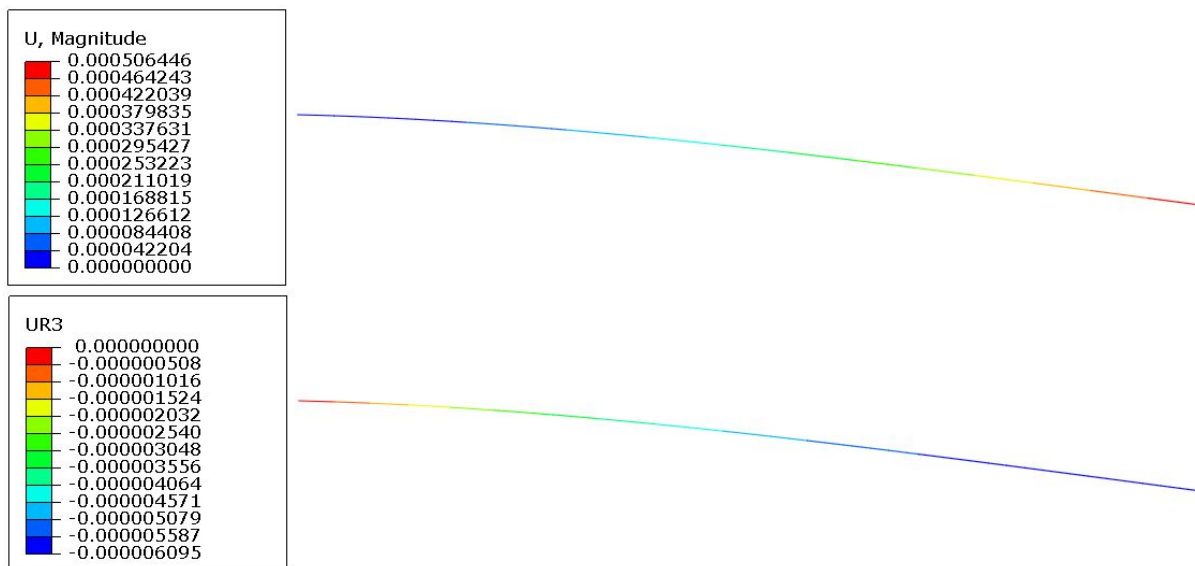
$\frac{h = b}{\text{mm}}$	$\frac{h}{l}$	Euler-Bernoullijeva teorija		Timošenkova teorija	
		$w_{\max \text{ EB}} / \text{mm}$	$\alpha_{\max \text{ EB}} / \text{rad}$	$w_{\max \text{ T}} / \text{mm}$	$\phi_{\max} / \text{rad}$
5	$\frac{1}{20}$	4,1905	-0,060952	4,1992	-0,060952
20	$\frac{1}{5}$	0,016369	$-2,381 \cdot 10^{-4}$	0,016915	$-2,381 \cdot 10^{-4}$
50	$\frac{1}{2}$	$4,1905 \cdot 10^{-4}$	$-6,0952 \cdot 10^{-6}$	$5,0644 \cdot 10^{-4}$	$-6,0952 \cdot 10^{-6}$

Numerička rješenja dobivena za kružni poprečni presjek prikazani su tablicom 20.

Tablica 20. Numerička rješenja za kružni poprečni presjek

$\frac{d = h}{\text{mm}}$	$\frac{h}{l}$	Euler-Bernoullijeva teorija		Timošenkova teorija	
		$w_{\max \text{ EB}} / \text{mm}$	$\alpha_{\max \text{ EB}} / \text{rad}$	$w_{\max \text{ T}} / \text{mm}$	$\phi_{\max} / \text{rad}$
5	$\frac{1}{20}$	7,114	-0,10348	7,1246	-0,10348
20	$\frac{1}{5}$	0,027789	$-4,042 \cdot 10^{-4}$	0,028453	$-4,042 \cdot 10^{-4}$
50	$\frac{1}{2}$	$7,114 \cdot 10^{-4}$	$-1,0348 \cdot 10^{-5}$	$8,1761 \cdot 10^{-4}$	$-1,0348 \cdot 10^{-5}$

Na slici 39 prikazan je deformirani oblik grede u  $x$ - $z$  ravnini prema Timošenkovoj teoriji savijanja grede za debelu pravokutnu gredu, tj. gredu čiji je omjer  $h/l = 1/2$ . Na slici 39 prikazani su progib  $w_T$  i kut  $\phi$  po duljini grede.



Slika 39. Deformirani oblik grede

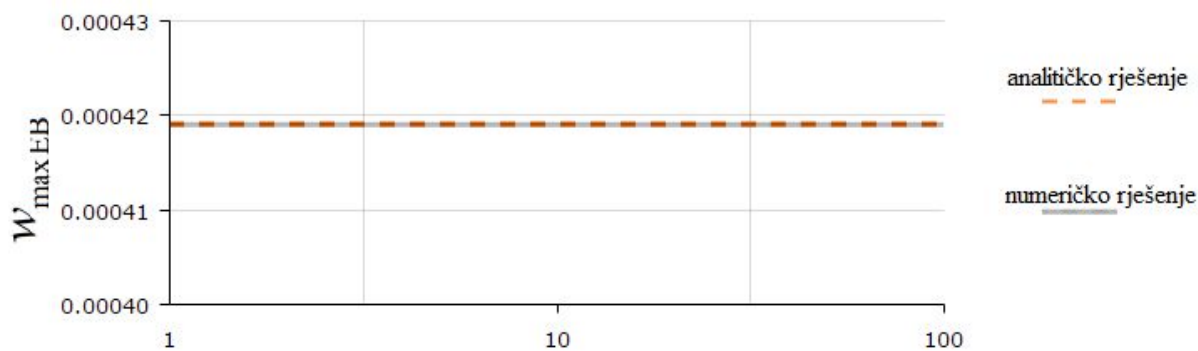
### 5.3.3 Konvergencija rješenja

U ovom primjeru prikazana je konvergencija rješenja za debelu gredu, tj. za gredu kod koje je omjer visine poprečnog presjeka  $h$  i duljine grede  $l$  jednak  $h/l = 1/2$ . Greda čija se konvergencija razmatra ima pravokutni poprečni presjek. Konvergencija rješenja za Euler-Bernoullijevu teoriju savijanja grede, odnosno konvergencija B23 grednim konačnim elementima prikazana je tablicom 21.

Tablica 21. Konvergencija Euler-Bernoullijevih grednih konačnih elemenata

Broje elemenata B23	Euler-Bernoulli	
	$w_{\max \text{ EB}} / \text{mm}$	$\alpha_{\max \text{ EB}} / \text{rad}$
1	$4,1905 \cdot 10^{-4}$	$-6,0952 \cdot 10^{-6}$
10	$4,1905 \cdot 10^{-4}$	$-6,0952 \cdot 10^{-6}$
100	$4,1905 \cdot 10^{-4}$	$-6,0952 \cdot 10^{-6}$

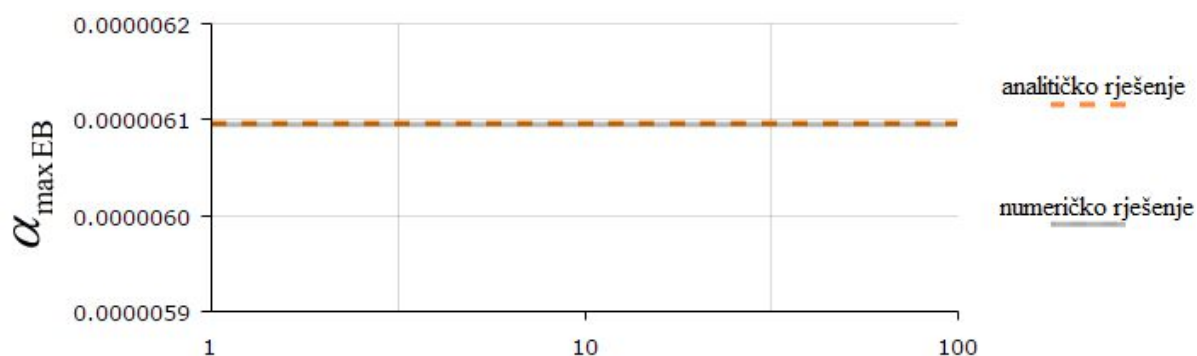
Rezultati iz tablice 21 prikazani su dijagramski. Na slici 40 prikazana je konvergencija maksimalnog progiba Euler-Bernoullijeve teorije savijanja grede  $w_{\max \text{ EB}}$ .



Slika 40. Konvergencija progiba za B23 gredne konačne elemente

Slikom 41 prikazana je konvergencija maksimalnog nagiba tangente na elastičnu liniju

$\alpha_{\max EB}$ .



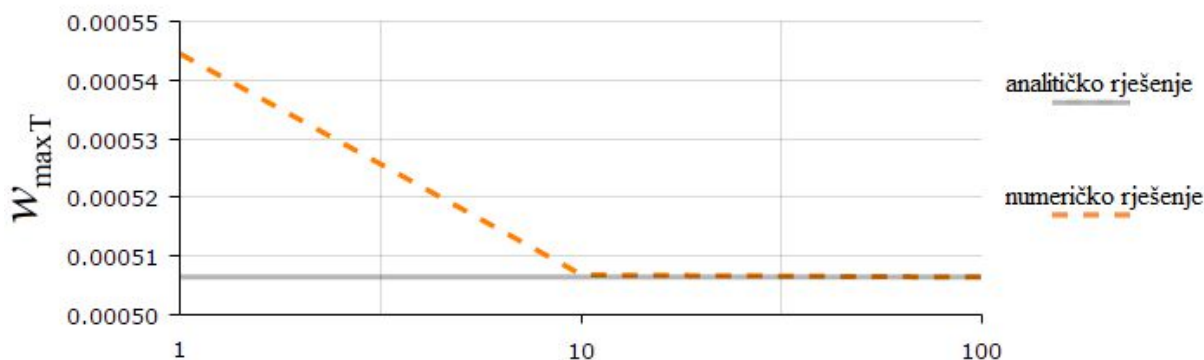
Slika 41. Konvergencija nagiba tangente za B23 konačne elemente

Konvergencija rješenja za Timošenkovu teoriju savijanja grede, odnosno konvergencija B21 grednim konačnim elementima prikazana je tablicom 22.

Tablica 22. Konvergencija Timošenkovih grednih konačnih elemenata

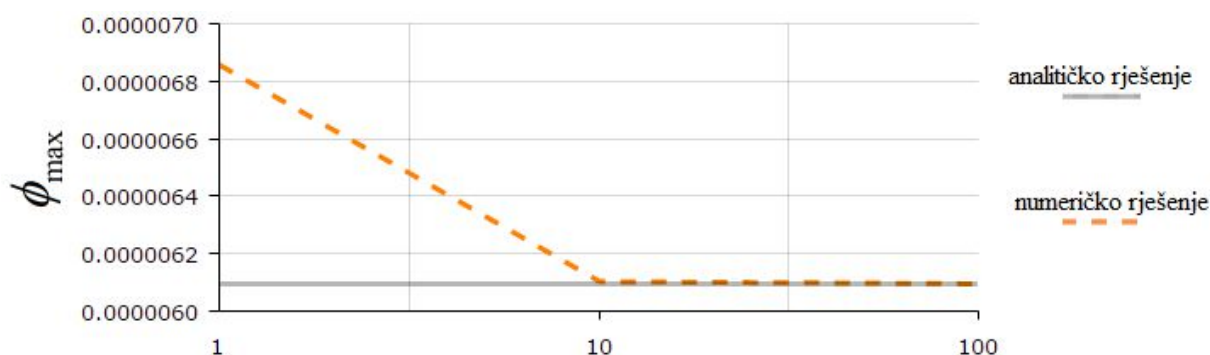
Broje elemenata	Timošenko	
	$w_{\max T} / \text{mm}$	$\phi_{\max} / \text{rad}$
B21		
1	$5,4454 \cdot 10^{-4}$	$-6,857 \cdot 10^{-6}$
10	$5,0682 \cdot 10^{-4}$	$-6,103 \cdot 10^{-6}$
100	$5,0644 \cdot 10^{-4}$	$-6,0952 \cdot 10^{-6}$

Slikom 42 prikazana je konvergencija maksimalnog progiba Timošenkove teorije savijanja grede.



Slika 42. Konvergencija progiba za B21 gredne konačne elemente

Konvergencija kuta  $\phi$  prikazana je slikom 43.



Slika 43. Konvergencija nagiba za B21 konačne elemente

Iz prethodnih dijagrama konvergencije može se zaključiti da će Euler-Bernoullijevi B23 konačni elementi brže konvergirati od Timošenkovih B21 konačnih elemenata uslijed djelovanja konstantnog kontinuiranog opterećenja. Razlog tome je što se polje pomaka B23 konačnih elemenata opisuje interpolacijskim polinomom trećeg reda, dok se kod B21 konačnih elemenata polje pomaka opisuje interpolacijskim polinomom prvoga reda.

#### 5.3.4 Izračunavanje pogreške Euler-Bernoullijeve teorije savijanja grede

Pogreška koju daje Euler-Bernoullijeva teorija savijanja grede u odnosu na Timošenkovu teoriju prikazana je tablicama 23 i 24. Pogreška za pravokutni poprečni presjek prikazana je tablicom 23.

Tablica 23. Prikaz pogreške kod različitih debljina grede pravokutnog poprečnog presjeka

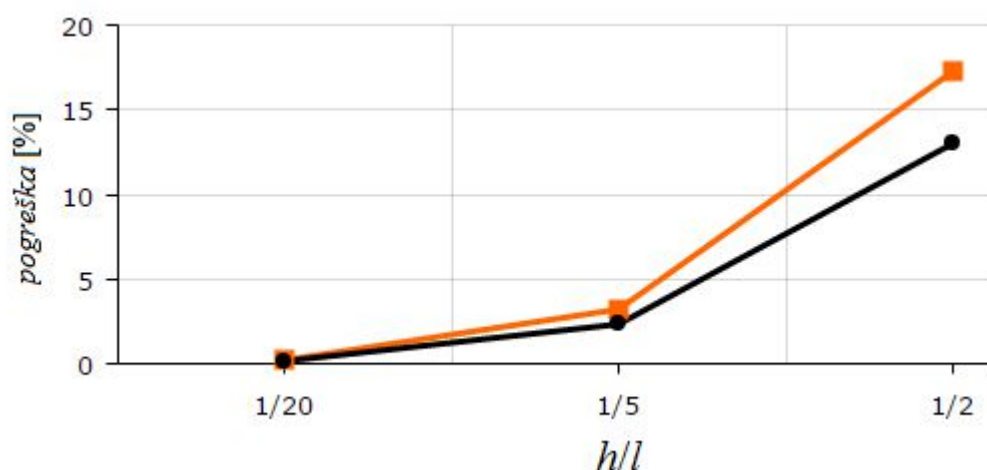
$\frac{h}{l}$	$w_{\max \text{ EB}} / \text{mm}$	$w_{\max \text{ T}} / \text{mm}$	$g / \%$
$\frac{1}{20}$	4,1905	4,1992	0,21
$\frac{1}{5}$	0,016369	0,016915	3,21
$\frac{1}{2}$	$4,1905 \cdot 10^{-4}$	$5,0644 \cdot 10^{-4}$	17,26

Pogreška za kružni poprečni presjek prikazana je tablicom 24.

Tablica 24. Prikaz pogreške kod različitih debljina grede kružnog poprečnog presjeka

$\frac{h}{l}$	$w_{\max \text{ EB}} / \text{mm}$	$w_{\max \text{ T}} / \text{mm}$	$g / \%$
$\frac{1}{20}$	7,114	7,1246	0,15
$\frac{1}{5}$	0,027789	0,028453	2,33
$\frac{1}{2}$	$7,114 \cdot 10^{-4}$	$8,1761 \cdot 10^{-4}$	13

Rezultati iz tablica 23 i 24 mogu se prikazati dijagramski (slika 44).



Slika 44. Prikaz pogreške u ovisnosti o obliku poprečnog presjeka

Na slici 44 pogreška za pravokutni poprečni presjek prikazana je narančastom (gornjom) linijom, dok je za kružni poprečni presjek pogreška prikazana crnom linijom.

## 6 ZAKLJUČAK

Provedenim numeričkim usporedbama utvrđeno je da se Euler-Bernoullijeva teorija savijanja grede može koristiti samo za proračun tankih greda, tj. za proračun greda kod kojih se može zanemariti utjecaj smičnog naprezanja. Međutim, sa povećanjem debljine grede povećava se i pogreška koju Euler-Bernoullijeva teorija savijanja grede daje u odnosu na Timoškovu teoriju savijanja grede koja uzima u obzir i smično naprezanje. Granica do koje je primjenjiva Euler-Bernoullijeva teorija savijanja grede ovisiti će o načinu na koji je greda učvršćena i opterećena, te o obliku poprečnog presjeka grede. Iz prethodnog proizlazi da nije moguće odrediti granični omjer visine poprečnog presjeka i duljine grede  $h/l$  za koji će Euler-Bernoullijeva teorija savijanja grede davati greške u dozvoljenim granicama za različito opterećene grede. Iz prikazanih primjera savijanja grede može se zaključiti da kod iste visine poprečnog presjeka, Euler-Bernoullijeva teorija savijanja grede daje manju pogrešku za kružni poprečni presjek u odnosu na pravokutni poprečni presjek.

Timoškova teorija savijanja grede svakako je preciznija za proračun debljih greda od Euler-Bernoullijeve teorije savijanja grede. Međutim, glavni nedostatak Timoškove teorije savijanja grede je računanje sa korekcijskim faktorom smicanja  $k$  koji nije jednoznačno definiran.

**LITERATURA**

- [1] Alfirević, I.: Nauka o čvrstoći I, Tehnička knjiga, Zagreb, 1995.
- [2] <https://johnwood1946.wordpress.com/2011/07/18/historical-development-of-the-beam-bending-equation-m-equals-fs/>
- [3] Graene, J. K., Jorn, S. H., Joaquim, M.: A Timoshenko beam theory with pressure corrections for layered orthotropic beams, International Journal of Solids and Structures, Volume 48, stranice 2373-2382, 2011.
- [4] Sorić, J.: Metoda konačnih elemenata, Golden marketing, Tehnička knjiga, Zagreb, 2004.
- [5] ABAQUS, Abaqus Documentation: Version 6.13. 2014, Dassault Systemes: 3DS Paris Campus, 10 rue Marcel Dassault, 78140 Vélizy-Villacoublay, FRANCE.
- [6] ABAQUS, Abaqus Software: Version 6.13. 2014, Dassault Systemes: 3DS Paris Campus, 10 rue Marcel Dassault, 78140 Vélizy-Villacoublay, FRANCE.

## **PRILOZI**

- I. CD-R disc